

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Departamento de Matemática

Problemas de Otimização em Geometria Plana

José Renato Fialho Rodrigues

Belo Horizonte - MG
1995

José Renato Fialho Rodrigues

Problemas de Otimização em Geometria Plana

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Mt. Jorge Sabatucci

Belo Horizonte - MG
1995

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado força na minha vida profissional, em seguida agradeço a pessoa mais importante da minha vida, Larcy Fialho de Jesus, minha mãe, pelo incentivo durante a minha jornada acadêmica.

Agradeço também ao meu orientador Prof. Mt. Jorge Sabatucci.

Resumo

Com objetivo de apresentar um estudo de assuntos de geometria plana, que, geralmente, não são trabalhados em textos adotados em cursos de graduação, neste trabalho, é desenvolvido preliminarmente, três problemas de otimização, os quais para suas resoluções são usadas argumentações estritamente geométricas, em seguida é discutida a Linha de Euler e a Circunferência de Nove Pontos, e para finalizar os trabalhos é dada uma breve introdução à Geometria Inversiva.

Palavras-chave: Geometria Plana, Otimização, Circunferência e Geometria Inversiva.

Abstract

In order to present a study of Plane Geometry issue, which generally are not worked on texts adopted in undergraduate courses, this work is developed, preliminarily three optimization problems, which to its resolutions are used arguments strictly geometrical; then discussed is the Euler Line and the Circle of Nine Points, and to complete the work is given a brief introduction to Geometry Inversive.

Key-Words: Plane Geometry, Optimization, Circunference and Geometry Inversive.

Sumário

1	Problemas de Otimização	4
1.1	O número máximo de elementos iguais em triângulos não congruentes	4
1.2	Problemas de Minimização	8
2	A Linha de Euler e a Circunferência de Nove Pontos	12
2.1	A Linha de Euler	12
2.2	A Circunferência de Nove Pontos	14
2.3	Relação entre a Linha de Euler e a Circunferência de Nove Pontos	17
3	A Inversão em uma Circunferência	18
3.1	Inversão de pontos	18
3.2	Inversão de Segmentos e Circunferências	21

Lista de Figuras

1.1	Triângulos Congruentes	5
1.2	Triângulos Não Congruentes	6
1.3	Solução da Inequação	7
1.4	Caminho de U' para U''	8
1.5	Ângulo $U' \hat{A} U'' = 2\hat{A}$	9
1.6	Localização do U	10
1.7	Construção do Triângulo $C'P'B$	10
1.8	Triângulos Equiláteros	11
2.1	Ortocentro e Baricentro de um Triângulo Equilátero	13
2.2	Ponto H na Linha de Euler	13
2.3	Triângulo Inscrito	15
2.4	Retângulos no Triângulos ABC	15
2.5	Diâmetro $\overline{A'A''}$, $\overline{B'B''}$ e $\overline{C'C''}$	16
2.6	Nove Pontos	16
2.7	Centro da Circunferência de Nove Pontos	17
3.1	Inverso do Ponto P	19
3.2	Inverso do Ponto P'	19
3.3	Circunferências Ortogonais	20
3.4	Segunda Interseção	20
3.5	Circunferências Ortogonais	21
3.6	Segmento que não passa por O	22
3.7	Dilatação	23

Introdução

Neste trabalho é feito o estudo de assuntos de geometria plana que constam em textos especializados e que, em geral, não são adotados em cursos de graduação.

Esses assuntos são abordados em três grupos.

No capítulo 1, estudaremos problemas de máximo e mínimo, utilizando técnicas e argumentos, exclusivamente geométricos.

Já no capítulo 2, discutiremos a Linha de Euler, definindo-a e provando a sua existência e, também, a Circunferência de Nove Pontos, mostrando um resultado envolvendo esses dois conceitos.

Finalizando, no capítulo 3, daremos uma breve introdução à Geometria Inversiva, apresentando o conceito de inversão em uma circunferência.

Capítulo 1

Problemas de Otimização

Apresentaremos, nesse capítulo, um problema de maximização envolvendo triângulos não congruentes, dois de minimização, o Problema de Fagnano e o Problema de Fermat.

1.1 O número máximo de elementos iguais em triângulos não congruentes

Com relação a congruência de triângulos, sabemos que bastam três elementos de um triângulo serem congruentes a três elementos correspondentes do outro, para concluirmos que esses triângulos são congruentes, prova disto são os casos de congruências: LLL (lado, lado, lado), LAL (lado, ângulo adjacente, lado), ALA (ângulo, lado, ângulo) e LLA_0 (lado, lado, ângulo oposto).

Um fato no mínimo curioso é que existem pares de triângulos que tem cinco elementos, respectivamente, congruentes, sem que os triângulos sejam congruentes.

O objetivo deste estudo é determinar pares de triângulos não congruentes, tais que cinco elementos de um deles sejam congruentes a cinco elementos do outro, podendo esses triângulos serem acutângulos, obtusângulos e até retângulos. Se quisermos podemos construir, nessas condições, pares de triângulos cujos lados podem ser dados por números inteiros.

Inicialmente, precisaremos da definição de congruência de triângulos.

Definição 1.1 *Um triângulo é congruente a outro se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que seus lados sejam ordenadamente congruentes aos lados do outro e seus ângulos sejam ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.*

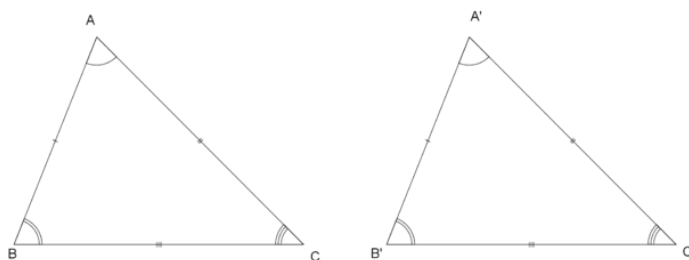


Figura 1.1: Triângulos Congruentes

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} & \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} & \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} & \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{pmatrix}$$

Uma maneira de discrever esta situação é dizer que o triângulo ABC pode ser colocado sobre o triângulo $A'B'C'$ de maneira que coincida com este exatamente. Assim, para ilustrar o que entendemos ao dizer que os triângulo ABC e $A'B'C'$ são congruentes devemos definir quais vértices vão se sobrepôr dois a dois, ou seja, para levar o triângulo ABC sobre o triângulo $A'B'C'$, devemos colocar A sobre A' , B sobre B' e C sobre C' . Podemos indicar, assim, os vértices correspondentes pela ordem em que eles aparecem, respectivamente, em cada triângulo na notação $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, isto é, A corresponde a A' , B corresponde a B' e C corresponde a C' .

Uma sobreposição como essa, chama-se correspondência biunívoca entre os vértices dos triângulos. Se os triângulos coincidem ao sobrepôr os vértices da maneira descrita, então a correspondência biunívoca se chama uma congruência entre os dois triângulos.

A congruência entre triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva.

Partiremos, agora, para determinação de pares de triângulos não congruentes, os quais cinco elementos de um deles são congruentes a cinco elementos do outro.

É óbvio que os triângulos não podem ter três lados correspondentes congruentes, pois, dessa forma, pelo caso LLL , os triângulos seriam congruentes. O que nos leva a concluir que os elementos congruentes, para os pares de triângulos em questão devem ser dois lados e os três ângulos. Segue, daí, que os triângulos são semelhantes e, portanto, os seus lados homólogos são proporcionais.

Para facilitar a construção desses triângulos, vamos supor que os lados de um triângulo sejam de medidas a , b e c e do outro triângulo a , b e d , conforme a figura a seguir.

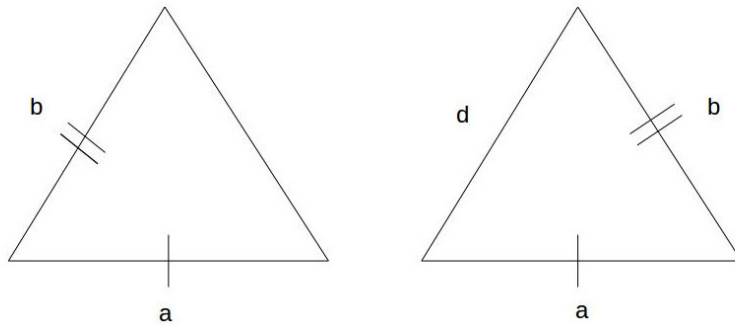


Figura 1.2: Triângulos Não Congruentes

Já sabemos que os triângulos que queremos terão que ser semelhantes; resta saber quais são os pares de lados correspondentes nos dois triângulos. Analisaremos os seguintes casos:

- 1º Caso: Lados iguais correspondentes

Então, teríamos $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow 1 = \frac{c}{d} \Rightarrow c = d$.

Logo, os triângulos seriam congruentes, portanto os lados iguais não podem ser correspondentes.

Dessa forma, restam estudar os casos em que os lados correspondentes não são iguais.

- 2º Caso: $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = \frac{c}{d}$

Da primeira igualdade temos $a^2 = b^2$, ou seja, $a = b$. Então $1 = \frac{c}{d}$, isto é $c = d$.

Novamente os triângulos seriam congruentes, logo a correspondência não poderá ser feita dessa maneira.

- 3º Caso: O lado correspondente a c terá que ser a ou b .

Podemos supor, sem perda de generalidade, que o lado correspondente a c seja b .

Temos, então, necessariamente, $\frac{a}{d} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = k$.

Tirando os valores dos lados em função da constante k e do lado a , temos:

$$\frac{b}{a} = k \Rightarrow b = ka;$$

$$\frac{c}{b} = k \Rightarrow c = kb \Rightarrow c = k(ka) \Rightarrow c = k^2a;$$

$$\frac{a}{d} = k \Rightarrow d = \frac{a}{k}$$

Dessa forma, se dois triângulos não congruentes tiverem 5 elementos respectivamente congruentes, os lados de um dos triângulos terão que formar a progressão geométrica (a, ka, k^2a) e os lados do outro a progressão geométrica $(\frac{a}{k}, a, ka)$.

Porém para que a, b, c possam ser lados de um triângulo, o maior deles deverá ser menor que a soma dos outros dois.

Temos duas possibilidades.

- I - Se $k \geq 1$

O maior lado será k^2a , então devemos ter $k^2a < a + ka \Rightarrow k^2a - ka - a < 0 \Rightarrow k^2 - k - 1 < 0$.

Procuremos, então, os valores de k que satisfazem essa inequação.

$$k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



Figura 1.3: Solução da Inequação

Portanto, o conjunto solução é $\{k \in \mathbb{R} / \frac{1-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.

Como, $k > 1$ segue que $1 < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- II - Se $0 < k < 1$

O maior lado será a , então devemos ter $a < ka + k^2a \Rightarrow k^2a + ka - a > 0 \Rightarrow k^2 + k - 1 > 0$.

Os valores de k que satisfazem essa equação formam o conjunto solução $\{k \in \mathbb{R} / k < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $k > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.

Como, $0 < k < 1$ segue que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < k < 1$.

Decorre de I e II que $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $k \neq 1$ é a condição necessária para que a, ka, k^2a sejam os lados do triângulo.

O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a conhecida “razão áurea”, denotada pela letra grega τ , conseqüentemente $\frac{1}{\tau} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e, portanto o problema dos dois triângulos

não congruentes com 5 elementos respectivamente congruentes, tem solução se os lados dos triângulos formarem uma progressão geométrica de razão k , tal que $\frac{1}{\tau} < k < \tau$, com $k \neq 1$.

1.2 Problemas de Minimização

Nesta seção, apresentaremos e discutiremos, utilizando técnicas e argumentações estritamente geométricas, dois problemas de minimização: O Problema de Fagnano e o Problema de Fermat.

Problema de Fagnano: Em um dado triângulo ABC acutângulo, inscreve um triângulo UVW , cujo o perímetro é o menor possível.

Dado um triângulo ABC acutângulo, consideremos, primeiro um triângulo arbitrário UVW , com U em \overline{BC} , V em \overline{CA} e W em \overline{AB} . Sendo U' e U'' as imagens de U pela reflexão em \overline{CA} e \overline{AB} , respectivamente.

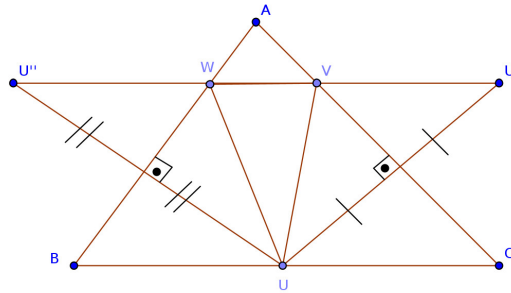


Figura 1.4: Caminho de U' para U''

Dessa forma, temos $UV + VW + WU = U'V + VW + WU''$ o qual é um caminho de U' para U'' , que em geral pode ser uma linha quebrada com ângulos em V e W . Logo, tal caminho é mínimo quando ele é uma linha reta, como na figura 1.4.

Portanto, entre todos os triângulos inscritos no triângulo ABC , com um vértice dado U em \overline{BC} , aquele com menor perímetro ocorre quando V e W estão na mesma linha reta que liga U' e U'' .

Sendo assim, obtemos um triângulo definido UVW para cada escolha de U em \overline{BC} .

O problema, então, será resolvido pela escolha de U que minimiza o segmento $U'U''$, cujo comprimento nada mais é do que o perímetro do triângulo inscrito UVW .

Desde que $\overline{AU'}$ e $\overline{AU''}$ são imagens de \overline{AU} por reflexão em \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente, então eles são congruentes e o ângulo $U'\hat{A}U'' = 2\hat{A}$, conforme mostra a figura 1.5 a seguir.

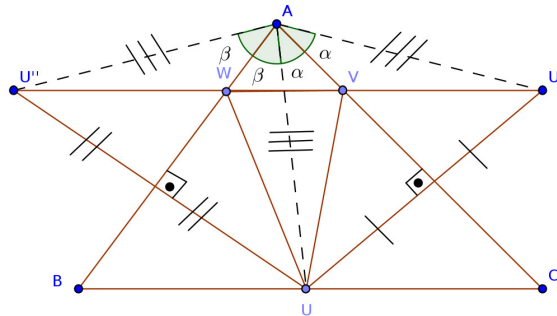


Figura 1.5: Ângulo $U'\hat{A}U'' = 2\hat{A}$

Do fato de $\overline{AU'}$ e $\overline{AU''}$ serem congruentes, decorre que $AU'U''$ é um triângulo isósceles, cujo o ângulo em A é independente da escolha de U . Portanto a base $\overline{U'U''}$ é mínima quando os lados congruentes $\overline{AU'}$ e $\overline{AU''}$ são mínimos, isto é, quando \overline{AU} é mínimo, pois \overline{AU} é congruente a ambos.

Em outras palavras, AU terá que ser a menor distância do ponto dado A ao segmento dado \overline{BC} , para que $U'U''$ seja a menor distância possível.

Já que a hipotenusa do triângulo retângulo é maior do que cada cateto, a localização desejada de U em \overline{BC} é tal que \overline{AU} seja perpendicular a \overline{BC} . Portanto, \overline{AU} é a altura de A .

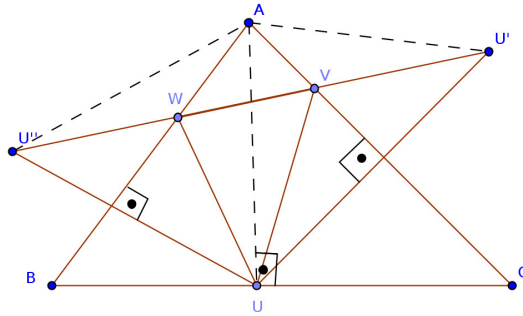


Figura 1.6: Localização do U

Uma vez que poderíamos, igualmente, ter conseguido com B ou C ao invés de A , obteremos, analogamente que, \overline{BV} e \overline{CW} são as alturas de B e C , respectivamente.

Problema de Fermat: Num dado triângulo acutângulo ABC , localize um ponto P cujas distâncias de A, B, C tenha a menor soma possível.

Dado um triângulo ABC acutângulo, consideremos primeiro um ponto arbitrário P , dentro desse triângulo. Em seguida, vamos ligar o ponto P aos vértices A, B e C , obtendo, assim, o triângulo APB , dentre outros.

Vamos, agora, girar o triângulo APB sessenta graus, em torno de B , obtendo, desse modo, o triângulo $C'P'B$, conforme figura 1.7 a seguir.

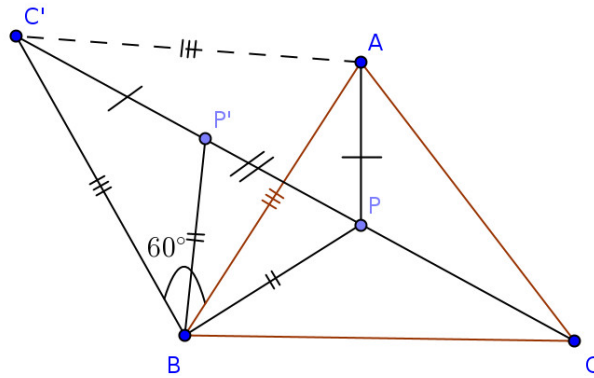


Figura 1.7: Construção do Triângulo $C'P'B$

Dessa forma, o lado \overline{AB} é congruente ao lado $\overline{C'B}$ e o ângulo adjacente é 60° , portanto o triângulo ABC' é equilátero, assim como é, também, equilátero o triângulo PBP' , pois \overline{PB} é congruente a $\overline{P'B}$ e o ângulo adjacente é 60° .

Então, temos que $AP + BP + CP = C'P' + P'P + PC$ é a distância entre C' e C .

O caminho que liga os pontos C' e C é dado pela sequência dos três segmentos $\overline{C'P'}$, $\overline{P'P}$ e \overline{PC} , que normalmente é uma poligonal com ângulos em P' e P , e, portanto, tem tamanho mínimo quando é uma linha reta, em cujo caso o ângulo $\hat{B}PC = 180^\circ - \hat{B}P'P = 120^\circ$ e $\hat{A}PB = \hat{C}'P'B = 180^\circ - \hat{P}'P'B = 120^\circ$. Esses resultados advêm do fato do triângulo PBP' ser equilátero.

Então, o ponto desejado P no qual $AP + BP + CP$ é mínimo, é o ponto no qual cada um dos lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} subtende um ângulo de 120° .

Esse ponto, denominado Ponto de Fermat, é mais simplesmente construído, com a segunda interseção do segmento $\overline{CC'}$ e o círculo ABC' .

Já foi demonstrado que o triângulo ABC não precisa ser acutângulo, porém, a solução apresentada acima é válida quando não existe ângulo maior que 120° .

Entretanto, ao invés do triângulo equilátero ABC' em \overline{AB} , poderíamos ter construído um triângulo equilátero BCA' em \overline{BC} , ou um triângulo equilátero CAB' em \overline{CA} .

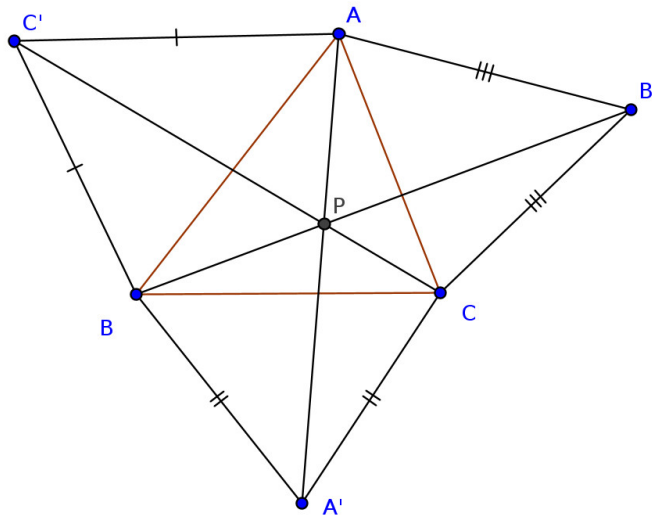


Figura 1.8: Triângulos Equiláteros

Desse modo, os três segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ passam no ponto P (Ponto de Fermat). Além disso as medidas desses segmentos são todos iguais a $AP + BP + CP$.

Capítulo 2

A Linha de Euler e a Circunferência de Nove Pontos

Discutiremos, nesse capítulo, a Linha de Euler e a Circunferência de Nove Pontos - também chamada de Circunferência de Euler -, apresentando ao final um resultado envolvendo esses dois conceitos.

2.1 A Linha de Euler

Uma vez que o circuncentro é o ponto de encontro das três mediatrizes de um triângulo, o qual está a igual distância dos vértices desse triângulo; e o baricentro é o ponto de encontro das três medianas de um triângulo, o qual divide cada medianas em duas partes tais que, a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

Decorre desses conceitos que se o circuncentro O e o baricentro G de um triângulo ABC coincidem, então esse triângulo é equilátero, pois cada mediana será perpendicular ao lado dividido em duas partes iguais, sendo, dessa forma, também a altura correspondente.

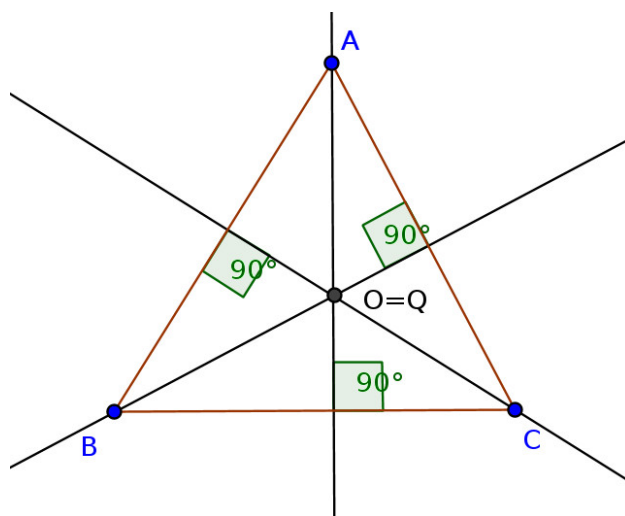


Figura 2.1: Ortocentro e Baricentro de um Triângulo Equilátero

Portanto, se o triângulo ABC não for equilátero, seu circuncentro O e o seu baricentro G , estarão em uma mesma linha OG , denominada Linha de Euler. Se nessa Linha de Euler consideramos um ponto H , tal que $OH = 3OG$ e $GH = 2OG$, conforme figura abaixo.

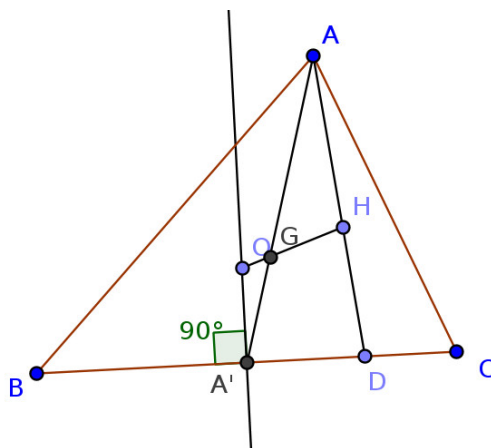


Figura 2.2: Ponto H na Linha de Euler

Podemos deduzir que, como o ponto G é o baricentro, $GA = 2A'G$ e, também, $\overline{OA'}$ é perpendicular ao lado \overline{BC} , pois é um segmento contido na mediatriz de \overline{BC} , uma vez que O é o circuncentro do triângulo ABC e A' é o pé da mediana relativa ao lado \overline{BC} .

Então, temos que \overline{AH} é perpendicular ao lado \overline{BC} , pois é paralelo ao segmento $\overline{OA'}$, pois o triângulo OGA' é semelhante ao triângulo HGA , pelo

caso LAL . Analogamente, \overline{BH} é perpendicular a \overline{CA} e \overline{CH} é perpendicular a \overline{AB} .

Como o segmento de reta que parte de um dos vértices e é perpendicular ao lado oposto é chamada altura do triângulo relativa a esse lado, os segmentos de reta \overline{AH} , \overline{BH} e \overline{CH} estão contidos nas três alturas do triângulo ABC , relativas aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente, tendo como ponto comum o ponto H , que é denominado de ortocentro do triângulo ABC .

Mostramos, então, que as três alturas de qualquer triângulo passam por um mesmo ponto na Linha de Euler, que é o ortocentro; portanto, a Linha de Euler contém três pontos notáveis de um triângulo: o circuncentro, o baricentro e o ortocentro.

2.2 A Circunferência de Nove Pontos

Nessa seção, definiremos uma Circunferência que contém nove pontos peculiares de um triângulo e que, dado um triângulo qualquer, sempre é possível determiná-lo.

Dado um triângulo ABC qualquer, a Circunferência que circunscreve o triângulo cujos vértices são os “pés” das três alturas do triângulo ABC é chamada Circunferência de Nove Pontos do triângulo ABC . Ele recebe esse nome por conter, não somente os “pés” das três alturas do triângulo inicial, mas, também, os três pontos médios de seus lados e os três pontos médios dos segmentos que liga o seu ortocentro aos três vértices.

Mostraremos, agora, que dado um triângulo ABC qualquer, os pontos médios dos três lados, os pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro aos três vértices e os “pés” das três alturas desse triângulo, todos estão em uma mesma circunferência.

De fato, consideremos o ponto H o ortocentro de um triângulo ABC qualquer.

Sejam A' , B' , C' , A'' , B'' e C'' os pontos médios dos segmentos \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} , \overline{HA} , \overline{HB} e \overline{HC} , respectivamente, e sejam D , E e F os “pés” das alturas relativas aos lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} , respectivamente.

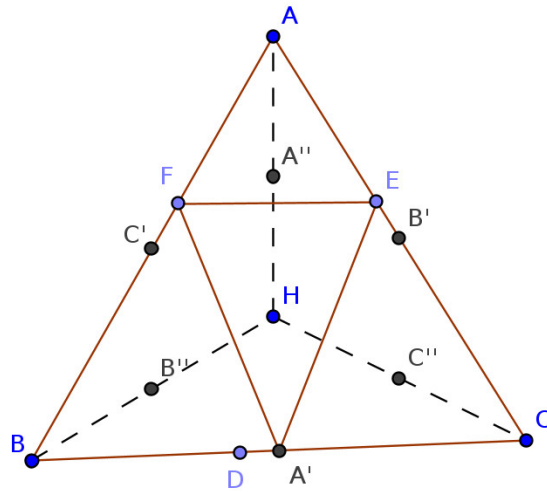


Figura 2.3: Triângulo Inscrito

Temos que se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele é paralelo ao terceiro lado. Portanto, $\overline{C'B'}$ é paralelo a \overline{BC} , pois C' e B' são pontos médios, respectivamente, dos lados \overline{AB} e \overline{AC} do triângulo ABC ; analogamente, considerando o triângulo HBC , $\overline{B''C''}$ é paralelo a \overline{BC} . Raciocinando de forma semelhante nos triângulos HBA e HAC , concluímos que $\overline{C'B''}$ e $\overline{B'C''}$ são paralelos a \overline{AH} .

Sendo \overline{AH} perpendicular a \overline{BC} , decorre que $\overline{C'B''}$ e $\overline{B'C''}$ são perpendiculares a \overline{BC} , segue que o quadrilátero $B'C'B''C''$ é um retângulo. Similarmente o quadrilátero $C'A'C''A''$ é, também retângulo.

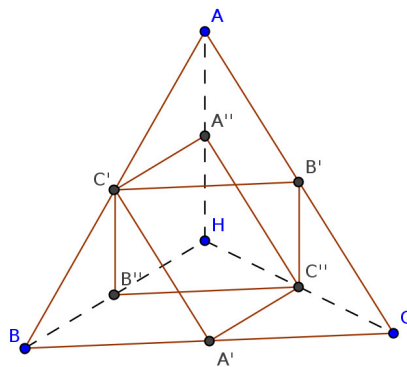


Figura 2.4: Retângulos no Triângulos ABC

O lugar geométrico dos pontos onde se vê um segmento \overline{AB} sob um ângulo reto, é a circunferência de diâmetro \overline{AB} , com exceção dos pontos A e B .

Podemos considerar os segmentos $\overline{A'A''}$, $\overline{B'B''}$ e $\overline{C'C''}$ três diâmetros de uma mesma circunferência, os quais subtendem ângulos retos nos pontos A' , B' e C' , além disso, eles subtendem ângulos retos nos pontos D , E e F , pois são hipotenusas dos triângulos retângulos $DA'A''$, $EB'B''$ e $FC'C''$.

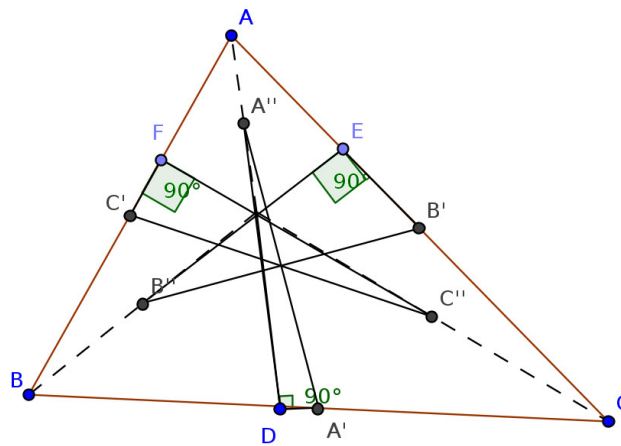


Figura 2.5: Diâmetro $\overline{A'A''}$, $\overline{B'B''}$ e $\overline{C'C''}$

Portanto, obtendo, assim, uma circunferência que passa pelos nove pontos desejados.

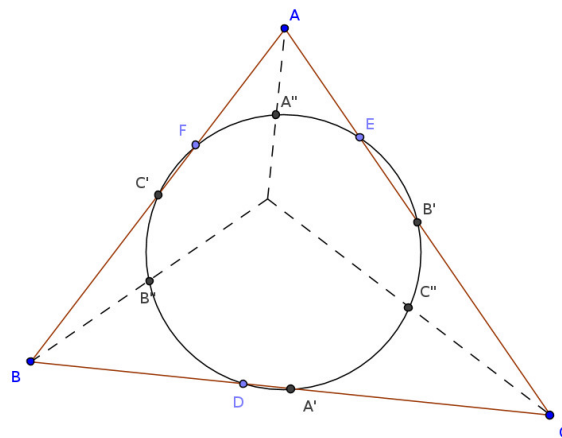


Figura 2.6: Nove Pontos

Na próxima seção discutiremos a relação existente entre a Linha de Euler e a Circunferência de Nove Pontos, também chamada de Circunferência de Euler.

2.3 Relação entre a Linha de Euler e a Circunferência de Nove Pontos

Estabeleceremos, agora, uma relação entre a Linha de Euler e a Circunferência de Nove Pontos, a qual irá oferecer condições iniciais para, dado um triângulo ABC qualquer, possamos desenhar uma circunferência de nove pontos, tomando como base a Linha de Euler.

Teorema 2.1 *O centro da Circunferência de Nove Pontos é o ponto médio entre o ortocentro e o circuncentro, na Linha de Euler.*

Consideremos, sobre a Linha de Euler de um triângulo ABC , o ortocentro O e o circuncentro H . Nesse mesmo triângulo, sejam A' , B' , C' , A'' , B'' e C'' os pontos médios dos segmentos \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} , \overline{HA} , \overline{HB} e \overline{HC} , respectivamente, em que os três últimos são segmentos contidos nas alturas relativas aos vértices A , B e C , nessa ordem.

Demonstramos na seção 2.2, que o quadrilátero $B'C'B''C''$ é um retângulo. Portanto, a diagonal $B'B''$ é um diâmetro da Circunferência de Nove Pontos, assim, como também é um diâmetro, da mesma circunferência, a outra diagonal $C'C''$. Desse modo, podemos afirmar que a interseção das diagonais do retângulo $B'C'B''C''$, denotado por M , é o centro da Circunferência de Nove Pontos, sendo ela o ponto médio entre o ortocentro O e o circuncentro H , na Linha de Euler, conforme a figura a seguir.

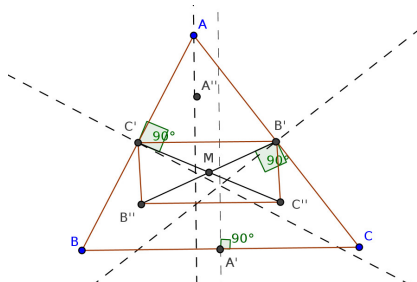


Figura 2.7: Centro da Circunferência de Nove Pontos

Capítulo 3

A Inversão em uma Circunferência

Nesse capítulo, apresentaremos o conceito de inversão em uma Circunferência, como uma breve introdução à Geometria Inversiva, a qual pode ser vista como uma extensão da Geometria Euclidiana, em que retas e planos desempenham papéis fundamentais, ora assumidos, na Geometria Inversiva, pelas circunferências e esferas.

3.1 Inversão de pontos

Dado uma circunferência com centro O e raio r , definimos o inverso de qualquer ponto P , distinto de O , como sendo o ponto P' , cuja distância ao ponto O satisfaz a equação $OP \times OP' = r^2$.

Se P é um ponto no interior da circunferência de inversão, então para representarmos o seu inverso consideramos a corda, dessa circunferência, que tem uma extremidade no ponto T e é perpendicular a \overline{OP} passando por P . Dessa forma, a tangente à circunferência de inversão, em T , intercepta o prolongamento de \overline{OP} no ponto desejado P' .

De fato, o ponto P' é o inverso do ponto P , uma vez que os triângulos OPT e OTP' são semelhantes e $OT = r$, temos $\frac{OP}{r} = \frac{r}{OP'}$.

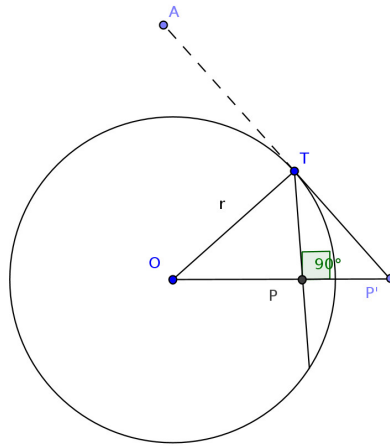


Figura 3.1: Inverso do Ponto P

Já para representarmos o inverso de um ponto P' , fora da circunferência de inversão, consideramos o ponto T como sendo uma das interseções dessa circunferência, com a circunferência que tem segmento $\overline{OP'}$ como diâmetro, portanto, o ponto P desejado é o “pé” da perpendicular a $\overline{OP'}$ passando por T .

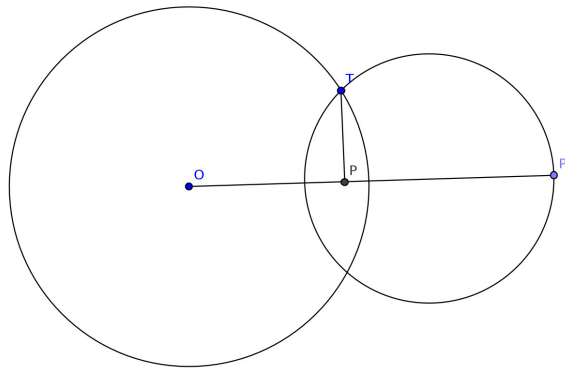


Figura 3.2: Inverso do Ponto P'

Definimos, agora, que duas circunferências são ortogonais se, e somente se, as suas interseções são ângulos retos, isto é, o raio de cada uma delas, no ponto de interseção, é tangente à outra.

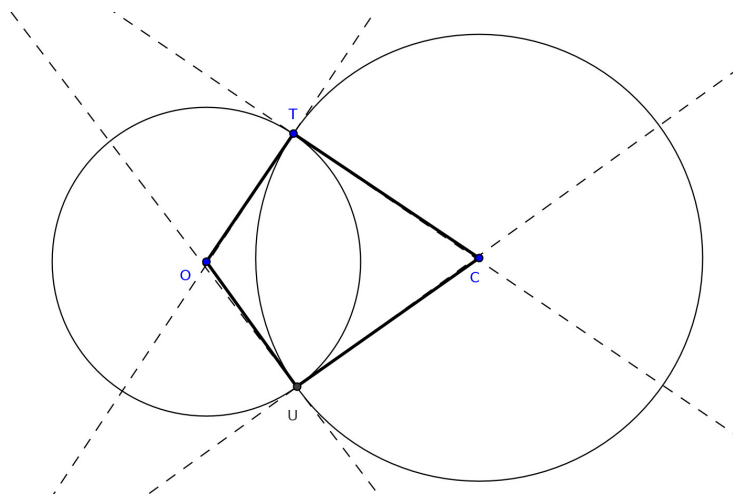


Figura 3.3: Circunferências Ortogonais

Conseqüentemente, o inverso de um ponto P pertencente a uma circunferência ortogonal à circunferência de inversão, é a segunda interseção da semirreta \overrightarrow{OP} com aquela circunferência.

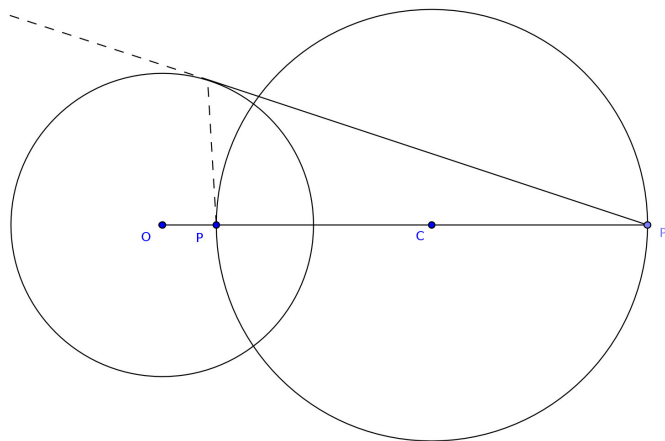


Figura 3.4: Segunda Interseção

Dessa forma, com esses conceitos, obtemos um modo simples para o problema de, dado um ponto P , desenhar uma circunferência ortogonal às duas outras.

Dadas duas circunferências e um ponto P , sejam P_1 e P_2 os inversos de P , nessas duas circunferências. A circunferência que passa por P , P_1 e P_2 é ortogonal às duas circunferências dadas.

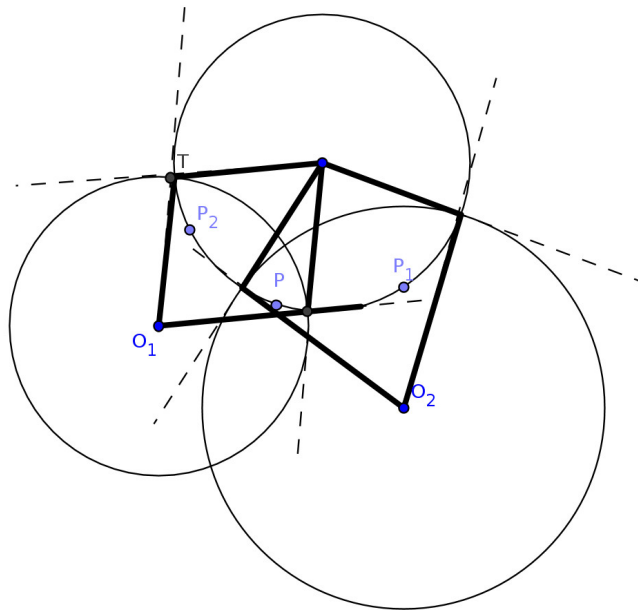


Figura 3.5: Circunferências Ortogonais

3.2 Inversão de Segmentos e Circunferências

Para finalizar essa breve introdução à Geometria Inversiva, discutiremos, nessa seção, a inversão de segmentos e circunferências.

Vimos, anteriormente, que segmentos que passam pelo centro O da circunferência de inversão invertem-se nelas mesmas. Vamos analisar, inicialmente, segmentos que não passam por esse centro.

Seja A o “pé” da perpendicular saindo de O para o segmento que não passa por O . Consideremos A' o inverso de A e P' o inverso de qualquer outro ponto P pertencente a esse segmento.

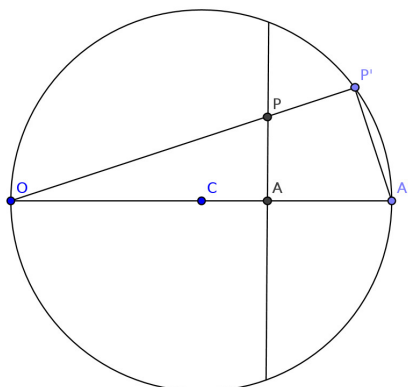


Figura 3.6: Segmento que não passa por O

Uma vez que $OP \times OP' = K^2 = OA \times OA'$, os triângulos OAP e $OP'A'$ são semelhantes e o segmento \overline{AP} inverte dentro da circunferência de diâmetro $\overline{OA'}$, na qual encontra-se o ponto P' no qual subtende um ângulo reto. Desse modo, qualquer segmento que não passa por O , inverte dentro da circunferência passando por O e vice-versa.

Por último, analisaremos o inverso de uma circunferência que não passa por O .

Seja P qualquer ponto dentro de uma circunferência de centro C , que não passa pelo ponto O e seja Q a interseção do prolongamento de \overline{OP} com essa circunferência.

Temos, então, que o produto $p = OP \times OQ$, denominado, por Jacob Steiner (1776 - 1863), de força de O em relação à circunferência, é independente da posição de P na circunferência. Ele é positivo quando O está dentro da circunferência, zero quando O pertence a circunferência e negativo quando O está fora da circunferência, caso em que OP e OQ são medidos em direções opostas.

Seja a dilatação $O(\frac{k^2}{p})$ responsável em transformar a dada circunferência em outra circunferência - ou possivelmente a mesma - e o seu raio \overline{CQ} no raio paralelo $\overline{DP'}$, conforme a figura a seguir.

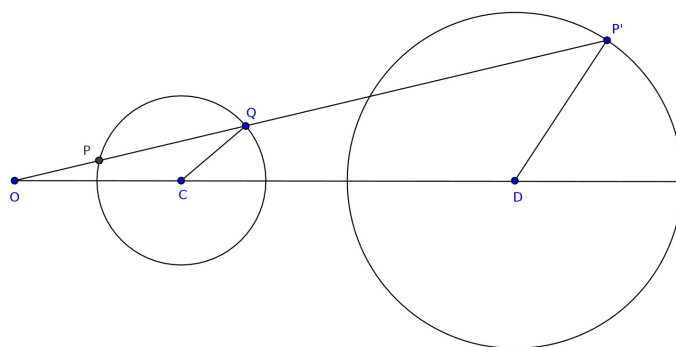


Figura 3.7: Dilatação

Desse modo, $\frac{OP'}{OQ} = \frac{OD}{OC} = \frac{k^2}{p}$. Já que $OP = OQ = p$, temos por multiplicação, $OP \times OP' = K^2$. Decorre que P' é o inverso de P e a circunferência com centro D é a circunferência inversa à circunferência dada com o centro C .

Portanto, mostramos que o inverso de uma circunferência que não passa por O é outra circunferência, ou possivelmente a mesma circunferência, caso em que deixamos para futuros estudos.

Referências Bibliográficas

- [1] H.S.M. Coxeter, Introduction to Geometry. Bull. Amer. Math.Soc. 68 (1962).
- [2] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer, Geometry Revisited. Washington: Mathematical Association of America, 1967.
- [3] MOISE, EE;Downs F. Geometria Moderna.São Paulo: Bliicher, 1971.