Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O Teorema de Arzelá

José Renato Fialho Rodrigues

Belo Horizonte - MG

1994

José Renato Fialho Rodrigues

O Teorema de Arzelá

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção de grau de Especialista em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Eliana Farias e Soares

Belo Horizonte - MG
1994

Agradecimentos

A Deus.

A minha mãe Larcy Fialho de Jesus pelo apoio incondicionável .

A minha orientadora Prof^{a}. Dr^{a}. Eliana Farias e Soares a quem tenho uma imensa admiração.

Resumo

Com a utilização de dois lemas é apresentado, neste trabalho, uma demonstração elementar do Teorema de Arzelá. Para embasar esse processo, foi desenvolvido, preliminarmente, o conceito de Congruência Pontual (Simples) e Congruência Uniforme de sequências de funções, apresentando definições e resultados referentes a continuidade, derivabilidade e integrabilidade de tais sequências.

Palavras chave: Funções, Limites, Sequências, Convergência Simples, Convergência Uniforme.

Abstract

With the use of two lemmas is show this working, a basic demosntration of Arzelá Theorem. To support this process was developed, initially, the concept of Congruence Punctual (Simple) and Uniform Matching Functions Sequences, with definitions and results of continuity, differentiability and integrability of such sequences.

Lista de Figuras

1.1 Convergência Simples 10

1.2 Convergência Uniforme 11

1.3 Sequência de Funções $f_n(x) = x^n$ 12

1.4 Sequência de Funções $f_n(x) = \frac{2x+n}{x+n}$ 12

1.5 Intervalo contendo número da forma $x = \frac{m\pi}{p}$ 21

Sumário

Introdução **8**

1 Preliminares **9**

1.1 Convergência Pontual e Uniforme 9

1.2 Continuidade 13

1.3 Integrabilidade 14

1.4 Derivabilidade 19

2 O Teorema de Arzelá **22**

Referências **33**

Introdução

O Teorema de Arzelá pode ser considerado, segundo Alencar (1988), um simples corolário do Teorema da Convergência Dominada de Lebesque. Entretanto, podemos afirmar que ele é suficiente para muitas aplicações na análise real e na análise funcional em que são utilizados o Teorema de Lebesque.

Em síntese o Teorema de Arzelá determina sob quais condições uma sequência limitada de funções admite uma subsequência convergente. A primeira demonstração desse teorema ocorreu no ano de 1885. Desde então, surgiram diversas demonstrações não muito elementares.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração elementar do Teorema de Arzelá.

Apresentaremos no primeiro capítulo, os conceitos e definições que darão suporte à demonstração do Teorema de Arzelá, exemplificando-os para um melhor entendimento.

Já no segundo e último capítulo enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Arzelá.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar conceitos e definições os quais contribuirão para a demonstração do Teorema de Arzelá.

1.1 Convergência Pontual e Uniforme

Daremos, a seguir, as definições de convergência pontual (simples) e convergência uniforme.

Definição 1 : Uma sequência de funções $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dado qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se obter, para cada $x \in X$, um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, o qual depende de ε e de x, tal que $n > n_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Exemplo 1 : Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{x}{n}$. A sequência (f_n) converge simplesmente em toda a reta, para a função identicamente nula $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos que encontrar um número natural n_0, o qual depende de ε e de x, tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, isto é, $n > n_0 \Rightarrow |\frac{x}{n} - 0| < \varepsilon$.

Donde, $|\frac{x}{n}| < \varepsilon \Rightarrow \frac{|x|}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{|x|}{\varepsilon}$.

Portanto, seja $n_0 > \frac{|x|}{\varepsilon}$ o número procurado.

Graficamente, conforme abaixo (Figura 1.1), é fácil visualizar a convergência.

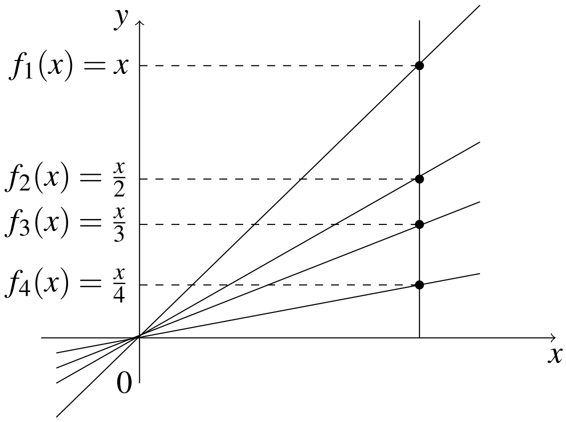

Figura 1.1: Convergência Simples

Definição 2 : Uma sequência de funções $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, seja qual for $x \in X$.

Dessa forma, dizer que $f_n \to f$ uniformemente em x significa que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o gráfico de f_n para todo $n > n_0$, está contido na faixa de raio ε em torno do gráfico de f.

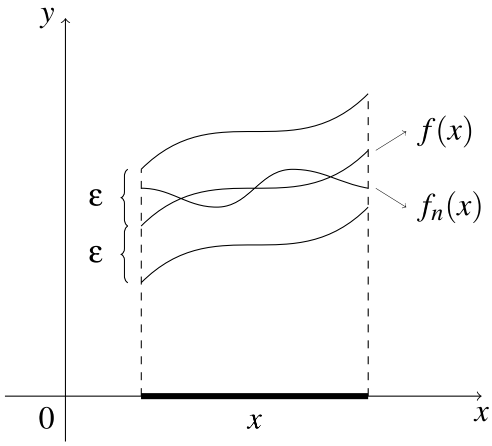

Figura 1.2: Convergência Uniforme

Exemplo 2 : No Exemplo 1 fica fácil ser ver que nenhuma faixa de raio ε em torno do eixo das abcissas (gráfico da função identicamente nula - Figura 1.1) pode conter o gráfico de uma função $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Logo, a sequência (f_n) não converge uniformemente para zero em $\mathbb{R}$. Entretanto, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado, digamos com $|x| \leq c$ para todo $x \in X$, então $f_n \to 0$ uniformemente em x. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 > \frac{c}{\varepsilon}$, pois $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| = \frac{|x|}{n} =< \frac{c}{n_0} < \varepsilon$.

Exemplo 3 : A sequência de funções contínuas $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, converge simplesmente para a função descontínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$ e $f(x) = 1$.

Temos que a convergência é uniforme em todo intervalo da forma $[0, 1-\delta]$, $0 < \delta < 1$, mas não é uniforme em $[0,1]$. De fato, escrevendo $a = 1-\delta$, temos $0 < a < 1$, logo $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a^n - 0| < \varepsilon$, ou seja, $a^n < \varepsilon$. Então, $n > n_0 \Rightarrow 0 < f_n(x) \leq a^n < \varepsilon$ para todo $x \in [0,a]$. Portanto $f_n \to 0$ uniformemente no intervalo $[0, 1-\delta]$. Por outro lado, tamanho $\varepsilon = \frac{1}{2}$, afirmamos que, seja qual for $n_0 \in \mathbb{N}$, existem pontos $x \in [0,1)$ tais que $|f_{n_0}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}$. Basta observar que $\lim\limits_{x\to\bar{1}} x^{n_0} = 1$. Logo existe $\delta = 0$ tal que $1 - \delta < x < 1 \Rightarrow x^{n_0} > \frac{1}{2}$. Isso mostra que f_n não converge uniformemente para f no intervalo $[0,1]$.

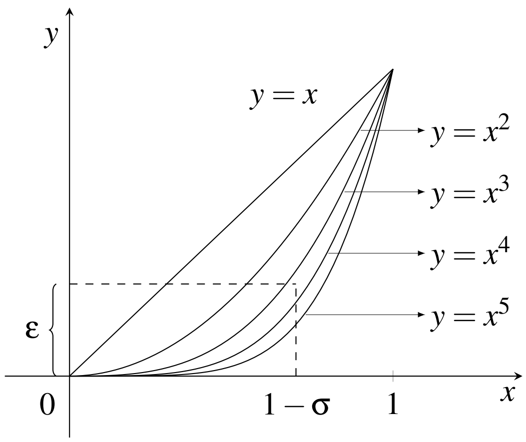

Figura 1.3: Sequência de Funções $f_n(x) = x^n$

Exemplo 4 : Dada a sequência de funções $f_n : (0,b) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{2x+n}{x+n}$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2x+n}{x+n} = 1$.

Logo, a função limite f será $f(x) = 1$.

Essa convergência é uniforme, pois $|f_n(x) - f(x)| = |\frac{2x+n}{x+n} - 1| = |\frac{2x+n-x-n}{x+n}| = |\frac{x}{x+n}| =$
$= \frac{x}{x+n} < \frac{b}{n}$.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, para termos $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, basta tomarmos $\frac{b}{n} < \varepsilon$, ou seja, $n > \frac{b}{\varepsilon}$ (independente de x).

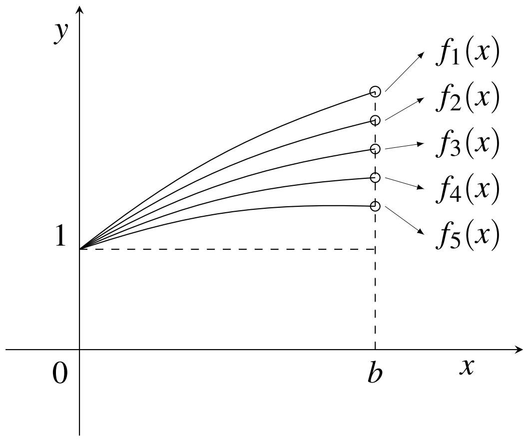

Figura 1.4: Sequência de Funções $f_n(x) = \frac{2x+n}{x+n}$

1.2 Continuidade

De acordo com o Exemplo 3, podemos afirmar que a convergência pontual (simples) não preserva a continuidade, isto é, o limite pontual de uma sequência de funções contínuas pode não ser contínua.

Entretanto, a continuidade é preservada pela convergência uniforme, conforme nos mostra o resultado do próximo teorema o qual demonstraremos em seguida.

Teorema 1 : Se uma sequência de funções $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$, então f é contínua no ponto $\underline{a}$.

Demonstração : Queremos provar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Do fato da sequência de funções f_n convergir uniformemente, temos:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in X$.

Fixemos um número natural $n > n_0$.

Como f_n é contínua no ponto $\underline{a}$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x-a| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Logo, se $x \in X$ e $|x-a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) +$
$+ f_n(a) - f(a)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Portanto, f é contínua no ponto $\underline{a}$. $\square$

Exemplo 5 : No exemplo 4, verificamos que a sequência de funções contínuas $f_n(x) = \frac{2x+n}{x+n}$, converge uniformemente em $(0,b)$ para a função $f : (0,b) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1$, a qual é contínua.

Exemplo 6 : Como vimos no exemplo 3, a sequência de funções contínuas $f(x) = x^n$ não pode convergir uniformemente em $[0,1]$, pois converge simplesmente para a função descontínua $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=0$ se $0\leq x<1$ e $f(1)=1$.

1.3 Integrabilidade

Para analisarmos a questão da integrabilidade, recordaremos a definição da Integral de Riemann, por meio das somas de Riemann.

Consideremos $P: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ uma partição do intervalo $[a,b]$ e pontos $\bar{x}_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,n$ (pontos intermediários). Dada uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a soma de Riemann, indicada por $S(f,P)$, relativamente à partição P e aos pontos $\bar{x}_i$, é a soma $S(f,P)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ em que $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

Na notação acima está implícita a dependência de $S(f,P)$ relativamente à escolha dos pontos $\bar{x}_i$. Chamamos de norma da partição P os número $\|P\|=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}$.

Definição 3 : Uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada se diz integrável a Riemann se existir um número I com a seguinte propriedade: dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $|S(f,P)-I|<\varepsilon$ para toda partição P de $[a,b]$ com norma $\|P\|<\delta$ e para qualquer escolha dos pontos intermediários $\bar{x}_i$. No caso em que o número I exista, ele será indicado por $\int_a^b f(x)dx$.

Podemos observar que a Definição 3 é equivalente à definição da Integral de Riemann por somas inferiores e somas superiores.

De posse da definição da Integral de Riemann, podemos analisar o resultado dado pelo teorema a seguir.

Teorema 2 : Se a sequência de funções integráveis $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ converge uniformemente para $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, então f é integrável e $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$. Ou seja, $\int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n$ se a convergência é uniforme.

Demonstração : Seja $I_n=\int_a^b f_n(x)dx$.

Primeiro vamos mostrar que a sequência de números reais (I_n) é uma sequência de Cauchy.

Seja $\varepsilon > 0$. Devemos mostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_0$ se tem $|I_n - I_m| < \varepsilon$.

Mas sabemos que dado $\varepsilon' > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $|f_n(x) - - f(x)| < \varepsilon'$ para todo $x \in [a,b]$, pois $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Assim, se $n, m > n_0$, $|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon'$.

Portanto, se $m, n > n_0$, então $|I_n - I_m| = |\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f_m(x)dx| = |\int_a^b (f_n(x) - - f_m(x))dx| \leq \int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|dx \leq \int_a^b 2\varepsilon' dx = 2\varepsilon'(b-a)$.

Logo, se queremos $|I_n - I_m| < \varepsilon$, então basta tomar $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Como toda sequência de Cauchy de números reais é convergente, temos que existe $\lim_{n\to\infty} I_n = I$. Vamos mostrar que f é integrável e que $\int_a^b f(x)dx = I$, mostrando que I satisfaz as condições da Definição 3.

Seja $\varepsilon > 0$. Devemos achar $\delta > 0$ tal que se P é uma partição de $[a,b]$ com norma $\|P\| < \delta$, então $|S(f,P) - I| < \varepsilon$.

Temos que:

$|S(f,P) - I| = |S(f,P) - S(f_n,P) + S(f_n,P) - I_n + I_n - I| \leq |S(f,P) - S(f_n,P)| + + |S(f_n,P) - I_n| = |I_n - I|$.

Se conseguirmos fazer cada uma dessas parcelas menor que $\frac{\varepsilon}{3}$, teremos o que queremos.

Vejamos a primeira parcela.

$|S(f,P) - S(f_n,P)| = |\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})| = |\sum_{i=1}^{n} (f(\bar{x}_i) - - f_n(\bar{x}_i))(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\bar{x}_i) - f_n(\bar{x}_i)||x_i - x_{i-1}|$.

No entanto, existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ para todo $x \in [a,b]$, pois $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Escolhemos então $n > n_0$, temos:

$\sum\limits_{i=1}^{n} |f(\bar{x}_i) - f_n(\bar{x}_i)||x_i - x_{i-1}| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) =$
$= \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{3}$.

Analisaremos agora, a segunda parcela.

Fixado um n, como f_n é integrável, por definição, temos que existe $\delta > 0$ tal que se $\|P\| < \delta$, então $|S(f_n, P) - I_n| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Finalmente, verificaremos a terceira parcela.

Como já sabemos $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$, então existe n_1 tal que se $n > n_1$ implica $|I_n - I| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Portanto, seja $n > max\{n_0, n_1\}$ então $|S(f,P) - S(f_n - P)| + |S(f_n, P) - I_n| +$
$+ |I_n - I| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Ou seja, $|S(f,P) - I| < \varepsilon$.

Portanto, isso mostra que f é integrável e que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, como queríamos demonstrar. □

Exemplo 7 : Seja $f_n : (0,b) \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = \frac{2x+n}{x+n}$.

Vimos no Exemplo 4 que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 1$ para todo $x \in (0,b)$.

Como a convergência de f_n é uniforme, pelo Teorema 2, temos $\int_a^0 f(x)dx =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^b f_n(x)dx$, ou seja, $\int_0^b 1dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^b \frac{2x+n}{x+n}dx$.

De fato, $\int_0^b 1dx = b$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^b \frac{2x+n}{x+n}dx = \lim\limits_{n\to\infty} [2b - ln(\frac{n+b}{n})^n] = \lim\limits_{n\to\infty} \{2b - ln[(1+$
$+ \frac{b}{n})^{n/b}]^b\} = \lim\limits_{n\to\infty} (2b - lne^b) = 2b - b = b$.

Por outro lado, se uma sequência de funções integráveis $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, pode ocorrer que f não seja integrável.

Exemplo 8 : Seja $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ uma enumeração dos números racionais de $[a,b]$ e f_n a função que assume o valor 1 nos pontos $r_1, \ldots, r_n$ e zero nos demais pontos de $[a,b]$, ou seja,

$f_n(x) = 1$ se $x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ e

$f_n(x) = 0$ se $x \in [a,b] - \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$.

Portanto, podemos escrever

$f_1(x) = 1$ se $x = r_1$ e $f_1(x) = 0$ se $x \in [a,b] - \{r_1\}$.

$f_2(x) = 1$ se $x \in \{r_1, r_2\}$ e $f_2(x) = 0$ se $x \in [a,b] - \{r_1, r_2\}$.

$\vdots$

$f_n(x) = 1$ se $x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ e $f_n(x) = 0$ se $x \in [a,b] - \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$.

Seja, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a função tal que $f(x) = 1$ se x é racional e $f(x) = 0$ se x é irracional.

Então, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

O que pode ser verificado, facilmente, analisando dois casos:

1^o **caso** : $x \notin \mathbb{Q}$

Por definição, temos que $f_n(x) = 0$ para todo n.

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

2^o **caso** : $x \in \mathbb{Q}$

Seja $x = r_n$, então temos: $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0, \ldots, f_{n-1}(x) = 0$, $f_n(x) = 1$, $f_{n+1}(x) = 1 \ldots$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1 = f(x)$, pois para valores maiores ou iguais a n, os termos f_n tornam-se iguais a 1 em x.

Finalmente temos que cada f_n é integrável.

De fato, $\int_a^b f_n(x)dx = 0$, pois dado $\varepsilon > 0$ se P é uma partição tal que $\|P\| < \delta$, $\delta > 0$, $0 \leq S(f_n, P) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} f_n(\bar{x_i})(x_{i+1} - x_i) \leq n\delta 1$.

Logo, se queremos $|S(f_n, P) - I| < \varepsilon$, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$.

Porém, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = 1$ se x é racional, não é integrável.

De fato, pois dada qualquer partição P de $[a,b]$, temos que todos os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de P contém números racionais e irracionais.

Portanto, se $\bar{x_i} \in \mathbb{Q}$ temos:

$S(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(\bar{x_i})(x_{i+1}, x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}, x_i) = b - a$

Se $\bar{x_i} \notin \mathbb{Q}$ temos:

$S(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(\bar{x_i})(x_{i+1}, x_i) = 0$.

Mesmo quando a sequência de funções integráveis $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função integrável $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, pode ocorrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \neq \neq \int_a^b f(x)dx$.

<u>Exemplo 9</u> : Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = nx^n(1 - x^n)$.

Dessa forma, $f_n(1) = 0$ e $0 \leq f_n(x) < nx^n$ se $0 \leq x < 1$.

Temos que $\lim\limits_{n\to\infty} nx^n = 0$ se $0 \leq x < 1$, pois $nx^n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = = x < 1$.

Pelo critério da razão, podemos afirmar que $\sum nx^n$ converge, decorre que o termo geral tende para zero.

Portanto, a sequência (f_n) converge simplesmente em $[0,1]$ para a função identicamente nula.

Entretanto, $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)}$.

Logo, $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$ enquanto $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$.

1.4 Derivabilidade

A questão da derivabilidade é um pouco mais complexa.

O próximo teorema nos diz que $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$ desde que as derivadas f_n' convirjam uniformemente.

Teorema 3 : Seja (f_n) uma sequência de funções de classe C^1 no intervalo $[a,b]$. Se, para certo $c \in [a,b]$, a sequência numérica $(f_n(c))$ converge e se as derivadas f_n' convergem uniformemente em $[a,b]$ para uma função g, então (f_n) converge em $[a,b]$ uniformemente para uma função f, de classe C^1, tal que $f' = g$.

Demonstração : Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, para cada $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [a,b]$ temos $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt$.

Dessa forma, podemos escrever $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(c) + \lim\limits_{n\to\infty} \int_c^x f_n'(t)dt$.

Uma vez que $(f_n(c))$ converge, consideremos $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(c) = d$.

Já sabemos, pelo Teorema 2, que se a convergência é uniforme, então $\int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

Temos também, por hipótese, que f_n' converge uniformemente em $[a,b]$ para uma função g.

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_c^x f_n'(t)dt = \int_c^x g(t)dt$.

Decorre que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = d + \int_c^x g(t)dt$.

Uma vez fazendo $f(x) = d + \int_c^x g(t)dt$, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Além disso, g é contínua, pois (f_n) é uma sequência de classe C^1 no intervalo $[a,b]$ e as derivadas f_n' convergem uniformemente no mesmo intervalo. Portanto, f

é derivável e $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ (em virtude do Teorema Fundamental do Cálculo). Em particular, f' é contínua, isto é, f é de classe C^1.

Resta apenas provar que a convergência $f_n \to f$ é uniforme.

De fato, $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt - f(c) - \int_c^x g(t)dt| \leq$
$\leq |f_n(c) - f(c)| + |\int_c^x f_n'(t)dt - \int_c^x g(t)dt| \leq$
$\leq |f_n(c) - f(c)| + |\int_c^x (f_n'(t) - g(t))dt| \leq$
$\leq |f_n(c) - f(c)| + \int_c^x |f_n'(t) - g(t)|dt.$

Devido ao fato da sequência $(f_n(c))$ convergir, podemos afirmar que existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ temos $|f_n(c) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Já que a sequência (f_n') converge uniformemente para g, podemos afirmar que existe n_1 tal que, para todo $n \geq n_1$ temos $|f_n'(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2|b-a|}$.

Portanto, se $n \geq max\{n_0, n_1\}$ temos $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |x-c|\frac{\varepsilon}{2b-a|} \leq \frac{\varepsilon}{2} +$
$+ |b-a|\frac{\varepsilon}{2|b-a|} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Logo, $f_n \to f$ uniformemente, como queríamos demonstrar. $\square$

<u>Exemplo 10</u> : Seja $f : (0,b) \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{2x+n}{x+n}$.

Temos que $f'(x) = \frac{2(x+n)-(2x+n)}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2}$.

Decorre, então, que $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(x+n)^2} = 0$.

Dessa forma, a função limite f será $f(x) = 0$.

Por outro lado temos $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' = (1)' = 0$, ou seja $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim\limits_{n\to\infty} f'(x)$.

Analisaremos, agora, a convergência.

$|f_n'(x) - f(x)| = |\frac{n}{(x+n)^2} - 0| = \frac{n}{(x+n)^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

Portanto, $f_n' \to f$ uniformemente.

<u>Exemplo 11</u> : A sequência de funções $f_n(x) = \frac{sen(nx)}{n}$ converge uniformemente para

zero em toda a reta. Mas a sequência de suas derivadas $f_n'(x) = cos(nx)$ não converge, sequer simplesmente, em intervalo algum.

De fato, todo intervalo, na reta, contém um número da forma $x = \frac{m\pi}{p}$, com m, p inteiros, ou seja, dado o intervalo $[a,b]$ podemos considerar p tal que $\frac{\pi}{p} < \frac{b-a}{2}$. Logo, existe m tal que $\frac{m\pi}{p} \in [a,b]$.

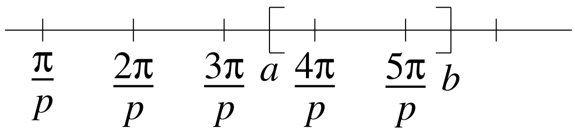

Figura 1.5: Intervalo contendo número da forma $x = \frac{m\pi}{p}$

Dessa maneira, se $n = kp$, com k inteiro, então $cos(nx) = cos(km\pi) = \pm 1$, ou seja, $cos(nx)$ assume infinitas vezes os valores 1 e -1.

Capítulo 2

O Teorema de Arzelá

$\mathcal{D}$emonstraremos neste capítulo o Teorema de Arzelá que é uma versão do Teorema 2 com hipótese menos restritiva, isto é, supõe-se que a sequência (f_n) convirja apenas pontualmente para f, supondo, no entanto, que f seja integrável e que exista $K > 0$ tal que $\|f_n(x)\| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos apresentar uma demonstração elementar desse teorema.

No que segue, a única integral considerada é a integral de Riemann, conforme a Definição 3.

Antes de iniciarmos a demonstração do Teorema de Arzelá, apresentaremos a seguinte forma de completividade de $\mathbb{R}$.

<u>Teorema 4</u> : Se (H_n) é uma sequência decrescente $(H_n \supset H_{n+1})$ de subconjuntos não vazios, fechados e limitados de $\mathbb{R}$, então $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n \neq \varnothing$.

Ainda, para colaborar na demonstração do Teorema de Arzelá, precisaremos do conceito de conjunto elementar e suas propriedades, bem como o lema de Bartle e o lema de Lewin, as quais daremos a seguir.

<u>Definição 4</u> : Um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ se diz elementar se for a união finita de intervalos

limitados.

A um intervalo I de extremos a e b, $a < b$, associamos, naturalmente, uma medida que é o seu comprimento $b - a$. Agora, se E é um conjunto elementar, sempre é possível escolher intervalos I_i, $1 \leq i \leq n$, de extremos a_i e b_i, com $a_i \leq b_i$ e $b_i \leq a_{i+1}$, tais que $E = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. A escolha dos I_i, como acima, assegura que $I_i \bigcap I_j$, $i \neq j$, seja um conjunto com um único elemento ou o conjunto vazio. Dessa forma, podemos estender o conceito de medida para os conjuntos elementares.

Definição 5 : Se $E = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ é um conjunto elementar, definimos a medida de E, denotada por $m(E) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$, em que a_i e b_i são os extremos dos intervalos I_i.

Dadas as Definições 4 e 5, temos as seguintes propriedades dos conjuntos elementares:

Propriedade 1 : A classe dos conjuntos elementares é fechada para a união, interseção e diferença.

a) União

Hipótese: E_1 e E_2 são conjuntos elementares.

Tese: $E_1 \bigcup E_2$ é um conjunto elementar.

Demonstração

Sejam $E_1 = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ e $E_2 = \bigcup_{j=1}^{m} I'_j$, com I_j e I'_j sendo intervalos limitados.

Temos que $E_1 \bigcup E_2 = (\bigcup_{j=1}^{n} I_j) \bigcup (\bigcup_{j=1}^{m} I'_j)$ é a união finita de intervalos limitados.

Portanto, por definição, $E_1 \bigcup E_2$ é um conjunto elementar. $\square$

b) Interseção

Hipótese: E_1 e E_2 são conjuntos elementares.

Tese: $E_1 \bigcap E_2$ é um conjunto elementar.

Demonstração

Sejam $E_1 = \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$ e $E_2 = \bigcup\limits_{j=1}^{m} I'_j$, com I_j e I'_j sendo intervalos limitados.

Temos que $E_1 \bigcap E_2 = (\bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j) \bigcap (\bigcap\limits_{j=1}^{m} I'_j) =$

$= (I_1 \bigcup I_2 \bigcup \ldots \bigcup I_n) \bigcap (\bigcup\limits_{j=1}^{m} I'_j) =$

$= [I_1 \bigcap (\bigcup\limits_{j=1}^{m} I'_j)] \bigcup [I_2 \bigcap (\bigcup\limits_{j=1}^{m} I'_j)] \bigcup \ldots \bigcup [I_n \bigcap (\bigcup\limits_{j=1}^{m} I'_j)] =$

$= I_1 \bigcap (I'_1 \bigcup I'_2 \bigcup \ldots \bigcup I'_m) \bigcup I_2 \bigcap (I'_1 \bigcup I'_2 \bigcup \ldots \bigcup I'_m) \bigcup \ldots \bigcup I_n \bigcap (I'_1 \bigcup I'_2 \bigcup \ldots$

$\ldots \bigcup I'_m) = (I_1 \bigcap I'_1) \bigcup (I_1 \bigcap I'_2) \bigcup \ldots \bigcup (I_1 \bigcap I'_m) \bigcup (I_2 \bigcap I'_1) \bigcup (I_2 \bigcap I'_2) \bigcup \ldots$

$\ldots \bigcup (I_2 \bigcap I'_m) \bigcup \ldots \bigcup (I_n \bigcap I'_1) \bigcup (I_n \bigcap I'_2) \bigcup \ldots \bigcup (I_n \bigcap I'_n)$.

Cada interseção não vazia, acima, é um intervalo limitado, pois é a interseção de intervalos limitados.

Dessa forma, $E_1 \bigcap E_2$ é a união finita de intervalos limitados.

Portanto, por definição, $E_1 \bigcap E_2$ é um conjunto elementar. $\square$

c) Diferença

Hipótese: E_1 e E_2 são conjuntos elementares.

Tese: $E_1 - E_2$ é um conjunto elementar.

Demonstração

Sejam $E_1 = \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$ e $E_2 = \bigcup\limits_{j=1}^{m} I'_j$, com I_j e I'_j sendo intervalos limitados.

Temos que $E_1 - E_2 = E_1 \bigcap (\complement E_2)$

Como $\complement E_2 = \complement(\bigcup\limits_{j=1}^{n} I'_j) = \complement(I'_1 \bigcup I'_2 \bigcup \ldots \bigcup I'_m) = (\complement I'_1) \bigcap (\complement I'_2) \bigcap \ldots \bigcap (\complement I'_m)$,

então $E_1 - E_2 = (\bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j) \bigcap (\complement I'_1 \bigcap \complement I'_2 \bigcap \ldots \bigcap \complement I'_m) =$

$= (I_1 \bigcup I_2 \bigcup \ldots \bigcup I_n) \bigcap (\complement I'_1 \bigcap \complement I'_2 \bigcap \ldots \bigcap \complement I'_m) =$

$= (I_1 \bigcap \complement I'_1 \bigcap \complement I'_2 \bigcap \ldots \bigcap \complement I'_m) \bigcup (I_2 \bigcap \complement I'_1 \bigcap \complement I'_2 \bigcap \ldots \bigcap \complement I'_m) \bigcup \ldots \bigcup (I_n \bigcap \complement I'_1 \bigcap \complement I'_2 \bigcap \ldots$

$\ldots \bigcap \complement I'_m)$, que é a união finita de intervalos limitados, pois para todo j, $i \leq j \leq n$, $I_j \bigcap \complement I'_1 \bigcap \complement I'_2 \bigcap \ldots \bigcap \complement I'_m$ é uma união finita de intervalos limitados ou vazio.

Portanto, por definição, $E_1 - E_2$ é um conjunto elementar. $\square$

Propriedade 2 : Se E_1 e E_2 são conjuntos elementares disjuntos, então $m(E_1 \bigcup E_2) =$ $= m(E_1) + m(E_2)$.

Hipótese: E_1 e E_2 são conjuntos elementares disjuntos.

Tese: $m(E_1 \bigcup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$

Demonstração

Sejam $E_1 = \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$, sendo que $I_j \bigcap I_k$ é um ponto ou vazio se $j \neq k$, e $E_2 = \bigcup\limits_{j=1}^{m} I'_j$, sendo que $I'_j \bigcap I'_k$ é um ponto ou vazio se $j \neq k$.

Sendo $a_j \leq b_j$ os extremos de I_j e $c_j \leq d_j$ os extremos de I'_j, então $m(E_1) = \sum\limits_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$ e $m(E_2) = \sum\limits_{j=1}^{m} (d_j - c_j)$.

Temos que $E_1 \bigcup E_2 = (\bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j) \bigcup (\bigcup\limits_{j=1}^{m} I'_j)$ e como $E_1 \bigcap E_2 = \varnothing$, então $I_i \bigcap I'_j = \varnothing$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.

Portanto, por definição, $m(E_1 \bigcup E_2) = \sum\limits_{j=1}^{n} (b_j - a_j) + \sum\limits_{j=1}^{m} (d_j - c_j) = m(E_1) + m(E_2)$. $\square$

Propriedade 3 : Se E, E_1 e E_2 são conjuntos elementares tais que $E \subset E_1 \bigcup E_2$, então $m(E) \leq m(E_1) + m(E_2)$.

Hipótese: E, E_1 e E_2 são conjuntos elementares e $E \subset E_1 \bigcup E_2$.

Tese: $m(E) \leq m(E_1) + m(E_2)$

Demonstração

Primeiro vamos mostrar que se E_1 e E são conjuntos elementares e $E_1 \subset E$, então

$m(E_1) \leq m(E)$.

Pela Propriedade 1, $E_2 = E - E_1$ é um conjunto elementar.

Temos também que $E_1 \bigcap (E - E_1) = \varnothing$.

Como $E = E_1 \bigcup (E - E_1)$, pela Propriedade 2, $m(E) = m(E_1) + m(E - E_1)$, ou seja, $m(E_1) \leq m(E)$.

Mostramos, agora, que se E_1 e E são conjuntos elementares, então $m(E_1 \bigcup E) \leq$ $\leq m(E_1) + m(E)$.

De fato, $E_1 \bigcup E = (E_1 - E) \bigcup E$, então $m(E_1 \bigcup E) = m(E_1 - E) + m(E) \leq m(E_1) +$ $+ m(E)$. $\square$

Propriedade 4 : Se E é elementar e $\varepsilon > 0$, então existe $F \subset E$ elementar e fechado tal que $m(E) - \varepsilon < m(F)$.

Hipótese: E é um conjunto elementar e $\varepsilon > 0$.

Tese: Existe $F \subset E$ elementar e fechado tal que $m(E) - \varepsilon < m(F)$.

Demonstração

Seja $E = \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$, com I_j intervalos limitados tal que $I_j \bigcap I_k$ é vazio ou um ponto, se $j \neq k$.

Consideremos, agora, $a_j \leq b_j$ os extremos de I_j.

Dessa forma, $m(E) = \sum\limits_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$.

Tomemos $F = \bigcup\limits_{j=1}^{n} I'_j$ com $I'_j = [a_j + \frac{\varepsilon}{4n}, b_j - \frac{\varepsilon}{4n}]$.

Logo, $I'_j \bigcap I'_k = \varnothing$ e $m(F) = \sum\limits_{j=1}^{n} (b_j - \frac{\varepsilon}{4n} - \frac{\varepsilon}{4n} - a_j) =$ $= \sum\limits_{j=1}^{n} (b_j - a_j) - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} = m(E) - \frac{\varepsilon}{2} > m(E) - \varepsilon.$ $\square$

Enunciaremos agora, dois lemas, cujas demonstrações seguem conforme Alencar (1988).

Lema 1 : Bartle

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Se $\int_a^b f(x)dx = \alpha > 0$, então o conjunto $A = \{x \in [a,b] : f(x) = \frac{\alpha}{3(b-a)}\}$ contém um conjunto elementar E tal que $m(E) \geq \frac{\alpha}{3\|f\|}$.

Demonstração

Como F é integrável, dado $\varepsilon = \frac{\alpha}{3}$, existe uma partição $P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a,b]$ tal que $|S(f,P) - \alpha| < \frac{\alpha}{3}$, qualquer que seja a escolha dos pontos intermediários.

Logo, $S(f,P) \geq \frac{2\alpha}{3}$.

Portanto, existe pelo menos um i, $1 \leq i \leq n$, tal que $[x_{i-1}, x_i] \subset A$.

Caso contrário, para cada i existiria $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f(\bar{x}_i) < \frac{\alpha}{3(b-a)}$ e consequentemente para essa escolha dos $\bar{x}_i$ teríamos $S(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i < \frac{\alpha}{3(b-a)} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\alpha}{3(b-a)}(b-a) = \frac{\alpha}{3}$, o que é uma contradição com o fato que $S(f,P) \geq \frac{2\alpha}{3}$ para qualquer escolha dos pontos intermediários.

Portanto, o conjunto N_1 definido por $N_1 = \{i : 1 \leq i \leq : [x_{i-1}, x_i] \subset A\}$ é não vazio.

Consideremos, agora, o conjunto N_2 definido por $N_2 = \{i : 1 \leq i \leq n\} \backslash N_1$. Podemos observar que para cada $j \in N_2$, existe $\bar{x}_j \in [x_{j-1}, x_j]$ tal que $f(\bar{x}_j) < \frac{\alpha}{3(b-a)}$.

Escrevendo a soma de Riemann $S(f,P)$ como $S(f,P) = \sum\limits_{i \in N_1} f(\bar{x}_i)\Delta x_i + \sum\limits_{j \in N_2} f(\bar{x}_j)\Delta x_j$ e escolhendo os $\bar{x}_j$, $j \in N_2$, conforme $f(\bar{x}_j) < \frac{\alpha}{3(b-a)}$ obtemos:

$$\frac{2\alpha}{3} \leq S(f,P) = \sum_{i \in N_1} f(\bar{x}_i)\Delta x_i + \sum_{j \in N_2} f(\bar{x}_j)\Delta x_j \leq \sum_{i \in N_1} f(\bar{x}_i)\Delta x_i + \sum_{j \in N_2} \frac{\alpha}{3(b-a)}\Delta x_j =$$

$= \sum\limits_{i \in N_1} f(\bar{x}_i)\Delta x_i + \frac{\alpha}{3}$, ou seja, $\frac{2\alpha}{3} < \sum\limits_{i \in N_1} f(\bar{x}_i)\Delta x_i + \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \frac{\alpha}{3} \leq \sum\limits_{i \in N_1} f(\bar{x}_i)\Delta x_i \leq \|f\| \sum\limits_{i \in N_1} \Delta x_i$.

Portanto, $\frac{\alpha}{3\|f\|} \leq \sum_{i \in N_1} \Delta x_i$.

Para finalizar, observamos que o conjunto elementar $E = \bigcup_{i \in N_1} (x_{i-1}, x_i)$ tem medida $m(E) = \sum_{i \in N_1} \Delta x_1 \geq \frac{\alpha}{3\|f\|}$. $\square$

Lema 2 : Lewin

Seja (A_n) uma sequência decrescente de subconjunto limitados de $\mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. Se para cada n definirmos α_n como $\alpha_n = \sup\{m(E) : E \subset A_n, E$ conjunto elementar$\}$, então $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$.

Demonstração

Sendo (A_n) uma sequência decrescente, temos que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$.

Podemos afirmar que $\{m(E) : E \subset A_n, E \text{ elementar}\} \supseteq \{m(E) : E \subset A_{n+1}, E \text{ elementar}\}$, pois $A_n \supset A_{n+1}$.

Portanto, $\sup\{m(E) : E \subset A_{n+1}, E \text{ elementar}\} \leq \sup\{m(E) : E \subset A_n, E \text{ elementar}\}$, ou seja, $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$.

Assim, (α_n) é uma sequência decrescente de números reais não negativos.

Agora, queremos mostrar que $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$.

Suponha que isso não seja verdade.

Como (α_n) é uma sequência decrescente limitada inferiormente por 0, existe $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 2\alpha > 0$ sendo $\alpha_n \geq 2\delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pela definição de supremo, existe $F_n \subset A_n$ conjunto elementar, tal que $m(F_n) > \alpha_n - \frac{\delta}{2^n.2}$.

Já pela Propriedade 4, existe $E_n \subset F_n$ conjunto elementar e fechado, tal que $m(E_n) > m(F_n) - \frac{\delta}{2.2^n} > \alpha_n - \frac{\delta}{2.2^n}$.

Portanto, $m(E_n) > \alpha_n - \frac{\delta}{2^n}$.

E como E_n é elementar, então E_n é limitado.

Consideremos, agora, $H_n = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$.

Dessa forma, H_n é fechado, pois a interseção de um número finito de conjuntos fechados é fechado, e H_n é limitado, pois $H_n \subset E_1$ para todo n e E_1 é limitado.

Assim, temos que se $H_n \neq \varnothing$ para todo n, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \neq \varnothing$ uma vez que $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \ldots \supseteq H_n \supseteq \ldots$.

Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ chegamos a uma contradição, já que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$.

Devemos mostrar então que $H_n \neq \varnothing$. Para isso destacamos os seguintes resultados:

I) Se E é um conjunto elementar contido em $A_n \backslash E_n$, então $m(E) + m(E_n) =$
$= m(E \bigcup E_n) \leq \alpha_n$, portanto $m(E) \leq \alpha_n - m(E_n) \leq \alpha_n - (\alpha_n - \frac{\delta}{2^n}) = \frac{\delta}{2^n}$.

II) Se E é um conjunto elementar contido em $A_n \backslash H_n$, então E está contido no complemento de H_n, e mais $\complement H_n = \complement(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (\complement E_i)$, logo E se escreve como $E = E \bigcap (\bigcup_{i=1}^{n} \complement E_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (E \bigcap \complement E_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (E \backslash E_i)$.

Como $E \subset A_n \subset A_{n-1} \subset \ldots \subset A_1$, temos que para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $E \backslash E_i$ é um conjunto elementar contido em $A_i - E_i$, logo $m(E \backslash E_i) \leq \frac{\delta}{2^n}$ por I.

Logo, $m(E) \leq \sum_{i=1}^{n} m(E \backslash E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta}{2^i} < \delta$.

Se H_n fosse vazio teriamos então que para todo conjunto elementar contido em $A_n - H_n = A_n$, $m(E) < \delta$.

Logo, $\alpha_n = \sup\{m(E) : E \subset A_n, E \text{ elementar } \} < \delta$, o que é uma contradição. $\square$

Passamos, então, a enunciar e a demonstrar o teorema de Arzelá.

Teorema de Arzelá : Seja (f_n) uma sequência de funções definidas e integráveis em $[a,b]$ tais que $\|f_n\| = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq M$ para todo n. Se (f_n) converge pontualmente para uma função f, integrável em $[a,b]$, então $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Demonstração

Supondo $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ e $f = 0$, devemos mostrar que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = 0$.

Suponhamos o contrário, isto é, $\lim \int_a^b f_n(x)dx \neq 0$.

Então, existe $\alpha > 0$ e uma sequência (f_{n_k}) de (f_n) tal que $\int_a^b f_{n_k}(x)dx > \alpha$, $k = 1,2,\ldots$.

De fato, se $0 \leq \int_a^b f_n(x)dx \not\to 0$, então $\alpha > 0$ tal que para todo N, existe $n > N$ tal que $\int_a^b f_n(x)dx > \alpha$.

Dado $N = 1$, existe $n_1 > 1$ tal que $\int_a^b f_{n_1}(x)dx > \alpha$.

Dado $N = n_1$, existe $n_2 > n_1$ tal que $\int_a^b f_{n_2}(x)dx > \alpha$.

Dessa forma, $\int_a^b f_{n_k}(x)dx > \alpha$, $k = 1,2,\ldots$

Agora, para cada k, consideremos o conjunto $A_k = \{x \in [a,b] : f_{n_i}(x) \geq \frac{\alpha}{3(b-a)}$, para algum $i, i \geq k\}$.

Portanto, temos:

$A_1 = \{x \in [a,b] : f_{n_i}(x) \geq \frac{\alpha}{3(b-a)}$, para algum $i, i \geq 1\}$

$A_2 = \{x \in [a,b] : f_{n_i}(x) \geq \frac{\alpha}{3(b-a)}$, para algum $i, i \geq 2\}$

$\vdots$

$A_j = \{x \in [a,b] : f_{n_i}(x) \geq \frac{\alpha}{3(b-a)}$, para algum $i, i \geq j\}$

$\vdots$

Decorre que (A_k) é uma sequência decrescente.

Além disso, temos que $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$, pois se $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \varnothing$ implica que existe $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ tal que se $x \in A_1$, então existe i_1 em que $f_{n_{i_1}}(x) \geq \frac{\alpha}{3(b-a)}$ para $i_1 \geq 1$.

Portanto, existem infinitos índices k, tal que $f_{n_k}(x) \geq \frac{\alpha}{3(b-a)}$.

A sequência $(f_{n_k}(x))$ é uma sequência limitada de números reais, pois $\|f_{n_k}(x)\| \leq M$ por hipótese, logo, ela possui subsequência convergente, em que todos os seus termos são maiores ou iguais a $\frac{\alpha}{3(b-a)}$, consequentemente o limite dessa subsequência é maior ou igual a $\frac{\alpha}{3(b-a)}$.

Mas a sequência $(f_n(x))$ converge para 0(zero), logo não pode admitir subsequência convergente para um número maior que 0(zero).

Portanto, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$.

Podemos afirmar que $\{x \in [a,b] : f_{n_k}(x) \geq \frac{\alpha}{3(b-a)}\} \subseteq A_k$, e pelo Lema 1, A_k contém um conjunto elementar E_k tal que $m(E_k) \geq \frac{\alpha}{3M}$.

Por outro lado, pelo Lema 2, temos que $\lim_{k\to\infty} m(E_k) = 0$, o que contradiz o fato de $m(E_k) \geq \frac{\alpha}{3M}$.

Portanto, devemos ter $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = 0$.

Provamos, então, O Teorema de Arzelá para sequência (f_n) de funções não negativas convergindo para 0(zero).

Digamos provado para sequências (g_n) de funções não negativas convergindo para 0(zero). Logo, podemos escrever $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$ cujo limite é a função nula, o que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx = 0$.

Como $g(x) = |f_n(x) - f(x)|$, então $-g_n(x) \leq (f_n(x) - f(x)) \leq g_n(x)$, o que equivale a $-\int_a^b g_n(x)dx \leq \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \leq \int_a^b g_n(x)dx$.

Tomando o limite em cada termo dessa desigualdade, obtemos:

- $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx$, o que implica,

$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \leq 0.$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx - \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$ $\square$

Provando, assim, o Teorema de Arzelá.

Referências

[1] BARTLE, Robert Gardner. *Elementos de análise real*, Rio de Janeiro: Campos, 1983.

[2] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise, V.1.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, 1976.

[3] ALENCAR, Raimundo. *Sobre o Teorema de Arzelá*, Revista Matemática Universitária. Campinas, no.8, 107-115, dezembro, 1988.