Bruno Rodrigues dos Santos

Primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente de curvas monomiais

Belo Horizonte

Setembro de 2016

Bruno Rodrigues dos Santos

Primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente de curvas monomiais

Dissertação de mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. André Luís Contiero

Universidade Federal de Minas Gerais

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Belo Horizonte

Setembro de 2016

Bruno Rodrigues dos Santos

Primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente de curvas monomiais

Dissertação de mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Prof. Dr. André Gimenez Bueno
Dep. de Matemática - UFMG

Prof. Dr. André Luís Contiero
Dep. de Matemática - UFMG

Prof. Dr. Marco Boggi
Dep. de Matemática - UFMG

Prof. Dr. Renato Vidal da Silva Martins
Dep. de Matemática - UFMG

Belo Horizonte

Setembro de 2016

Resumo

Este trabalho tem dois principais objetivos, o primeiro consiste em apresentar a construção do complexo cotangente de morfismos introduzida pelo célebre trabalho de Lichtenbaum–Schlessinger, a qual generaliza o complexo truncado de Grothendieck. O segundo obetivo é apresentar uma descrição explícita do primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente de uma curva monomial.

Palavras-chaves: Diferenciais de Kähler, Semigrupos numéricos, Curvas monomiais, Complexo cotangente, Cohomologia.

Abstract

The aim of this work is to present a rather explicit description of the first cohomology module of the cotangent complex of a monomial curve through the construction of the cotangent complex of a morphism introduced in a celebrated work of Lichtenbaum–Schlessinger, construction which generalizes the truncated cotangent complex introduced by A. Grothendieck.

Key-words: Kähler differentials, Numerical semigroups, Monomial curves, Cotangent Complex, Cohomology.

Sumário

Introdução

Os grupos (módulos) de homomologia e cohomologia representam uma das principais ferramentas matemáticas para caracterizar e/ou classificar objetos matemáticos. Uma boa parcela desta importância se deve ao fato que, em muitos casos, os grupos (módulos) de (co)-homologia são computáveis. Em geometria algébrica podemos, rapidamente, citar algumas dessas caracterizações e classificaçõs, como por exemplo o critério de *afinitude de Serre*, cf. [Liu, thm. 5.2.23], a caracterização do grupo de Picard em termos de um primeiro grupo de cohomologia, cf. [Liu, thm. 5.1.12], a correspondência de Kodaira–Spencer, cf. [Ser], em teoria de Deformações, e muitos outros.

Mais especificamente, é amplamente conhecido que muitos invariantes e objetos matemáticos de uma certa variedade são definidos a partir de seus espaços tangente e cotangente, como por exemplo, suavidade, gênero de curvas algébricas, teoremas de dualidades, teorema de Riemann–Roch, classes caracteísticas, etc. Desta forma, nos parece pelo menos razoável estudar diferentes grupos (módulos) de (co-)homologia induzidos por clássicas sequências exatas curtas envolvendo módulos de diferenciais.

No presente trabalho, apresentamos a construção de Lichtenbaum–Schelessinger [L-S], feita nos anos 60, de um complexo cotangente associado a uma extensão de um homomorfismo de anéis, induzindo módulos de (co-)homologia. Este célebre trabalho de Lichtembaum–Schelessinger, generaliza o functores de complexos cotangentes truncados introduzidos por Grothendieck [G].

São numerosas as aplicações do primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente. Algumas dessas recebem destaque. Como, por exemplo, o fato de que o primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente associado a uma curva é o espaço tangente de Zariski do moduli formal associado a curva, cf. [Pi, pg. 4]. A projetivização da parte negativamente graduada do primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente associado a uma curva monomial canônica é o espaço ambiente onde a variedade de moduli de curvas canônicas com semigrupo de Weierstrass fixado pode ser mergulhada, cf. [C-St] and [St]. Por outro lado, O. Zariski e B. Tessier [Z-T] mostraram que a parte positivamente graduada deste mesmo módulo de cohomologia de uma curva monomial parametriza certas curvas singulares. Curiosamente, muito pouco se conhece na literatura das implicações do segundo módulo de cohomologia na teoria de espaços de moduli de curvas.

O trabalho, ora apresentado, tem como principal objetivo a descriç ao do primeiro módulo de cohomologia do complexo contangente associado a uma curva monomial. Diante do exposto acima, a importância desta descrição é prontamente justificada.

Passamos agora a descrever de maneira sucinta os capítulos que compõe esta dissertação. No primeiro capítulo são apresentados os conceitos básicos de derivações, diferenciais de

Kähler e curvas monomiais. Na primeira seção obtemos, de maneira auto contida, as clássicas sequências exatas envolvendo derivações e módulos de diferenciais de Kähler. Na segunda seção introduzimos as curvas monomiais e apresentamos algumas de suas propriedades básicas.

No segundo capítulo são feitas as construções local e global do complexo cotangente. Fazemos tais construções seguindo o célebre trabalho de Lichtenbaum–Schlessinger [L-S]. A primeira secão é dedicada a exposição de extensões associadas a homomorfismos de anéis, e a cada extensão associamos um complexo cotangente. Na segunda seção estudamos algumas propriedades deste complexo cotangente. Temos especial interesse nas extensões livres, ie. extensões associadas a álgebras polinômiais, que neste caso as homologias e cohomologias independem da extensão. Na terceira seção fazemos a construção do complexo cotangente associado a um morfismo de esquemas, que neste caso é um feixe quase coerente.

No terceiro capítulo apresentamos resultados básicos para obter o anulamento primeiro módulo de cohomologia sob certas condições, resultados que serão utilizados no quarto e último capítulo.

O quarto e principal capítulo do presente trabalho tem como foco a descrição do primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente de curvas monomiais. Uma descrição pode ser encontrada no trabalho de O. Burchweitz [B]. Porém, a forma que o autor obtém sua descrição não nos é clara. Felizmente, temos uma descrição do primeiro módulo de cohomologia feita pelo Prof. Dr. Karl-Otto Stöhr (IMPA) e comunicada de maneira privada ao orientador deste trabalho. Além das notas citadas acima utilizamos também [L-S] para o desenvolvimento deste capítulo.

1 Preliminares

1.1 Derivações e diferenciais de Kähler

Em toda a dissertação os anéis são considerados comutativos com unidade e os homomorfismos de anéis levam unidade em unidade.

Definição 1.1. *Sejam $f : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis e M um B-módulo. Definimos*

$$Der_A(B, M) := \{D : B \longrightarrow M \mid D \text{ é } A\text{-linear e } D(xy) = xD(y) + yD(x), \text{ para todos } x, y \in B\}$$

chamado ***B-módulo das A-derivações*** *de B em M. Usualmente, a igualdade*

$$D(xy) = xD(y) + yD(x)$$

é denominada ***Regra de Leibniz.***

Exemplo: Tome $A := k[X, Y]$. Dada $D \in \mathrm{Der}_k(A, A)$ tem-se , por indução, $DX^m = mX^{m-1}DX = \frac{\partial}{\partial X}(X^m)DX$ para todo $m \geq 1$. Logo,

$$\begin{aligned} D(X^mY^n) &= X^mDY^n + Y^nDX^m \\ &= nX^mY^{n-1}DY + mY^nX^{m-1}DX \\ &= \frac{\partial}{\partial Y}(X^mY^n)DY + \frac{\partial}{\partial X}(X^mY^n)DX \end{aligned}$$

o que motiva a relação

$$D(f) = DX\frac{\partial f}{\partial X} + DY\frac{\partial f}{\partial Y}.$$

Note também que os coeficientes DX e DY são univocamente determinados por D, ou seja, $\mathrm{Der}_k(A, A) = A\frac{\partial}{\partial X} \bigoplus A\frac{\partial}{\partial Y}$ que é um módulo livre gerado por $\frac{\partial}{\partial X}$ e $\frac{\partial}{\partial Y}$. Esta propriedade será generalizada no terceiro exemplo do presente trabalho.

Exemplo: Sejam A um anel e $B := A[T_1, \ldots, T_n]$. Então a aplicação $\frac{\partial}{\partial T_i} : B \longrightarrow B$ dada por $f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial T_i}$ é uma A-derivação. De fato, $\frac{\partial}{\partial T_i}$ é claramente A-linear e satisfaz à regra de Leibniz, i.e., $\frac{\partial}{\partial T_i}(f \cdot g) = f\frac{\partial g}{\partial T_i} + g\frac{\partial f}{\partial T_i}$. Note que as derivadas parciais de segunda ordem $\frac{\partial^2}{\partial T_i^2}$ e $\frac{\partial^2}{\partial T_i T_j}$ não são A-derivações pois tomando por exemplo $f := T_1T_2, g := T_1, f' := T_1T_2 =: g'$ então

$$\frac{\partial^2 fg}{\partial T_1^2} = 2T_2 \neq 0 = f\frac{\partial^2 g}{\partial T_1^2} + g\frac{\partial^2 f}{\partial T_1^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 f'g'}{\partial T_1T_2} = 4T_1T_2 \neq 0 = f'\frac{\partial^2 g'}{\partial T_1T_2} + g'\frac{\partial^2 f'}{\partial T_1T_2}.$$

Definição 1.2. *Dado B um anel seja F o B-módulo livre gerado pelo conjunto $\{dx|x \in B\}$ e L o submódulo de F gerado pelos elementos das formas*

$$d(ax + a'y) - adx - a'dy \quad e \quad d(xy) - xdy - ydx,$$

onde $a, a' \in A$ e $x, y \in B$. O B-módulo $\Omega_{B|A} := F/L$ é chamado ***módulo de diferenciais de Kähler*** *de B sobre A.*

O homomorfismo natural

$$\begin{array}{rccc} d: & B & \longrightarrow & \Omega_{B|A} \\ & x & \longmapsto & dx \end{array}$$

satisfaz a seguinte propriedade universal: Dado $D \in \mathrm{Der}_A(B, M)$, onde M é um B-módulo, existe um único $D^* \in \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A}, M)$ fazendo o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "D"'] & \Omega_{B|A} \arrow[d, dashed, "D^*"] \\ & M \end{tikzcd}$$

comutar. De fato, basta considerar $D^*(a_1dx_1 + \ldots + a_ndx_n) := a_1D(x_1) + \ldots + a_nD(x_n)$, que está bem definida em virtude da definição do $\Omega_{B|A}$.

Exemplo: Se um anel A é gerado como uma k-álgebra por um subconjunto $S \subset A$ então $\Omega_{A|k}$ é gerado, como um A-módulo, por $\{da \,|\, a \in S\}$. Dado $a \in A$ existem $a_1, \ldots, a_n \in S$ e $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tais que $a = f(a_1, \ldots, a_n)$. Então

$$da = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(a_1, \ldots, a_n)da_i.$$

Em particular, se $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ $(S = \{X_1, \ldots, X_n\})$, então dada $D \in \mathrm{Der}_k(A, A)$ temos $D(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} D(X_i)\frac{\partial f}{\partial X_i}$, donde $\mathrm{Der}_k(A, A) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} A\frac{\partial}{\partial X_i}$. Além disso, $\Omega_{A|k} = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} AdX_i$ é livre sobre A, uma vez que $\{dX_1, \ldots, dX_n\}$ é linearmente independente sobre A. Para ver isso, considere derivações $D_1, \ldots, D_n \in \mathrm{Der}_k(A, A)$ tais que $D_i(X_j) = \delta_{ij}$ (tome por exemplo $D_i := \frac{\partial}{\partial X_i}$). Considere $\tilde{D}_i : \Omega_{A|k} \longrightarrow A$ a aplicação A-linear induzida de D_i. Se

$$f_1dX_1 + \ldots + f_ndX_n = 0$$

com $f_i \in A$ então avaliando $\tilde{D}_i$ nesta igualdade obtemos $f_i = 0$.

Proposição 1.1. *A A-derivação universal d induz um isomorfismo de A-módulos*

$$\begin{array}{rccc} d^*: & Hom_B(\Omega_{B|A}, M) & \cong & Der_A(B, M) \\ & f & \longmapsto & f \circ d \end{array}.$$

Demonstração: Segue da propriedade universal de d, d^* é sobrejetora. Agora, se $f \circ d \equiv 0$ então $f \equiv 0$, uma vez que f se anula nos geradores de $\Omega_{B|A}$, donde segue a injetividade de d^*.■

Proposição 1.2. ***(Primeira sequência exata)*** *Sejam* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *homomorfismos de anéis e* M *um* C*-módulo. Como* M *é um* C*-módulo,* $Der_A(B, M)$ *admite uma estrutura de* C*-módulo via* $(cD)(x) := cD(x)$*, com* $D \in Der_A(B, M)$*,* $c \in C$ *e* $x \in B$*. Desta forma a sequência de* C*-módulos*

$$0 \longrightarrow Der_B(C, M) \xrightarrow{\varphi} Der_A(C, M) \xrightarrow{\psi} Der_A(B, M)\ ,$$

onde $\varphi(D) := D$ *e* $\psi(D) := D \circ g$*, é exata.*

Demonstração: Primeiramente, note que φ está bem definida e é claramente injetora pois ela apenas restringe escalares de derivações. Seja agora $D \in \mathrm{Der}_A(C, M)$. Como g é A-linear ($g(ab) = g(f(a)b) = g(f(a))g(b) = ag(b)$, $a \in A$, $b \in B$) segue que $D \circ g$ também o é, e dados $x, y \in B$ tem-se $D \circ g(xy) = D(g(x)g(y)) = g(x)D(g(y)) + g(y)D(g(x)) = xD \circ g(y) + yD \circ g(x)$. Logo, ψ está bem definida e é claramente C-linear pois $(cD) \circ g = c(D \circ g)$, $c \in C$. Dado $x \in B$ temos $\psi \circ \varphi(D)(x) = D \circ g(x) = D(x \cdot 1_C) = xD(1_C) = 0$. Assim, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$. Tome $D \in \mathrm{Ker}(\psi)$, ou seja, uma A-derivação $C \xrightarrow{D} M$ tal que $D \circ g \equiv 0$. Dados $x \in C$ e $b \in B$ temos $D(bx) = D(g(b)x) = g(b)D(x) + xD(g(b)) = g(b)D(x) = bD(x)$ e então $D \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Portanto, a sequência acima é exata. ■

Observação: Dados $A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis, M um B-módulo e N um A-módulo, nas duas próximas proposições faremos uso do seguinte isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_B(N \otimes_A B, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(N, M)$$

dado por $f \mapsto f(n \otimes 1)$.

Proposição 1.3. ***(Segunda sequência exata)*** *Consideremos novamente* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *homomorfismos de anéis. Então a sequência de* C*-módulos*

$$\Omega_{B|A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega_{C|A} \xrightarrow{\beta} \Omega_{C|B} \longrightarrow 0\ ,$$

onde $\alpha(db \otimes c) := cdb$ *e* $\beta(dc) := dc$*, é exata.*

Demonstração: Dado um C-módulo M, temos o seguinte diagrama comutativo de C-módulos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(\Omega_{B|A} \otimes_B C, M) & \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C|A}, M) \arrow[l, "\alpha^*"'] & \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C|B}, M) \arrow[l, "\beta^*"'] \\
\mathrm{Der}_A(B, M) \arrow[u, "d_1^*"] & \mathrm{Der}_A(C, M) \arrow[l, "\psi"'] \arrow[u, "d_2^*"] & \mathrm{Der}_B(C, M) \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[u, "d_3^*"]
\end{tikzcd}$$

com d_1^*, d_2^*, d_3^* isomorfismos de C-módulos, onde d_2^*, d_3^* são dados a partir da propriedade universal das derivações universais e $d_1^*(D) := D^*$, $D^*(d_{B|A}x \otimes_B c) := cD(x)$ (a boa definição de D^* segue da propriedade universal do produto tensorial).

Então, do fato que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_B(C,M) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Der}_A(C,M) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Der}_A(B,M)$$

é exata tem-se que a sequência dual

$$\mathrm{Hom}_C(\Omega_{B|A} \otimes_B C, M) \xleftarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C|A}, M) \xleftarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C|B}, M)$$

é exata para qualquer C-módulo M. Portanto,

$$\Omega_{B|A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega_{C|A} \xrightarrow{\beta} \Omega_{C|B} \longrightarrow 0$$

é exata. ■

Observação: Alternativamente, veja que para $x \in B$ e $c \in C$ temos $\beta \circ \alpha(dx \otimes c) = \beta(cdx) = xcd1 = 0$ donde $\mathrm{Im}(\alpha) \subset \mathrm{Ker}(\beta)$. Agora seja $dy_0 \in \mathrm{Ker}(\beta)$, ou seja, $dy_0 = 0$. Como a aplicação

$$\begin{array}{rccl} D: & C & \longrightarrow & \Omega_{C|A}/\mathrm{Im}(\alpha) \\ & x & \longmapsto & dx(\mathrm{mod}\ \mathrm{Im}(\alpha)) \end{array}$$

é uma B-derivação temos $0 = D(y_0)$ e então $dy_0 \in \mathrm{Im}(\alpha)$.

Proposição 1.4. ***(Terceira sequência exata)*** *Sejam $A \xrightarrow{f} B$ um homomorfismo de anéis e I um ideal de B. Defina $C := B/I$. Então, para α como antes, a seguinte sequência de C-módulos*

$$I/I^2 \xrightarrow{\overline{d}} \Omega_{B|A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega_{C|A} \longrightarrow 0\ ,$$

onde $\overline{d}(x + I^2) := dx \otimes \overline{1}$, é exata.

Demonstração: Note inicialmente que $\Omega_{C|B} = 0$ uma vez que $d\overline{x} = xd\overline{1} = 0$. Veja também que $\overline{d}$ está bem definida uma vez que se $x, y \in I$ então $dxy \otimes \overline{1} = xdy \otimes \overline{1} + ydx \otimes \overline{1} = dy \otimes \overline{x} + dx \otimes \overline{y} = 0$. Para mostrar que a sequência acima é exata é suficiente mostrar que para qualquer C-módulo M, a sequência

$$\mathrm{Hom}_C(I/I^2, M) \xleftarrow{\Gamma} \mathrm{Der}_A(B,M) \xleftarrow{\widehat{\alpha}} \mathrm{Der}_A(C,M) \longleftarrow 0$$

onde $\Gamma(D) := D^* \circ \overline{d}$ e $\widehat{\alpha}(D) := D \circ g$. Agora veja que dado $x \in I$ e $D \in \mathrm{Der}_A(C,M)$ tem-se $\Gamma \circ \widehat{\alpha}(D)(x(\mathrm{mod}\ I^2)) = (D \circ g)^* \circ \overline{d}(x(\mathrm{mod}\ I^2)) = (D \circ g)^*(dx \otimes \overline{1}) = D(g(x)) = 0$ uma vez que $x \in I$ e g é o homomorfismo canônico de B em B/I.

Agora, seja $D \in \mathrm{Ker}(\Gamma)$, isto é, $D^* \circ \overline{d} = 0$. Defina $\widehat{D}(x\mathrm{mod}I) := D(x)$. Do fato que $D^* \circ \overline{d} = 0$ tem-se $\widehat{D}$ bem definida e, como D é uma A-derivação segue que $\widehat{D}$ também o é. Logo o diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dd, "\widehat{D}"] \\ B \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "D"'] & \\ & M \end{tikzcd}$$

comuta e então $\mathrm{Ker}(\Gamma) \subset \mathrm{Im}(\widehat{\alpha})$. ■

Observação: Um outro modo de ver que $\mathrm{Im}(\overline{d}) \subset \mathrm{Ker}(\alpha)$ é notando que $\alpha \circ \overline{d}(x(\mathrm{mod}\ I^2)) = \alpha(dx \otimes \overline{1}) = d\overline{x} = 0$. Para ver a inclusão contraria considere a aplicação

$$\begin{array}{cccc} D: & C & \longrightarrow & \Omega_{B|A} \otimes_B C \\ & \overline{y} & \longmapsto & dy \otimes 1(\mathrm{mod}\ \mathrm{Im}(\overline{d})) \end{array}.$$

Note que D está bem definida uma vez que $di \otimes 1 = \overline{d}(i\mathrm{mod}I^2)$ com $i \in I$. Como D é uma A-derivação temos um C-homomorfismo induzido D^* que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "D"'] & \Omega_{C|A} \arrow[d, dashed, "D^*"] \\ & \Omega_{B|A} \otimes_B C/\mathrm{Im}(\overline{d}) \end{tikzcd}$$

comutar. Em vista disso, fixado $dx \otimes \overline{y} \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ temos $\overline{y}d\overline{x} = 0$ donde $0 = D^*(\overline{y}d\overline{x}) = \overline{y}D^*(d\overline{x}) = \overline{y}D(\overline{x}) = \overline{y}dx \otimes 1(\mathrm{mod}\ \mathrm{Im}(\overline{d}))$ e então $dx \otimes \overline{y} \in \mathrm{Im}(\overline{d})$.

Lema 1.1. *Seja*

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de R-módulos. Dado um R-módulo M tem-se que a sequência de R-módulos

$$M_1 \otimes_R M \xrightarrow{\sigma} M_2 \otimes_R M \xrightarrow{\delta} M_3 \otimes_R M \longrightarrow 0\ ,$$

onde $\sigma(m_1 \otimes m) := f(m_1) \otimes m$ e $\delta(m_2 \otimes m) := g(m_2) \otimes m$, é exata. Noutras palavras, o functor $N \mapsto N \otimes_R M$ é exato à diretia.

Demonstração: Note que $\delta(\sigma(m_1 \otimes m)) = \delta(f(m_1) \otimes m) = g(f(m_1)) \otimes m = 0$ pois $g(f(m_1)) = 0$. Logo, $\mathrm{Im}(\sigma) \subset \mathrm{Ker}(\delta)$ e então obtemos o R-homomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \Gamma: & M_2 \otimes M/\mathrm{Im}(\sigma) & \longrightarrow & M_2 \otimes M \\ & m_2 \otimes m(\mathrm{mod}\ \mathrm{Im}(\sigma)) & \longmapsto & g(m_2) \otimes m \end{array}.$$

Como g é sobrejetora ela tem uma inversa a direita $M_3 \xrightarrow{h} M_2$ e então definimos

$$\begin{array}{cccc} \Delta: & M_3 \times M & \longrightarrow & M_2 \otimes M/\mathrm{Im}(\sigma) \\ & (m_3, m) & \longmapsto & h(m_3) \otimes m(\mathrm{mod}\ \mathrm{Im}(\sigma)) \end{array}.$$

Veja que dados $r \in R$, $m_3, m_3' \in M_3$ tem-se $h(rm_3) - rh(m_3), h(m_3 + m_3') - h(m_3) - h(m_3') \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ donde Δ é bilinear e portanto induz o R-homomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \Delta^*: & M_3 \otimes M & \longrightarrow & M_2 \otimes M/\mathrm{Im}(\sigma) \\ & m_3 \otimes m & \longmapsto & h(m_3) \otimes m(\mathrm{mod}\ \mathrm{Im}(\sigma)) \end{array}$$

que é o R-homomorfismo inverso de Γ. ■

Tomando a segunda sequência exata e fazendo o produto por $\otimes_C M$ obtemos a

Proposição 1.5. ***(Quarta sequência exata)****Sejam* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *homomorfismos de anéis e M um C-módulo. Então a sequência de C-módulos*

$$\Omega_{B|A} \otimes_B M \xrightarrow{\sigma} \Omega_{C|A} \otimes_C M \xrightarrow{\delta} \Omega_{C|B} \otimes_C M \longrightarrow 0\,,$$

onde $\sigma(dx \otimes m) := dx \otimes m$ e $\delta(dy \otimes m) := dy \otimes m$, é exata.

Demonstração: Basta aplicar a propriedade de exatidão à direita do produto tensorial a segunda sequência exata. ∎

Proposição 1.6. ***(Mudança de base)****Sejam* $A \longrightarrow B$ *e* $A \longrightarrow A'$ *homomorfismos de anéis e $B' := B \otimes_A A'$. Então*

$$\Omega_{B|A} \otimes_A A' \cong \Omega_{B'|A'}.$$

Na prova dada abaixo mostraremos que o isomorfismo acima trata-se de um B'-isomorfismo.

Demonstração: Notemos inicialmente que podemos fazer de $B \otimes_A A'$ um anel (produto tensorial de A-álgebras).

Dado $dy_0 \otimes a_0 \in \Omega_{B|A} \otimes_A A'$ temos a aplicação A-bilinear

$$\begin{array}{rccc} \psi_{dy_0 \otimes a_0}: & B \times A' & \longrightarrow & \Omega_{B|A} \otimes_A A' \\ & (x, a') & \longmapsto & x dy_0 \otimes a' a_0 \end{array}$$

que induz o A-homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \psi^*_{dy_0 \otimes a_0}: & B \otimes A' & \longrightarrow & \Omega_{B|A} \otimes_A A' \\ & x \otimes a' & \longmapsto & x dy_0 \otimes a' a_0 \end{array}.$$

Definindo $(x \otimes a') \cdot (dy \otimes a) := \psi^*_{dy \otimes a}(x \otimes a')$ temos que $\Omega_{B|A} \otimes_A A'$ é um B'-módulo. Seja

$$\begin{array}{rccc} D_1: & B' & \longrightarrow & \Omega_{B|A} \otimes_A A' \\ & x \otimes a & \longmapsto & dx \otimes a \end{array}.$$

D_1 é uma A'-derivação. De fato,

$$\begin{aligned} D_1(x_1 \otimes a_1')(x_2 \otimes a_2')) &= D_1(x_1 x_2 \otimes a_1' a_2') \\ &= d(x_1 x_2) \otimes a_1' a_2' \\ &= (x_1 dx_2 + x_2 dx_1) \otimes a_1' a_2' \\ &= (x_1 dx_2) \otimes a_1' a_2' + (x_2 dx_1) \otimes a_1' a_2' \\ &= (x_1 \otimes a_1')(dx_2 \otimes a_2') + (x_2 \otimes a_2')(dx_1 \otimes a_1') \\ &= (x_1 \otimes a_1') D_1(x_2 \otimes a_2') + (x_2 \otimes a_2') D_1(x_1 \otimes a_1') \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_1(a_1'(x \otimes a_2')) &= D_1(x \otimes a_1' a_2') \\ &= dx \otimes a_1' a_2' \\ &= a_1'(dx \otimes a_2') \\ &= a_1' D_1(x \otimes a_2'). \end{aligned}$$

Logo, obtemos o B'-homomorfismo $D_1^* : \Omega_{B'|A'} \longrightarrow \Omega_{B|A} \otimes_A A'$ dado por $d(x \otimes a') \longmapsto dx \otimes a'$.

Consideremos agora a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & B & \longrightarrow & \Omega_{B'|A'} \\ & x & \longmapsto & d(x \otimes 1) \end{array}.$$

Como φ é uma A-derivação temos o B-homomorfismo induzido

$$\begin{array}{rccc} \varphi^* : & \Omega_{B|A} & \longrightarrow & \Omega_{B'|A'} \\ & dx & \longmapsto & d(x \otimes 1) \end{array}.$$

Por fim, a A-bilinearidade da aplicação

$$\begin{array}{rccc} D_2 : & \Omega_{B|A} \times A' & \longrightarrow & \Omega_{B'|A'} \\ & (dx, a') & \longmapsto & a'\varphi^*(dx) \end{array}$$

induz o B'-homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} D_2^* : & \Omega_{B|A} \otimes_A A' & \longrightarrow & \Omega_{B'|A'} \\ & dx \otimes a' & \longmapsto & a'\varphi^*(dx) = d(x \otimes a') \end{array}$$

que é o inverso de D_1^*. ∎

2 Complexo Cotangente

2.1 Extensões

Definição 2.1. *Seja* $A \longrightarrow B$ *um homomorfismo de anéis. Uma* ***extensão*** *de* B *sobre* A *é uma sequência exata de* R*-módulos*

$$(\mathscr{E}): \qquad 0 \longrightarrow E_2 \xrightarrow{e_2} E_1 \xrightarrow{e_1} R \xrightarrow{e_0} B \longrightarrow 0$$

onde e_0 *é uma sobrejeção de* A*-álgebras com* e_1, e_2 *homomorfismos de* R*-módulos satisfazendo*

$$e_1(x)y = e_1(y)x$$

para quaisquer $x, y \in E_1$*. Dizemos que* $\mathscr{E}$ *é* ***livre*** *se* R *for uma* A*-álgebra polinomial.*

Dado um homomorfismo $A \longrightarrow B$ de anéis, podemos obter uma extnsão de B sobre A como segue. Considere, primeiramente, uma sobrejeção $e_0 : R \longrightarrow B$ de A-álgebras e tome $I := \operatorname{Ker}(e_0)$. Considerando I como um R-módulo, e lembrando que todo módulo é um quociente de um R-módulo livre, podemos obter uma sequência exata de R-módulos da forma

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} F \xrightarrow{j} I \longrightarrow 0.$$

Como a aplicação

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & j(x)y - j(y)x \end{array}$$

é R-bilinear, obtemos o R-homomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & F \otimes_R F & \longrightarrow & F \\ & x \otimes y & \longmapsto & j(x)y - j(y)x \end{array},$$

cuja imagem é $U_0 := \operatorname{Im}(\varphi)$. Como $j(\varphi(x \otimes y)) = j(x)j(y) - j(y)j(x) = 0$ temos $U_0 \subset \operatorname{Ker}(j) = \operatorname{Im}(i) = U$. Logo, obtemos os seguintes homomorfismos de R-módulos

$$\begin{array}{cccc} e_1 : & F/U_0 & \longrightarrow & R \\ & f(\text{mod } U_0) & \longmapsto & j(f) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{cccc} e_2 : & U/U_0 & \longrightarrow & F/U_0 \\ & u(\text{mod } U_0) & \longmapsto & u(\text{mod } U_0) \end{array}.$$

Obtemos, portanto, a seguinte extensão de B sobre A:

$$(\mathscr{E}): \qquad 0 \longrightarrow U/U_0 \xrightarrow{e_2} F/U_0 \xrightarrow{e_1} R \xrightarrow{e_0} B \longrightarrow 0\,.$$

Observamos que $e_1(\bar{x})\bar{y} = j(x)\bar{y} = j(y)\bar{x} = e_1(\bar{y})\bar{x}$, para quaisquer $\bar{x}, \bar{y} \in F/U_0$, e que $\mathscr{E}$ é claramente exata. Note também que $(F/U_0) \otimes_R B \simeq F \otimes_R B$ é um B-módulo livre. Para ver isso basta notar que a aplicação canônica $F/U_0 \times B \longrightarrow F \otimes_R B$ dada por $(\bar{x}, b) \mapsto x \otimes b$ está bem definida e, por sua bilinearidade, induz o isomorfismo $(F/U_0) \otimes_R B \xrightarrow{\sim} F \otimes_R B$.

Exemplo: Seguindo alguns dos passos como acima vamos calcular uma (não necessariamente única) extensão de $\mathbb{Z} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}[X,Y]}{(X)}$, i.e., uma extensão associada ao eixo $V(X) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}$. Começamos com o homomorfismo sobrejetor canônico $e_0 : \mathbb{Z}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{Z}[X,Y]/(X)$. Note que (X) é um $\mathbb{Z}[X,Y]$-módulo livre de posto 1. Seguindo a construção acima tomamos $U = 0$. Note que aqui $R = \mathbb{Z}[X,Y]$ e com isso a aplicação $\varphi : F \otimes_R F \longrightarrow F$ tem imagem $U_0 = 0$ pois $\varphi(f \otimes g) = j(f)g - j(g)f = f \cdot X \cdot g - g \cdot X \cdot f = 0$. Logo, otemos a extensão

$$(\mathscr{E}) : \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}[X,Y] \xrightarrow{e_1} \mathbb{Z}[X,Y] \xrightarrow{e_0} \mathbb{Z}[X,Y]/(X) \longrightarrow 0$$

que para este caso é uma sequência exata curta de $\mathbb{Z}[X,Y]$-módulos. Note que ela não é necessariamente única pois poderíamos ter tomado uma outra sequência exata

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{Z}[X,Y]^{\oplus \Lambda} \longrightarrow (X) \longrightarrow 0$$

com $K \neq 0$.

Considere $I := \operatorname{Ker}(e_0)$, podemos verificar que $IE_2 = 0$. De fato, se $a \in I$ e $x \in E_2$ então, escolhendo $y \in E_1$ tal que $e_1(y) = a$, temos $e_2(ax) = ae_2(x) = e_1(y)e_2(x) = e_1(e_2(x))y = 0$ donde $ax = 0$ uma vez que $\operatorname{Ker}(e_2) = 0$. Como $B = R/I$, E_2 admite uma estrutura de B-módulo com produto dado por $b \cdot x := r \cdot x$, para $b \in B$, $r \in R$ com $e_0(r) = b$ e $x \in E_2$.

Definição 2.2. *Sejam $\mathscr{E}$ uma extensão de B sobre A e B' uma extensão de B' sobre A', com A' uma A-álgebra. Um **homomorfismo** $\alpha : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$ é uma coleção $(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, b)$ de aplicações que fazem o seguinte diagrama comutar*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_2' \arrow[r, "e_2'"] & E_1' \arrow[r, "e_1'"] & R' \arrow[r, "e_0'"] & B' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_2 \arrow[r, "e_2"'] \arrow[u, "\alpha_2"] & E_1 \arrow[r, "e_1"'] \arrow[u, "\alpha_1"] & R \arrow[r, "e_0"'] \arrow[u, "\alpha_0"] & B \arrow[r] \arrow[u, "b"] & 0
\end{tikzcd}$$

onde b e α_0 são homomorfismos de A-álgebras e α_1, α_2 homomorfismos de R-módulos.

A cada extensão de B sobre A

$$(\mathscr{E}) : \qquad 0 \longrightarrow E_2 \xrightarrow{e_2} E_1 \xrightarrow{e_1} R \xrightarrow{e_0} B \longrightarrow 0$$

associamos o seguinte complexo de R-módulos

$$L \cdot (\mathscr{E}) : \qquad 0 \longrightarrow E_2 \xrightarrow{d_2} E_1 \otimes_R B \xrightarrow{d_1} \Omega_{R|A} \otimes_R B \longrightarrow 0$$

obtido como segue: Primeiro defina $d_2(y) := e_2(y) \otimes 1$. Considere, agora, o homomorfismo de R-módulos

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & I/I^2 & \longrightarrow & \Omega_{R|A} \otimes_R B \\ & x(\operatorname{mod} I^2) & \longmapsto & dx \otimes 1 \end{array}$$

que está bem definido uma vez que se $x, y \in I$ então $d(xy) \otimes 1 = dy \otimes x + dx \otimes y = 0$. Como $I/I^2 = I \otimes_R (R/I) = I \otimes_R B$ podemos definir $d_1 := \lambda \circ (e_1 \otimes_R \operatorname{Id}_B)$. Desta forma, é possível verificar que $L \cdot (\mathscr{E})$ é um complexo.

Definição 2.3. *Para cada extensão $\mathscr{E}$ associamos o complexo $L\cdot(\mathscr{E})$ que é chamado o* ***complexo cotangente associado a*** $\mathscr{E}$*.*

Definição 2.4. *Seja R uma A-álgebra. Dizemos que R tem a propriedade (L) se para quaisquer A-álgebra S, $u : M \longrightarrow S$ um homomorfismo de S-ódulos tal que $u(x)y = u(y)x$ para quaisquer $x, y \in M$, e homomorfismos de A-álgebras $f, g : R \longrightarrow S$ tais que $Im(f - g) \subset Im(u)$, existir uma biderivação $\lambda : R \longrightarrow M$ tal que $u \circ \lambda = f - g$.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] & S \\ & R \arrow[u, shift right, "f"] \arrow[u, shift left, "g"'] \arrow[ul, dashed, "\lambda"] \end{tikzcd}$$

Uma biderivação no caso acima é uma aplicação A-linear $\lambda : R \longrightarrow M$ tal que $\lambda(xy) = f(x)\lambda(y) + g(y)\lambda(x)$ para quaisquer $x, y \in M$. Note que na definição acima $f - g$ é uma biderivação.

Lema 2.1. *Se R é uma álgebra polinomial sobre A então R tem a propriedade (L).*

Demonstração: Sejam $u : M \longrightarrow S$ e $f, g : R \longrightarrow S$ como da definição 2.4 e suponha $R = A[T_i]_{i \in I}$ (I um conjunto de índices). Uma vez que $\mathrm{Im}(f - g) \subset \mathrm{Im}(u)$, para cada $i \in I$ podemos escolher um único $\lambda(T_i) \in M$ tal que $u(\lambda(T_i)) = f(T_i) - g(T_i)$. Sobre cada monômio $T_{i_1} \cdots T_{i_n}$ definimos

$$\lambda(T_{i_1} \cdots T_{i_n}) := \sum_{k=1}^{n} f(T_{i_1} \cdots T_{i_{k-1}})\lambda(T_{i_k})g(T_{i_{k+1}} \cdots T_{i_n}) \qquad (*)$$

Para ver que λ está bem definida sobre cada monômio basta notar que $\lambda(T_{i_1} \cdots T_{i_n})$ é invariante por transposições (i_p, i_{p+1}) dos índices $i_1, \cdots, i_n$. De fato,

$$\begin{gathered} \lambda(T_{i_1} \cdots T_{i_{p+1}} T_{i_p} \cdots T_{i_n}) - \lambda(T_{i_1} \cdots T_{i_p} T_{i_{p+1}} \cdots T_{i_n}) \\ = f(T_{i_1} \cdots T_{i_{p-1}})\lambda(T_{i_{p+1}})g(T_{i_p} T_{i_{p+2}} \cdots T_{i_n}) + f(T_{i_1} \cdots T_{i_{p-1}} T_{ip+1})\lambda(T_{i_p})g(T_{i_{p+2}} \cdots T_{i_n}) \\ -f(T_{i_1} \cdots T_{i_{p-1}})\lambda(T_{i_p})g(T_{i_{p+1}} \cdots T_{i_n}) - f(T_{i_1} \cdots T_{i_p})\lambda(T_{i_{p+1}})g(T_{i_{p+2}} \cdots T_{i_n}) \\ = c(\lambda(T_{i_{p+1}})g(T_{i_p}) + f(T_{i_{p+1}})\lambda(T_{i_p}) - \lambda(T_{i_p})g(T_{i_{p+1}}) - f(T_{i_p})\lambda(T_{i_{p+1}})) \\ = c(-y(f(T_{i_p}) - g(T_{i_p})) + (f(T_{i_{p+1}}) - g(T_{i_{p+1}}))x) = c(-yu(\lambda(T_{i_p})) + u(\lambda(T_{i_{p+1}}))x) \\ = c(-yu(x) + u(y)x) = 0, \end{gathered}$$

onde $c = f(T_{i_1} \cdots T_{i_{p-1}})g(T_{i_{p+2}} \cdots T_{i_n})$, $x = \lambda(T_{i_p})$ e $y = \lambda(T_{i_{p+1}})$. Estendendo λ por linearidade a todo o R temos, de $(*)$, que λ é uma biderivação. Para ver isso, considere por exemplo $X = T_{i_1} \cdots T_{i_k}$ e $Y = T_{i_{k+1}} \cdots T_{i_n}$, e veja que

$$f(X)\lambda(Y) + g(Y)\lambda(X) = f(X) \sum_{j=k+1}^{n} f(T_{i_{k+1}} \cdots T_{i_{j-1}})\lambda(T_{i_j})g(T_{i_{j+1}} \cdots T_{i_n})$$

$$+g(Y)\sum_{j=1}^{k} f(T_{i_1}\cdots T_{i_{j-1}})\lambda(T_{i_j})g(T_{i_{j+1}}\cdots T_{i_k}) = \Big(\sum_{j=1}^{k} f(T_{i_1}\cdots T_{i_{j-1}})\lambda(T_{i_j})g(T_{i_{j+1}}\cdots T_{i_k})\Big)g(T_{i_{k+1}}\cdots T_{i_n})$$

$$+f(T_{i_1}\cdots T_{i_k})\sum_{j=k+1}^{n} f(T_{i_{k+1}}\cdots T_{i_{j-1}})\lambda(T_{i_j})g(T_{i_{j+1}}\cdots T_{i_n}) = \lambda(XY).$$

Agora, do fato que $f-g$ é uma biderivação e que $u(\lambda(T_i)) = f(T_i) - g(T_i)$ tem-se $u\circ\lambda = f-g$. Veja por exemplo que

$$\begin{aligned} u(\lambda(T_{i_1}T_{i_2})) &= u(\lambda(T_{i_1})g(T_{i_2}) + f(T_{i_1})\lambda(T_{i_2}) \\ &= u(\lambda(T_{i_1}))g(T_{i_2}) + f(T_{i_1})u(\lambda(T_{i_2})) \\ &= g(T_{i_2})(f-g)(T_{i_1}) + f(T_{i_1})(f-g)(T_{i_2}) \\ &= (f-g)(T_{i_1}T_{i_2}). \end{aligned}$$

■

Considere um diagrama comutativo de anéis

(*)
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & B' \\ A \arrow[u] \arrow[r, "a"'] & A' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Sejam $\mathscr{E}$ e $\mathscr{E}'$ extensões B sobre A e B' sobre A', respectivamente. Assuma que exista um homomorfismo $\alpha = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, b) : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$ de extensẽs, i.e., um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E_2 \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & E_1 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & R \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E_2' \arrow[r, "e_2'"'] & E_1' \arrow[r, "e_1'"'] & R' \arrow[r, "e_0'"'] & B' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Neste caso, obtemos um homomorfismo $\overline{\alpha} : L\cdot(\mathscr{E}) \otimes_B B' \longrightarrow L(\mathscr{E}')$ como segue. Como a composição $R \xrightarrow{\alpha_0} R' \xrightarrow{d} \Omega_{R'/A'}$ é uma A-derivação obtemos o homomorfismo de R-módulos

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{R|A} & \longrightarrow & \Omega_{R'|A'} \\ dx & \longmapsto & d(\alpha_0(x)) \end{array}$$

que induz o homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \overline{\alpha}_0 : & \Omega_{R|A}\otimes_R B' & \longrightarrow & \Omega_{R'|A'}\otimes_{R'} B' \\ & dx\otimes b' & \longmapsto & d(\alpha_0(x))\otimes b' \end{array}.$$

Considerando os seguintes homomorfismos de B'-módulos,

$$\begin{array}{rccc} d_1' : & E_1'\otimes_{R'} B' & \longrightarrow & \Omega_{R'|A'}\otimes_{R'} B' \\ & x\otimes b' & \longmapsto & d(e_1'(x))\otimes b' \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} d_1^* : & E_1\otimes_R B' & \longrightarrow & \Omega_{R|A}\otimes_R B' \\ & x\otimes b' & \longmapsto & d(e_1(x))\otimes b' \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rrcl} \overline{\alpha}_2 : & E_2 \otimes_B B' & \longrightarrow & E'_2 \\ & x \otimes b' & \longmapsto & b'\alpha_2(x) \end{array}$$

temos

$$\begin{array}{rcl} d'_2 \circ \overline{\alpha}_2(x \otimes b') & = & d'_2(b'\alpha_2(x)) \\ & = & e'_2(b'\alpha_2(x)) \otimes 1 \\ & = & e'_2(h'(b')\alpha_2(x)) \otimes 1 \\ & = & h'(b')[e'_2(\alpha_2(x)) \otimes 1] \\ & = & e'_2(\alpha_2(x)) \otimes b' \\ & = & \overline{\alpha}_1(e_2(x) \otimes b') \\ & = & \overline{\alpha}_1 \circ d^*_2(x \otimes b') \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{\alpha}_0 \circ d^*_1(x \otimes b') & = & \overline{\alpha}_0(d(e_1(x)) \otimes b') \\ & = & d(\alpha_0(e_1(x))) \otimes b' \\ & = & d(\alpha_0(e_1(x))) \otimes b' \\ & = & d(e'_1(\alpha_1(x))) \otimes b' \\ & = & d'_1(\alpha_1(x) \otimes b') \\ & = & d'_1 \circ \overline{\alpha}_1(x \otimes b'). \end{array}$$

Portanto, $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_0) : L\cdot(\mathscr{E}) \otimes_B B' \longrightarrow L(\mathscr{E}')$ é um homomorfismo, i.e., temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} L\cdot(\mathscr{E}) \otimes_B B' : & 0 \arrow[r] & E_2 \otimes_B B' \arrow[r, "d^*_2"] \arrow[d, "\overline{\alpha}_2"'] & E_1 \otimes_R B' \arrow[r, "d^*_1"] \arrow[d, "\overline{\alpha}_1"'] & \Omega_{R|A} \otimes_R B' \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\alpha}_0"'] & 0\ . \\ L\cdot(\mathscr{E}') : & 0 \arrow[r] & E'_2 \arrow[r, "d'_2"'] & E'_1 \otimes_{R'} B' \arrow[r, "d'_1"'] & \Omega_{R'|A'} \otimes_{R'} B' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Fazemos, agora, uma breve digressão acerca de homotopia entre complexos de módulos. Sejam A um anel, $K_\bullet = \{\ldots \longrightarrow K_n \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow K_{n-2} \longrightarrow \ldots\}$ e $K'_\bullet = \{\ldots \longrightarrow K'_n \longrightarrow K'_{n-1} \longrightarrow K'_{n-2} \longrightarrow \ldots\}$ complexos de A-modulos. Dados dois homomorfismos $f, g : K_\bullet \longrightarrow K'_\bullet$, dizemos que f é homotópico a g quando existirem homomorfismos de A-módulos $h_n : K_n \longrightarrow K'_{n+1}$ tais que

$$f_n - g_n = d' \circ h_n + h_{n-1} \circ d$$

para todo n.

O lema seguinte juntamente com a proposição 2.1 são fundamentais no sentido de revelar a não depêndencia da homomologia do complexo cotangente associado a uma extensão livre, ou seja, neste caso a homologia de um complexo cotangente depende exclusivamente do homomorfismos de anéis fixado.

Lema 2.2. *Dado o diagrama $(*)$ sejam $\mathscr{E}$ e $\mathscr{E}'$ extensões de B sobre A e de B' sobre A', respectivamente. Considere $\alpha = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, b), \beta = (\beta_2, \beta_1, \beta_0, b) : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$ homomorfismos.*

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{E}): & 0 \arrow[r] & E_2 \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, shift right, "\alpha_2"'] \arrow[d, shift left, "\beta_2"] & E_1 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, shift right, "\alpha_1"'] \arrow[d, shift left, "\beta_1"] & R \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, shift right, "\alpha_0"'] \arrow[d, shift left, "\beta_0"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \\
(\mathscr{E}'): & 0 \arrow[r] & E_2' \arrow[r, "e_2'"'] & E_1' \arrow[r, "e_1'"'] & R' \arrow[r, "e_0'"'] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Se R tem a propriedade (L) então $\overline{\alpha} : L\cdot(\mathscr{E})\otimes_B B' \longrightarrow L(\mathscr{E}')$ é homotópica a $\overline{\beta} : L\cdot(\mathscr{E})\otimes_B B' \longrightarrow L(\mathscr{E}')$.

Demonstração: Note inicialmente que $e_0' \circ (\alpha_0 - \beta_0) = e_0' \circ \alpha_0 - e_0' \circ \beta_0 = b \circ e_0 - b \circ e_0 = 0$ donde que $\mathrm{Im}(\alpha_0 - \beta_0) \subset \mathrm{Ker}(e_0') = \mathrm{Im}(e_1')$. Logo, como R tem a propriedade (L), tomando $M = E_1'$, $S = R'$, $f = \alpha_0$, $g = \beta_0$ e $u = e_1'$, como na definição 2.4, temos uma biderivação $\lambda : R \longrightarrow E_1'$ tal que $e_1' \circ \lambda = \alpha_0 - \beta_0$.

$$\begin{tikzcd}
E_1' \arrow[r, "e_1'"] & R' \\
 & R \arrow[ul, dashed, "\lambda"] \arrow[u, shift right, "\alpha_0"] \arrow[u, shift left, "\beta_0"']
\end{tikzcd}$$

Seja $\theta : E_1 \longrightarrow E_1'$ a aplicação A-linear dada por $\theta = \beta_1 - \alpha_1 + \lambda \circ e_1$. Note agora que $e_1' \circ \theta = e_1' \circ (\beta_1 - \alpha_1 + \lambda \circ e_1) = e_1' \circ \beta_1 - e_1' \circ \alpha_1 + e_1' \circ \lambda \circ e_1 = \beta_0 \circ e_1 - \alpha_0 \circ e_1 + e_1' \circ \lambda \circ e_1 = (\beta_0 - \alpha_0 + e_1' \circ \lambda) \circ e_1 = 0$. Logo, $\mathrm{Im}(\theta) \subset \mathrm{Ker}(e_1') = \mathrm{Im}(e_2')$. Convém observar também que dados $r \in R$, $x \in E_1$ tem-se $(\alpha_0 - \beta_0)(r) \cdot \theta(x) = e_1'(\lambda(r)) \cdot \theta(x) = e_1'(\theta(x)) \cdot \lambda(r) = 0 \cdot \lambda(r) = 0$, i.e., as ações do R via α_0 e β_0 são iguais. Temos que θ é R-linear. De fato, se $r \in R$ e $x \in E_1$ então

$$\begin{aligned}
\theta(rx) &= \beta_1(rx) - \alpha_1(rx) + \lambda(re_1(x)) \\
&= \beta_0(r)\beta_1(x) - \alpha_0(r)\alpha_1(x) + \alpha_0(r)\lambda(e_1(x)) + \beta_0(e_1(x))\lambda(r)
\end{aligned}$$

e

$$\alpha_0(r)\theta(x) = \alpha_0(r)\beta_1(x) - \alpha_0(r)\alpha_1(x) + \alpha_0(r)\lambda(e_1(x))$$

que nos dá

$$\begin{aligned}
\theta(rx) - \alpha_0(r)\theta(x) &= (\beta_0(r) - \alpha_0(r))\beta_1(x) + \beta_0(e_1(x))\lambda(r) \\
&= -e_1'\beta_1(x) + e'(\beta_1(x))\lambda(r) \\
&= -e_1'\beta_1(x) + e_1'\beta_1(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como e_2' é injetora ela tem uma inversa a esquerda $g' : \mathrm{Im}(e_2') \longrightarrow E_2'$ que claramente é R-linear uma vez que e_2' é R-linear. Com isso, obtemos o homomorfismo de R-módulos

$$\begin{array}{rccc}
\lambda_1 : & E_1 \otimes_R B' & \longrightarrow & E_2' \\
 & x \otimes b' & \longmapsto & -b'g'(\theta(x))
\end{array}.$$

Agora, λ induz a A-derivação

$$\begin{array}{rccl} \overline{\lambda}: & R & \longrightarrow & E'_1 \otimes_{R'} B' \\ & r & \longmapsto & \lambda(r)\otimes 1 \end{array}.$$

Pela propriedade universal de $\Omega_{R|A}$ temos o homomorfismo de R-módulos

$$\begin{array}{rccl} \overline{\lambda}_0: & \Omega_{R|A} & \longrightarrow & E'_1 \otimes_{R'} B' \\ & dx & \longmapsto & \lambda(x)\otimes 1 \end{array}$$

que induz

$$\begin{array}{rccl} \lambda_0: & \Omega_{R|A}\otimes_R B' & \longrightarrow & E'_1 \otimes_{R'} B' \\ & dx\otimes b' & \longmapsto & \lambda(x)\otimes b' \end{array}.$$

$$\begin{tikzcd} L\cdot(\mathscr{E})\otimes_B B': & 0 \arrow[r] & E_2\otimes_B B' \arrow[r, "d_2^*"] \arrow[d, shift right, "\overline{\alpha}_2"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\beta}_2"] & E_1\otimes_R B' \arrow[r, "d_1^*"] \arrow[dl, "\lambda_1"'] \arrow[d, shift right, "\overline{\alpha}_1"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\beta}_1"] & \Omega_{R|A}\otimes_R B' \arrow[r] \arrow[dl, "\lambda_0"'] \arrow[d, shift right, "\overline{\alpha}_0"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\beta}_0"] & 0 \\ L\cdot(\mathscr{E}'): & 0 \arrow[r] & E'_2 \arrow[r, "d'_2"'] & E'_1\otimes_{R'} B' \arrow[r, "d'_1"'] & \Omega_{R'|A'}\otimes_{R'} B' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Mostremos agora que

$$\begin{cases} \overline{\alpha}_2-\overline{\beta}_2=\lambda_1\circ d_2^* \\ \overline{\alpha}_1-\overline{\beta}_1=d'_2\circ\lambda_1+\lambda_0\circ d_1^* \\ \overline{\alpha}_0-\overline{\beta}_0=d'_1\circ\lambda_0 \end{cases}$$

Para $x\in E_2$, $b'\in B'$

$$\begin{aligned} \lambda_1\circ d_2^*(x\otimes b') &= \lambda_1(e_2(x)\otimes b') \\ &= -b'g'(\theta(e_2(x))) \\ &= -b'g'(\beta_1(e_2(x))-\alpha_1(e_2(x))+\lambda(e_1(e_2(x)))) \\ &= -b'g'(e'_2(\beta_2(x))-e'_2(\alpha_2(x))) \\ &= -b'(\beta_2(x)-\alpha_2(x)) \\ &= b'(\alpha_2(x)-\beta_2(x)) \\ &= (\bar{\alpha}_2-\bar{\beta}_2)(x\otimes b'). \end{aligned}$$

Para $x\in E_1$ e $b'\in B'$

$$\begin{aligned} (d'_2\circ\lambda_1+\lambda_0\circ d_1^*)(x\otimes b') &= d'_2(-b'g'(\theta(x)))+\lambda_0(d(e_1(x))\otimes b') \\ &= e'(-h'(b')g'(\theta(x)))\otimes 1+\lambda(e_1(x))\otimes b' \\ &= -e'_2(g'(\theta(x)))\otimes b'+\lambda(e_1(x))\otimes b' \\ &= -\theta(x)\otimes b'+\lambda(e_1(x))\otimes b' \\ &= \alpha_1(x)\otimes b'-\beta_1(x)\otimes b'-\lambda(e_1(x))\otimes b'+\lambda(e_1(x))\otimes b' \\ &= \alpha_1(x)\otimes b'-\beta_1(x)\otimes b' \\ &= (\bar{\alpha}_1-\bar{\beta}_1)(x\otimes b'). \end{aligned}$$

Para $x \in R$ e $b' \in B'$

$$\begin{aligned} d'_1 \circ \lambda_0(dx \otimes b') &= d'_1(\lambda(x) \otimes b') \\ &= d(e'_1(\lambda(x))) \otimes b' \\ &= d(\alpha_0(x) - \beta_0(x)) \otimes b' \\ &= d(\alpha_0(x)) \otimes b' - d(\beta_0(x)) \otimes b' \\ &= (\bar{\alpha}_0 - \bar{\beta}_0)(x \otimes b'). \end{aligned}$$

■

Proposição 2.1. *Sejam*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & B' \\ A \arrow[u] \arrow[r, "a"'] & A' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

um diagrama comutativo de homomorfismos de anéis e $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{E}'$) uma extensão de B sobre A (resp. de B' sobre A'). Se $\mathscr{E}$ é livre então:

(i) Existe um homomorfismo $\alpha : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$ estendendo b.

(ii) Se $\beta : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$ é qualquer outro homomorfismo estendendo b então $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são aplicações homotópicas de $L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B B'$ para $L \cdot (\mathscr{E}')$. Em particular, quaisquer dois complexos cotangentes de B sobre A são homotópicamente equivalentes.

Demonstração: (i) Seja $I := \mathrm{Ker}(e_0)$. Defina $a_0(1)$ pra ser uma única preimagem de $b(e_0(1))$, e defina $a_0(T_i)$ como uma única preimagem de $b(e_0(T_i))$ e estenda estas definições por linearidade (isso pode ser feito pela comutatividade do diagrama dado inicialmente). Note que consoante a definição de α_0 temos $\alpha_0(I) = 0$, donde que $\alpha_0 \circ e_1 = 0$. O fato de R ter propriedade (L) nos fornece uma biderivação $\lambda : R \longrightarrow E'_1$ tal que $e'_1 \circ \lambda = \alpha_0 - \alpha_0 = 0$. Defina $\alpha_1 := \lambda \circ e_1$. Basta tomar agora $\alpha_2 := \alpha_1|_{E_2}$ (isso faz sentido pois $\mathrm{Im}(\alpha_1) \subseteq \mathrm{Ker}(e'_1) = E'_2$).

(ii) Segue diretamente dos lemas 2.1 e 2.2 ■

Em virtude da proposição 2.1 faz sentido definir

Definição 2.5. *Dada $\mathscr{E}$ uma extensão livre de B sobre A, $L \cdot (\mathscr{E})$ é chamado **Complexo Cotangente de** B **sobre** A.*

Com o objetivo de tornar a dissertação o mais auto contida possível, apresentamos dois lemas bsíco da teoria de módulos flats. Obviamente que um leitor mais familiarizado com estes conceitos pode omitir seus enunciados e provas. Adicionalmente, sugerimos [E] como referência.

Lema 2.3. *Seja M'' um A-módulo flat. Então dada qualquer sequência exata de A-módulos*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

tem-se

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

também exata para qualquer A-módulo N.

Demonstração: Como N é quociente por um A-módulo livre temos uma sequência exata $0 \longrightarrow K \longrightarrow A^{\oplus\Lambda} \longrightarrow N \longrightarrow 0$. Desta sequência obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & M' \otimes_A K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha'"] & M \otimes_A K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & M'' \otimes_A K \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \otimes_A A^{\oplus\Lambda} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta'"] & M \otimes_A A^{\oplus\Lambda} \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta"] & M'' \otimes_A A^{\oplus\Lambda} & \\
 & M' \otimes_A N \arrow[r, "f''"] \arrow[d] & M \otimes_A N \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

cujas linhas e colunas são exatas (notando que α'' é injetora, pois M'' é flat, e f' também é injetora, pois $A^{\oplus\Lambda}$ é livre). Segue que f'' é injetora. Para ver isso, tome $z \in M' \otimes_A N$ tal que $f''(z) = 0$. Como β' é sobrejetora temos $w \in M' \otimes_A A^{\oplus\Lambda}$ tal que $\beta'(w) = z$. Logo, $w \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$. Consideramos $y \in M \otimes_A K$ tal que $\alpha(y) = w$. Como $g'(w) = 0$ e α'' é injetora tem-se $g(y) = 0$, donde $y \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Com isso podemos considerar $x \in M' \otimes_A K$ tal que $f(x) = y$. Portanto, $0 = \beta' \circ \alpha'(x) = \beta'(w) = z$. Para concluir, basta agora aplicar agora o lema 1.1. ■

Lema 2.4. *Seja*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos com M'' flat. Então M' é flat sobre A se e só se M é flat sobre A.

Demonstração: Tome uma inclusão $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N$. A partir dela obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \otimes_A N' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma'"] & M \otimes_A N' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & M'' \otimes_A N' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \otimes_A N \arrow[r, "\alpha'"'] & M \otimes_A N \arrow[r, "\beta'"'] & M'' \otimes_A N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cujas linhas são exatas em virtude do lema 2.3. Assuma M flat. Logo, γ é injetora, donde γ' o é, i.e., M' é flat.

Reciprocamente, assuma M' flat. Logo, γ', γ'' são injetoras pois M'' também é flat. Logo, γ é injetora. De fato, tome $x \in M \otimes_A N'$ tal que $\gamma(x) = 0$, donde $\gamma'' \circ \beta(x) = 0$, i.e., $\beta(x) \in \mathrm{Ker}(\gamma'') = 0$. Com isso, podemos escrever $x = \alpha(x')$ onde $x' \in M' \otimes_A N'$. Segue então pela comutatividade do diagrama que $\alpha' \circ \gamma'(x') = 0$, acarretando em $x = 0$. Portanto M é flat. ■

Voltemos agora para o estudo de extensões e complexos cotangentes.

Proposição 2.2. *Considere um diagrama produto de A-álgebras*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & B' \\ A \arrow[u] \arrow[r] & A' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

com $B' := B \otimes_A A'$. Seja $\mathscr{E}$ uma extensão de B sobre A e suponha que (i) A' é flat sobre A ou (ii) B é flat sobre A e $\mathscr{E}$ livre. Então

(a) $\mathscr{E}' := \mathscr{E} \otimes_A A'$ é uma extensão de B' sobre A' (livre no caso (ii)).

(b) O homomorfismo natural $\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$ induz um isomorfismo $L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B B' \simeq L \cdot (\mathscr{E}')$.

(c) Se $\mathscr{E}$ é livre, $\mathscr{E}'$ também o é.Neste caso, se $L \cdot (\mathscr{E})$ é um complexo cotangente de B sobre A, então $L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B B'$ é um complexo cotangente de B' sobre A'.

Demonstração: (a)É claro que se A' é flat sobre A então $\mathscr{E}'$ é exata e, além disso, $e_1' := e_1 \otimes_A \mathrm{Id}_{A'}$ satisfaz $e_1'(z)w = e_1'(w)z$, $z, w \in E_1 \otimes_A A'$, isto é, $\mathscr{E}'$ é uma extensão de B' sobre A'. Suponha agora B flat sobre A e $\mathscr{E}$ livre. Como $0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow B \longrightarrow 0$ é exata temos pelo lema 2.4 que I é flat sobre A, pois R é um anel de polinômios sobre A. Agora, como $0 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow I \longrightarrow 0$ é exata, temos, pelo lema 2.3, $0 \longrightarrow E_2 \otimes_A A' \longrightarrow E_1 \otimes_A A' \longrightarrow I \otimes_A A' \longrightarrow 0$ exata. Por este mesmo lema temos também $0 \longrightarrow I \otimes_A A' \longrightarrow R \otimes_A A' \longrightarrow B \otimes_A A' \longrightarrow 0$ exata e assim $\mathscr{E}'$ é exata.

(b) Sejam $\bar{\beta}_2 : E_2' \longrightarrow E_2 \otimes_B B'$, $\bar{\beta}_1 : E_1' \otimes_{R'} B' \longrightarrow E_1 \otimes_R B'$ e $\bar{\beta}_0 : \Omega_{R'|A'} \otimes_{R'} B'(= (\Omega_{R|A} \otimes_A A') \otimes_{R'} (B')) \longrightarrow \Omega_{R|A} \otimes_R B'$ dadas respectivamente por $x \otimes a' \mapsto x \otimes a'$, $(y \otimes a') \otimes (b \otimes a'') \mapsto y \otimes (b \otimes a'a'')$ e $(dz \otimes a') \otimes (b \otimes a'') \mapsto dz \otimes (b \otimes a'a'')$. Então $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_2, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_0) : L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B B' \longrightarrow L \cdot (\mathscr{E}')$ é o homorfismo inverso natural de $\bar{\alpha}$.

(c) Se $\mathscr{E}$ é livre então podemos escrever $R = A[T_i]$ donde $R' = R \otimes_A A' = A'[T_i]$ e assim $\mathscr{E}'$ é também livre. Portanto, $L \cdot (\mathscr{E}') = L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B B'$ é um complexo cotangente de B' sobre A'. ■

Lema 2.5. *Sejam R uma A-álgebra e T um sistema multiplicativo em R. Se R tem a propriedade (L) da definição 2.4 então a localização $T^{-1}R$ também tem propriedade (L).*

Demonstração: Considere $R' := T^{-1}R$. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "u"] & & S \\ & & R' \arrow[ull, dashed, "\lambda'"'] \arrow[u, shift left, "f'"] \arrow[u, shift right, "g'"'] \\ & & R \arrow[uull, dashed, "\lambda"] \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

onde S é uma A-álgebra, u um homomorfismo de S-módulos tal que $u(x)y = u(y)x$ para quaisquer $x, y \in M$, e $f', g' : R' \longrightarrow S$ homomorfismos de A-módulos tais que $\mathrm{Im}(f' - g') \subset \mathrm{Im}(u)$.

Defina $f := f' \circ \varphi$ e $g := g' \circ \varphi$, onde $\varphi : R \longrightarrow R'$ é o homomorfismo canônico. Logo, como R tem propriedade (L) existe uma biderivação $\lambda : R \longrightarrow M$ tal que $u \circ \lambda = f - g$. Agora, se existe uma biderivação λ' que estende λ para R' então ela é dada por

$$\lambda'\left(\frac{r}{t}\right) = \frac{1}{f(t)g(t)}[g(t)\lambda(r) - g(r)\lambda(t)].$$

De fato, $\lambda(r) = \lambda'(\frac{r}{1}) = f'(\frac{t}{1})\lambda'(\frac{r}{t}) + g'(\frac{r}{t})\lambda'(\frac{t}{1}) = f(t)\lambda'(\frac{r}{t}) + g'(\frac{r}{t})\lambda(t)$ donde $f(t)\lambda'(\frac{r}{t}) = \lambda(r) - g'(\frac{r}{t})\lambda(t)$. Multiplicando esta igualdade por $g(t)$ e em seguida por $\frac{1}{f(t)g(t)}$ tem-se portanto que λ' deve ser dada por

$$\lambda'\left(\frac{r}{t}\right) = \frac{1}{f(t)g(t)}[g(t)\lambda(r) - g(r)\lambda(t)].$$

Então λ' dada como acima é de fato uma biderivação. Considereando $K := \lambda'\left(\frac{r_1}{t_1}\frac{r_2}{t_2}\right)$ e $L := f'\left(\frac{r_1}{t_1}\right)\lambda'\left(\frac{r_2}{t_2}\right) + g'\left(\frac{r_2}{t_2}\right)\lambda'\left(\frac{r_1}{t_1}\right)$ temos

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{f(t_1t_2)g(t_1t_2)}[g(t_1t_2)\lambda(r_1r_2) - g(r_1r_2)\lambda(t_1t_2)] \\
&= \frac{1}{f(t_1t_2)g(t_1t_2)}[g(t_1t_2)(f(r_1)\lambda(r_2) + g(r_2)\lambda(r_1)) - g(r_1r_2)(f(t_1)\lambda(t_2) + g(t_2)\lambda(t_1))] \\
&= \frac{1}{f(t_1t_2)g(t_1t_2)}[g(t_1t_2)f(r_1)\lambda(r_2) + g(t_1t_2)g(r_2)\lambda(r_1) - g(r_1r_2)f(t_1)\lambda(t_2) - g(r_1r_2)g(t_2)\lambda(t_1)]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{f(t_1)}f(r_1)\frac{1}{f(t_2)g(t_2)}(g(t_2)\lambda(r_2) - g(r_2)\lambda(t_2)) \\
&+ \frac{1}{g(t_2)}g(r_2)\frac{1}{f(t_1)g(t_1)}(g(t_1)\lambda(r_1) - g(r_1)\lambda(t_1)) \\
&= \frac{1}{f(t_1t_2)g(t_1t_2)}\Big(g(t_1)g(t_2)f(r_1)\lambda(r_2) - g(t_1)f(r_1)g(r_2)\lambda(t_2) \\
&+ f(t_2)g(t_1)g(r_2)\lambda(r_1) - f(t_2)g(r_2)g(r_1)\lambda(t_1)\Big)
\end{aligned}$$

donde, fazendo uso da relação $(f(x)-g(x))\lambda(y) = u\circ\lambda(x)\lambda(y) = u\circ\lambda(y)\lambda(x) = (f(y)-g(y))\lambda(x)$ tem-se

$$\begin{aligned}
K - L &= \frac{1}{f(t_1t_2)g(t_1t_2)}\Big(g(t_1)g(r_2)[g(t_2) - f(t_2)]\lambda(r_1) - g(r_1r_2)f(t_1)\lambda(t_2) \\
&- g(r_1r_2)g(t_2)\lambda(t_1) + g(t_1)f(r_1)g(r_2)\lambda(t_2) + f(t_2)g(r_2)g(r_1)\lambda(t_1)\Big) \\
&= \frac{1}{f(t_1t_2)g(t_1t_2)}\Big(g(t_1)g(r_2)[(g(r_1) - f(r_1)]\lambda(t_2) - g(r_1r_2)f(t_1)\lambda(t_2) \\
&- g(r_1r_2)g(t_2)\lambda(t_1) + g(t_1)f(r_1)g(r_2)\lambda(t_2) + f(t_2)g(r_2)g(r_1)\lambda(t_1)\Big) \\
&= \frac{g(r_1)g(r_2)}{f(t_1t_2)g(t_1t_2)}\Big(g(t_1)\lambda(t_2) - f(t_1)\lambda(t_2) - g(t_2)\lambda(t_1) + f(t_2)\lambda(t_1)\Big) \\
&= \frac{g(r_1)g(r_2)}{f(t_1t_2)g(t_1t_2)}\Big([g(t_1) - f(t_1)]\lambda(t_2) + [f(t_2) - g(t_2)]\lambda(t_1)\Big) \\
&= \frac{g(r_1)g(r_2)}{f(t_1t_2)g(t_1t_2)}\Big([g(t_2) - f(t_2)]\lambda(t_1) + [f(t_2) - g(t_2)]\lambda(t_1)\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Note também que $u \circ \lambda'(\frac{r}{t}) = \frac{1}{f(t)g(t)}[g(t)u(\lambda(r)) - g(r)u(\lambda(t))] = \frac{1}{f(t)g(t)}[g(t)(f(r) - g(r)) - g(r)(f(t) - g(t))] = \frac{1}{f(t)g(t)}[g(t)f(r) - g(r)f(t)] = (f' - g')(\frac{r}{t})$. Portanto, $R' = T^{-1}R$ tem a propriedade (L). ■

Proposição 2.3. *Seja B uma A-álgebra e T um sistema multiplicativo em B. Se $L\cdot(\mathscr{E})$ (resp. $L\cdot(\mathscr{F})$) é um complexo cotangente para B (resp. $T^{-1}B$) sobre A, então qualquer homomorfismo $\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ (estendendo $B \longrightarrow T^{-1}B$) induz uma equivalência homotopica*

$$L\cdot(\mathscr{E}) \otimes_B T^{-1}B \longrightarrow L\cdot(\mathscr{F}).$$

Demonstração: Seja $\mathscr{E} : 0 \longrightarrow E_2 \xrightarrow{e_2} E_1 \xrightarrow{e_1} R \xrightarrow{e_0} B \longrightarrow 0$ uma extensão livre de B sobre A. Como $U := e_0^{-1}(T) \subset R$ é um sistema multiplicativo de R $\mathscr{E}' := \mathscr{E} \otimes_R U^{-1}R$ é uma extensão de $T^{-1}B \simeq U^{-1}B \simeq B \otimes_R U^{-1}R$ sobre A. Como $U^{-1}R$ é flat sobre R tem-se $\mathscr{E}'$ uma extensão de $T^{-1}B$ sobre A (parte (a) da prova da proposição 2.2). Segue da parte (b) da proposição 2.2 que o homomorfismo natural $\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$ induz um isomorfismo $L\cdot(\mathscr{E}) \otimes_B T^{-1}B \simeq L\cdot(\mathscr{E}')$.

Sejam $\mathscr{F} : 0 \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} Q \xrightarrow{f_0} T^{-1}B \longrightarrow 0$ uma extensão livre de $T^{-1}B$ sobre A, $V := f_0^{-1}(T)$ e $\mathscr{F}' := \mathscr{F} \otimes_Q V^{-1}Q$. Pela parte (i) da proposição 2.1 existe um homomorfismo $\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{E}'$ estendendo a identidade sobre $T^{-1}B$. Como $\alpha_0(V) \subseteq U$ ($e_0' : r/u \mapsto e_0(r)/e_0(u)$) tem-se que α induz $\alpha' = (\alpha_2', \alpha_1', \alpha_0', \mathrm{Id}) : \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{E}'$ onde $\alpha_2', \alpha_1', \alpha_0'$ são induzidas de α_0 de modo canônico. Por outro lado, aplicando-se a parte (i) da proposição 2.1 à extensão $\mathscr{E}$, temos um homomorfismo $\beta : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}'$ (estendendo $B \longrightarrow T^{-1}B$) que induz, analogamente como acima, $\beta' : \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{F}'$. Logo, temos homomorfismos $\beta' : \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{F}'$ e $\alpha' : \mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{E}'$ estendendo a identidade sobre $T^{-1}B$. Uma vez que $U^{-1}R$ e $V^{-1}Q$ têm propriedade (L) tem-se do lema 2.2 que $\bar{\alpha}' \circ \bar{\beta}'$ (resp. $\bar{\beta}' \circ \bar{\alpha}'$) é homotópica a identidade sobre $L\cdot(\mathscr{E}')$ (resp. $L\cdot(\mathscr{F}')$). Agora, o resultado segue de $L\cdot(\mathscr{E}) \otimes_B T^{-1}B \simeq L\cdot(\mathscr{E}')$ e do fato que $L\cdot(\mathscr{F}) \longrightarrow L\cdot(\mathscr{F}')$ é uma equvalência homotópica (pois, como $L\cdot(\mathscr{F})$ e $L\cdot(\mathscr{F}')$ são dois complexos cotangentes de $T^{-1}B$ sobre A então eles são homotopicamente equivalentes em virtude da proposição 2.1). ■

2.2 Mudança de Sequência Exata de Anéis

Teorema 2.1. *Seja $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ uma sequência de homomorfismos de anéis. Seja $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{G}$) uma extensão livre de B sobre A (resp. C sobre B). Então existem uma extensão livre $\mathscr{F}$ de C sobre A e homomorfismos $\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ estendendo $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ tais que a sequência*

$$0 \longrightarrow L\cdot(\mathscr{E}) \otimes_B C \longrightarrow L\cdot(\mathscr{F}) \longrightarrow L\cdot(\mathscr{G}) \longrightarrow 0$$

é exata, com $L^2(\mathscr{E}) \otimes_B C \longrightarrow L^2(\mathscr{F})$ possivelmente não injetora.

Demonstração: Sob as hipóteses acima podemos escrever

$$(\mathscr{E}) : 0 \longrightarrow U/U_0 \xrightarrow{e_2} F/U_0 \xrightarrow{e_1} R \xrightarrow{e_0} B \longrightarrow 0$$

e

$$(\mathscr{G}) : 0 \longrightarrow W/W_0 \xrightarrow{g_2} H/W_0 \xrightarrow{g_1} T \xrightarrow{g_0} C \longrightarrow 0,$$

onde $R = A[X_i]$, $T = B[Y_j]$. Sejam $I := \mathrm{Ker}(e_0)$ e $K := \mathrm{Ker}(g_0)$. Defina $S := R[Y_j] = A[X_i, Y_j]$ (de modo que $S \otimes_R B \simeq R[Y_j] \otimes_R B \simeq B[Y_j] = T$) e ponha $J := \mathrm{Ker}(f_0)$, onde $f_0 : S \longrightarrow C$ é dada por $f(X_i, Y_j) \mapsto g_0(e_0(f(X_i))(Y_j))$ (sendo uma sobrejeção de A-álgebras pois e_0 e g_0 são sobrejetoras). Defina $\varphi : J \longrightarrow K$ por $f(X_i, Y_j) \mapsto e_0(f(X_i))(Y_j)$. Como H é um T-módulo livre podemos escolher um S-módulo livre H^* tal que $H^* \otimes_S T \simeq H$. Para isso, basta tomar por exemplo $H^* := S^{\oplus\Lambda}$ (cópias de S) onde $H = T^{\oplus\Lambda}$. Defina $G := (F \otimes_R S) \oplus H^*$ (sendo livre sobre S) e $u : G \longrightarrow J$ dada como segue: $u|_{F\otimes_R S}$ é a composição $F \otimes_R S \longrightarrow I \otimes_R S \hookrightarrow J$ e $u|_{H^*}$ é um levantamento de $\lambda : H^* \longrightarrow H \longrightarrow K$ (que é sobrejetora pois T é uma S-álgebra via o homomorfismo sobrejetor canônico $S \longrightarrow T$) para $H^* \longrightarrow J$ (isso pode ser feito pois H^* é livre e φ é sobrejetora). Se colocarmos $V := \mathrm{Ker}(u)$ e $W^* := \mathrm{Ker}(\lambda)$ temos o seguinte diagrama comutativo

$$(*)\qquad \begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U \otimes_R S \arrow[r, "i"] \arrow[d] & V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & W^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F \otimes_R S \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"] & H^* \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \otimes_R S \arrow[r] \arrow[d] & J \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \qquad \text{(exata)}$$

no qual as linhas e colunas são exatas. A primeira coluna de $(*)$ é exata pois S é flat sobre R (como S é projetivo sobre R ele é flat sobre R), e as outras duas em virtude das definições de V e W^*. A primeira linha de $(*)$ é exata pois $j : V \longrightarrow W^*$ é a projeçõ sobre H^* cujo núcleo é $(U \otimes_R S) \oplus 0 \simeq U \otimes_R S$. Agora, se $f(X_i, Y_j) \in J$ é tal que $\varphi(f(X_i, Y_j)) = 0$ então $f(X_i) \in I$ donde que a terceira linha de $(*)$ é exata. Note que pelas definições anteriores já temos uma extensão livre de C sobre A

$$(\mathscr{F}) : 0 \longrightarrow V/V_0 \xrightarrow{f_2} G/V_0 \xrightarrow{f_1} S \xrightarrow{f_0} C \longrightarrow 0.$$

Temos que $(*)$ induz um diagrama comutativo $(**)$

$$(**)\qquad \begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
L\cdot(\mathscr{E}) \otimes_B C : & 0 \arrow[r] & U/U_0 \otimes_B C \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes_R C \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{R|A} \otimes_R C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
L\cdot(\mathscr{F}) : & 0 \arrow[r] & V/V_0 \arrow[r] \arrow[d] & G \otimes_S C \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{S|A} \otimes_S C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
L\cdot(\mathscr{G}) : & 0 \arrow[r] & W/W_0 \arrow[r] \arrow[d] & H \otimes_T C \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{T|B} \otimes_T C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

cujas colunas mostraremos serem exatas e obtido como segue: a segunda coluna é obtida da segunda linha de $(*)$ tomando o tensor $\otimes_S C$ (donde que a segunda coluna de $(**)$ é exata em virtude do lema 2.3 pois H^* é livre). A terceira linha é obtida de modo canônico notando que $\Omega_{R|A} \otimes_R C$, $\Omega_{S|A} \otimes_S C$ e $\Omega_{T|B} \otimes_T C$ são, respectivamente, os C-módulos livres sobre $\{dX_i\}$, $\{dX_i, dY_j\}$ e $\{dY_i\}$ (donde que a terceira coluna de $(**)$ é exata). Defina $U/U_0 \times C = U/U_0 \times S/J \longrightarrow V/V_0$ por $(\bar{u}, \bar{s}) \mapsto \overline{u \otimes s}$. Vejamos agora porque isso faz sentido. Primeiro, temos $U \otimes_R J \subset V_0$. De fato, sejam $x \in U$ e $y \in J$. Podemos escrever $y = u(z)$, com $z \in H^*$, uma vez que $H^* \longrightarrow J$ é sobrejetora, donde que $x \otimes y = x \otimes u(z) = u(z)(x \otimes 1) = u(z)(x \otimes 1) - u(x \otimes 1)z \in V_0$. Segundo, temos $U_0 \otimes_R S \subset V_0$, uma vez que se $u = j(x)y - j(y)x \in U_0$ e $s \in S$ então $u \otimes s = j(x)s(y \otimes 1) - j(y) \cdot 1(x \otimes s) = u(x \otimes s)(y \otimes 1) - u(y \otimes 1)(x \otimes s) \in V_0$. Agora, se $u_1 = u_2 + u_0$ e $s_1 = s_2 + x$, com $u_0 \in U_0$, u_1, $u_2 \in U$, s_1, $s_2 \in S$ e $x \in J$ então $u_1 \otimes s_1 = u_2 \otimes s_2 + u_2 \otimes x + u_0 \otimes s_2 + u_0 \otimes x$ e então $u_1 \otimes s_1 - u_2 \otimes s_2 = u_2 \otimes x + u_0 \otimes s_2 + u_0 \otimes x \in V_0$. Logo, obtemos por bilinearidade a aplicação $U/U_0 \otimes_B C \longrightarrow V/V_0$. Para obter $V/V_0 \longrightarrow W/W_0 \longrightarrow 0$ basta induzí-la da sobrejeção $V \longrightarrow W \longrightarrow 0$ dada por $(f \otimes s) + h^* \mapsto h^*$ notando que esta envia V_0 em W_0. Por fim, para que a primeira coluna de $(**)$ seja exata é suficiente que se $v \in V$ vai a 0 em W então existe $v_0 \in V_0$ tal que $v - v_0$ vem de $U \otimes_B S$. Como a primeira linha de $(*)$ é exata, $v - v_0 \in \operatorname{Im}(i)$ se e só se $\pi(v - v_0) = 0$. Logo, devemos garantir que $\pi(V_0) \supseteq \operatorname{Ker}(W^* \longrightarrow W)$. Mas $\operatorname{Ker}(W^* \longrightarrow W) = IH^* \cap W^*$ (para ver isso basta notar que como $0 \longrightarrow I[Y_j] \longrightarrow S \longrightarrow T \longrightarrow 0$ é exata então $0 \longrightarrow I[Y_j] \otimes_S H^* = IH^* \longrightarrow H^* \longrightarrow H \longrightarrow 0$ é exata uma vez que H^* é flat sobre S). Afirmamos que $\pi(V_0) \supseteq IH^*$. De fato, se $a \in IS = I \otimes_R S$ e $h \in H^*$, escolha $x \in G$ e $y \in H^*$ tais que $u(x) = a$ e $p(y) = h$ (lembrando que $H^* \longrightarrow J$ é sobrejetora). Logo, $z := u(x)y - u(y)x \in V_0$ com $p(x) = 0$. Então $\pi(z) = p(z) = ah$. Seja $v = (f \otimes s) + h$ vai a 0 em W. Logo, $h \in \operatorname{Ker}(W^* \longrightarrow W)$ e então $h = j(v_0)$ para algum $v_0 \in V_0$, donde $j(v - v_0) = j(v) - j(v_0) = h - h = 0$ e portanto $v - v_0 \in U \otimes_R S$ como queríamos. ∎

2.3 Functores Cotangentes

Definição 2.6. *Sejam B uma A-álgebra, $\mathscr{E}$ uma extensão livre de B sobre A, e M um B-módulo. Pela proposição 2.1, os B-módulos $T_i(B|A, M) := H_i(L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B M)$ e $T^i(B|A, M) := H^i(Hom_B(L \cdot (\mathscr{E}), M))$ são independentes da escolha de $\mathscr{E}$, para $i = 0, 1, 2$ (pois se dois complexos são homotopicamente equivalentes então suas homologias ou cohomologias são as mesmas). $T_i(B|A, \ \ )$ (resp. $T^i(B|A, \ \ )$) é chamado o* **i-ésimo functor cotangente inferior** *(resp.* **superior***) de B sobre A.*

Observação: Note que na definição acima $T_0(B|A, M) = \Omega_{B|A} \otimes_B M$: para ver isso basta considerar a terceira sequência exata

$$I/I^2 = I \otimes_R B \xrightarrow{\bar{d}} \Omega_{R|A} \otimes_R B \longrightarrow \Omega_{B|A} \longrightarrow 0\ .$$

$$L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B M : 0 \longrightarrow E_2 \otimes_B M \longrightarrow (E_1 \otimes_R B) \otimes_B M \xrightarrow{\psi} (\Omega_{R|A} \otimes_R B) \otimes_B M \longrightarrow 0$$

Então

$$\begin{aligned} T_0(B|A,M) &= (\Omega_{R|A}\otimes_R B)\otimes_B M/\mathrm{Im}(\psi) \\ &= ((\Omega_{R|A}\otimes_R B)/\mathrm{Im}(\bar{d}))\otimes_B M \\ &= \Omega_{B|A}\otimes_B M \end{aligned}$$

(para ver que $(\Omega_{R|A}\otimes_R B)\otimes_B M/\mathrm{Im}(\psi)\simeq((\Omega_{R|A}\otimes_R B)/\mathrm{Im}(\bar{d}))\otimes_B M$ basta notar que $\mathrm{Im}(\psi)=\mathrm{Im}(\bar{d})$ e que

$$\mathrm{Im}(\bar{d})\longrightarrow\Omega_{R|A}\otimes_R B\longrightarrow(\Omega_{R|A}\otimes_R B)/\mathrm{Im}(\bar{d})\longrightarrow 0$$

é exata).

Temos também $T^0(B|A,M)=\mathrm{Der}_A(B,M)$. De fato, considere

$$\mathrm{Hom}_B(L\cdot(\mathscr{E}),M):0\longrightarrow\mathrm{Hom}_B(\Omega_{R|A}\otimes_R B,M)\xrightarrow{\lambda}\mathrm{Hom}_B(E_1\otimes_R B,M)\longrightarrow\mathrm{Hom}_B(E_2,M)\longrightarrow 0.$$

Então

$$\begin{aligned} T^0(B|A,M) &= \mathrm{Ker}(\lambda) \\ &= \mathrm{Hom}_B((\Omega_{R|A}\otimes_R B)/\mathrm{Im}(\bar{d}),M) \\ &= \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A},M) \\ &= \mathrm{Der}_A(B|A,M). \end{aligned}$$

Veja que toda aplicação linear $f:\Omega_{R|A}\longrightarrow M$ em $Ker(\lambda)$ é tal que $E_1\otimes_R B\longrightarrow\Omega_{R|A}\otimes_R B\longrightarrow M$ é nula. Logo, temos uma única aplicação linear $\tilde{f}:(\Omega_{R|A}\otimes_R B)/\mathrm{Im}(\bar{d})\longrightarrow M$ fazendo o diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega_{R|A}\otimes_R B \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \\ (\Omega_{R|A}\otimes_R B)/\mathrm{Im}(\bar{d}) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

comutar, donde que $\mathrm{Ker}(\lambda)\simeq\mathrm{Hom}_B((\Omega_{R|A}\otimes_R B)/\mathrm{Im}(\bar{d}),M)$ como estabelecido acima.

Lema 2.6. *Sejam $K_\bullet=\{K_n,d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $K'_\bullet=\{K'_n,d'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ complexos de A-módulos e $\alpha:K_\bullet\longrightarrow K'_\bullet$ um homomorfismo. Então temos homomorfismos*

$$\alpha_n:H_n(K_\bullet)\longrightarrow H_n(K'_\bullet)$$

para todo n, que são isomorfismos se α é uma equivalência homotópica.

Demonstração: De fato, basta considerar x mod $\mathrm{Im}(d)\mapsto\alpha_n(x)$ mod $\mathrm{Im}(d')$, com $x\in\mathrm{Ker}(\alpha_n)$. Para ver que esta aplicação está bem definida basta notar que se $x-y=dz$, para algum $z\in K_{n+1}$, então $\alpha_n(x)-\alpha_n(y)=\alpha_n\circ d(z)=d'\circ\alpha_{n+1}(z)$. ∎

Observação: Por argumentos análogos aos usados acima vale o mesmo *mutatis mutandis* para a cohomologia de dois complexos.

Lema 2.7. *Seja*

$$0 \longrightarrow C_\bullet \xrightarrow{f} D_\bullet \xrightarrow{g} E_\bullet \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de complexos de A-módulos. Então existem homomorfismos $\partial_n : H_n(E_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(C_\bullet)$ *tais que*

$$\cdots \xrightarrow{g} H_{n+1}(E_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{f} H_n(D_\bullet) \xrightarrow{g} H_n(E_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C_\bullet) \xrightarrow{f} \cdots$$

é exata.

Proposição 2.4. *Sejam B uma A-álgebra e M, N A-módulos. Então existe um homomorfismo B-linear*

$$\alpha_M : Hom_A(M,N) \otimes_A B \longrightarrow Hom_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B)$$

que é um isomorfismo se B é flat sobre A e M finitamente apresentado. Em particular, se M é finitamente apresentado temos um isomorfismo

$$Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \simeq S^{-1}Hom_A(M,N)$$

para todo sistema multiplicativo $S \subset A$.

Demonstração: [E], página 69. ■

Lema 2.8. *Sejam B uma A-álgebra, M um A-módulo e N um B-módulo. Então temos um isomorfismo de B-módulos*

$$Hom_A(M,N) \xrightarrow{\sim} Hom_B(B \otimes_A M, N).$$

Lema 2.9. *Sejam M, N, N', N'' A-módulos e $N' \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} N''$ um complexo. Então temos um homomorfismo*

$$(Ker(\beta)/Im(\alpha)) \otimes_A M \longrightarrow Ker(\beta \otimes Id_M)/Im(\alpha \otimes Id_M)$$

que é um isomorfismo se M é flat sobre A.

Demonstração: Defina $(\mathrm{Ker}(\beta)/\mathrm{Im}(\alpha)) \times_A M \longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta \otimes \mathrm{Id}_M)/\mathrm{Im}(\alpha \otimes \mathrm{Id}_M)$ pondo $(\bar{x}, m) \mapsto \overline{x \otimes m}$ que induz, por sua bilinearidade, $(\mathrm{Ker}(\beta)/\mathrm{Im}(\alpha)) \otimes_A M \longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta \otimes \mathrm{Id}_M)/\mathrm{Im}(\alpha \otimes \mathrm{Id}_M)$. É claro que $\mathrm{Ker}(\beta) \otimes_A M \subset \mathrm{Ker}(\beta \otimes \mathrm{Id}_M)$. Seja $x_1 \otimes m_1 + \cdots + x_j \otimes m_j \in \mathrm{Ker}(\beta \otimes \mathrm{Id}_M)$, isto é, $\beta(x_1) \otimes m_1 + \cdots + \beta(x_j) \otimes m_j = 0$. Como $N/\mathrm{Ker}(\beta) \longrightarrow N''$ é injetora e M é flat temos $\bar{x}_1 \otimes m_1 + \cdots + \bar{x}_j \otimes m_j = 0$ em $(N/\mathrm{Ker}(\beta)) \otimes_A M$ $(\simeq (N \otimes_A M)/(\mathrm{Ker}(\beta) \otimes_A M)$ pois $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta) \longrightarrow N \longrightarrow N/\mathrm{Ker}(\beta) \longrightarrow 0$ é exata). Logo, existem $z_1, \cdots, z_k \in \mathrm{Ker}(\beta)$ e $t_1, \cdots, t_k \in M$ tais que $x_1 \otimes m_1 + \cdots + x_j \otimes m_j = z_1 \otimes t_1 + \cdots + z_k \otimes t_k$. Assim, $\mathrm{Ker}(\beta) \otimes_A M = \mathrm{Ker}(\beta \otimes \mathrm{Id}_M)$. Como

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta)/\mathrm{Im}(\alpha) \longrightarrow 0$$

é exata temos

$$(\mathrm{Ker}(\beta)/\mathrm{Im}(\alpha)) \otimes_A M \simeq (\mathrm{Ker}(\beta) \otimes_A M)/(\mathrm{Im}(\alpha) \otimes_A M) = \mathrm{Ker}(\beta \otimes \mathrm{Id}_M)/\mathrm{Im}(\alpha \otimes \mathrm{Id}_M).$$

■

Corolário 2.1. *Sejam M um A-módulo flat e $K_\bullet : \cdots \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1} \longrightarrow \cdots$ um complexo de A-módulos. Então*

$$H_n(K_\bullet) \otimes_A M \simeq H_n(K_\bullet \otimes_A M)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposição 2.5. *Sejam*

$(*)$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] & B' \\ A \arrow[u] \arrow[r, "a"'] & A' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

um diagrama comutativo de homomorfismos de anéis, M' um B'-módulo e $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ extensões livre de B sobre A e B' sobre A', respectivamente. Então temos, homomorfismos ($i = 0, 1, 2$)

$$T_i(B|A, M') \longrightarrow T_i(B'|A', M')$$

e

$$T^i(B'|A', M') \longrightarrow T^i(B|A, M').$$

Além disso, se em $(*)$, $B' = B \otimes_A A'$, com B flat sobre A ou A' flat sobre A então estes homomorfismos são isomorfismos.

Demonstração: Pela proposição 2.1 temos um homomorfismo $\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}'$, que induz

$$\bar{\alpha} : L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B B' \longrightarrow L \cdot (\mathscr{E}')$$

e então $\bar{\alpha} \otimes_{B'} M' : L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B M' \longrightarrow L \cdot (\mathscr{E}') \otimes_{B'} M'$. Pelo lema 2.8 temos os homomorfismos $(i = 0, 1, 2)$

$$T_i(B|A, M') \longrightarrow T_i(B'|A', M').$$

Considerando o homomorfismo $L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B B' \xrightarrow{\bar{\alpha}} L \cdot (\mathscr{E}')$ temos, por dualização, o homomorfismo $\mathrm{Hom}_{B'}(L \cdot (\mathscr{E}'), M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B'}(L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B B', M') \simeq \mathrm{Hom}_B(L \cdot (\mathscr{E}), M')$ (o último isomorfismo dado pelo lema 2.8), donde induzimos $(i = 0, 1, 2)$

$$T^i(B'|A', M') \longrightarrow T^i(B|A, M').$$

Assuma que em $(*)$, $B' = B \otimes_A A'$, com B flat sobre A ou A' flat sobre A. Seja $\mathscr{E}'' := \mathscr{E} \otimes_A A'$. Como $\mathscr{E}''$ também é uma extensão livre de B' sobre A' temos uma equivalência homotópica $L \cdot (\mathscr{E}'') \longrightarrow L \cdot (\mathscr{E}')$ e como $L \cdot (\mathscr{E}'') \simeq L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B B'$ (proposição 2.2) temos equivalências homomotópicas $L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B M' \longrightarrow L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_{B'} M'$ e $\mathrm{Hom}_{B'}(L \cdot (\mathscr{E}'), M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(L \cdot (\mathscr{E}), M')$ donde que

$$T_i(B|A, M') \longrightarrow T_i(B'|A', M')$$

e

$$T^i(B'|A', M') \longrightarrow T^i(B|A, M')$$

são isomorfismos. ∎

Proposição 2.6. *Sejam B, A' A-álgebras, $B' := B \otimes_A A'$ e $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ extensões livres de B sobre A e B' sobre A', respectivamente. Se A' é flat sobre A e cada termo de $L \cdot (\mathscr{E})$ é finitamente apresentado sobre B então temos isomorfismos ($i = 0, 1, 2$)*

$$T_i(B|A, M) \otimes_B B' \xrightarrow{\sim} T_i(B'|A', M \otimes_B B')$$

e

$$T^i(B|A, M) \otimes_B B' \xrightarrow{\sim} T^i(B'|A', M \otimes_B B').$$

Demonstração: Como A' é flat sobre A (donde B' é flat sobre B) então, pela proposição 2.2, $\mathscr{E}'' := \mathscr{E} \otimes_A A'$ é uma extensão livre de B' sobre A'. Logo, $L \cdot (\mathscr{E}'') \simeq L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B B'$ (o isomorfismo também dado pela proposição 2.2) é um complexo cotangente de B' sobre A', donde existe, pela proposição 2.1, uma equivalência homotópica $L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B B' \longrightarrow L \cdot (\mathscr{E}')$. Tensorizando $\otimes_B M$, temos a equivalência homotópica $(L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B M) \otimes_B B' \longrightarrow L \cdot (\mathscr{E}') \otimes_{B'} (M \otimes_B B')$. Logo, os homomorfismos induzidos

$$T_i(B|A, M) \otimes_B B' \longrightarrow T_i(B'|A', M \otimes_B B')$$

são isomorfismos (temos $H_n((L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B M) \otimes_B B') \simeq (H_n(L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B M) \otimes_B B'$ pelo corolário 2.1, uma vez que B' é flat sobre B).

Por outro lado, o homomorfismo (proposição 2.4) $\mathrm{Hom}_B(L \cdot (\mathscr{E}), M) \otimes_B B' \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B'}(L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B B', M \otimes_B B')$ nos fornece homomorfismos

$$T^i(B|A, M) \otimes_B B' \longrightarrow T^i(B|A, M \otimes_B B') \simeq T^i(B'|A', M \otimes_B B')$$

onde o último isomorfismo é dado pela proposição 2.5. Logo, pela proposição 2.4, se admitirmos que cada termo de $L \cdot (\mathscr{E})$ é finitamente apresentado sobre B então

$$T^i(B|A, M) \otimes B' \longrightarrow T^i(B'|A', M \otimes B')$$

são isomorfismos. ■

Proposição 2.7. *Se S é um sistema multiplicativo em B e M um B-módulo então*

$$T_i(S^{-1}B|A) \otimes_B S^{-1}B \simeq T_i(S^{-1}B|A, S^{-1}M).$$

Analogamente, $T^i(S^{-1}B|A, S^{-1}M) \simeq S^{-1}T^i(B|A, M)$ se vale a condição de finitude sobre $L \cdot (\mathscr{E})$.

Demonstração: Primeiramente, escolha extensões livres $\mathscr{E}$ e $\mathscr{F}$ de B sobre A, e de $S^{-1}B$ sobre A, respectivamente. Tome agora um homomorfismo (cuja existência é garantida pela proposição 2.1) $\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ estendendo $B \longrightarrow S^{-1}B$. Pela proposição 2.3 temos uma equivalência homotópica

$$L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B S^{-1}B \longrightarrow L \cdot (\mathscr{F}).$$

Tensorizando $\otimes_B M$ obtemos a equivalência homotópica

$$(L \cdot (\mathscr{E}) \otimes_B M) \otimes_B S^{-1}B \longrightarrow L \cdot (\mathscr{F}) \otimes_B M \simeq L \cdot (\mathscr{F}) \otimes_{S^{-1}B} S^{-1}M$$

e portanto isomorfismos

$$T_i(B|A, M) \otimes_B S^{-1}B \xrightarrow{\sim} T_i(S^{-1}B|A, S^{-1}M).$$

Agora, tomando o dual $\mathrm{Hom}_{S^{-1}B}(\ \ , S^{-1}M)$ a partir da equivalência $L\cdot(\mathscr{E})\otimes_B S^{-1}B \longrightarrow L\cdot(\mathscr{F})$ obtemos a equivalência

$$S^{-1}\mathrm{Hom}_B(L\cdot(\mathscr{E}), M) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{-1}B}(L\cdot(\mathscr{E})\otimes_B S^{-1}B, S^{-1}M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S^{-1}B}(L\cdot(\mathscr{F}), S^{-1}M),$$

onde o primeiro isomorfismo é dado pela proposição 2.4, e portanto isomorfismos

$$S^{-1}T^i(B|A, M) \xrightarrow{\sim} T^i(S^{-1}B|A, S^{-1}M).$$

■

Lema 2.10. *Sejam B uma A-álgebra e $\mathscr{E}$ uma extensão livre de B sobre A. Se A é Noetheriano e B é essencialmente de tipo finito sobre A (i.e. B é uma localização de uma A-álgebra de tipo finito) então cada termo de $L\cdot(\mathscr{E})$ é finitamente apresentado sobre B. Em particular,*

$$S^{-1}T^i(B|A, M) \xrightarrow{\sim} T^i(S^{-1}B|A, S^{-1}M)$$

pela proposição 2.7.

Observação: Em virtude da construção de extensões de B sobre A temos $L^1\cdot(\mathscr{E})$ um B-modulo livre. Note que, para extensões livres $\mathscr{E}$ de B sobre A, $L^0\cdot(\mathscr{E}) = \Omega_{R|A}\otimes_R B$ é um B-módulo livre, uma vez que se $R = A[T_i]$ então $\Omega_{R|A} = \bigoplus_i RdT_i$ é o R-módulo livre sobre $\{dT_i\}_i$. Para ver isso basta notar que $d : R \longrightarrow \bigoplus_i RdT_i$ dada por $F \mapsto \sum \frac{\partial F}{\partial T_i} dT_i$ é uma A-derivação satisfazendo a propriedade universal de $\Omega_{R|A}$. De fato, dada $D \in \mathrm{Der}_A(B, M)$, $\tilde{D} \in \mathrm{Hom}_B\left(\bigoplus_i RdT_i, M\right)$, dada por $dT_i \longmapsto DT_i$, é a única aplicação B-linear fazendo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_i RdT_i \arrow[d, dashed, "\tilde{D}"] \\
B \arrow[ur, "d"] \arrow[r, "D"'] & M
\end{tikzcd}$$

comutar. Doravante, admitiremos $L^1\cdot(\mathscr{E})$ e $L^0\cdot(\mathscr{E})$ livres para complexos cotangentes.

Proposição 2.8. *Se $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ é uma sequência de homomorfismos de anéis e M um C-módulo. Então temos sequência exatas*

$$T_2(B|A, M) \longrightarrow T_2(C|A, M) \longrightarrow T_2(C|B, M) \longrightarrow$$

$$T_1(B|A, M) \longrightarrow T_1(C|A, M) \longrightarrow T_1(C|B, M) \longrightarrow$$

$$T_0(B|A, M) \longrightarrow T_0(C|A, M) \longrightarrow T_0(C|B, M) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow T^0(C|B,M) \longrightarrow T^0(C|A,M) \longrightarrow T^0(B|A,M)$$

$$\longrightarrow T^1(C|B,M) \longrightarrow T^1(C|A,M) \longrightarrow T^1(B|A,M)$$

$$\longrightarrow T^2(C|B,M) \longrightarrow T^2(C|A,M) \longrightarrow T^2(B|A,M)$$

Demonstração: Considere uma sequência exata

$$0 \longrightarrow L\cdot(\mathscr{E}) \otimes_B C \longrightarrow L\cdot(\mathscr{F}) \longrightarrow L\cdot(\mathscr{G}) \longrightarrow 0$$

dada pelo teorema 2.1, onde $L\cdot(\mathscr{E})$, $L\cdot(\mathscr{G})$ e $L\cdot(\mathscr{F})$ são complexos cotangentes de B sobre A, de C sobre B, e de C sobre A, respectivamente.

Como os termos de grau 0 e 1 de $L\cdot(\mathscr{E})$ e $L\cdot(\mathscr{F})$ são livres temos

$$0 \longrightarrow L\cdot(\mathscr{E}) \otimes_B M \longrightarrow L\cdot(\mathscr{F}) \otimes_C M \longrightarrow L\cdot(\mathscr{G}) \otimes_C M \longrightarrow 0$$

exata, exceto possivelmente com $L^2\cdot(\mathscr{E}) \otimes_B M \longrightarrow L\cdot(\mathscr{E}) \otimes_C M$ não injetora.

Agora, como os termos de ordem 0 1 são livres sobre C, dualizando sequência

$$0 \longrightarrow L\cdot(\mathscr{E}) \otimes_B C \longrightarrow L\cdot(\mathscr{F}) \longrightarrow L\cdot(\mathscr{G}) \longrightarrow 0$$

por $\mathrm{Hom}_C(\ \ ,M)$, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(L\cdot(\mathscr{G}),M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(L\cdot(\mathscr{F}),M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(L\cdot(\mathscr{E}),M) \longrightarrow 0$$

com $\mathrm{Hom}_C(L\cdot(\mathscr{F}),M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(L\cdot(\mathscr{E}),M)$ possivelmente não sobrejetora em grau 2.

O resultado segue agora do lema 2.7. ■

Proposição 2.9. *Se $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ é uma sequência exata de B-módulos temos sequências exatas de nove termos*

$$T_2(B|A,M') \longrightarrow T_2(B|A,M) \longrightarrow T_2(B|A,M'') \longrightarrow$$

$$T_1(B|A,M') \longrightarrow T_1(B|A,M) \longrightarrow T_1(B|A,M'') \longrightarrow$$

$$T_0(B|A,M') \longrightarrow T_0(B|A,M) \longrightarrow T^0(B|A,M'') \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow T^0(B|A,M') \longrightarrow T^0(B|A,M) \longrightarrow T^0(B|A,M'') \longrightarrow$$

$$T^1(B|A,M') \longrightarrow T^1(B|A,M) \longrightarrow T^1(B|A,M'') \longrightarrow$$

$$T^2(B|A,M') \longrightarrow T^2(B|A,M) \longrightarrow T^2(B|A,M'').$$

Demonstração: Para obter a primeira sequência exata basta tensorizá-la por $L\cdot(\mathscr{E})\otimes_B$ obtendo

$$0 \longrightarrow L\cdot(\mathscr{E})\otimes_B M' \longrightarrow L\cdot(\mathscr{E})\otimes_B M \longrightarrow L\cdot(\mathscr{E})\otimes_B M'' \longrightarrow 0$$

com $0 \longrightarrow L\cdot(\mathscr{E})\otimes_B M' \longrightarrow L\cdot(\mathscr{E})\otimes_B M$ não necessariamente exata em grau 2. Analogamente, dualizando a sequência por $\mathrm{Hom}_B(L\cdot(\mathscr{E}),\ \ )$, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(L\cdot(\mathscr{E}), M'') \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(L\cdot(\mathscr{E}), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(L\cdot(\mathscr{E}), M') \longrightarrow 0$$

com $\mathrm{Hom}_B(L\cdot(\mathscr{E}), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(L\cdot(\mathscr{E}), M') \longrightarrow 0$ possivelmente não exata em grau 2.

O resultado segue agora do lema 2.7. ■

Lema 2.11. *Sejam A um anel, B uma A-álgebra, C uma B-álgebra e M um B-módulo. Suponha Spec $C \longrightarrow$ Spec B uma imersão aberta. Então a aplicação natural $T_i(B|A, M)\otimes_B C \longrightarrow T_i(C|A, M\otimes_B C)$ é um isomorfismo. Se assumirmos também que A é Noetheriano e que todo anel local de B é essencialmente de tipo finito sobre A então a aplicação natural $T^i(C|A, M\otimes_B C) \longrightarrow T^i(B|A, M)\otimes_B C$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Para constatar que um homomorfismo de C-módulos é um isomorfismo é suficiente verifificar que ele é isomorfismo depois de tensorizá-lo por $C_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\ C$. Seja $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\ B$ a imagem inversa de $\mathfrak{p}$ por $B \longrightarrow C$. Como Spec $C \longrightarrow$ Spec B é uma imersão aberta temos que $B_{\mathfrak{q}} \longrightarrow C_{\mathfrak{p}}$ é um isomorfismo. Temos agora que

$$\begin{aligned}
T_i(B|A, M)\otimes_B C\otimes_C C_{\mathfrak{p}} &\simeq T_i(B|A, M)\otimes_B B_{\mathfrak{q}}\\
&\simeq T_i(B_{\mathfrak{q}}|A, M\otimes_B B_{\mathfrak{q}})\\
&\simeq T_i(C_{\mathfrak{p}}|A, M\otimes_B C_{\mathfrak{p}})\\
&\simeq T_i(C|A, M\otimes_B C)\otimes_C C_{\mathfrak{p}}
\end{aligned}$$

onde o segundo e o quarto isomorfismos seguem da proposição 2.7. Temos também

$$\begin{aligned}
T^i(B|A, M)\otimes_B C\otimes_C C_{\mathfrak{p}} &\simeq T^i(B|A, M)\otimes_B B_{\mathfrak{q}}\\
&\simeq T^i(B_{\mathfrak{q}}|A, M\otimes_B B_{\mathfrak{q}})\\
&\simeq T^i(C_{\mathfrak{p}}|A, M\otimes_B C_{\mathfrak{p}})\\
&\simeq T^i(C_{\mathfrak{p}}|A, (M\otimes_B C)_{\mathfrak{p}})\\
&\simeq T^i(C|A, M\otimes_B C)\otimes_C C_{\mathfrak{p}}
\end{aligned}$$

onde o segundo e o quinto isomorfismos seguem do lema 2.10. ■

Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de esquemas separados. Suponha inicialmente $Y =$ Spec A afim. Seja $\{U_k\}$ um cobertura aberta afim de X, $U_k =$ Spec B_k. Uma vez que X é um esquema separado temos que $U_{kj} := U_k \cap U_j =$ Spec B_{kj} é afim. Então, as aplicações Spec $B_{kj} \longrightarrow$ Spec B_k e Spec $B_{kj} \longrightarrow$ Spec B_j são imersões abertas uma vez que $\mathcal{O}_X|_{U_{kj},x} \simeq \mathcal{O}_X|_{U_k,x} \simeq \mathcal{O}_X|_{U_j,x}$ para todo $x \in U_{kj}$. Considere $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}_X$-módulo quase coerente. Sejam

$\mathcal{F}_k := \mathcal{F}|_{U_k}$, $M_k := \mathcal{F}(U_k)$, $\mathcal{F}_{kj} := \mathcal{F}|_{U_k \cap U_j}$, $M_{kj} := \mathcal{F}(U_{kj})$. Ponha $\mathcal{G}_k := T_i(\widetilde{B_k|A, M_k})$ (resp. $\mathcal{G}_{kj} := T_i(\widetilde{B_{kj}|A, M_{kj}}))$ o feixe quase coerente sobre U_k (resp. U_{kj}). Pelo lema 2.11, temos isomorfismos $\beta_{kj} : \mathcal{G}_k|_{U_{kj}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{kj}$ (bastando ver que para cada $\mathfrak{p} \in U_{kj}$ tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_k|_{U_{kj},\mathfrak{p}} &= T_i(B_k|A, M_k)_\mathfrak{p} \\
&= T_i(B_k|A, M_k) \otimes_{B_k} (B_k)_\mathfrak{p} \\
&= T_i(B_k|A, M_k) \otimes_{B_k} (B_{kj})_\mathfrak{p} \text{ (pois } U_{kj} \longrightarrow U_k \text{ é imersão aberta)} \\
&= T_i(B_{kj}|A, M_k \otimes_{B_k} (B_{kj})_\mathfrak{p}) \text{ (lema 2.11)} \\
&= T_i(B_{kj}|A, M_{kj} \otimes_{B_{kj}} (B_{kj})_\mathfrak{p}) \text{ (pois } \mathcal{F}_{kj,\mathfrak{p}} \simeq \mathcal{F}_{k,\mathfrak{p}}) \\
&= T_i(B_{kj}|A, M_{kj}) \otimes_{B_{kj}} (B_{kj})_\mathfrak{p} \text{ (lema 2.11)} \\
&= T_i(B_{kj}|A, M_{kj})_\mathfrak{p} \\
&= \mathcal{G}_{kj,\mathfrak{p}})
\end{aligned}$$

e então isomorfismos $\alpha_{kj} : \mathcal{G}_{kj}|_{U_{kj}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_j|_{U_{kj}}$ dados por $\alpha_{kj} := \beta_{jk}^{-1} \circ \beta_{kj}$. É claro que α_{kk} á identidade e $\alpha_{kj} \circ \alpha_{jl} = \alpha_{kl}$. Se, adicionalmente, assumirmos Y Noetheriano e f localmente de tipo finito então se obtém a mesma situação com setas e índices reversos. Então os $\mathcal{G}_k$ colam para formar um feixe quase coerente $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos que denotamos por $\mathcal{T}_i(X|Y, \mathcal{F})$. Definimos $\mathcal{T}^i(X|Y, \mathcal{F})$ de modo análogo. Note que $\mathcal{T}_i(X|Y, \mathcal{F})$ não depende da cobertura $\{U_k\}$.

Queremos passar agora do caso Y afim para o caso Y separado arbitrário. Sejam $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de esquemas e $\{U_k = \text{Spec } B_k\}$ uma cobertura aberta afim de Y. Como $U_k \cap U_j$ é afim podemos escrever $U_k \cap U_j = \text{Spec } B_{kj}$. Sejam $V_k := f^{-1}(U_k)$, $V_{kj} := f^{-1}(U_{kj}) = V_k \cap V_j$ e $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}_X$-módulo quase coerente. Pondo $\mathcal{F}_k := \mathcal{F}|V_k$ e $\mathcal{F}_{kj} := \mathcal{F}|_{V_{kj}}$ sejam $\mathcal{G}_k := \mathcal{T}_i(V_k|U_k, \mathcal{F}_k)$ e $\mathcal{G}_{kj} := T_i(V_{kj}|U_{kj}, \mathcal{F}_{kj}))$ os feixes quase coerentes sobre V_k e V_{kj}, respectivamente. Temos, pela proposição 2.6, isomorfismos $\beta_{kj} : \mathcal{G}_k|_{V_{kj}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{kj}$ e então isomorfismos compatíveis $\alpha_{kj} : \mathcal{G}|_{V_{kj}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}|_{V_{kj}}$. O feixe $\mathcal{G}$ obtido da colagem dos $\mathcal{G}_k$ é denotado por $\mathcal{T}_i(X|Y, \mathcal{F})$. Analogamente, construimos $\mathcal{T}^i(X|Y, \mathcal{F})$ no caso em que Y não é afim.

Sejam $g : Z \longrightarrow X$, $f : X \longrightarrow Y$ morfismos de esquemas separados e $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}_Z$-módulo quase coerente. Então é possível definir $\mathcal{T}_i(X|Y, \mathcal{F})$, que será pelos métodos anteriores, um $\mathcal{O}_Z$-módulo quase coerente (primeiro defina-o para o caso X, Y, Z afins, depois X, Y afins, Y afim e por fim o caso X, Y, Z quaisquer). Se assumirmos que Y é localmente Noetheriano e g, f localmente de tipo finito então podemos definir $\mathcal{T}^i(X|Y, \mathcal{F})$ pelo mesmo processo. Não é essencial admitir X, Y, Z esquemas separados mas simplifica as construções acima. Não é conhecida aplicação da teoria para esquemas não separados.

Temos a seguir claras generalizações das proposições 2.8 e 2.9: Seja $Z \longrightarrow Y \longrightarrow X$ uma sequência de homomorfismos de esquemas e $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}_Z$-módulo quase coerente. Então existe uma sequência exata

$$\mathcal{T}_2(Y|X,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{T}_2(Z|X,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{T}_2(Z|Y,\mathcal{F}) \longrightarrow$$

$$\mathcal{T}_1(Y|X,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{T}_1(Z|X,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{T}_1(Z|Y,\mathcal{F}) \longrightarrow$$

$$\mathcal{T}_0(Y|X,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{T}_0(Z|X,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{T}_0(Z|Y,\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

A sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}^0(Z|Y,\mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathcal{T}^0(Z|X,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathcal{T}^0(Y|X,\mathcal{F}_3)$$

$$\longrightarrow \mathcal{T}^1(Z|Y,\mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathcal{T}^1(Z|X,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathcal{T}^1(Y|X,\mathcal{F}_3)$$

$$\longrightarrow \mathcal{T}^2(Z|Y,\mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathcal{T}^2(Z|X,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathcal{T}^2(Y|X,\mathcal{F}_3)$$

é também exata em virtude da condição de finitude.

Se $0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$ é uma sequência exata de feixes quase coerentes sobre Z então temos as sequências exatas

$$\mathcal{T}_2(Y|X,\mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathcal{T}_2(Y|X,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathcal{T}_2(Y|X,\mathcal{F}_3) \longrightarrow$$

$$\mathcal{T}_1(Y|X,\mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathcal{T}_1(Y|X,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathcal{T}_1(Y|X,\mathcal{F}_3) \longrightarrow$$

$$\mathcal{T}_0(Y|X,\mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathcal{T}_0(Y|X,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathcal{T}_0(Y|X,\mathcal{F}_3) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}^0(Y|X,\mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathcal{T}^0(Y|X,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathcal{T}^0(Y|X,\mathcal{F}_3)$$

$$\longrightarrow \mathcal{T}^1(Y|X,\mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathcal{T}^1(Y|X,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathcal{T}^1(Y|X,\mathcal{F}_3)$$

$$\longrightarrow \mathcal{T}^2(Y|X,\mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathcal{T}^2(Y|X,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathcal{T}^2(Y|X,\mathcal{F}_3).$$

Observação: Para a segunda sequência exata assumimos a validade da condição de finitude.

3 Critério de Anulamento

3.1 Anulamento do primeiro functor cotangente

Lema 3.1. *Sejam P um anel de polinômios sobre A e M um P-módulo. Então $T^i(P|A,M) = 0$ e $T_i(P|A,M) = 0$, para $i = 1,2$.*

Demonstração: Como T^i e T_i são independentes da escolha da extensão de P sobre A podemos, neste caso, tomar $R = P$ e $e_0 = \mathrm{Id}_P$. Como $\mathrm{Ker}(e_0) = 0$ temos $F = 0$ donde $L^2(\mathscr{E}) = L^1(\mathscr{E}) = 0$ e assim $L(\mathscr{E})$ consiste de apenas $L^0(\mathscr{E})$. ∎

Proposição 3.1. *Se*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de anéis então $T^0(B|A,M) = T_0(B|A,M) = 0$, $T_1(B|A,M) = I/I^2 \otimes_B M$ e $T^1(B|A,M) = Hom_B(I/I^2, M)$ para todo B-módulo M.

Demonstração: Podemos supor $R = A$ (uma vez que a cohomologia T^i independe da extensão $\mathscr{E}$ tomada) donde $L^0(\mathscr{E}) = 0$, o que acarreta $T^0(B|A,M) = T_0(B|A,M) = 0$. Tome como na construção de $L(\mathscr{E})$ uma sequência exata

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow F \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

que tensorizando por B nos fornece a sequência exata

$$U \otimes_A B \longrightarrow F \otimes_A B = L^1(\mathscr{E}) \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow 0.$$

Como a aplicação canônica $U \otimes_A B \longrightarrow L^2(\mathscr{E}) = U/U_0 \longrightarrow 0$ é sobrejetora obtemos o seu levantamento sobrejetor $L^2(\mathscr{E}) \longrightarrow L^1(\mathscr{E}) \longrightarrow 0$ e assim

$$(*) \qquad L^2(\mathscr{E}) \longrightarrow L^1(\mathscr{E}) \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow 0$$

exata. Tomando $\mathrm{Hom}_B(\ \ , M)$ em $(*)$ temos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(I/I^2, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(L^1(\mathscr{E}), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(L^2(\mathscr{E}), M)$$

exata, e portanto $T^1(B|A,M) = \mathrm{Hom}_B(I/I^2, M)$. Tomando $\otimes_B M$ em $(*)$ temos a sequência exata

$$L^2(\mathscr{E}) \otimes_B M \longrightarrow L^1(\mathscr{E}) \otimes_B M \longrightarrow I/I^2 \otimes_B M \longrightarrow 0$$

e portando $T_1(B|A,M) = I/I^2 \otimes_B M$. ∎

Lema 3.2. *Sejam B uma A-álgebra, P um anel de polinômios sobre A e I um ideal em P tal que $B \simeq P/I$. Então as aplicações canônicas*

$$T_1(B|A, M) \longrightarrow Ker(I/I^2 \otimes_B M \longrightarrow \Omega_{P|A} \otimes_P M)$$

e

$$Coker(Hom_P(\Omega_{P|A}, M) \longrightarrow Hom_B(I/I^2, M)) \longrightarrow T^1(B|A, M)$$

são isomorfismos.

Demonstração: Aplicando a proposição 2.8 a sequência $A \longrightarrow P \longrightarrow B$ e utilizando o lema 3.1 e a proposição 3.2 obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow T_1(B|A, M) \longrightarrow I/I^2 \otimes_B M \longrightarrow \Omega_{P|A} \otimes_P M \longrightarrow \cdots$$

donde segue o primeiro isomorfismo. Analogamente, aplicando a proposição 2.8 obtemos a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_P(\Omega_{P|A}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(I/I^2, M) \longrightarrow T^1(B|A, M) \longrightarrow 0$$

donde segue portanto o segundo isomorfismo. ■

Proposição 3.2. *Seja B uma A-álgebra. Então são equivalentes:*

(1) $T^1(B|A, M) = 0$ para todo B-módulo M.

(2) $T_1(B|A, B) = 0$ e $\Omega_{B|A}$ é projetivo.

(3) B satisfaz a "propriedade de levantamento", i.e., se C e C' são duas A-álgebras tais que $C' \simeq C/I$, com $I^2 = 0$, e $g' : B \longrightarrow C'$ é um homomorfismo de A-álgebras então existe um homomorfismo $g : B \longrightarrow C$ de A-álgebras que induz g'.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ A \arrow[ur] \arrow[r] & C \arrow[r] & C' \end{tikzcd}$$

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) Dada uma sequência exata curta $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ temos, pela proposição 2.9 , a sequência exata

$$0 \longrightarrow T^0(B|A, M') \longrightarrow T^0(B|A, M) \longrightarrow T^0(B|A, M'') \longrightarrow 0$$

donde o functor $T^0(B|A,\ \ ) = \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A},\ \ )$ é exato. Logo, $\Omega_{B|A}$ é projetivo.

Considere P um anel de polinômios sobre A e

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow P \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de anéis. Pela prova do lema 3.2 temos a sequência exata

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow T_1(B|A,B) \longrightarrow J/J^2 \longrightarrow \Omega_{P|A} \otimes_P B \longrightarrow \Omega_{B|A} \longrightarrow 0.$$

Para um B-módulo M injetivo, o último termo da direita da sequência exata $\mathrm{Hom}_B((*), M)$ figura $\mathrm{Hom}_B(T^1(B|A,B), M) = T^1(B|A,M) = 0$. Como todo módulo pode ser imerso em um módulo injetivo escolha uma imersão $0 \longrightarrow T_1(B|A,B) \longrightarrow M$ com M um B-módulo injetivo. Logo, de $\mathrm{Hom}_B(T^1(B|A,B), M) = 0$ tem-se $T_1(B|A,B) = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Neste caso, $(*)$ é uma sequência exata curta, donde $T^1(B|A,B) \simeq \mathrm{Ext}^1_B(\Omega_{B|A}, M)$ uma vez que

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_P(\Omega_{P|A}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(J/J^2, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_B(\Omega_{B|A}, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_B(\Omega_{P|A} \otimes_P B, M) = 0$$

é exata (note que $\Omega_{P|A} \otimes_P B$ é um B-módulo livre e então projetivo). Como $\Omega_{B|A}$ é projetivo temos $\mathrm{Ext}^1_B(\Omega_{B|A}, M) = 0$ para todo B-módulo M, donde $T^1(B|A,M) = 0$.

(1) $\Rightarrow$ (3) Considere $B \simeq P/J$ como antes e sejam C, C', I, g' como em (3). Seja $h' : P \longrightarrow C'$ dada por g' seguida de g'. Como P é um anel de polinômios sobre A (projetivo) temos um levantamento $h : P \longrightarrow C$ de h'. De $I^2 = 0$ podemos fazer I um C'-módulo, e então um B-módulo via g'. Como $h(J) \subseteq I$ temos $h(J^2) = 0$, donde obtemos $h'' \in \mathrm{Hom}_B(J/J^2, I)$. Mas de $T^1(B|A,I) = 0$ obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, I) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(P, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(J/J^2, I) \longrightarrow 0$$

e então obtemos uma derivação $D \in \mathrm{Der}_A(P, I)$ induzida de h''. Agora, como $(h - D)(J) = 0$ obtemos um levantamento $B \longrightarrow C$ de g'.

(3) $\Rightarrow$ (1) Seja $x \in T^1(B|A,M)$. Então x é induzido, em virtude de

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(P, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(J/J^2, M) \longrightarrow T^1(B|A,M) \longrightarrow 0$$

exata, por um elemento $\bar{h} \in \mathrm{Hom}_B(J/J^2, M) \simeq \mathrm{Hom}_P(J, M)$. Sejam $K := \mathrm{Ker}(\bar{h})$, $\varphi : P \longrightarrow P/K$ e $C := (P/K \oplus M)/Q$, onde $Q := \{\varphi(z) + \bar{h}(z) | z \in J\}$. Note que M é um A-módulo via $A \longrightarrow P \longrightarrow B$ e definindo $m \cdot m' := 0$ temos M uma A-álgebra e assim C é também uma A-álgebra. Tome $C' = B$ e $g' = \mathrm{Id}_B$. Temos uma sequência exata de A-álgebras

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

com $M^2 = 0$, onde $C \longrightarrow C'$ é dada canonicamente por $((x \bmod K) + m) \bmod Q \longmapsto x \bmod J$ (que está bem definida uma vez que $K \subseteq J$). De (3) temos um levantamento $g : B \longrightarrow C$ de g' que induz $h : P \longrightarrow C$. Então $\varphi - h \in \mathrm{Der}_A(P, M)$ induz $\bar{h}$ donde $x = 0$. ∎

4 O T^1 de uma curva monomial

4.1 Curvas Monomiais

Definição 4.1. *Um **semigrupo numérico** é um submonoide N do $\mathbb{N}$ (i.e. um subconjunto de $\mathbb{N}$ fechado sob adição que contém 0) com complementar finito.*

Se $m_1, \cdots, m_r$ são inteiros positivos tais que $\text{mdc}\{m_1, \ldots, m_r\} = 1$ então $\langle m_1, \ldots, m_r\rangle := \{\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_r m_r | \lambda_i \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo numérico e, neste caso, dizemos que este semigrupo é gerado por $m_1, \ldots, m_r$. Além disso, todo semigrupo numérico é desta forma.

Observação: O único semigrupo de gênero zero é $\mathbb{N}$. Doravante, todos os semigrupos considerados terão gênero maior do que zero.

Definição 4.2. *Seja N um semigrupo numérico, chamamos $\mathbb{N} \setminus N = \{l_1 < l_2 < \ldots < l_g\}$ o **conjunto das lacunas** do N e g, que é a quantidade de lacunas, o seu **gênero**.*

Definição 4.3. *Seja N um semigrupo numérico. O menor inteiro c tal que $c + \mathbb{N} \subseteq N$ é dito o **condutor** do semigrupo N.*

Observação: Note que o conjunto dos $x \in \mathbb{Z}$ tais que $x + \mathbb{N} \subseteq N$ está contido em $\mathbb{N}$. Se não existisse um x inteiro tal que $x + \mathbb{N} \subseteq N$ então para cada $n \in \mathbb{Z}$ existiria $x_n \in \mathbb{N}$ tal que $n + x_n \notin N$. Em particular, $\mathbb{N} \setminus N$ seria um conjunto infinito, o que não ocorre. Logo, todo semigrupo numérico admite condutor.

Lema 4.1. *$l_g = c - 1$.*

Demonstração: Dado $x \in \mathbb{N}$ tem-se $l_g + (1 + x) > l_g$, donde $l_g + 1 + x \in N$. Logo, pela minimalidade de c segue $c \leq l_g + 1$. Se fosse $c - 1 < l_g$ então existiria $q \geq 1$ tal que $l_g = c + (q - 1) \in N$, o que é uma contradição. ∎

Definição 4.4. *Dizemos que um semigrupo numérico N é **simétrico** quando vale a relação $l_g = 2g - 1$.*

Lema 4.2. *Em um semigrupo numérico N vale a relação*

$$l_g \leq 2g - 1.$$

Demonstração: Ponha $A := \{0, 1, \ldots, l_g\}$. Como a aplicação $A \cap N \longrightarrow \mathbb{N} \setminus N$ dada por $n_i \mapsto l_g - n_i$ é injetora tem-se $\#(A \cap N) \leq g$. Como A é união disjunta de $\mathbb{N} \setminus N$ e $A \cap N$ tem-se $l_g + 1 \leq 2g$. ∎

Lema 4.3. *Um semigrupo numérico N é simétrico se e só se*

$$n \in N \Leftrightarrow l_g - n \notin N.$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Considere a aplicação $\varphi : N \setminus \{2g, 2g+1, \cdots\} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus N$ dada por $n_i \mapsto l_g - n_i$. φ está bem definida pois se fosse $l_g - n_i \in N$ então $l_g = (l_g - n_i) + n_i \in N$, o que não pode ocorrer. Note que toda lacuna de N pertence a $N \setminus \{2g, 2g+1, \ldots\}$, donde $\#(N \setminus \{2g, 2g+1, \ldots\}) \geq g$. Agora, como φ é injetora tem-se $g \geq \#(N \setminus \{2g, 2g+1, \ldots\})$. Logo, $\#(N \setminus \{2g, 2g+1, \ldots\}) = g$ donde φ é sobrejetora.

($\Leftarrow$) Neste caso, a aplicação $\mathbb{N} \setminus N \longrightarrow N \setminus \{l_g+1, l_g+2, \ldots\}$ dada por $l_i \mapsto l_g - l_i$ é bijetora. Logo, como $\{0, 1, 2, \ldots, l_g\}$ é união disjunta das lacunas com $N \setminus \{l_g+1, l_g+2, \ldots\}$ tem-se $2g = l_g + 1$.

∎

Exemplo: Semigrupos numéricos **ordinários**, i.e., semigrupos da forma

$$H_g = \{0, g+1, g+2, \ldots\}$$

são simétricos se e só se $g = 1$, pois $g = 2g - 1$ quando $g = 1$. Por exemplo, $\langle 2, 3 \rangle$ é um semigrupo simétrico ordinário.

Sejam $N := \langle m_1, \ldots, m_r \rangle$ e k algebricamente fechado com $\mathrm{char}(k) = 0$. Seja $k[N] := \bigoplus_{n \in N} kt^n = k[t^{m_1}, \ldots, t^{m_r}] \subseteq k[t]$ (de modo que $k[N]$ não depende dos geradores do semigrupo N). De outra forma, $k[N] = k[x_1, \ldots, x_r]$, com $x_i = t^{m_i}$. Seja $C(N) := \{(t^{m_1}, \ldots, t^{m_r}) \in \mathbb{A}^r | t \in k\}$. Note que podemos supor $m_1 < m_2 < \ldots < m_r$ pois do contrário podemos fazer uma ordenação das potências via uma mudança de coordenadas afim. Considere o homomorfismo de k-álgebras $\varphi : k[X_1, \ldots, X_r] \longrightarrow k[t]$ dado por $X_i \mapsto t^{m_i}$. É claro que $I(C(N)) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ uma vez que k é infinito. Pondo $P := k[X_1, \ldots, X_r]$ temos $k[N] = k[C(N)] = P/I$.

Lema 4.4. *Se $N = \langle m_1, \ldots, m_r \rangle$ é um semigrupo numérico então $C(N)$ é um conjunto algébrico irredutível com dim $C(N) = 1$.*

Demonstração: É claro que $C(N) \subset V(X_i^{m_j} - X_j^{m_i}, i \neq j)$. Seja $(a_1, \ldots, a_r) \neq 0$ em $V(X_i^{m_j} - X_j^{m_i}, i \neq j)$. Como $m_1, \ldots, m_r$ são coprimos podemos obter inteiros $q_1, \ldots, q_r$ tais que $q_1 m_1 + \ldots + q_r m_r = 1$. Ponha $c := a_1^{q_1} \ldots a_r^{q_r}$. Logo,

$$\begin{aligned}
c^{m_1} &= (a_1^{q_1} \ldots a_r^{q_r})^{m_1} \\
&= a_1^{q_1 m_1} a_2^{q_2 m_1} \ldots a_r^{q_r m_1} \\
&= a_1^{1 - q_2 m_2 - \ldots - q_r m_r} a_2^{q_2 m_1} \ldots a_r^{q_r m_1} \\
&= a_1 \cdot (a_1^{-q_2 m_2} a_2^{q_2 m_1}) \ldots (a_1^{-q_r m_r} a_r^{q_r m_1}) \\
&= a_1 \cdot (a_1^{-m_2} a_2^{m_1})^{q_2} \ldots (a_1^{-m_r} a_r^{m_1})^{q_r} \\
&= a_1.
\end{aligned}$$

Procedendo de modo análogo com os demais índices temos $c^{m_i} = a_i$ para todo $i = 1, \cdots, r$, donde $V(X_i^{m_j} - X_j^{m_i}, i \neq j) \subset C(N)$. Para ver agora que dim $C(N) = 1$ basta ver que a aplicação $\mathbb{A}^1 \longrightarrow C(N)$ dada por $c \mapsto (c^{m_1}, \ldots, c^{m_r})$ é birracional. Já a irredutibilidade de $C(N)$ vem de $k[N] \hookrightarrow k[t]$. ∎

Em virtude do último lema faz sentido definir

Definição 4.5. *Uma* ***curva monomial afim*** *é uma curva parametrizada da forma $C(N)$ para algum semigrupo numérico N.*

Observação: Note que $C(N)$ é singular em $(0, \ldots, 0)$ se e só se $m_1 > 1$. Além disso, se esse é o caso, este será o seu único ponto singular. Logo, $C(N) \setminus (0, \ldots, 0)$ é lisa para qualquer semigrupo numérico N.

A prova do seguinte resultado foi extraída de [H].

Proposição 4.1. ***(Herzog)****Para uma curva monomial C, $I(C)$ é gerado por polinômios da forma*

$$\prod_{i \in I_1} X_i^{\alpha_i} - \prod_{i \in I_2} X_i^{\beta_i}$$

tais que $\sum_{i \in I_1} \alpha_i m_i = \sum_{i \in I_2} \beta_i m_i$ com $I_1, I_2 \subseteq \{1, 2, \ldots, r\}$ disjuntos e α_i, β_j inteiros não negativos.

Demonstração: Pondo J o ideal gerado pelos polinômios acima vemos claramente que $J \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ pois

$$\varphi\Big(\prod_{i \in I_1} X_i^{\alpha_i}\Big) = t^{\Sigma \alpha_i m_i} = t^{\Sigma \beta_i m_i} = \varphi\Big(\prod_{i \in I_2} X_i^{\beta_i}\Big).$$

Seja $F \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ponha $F = \sum_{\nu} a_\nu X^\nu$ com $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{N}^r$ e $X^\nu = X_1^{\nu_1} \ldots X_1^{\nu_1}$. Como

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(F) \\ &= \sum_{\nu} a_\nu t^{\Sigma \nu_i m_i} \\ &= \sum_{k=0} \Big(\sum_{\sum \nu_i m_i = k} a_\nu \Big) t^k \end{aligned}$$

então cada parte $F_k = \sum_{\sum \nu_i m_i = k} a_\nu X^\nu$ de F com peso $k = \sum \nu_i m_i$ pertence a $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e por isso podemos supor que todos os monômios de F têm o mesmo peso. Seja X^ν um mônomio de F ($a_\nu \neq 0$). Logo, F deve conter um outro monômio X^μ pois se F consiste de um único monômio então F não está em $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Escreva

$$F = a_\nu (X^\nu - X^\mu) + (F - a_\nu X^\nu + a_\nu X^\mu).$$

Como X^ν e X^μ têm o mesmo peso podemos escrever

$$X^\nu - X^\mu = X_1^{b_1} \cdots X_r^{b_r} \Big(\prod_{i \in I_1} X_i^{\alpha_i} - \prod_{i \in I_2} X_i^{\beta_i} \Big)$$

com $I_1, I_2 \subseteq \{1, 2, \ldots, r\}$ disjuntos e $\sum_{i \in I_1} \alpha_i m_i = \sum_{i \in I_2} \beta_i m_i$. Notemos que $F - a_\nu X^\nu + a_\nu X^\mu \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Procedendo de modo análogo com $F - a_\nu X^\nu + a_\nu X^\mu$ e notando que ele tem um monômio a menos que F, este processo deve terminar quando esgotarmos todos os monômios de F. ∎

Definição 4.6. *Em $k[X_1, \ldots, X_r]$ definimos o* ***peso*** *do monômio $X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r}$ como*

$$w(X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r}) := i_1 m_1 + \ldots + i_r m_r.$$

O peso de um polinômio em $k[X_1, \ldots, X_r]$ é o maior peso dentre os pesos de seus monômios. Um polinômio é dito ***isobárico*** *se cada um dos seus monômios têm o mesmo peso.*

Observação: Note que atribuindo-se pesos as variáveis X_i como acima obtemos uma nova graduação para $k[X_1, \ldots, X_r]$ na qual um ideal ser homogêneo significa ser isobárico. Em particular, o ideal de uma curva monomial é isobárico pela proposição 4.1. Note também que um polinômio isobárico pertence a I se, e só se, a soma dos seus coeficientes é nula.

Pondo $C = C(N)$ e $O := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{A}^r$ temos $C \setminus \{O\} = C_{x_1}$ (aberto principal associado a função regular $x_1 \in k[N]$), $k[C_{x_1}] = k[N]_{x_1} = S^{-1}k[N]$ ($S := \{1, x_1, x_1^2, \ldots\}$) e $k[C \setminus \{O\}] = k[N]_{x_1} = k[t]_t = k[t, t^{-1}]$ (k-álgebra de polinômios de Laurent, que é um D.I.P.).

Note que naturalmente temos $k[N]_{x_1} \hookrightarrow k[t, t^{-1}]$. Seja $\alpha \gg 0$ tal que $\alpha m_1 - 1, \alpha m_1, \alpha m_1 + 1 \in N$. Logo,

$$t^{-1} = \frac{t^{\alpha m_1 - 1}}{t^{\alpha m_1}} = \frac{f(x_1, \ldots, x_r)}{x_1^\alpha}$$

e

$$t = \frac{t^{\alpha m_1 + 1}}{t^{\alpha m_1}} = \frac{g(x_1, \ldots, x_r)}{x_1^\alpha}$$

donde $k[N] \simeq k[t, t^{-1}]$.

4.2 Descrição do T^1 para curvas monomiais

No contexto de curvas monomiais considere $P := k[X_1, \ldots, X_r]$, $N := \langle m_1, \ldots, m_r \rangle$ semigrupo numérico e $C := C(N)$. Vimos anteriormente que temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow P \longrightarrow k[N] \longrightarrow 0$$

onde I é o ideal da curva monomial dada pelo semigrupo numérico N. Seja M um $k[N]$-módulo. Pelo lema 3.2 podemos, neste caso, descrever $T^1(k[N]|k, M)$ como

$$T^1(k[N]|k, M) = \operatorname{Coker}(\operatorname{Hom}_P(\Omega_{P|k}, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{k[N]}(I/I^2, M))$$

Aplicando a proposição 2.8 a sequência $k \longrightarrow P \longrightarrow k[N]$ juntamente com a proposição 3.1 e tomando $M = k[N]$ obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \operatorname{Der}_k(k[N], k[N]) \longrightarrow \operatorname{Der}_k(P, k[N]) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{k[N]}(I/I^2, k[N]) \longrightarrow T^1(k[N]|k, k[N]) \longrightarrow 0$$

Passemos agora a descrever os módulos que surgem na sequência exata acima. Uma vez que $C \setminus \{O\} \hookrightarrow C$, onde O é o único ponto singular da C, temos uma sobrejeção $k[N] \longrightarrow k[t,t^{-1}] = k[N]_{x_1} \longrightarrow 0$, donde segue o diagrama comutativo exato

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Der}_k(k[N],k[N]) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Der}_k(P,k[N]) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{k[N]}(I/I^2,k[N]) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Der}_k(k[N],k[t,t^{-1}]) \arrow[r] & \mathrm{Der}_k(P,k[t,t^{-1}]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{k[N]}(I/I^2,k[t,t^{-1}])
\end{tikzcd}$$

Desta forma

$$\mathrm{Der}_k(k[N],k[t,t^{-1}]) \simeq \mathrm{Der}_k(k[t,t^{-1}],k[t,t^{-1}])$$

e

$$\mathrm{Der}_k(P,k[t,t^{-1}]) \simeq \mathrm{Der}_k(P_{X_1},k[t,t^{-1}]).$$

Vejamos agora uma interpretação geométrica para o que fizemos acima. Sejam $V := \{(c_0,c_1,\cdots,c_r) \in \mathbb{A}^{r+1} | c_0c_1 = 1\}$ e $W := \{(c_0,c^{m_1},\cdots,c_{m_r}) | c_0c^{m_1} = 1\}$. Então $k[N]_{x_1} \simeq k[W]$ via o homomorfismo $k[W] \longrightarrow k[N]_{x_1}$ dado por $\bar{f}(X_0,X_1,\cdots,X_r) \longmapsto f(\frac{1}{t^{m_1}},t^{m_1},\cdots,t^{m_r})$. Temos $k[V] = P_{X_1} = k[X_1^{-1},X_1,\cdots,X_r]$ e $k[V] \twoheadrightarrow k[W]$, este último com núcleo J. Logo, de

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow P_{X_1} \longrightarrow k[N]_{x_1} \longrightarrow 0$$

exata temos $J = I_{X_1}$. Notando agora que $k[W]$ satisfaz a propriedade de levantamento sobre k ((3) da proposição 3.2) temos $T^1(k[W]|k,k[W]) = 0$, donde aplicando a proposição 2.8 a sequência $k \longrightarrow k[V] \longrightarrow k[W]$, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[t,t^{-1}],k[t,t^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(P_{X_1},k[t,t^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(I_{X_1}/I_{X_1}^2,k[t,t^{-1}]) \longrightarrow 0.$$

Alternativamente, de

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow k[V] \longrightarrow k[W] \longrightarrow 0$$

exata tem-se (proposição 1.4)

$$J/J^2 \longrightarrow \Omega_{k[V]|k} \otimes_{k[V]} k[W] \longrightarrow \Omega_{k[W]|k} \longrightarrow 0$$

exata e então sua dual

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[W],k[W]) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[V],k[W]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k[W]}(J/J^2,k[W])$$

exata.

A fim de compreender $T^1(k[N]|k,k[N])$, vamos estudar primeiramente $\mathrm{Der}_k(P,k[N])$. Usando a propriedade universal das diferenciais de Kähler, podemos escrever

$$\mathrm{Der}_k(P,k[N]) = \mathrm{Hom}_P(\Omega_{P|k},k[N]) \simeq \mathrm{Hom}_P\left(\bigoplus_{i=1}^{r} P dx_i, k[N]\right) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} k[N]\frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x_i} := \frac{\partial f}{\partial X_i}(x_1,\cdots,x_r) = \frac{\partial f}{\partial X_i}(t^{m_1},\cdots,t^{m_r}) \in k[N]$.

Observação: Atribuiremos certos pesos nas derivações parciais, como segue. Note que $\frac{\partial}{\partial x_i}$ assume valores em $k[t]$, $\frac{\partial}{\partial x_i} : P \longrightarrow k[N] \subseteq k[t]$. Definimos, portanto, o peso de $\frac{\partial}{\partial x_i}$ como $-m_i$, $w(\frac{\partial}{\partial x_i}) = -m_i$. Com esta graduação, a derivação $x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ tem peso igual zero.

Note também que $k[N]$ é graduado onde os elementos de grau s são

$$k[N]_s = \begin{cases} kt^s, \text{ se } s \in N \\ 0, \text{ se } s \notin N \end{cases}$$

Observando que $k[N]x_i\frac{\partial}{\partial x_i} \simeq k[N]$ temos

$$\mathrm{Der}_k(P, k[N]) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} t^{-m_i}k[N]x_i\frac{\partial}{\partial x_i} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} t^{-m_i}k[N]$$

Observação: Diante do exposto acima, $\mathrm{Der}_k(P, k[N])$ é um módulo graduado.

Estudamos agora quem é a parte homogênea de grau s de $\mathrm{Der}_k(P, k[N])$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Der}_k(P, k[N])_s &= \bigoplus_{i=1}^{r} t^{-m_i}k[N]_{s+m_i}x_i\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{r} c_i t^s x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\middle|(c_1, \cdots, c_r) \in k^{\oplus r}, c_i = 0 \text{ se } s + m_i \notin N\right\} \\ &= \left\{\sum_{\substack{i=1 \\ s+m_i \in N}}^{r} c_i t^s x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\middle| c_1, \cdots, c_r \in k\right\} \end{aligned}$$

onde $t^{-m_i}k[N]_{s+m_i} = \begin{cases} kt^s, \text{ se } s + m_i \in N \\ 0, \text{ se } s + m_i \notin N \end{cases}$

Estudaremos agora $\mathrm{Der}_k(k[N], k[N])$. Uma k-derivação $D : k[N] \longrightarrow k[N]$ naturalmente se prolonga a uma k-derivação $D : k[N]_{x_1} \longrightarrow k[N]_{x_1} = k[t, t^{-1}]$. Como $D(F) = \frac{\partial F}{\partial t}D(t)$ para $F \in k[t, t^{-1}]$ temos $D = h\frac{\partial}{\partial t}$ onde $h := D(t) \in k[t, t^{-1}]$ tal que $nht^{n-1} \in k[N]$ (pois $D(t^n) = nht^{n-1} \in k[N]$), para todo $n \in N$; e como char $k = 0$ tem-se $ht^{n-1} \in k[N]$ para todo $n \in N^+ := N \setminus \{0\}$.

Como h é um polinômio de Laurent $\sum c_m t^{m+1} \in k[t, t^{-1}]$, com $m \in \mathbb{Z}$ não nulo exceto possivelmente para quantidade finita, m deve ser tal que $m + n \in N$ para todo $n \in N^+$. Assim, se $D : k[N] \longrightarrow k[N]$ é k-derivação então $D = h\frac{\partial}{\partial t}$ tal que $h = \sum c_m t^{m+1}$, com $m \in \mathrm{End}(N)$ onde

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(N) &:= \{m \in \mathbb{Z} | m + n \in N, \text{ para todo } n \in N^+\} \\ &= \{m \in \mathbb{Z} | m + m_j \in N \text{ para todo } j\} \end{aligned}$$

(estamos pensando na restrição de D a $k[N]$ tal que a imagem também está em $k[N]$).

Veremos agora algumas propriedades de $\mathrm{End}(N)$.

Lema 4.5. *End*$(N) \subseteq \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja c o condutor de N. Então $c - 1 = l_g$. Dado $m \in \mathrm{End}(N)$ tem-se $m + c, m + c + 1, \cdots \in N$ donde $m + c > l_g$ e portanto $m > l_g - c = -1$. ∎

Observações:

(i) $\text{End}(N)$ é semigrupo. Basta ver que $\text{End}(N) \subseteq \mathbb{N}$ e claramente satisfaz $0 \in \text{End}(N)$ e fechado pela adição.

(ii) $\text{End}(N) \supseteq N \cup \{l_g\}$. Primeiro veja que dado $n \in N^+$ tem-se $l_g + n = c + (n-1) \in c + \mathbb{N} \subseteq N$, donde $l_g \in \text{End}(N)$. Já a inclusão $N \subseteq \text{End}(N)$ é óbvia.

Lema 4.6. *End$(N) = N \cup \{l_g\}$ se e só se N é simétrico.*

Demonstração:
Como $\{l_1, \cdots, l_g\} = \mathbb{N} \setminus N$, temos que $l_g - l_i \in N^+$ para cada $l_i < l_g$. Se por contradição existisse $m \in \text{End}(N)$ tal que $l_g \neq m \notin N$ então $m = l_i$ para algum $i \in \{1, 2, \cdots, g-1\}$ donde $l_g = l_i + (l_g - l_i) = m + (l_g - l_i) \in N$, o que não pode ocorrer pois l_g é uma lacuna de N.
Seja $x \in \mathbb{Z} \setminus N$. Suponha $x > 0$ primeiramente. Se $x = l_g$ então $l_g - x = 0 \in N$; se não então $x = l_i$, $i < g$. Como $l_i \notin \text{End}(N)$ então deve existir $n \in N^+$ tal que $n + l_i \notin N$ donde $n + l_i = l_j$, $j > i$. Se $j = g$ acabamos, se não procedemos como antes até esgotar todas as lacunas. Agora, se $x \leq 0$ então $l_g - x \geq l_g$ não pode ser uma lacuna. ∎

Assim, $\text{Der}_k(k[N], k[N]) = k[\text{End}(N)]t\frac{\partial}{\partial t}$. Para cada $m \in \text{End}(N)$ a derivação $t^{m+1}\frac{\partial}{\partial t} : k[N] \longrightarrow k[N]$ tem peso m. Novamente $\text{Der}_k(k[N], k[N])$ é módulo graduado e

$$\text{Der}_k(k[N], k[N])_s = \begin{cases} kt^{s+1}, & \text{se } s \in \text{End}(N) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Tendo em vista $\text{Der}_k(k[N], k[N]) \hookrightarrow \text{Der}_k(P, k[N])$ vamos identificar $t^{s+1}\frac{\partial}{\partial t}$, onde $s \in \text{End}(N)$, com sua imagem.

$$t^{s+1}\frac{\partial}{\partial t} = t^{s+1}\sum_{i=1}^{r}\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{i=1}^{r} m_i t^{s+m_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Considere um sistema de geradores para N, a saber $N = \langle m_1, \cdots, m_r \rangle$. Vale que $k[N] = k[x_1, \cdots, x_r]$, $x_i = t^{m_i}$. Construimos o seguinte diagrama comutativo exato

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \text{Der}_k(k[N], k[N]) \arrow[r] \arrow[d] & \text{Der}_k(P, k[N]) \arrow[r] \arrow[d] & \text{Hom}_{k[N]}(I/I^2, k[N]) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \text{Der}_k(k[N], k[t, t^{-1}]) \arrow[r] & \text{Der}_k(P, k[t, t^{-1}]) \arrow[r] & \text{Hom}_{k[N]}(I/I^2, k[t, t^{-1}])
\end{tikzcd}$$

Sabemos também que

$$T^1(k[N]|k, k[N]) = \text{Coker}(\text{Der}_k(P, k[N]) \longrightarrow \text{Hom}_{k[N]}(I/I^2, k[N])).$$

Utilizando a segunda sequência para determinar T^1 temos: Cada $k[N]$-homomorfismo $I/I^2 \longrightarrow k[N]$ é dado por um operador diferencial $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} h_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, com $h_i \in k[t, t^{-1}]$, tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} h_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in$

$k[N]$ para todo $f \in I$, i.e., $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} h_i x_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \in k[N]$ para todo j onde $\{f_j\}$ geradores de I (proposição 4.1).

$$f_j := X_1^{\alpha_{j_1}} \cdots X_r^{\alpha_{j_1}} - X_1^{\beta_{j_1}} \cdots X_r^{\beta_{j_r}}$$

onde $d_j := w\deg(f_j) = \alpha_{j_1} m_1 + \cdots + \alpha_{j_r} m_r = \beta_{j_1} m_1 + \cdots + \beta_{j_r} m_r$. Logo,

$$x_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = (\alpha_{j_i} - \beta_{j_i}) t^{d_j}.$$

Denote: $\gamma_{j_i} := (\alpha_{j_i} - \beta_{j_i})$.

Utilizando ainda a segunda sequência vemos: Um tal operador define o operador nulo se e só se pertence a $k[t,t^{-1}]t\frac{\partial}{\partial t} = k[t,t^{-1}]\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$. Assim,

$$\mathrm{Hom}_{k[N]}(I/I^2, k[N]) \simeq \frac{\{(h_1, \cdots, h_r) \in k[t,t^{-1}]^{\oplus r} | \sum h_i \gamma_{j_i} t^{d_j} \in k[N] \text{ para todo } j\}}{\{(m_1 h \cdots, m_r h) | h \in k[t,t^{-1}]\}}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{k[N]}(I/I^2, k[N])_s &\simeq \frac{\{(c_1, \cdots, c_r) \in k^{\oplus r} | \sum c_i \gamma_{j_i} = 0 \text{ se } s + d_j \notin N\}}{\{(cm_1, \cdots, cm_r) | c \in k\}} \\ &\simeq \frac{\{c \in k^{\oplus r} | c \cdot \gamma_j = 0 \text{ se } s + d_j \notin N\}}{k(m_1, \cdots, m_r)} \end{aligned}$$

onde $\gamma_j := (\gamma_{j_1}, \cdots, \gamma_{j_r})$.

Proposição 4.2. $\{c \in k^{\oplus r} | c \cdot \gamma_j = 0$ *para todo* $j\} = k(m_1, \cdots, m_r)$.

Demonstração: $\mathrm{Hom}_{k[N]}(I/I^2, k[N])$ é $k[N]$-módulo graduado finitamente gerado. Logo, suas componentes homogêneas de peso $\ll 0$ são nulas. Se $s < -d_j$ para todo j então a componente de peso s é isomorfa a $\frac{\{c \in k^{\oplus r} | c \cdot \gamma_j = 0 \text{ para todo } j\}}{k(m_1, \cdots, m_r)} = 0$ e acabamos por aqui. ∎

Pensando em termos de dual, obtemos $\{(c_1, \cdots, c_r) \in k^{\oplus r} | m_1 c_1 + \cdots + m_r c_r = 0\} = \sum k\gamma_j$ tem dimensão $r - 1$ (espaço gerado pelos γ_j em $k^{\oplus r}$).

Proposição 4.3. *Com as notações em convenções anteriores temos:*

- *Se* $s + d_j \notin N$ *para todo* j, *então* $Hom_{k[N]}(I/I^2, k[N])_s = 0$.
- *Se* $s + d_j \in N$ *para todo* j, *então* $Hom_{k[N]}(I/I^2, k[N])_s \simeq k^{\oplus(r-1)}$.

Teorema 4.1. *Para cada um semigurpo numérico* N *de gênero maior que* 0, *temos:*

$$T^1(k[N]|k, k[N]) \simeq \frac{\{(h_1, \cdots, h_r) \in k[t,t^{-1}]^{\oplus r} | \sum h_i \gamma_{j_i} t^{d_j} \in k[N] \text{ para todo } j\}}{k[t,t^{-1}](m_1, \cdots, m_r) + \left(\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} t^{-m_i} k[N]\right)}$$

No que seguem denotaremos $T^1(k[N]|k, k[N])$ simplesmente por T^1, e sua parte homogênea de grau s, por T^1_s.

Observações:

(i)

$$k[t,t^{-1}](m_1,\cdots,m_r)\cap\left(\bigoplus_{i=1}^{r}t^{-m_i}k[N]\right) = \mathrm{Der}_k(k[N],k[N]) = k[\mathrm{End}(N)]t\frac{\partial}{\partial t}.$$

(ii) T^1 é $k[N]$-módulo finitamente gerado graduado.

(iii) Se $s\in\mathrm{End}(N)$, i.e., $s+m_i\in N$ para todo i, então $T^1_s=0$.

Teorema 4.2. *Para cada $s\in\mathbb{N}\setminus End(N)$, temos a seguinte descrição de T^1_s:*

$$T^1_s\simeq\frac{\{c\in k^{\oplus r}|c\cdot\gamma_j=0\ se\ s+d_j\notin N\}}{k(m_1,\cdots,m_r)\oplus\{c\in k^{\oplus r}|c_i=0\ se\ s+m_i\notin N\}}$$

Corolário 4.1. *(cf. [B, Thm. ?]) Para cada $s\in\mathbb{Z}$, vale:*

$$dim\ T^1_s=\max\{0,\ \#\{i\in\{1,\cdots,r\}|s+m_i\notin N\}-dim\ \langle\gamma_j|s+d_j\notin N\rangle-1\}$$

Corolário 4.2. *Se $s+d_j\notin N$ para todo j então $T^1_s=0$.*

Corolário 4.3. *Se $s\in\mathbb{Z}$ tal que $\#\{i\in\{1,\cdots,r\}|s+m_i\notin N\}\leqslant 1$ então*

$$T^1_s=0.$$

Corolário 4.4. *Se $m_1<\cdots<m_r$ sistema minimal de geradores e se $\sigma:=max\{s\in\mathbb{Z}|\#\{i|s+m_i\notin N\}\geqslant 2\}$ então*

$$T^1_\sigma\neq 0.$$

Demonstração: $m_1+m_2\neq m_i$ para todo i e logo $m_1+m_2<d_j$ para todo j. $s_j=\sigma+(d_j-m_1-m_2)$, $s_j>\sigma\Rightarrow s_j+m_1\in N$ ou $s_j+m_2\in N$. Logo, $\sigma+d_j=s_j+m_1+m_2\in N$ para todo $j\Rightarrow\dim\ T^1_\sigma\geqslant 1$. ■

Definição 4.7. *T^1 é dito **negativamente graduado** se $T^1_s=0$ para todo $s\geqslant 0$.*

Corolário 4.5. *T^1 é negativamente graduado se e só se $\sigma<0$.*

Corolário 4.6. *(cf. [Pi, Lema 12.5]) Se N é um semigupo numérico, então, $T^1_0=0$.*

Referências

[B] O.R. Buchweitz, *On Deformations of Monomial Curves*, Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique), exp.12, pag. 1-15, (1976-1977).

[H] H. Brenner, *Algebraische Kurven*, Universität Osnabrück, 2012.

[C-St] A.L. Contiero, K-O. Stöhr, *Upper bounds for the dimension of moduli spaces of curves with symmetric Weierstrass semigroups*, Journal of the London Mathematical Society Advance Access published August 18, 2013.

[E] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, New York, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics vol.150, 1995.

[F] W. Fulton, *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*, New York, W. A. Benjamin,1969.

[G] A. Grothendieck, *Categories Cofibrees Additives et Complexe Cotangente Relatif*, Lectures notes in mathematics vol. 79, Springer, 1968.

[I] L. Illusie, *Complexe Cotangent et Déformations*, Lecture Notes in Mathematics 239 et 283, Berlin and New-York, Springer, 1971-1972.

[L-S] S. Lichtenbaum e M. Schlessinger, *The Cotangent Complex of a Morphism*, American Mathematical Society, 1967.

[Liu] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol.6, Oxford University Press, New York, 2015.

[M] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 8, cambridge university press, 2008.

[Pi] H. Pinkham, Deformations of algebraic varieties with Gm-action, Asterisque 20 (1974).

[Ser] E. Sernesi, *Deformations of Algebraic Schemes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 334, springer, 2006.

[St] K.-O. Stöhr, *On the moduli spaces of Gorenstein curves with symmetric Weierstrass semigroups*, J.reine angew. Math. 441 (1993).

[R-V] D.S. Rim, M.A. Vitulli, *Weierstrass Points and Monomial Curves*, Journal of algebra 48, páginas 454-476, 1977.

[R-G] J.C. Rosales e P.A. García-Sánchez, *Numerical Semigroups*, Springer-Verlag, New York, 2009.

[Z-T] O. Zariski, B. Tessier, *Le probème des modules pour les branches planes*, Centre de Math. de L'ecole Polytechnique, Palaiseau, 1973.