UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Superálgebras minimais e a classificação das variedades minimais de crescimento exponencial

Marcos Antônio da Silva Pinto

Belo Horizonte - MG

2016

Marcos Antônio da Silva Pinto

Superálgebras minimais e a classificação das variedades minimais de crescimento exponencial

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Universidade Federal de Minas Gerais
29 de Agosto de 2016

Agradecimentos

A Deus, pela presença contínua em minha vida, por ser o meu grande porto de amparo e fazer com que esta conquista se tornasse possível. Minha eterna gratidão ao grande Pai Celestial que, com suas proteções e bênçãos, esteve todo o tempo comigo.

À minha orientadora, Viviane Ribeiro Tomaz da Silva, pelo apoio, incentivo e todo conhecimento transmitido. Agradeço pela sua grande dedicação e disponibilidade em todos os nossos encontros de estudo, bem como suas importantes contribuições para a realização deste trabalho.

Aos professores membros da banca, Ana Cristina Vieira e Thiago Castilho de Mello, pela prontidão e por todas as sugestões e observações.

Aos demais professores que de alguma forma contribuíram para este momento, seja pelos saberes ensinados durante toda minha vida acadêmica ou simplesmente pelo convívio e reciprocidade de afeto.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da UFMG que nunca mediram esforços para me ajudar.

Aos meus pais, Carlos e Dulce, meus exemplos de vida e maiores mentores desta conquista. Espelho-me em vocês, meus pais, e meu muito obrigado por estarem comigo em qualquer situação. A presença dos senhores em minha vida tem uma importância imensurável e quero transmitir toda a riqueza de valores que aprendi com vocês.

À toda minha família, tios e tias, primos e primas. Em especial às minhas avós, Fizinha e Tanica, e ao meu avô, Pedro Venâncio, pois a garra, humildade e presteza deles para com toda minha família são admiráveis.

À minha namorada, Lourainy, pelo amor e companheirismo. Por ser presença constante em minha vida, compreendendo que, mesmo longe, podemos seguir juntos e superar qualquer obstáculo.

A todos os meus amigos. Ao Bruno Rodrigues e ao Weberson Arcanjo, integrantes da extinta república BMW, que me apoiaram e ajudaram a concretizar este sonho. À Hellen de Paula, pelas inúmeras horas de estudos e por todos os conselhos e incentivos durante esses anos. À Viviane Magalhães, exemplo de humildade e dedicação, por todos os ensinamentos.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Drensky, na década de 1980, conjecturou que uma variedade de álgebras $\mathcal{V}$ é minimal se, e somente se, $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ é um produto de T-ideais verbalmente primos. Giambruno e Zaicev, em 2003, provaram essa conjectura e apresentaram uma classificação para as variedades minimais que possuem crescimento exponencial. O objetivo principal desta dissertação é mostrar essa classificação que estabelece interessantes relações entre superálgebras minimais, variedades minimais e T-ideais verbalmente primos. Veremos também resultados relevantes que relacionam as superálgebras de dimensão finita com as minimais. Vale ressaltar que, a fim de demonstrarmos nosso resultado principal, trabalharemos com importantes conceitos da PI-teoria, dentre eles a envolvente de Grassmann e a superenvolvente de uma superálgebra. Terminamos a dissertação com uma breve discussão sobre as supervariedades minimais.

Abstract

Drensky, in the 1980s, conjectured that a variety of algebras $\mathcal{V}$ is minimal if and only if $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ is a product of verbally prime T-ideals. Giambruno and Zaicev, in 2003, proved that conjecture and presented a classification of minimal varieties having exponential growth. The main goal of this dissertation is to show this classification establishing interesting relations between minimal superalgebras, minimal varieties and verbally prime T-ideals. We will also see relevant results that relate the finite dimensional superalgebras to the minimal ones. It is noteworthy that in order to prove our main result, we work with important concepts of the PI-theory, including the Grassmann envelope and the superenvelope of a superalgebra. We finish the dissertation with a brief discussion concerning the minimal supervarieties.

Sumário

Introdução

A denominada *PI-teoria* desenvolveu-se muito nas últimas décadas, sendo que esta teoria começou a ser investigada nos meados da primeira metade do século XX, quando Dehn [5] e Wagner [35] escreveram alguns artigos que lidavam com polinômios em variáveis não comutativas, cujas avaliações se anulavam sobre quaisquer elementos pertencentes a uma determinada álgebra. Esses trabalhos despertaram o interesse em outros matemáticos a se dedicarem ao estudo das *PI-álgebras* ou *Álgebras com Identidades Polinomiais*, do inglês *Algebras with Polynomial Identities*, sendo que Kaplansky [22] alavancou esse processo quando decidiu estudar a estrutura das PI-álgebras.

Desde então, foram surgindo vários resultados interessantes nessa área, assim como, à medida que intensificavam-se as pesquisas, novos problemas e conjecturas iam aparecendo. Tais fatos fazem da PI-teoria um ramo ativo e promissor da matemática. Diversas das técnicas envolvidas nas resoluções desses problemas estão intimamente relacionadas a análises combinatórias, teoria de grupos, cálculos computacionais, entre outros.

Sejam F um corpo de característica zero, A uma F-álgebra associativa e $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de variáveis não comutativas. Considere $F\langle X\rangle$ a álgebra livre associativa unitária gerada por X e denote por $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ os elementos de $F\langle X\rangle$. Chamamos esses elementos de *polinômios*, sendo $x_1, \ldots, x_n$ as variáveis que compõem o polinômio f. Se $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ satisfaz $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$, então dizemos que f é uma *identidade polinomial de A*. Neste caso, denotamos $f \equiv_A 0$.

Assim, A é dita uma *PI-álgebra* se satisfaz uma identidade polinomial não trivial, ou seja, existe um polinômio não nulo $f \in F\langle X\rangle$ tal que $f \equiv_A 0$. Direcionamos nosso estudo em torno dessas álgebras e, como exemplo, temos que toda álgebra nilpotente, com índice de nilpotência igual a m, é uma PI-álgebra, uma vez que satisfaz a identidade polinomial $f(x_1, \ldots, x_m) = x_1 \cdots x_m$. O célebre Teorema de Amitsur-Levitzki [1], de 1950, afirma que a álgebra $M_n(F)$ de matrizes $n \times n$, com entradas em um corpo F, satisfaz o polinômio standard de grau $2n$ e não satisfaz identidades de grau menor.

Com isso, é de interesse de muitos pesquisadores descrever todas as identidades de uma certa F-álgebra A. Para tanto, considere o conjunto $\mathrm{Id}(A)$, que é constituído por todas as identidades polinomiais de uma álgebra A. Esse conjunto é um ideal bilateral de $F\langle X\rangle$, além de ser invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$, ou seja, $\mathrm{Id}(A)$ é um T-*ideal* de $F\langle X\rangle$. Um T-ideal é gerado, como T-ideal, por um subconjunto $S \subseteq F\langle X\rangle$, se todo elemento desse T-ideal é escrito como combinação linear de elementos da forma $w_i f_i(u_{i1}, \ldots, u_{in_i})v_i$, onde $f_i \in S,\ w_i, v_i, u_{ij} \in F\langle X\rangle$, e neste caso denotamos o T-ideal por $\langle S\rangle_T$. Portanto, o trabalho de descrever as identidades satisfeitas por uma álgebra A se resume à procura de todos os geradores de $\mathrm{Id}(A)$ como um T-ideal. Entretanto, vale ressaltar que essa busca nem sempre é tão simples como possa parecer, já que, por exemplo, o T-ideal $\mathrm{Id}(M_n(F))$ ainda não foi determinado para $n \geq 3$.

Por outro lado, por mais que não se saiba todos os geradores de $\mathrm{Id}(A)$, como T-ideal, para determinadas álgebras A, surge a questão se é possível ou não encontrar um conjunto finito de geradores. Esse problema foi uma conjectura dada por Specht [34], em 1950, onde ele afirmava que, sobre um corpo de característica zero, todo T-ideal próprio de $F\langle X\rangle$ é finitamente gerado, como um T-ideal. Passados alguns anos, na década de 80, Kemer ([24], [25]) demonstrou esse resultado. Além disso, sabemos hoje os geradores das identidades de algumas álgebras como, por exemplo, da álgebra de Grassmann G, dada por $\mathrm{Id}(G) = \langle [[x_1, x_2], x_3]\rangle_T$ (veja [27]).

Diante dessas considerações, é importante ressaltar que há casos em que um conjunto de polinômios podem ser identidades de diversas álgebras, o que nos leva à definição de variedade. Uma *variedade* $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$, determinada por um conjunto $\varnothing \neq S \subseteq F\langle X\rangle$, é a classe de todas as álgebras A tais que f é uma identidade de A, para todo $f \in S$. Por exemplo, para $S = \{[x, y]\}$, temos que $\mathcal{V}(S)$ é a variedade das álgebras comutativas. Além disso, para uma álgebra A, a classe das álgebras que satisfazem todas as identidades polinomiais de A é chamada *variedade gerada por* A, a qual denota-se por $\mathrm{var}(A)$. Em [3], Birkhoff exibiu condições necessárias e suficientes para que uma classe $\mathcal{V}$ de álgebras seja uma variedade. Se $\langle S\rangle_T$ é o T-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por S e $\mathcal{V}$ é a variedade determinada por S, então $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S\rangle_T)$, e neste caso denotamos como $\langle S\rangle_T = \mathrm{Id}(\mathcal{V})$ o T-*ideal da variedade* $\mathcal{V}$. No âmbito das variedades, definimos *álgebras relativamente livres*, que são uma generalização natural de álgebras livres. O matemático Drensky, em [12], descreveu, sem muitas dificuldades, álgebras relativamente como quociente de álgebras livres.

É bem conhecido que, sobre um corpo de característica zero, todo T-ideal é gerado, como um T-ideal, pelos polinômios multilineares que ele contém (veja [20]). Com isso, $\mathrm{Id}(A)$ é completamente determinado por seus polinômios multilineares, donde faz-se conveniente considerar o seguinte espaço vetorial

$$P_n := \mathrm{span}_F\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\} \subseteq F\langle X\rangle.$$

Mais ainda, para uma álgebra A, considere

$$P_n(A) := \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}, \quad n \geq 1.$$

O inteiro não negativo dado pela dimensão de $P_n(A)$ é chamado de *n-ésima codimensão da álgebra A* e denotado por $c_n(A) := \dim_F P_n(A)$. Algumas PI-álgebras têm sua n-ésima codimensão conhecida como, por exemplo, para a álgebra de Grassmann G temos $c_n(G) = 2^{n-1}$, para todo $n \geq 1$ (veja [27]).

Vale destacar que, quando consideramos PI-álgebras, tais codimensões são limitadas superiormente por uma constante. Esse é um resultado importante na PI-teoria, conhecido como Teorema das Codimensões de Regev [32], provado em 1972. Disso, faz sentido definirmos o *PI-expoente de uma PI-álgebra A* como

$$\exp(A) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

No caso em que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$, definimos $\exp(\mathcal{V}) = \exp(A)$ e dizemos que $\exp(\mathcal{V})$ é o *expoente da variedade $\mathcal{V}$*.

Na década de 1980, Amitsur conjecturou que o PI-expoente de uma PI-álgebra existia e era um inteiro não negativo. Em 1999, Giambruno e Zaicev provaram que tal fato é verdadeiro sobre um corpo de característica zero (veja [17] e [18]).

Nesses mesmos artigos, Giambruno e Zaicev exibiram meios práticos, envolvendo o conceito de superálgebras, para se calcular o PI-expoente de uma PI-álgebra. Lembramos que uma F-álgebra A é chamada de *superálgebra* ou *álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada*, se existem dois subespaços vetoriais $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ tais que $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ (soma direta como espaço vetorial), $A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)}$ e $A^{(0)}A^{(1)} + A^{(1)}A^{(0)} \subseteq A^{(1)}$. Aqui, merecem destaque três tipos especiais de superálgebras, a saber:

(a) a álgebra de matrizes $M_n(F)$, com a graduação trivial, onde $A^{(0)} = M_n(F)$ e $A^{(1)} = \{0\}$;

(b) para $k \geq l > 0$, a álgebra de matrizes

$$M_{k,l}(F) := \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \mid P \in M_k(F), S \in M_l(F), Q \in M_{k\times l}(F), R \in M_{l\times k}(F) \right\},$$

com graduação $M_{k,l}^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \right\}$ e $M_{k,l}^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix} \right\}$;

(c) a álgebra $M_n(F \oplus cF)$, com $c^2 = 1$, munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação em que $M_n(F \oplus cF)^{(0)} = M_n(F)$ e $M_n(F \oplus cF)^{(1)} = cM_n(F)$.

Essas superálgebras desempenham um papel fundamental no estudo de superálgebras *sim-*

ples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, já que elas são, a menos de isomorfismo, as únicas com essas propriedades (veja [20]).

Assim como temos um teorema de estrutura, provado por Wedderburn-Malcev em [4], para álgebras de dimensão finita sobre um corpo de característica zero, as superálgebras de dimensão finita, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, também têm suas estruturas conhecidas. Mais precisamente, se A é uma superálgebra sujeita à essas condições, então existe uma superálgebra semissimples maximal $B \subseteq A$ tal que $A = B + J(A)$, onde $B = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$ é uma soma direta (como álgebra) de superálgebras simples do tipo (a), (b) ou (c) acima, e $J(A)$ é o radical de Jacobson de A (veja [20]).

Para uma superálgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ definimos, a partir da denominada graduação canônica $G = G^{(0)} \oplus G^{(1)}$ da álgebra de Grassmann G, uma superálgebra chamada de *envolvente de Grassmann de* A como sendo

$$G(A) := (A^{(0)} \otimes G^{(0)}) \oplus (A^{(1)} \otimes G^{(1)}).$$

Kemer, em [26], relacionou esse conceito com variedades de PI-álgebras associativas, provando que para qualquer variedade $\mathcal{V}$ não trivial, sobre um corpo de característica zero, existe uma superálgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ de dimensão finita tal que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$.

Uma variedade é chamada de *prima* se o seu T-ideal I satisfaz a condição: para quaisquer T-ideais I_1, I_2 tais que $I_1 I_2 \subseteq I$ é válido que $I_1 \subseteq I$ ou $I_2 \subseteq I$. Além do resultado citado acima, Kemer, no artigo [24], trabalhou com variedades primas, exibindo uma classificação para as mesmas. Nesse trabalho, ele faz uma interessante conexão entre superálgebras simples de dimensão finita, envolventes de Grassmann e variedades primas. Em suma, sobre um corpo de característica zero, uma variedade própria de álgebras $\mathcal{V}$ é prima se, e somente se, $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$, onde A é uma superálgebra simples de dimensão finita.

Como comentamos antes, as superálgebras estão presentes em alguns métodos que visam calcular o PI-expoente. Mais precisamente, sejam F um corpo algebricamente fechado de característica zero e $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$ a decomposição de Wedderburn de uma superálgebra A de dimensão finita sobre F. Nesse caso, um candidato ao PI-expoente de $G(A)$ é o número

$$q := \max \dim_F (B_1 \oplus \cdots \oplus B_r),$$

onde $B_1, \ldots, B_r$ são subálgebras distintas do conjunto $\{A_1, \ldots, A_m\}$ que satisfazem a desigualdade $B_1 J B_2 J \cdots J B_r \neq 0$. Giambruno e Zaicev provaram em [18] que, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, $\exp(G(A))$ existe e é o número q definido acima. Além disso, para uma PI-álgebra B, pode-se omitir a hipótese do corpo ser algebricamente fechado e, a partir do Teorema de Kemer, obter uma superálgebra de dimensão finita A tal que $\mathrm{var}(B) = \mathrm{var}(G(A))$ e assim $\exp(B)$ coincide com $\exp(G(A))$, podendo ser calculado como descrito acima.

Uma questão pertinente que surge nesse contexto é a seguinte: será que existem superálgebras tais que esse número q é o maior possível? Nessa linha, no ano de 2003, Giambruno e Zaicev, em [21], definiram superálgebras minimais da seguinte maneira:

Definição: Seja A uma superálgebra de dimensão finita. Então A é uma *superálgebra minimal* se A é uma superálgebra simples ou se $A = A_{ss} + J$, onde:

(i) $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$, com $A_1, \ldots, A_m$ superálgebras simples e $m \geq 2$;

(ii) existem elementos homogêneos $w_{12}, \ldots, w_{m-1,m} \in J^{(0)} \cup J^{(1)}$ e idempotentes graduados minimais $e_1 \in A_1, \ldots, e_m \in A_m$ tais que

$$e_i w_{i,i+1} = w_{i,i+1} e_{i+1} = w_{i,i+1}, \qquad i = 1, \ldots, m-1, \tag{1}$$

e

$$w_{12} w_{23} \cdots w_{m-1,m} \neq 0; \tag{2}$$

(iii) $w_{12}, \ldots, w_{m-1,m}$ geram J como ideal bilateral de A.

Observe que para uma superálgebra minimal A, temos $\exp(G(A)) = \dim_F(A_1 \oplus \cdots \oplus A_m) = \dim_F A_{ss}$, onde $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$. Entretanto, nem toda superálgebra A tal que $\exp(G(A)) = \dim_F A_{ss}$ é minimal. Por exemplo, a álgebra de matrizes $A = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, satisfaz $\exp(G(A)) = \dim_F A_1 = \dim_F A_{ss}$, embora não seja uma superálgebra minimal.

No artigo [21], nota-se a importante contribuição oferecida pelas superálgebras minimais no estudo de PI-álgebras. Os autores demonstraram vários resultados que relacionam as superálgebras de dimensão finita com as minimais, e exibiram uma estrutura, como soma direta de espaços vetoriais, para as superálgebras minimais. Giambruno e Zaicev também caracterizaram casos particulares dessas superálgebras (quando a superálgebra possui graduação trivial), mostrando que elas serão isomorfas a uma álgebra de matrizes bloco triangular superior com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial, denotada por $UT(d_1, \ldots, d_m)$. Além disso, discutiram o problema de duas superálgebras minimais serem ou não isomorfas (como álgebras ou superálgebras), assumindo que suas componentes semissimples maximais homogêneas são isomorfas (como superálgebras). Feito isso, Giambruno e Zaicev, demonstraram um importante teorema, que é um dos resultados principais desta dissertação.

Teorema 1: Se $A = A_{ss} + J$ é uma superálgebra minimal, com $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$, então $\mathrm{Id}(G(A)) = \mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m))$.

Como A_i são superálgebras simples, para todo $i = 1, \ldots, m$, esse teorema afirma que, para toda superálgebra minimal A, $\mathrm{Id}(G(A))$ é um produto de T-ideais verbalmente primos. Vale ressaltar que, para demonstrar o Teorema 1, foi imprescindível para os autores trabalharem com a *superenvolvente de uma superálgebra* A, denotada por $S(A)$. Esse conceito é muito importante na PI-teoria. Além de estar intimamente ligado, em vários aspectos, com a envolvente de Grassmann de uma superálgebra, temos também que, quando se considera a superenvolvente de uma superálgebra minimal, surgem importantes resultados que permitiram conectar álgebras relativamente livres com produtos de T-ideais verbalmente primos.

Finalmente estamos em condições de enunciar o que podemos dizer que é o resultado principal de Giambruno e Zaicev em [21]: a classificação das *variedades minimais* $\mathcal{V}$, em que $\exp(\mathcal{V}) = d \geq 2$. Lembramos que uma variedade $\mathcal{V}$ é *minimal* de $\exp(\mathcal{V}) = d$ se, para toda subvariedade própria $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, tem-se $\exp(\mathcal{U}) < d$. Por exemplo, a partir de resultados feitos por Formanek [14] e Regev [33], temos que, para a álgebra de matrizes $M_n(F)$, $\mathrm{var}(M_n(F))$ é uma variedade minimal de expoente n^2.

As variedades $\mathcal{V}$ tais que $\exp(\mathcal{V}) \leq 1$ foram classificadas por Kemer, em [23], no ano 1979. Ele mostrou que, dada uma variedade $\mathcal{V}$ sobre um corpo de característica zero, $\exp(\mathcal{V}) \leq 1$ se, e somente se, $G, UT_2(F) \notin \mathcal{V}$.

A classificação das variedades minimais, que possuem expoente maior ou igual a dois, constitui o grande objetivo de estudo desta dissertação. Drensky, em [10], conjecturou que uma variedade é minimal se, e somente se, $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ é um produto de T-ideais verbalmente primos. Essa conjectura foi provada por Giambruno e Zaicev no artigo [21], onde estabeleceram o seguinte resultado:

Teorema 2: Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras tal que $\exp(\mathcal{V}) \geq 2$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:

(1) $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal de expoente d;

(2) $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ é o produto de T-ideais verbalmentes primos;

(3) $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$, para alguma superálgebra minimal $A = A_{ss} + J(A)$ tal que $\dim_F A_{ss} = d$.

Encaminhamos nosso estudo a fim de obter ferramentas suficientes para se chegar à demonstração do Teorema 2. Grande parte dos resultados aqui exibidos envolvem interessantes e variadas técnicas matemáticas relacionadas, na maioria das vezes, com assuntos que norteiam a PI-teoria. Os principais artigos empregados no desenvolvimento deste trabalho foram [19] e [21].

Estruturamos essa dissertação por meio de seis capítulos. No Capítulo 1, recordamos conceitos básicos que serão recorrentemente utilizados ao longo de todo o trabalho, dentre os quais se enquadram, R-módulos, bimódulos, F-álgebras e produto tensorial. Exibimos também o teorema de Wedderburn-Malcev que caracteriza as álgebras de dimensão finita, sobre um corpo de característica zero.

O Capítulo 2 tem como finalidade apresentar diversas ferramentas introdutórias da PI-teoria. Nele trabalhamos com identidades polinomiais, T-ideais, variedade de álgebras e polinômios multilineares, bem como vários exemplos de cada tópico.

No Capítulo 3, começamos com a definição de superálgebras e ilustramos diversos exemplos quando se tem ou não isomorfismos entre superálgebras. Dedicamos, em especial, uma seção para lidarmos com superálgebras simples. Nesta seção, exibimos o Teorema de Classificação para superálgebras simples de dimensão finita, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, além de demonstrar importantes resultados relacionados a essas álgebras, que serão utilizados em capítulos posteriores. Finalizamos com a envolvente de Grassmann e álgebras verbalmente primas, juntamente com o Teorema de Kemer que classifica as variedades primas sobre um corpo de característica zero.

No Capítulo 4, apresentamos o PI-expoente e calculamos o expoente de algumas álgebras. Além disso, definimos um conceito fundamental para esta dissertação, o de superálgebras minimais. Damos uma série de resultados relacionados a esses tipos de superálgebras, que dizem respeito a sua estrutura e à conexão que temos entre elas e as superálgebras de dimensão finita. Caracterizamos um caso especial de superálgebra minimal e concluímos o capítulo discutindo quando podemos ter, ou não, isomorfismos entres superálgebras minimais assumindo determinadas hipóteses.

O Capítulo 5 é destinado à superenvolvente de uma superálgebra. Demonstramos relações interessantes entre a superenvolvente e a envolvente de Grassmann de uma superálgebra. Além disso, veremos que, ao considerarmos a superenvolvente de uma superálgebra minimal A, iremos obter importantes e essenciais elementos no conjunto $f(S(A))$, onde f é um polinômio multilinear que não é uma identidade da $S(A)$. Por fim, apresentamos uma proposição que será crucial na demonstração do Teorema 1.

No Capítulo 6 encontram-se os dois principais resultados desta dissertação, a saber, os Teoremas 1 e 2. Começamos com a demonstração do Teorema 1, seguido de uma interessante recíproca para o mesmo. Em seguida, definimos variedades minimais, para então apresentarmos o Teorema 2 que classifica todas as variedades de álgebras que possuem expoente maior ou igual a dois. Como consequência desse teorema, veremos que, para qualquer número inteiro d maior ou igual a dois, existe somente um número finito de variedades minimais cujo expoente é d. Finalizamos com uma seção que introduz definições relacionadas às identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas, para então discutirmos o problema da relação entre as supervariedades minimais de posto finito e as superálgebras minimais.

Capítulo 1

Conceitos básicos

Neste primeiro capítulo introduziremos alguns conceitos que serão utilizados ao longo da dissertação. Faremos uma abordagem sucinta em cada seção dos tópicos abordados e daremos alguns exemplos para fixar as ideias. Em todo este capítulo, R denotará um anel e F um corpo qualquer.

1.1 R-módulos e bimódulos

Começaremos esta seção fornecendo a definição de R-módulos e, em seguida, iremos ver como generalizar essa definição a fim de obter um bimódulo. Assumimos que R é um anel com unidade.

Definição 1.1.1. Um **R-módulo (à esquerda)** é um grupo abeliano aditivo M munido com a multiplicação por escalar $R \times M \to M$, denotada por

$$(r, m) \mapsto rm,$$

de tal forma que são válidas as seguintes condições para todos $m_1, m_2 \in M$ e para todos $r_1, r_2 \in R$:

(i) $r_1(m_1 + m_2) = r_1m_1 + r_1m_2$;

(ii) $(r_1 + r_2)m_1 = r_1m_1 + r_2m_1$;

(iii) $(r_1r_2)m_1 = r_1(r_2m_1)$;

(iv) $1m_1 = m_1$.

Da maneira análoga, podemos definir um **R-módulo à direita**. Neste trabalho, quando mencionarmos simplesmente R-módulos estaremos tratando de R-módulos à esquerda.

Se R é um anel e M e N são R-módulos, então a função $f : M \to N$ é um **R-homomorfismo (ou homomorfismo)** de R-módulos se, para todos $m_1, m_2 \in M$ e para todo $r \in R$, tivermos

(*i*) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$;
(*ii*) $f(rm_1) = rf(m_1)$.
Se um R-homomorfismo é uma bijeção, então ele é chamado de **R-isomorfismo**, ou simplesmente de **isomorfismo**. Note que a composição de R-homomorfismos é um R-homomorfismo e, se f é um R-isomorfismo, então a aplicação inversa f^{-1} é também um R-isomorfismo. Se M é um R-módulo, então um subconjunto N de M é um **R-submódulo de** M se N é um subgrupo aditivo de M fechado com a multiplicação por escalar, ou seja, $rn \in N$ sempre que $n \in N$ e $r \in R$. Os submódulos $\{0\}$ e M de M são chamados de **submódulos triviais**.

Exemplo 1.1.2. Todo espaço vetorial sobre um corpo F é um F-módulo. Todo anel R é um R-módulo, e neste caso é fácil ver que os R-submódulos de R são os ideais à esquerda de R.

Exemplo 1.1.3. Se M é um R-módulo e $r \in R$, então $rM = \{rm \mid m \in M\}$ é um submódulo de M. Além disso, se J é um ideal de R e M é um R-módulo, então

$$JM = \left\{ \sum_i j_i m_i \mid j_i \in J,\ m_i \in M \right\}$$

é um submódulo de M.

Exemplo 1.1.4. Todo grupo abeliano G é um $\mathbb{Z}$-módulo. De fato, se $z \in \mathbb{Z}$ e $g \in G$, basta definir $zg = \underbrace{g + \cdots + g}_{z \text{ vezes}}$ se $z \geq 0$, e $zg = \underbrace{(-g) + \cdots + (-g)}_{-z \text{ vezes}}$ se $z < 0$.

Sejam M_1 e M_2 submódulos de um R-módulo M. Definimos a **soma** de M_1 e M_2 como sendo o conjunto $M_1 + M_2 = \{m_1 + m_2 \mid m_1 \in M_1,\ m_2 \in M_2\}$. Note que $M_1 + M_2$ é um submódulo de M que contém M_1 e M_2. Agora, sejam $M_1, \ldots, M_k$ submódulos de um R-módulo M. Se
(*i*) $M = M_1 + \cdots + M_k$;
(*ii*) $m_1 + \cdots + m_k = 0$, com $m_i \in M_i$, implica em $m_i = 0$, para $i = 1, \ldots, k$,
então dizemos que M é **soma direta** (como módulos) de $M_1, \ldots, M_k$. Escreveremos $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$.

Definição 1.1.5. Um R-módulo M é dito **simples** ou **irredutível** se $M \neq \{0\}$ e M não possui submódulos próprios não-nulos, isto é, os únicos submódulos de M são os triviais. Caso contrário, dizemos que M é **redutível**.

Exemplo 1.1.6. Seja p um número primo e considere o anel $\mathbb{Z}_p$. Então $\mathbb{Z}_p$ é um $\mathbb{Z}_p$-módulo simples, já que seus únicos ideais à esquerda são $\{0\}$ e $\mathbb{Z}_p$.

Definição 1.1.7. Sejam R um anel e M um R-módulo. Dizemos que M é um **módulo semissimples** se, para todo submódulo N de M, existir um submódulo N' tal que $M = N \oplus N'$. Dizemos que R é **semissimples** se o R-módulo R for semissimples.

Note que todo R-módulo simples é semissimples. Daremos agora um teorema que estabelece afirmações equivalentes com respeito a semissimplicidade de R e R-módulos. Para tanto, vejamos a seguinte definição.

Definição 1.1.8. Sejam $I \neq \{0\}$ e $J \neq R$ ideais à esquerda de R. Se, para qualquer ideal L à esquerda de R tal que $\{0\} \subseteq L \subseteq I$, é válido que $L = \{0\}$ ou $L = I$, então dizemos que I é um **ideal à esquerda minimal** de R. Se, para qualquer ideal N à esquerda de R tal que $J \subseteq N \subseteq R$, é válido que $N = J$ ou $N = R$, então dizemos que J é um **ideal à esquerda maximal** de R.

Teorema 1.1.9 ([29], Teorema 2.5.7)**.** *Seja R um anel. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *R é um anel semissimples;*

(2) *Todo R-módulo é semissimples;*

(3) *R é soma direta de um número finito de ideais à esquerda minimais.*

Definição 1.1.10. Sejam M um R-módulo e U um subconjunto de M. Dizemos que U gera M, como R-módulo, se qualquer elemento de M pode ser escrito como combinação linear (com coeficientes em R) dos elementos de U. Além disso, U é uma **base** do R-módulo M se U é linearmente independente sobre R e o conjunto gerado por U, como R-módulo, é igual a M. O R-módulo M é chamado de **R-módulo livre** se ele possui uma base.

Iremos lidar ao longo deste trabalho com resultados que envolvem o conceito de bimódulos. Vejamos sua definição a seguir e logo depois, ilustramos com alguns exemplos.

Definição 1.1.11. Sejam R e S anéis. Um **(R, S)-bimódulo** é um grupo abeliano M que é simultaneamente um R-módulo à esquerda e um S-módulo à direita, e além disso

$$r(ms) = (rm)s, \quad \text{para todo } m \in M,\ r \in R,\ s \in S.$$

Exemplo 1.1.12. Todo anel R é associativo com respeito à multiplicação, e consequentemente é um (R, R)-bimódulo, e todo ideal bilateral de R é também um (R, R)-bimódulo. Se R é um anel comutativo, então todo R-módulo M é um (R, R)-bimódulo considerando $mr := rm$, para todo $m \in M$, $r \in R$.

Exemplo 1.1.13. Se M é um R-módulo à esquerda, então M é um $(R, \mathbb{Z})$-bimódulo. Similarmente, todo R-módulo à direita é um $(\mathbb{Z}, R)$-bimódulo. Além disso, todo grupo abeliano é um $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$-bimódulo.

Exemplo 1.1.14. Para todo inteiro positivo n e m, temos que o conjunto $M_{n\times m}(F)$, das matrizes de ordem $n \times m$ sobre um corpo F, é um (R, S)-bimódulo, onde R é o anel $M_n(F)$ das matrizes $n \times n$ sobre F, e S é o anel $M_m(F)$ das matrizes $m \times m$ sobre F.

Sejam M um (R,S)-bimódulo e T um subconjunto de M. Dizemos que T gera M, como (R,S)-bimódulo, se para qualquer elemento $m \in M$, existem elementos $r_i \in R$ e $s_i \in S$ tais que $m = \sum_{i=1}^{n} r_i t_i s_i$, com $t_i \in T$. Se $\sum_{i=1}^{n} r_i t_i s_i = 0$, onde $r_i \in R$ e $s_i \in S$, implica em $r_i = s_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$, então dizemos que T é um conjunto linearmente independente. Além disso, T é uma **base** do (R,S)-bimódulo M se T é linearmente independente e o conjunto gerado por T, como (R,S)-bimódulo, é igual a M. O (R,S)-bimódulo M é chamado de **(R,S)-bimódulo livre**, com geradores livres $t_1, t_2, \ldots$ pertencentes a M, se $\{t_1, t_2, \ldots\}$ é uma base de M.

1.2 F-álgebras e produto tensorial

Veremos nesta seção a definição de F-álgebras. Feito isso, introduziremos o conceito de produto tensorial para R-módulos e, em seguida, ao considerarmos F-álgebras, daremos ao produto tensorial uma estrutura de uma álgebra sobre F.

Definição 1.2.1. Seja F um corpo. Dizemos que um espaço vetorial A sobre F é uma **F-álgebra** associativa (ou simplesmente **álgebra**) se A é um anel e

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b),$$

para todos $a, b \in A$ e $\lambda \in F$.

Se um subconjunto B de A é ainda uma F-álgebra então B é chamado de **F-subálgebra** de A. As subálgebras $\{0\}$ e A de A são ditas **subálgebras triviais**. Se A for um anel comutativo então dizemos que A é uma **F-álgebra comutativa**. Uma álgebra A é **gerada como álgebra** por um subconjunto S, se todo elemento de A pode ser escrito como combinação linear, sobre F, de produtos $s_{i1} \cdots s_{ik}$, com $s_{ij} \in S$. Definimos a **dimensão** de uma álgebra A como sendo a dimensão do espaço vetorial A sobre F.

Exemplo 1.2.2. O espaço vetorial $M_n(F)$, das matrizes de ordem $n \times n$ sobre F, munida com as operações usuais é uma F-álgebra. Note que, para $n \geq 2$, temos que $M_n(F)$ é uma álgebra não comutativa. Sabe-se que $\mathcal{B} = \{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, o conjunto das matrizes unitárias (cuja única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna) é uma base para $M_n(F)$ sobre F. Logo, a dimensão de $M_n(F)$ é n^2.

Exemplo 1.2.3. O conjunto $UT_n(F)$, das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em F, com as operações induzidas de $M_n(F)$, é uma F-álgebra não comutativa com dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \geq 2$. Note que $UT_n(F)$ é uma subálgebra de $M_n(F)$.

Exemplo 1.2.4. O espaço vetorial $M_n(F \oplus cF)$, das matrizes de ordem $n \times n$ com entradas em $F \oplus cF$ (soma direta como espaço vetorial), onde $c^2 = 1$, é uma álgebra de dimensão $2n^2$.

Sejam $\mathcal{C}$ uma classe de álgebras, $A \in \mathcal{C}$ e X um subconjunto de A tal que A é gerada por X. Dizemos que A é uma **álgebra livre (na classe $\mathcal{C}$) gerada por** X se, para qualquer álgebra $B \in \mathcal{C}$ e qualquer aplicação $f : X \to B$, existe um único homomorfismo $\varphi : A \to B$ que estende f, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.2.5. Sejam F um corpo de característica zero e $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto infinito e enumerável de variáveis não comutativas. Consideremos $F\langle X\rangle$ o espaço vetorial gerado por todos os produtos $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$. A multiplicação de um escalar $\alpha \in F$ por um produto $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ será chamada de **monômio** e simplesmente vista como $\alpha x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$. Definindo a multiplicação de dois monômios por justaposição e considerando para $n = 0$ o elemento $1 \in F\langle X\rangle$, dizemos que $F\langle X\rangle$ é a **álgebra livre associativa unitária gerada por** X. Note que $F\langle X\rangle$ é de fato uma álgebra livre (na classe das álgebras associativas) gerada por X. Os elementos de $F\langle X\rangle$ são chamados de **polinômios** e escreveremos $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar quais variáveis compõem o polinômio f. Tal álgebra será muito útil nessa dissertação.

Dizemos que um elemento a pertencente a uma F-álgebra A é **nilpotente** se $a^m = 0$, para algum inteiro positivo m, e que A é uma **álgebra nil** se todo elemento de A é nilpotente. Dizemos que uma álgebra A é **nil, de expoente limitado**, se existe um inteiro positivo m tal que $a^m = 0$, para todo $a \in A$. Além disso, se $A^m = \{0\}$ para algum inteiro $m \geq 1$, dizemos que A é uma **álgebra nilpotente**. Neste caso, $a_1 \cdots a_m = 0$ para todos $a_1, \ldots, a_m \in A$, e o menor inteiro m com tal propriedade é chamado **índice de nilpotência** da álgebra A. Por fim, se $a^2 = a$, então dizemos que a é um **idempotente**.

Definição 1.2.6. Sejam A e B F-álgebras e considere uma função $f : A \to B$. Então f é um **homomorfismo de F-álgebras** se f é uma aplicação linear e além disso

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad \text{para todos } a, b \in A.$$

Neste caso, se f for bijetora então dizemos que f é um **isomorfismo** entre A e B. Os homomorfismos $f : A \to A$ são chamados de **endomorfismos**, e os isomorfismos de A sobre si mesmo são chamados de **automorfismos de** A.

Definição 1.2.7. Um subconjunto I de uma álgebra A é um **ideal à esquerda de** A se I é um subespaço vetorial de A tal que $ab \in I$ sempre que $a \in A$ e $b \in I$. De maneira análoga define-se **ideal à direita de** A. Um subconjunto I de uma álgebra A é um **ideal bilateral** ou simplesmente **ideal** de A se I é simultaneamente um ideal à esquerda e à direita de A. Dizemos que um ideal I de A é **nilpotente** se existe um natural n tal que $I^n = \{0\}$. O menor natural que satisfaz essa propriedade é chamado de **índice de nilpotência de** I.

Lembramos que, para uma F-álgebra associativa A, o **comutador de Lie de peso** 2 dos elementos a_1 e a_2 pertencentes a A é dado por

$$[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1.$$

Assim, podemos definir o **comutador de Lie de peso** $n \geq 3$, de maneira recursiva, como

$$[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n],$$

onde $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Definição 1.2.8. Seja A uma F-álgebra e L um subespaço de A. Então L é um **ideal de Lie** de A se $[L, A] \subseteq L$, onde $[L, A]$ denota o subgrupo aditivo gerado por todos comutadores de Lie $[l, a]$, $l \in L$ e $a \in A$.

Se $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$, denotamos

$$f(A) = \text{span}_F\{f(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}.$$

Sendo assim, enunciamos o seguinte lema que terá grande relevância nesta dissertação.

Lema 1.2.9 ([20], Lema 1.3.10)**.** *Sejam F um corpo infinito, A uma F-álgebra e $f \in F\langle X\rangle$. Então $f(A)$ é um ideal de Lie de A.*

Nosso próximo passo é definir álgebras semissimples. Antes, vejamos a definição de soma direta de álgebras.

Definição 1.2.10. Sejam A uma F-álgebra e $A_1, \ldots, A_k$ subálgebras de A. Se são válidas as seguintes condições:

(*i*) $A = A_1 + \cdots + A_k$;

(*ii*) $a_1 + \cdots + a_k = 0$, com $a_i \in A_i$, implica em $a_i = 0$, para $i = 1, \ldots, k$;

(*iii*) $A_iA_j = \{0\}$ para $i, j = 1, \ldots, k$ e $i \neq j$,

então dizemos que A é **soma direta** (como álgebras) de $A_1, \ldots, A_k$ e escreveremos $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$.

Observe que a notação usada acima já apareceu ao lidarmos com somas diretas de módulos. Mas deixaremos claro, quando for necessário, em relação a que tipo de estrutura estamos considerando a soma direta.

Exemplo 1.2.11. A álgebra $A = M_n(F \oplus cF)$, com $c^2 = 1$, se decompõe como soma direta de álgebras da seguinte forma:

$$M_n(F \oplus cF) = \left(\frac{1+c}{2} M_n(F)\right) \oplus \left(\frac{1-c}{2} M_n(F)\right).$$

Além disso, considerando a álgebra $B = \begin{pmatrix} M_n(F) & 0 \\ 0 & M_n(F) \end{pmatrix}$, temos que A e B são isomorfas. Com efeito, basta considerar a correspondência $\frac{1+c}{2}C + \frac{1-c}{2}D \mapsto \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, onde $C, D \in M_n(F)$.

Dizemos que uma álgebra A é **simples** se $A^2 \neq \{0\}$ e A não possui ideais bilaterais não nulos. Além disso, dizemos que A é uma álgebra **semissimples** se ela pode ser escrita como soma direta de álgebras simples.

Exemplo 1.2.12. $M_n(F)$ é uma álgebra simples (veja [29], Proposição 2.1.16). Pelo Exemplo 1.2.11 temos que $M_n(F \oplus cF)$ não é uma álgebra simples, mas é semissimples.

Definiremos agora o produto tensorial entre dois R-módulos e em seguida iremos estender esse conceito para F-álgebras. Sejam M e N R-módulos e considere o seguinte módulo livre

$$L = \text{span}_F\{(m, n) \mid m \in M,\ n \in N\}.$$

Seja J o submódulo de L gerado pelos elementos da forma

$$\begin{aligned}
&(m + m', n) - (m, n) - (m', n)\\
&(m, n + n') - (m, n) - (m, n')\\
&(rm, n) - r(m, n)\\
&(m, rn) - r(m, n),
\end{aligned}$$

onde $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $r \in R$. Definimos o **produto tensorial** entre M e N como sendo o grupo quociente L/J. Denotamos esse grupo por $M \otimes_R N$, mas quando não houver ambiguidade sobre qual anel R estivermos trabalhando escreveremos somente $M \otimes N$. Para $m \in M$ e $n \in N$, a classe $(m, n) + J$ será denotada por $m \otimes n$.

O produto tensorial $M \otimes_R N$ dos R-módulos M e N satisfaz a seguinte propriedade universal: Seja $\phi : M \times N \to M \otimes_R N$ uma aplicação bilinear. Então, para toda aplicação bilinear

$\rho : M \times N \to T$, onde T é um R-módulo, temos que existe um único homomorfismo de R-módulos $\varphi : M \otimes_R N \to T$ fazendo o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes_R N \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ T & \end{tikzcd}$$

Um elemento geral do produto tensorial $M \otimes_R N$ é da forma $\sum_i r_i(m_i \otimes n_i)$, onde $m_i \in M$, $n_i \in N$ e $r_i \in R$. Note que, da definição de produto tensorial, as seguintes propriedades são válidas:

(i) $(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$;

(ii) $m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'$;

(iii) $r(m \otimes n) = (rm) \otimes n = m \otimes (rn)$.

Sejam F um corpo e A, B duas F-álgebras com unidade. Podemos definir o produto tensorial $A \otimes_F B$ como antes e assumir que o F-módulo $A \otimes_F B$ é uma F álgebra definindo a seguinte multiplicação

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb'),$$

para todos $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$. Note que $1_A \otimes 1_B$ é a identidade dessa multiplicação. Neste caso, assim como para R-módulos, temos também válida a propriedade universal.

Por fim, exibimos o seguinte lema que mostra um importante isomorfismo entre álgebras.

Lema 1.2.13. *Sejam F um corpo, A uma F-álgebra e $M_n(F)$ a álgebra de matrizes. Então $M_n(F) \otimes A$ é isomorfa a $M_n(A)$.*

1.3 Radical de Jacobson e teoremas de estrutura

Definiremos nessa seção o radical de Jacobson e veremos alguns teoremas estruturais de uma F-álgebra A. Seja R um anel com unidade e vamos denotar por $\mathcal{I}$ o conjunto de todos os ideais à esquerda maximais de R.

Definição 1.3.1. Dizemos que a interseção de todos os ideais à esquerda maximais de um anel R é o **radical de Jacobson** de R, o qual será denotado por $J(R)$, ou seja,

$$J(R) = \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I.$$

Pode-se verificar que $J(R)$ é um ideal à esquerda de R. Define-se também o radical de Jacobson como sendo a interseção de todos os ideais à direita maximais de R, e nesse caso

$J(R)$ é um ideal à direita de R. Ambas as definições são equivalentes.

Seja A uma F-álgebra de dimensão finita. Neste caso, podemos obter outras caracterizações para o radical de Jacobson da álgebra A que são dadas nas seguintes proposições.

Proposição 1.3.2 ([13], Teorema 2.4)**.** *Seja A uma F-álgebra de dimensão finita sobre F. Então $J(A)$ é o maior ideal nilpotente de A.*

Proposição 1.3.3 ([29], Teorema 2.7.16)**.** *Seja A uma F-álgebra de dimensão finita sobre F. Então A é semissimples se, e somente se, $J(A) = \{0\}$.*

Exemplo 1.3.4. O radical de Jacobson da álgebra $UT_n(F)$ é o ideal das matrizes triangulares estritamente superiores.

Na seção anterior vimos a definição de álgebras semissimples. O próximo teorema, conhecido como Teorema de Wedderburn-Artin, caracteriza todas essas álgebras semissimples de dimensão finita.

Teorema 1.3.5 ([29], Teorema 2.6.18 - **Wedderburn-Artin**)**.** *Se A é uma F-álgebra semissimples de dimensão finita então A é isomorfa a uma soma direta (como álgebras) de álgebras de matrizes com coeficientes em anéis de divisão, ou seja,*

$$A \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s).$$

Daremos agora o Teorema de Wedderburn-Malcev que caracteriza as álgebras de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Esse teorema será muito útil neste trabalho, sendo que veremos uma generalização desse resultado no Capítulo 3 quando estivermos trabalhando com superálgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero. Antes, vejamos a seguinte definição.

Definição 1.3.6. Uma F-subálgebra B é **maximal** em A se para qualquer F-subálgebra A' tal que $B \subseteq A' \subseteq A$ tivermos $A' = B$ ou $A' = A$.

Teorema 1.3.7 ([20], Teorema 3.4.1 - **Wedderburn-Malcev**)**.** *Sejam A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero e $J(A)$ seu radical de Jacobson. Então existe uma subálgebra semissimples maximal B de A tal que*

$$A = B + J(A),$$

sendo que a soma acima indica uma soma direta de espaços vetoriais. Além disso, se B e B' são subálgebras semissimples tais que $A = B + J(A) = B' + J(A)$, então existe $x \in A$ tal que $B' = (1 + x)B(1 + x)^{-1}$.

Dessa forma, lembrando do Teorema de Wedderburn-Artin, se A é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero, então

$$A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m + J(A),$$

onde $B_i \cong M_{n_i}(D_i)$, para algum anel de divisão D_i. Além disso, temos que a soma $B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$ é uma soma direta de álgebras.

Exemplo 1.3.8. Seja F um corpo de característica zero e considere a álgebra de matrizes triangular superior $UT_n(F)$. Então $UT_n(F) = B + J$, onde $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ com $B_i = \text{span}_F\{E_{ii}\}$, para todo $i = 1, \ldots, n$, e $J = \text{span}_F\{E_{ii} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Em termos matriciais, temos

$$B = \begin{pmatrix} F & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & F & F & \cdots & F & F \\ 0 & 0 & F & \cdots & F & F \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & F & F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 2

PI-álgebras

Sejam F um corpo e A uma F-álgebra associativa. Considere $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto infinito e enumerável de variáveis não comutativas, e $F\langle X \rangle$ a álgebra livre associativa unitária gerada por X. Neste capítulo, introduziremos diversos conceitos básicos da PI-teoria. Os resultados aqui mencionados são bem conhecidos na teoria de PI-álgebras e assim muitos deles serão apresentados sem demonstração, mas devidamente acompanhados de uma referência.

2.1 Identidades polinomiais e T-ideais

Nesta seção apresentaremos tópicos elementares que serão essenciais ao longo deste trabalho. Veremos as definições de PI-álgebras e T-ideais, seguidas de exemplos.

Definição 2.1.1. Sejam A uma F-álgebra e $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$. Dizemos que f é uma **identidade polinomial** de A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Neste caso, denotamos por $f \equiv_A 0$ ou simplesmente por $f \equiv 0$.

Dessa forma, dizemos que uma álgebra A é uma **PI-álgebra** se A satisfaz uma identidade polinomial não trivial, ou seja, existe um polinômio não nulo $f \in F\langle X \rangle$ tal que $f \equiv_A 0$.

Exemplo 2.1.2. Seja A uma álgebra comutativa. Então A satisfaz a identidade polinomial não trivial $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$. Logo, toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra.

Exemplo 2.1.3. Se A é uma álgebra nilpotente com índice de nilpotência igual a m então A satisfaz a identidade polinomial $f(x_1, \ldots, x_m) = x_1 \cdots x_m$. Dessa forma, temos que toda álgebra nilpotente é uma PI-álgebra.

Exemplo 2.1.4. Considere A uma álgebra nil de expoente limitado. Então existe um inteiro $m \geq 1$ de tal forma que $a^m = 0$, para quaisquer $a \in A$. Sendo assim, $f(x) = x^m$ é uma identidade polinomial de A, e com isso toda álgebra nil de expoente limitado é uma PI-álgebra.

Vamos agora dar quatro exemplos de PI-álgebras que aparecerão muito ao longo deste trabalho.

Exemplo 2.1.5. A álgebra $UT_n(F)$ é também uma PI-álgebra, uma vez que $UT_n(F)$ satisfaz a seguinte identidade polinomial

$$f(x_1, ..., x_{2n}) = [x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

De fato, basta lembrar que, para $A, B \in UT_n(F)$, temos que $[A, B]$ é uma matriz triangular estritamente superior, ou seja, $[A, B]$ pertence ao radical de Jacobson de $UT_n(F)$. Como o radical de Jacobson de $UT_n(F)$ é nilpotente com índice de nilpotência igual a n, concluímos que $[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]$ é uma identidade polinomial para $UT_n(F)$.

Exemplo 2.1.6. A álgebra $M_2(F)$, das matrizes 2×2 sobre um corpo F, satisfaz a identidade $[[x_1, x_2]^2, x_3]$. Com efeito, seja A uma matriz em $M_2(F)$. O polinômio característico de A é dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)E$, sendo que $\mathrm{tr}(A)$ denota o traço da matriz A, $\det(A)$ o determinate de A e E a matriz identidade de $M_2(F)$. Se considerarmos o caso quando A é um comutador de Lie de peso 2, então $\mathrm{tr}(A) = 0$. Logo, $A^2 + \det(A)E = 0$, o que implica $A^2 = -\det(A)E$. Disso, A^2 é um múltiplo escalar da matriz E e consequentemente $[[x_1, x_2]^2, x_3]$ é uma identidade polinomial de $M_2(F)$. Portanto, $M_2(F)$ é uma PI-álgebra.

Antes de darmos o próximo exemplo, definimos o **polinômio standard de grau** n como sendo

$$St_n = St_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sgn}\ \sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo simétrico de grau n e sgn σ denota o sinal da permutação σ.

Exemplo 2.1.7. O conhecido Teorema de Amitsur e Levitzki, apresentado em [1], afirma que $St_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ é uma identidade polinomial de $M_n(F)$. Logo a álgebra de matrizes $M_n(F)$ é uma PI-álgebra.

Exemplo 2.1.8. Sejam F um corpo de característica diferente de dois e I um ideal bilateral de $F\langle X \rangle$ gerado pelo conjunto de polinômios $\{x_i x_j + x_j x_i \mid i, j \geq 1\}$. Denote por G a **álgebra de Grassmann** de dimensão infinita sobre F definida por $G = F\langle X \rangle / I$. Se escrevemos $e_i = x_i + I$, para $i \geq 1$, então G é gerado como álgebra por $\{1, e_1, e_2, \ldots \mid e_i e_j = -e_j e_i,\ i, j \geq 1\}$, e assim cada elemento de G é escrito como combinação linear de produtos da forma $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$, com $i_1 < \ldots < i_k$, $k \geq 0$, lembrando que 1 é a unidade de G. Definimos

$$G^{(0)} = \mathrm{span}_F \{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_{2k}, k \geq 0\}$$

e

$$G^{(1)} = \text{span}_F\{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_{2k+1}, k \geq 0\}.$$

Então, vale que $G = G^{(0)} \oplus G^{(1)}$ (soma como espaço vetorial), e exploraremos mais essas ideias no próximo capítulo, quando estivermos trabalhando com superálgebras.

Assim, temos que G é uma PI-álgebra, já que satisfaz a identidade polinomial $[[x_1, x_2], x_3]$. Com efeito, sejam a_1 e a_2 elementos em G tais que $a_1 = e_{i_1} \cdots e_{i_r}$ e $a_2 = e_{j_1} \cdots e_{j_s}$, onde $r, s \geq 0$. Como $e_i e_j = -e_j e_i$, segue que

$$a_1 a_2 = (e_{i_1} \cdots e_{i_r})(e_{j_1} \cdots e_{j_s}) = (-1)^{rs}(e_{j_1} \cdots e_{j_s})(e_{i_1} \cdots e_{i_r}) = (-1)^{rs} a_2 a_1.$$

Se $a_1, a_2 \in G^{(1)}$ então $(-1)^{rs} = -1$ e daí $a_2 a_1 = -a_1 a_2$, o que implica $[a_1, a_2] = 2a_1 a_2 \in G^{(0)}$. Se a_1 ou a_2 pertencem a $G^{(0)}$ então temos $(-1)^{rs} = 1$ e com isso $a_1 a_2 = a_2 a_1$, o que implica que os elementos de $G^{(0)}$ comutam com todos os elementos de G. Logo $G^{(0)} \subseteq Z(G)$, onde $Z(G)$ denota o centro da álgebra de Grassmann (pode-se mostrar que vale a igualdade, isto é, $Z(G) = G^{(0)}$). Observe que é necessário fazer tais conclusões apenas para um somando $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$, $k \geq 1$, pois a álgebra G é formada por combinações lineares desses elementos.

Portanto, $[b_1, b_2] \in G^{(0)} \subseteq Z(G)$, para quaisquer $b_1, b_2 \in G$ e assim a álgebra de Grassmann G satisfaz a identidade polinomial $[[x_1, x_2], x_3]$.

Definição 2.1.9. O **conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra** A é dado por

$$\text{Id}(A) = \{f \in F\langle X \rangle \mid f \equiv_A 0\}.$$

Pode-se verificar que $\text{Id}(A)$ é um ideal bilateral de $F\langle X \rangle$. Observe que uma álgebra A é uma PI-álgebra se $\text{Id}(A) \neq 0$. Em alguns contextos dessa dissertação estaremos lidando sobre diferentes corpos e, nesse sentido, usaremos a notação $\text{Id}_F(A)$ como forma de salientar o corpo F sobre o qual consideramos o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra A.

Definição 2.1.10. Um ideal I de $F\langle X \rangle$ é dito um T**-ideal** se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo φ de $F\langle X \rangle$.

Note que $\text{Id}(A) \subseteq F\langle X \rangle$ é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X \rangle$, ou seja, $\text{Id}(A)$ é um T-ideal de $F\langle X \rangle$. Esse ideal é de fato importante na teoria de PI-álgebras, já que todos os T-ideais de $F\langle X \rangle$ são na verdade desse tipo. O seguinte resultado enuncia essa afirmação.

Proposição 2.1.11. *Se I é um T-ideal de $F\langle X \rangle$ então existe uma álgebra A tal que $I = \text{Id}(A)$.*

Demonstração. Basta tomar $A = \frac{F\langle X \rangle}{I}$ · $\square$

Definição 2.1.12. Sejam S, S' conjuntos de polinômios em $F\langle X\rangle$ e $f \in F\langle X\rangle$.

(1) Definimos o **T-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por** S, que será denotado por $\langle S\rangle_T$, como sendo o conjunto

$$\langle S\rangle_T = \left\{ \sum_{i=1}^{n} w_i f_i(u_{i1}, \ldots, u_{in_i})v_i \mid f_i \in S,\ w_i, v_i, u_{ij} \in F\langle X\rangle \right\}.$$

(2) Se $f \in \langle S\rangle_T$ então dizemos que f é uma **consequência** dos polinômios de S.

(3) Dizemos que S e S' são **equivalentes** se eles geram o mesmo T-ideal, ou seja, $\langle S\rangle_T = \langle S'\rangle_T$.

Exemplo 2.1.13. Para a álgebra $M_2(F)$, Razmyslov, em [31], exibiu nove polinômios geradores de $\mathrm{Id}(M_2(F))$. Drensky, no artigo [9], mostrou que

$$\mathrm{Id}(M_2(F)) = \langle [[x_1, x_2]^2, x_3], St_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\rangle_T.$$

Entretanto, o T-ideal $\mathrm{Id}(M_n(F))$ ainda não foi determinado para $n \geq 3$.

Exemplo 2.1.14. Para a álgebra $UT_2(F)$ temos $\mathrm{Id}(UT_2(F)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4]\rangle_T$. Em geral, para a álgebra $UT_n(F)$, temos $\mathrm{Id}(UT_n(F)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]\rangle_T$.

Exemplo 2.1.15. Krakowski e Regev provaram que o T-ideal da álgebra de Grassmann G é dado por $\mathrm{Id}(G) = \langle [[x_1, x_2], x_3]\rangle_T$ (veja [27]).

2.2 Variedades e álgebras relativamente livres

Vimos na seção anterior o T-ideal das identidades polinomiais de uma álgebra A, que consiste de todos os polinômios $f \in F\langle X\rangle$ tais que $f \equiv_A 0$. No entanto, podem existir outras álgebras que também possuem as mesmas identidades de A, donde surge a definição de variedade, que daremos a seguir. Além disso, definiremos álgebras relativamente livres, e veremos sua relação com álgebras livres.

Definição 2.2.1. Seja $S \subseteq F\langle X\rangle$ um conjunto não vazio. A classe de todas as álgebras A tais que $f \equiv 0$ em A, para quaisquer $f \in S$, é dita a **variedade $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ determinada por** S.

Se $S \neq 0$ então dizemos que a variedade $\mathcal{V}$ determinada por S é **não trivial**. Se $\mathcal{V}$ é não trivial e contém uma álgebra não nula, chamamos a variedade $\mathcal{V}$ de **própria**.

Observação 2.2.2. Se $S \subseteq F\langle X\rangle$, $\langle S\rangle_T$ é o T-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por S e $\mathcal{V}$ é a variedade determinada por S, então $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S\rangle_T)$ e $\langle S\rangle_T = \bigcap_{A\in\mathcal{V}} Id(A)$. Neste caso, denotamos como $\langle S\rangle_T = \mathrm{Id}(\mathcal{V})$, o **$T$-ideal da variedade $\mathcal{V}$**.

Além disso, sendo A uma F-álgebra, a classe das F-álgebras que satisfazem todas as identidades polinomiais de A será chamada **variedade gerada por** A, cuja notação é $\mathrm{var}(A)$. Em suma, $\mathrm{var}(A) = \{A' \mid Id(A) \subseteq Id(A')\}$.

Proposição 2.2.3. *Sejam $S \subseteq F\langle X\rangle$ e $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ a variedade determinada por S. Então existe uma álgebra A tal que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$.*

Demonstração. Basta observar que, se consideramos $I = \langle S\rangle_T$, o T-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por S, segue pela Proposição 2.1.11 que existe uma álgebra A tal que $I = \mathrm{Id}(A)$. Logo $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) = \langle S\rangle_T = \mathrm{Id}(A)$ e assim $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$. □

Exemplo 2.2.4. Sendo $S = \{[x, y]\} \subseteq F\langle X\rangle$, temos que a classe de todas as álgebras comutativas formam a variedade $\mathcal{V}(S)$. Observe que nesse caso $\mathcal{V}$ é própria.

Exemplo 2.2.5. Se considerarmos $S = \{x^m\} \subseteq F\langle X\rangle$ então a classe de todas as álgebras nil de índice limitado por m nos dá a variedade $\mathcal{V}(S)$.

O próximo teorema estabelece condições necessárias e suficientes para decidirmos se uma dada classe de álgebras é uma variedade. Tal resultado foi provado por Birkhoff e encontra-se em [20].

Teorema 2.2.6 ([20], Teorema 1.2.3 - **Birkhoff**). *Uma classe $\mathcal{V}$, não vazia, de álgebras é uma variedade se, e somente se, são satisfeitas as seguintes propriedades:*

(1) *Se $A \in \mathcal{V}$, e $B \to A$ é um monomorfismo, então $B \in \mathcal{V}$;*

(2) *Se $A \in \mathcal{V}$, e $A \to B$ é um epimorfismo, então $B \in \mathcal{V}$;*

(3) *Se $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma família de álgebras e $A_\gamma \in \mathcal{V}$, para todo $\gamma \in \Gamma$, então $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{V}$.*

A correspondência entre T-ideais e variedades é bem estabelecida de acordo com o seguinte resultado.

Teorema 2.2.7 ([20], Teorema 1.2.5). *Existe uma correspondência um-a-um entre T-ideais de $F\langle X\rangle$ e variedades de álgebras. Nesta correspondência uma variedade $\mathcal{V}$ corresponde a um T-ideal de identidades $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ e um T-ideal I corresponde a uma variedade de álgebras satisfazendo todas as identidades de I. Além disso, para duas variedades de álgebras $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ temos $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$ se, e somente se, $\mathrm{Id}(\mathcal{V}_2) \subseteq \mathrm{Id}(\mathcal{V}_1)$.*

Definição 2.2.8. Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade, $A \in \mathcal{V}$ uma álgebra e $Y \subseteq A$ um subconjunto de A. Dizemos que A é **relativamente livre em** Y (com respeito a $\mathcal{V}$) se, para qualquer álgebra $B \in \mathcal{V}$ e para toda função $\alpha : Y \to B$, existe um único homomorfismo $\beta : A \to B$ que estende α.

Observe que, quando $\mathcal{V}$ é a variedade de todas as álgebras associativas, essa definição coincide com a de álgebra livre gerada por Y. O próximo teorema descreve álgebras relativamente livres em termos de álgebras livres.

Teorema 2.2.9 ([20], Teorema 1.2.4)**.** *Sejam X um conjunto não vazio, $F\langle X\rangle$ uma álgebra livre em X e $\mathcal{V}$ uma variedade com ideal $Id(\mathcal{V}) \subseteq F\langle X\rangle$. Então $F\langle X\rangle/\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ é uma álgebra relativamente livre em X. Além disso, toda álgebra que é relativamente livre em X é isomorfa a $F\langle X\rangle/\mathrm{Id}(\mathcal{V})$.*

Finalizamos essa seção enunciando um resultado que decorre de um teorema provado por Lewin (veja [20], Teorema 1.8.1). Para referências futuras, tal resultado será aqui chamado Teorema de Lewin.

Teorema 2.2.10 ([20], Corolário 1.8.2 - **Teorema de Lewin**)**.** *Sejam A e B duas F-álgebras e seja M uma (A, B)-bimódulo. Suponha que sejam válidas as seguintes afirmações:*

(1) *A contém uma subálgebra relativamente livre $\widetilde{A}$ com geradores livres $a_1, a_2, \ldots$;*

(2) *B contém uma subálgebra relativamente livre $\widetilde{B}$ com geradores livres $b_1, b_2, \ldots$;*

(3) *M contém um $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$-bimódulo livre com geradores livres $w_1, w_2, \ldots$.*

Então os elementos $\begin{pmatrix} a_i & w_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \ldots$, são geradores livres de uma subálgebra relativamente livre $\widetilde{C}$ da álgebra $\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$ e $\mathrm{Id}(\widetilde{C}) = \mathrm{Id}(\widetilde{A})\,\mathrm{Id}(\widetilde{B})$.

2.3 Polinômios multilineares

Nesta seção definiremos polinômios multilineares e veremos, sob determinadas condições no corpo F, sua relevância no estudo de álgebras com identidades polinomiais. Começaremos com algumas definições que envolvem monômios e polinômios em $F\langle X\rangle$.

Definição 2.3.1. Seja $u = \alpha x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ um monômio em $F\langle X\rangle$, com $\alpha \in F$. Definimos o **grau do monômio** u como sendo o comprimento da palavra u. Nesse caso, o grau de u é k e denotamos $\deg u = k$. Além disso, o **grau de u em x_j** é o número de vezes em que a variável x_j aparece em u, o qual denotamos por $\deg_{x_j} u$.

Definição 2.3.2. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio em $F\langle X\rangle$. Podemos escrever f como soma de seus monômios $\alpha_j u_j$, com $\alpha_j \in F$, ou seja, $f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j$. Definimos o **grau do polinômio** f como o maior grau dentre os graus dos monômios de f, e o denotamos por $\deg f$. Além disso, o **grau de f em x_j**, que será denotado por $\deg_{x_j} f$, é o maior dos $\deg_{x_j} u_j$, com $j = 1, \ldots, m$.

Definição 2.3.3. Seja $f \in F\langle X\rangle$. Se a variável x_j tem grau 1 em todo monômio de f, então dizemos que f é um **polinômio linear em** x_j. Se todos os monômios de f possuem o mesmo grau, então f é **homogêneo**. Se x_j aparece com mesmo grau em todos os monômios de f, dizemos que f é **homogêneo na variável** x_j, e se f é homogêneo em todas as suas variáveis então f é **multihomogêneo**. Por fim, se f é multihomogêneo e linear em todas suas variáveis, então f será chamado de **polinômio multilinear**.

Observamos que, para um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ multihomogêneo, podemos definir o conceito de **multigrau**, que é uma n-upla onde sua j-ésima entrada corresponde a $\deg_{x_j} f$. Mais ainda, uma **componente multihomogênea** de um polinômio $g \in F\langle X\rangle$ é a soma de todos os monômios de g com o mesmo multigrau.

Teorema 2.3.4 ([20], Teorema 1.3.2)**.** *Sejam F um corpo infinito e A uma F-álgebra. Se f é uma identidade polinomial para A, então toda componente multihomogênea de f é ainda uma identidade polinomial para A.*

Observação 2.3.5. Vale ressaltar que o Teorema 2.3.4 ainda é válido se F é um corpo finito tal que $|F| > \deg f$. Além disso, como consequência desse teorema, segue que todo T-ideal sobre um corpo infinito é gerado por seus polinômios multihomogêneos.

Observação 2.3.6. Se $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é um polinômio linear em alguma variável, por exemplo x_1, então $f(\sum \alpha_i y_i, x_2, \ldots, x_n) = \sum \alpha_i f(y_i, x_2, \ldots, x_n)$, para quaisquer $\alpha_i \in F$ e $y_i \in F\langle X\rangle$.

Vamos agora apresentar o **Processo de Multilinearização**. Para um dado polinômio não nulo $f \in F\langle X\rangle$ tal que f é uma identidade polinomial de uma álgebra A, esse processo nos permite obter uma outra identidade de A que será multilinear. Descreveremos esse método a seguir.

Sejam F um corpo de característica zero, $0 \neq f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ e A uma F-álgebra tais que $f \equiv_A 0$. Considere primeiramente o caso em que cada variável x_i, $i = 1, \ldots, n$, aparece com grau menor ou igual a 1 em cada monômio de f. Procedemos da seguinte maneira: se cada variável x_i, $i = 1, \ldots, n$, aparece com grau igual a 1 em todos os monômios de f, então f é multilinear. Considere então a situação em que existe $1 \leq j \leq n$ tal que x_j não aparece em algum monômio de f e defina $\varphi(x_j) = 0$ e $\varphi(x_i) = x_i$, para todo $i \neq j$. Assim, obtemos uma nova identidade de A, a saber $\varphi(f)$, tal que em nenhum monômio temos a variável x_j. Se $\varphi(f)$ é multilinear, então finalizamos este processo. Caso contrário, existe outra variável, digamos x_l, tal que em algum monômio de $\varphi(f)$ a variável x_l tem grau zero, e de maneira análoga, defina $\psi(x_l) = 0$ e $\psi(x_i) = x_i$, para todo $i \neq l$. Portanto, $\psi\varphi(f)$ ainda é uma identidade de A sem os monômios que contém x_l. Novamente, se $\psi\varphi(f)$ é multilinear, então finalizamos este processo.

Caso contrário, repetimos esse processo de maneira recursiva, de tal forma que iremos obter um polinômio multilinear que ainda é uma identidade de A.

Portanto, podemos assumir que existe alguma variável x_i tal que $\deg_{x_i} f = d > 1$. Sem perda de generalidade, suponha que seja a variável x_1. Considere o polinômio

$$h = h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n).$$

Note que h é uma identidade polinomial de A. Afirmamos que h é uma identidade não trivial. Com efeito, suponha por contradição que $h = 0$. Fazendo $y_1 = y_2 = x_1$, temos

$$0 = h(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(2x_1, x_2, \ldots, x_n) - 2f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

e isso implica que

$$f(2x_1, \ldots, x_n) = 2f(x_1, \ldots, x_n).$$

Decompomos f como a soma $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$, onde cada f_k é a soma de monômios de grau k em x_1. Portanto, $f_k(2x_1, \ldots, x_n) = 2^k(x_1, \ldots, x_n)$ e obtemos

$$2(f_0 + f_1 + \cdots + f_d) = f_0 + 2f_1 + \cdots + 2^d f_d.$$

Então

$$f_0 = (2^2 - 2)f_2 + \cdots + (2^d - 2)f_d.$$

Lembrando que a característica de F é zero, da igualdade acima temos uma contradição, já que $\deg_{x_1} f_0 = 0$ e $\deg_{x_1}(2^2 - 2)f_2 + \cdots + (2^d - 2)f_d = d > 1$. Portanto $h \neq 0$. Além disso, $\deg_{y_1} h = \deg_{y_2} h = d - 1 < d = \deg_{x_1} f$. Dessa forma, procedendo indutivamente, partindo do polinômio f, obtemos um polinômio multilinear que é ainda uma identidade de A.

O processo de multilinearização acima tem como consequência o próximo resultado.

Corolário 2.3.7 ([20], Corolário 1.3.9). *Se F é um corpo de característica zero, então todo T-ideal é gerado, como um T-ideal, pelos polinômios multilineares que ele contém.*

Sejam A uma PI-álgebra e $\mathrm{Id}(A)$ o T-ideal dado pela álgebra A. Vimos no corolário acima que, sobre um corpo de característica zero, $\mathrm{Id}(A)$ é gerado por seus polinômios multilineares. Assim, definimos

$$P_n = \mathrm{span}_F\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\} \subseteq F\langle X \rangle,$$

ou seja, P_n é o espaço vetorial gerado pelos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ sobre F.

Definição 2.3.8. Dada A uma F-álgebra, definimos

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}, \quad n \geq 1.$$

O inteiro não negativo dado pela dimensão de $P_n(A)$ é chamado de **n-ésima codimensão** da álgebra A e o denotamos como $c_n(A) = \dim_F P_n(A)$.

Assim $\dim(P_n \cap \mathrm{Id}(A)) = n! - c_n(A)$. No caso em que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$, a variedade de álgebras gerada por uma F-álgebra A, escrevemos $P_n(\mathcal{V}) = P_n(A)$, $n \geq 1$. Consequentemente, $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$, para todo $n \geq 1$. Quando estivermos trabalhando sobre diferentes corpos, usaremos a notação $c_n^F(A)$ a fim de destacar sobre qual corpo F estamos considerando $P_n(A)$ e calculando a n-ésima codimensão de uma dada álgebra A.

Exemplo 2.3.9. Se A é uma álgebra nilpotente, então $f(x_1, \ldots, x_m) = x_1 \cdots x_m$ é uma identidade polinomial de A, para algum $m \geq 1$. Logo, $c_n(A) = 0$, para todo $n \geq m$. Note que, para qualquer PI-álgebra A não nilpotente, temos $c_n(A) \neq 0$, para qualquer $n \geq 1$.

Exemplo 2.3.10. Para a álgebra $UT_2(F)$, sobre um corpo de característica zero, é válido que $c_n(UT_2(F)) = 2^{n-1}(n-2) + 2$, para todo $n \geq 1$, e a n-ésima codimensão da álgebra de Grassmann é dada por $c_n(G) = 2^{n-1}$, para todo $n \geq 1$ (veja [27] e [28]).

Existe um resultado importante conhecido como Teorema das Codimensões de Regev. Esse teorema nos fornece um limitante superior para a n-ésima codimensão de uma determinada PI-álgebra A. Vejamos seu enunciado a seguir.

Teorema 2.3.11 ([20], Teorema 4.2.4 - **Teorema das Codimensões de Regev**). *Se uma álgebra A satisfaz uma identidade polinomial de grau $d \geq 1$, então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$.*

Agora, se A é uma F-álgebra e C é uma F-álgebra comutativa, temos uma interessante relação entre as identidades polinomiais de A e as identidades de $A \otimes_F C$, quando F é um corpo infinito. Para tanto, consideremos a seguinte definição.

Definição 2.3.12. Sejam A uma F-álgebra e f uma identidade de A. Se f é também uma identidade para a F-álgebra $A \otimes_F C$, para qualquer F-álgebra comutativa C, então dizemos que f é uma **identidade estável** de A.

Lema 2.3.13 ([20], Lema 1.4.2). *Se F é um corpo infinito e A é uma F-álgebra, então toda identidade polinomial de A é estável. Consequentemente, para cada identidade f da álgebra A, temos que f é ainda uma identidade da F-álgebra $A \otimes_F K$, onde K é uma extensão de F.*

Observação 2.3.14. Note que, se F é um corpo finito, então o Lema 2.3.13 não é válido. Por exemplo, se $|F| = q$, segue que $x^q - x$ é uma identidade de F, entretanto f não é identidade sobre qualquer extensão própria de F.

Sejam A uma álgebra sobre um corpo F de característica zero e K uma extensão de F. Considere $\bar{A} = A \otimes_F K$. Pelo Lema 2.3.13, a álgebra $\bar{A}$, vista como F-álgebra, satisfaz todas as identidades multilineares de A e assim $\mathrm{Id}_F(A) \subseteq \mathrm{Id}_F(\bar{A})$. Como claramente $\mathrm{Id}_F(\bar{A}) \subseteq \mathrm{Id}_F(A)$, concluímos $\mathrm{Id}_F(\bar{A}) = \mathrm{Id}_F(A)$ e, portanto, $c_n^F(A) = c_n^F(\bar{A})$, para todo $n \geq 1$. Note ainda que podemos ver $\bar{A}$ como uma K-álgebra. Para isso, basta definir o seguinte produto:

$$\begin{array}{ccc} K \times \bar{A} & \to & \bar{A} \\ (\beta, a \otimes k) & \mapsto & a \otimes (\beta k). \end{array}$$

Dessa forma, temos o próximo teorema.

Teorema 2.3.15. *Sejam A uma álgebra sobre um corpo infinito F e K uma extensão do corpo F. Se considerarmos a álgebra $\bar{A} = A \otimes_F K$ como uma K-álgebra e denotarmos por $c_n^K(\bar{A})$ sua n-ésima codimensão, então, para todo $n \geq 1$, temos $c_n^K(\bar{A}) = c_n^F(A)$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos fixar nossas notações.

Temos $P_n^F = \mathrm{span}_F\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$ e $P_n^K = \mathrm{span}_K\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$, como sendo os espaços vetoriais dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, ..., x_n$ sobre F e K, respectivamente. Além disso, $P_n^F(A) = \dfrac{P_n^F}{P_n^F \cap \mathrm{Id}_F(A)}$, onde $\mathrm{Id}_F(A)$ corresponde ao conjunto das identidades de A com coeficientes em F, e $P_n^K(\bar{A}) = \dfrac{P_n^K}{P_n^K \cap \mathrm{Id}_K(\bar{A})}$, tal que $\mathrm{Id}_K(\bar{A})$ denota o conjunto das identidades de $\bar{A}$ com coeficientes em K. Por fim, para $n \geq 1$, $c_n^F(A) = \dim_F P_n^F(A)$ e $c_n^K(\bar{A}) = \dim_K P_n^K(\bar{A})$.

Seja $m = c_n^F(A)$ e fixemos uma base $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de $P_n^F(\mathrm{mod}(P_n^F \cap \mathrm{Id}_F(A)))$. Provemos que $c_n^K(\bar{A}) \leq m$. Primeiramente observamos que se $f \in P_n^F$ então existem $\beta_1, \ldots, \beta_m \in F$, tais que $f = \sum_{i=1}^m \beta_i f_i + h$, onde $h \in P_n^F \cap \mathrm{Id}_F(A)$. Como F é infinito e $h \in \mathrm{Id}_F(A)$, pelo Lema 2.3.13 temos que h é estável e assim h é uma identidade de $\bar{A}$ sobre F. Uma vez que K é uma extensão de F, vale que $h \in P_n^K \cap \mathrm{Id}_K(\bar{A})$.

Agora, seja $g \in P_n^K$. Então, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in K$ e monômios mônicos $m_1, \ldots, m_s \in P_n^F$, tais que $g = \sum_{i=1}^s \alpha_i m_i$. Mais ainda, podemos escrever $m_i = \sum_j \gamma_{ij} f_j + h_i$, onde $\gamma_{ij} \in F$, com $h_i \in P_n^F \cap \mathrm{Id}_F(A) \subseteq P_n^K \cap \mathrm{Id}_K(\bar{A})$. Logo,

$$g = \sum_i \alpha_i \left(\sum_j \gamma_{ij} f_j + h_i \right) = \sum_i \sum_j (\alpha_i \gamma_{ij}) f_j + \sum_i \alpha_i h_i = \sum_j \underbrace{\left(\sum_i \alpha_i \gamma_{ij} \right)}_{\in K} f_j + \underbrace{\sum_i \alpha_i h_i}_{\in P_n^K \cap \mathrm{Id}_K(\bar{A})} ,$$

ou seja, $\{f_1,\ldots,f_m\}$ geram $P_n^K(\mathrm{mod}(P_n^K\cap \mathrm{Id}_K(\bar{A})))$. Assim, $c_n^K(\bar{A})\leq m=c_n^F(A)$.

Mostremos agora que $\{f_1,\ldots,f_m\}$ é linearmente independente $(\mathrm{mod}(P_n^K\cap \mathrm{Id}_K(\bar{A})))$. Com efeito, seja $\beta_1,\ldots,\beta_m\in K$ tais que $\bar{f}:=\sum_{i=1}^m\beta_if_i\equiv_{\bar{A}}0$. Seja $\mathcal{B}=\{t_1,t_2,\ldots\}$ base do espaço vetorial K sobre F e, com isso, existem escalares $\gamma_{ij}\in F$ tais que $\beta_i=\sum_j\gamma_{ij}t_j$. Avaliamos $\bar{f}$ em $a_1\otimes 1,\ldots,a_n\otimes 1$, com $a_i\in A$.

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{f}(a_1\otimes 1,\ldots,a_n\otimes 1)=\sum_i\beta_if_i(a_1\otimes 1,\ldots,a_n\otimes 1)\\
&= \sum_i\left(\sum_j\gamma_{ij}t_jf_i(a_1\otimes 1,\ldots,a_n\otimes 1)\right)=\sum_j\sum_i\gamma_{ij}t_jf_i(a_1,\ldots,a_n)\otimes 1\\
&= \sum_j\left(\sum_i\gamma_{ij}f_i(a_1,\ldots,a_n)\right)\otimes t_j.
\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_i\gamma_{ij}f_i(a_1,\ldots,a_n)=0$, para todos $a_1,\ldots,a_n\in A$, o que implica em $\sum_i\gamma_{ij}f_i$ ser uma identidade de A. Uma vez que $\{f_1,\ldots,f_m\}$ é base de $P_n^F(\mathrm{mod}(P_n^F\cap \mathrm{Id}_F(A)))$, temos $\gamma_{ij}=0$, para todos i,j. Logo $\beta_1=\cdots=\beta_m=0$, como queríamos.

Assim, $c_n^F(A)=c_n^K(\bar{A})$. □

Nesta direção, encerramos essa seção com o próximo lema que nos mostra, dado um corpo infinito F, uma extensão K de F e uma K-álgebra A, como se comportam as sequências de codimensões de A sobre F e sobre K.

Lema 2.3.16. *Sejam F um corpo infinito, K uma extensão de F e A uma álgebra sobre K. Então, para todo $n\geq 1$, temos $c_n^K(A)\leq c_n^F(A)$.*

Demonstração. Considerando os espaços $P_n^F, P_n^K, P_n^F(A)$ e $P_n^K(A)$ definidos de forma similar ao descrito no teorema anterior e supondo que $m=c_n^F(A)$ e $\{f_1,\ldots,f_m\}$ é uma base de $P_n^F(\mathrm{mod}(P_n^F\cap \mathrm{Id}_F(A)))$, temos de maneira análoga ao que foi feito na primeira parte da demonstração do teorema acima que $\{f_1,\ldots,f_m\}$ geram $P_n^K(\mathrm{mod}(P_n^K\cap \mathrm{Id}_K(A)))$ e assim $c_n^K(A)\leq c_n^F(A)$. Note que neste caso obtemos diretamente da definição que se $h\in P_n^F\cap \mathrm{Id}_F(A)$ então $h\in P_n^K\cap \mathrm{Id}_K(A)$. □

Capítulo 3

Superálgebras

Neste capítulo daremos a definição de superálgebras e ilustraremos com vários exemplos. Além disso, exibiremos alguns exemplos interessantes de isomorfismos entre superálgebras. Ao considerarmos superálgebras simples de dimensão finita, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, apresentaremos sua classificação, e mostraremos alguns resultados úteis e importantes que envolvem essas superálgebras. Ademais, definiremos envolvente de Grassmann, e veremos a relação das superálgebras simples com as álgebras verbalmente primas.

3.1 Definições básicas

Vamos apresentar nesta seção a definição de superálgebra, bem como exemplos que ilustram esse conceito. Em especial, veremos três tipos de superálgebras essenciais na teoria de PI-álgebras. Consideremos F um corpo de característica zero.

Definição 3.1.1. Seja A uma álgebra sobre um corpo F. Dizemos que A é uma **superálgebra** se existem dois subespaços vetoriais $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ tais que:

(i) $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ (soma direta como espaço vetorial);

(ii) $A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)}$ e $A^{(0)}A^{(1)} + A^{(1)}A^{(0)} \subseteq A^{(1)}$.

Se A é uma superálgebra, pode-se dizer que A é uma álgebra **$\mathbb{Z}_2$-graduada** e denotamos sua graduação por $(A^{(0)}, A^{(1)})$. Os subespaços $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ são as **componentes homogêneas** de A e chamamos $A^{(0)}$ de **componente par** e $A^{(1)}$ de **componente ímpar**. Se $a \in A$, então escrevemos $a = a^{(0)} + a^{(1)}$, onde $a^{(0)} \in A^{(0)}$ e $a^{(1)} \in A^{(1)}$. Neste sentido, nos referimos aos elementos de $A^{(0)}$ como **elementos pares** e os de $A^{(1)}$ como **elementos ímpares**. Podemos também dizer que os elementos de $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ são **elementos homogêneos de grau zero** e **um**, respectivamente. Denotaremos o grau de um elemento homogêneo $a \in A$ por $|a|$ e assim $|a^{(0)}| = 0$ e $|a^{(1)}| = 1$.

Definição 3.1.2. Sejam A uma superálgebra e B uma subálgebra de A. Se $(A^{(0)} \cap B, A^{(1)} \cap B)$ for uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para B, então dizemos que B tem **$\mathbb{Z}_2$-graduação induzida** de A. Da mesma forma, dizemos que um ideal bilateral I de A tem **$\mathbb{Z}_2$-graduação induzida** de A, se $(A^{(0)} \cap I, A^{(1)} \cap I)$ for uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para I. Nestes casos, também dizemos que B e I são **graduados**, **homogêneos** ou **$\mathbb{Z}_2$-estáveis**.

Exemplo 3.1.3. Toda álgebra A sobre um corpo F pode ser considerada uma superálgebra, uma vez que a A admite a **graduação trivial**, onde $A^{(0)} = A$ e $A^{(1)} = \{0\}$. Destacamos a álgebra de matrizes $M_n(F)$ que, quando considerada com a graduação trivial, será simplesmente denotada por $M_n(F)$.

Exemplo 3.1.4. Sejam $k \geq l > 0$ números inteiros. Definimos

$$M_{k,l}(F) := \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \mid P \in M_k(F), S \in M_l(F), Q \in M_{k\times l}(F), R \in M_{l\times k}(F) \right\}$$

a superálgebra das matrizes $(k+l) \times (k+l)$ sobre F com graduação

$$(M_{k,l}(F))^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad (M_{k,l}(F))^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exemplo 3.1.5. A álgebra $M_n(F \oplus cF)$, em que $c^2 = 1$, é uma superálgebra com a graduação $(M_n(F), cM_n(F))$.

Exemplo 3.1.6. A álgebra $B = \begin{pmatrix} M_n(F) & 0 \\ 0 & M_n(F) \end{pmatrix}$, vista no Exemplo 1.2.11, é uma superálgebra com a seguinte $\mathbb{Z}_2$-graduação

$$\left(\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \right),$$

onde $C, D \in M_n(F)$.

Exemplo 3.1.7. A álgebra $UT_2(F)$ é uma superálgebra com a seguinte $\mathbb{Z}_2$-graduação

$$\left(\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Essa graduação é denominada **graduação canônica de** $UT_2(F)$. Note que $UT_2(F)$ com esta $\mathbb{Z}_2$-graduação é uma subálgebra homogênea de $M_{1,1}(F)$.

Exemplo 3.1.8. A álgebra de Grassmann G com os subespaços $G^{(0)}$ e $G^{(1)}$, que vimos no Exemplo 2.1.8, é uma superálgebra com a graduação $(G^{(0)}, G^{(1)})$, denominada **graduação canônica de** G.

Exemplo 3.1.9. Se A_1 e A_2 são superálgebras, então $A_1 \otimes A_2$ é uma superálgebra com a graduação $((A_1^{(0)} \otimes A_2^{(0)}) \oplus (A_1^{(1)} \otimes A_2^{(1)}), (A_1^{(0)} \otimes A_2^{(1)}) \oplus (A_1^{(1)} \otimes A_2^{(0)}))$.

Exemplo 3.1.10. Se $A_1, \ldots, A_r$ são superálgebras, então a soma direta (como espaço vetorial) $A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$ é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada com a seguinte graduação $((A_1^{(0)} \oplus \cdots \oplus A_r^{(0)}), (A_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus A_r^{(1)}))$.

As superálgebras $M_n(F)$, $M_{k,l}(F)$ e $M_n(F \oplus cF)$ vistas nos Exemplos 3.1.3, 3.1.4 e 3.1.5, respectivamente, serão essenciais nessa dissertação. Iremos ver, na próxima seção, que tais superálgebras desempenham um papel fundamental quando tratamos de superálgebras simples.

Proposição 3.1.11. *Se A é uma superálgebra então existe um automorfismo ϕ de A de ordem no máximo 2 induzido pela $\mathbb{Z}_2$-graduação de A. Reciprocamente, se existe um automorfismo ϕ de A de ordem no máximo 2, então A é uma superálgebra com a graduação induzida por ϕ.*

Demonstração. Se $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ é uma superálgebra, então basta definirmos ϕ nos elementos $a = a^{(0)} + a^{(1)} \in A$ como $\phi(a^{(0)} + a^{(1)}) = a^{(0)} - a^{(1)}$. Reciprocamente, se existe um automorfismo ϕ de A de ordem no máximo 2, então A é uma superálgebra considerando os seguintes subespaços: $A^{(0)} = \{a \in A \mid \phi(a) = a\}$ e $A^{(1)} = \{a \in A \mid \phi(a) = -a\}$. □

Exemplo 3.1.12. De acordo com a proposição acima, para as superálgebras $M_n(F)$, $M_{k,l}(F)$ e $M_n(F \oplus cF)$, o automorfismo ϕ é definido da seguinte forma:

(i) $\phi(A) = A$, para todo elemento A pertencente à superálgebra $M_n(F)$;

(ii) $\phi \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & -Q \\ -R & S \end{pmatrix}$, para todo elemento da superálgebra $M_{k,l}(F)$;

(iii) $\phi(A + cB) = A - cB$, para $A + cB \in M_n(F \oplus cF)$.

Definição 3.1.13. Seja A uma superálgebra e ϕ o automorfismo induzido pela graduação de A. Dizemos que um ideal bilateral I é **ϕ-invariante** se $\phi(I) = I$.

O lema seguinte estabelece condições necessárias e suficientes para um subespaço de uma dada superálgebra ser graduado.

Lema 3.1.14. *Seja A uma superálgebra. Um subespaço $V \subseteq A$ possui graduação induzida de A se, e somente se, $\phi(V) = V$, onde ϕ é o automorfismo induzido pela graduação de A.*

Demonstração. Seja $v = v_0 + v_1 \in V$, onde $v_0 \in A^{(0)} \cap V$ e $v_1 \in A^{(1)} \cap V$. Como $\phi(v) = \phi(v_0 + v_1) = v_0 - v_1$ e V é subespaço vetorial de A, temos $\phi(V) \subseteq V$. Agora, uma vez que ϕ tem ordem no máximo 2, segue de $\phi(V) \subseteq V$ que $V \subseteq \phi(V)$, e assim $\phi(V) = V$. Por outro lado, suponha que $\phi(V) = V$. Seja $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}_1 \in V$, onde $\bar{v}_0 \in A^{(0)}$ e $\bar{v}_1 \in A^{(1)}$. Como $\phi(\bar{v}) = \bar{v}_0 - \bar{v}_1 \in V$ e V é subespaço vetorial de A, obtemos que $\bar{v}_0, \bar{v}_1 \in V$. Logo, $V = (A^{(0)} \cap V) \oplus (A^{(1)} \cap V)$, como queríamos. □

Para A uma superálgebra de dimensão finita, temos que seu radical de Jacobson possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de A. Vejamos esse resultado a seguir.

Lema 3.1.15. *Se A é uma superálgebra de dimensão finita, então o radical de Jacobson $J(A)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduado com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida de A.*

Demonstração. Pelo lema anterior é suficiente mostrarmos que $\phi(J(A)) = J(A)$, onde ϕ é o automorfismo induzido pela graduação de A. Como A é de dimensão finita, pela Proposição 1.3.2, $J(A)$ é o maior ideal nilpotente de A, e seja m seu índice de nilpotência. Dado $a \in J(A)$, temos $a^m = 0$. Portanto, $\phi(a)^m = \phi(a^m) = \phi(0) = 0$, e assim $\phi(J(A)) \subseteq J(A)$. Já que ϕ tem ordem no máximo 2, segue de $\phi(J(A)) \subseteq J(A)$ que $J(A) \subseteq \phi(J(A))$, e portanto $\phi(J(A)) = J(A)$. □

Definição 3.1.16. Sejam A e B superálgebras sobre um corpo F e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras. Dizemos que φ é um **homomorfismo de superálgebras** se $\varphi(A^{(0)}) \subseteq B^{(0)}$ e $\varphi(A^{(1)}) \subseteq B^{(1)}$. Além disso, dizemos que $\varphi : A \to B$ é um **isomorfismo de superálgebras** se φ é um isomorfismo de álgebras, $\varphi(A^{(0)}) = B^{(0)}$ e $\varphi(A^{(1)}) = B^{(1)}$. Se A e B são isomorfas como superálgebras então denotamos $A \cong B$. Caso contrário, $A \ncong B$.

A seguir, ilustraremos alguns casos quando se tem ou não isomorfismos entre superálgebras. Antes, lembramos que $M_{k\times l}(F)$ é o **espaço vetorial das matrizes de ordem** $k \times l$ sobre F.

Exemplo 3.1.17. As superálgebras $M_n(F \oplus cF)$ e B, vistas nos Exemplos 3.1.5 e 3.1.6, respectivamente, são isomorfas. Com efeito, lembrando que $M_n(F \oplus cF) = \left(\frac{1+c}{2} M_n(F)\right) \oplus \left(\frac{1-c}{2} M_n(F)\right)$, basta definir a seguinte função nos elementos homogêneos de $M_n(F \oplus cF)$:

$$C = \left(\frac{1+c}{2}C\right) \oplus \left(\frac{1-c}{2}C\right) \mapsto \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \left(\frac{1+c}{2}D\right) \oplus \left(\frac{1-c}{2}(-D)\right) \mapsto \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.1.18. As superálgebras $M_n(F)$, $M_{k,l}(F)$ e $M_m(F \oplus cF)$ não são isomorfas como superálgebras. De fato, claramente temos $M_n(F) \ncong M_{k,l}(F)$. Agora, se tivéssemos $M_{k,l}(F) \cong M_m(F \oplus cF)$, teríamos $(k + l)^2 = 2m^2$, o que é um absurdo. Logo $M_{k,l}(F) \ncong M_m(F \oplus cF)$. Analogamente, temos $M_n(F) \ncong M_m(F \oplus cF)$.

Exemplo 3.1.19. Se A_1 e A_2 denotam a álgebra $UT_2(F)$ com as graduações trivial e canônica, respectivamente, então A_1 e A_2 não são isomorfas como superálgebras.

Exemplo 3.1.20. Considere

$$UT(2,1) = \begin{pmatrix} M_2(F) & M_{2\times 1}(F) \\ 0 & F \end{pmatrix},$$

munida das seguintes $\mathbb{Z}_2$-graduações:

$$A_1 = \left(\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e & 0 \\ f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{e} \quad A_2 = \left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e & g \\ f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

onde a, b, c, d, e, f, g são elementos de F. Pode-se verificar facilmente que $UT(2,1)$ é uma superálgebra com essas graduações.

Definimos uma aplicação $\varphi : A_1 \to A_2$ como segue

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e & 0 \\ f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f & g \\ e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com isso, realizando cálculos elementares, é fácil ver que φ é um isomorfismo de superálgebras e assim A_1 e A_2 são isomorfas como superálgebras.

Exemplo 3.1.21. Seja

$$A = UT(k+l, m) = \begin{pmatrix} M_{k+l}(F) & M_{(k+l)\times m}(F) \\ 0 & M_m(F) \end{pmatrix},$$

com $k \geq l$, munida das seguintes $\mathbb{Z}_2$-graduações:

$$A_1 = \left(\begin{pmatrix} M_k(F) & 0 & M_{k\times m}(F) \\ 0 & M_l(F) & 0 \\ 0 & 0 & M_m(F) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & M_{k\times l}(F) & 0 \\ M_{l\times k}(F) & 0 & M_{l\times m}(F) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

e

$$A_2 = \left(\begin{pmatrix} M_k(F) & 0 & 0 \\ 0 & M_l(F) & M_{l\times m}(F) \\ 0 & 0 & M_m(F) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & M_{k\times l}(F) & M_{k\times m}(F) \\ M_{l\times k}(F) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

É fácil verificar que A_1 e A_2 são superálgebras. Se $k = l$, então A_1 e A_2 são isomorfas como superálgebras. Para ver esse fato, basta definir uma função φ de maneira análoga à que foi definida no Exemplo 3.1.20. Entretanto, se $k > l$, então A_1 não é isomorfa a A_2 como superálgebra, já que $\dim_F A_1^{(0)} > \dim_F A_2^{(0)}$.

3.2 Superálgebras simples

As superálgebras simples são fundamentais no estudo de superálgebras e na PI-teoria em geral. Nesta seção, veremos a classificação das superálgebras simples de dimensão finita, ao considerarmos um corpo algebricamente fechado de característica zero, e algumas consequências dessa classe de superálgebras.

Definição 3.2.1. Seja A uma superálgebra. Dizemos que A é uma **superálgebra simples** se $A^2 \neq 0$ e A não possui ideais bilaterais graduados não triviais, ou seja, A não possui ideais próprios ϕ-invariantes não triviais, onde ϕ é o automorfismo induzido pela graduação de A.

Exemplo 3.2.2. Note que, com essa definição, temos que toda superálgebra que é simples como álgebra (isto é, não possui ideais bilaterais não triviais) é também simples como superálgebra. Em particular, $M_n(F)$ e $M_{k,l}(F)$, $k \geq l > 0$, são superálgebras simples, uma vez que são álgebras simples.

Exemplo 3.2.3. A superálgebra $M_n(F \oplus cF)$, $c^2 = 1$, que vimos no Exemplo 3.1.5, não é uma álgebra simples pois ela se decompõe como soma direta de álgebras simples da seguinte forma:

$$M_n(F \oplus cF) = \left(\frac{1+c}{2}M_n(F)\right) \oplus \left(\frac{1-c}{2}M_n(F)\right).$$

Pode-se verificar que os únicos ideais bilaterais não triviais dessa superálgebra são $\frac{1+c}{2}M_n(F)$ e $\frac{1-c}{2}M_n(F)$. Esses ideais não são ϕ-invariantes, pois, de acordo com o Exemplo 3.1.12, $\phi(\frac{1+c}{2}M_n(F)) = \frac{1-c}{2}M_n(F)$ e $\phi(\frac{1-c}{2}M_n(F)) = \frac{1+c}{2}M_n(F)$. Assim, $M_n(F \oplus cF)$ é uma superálgebra simples.

Vemos assim que se $k \geq l > 0$ então $M_n(F)$, $M_{k,l}(F)$ e $M_n(F \oplus cF)$ são superálgebras simples não isomorfas. É interessante que tais superálgebras simples são as únicas, a menos de isomorfismo, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Nessa linha, temos o Teorema de Classificação para superálgebras simples de dimensão finita que será muito importante ao longo deste trabalho.

Teorema 3.2.4 ([20], Teorema 3.5.3)**.** *Seja A uma superálgebra simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero. Então A é isomorfa a uma das superálgebras: $M_n(F)$, $M_{k,l}(F), k \geq l > 0$ ou $M_n(F \oplus cF)$, com $c^2 = 1$.*

Observação 3.2.5. Vimos nos Exemplos 3.2.2 e 3.2.3 que as superálgebras $M_n(F)$ e $M_{k,l}(F)$ têm comportamento distinto (enquanto álgebras) quando comparadas com a superálgebra $M_n(F \oplus cF)$. Tendo em vista a importância destas superálgebras (dada pelo Teorema 3.2.4), neste trabalho, quando for conveniente, diremos simplesmente **superálgebras simples do tipo $\mathcal{A}$** ao nos referirmos às superálgebras $M_n(F)$ ou $M_{k,l}(F)$, com $k \geq l > 0$, e **superálgebras simples do tipo $\mathcal{B}$** ao lidarmos com a superálgebra $M_n(F \oplus cF)$.

A fim de generalizar o Teorema 1.3.7 para superálgebras, temos o próximo resultado.

Teorema 3.2.6 ([20], Teorema 3.5.4)**.** *Seja A uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero. Então existe uma superálgebra semissimples maximal $B \subseteq A$ tal que*

$$A = B + J(A).$$

Além disso, B é uma soma direta (como álgebra) de superálgebras simples.

Corolário 3.2.7. *Seja A uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero. Então $A = B + J(A)$, onde B é uma soma direta (como álgebra) de superálgebras simples, cada qual isomorfa ou a $M_n(F)$, ou a $M_{k,l}(F)$ com $k \geq l > 0$ ou a $M_n(F \oplus cF)$, com $c^2 = 1$.*

O próximo lema nos mostra que, se A é uma superálgebra simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero, então A possui importantes elementos homogêneos.

Lema 3.2.8. *Se $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ é uma superálgebra simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero, então existem idempotentes ortogonais $e_1, \ldots, e_n \in A^{(0)}$ tais que $e_1 + \cdots + e_n = 1$ e, para todo $i = 1, \ldots, n$, temos que Ae_i (e_iA) é um ideal à esquerda (respectivamente, à direita) graduado minimal de A.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.4, podemos assumir que A é uma das seguintes superálgebras: $M_n(F)$, $M_{k,l}(F)$ ou $M_n(F \oplus cF)$, com $n = k + l$. Usando a nomenclatura introduzida na Observação 3.2.5, temos que se A é do tipo $\mathcal{A}$, podemos tomar $e_1, \ldots, e_n$ como sendo as matrizes unitárias $E_{11}, \ldots, E_{nn}$, respectivamente. Se A é do tipo $\mathcal{B}$, também tomamos $e_1, \ldots, e_n$ como acima, uma vez que neste caso $E_{ii} \in (M_n(F \oplus cF))^{(0)} = M_n(F)$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim, temos $e_1, \ldots, e_n \in A^{(0)}$ idempotentes ortogonais, ou seja, $e_i^2 = e_i$, e $e_ie_j = \delta_{ij}e_i$, para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Além disso, é claro que $e_1 + \cdots + e_n = 1$.

Agora, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, temos Ae_j um ideal à esquerda graduado minimal de A. Com efeito, considere $j \in \{1, \ldots, n\}$ fixo, porém arbitrário, e analisemos os seguintes casos:

(1) Para $A = M_n(F)$ ou $M_{k,l}(F)$, temos

$$Ae_j = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nj} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mid a_{1j}, \ldots, a_{nj} \in F \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_{ij} \mid a_{1j}, \ldots, a_{nj} \in F \right\}.$$

É fácil ver que Ae_j é ideal à esquerda de A. Além disso, dado $a \in A$, escrevemos $a = a_0 + a_1$, onde $a_0 \in A^{(0)}, a_1 \in A^{(1)}$. Disso, $ae_j = (a_0 + a_1)e_j = a_0 e_j + a_1 e_j \in A^{(0)}e_j + A^{(1)}e_j$. Como $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ e $e_j \in A^{(0)}$, segue que $Ae_j = A^{(0)}e_j \oplus A^{(1)}e_j$. Portanto, Ae_j é um ideal à esquerda graduado de A.

A fim de mostrarmos que Ae_j é minimal, considere I um ideal à esquerda graduado de A, tal que $0 \neq I \subseteq Ae_j$. Então, existe $0 \neq X \in I$ tal que $X = \sum_{t=1}^{n} x_{tj} E_{tj}$, e $x_{mj} \neq 0$, para algum m. Fixado $1 \leq k \leq n$, tome $E_{km} \in A$. Daí, $E_{km}X = E_{km}(x_{1j}E_{1j} + x_{2j}E_{2j} + \cdots + x_{nj}E_{nj}) = x_{mj}E_{kj}$, logo $E_{kj} = E_{km}(x_{mj}^{-1}X) \in I$, para todo $k = 1, \ldots, n$. Consequentemente, $I = Ae_j$, donde Ae_j é um ideal à esquerda graduado minimal de A.

(2) No caso $A = M_n(F \oplus cF)$, obtemos

$$\begin{aligned} Ae_j &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j} + cb_{1j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2j} + cb_{2j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nj} + cb_{nj} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mid a_{ij}, b_{ij} \in F, i \in \{1, \ldots, n\} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} + cb_{ij}) E_{ij} \mid a_{ij}, b_{ij} \in F, i \in \{1, \ldots, n\} \right\}. \end{aligned}$$

Novamente, de maneira análoga ao caso (1), temos que Ae_j é um ideal à esquerda graduado de A. A fim de mostrar que Ae_j é minimal, seja I um ideal à esquerda graduado de A, tal que $0 \neq I \subseteq Ae_j$. Logo, existe $0 \neq X \in I$ tal que $X = (A' + cB')e_j$, onde $A', B' \in M_n(F)$ e $A' \neq 0$ ou $B' \neq 0$. Como I é um ideal graduado de A, segue que $Y := (A' - cB')e_j \in I$ e assim $X + Y = 2A'e_j \in I$ e $c(X - Y) = 2B'e_j \in I$. Já que $A' \neq 0$ ou $B' \neq 0$, procedendo como no caso (1) obtemos que $E_{kj} \in I$ (e consequentemente também $cE_{kj} \in I$), para todo $k = 1, \ldots, n$, e assim $I = Ae_j$. Logo Ae_j é um ideal à esquerda graduado minimal de A.

Para provar que e_jA é um ideal à direita graduado minimal de A, usamos argumentos análogos aos acima. Note que,

- se $A = M_n(F)$ ou $M_{k,l}(F)$, então

$$e_jA = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mid a_{j1}, \ldots, a_{jn} \in F \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ji}E_{ji} \mid a_{j1}, \ldots, a_{jn} \in F \right\}.$$

- se $A = M_n(F \oplus cF)$, então

$$\begin{aligned} e_jA &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1}+cb_{j1} & a_{j2}+cb_{j2} & \cdots & a_{jn}+cb_{jn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mid a_{ji}, b_{ji} \in F, i \in \{1, \ldots, n\} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} (a_{ji} + cb_{ji})E_{ji} \mid a_{ji}, b_{ji} \in F, i \in \{1, \ldots, n\} \right\}. \end{aligned}$$

□

Os idempotentes do Lema 3.2.8 serão usados fortemente ao longo deste e dos próximos capítulos. Esses idempotentes são ditos **idempotentes graduados minimais** da superálgebra simples A.

Lema 3.2.9. *Sejam $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ e $\widetilde{A} = \widetilde{A}^{(0)} \oplus \widetilde{A}^{(1)}$ superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Considere $e, \widetilde{e}$ dois idempotentes graduados minimais de A e $\widetilde{A}$, respectivamente. Então $(Ae) \otimes (\widetilde{e}\widetilde{A})$ é um $(A, \widetilde{A})$-bimódulo graduado irredutível.*

Demonstração. É claro que $(Ae) \otimes (\widetilde{e}\widetilde{A})$ é um $(A, \widetilde{A})$-bimódulo graduado com a seguinte graduação

$$((A^{(0)}e) \otimes (\widetilde{e}\widetilde{A}^{(0)}) \oplus (A^{(1)}e) \otimes (\widetilde{e}\widetilde{A}^{(1)}), (A^{(1)}e) \otimes (\widetilde{e}\widetilde{A}^{(0)}) \oplus (A^{(0)}e) \otimes (\widetilde{e}\widetilde{A}^{(1)})).$$

Mostremos agora que $Ae \otimes \widetilde{e}\widetilde{A}$ é um $(A, \widetilde{A})$-bimódulo graduado irredutível. Note primeiramente que, como A e $\widetilde{A}$ são superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, pelo Teorema 3.2.4 podemos assumir que A e $\widetilde{A}$ são superálgebras simples do tipo $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ com ordem $n \times n$ e $\widetilde{n} \times \widetilde{n}$, respectivamente. Além disso, desde que $e, \widetilde{e}$ são idempotentes graduados minimais de A e $\widetilde{A}$, então existem $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq \widetilde{n}$ tais que $e = E_{ii}$ e $\widetilde{e} = E_{jj}$. Sejam $0 \neq M \subseteq (Ae) \otimes (\widetilde{e}\widetilde{A})$ um $(A, \widetilde{A})$-bimódulo graduado não nulo. Então existe $0 \neq m \in M$ e consideremos os seguintes casos.

(1) **A e $\widetilde{A}$ são ambas do tipo $\mathcal{A}$.** Como $\{E_{ri} \otimes E_{js}\}_{r,s}$ é uma base para $(Ae) \otimes (\widetilde{e}\widetilde{A})$, podemos escrever $m = \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 1 \leq s \leq \widetilde{n}}} m_{r,s} E_{ri} \otimes E_{js}$, onde $m_{r,s} \in F$ e $m_{\alpha,\beta} \neq 0$ para alguns α, β. Então

$$E_{\gamma\alpha} m E_{\beta\theta} = E_{\gamma\alpha} \left(\sum_{r,s} m_{r,s} E_{ri} \otimes E_{js} \right) E_{\beta\theta} = m_{\alpha,\beta} E_{\gamma i} \otimes E_{j\theta},$$

para todos $1 \leq \gamma \leq n$, $1 \leq \theta \leq \widetilde{n}$. Daí, $E_{\gamma i} \otimes E_{j\theta} = (m_{\alpha,\beta}^{-1})(E_{\gamma\alpha} m E_{\beta\theta}) \in M$, para todos γ, θ e assim $M = Ae \otimes \widetilde{e}\widetilde{A}$, ou seja, $Ae \otimes \widetilde{e}\widetilde{A}$ é um $(A, \widetilde{A})$-bimódulo graduado irredutível.

(2) **A é do tipo $\mathcal{A}$ e $\widetilde{A}$ é do tipo $\mathcal{B}$.** Pelo Exemplo 3.2.3, temos que uma base para $(Ae) \otimes (\widetilde{e}\widetilde{A})$ é dada por $\{E_{ri} \otimes \frac{1+c}{2} E_{js}, E_{ri} \otimes \frac{1-c}{2} E_{js}\}_{r,s}$ e assim podemos escrever

$$m = \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 1 \leq s \leq \widetilde{n}}} \lambda_{r,s} E_{ri} \otimes \frac{1+c}{2} E_{js} + \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 1 \leq s \leq \widetilde{n}}} \lambda'_{r,s} E_{ri} \otimes \frac{1-c}{2} E_{js},$$

onde $\lambda_{r,s}, \lambda'_{r,s} \in F$, $\lambda_{\alpha,\beta} \neq 0$ ou $\lambda'_{\alpha,\beta} \neq 0$, para alguns α, β. Se $\lambda_{\alpha,\beta} \neq 0$ note que, como

$$\begin{aligned} E_{\gamma\alpha} m \left(\frac{1+c}{2} E_{\beta\theta} \right) &= E_{\gamma\alpha} \left(\sum_{r,s} \lambda_{r,s} E_{ri} \otimes \frac{1+c}{2} E_{js} + \sum_{r,s} \lambda'_{r,s} E_{ri} \otimes \frac{1-c}{2} E_{js} \right) \frac{1+c}{2} E_{\beta\theta} \\ &= \lambda_{\alpha,\beta} E_{\gamma i} \otimes \frac{1+c}{2} E_{j\theta}, \end{aligned}$$

para todos γ, θ, então $E_{\gamma i} \otimes \frac{1+c}{2} E_{j\theta} = \lambda_{\alpha,\beta}^{-1} E_{\gamma\alpha} m \left(\frac{1+c}{2} E_{\beta\theta} \right) \in M$, para todos γ, θ. Como M é graduado, obtemos também que $E_{\gamma i} \otimes \frac{1-c}{2} E_{j\theta} \in M$, para todos γ, θ. Logo $M = (Ae) \otimes (\widetilde{e}\widetilde{A})$ se $\lambda_{\alpha,\beta} \neq 0$. De maneira similar obtemos $M = (Ae) \otimes (\widetilde{e}\widetilde{A})$ se $\lambda'_{\alpha,\beta} \neq 0$. Portanto, $(Ae) \otimes (\widetilde{e}\widetilde{A})$ é um $(A, \widetilde{A})$-bimódulo graduado irredutível.

Analogamente, se A é do tipo $\mathcal{B}$ e $\widetilde{A}$ é do tipo $\mathcal{A}$, temos o resultado.

(3) **A e $\widetilde{A}$ são ambas do tipo $\mathcal{B}$.** Observe que uma base para $(Ae) \otimes (\widetilde{e}\widetilde{A})$ é dada por $\{\frac{1+c}{2} E_{ri} \otimes \frac{1+\widetilde{c}}{2} E_{js}, \frac{1+c}{2} E_{ri} \otimes \frac{1-\widetilde{c}}{2} E_{js}, \frac{1-c}{2} E_{ri} \otimes \frac{1+\widetilde{c}}{2} E_{js}, \frac{1-c}{2} E_{ri} \otimes \frac{1-\widetilde{c}}{2} E_{js}\}_{r,s}$, com $c^2 = \widetilde{c}^2 = 1$. Procedendo de maneira similar ao caso anterior obtemos o resultado. $\square$

Observação 3.2.10. Seja A uma superálgebra simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Se e é um idempotente graduado minimal de A, então

$$eAe = \begin{cases} \mathrm{span}_F\{e\}, & \text{se } A = M_n(F) \text{ ou } M_{k,l}(F) \\ \mathrm{span}_F\{e, ce\}, & \text{se } A = M_n(F \oplus cF). \end{cases}$$

Com efeito, como e é um idempotente graduado minimal de A, existe j tal que $e = E_{jj}$. Seja $A = M_n(F)$ ou $M_{k,l}(F)$, é claro que $\mathrm{span}_F\{e\} \subseteq eAe$. A fim de mostrar a inclusão contrária, tome $X = \sum_{r,s} a_{rs}E_{rs} \in A$. Então,

$$eXe = E_{jj}\left(\sum_{r,s} a_{rs}E_{rs}\right)E_{jj} = a_{jj}E_{jj} = a_{jj}e \in \mathrm{span}_F\{e\}.$$

Logo $eAe = \mathrm{span}_F\{e\}$, se $A = M_n(F)$ ou $M_{k,l}(F)$.

Se $A = M_n(F \oplus cF)$, então $e = eee \in eAe$ e $ce = e(ce)e \in eAe$ e assim $\mathrm{span}_F\{e, ce\} \subseteq eAe$. Agora, para $Y = \sum_{r,s}(a_{rs} + cb_{rs})E_{rs} \in A$, temos

$$eYe = E_{jj}\left(\sum_{r,s}(a_{rs} + cb_{rs})E_{rs}\right)E_{jj} = (a_{jj} + cb_{jj})E_{jj} = (a_{jj} + cb_{jj})e \in \mathrm{span}_F\{e, ce\},$$

e assim $eAe = \mathrm{span}_F\{e, ce\}$ neste caso.

3.3 Envolvente de Grassmann e álgebras verbalmente primas

Nesta seção definiremos a envolvente de Grassmann de uma dada superálgebra. Tal definição leva em conta a graduação canônica da álgebra de Grassmann. Começamos com a definição de T-ideais verbalmente primos e variedades primas, e mais adiante daremos um resultado que classifica todas as variedades primas sobre um corpo de característica zero.

Definição 3.3.1. Um **T-ideal** I é **verbalmente primo** se, para quaisquer T-ideais I_1, I_2 tais que $I_1I_2 \subseteq I$, é válido que $I_1 \subseteq I$ ou $I_2 \subseteq I$.

É claro que se um T-ideal I é verbalmente primo então, para quaisquer dois polinômios f e g em variáveis distintas com $fg \in I$, é válido que ou $f \in I$ ou $g \in I$.

Uma **variedade** $\mathcal{V}$ é dita **prima** se o correspondente T-ideal é verbalmente primo. Uma **álgebra** A é dita **verbalmente prima** se gera uma variedade prima.

Exemplo 3.3.2 ([24], Lema 9)**.** As álgebras $M_n(F)$, $M_n(G)$ e

$$M_{k,l}(G) := \begin{pmatrix} M_{k\times k}(G^{(0)}) & M_{k\times l}(G^{(1)}) \\ M_{l\times k}(G^{(1)}) & M_{l\times l}(G^{(0)}) \end{pmatrix}$$

são álgebras verbalmente primas, onde $G = G^{(0)} \oplus G^{(1)}$ é a graduação canônica da álgebra de Grassmann vista no Exemplo 3.1.8.

Definição 3.3.3. Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra e $G = G^{(0)} \oplus G^{(1)}$ a graduação canônica da álgebra de Grassmann. A superálgebra

$$G(A) := (A^{(0)} \otimes G^{(0)}) \oplus (A^{(1)} \otimes G^{(1)})$$

é chamada de **envolvente de Grassmann de** A.

O conceito de envolvente de Grassmann será extremamente útil quando lidarmos com envolventes supercomutativas e superálgebras minimais e ele está relacionado com o seguinte Teorema de Kemer.

Teorema 3.3.4 ([20], Corolário 4.8.4)**.** *Para qualquer variedade $\mathcal{V}$, não trivial, sobre um corpo de característica zero, existe uma superálgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ de dimensão finita tal que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$.*

Veremos a seguir exemplos do teorema acima para as variedades geradas por cada uma das álgebras verbalmente primas dadas no Exemplo 3.3.2.

Exemplo 3.3.5. $\mathrm{var}(M_n(F)) = \mathrm{var}(G(M_n(F)))$. De fato, como estamos considerando $M_n(F)$ com graduação trivial, segue que $G(M_n(F)) = M_n(F) \otimes G^{(0)}$. Lembrando que $G^{(0)}$ é uma álgebra comutativa, pelo Lema 2.3.13, obtemos

$$\mathrm{var}(G(M_n(F))) = \mathrm{var}(M_n(F) \otimes G^{(0)}) = \mathrm{var}(M_n(F)).$$

Exemplo 3.3.6. Para $k \geq l > 0$ temos $\mathrm{var}(M_{k,l}(G)) = \mathrm{var}(G(M_{k,l}(F)))$. Com efeito, $G(M_{k,l}(F)) = (M_{k,l}(F)^{(0)} \otimes G^{(0)}) \oplus (M_{k,l}(F)^{(1)} \otimes G^{(1)}) \cong M_{k,l}(G)$. Logo,

$$\mathrm{var}(G(M_{k,l}(F))) = \mathrm{var}(M_{k,l}(G)).$$

Exemplo 3.3.7. $\mathrm{var}(M_n(G)) = \mathrm{var}(G(M_n(F \oplus cF)))$, onde $c^2 = 1$. De fato, temos $G(M_n(F \oplus cF)) = (M_n(F) \otimes G^{(0)}) \oplus (cM_n(F)^{(1)} \otimes G^{(1)})$ e assim $\mathrm{Id}(M_n(G)) = \mathrm{Id}(G(M_n(F \oplus cF)))$. Portanto,

$$\mathrm{var}(G(M_n(F \oplus cF))) = \mathrm{var}(M_n(G)).$$

Observamos assim que as variedades geradas pelas álgebras verbalmente primas dadas no Exemplo 3.3.2 coincidem com as geradas pela envolvente de Grassmann de superálgebras simples de dimensão finita. Mais geralmente, Kemer em 1984 classificou todas as variedades primas que são geradas por uma PI-álgebra, sobre um corpo de característica zero. Vejamos esse teorema a seguir.

Teorema 3.3.8 ([20], Teorema 3.7.8)**.** *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade própria de álgebras sobre um corpo de característica zero. Então $\mathcal{V}$ é prima se, e somente se, $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$, onde A é uma superálgebra simples de dimensão finita.*

Finalizamos esta seção com um resultado que trata da envolvente de Grassmann de uma superálgebra A que admite uma decomposição em soma direta (como espaço vetorial) de superálgebras. Usaremos esse lema nos próximos capítulos.

Lema 3.3.9. *Seja A uma superálgebra. Se $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n = \bigoplus_{k=1,\ldots,n} A_k$ é uma decomposição de A em uma soma direta (como espaço vetorial) de superálgebras, então $G(A) = \bigoplus_{k=1,\ldots,m} G(A_k)$.*

Demonstração. Basta observar que $G(A) = (\bigoplus_{k=1,\ldots,n} A_k^{(0)} \otimes G^{(0)}) \oplus (\bigoplus_{k=1,\ldots,n} A_k^{(1)} \otimes G^{(1)}) = \bigoplus_{k=1,\ldots,n}((A_k^{(0)} \otimes G^{(0)}) \oplus (A_k^{(1)} \otimes G^{(1)})) = \bigoplus_{k=1,\ldots,n} G(A_k)$. $\square$

Capítulo 4

PI-expoente e superálgebras minimais

Com o intuito de analisar o comportamento assintótico das sequências de codimensões de uma álgebra A, trabalharemos neste capítulo com o PI-expoente. Além disso, definiremos superálgebras minimais, que é um dos principais conceitos deste trabalho, e veremos a importância dessas superálgebras, já que elas possuem interessantes consequências e resultados que serão utilizados nos próximos capítulos. Os principais resultados aqui apresentados podem ser encontrados nos Capítulos 6 e 8 de [20].

4.1 PI-expoente

Apresentaremos nesta seção a definição de PI-expoente e calcularemos o expoente de algumas álgebras, como por exemplo, da álgebra de matrizes bloco triangular superior. Na década de 1980, Amitsur conjecturou que o PI-expoente de uma PI-álgebra existia e era um inteiro não negativo. Em 1999, Giambruno e Zaicev provaram que tal fato é verdadeiro sobre um corpo de característica zero. Veremos este resultado mais adiante, donde será permitido calcular o PI-expoente de qualquer variedade não trivial. Aqui, assumimos que F é um corpo de característica zero.

Na Seção 2.3, do Capítulo 2, vimos a definição da n-ésima codimensão de uma F-álgebra A, a qual denotamos por $c_n(A)$. Agora, considere A uma PI-álgebra e seja $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ sua sequência de codimensões. O Exemplo 2.3.9 nos mostrou que, para uma PI-álgebra não nilpotente, temos $c_n(A) \neq 0$, para todo $n \geq 1$. Com isso, e de posse do Teorema das Codimensões de Regev (Teorema 2.3.11), obtemos que a n-codimensão de A é limitada inferiormente e superiormente, e assim faz sentido introduzirmos a seguinte definição.

Definição 4.1.1. Seja A uma PI-álgebra. Dizemos que

$$\underline{\exp}(A) = \lim \inf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

é o **expoente inferior de** A, e que

$$\overline{\exp}(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

é **expoente superior de** A. Quando esses limites coincidem, definimos o **expoente (ou PI-expoente)** de A como sendo

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

No caso em que temos $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$, definimos $\exp(\mathcal{V}) = \exp(A)$ e dizemos que $\exp(\mathcal{V})$ é o **expoente da variedade** $\mathcal{V}$.

Vale ressaltar que, quando houver ambiguidade sobre qual corpo estivermos trabalhando, usaremos a notação $\exp_F(A)$ para indicar o corpo sobre o qual estamos considerando a PI-álgebra A e calculando seu expoente.

Exemplo 4.1.2. Pelo Exemplo 2.3.10, sabemos que para a álgebra de matrizes triangular superior $UT_2(F)$ e a álgebra de Grassmann G, temos $c_n(UT_2(F)) = 2^{n-1}(n-2)+2$ e $c_n(G) = 2^{n-1}$, para todo $n \geq 1$. Logo, é fácil ver que

$$\exp(UT_2(F)) = \exp(G) = 2.$$

Sejam F um corpo algebricamente fechado de característica zero e A uma superálgebra de dimensão finita sobre F. Pelo Teorema 3.2.6, temos $A = A_{ss}+J$, onde J é o radical de Jacobson de A e A_{ss} é uma subálgebra semissimples maximal de A tal que $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$, com $A_1, \ldots, A_m$ superálgebras simples. Considere todos os produtos da forma

$$B_1 J B_2 J \cdots B_{r-1} J B_r \neq \{0\}, \tag{4.1}$$

onde $B_1, \ldots, B_r$ são subálgebras distintas do conjunto $\{A_1, \ldots, A_m\}$, e $r = 1, 2, \ldots$. Definimos

$$q = \max \dim_F(B_1 \oplus \cdots \oplus B_r) \tag{4.2}$$

como sendo a dimensão máxima entre todas as subálgebras $B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$ tais que $B_1, \ldots, B_r$ satisfazem a Condição (4.1).

Giambruno e Zaicev, em [18], mostraram que o número q definido acima está intimamente ligado com o expoente da envolvente de Grassmann da superálgebra A.

Proposição 4.1.3 ([18], Proposição 1 e Proposição 2)**.** *Seja A uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Seja $q \geq 0$ como definido* *em (4.2). Então existem constantes C_1, C_2, r_1, r_2, dependendo somente da dimensão de A, tais que $C_1 \neq 0$ e*

$$C_1 n^{r_1} q^n \leq c_n(G(A)) \leq C_2 n^{r_2} q^n.$$

Note que, pela desigualdade dada no teorema acima, ao calcularmos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(G(A))}$, obtemos $\exp(G(A)) = q$.

Além da conjectura feita por Amitsur, também nos anos 80, Regev conjecturou que, para qualquer PI-álgebra A, existem uma constante C, um semi-inteiro q e um inteiro $d \geq 0$ tais que

$$c_n(A) \simeq C n^q d^m,$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n(A)}{C n^q d^m} = 1$. O próximo resultado, que decorre quase diretamente do Teorema 4.1.3, é uma resposta às conjecturas de Amitsur e Regev.

Teorema 4.1.4. *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo F de característica zero. Então existem um inteiro $q \geq 0$ e constantes C_1, C_2, r_1, r_2 tais que $C_1 \neq 0$ e*

$$C_1 n^{r_1} q^n \leq c_n(A) \leq C_2 n^{r_2} q^n.$$

Como consequência, $\exp(A)$ *existe e é um inteiro não negativo.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.15, temos que a sequência de codimensões não se altera ao considerarmos uma extensão do corpo F, e assim podemos assumir que F é um corpo algebricamente fechado. Considere $\mathcal{V} = \operatorname{var}(A)$. Como A é uma PI-álgebra, segue que $\mathcal{V}$ é uma variedade não trivial, e portanto existe uma superálgebra B de dimensão finita tal que $\mathcal{V} = \operatorname{var}(A) = \operatorname{var}(G(B))$. Dessa forma $\operatorname{Id}(A) = \operatorname{Id}(G(B))$, o que implica $c_n(A) = c_n(G(B))$, para todo $n \geq 1$. Logo, pela Proposição 4.1.3, obtemos o resultado. □

Observação 4.1.5. Observe que o número q dado no teorema acima é proveniente da superálgebra B tal que $\operatorname{var}(A) = \operatorname{var}(G(B))$. Mais precisamente, para a superálgebra $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m + J(B)$, temos $q = \max \dim(B_{i1} \oplus \cdots \oplus B_{ir})$, onde $B_{i1}, \ldots, B_{ir}$ são subálgebras distintas do conjunto $\{B_1, \ldots, B_m\}$, que satisfazem a Condição (4.1) e assim $\exp(A) = \exp(G(B)) = q$.

Calcularemos em seguida o expoente de algumas álgebras, incluindo as verbalmente primas. Mas antes, faremos algumas considerações para casos particulares. Sejam F um corpo de característica zero e A uma álgebra de dimensão finita sobre F. Podemos considerar A como uma superálgebra munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial, onde $A^{(0)} = A$ e $A^{(1)} = \{0\}$. Neste caso, a envolvente de Grassmann de A é dada por

$$G(A) = (A^{(0)} \otimes G^{(0)}) \oplus (A^{(1)} \otimes G^{(1)}) = A \otimes G^{(0)}.$$

Como F é infinito e $G^{(0)}$ é uma álgebra comutativa, pelo Lema 2.3.13, segue que

$$\mathrm{Id}(A) = \mathrm{Id}(A \otimes G^{(0)}) = \mathrm{Id}(G(A)).$$

Logo, $\mathrm{var}(A) = \mathrm{var}(G(A))$ e assim $\exp(A) = \exp(G(A))$, donde podemos calcular o PI-expoente de A da seguinte forma: se $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$, com $A_1, \ldots, A_m$ superálgebras simples, então, como $\exp(A) = \exp(G(A))$, temos que $\exp(A)$ é a dimensão máxima das subálgebras semissimples $B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$ que satisfazem $B_1 J \cdots B_{r-1} J B_r \neq 0$, onde $B_1, \ldots, B_r$ são subálgebras distintas do conjunto $\{A_1, \ldots, A_m\}$, para $r = 1, 2, \ldots$. Dessa forma, vejamos o seguinte corolário que exibe o expoente da álgebra $UT_n(F)$ e da álgebra de matrizes bloco triangular superior $UT(d_1, \ldots, d_m)$.

Corolário 4.1.6. *Seja F um corpo algebricamente fechado de característica zero. Para álgebra de matrizes triangular superior $UT_n(F)$, temos $\exp(UT_n(F)) = n$ e, para a álgebra de matrizes bloco triangular superior $UT(d_1, \ldots, d_m)$, temos $\exp(UT(d_1, \ldots, d_m)) = d_1^2 + \cdots + d_m^2$.*

Demonstração. Vimos no Exemplo 1.3.8 a decomposição de $UT_n(F) = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n + J$, onde cada $A_i = \mathrm{span}_F\{E_{ii}\}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim, é válido que o produto

$$E_{11}E_{12}E_{23}E_{33}E_{34} \cdots E_{n-1,n-1}E_{n-1,n}E_{nn} \neq 0,$$

com $E_{ii} \in A_i$ e $E_{i-1,i} \in J$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto,

$$\exp(UT_n(F)) = \dim(A_1 \oplus \cdots \oplus A_n) = n.$$

Agora, a álgebra de matrizes bloco triangular superior $UT(d_1, \ldots, d_m)$ é dada por

$$UT(d_1, \ldots, d_m) = \begin{pmatrix} M_{d_1}(F) & M_{d_1 \times d_2}(F) & \cdots & M_{d_1 \times d_m}(F) \\ 0 & M_{d_2}(F) & \cdots & M_{d_2 \times d_m}(F) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{d_m}(F) \end{pmatrix}.$$

Além disso, para $A = UT(d_1, \ldots, d_m)$, temos $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$ (soma direta como álgebras), onde $A_i \cong M_{d_i}(F)$, e $J(A) = \bigoplus_{i<j} J_{ij}$ (soma direta de espaços vetoriais), em que $J_{ij} \cong M_{d_i \times d_j}(F)$. Não é difícil verificar que

$$A_1 J_{12} A_2 J_{23} A_3 \cdots A_{m-1} J_{m-1,m} A_m \neq 0.$$

Daí, concluímos que

$$\exp(UT(d_1,\dots,d_m)) = \dim(M_{d_1}(F)\oplus\cdots\oplus M_{d_m}(F)) = d_1^2+\cdots+d_m^2. \qquad \square$$

Observação 4.1.7. Note que, para um corpo de característica zero, se A é uma superálgebra semissimples de dimensão finita com graduação trivial, então seu radical de Jacobson $J(A) = \{0\}$ e assim $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$. Dessa forma, $\exp(A) = \max_{1\leq i\leq m}\{\dim_F A_i\}$.

Por fim, calculamos o expoente das álgebras verbalmente primas no próximo corolário. Lembramos que essas álgebras foram descritas na Seção 3.3.

Corolário 4.1.8. *Seja F um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então o PI-expoente da álgebras verbalmente primas são:*

(1) $\exp(M_n(F)) = n^2$;

(2) $\exp(M_{k,l}(G)) = (k+l)^2$;

(3) $\exp(M_n(G)) = 2n^2$.

Demonstração. Primeiramente, como $M_n(F)$ possui graduação trivial, temos $\exp(M_n(F)) = \dim_F(M_n(F)) = n^2$. Agora, recordando que $G(M_{k,l}(F)) \cong M_{k,l}(G)$ e $G(M_n(F\oplus cF)) \cong M_n(G)$, segue que $\exp(M_{k,l}(G)) = \dim_F(M_{k,l}(F)) = (k+l)^2$ e $\exp(M_n(G)) = \dim_F(M_n(F\oplus cF)) = 2n^2$. $\square$

4.2 Superálgebras minimais

Nesta seção trabalharemos com um conceito fundamental desta dissertação, o de superálgebras minimais. Daremos exemplos a fim de fixar as ideias e apresentaremos resultados importantes sobre as estruturas de tais superálgebras. Ao longo desta seção, F será um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Conforme foi visto no Teorema 3.2.4, temos que qualquer superálgebra simples de dimensão finita sobre F é isomorfa a uma das seguintes superálgebras:

(i) $M_n(F)$, com a graduação trivial;

(ii) $M_{k,l}(F)$, $k \geq l > 0$;

(iii) $M_n(F\oplus cF)$, com $c^2 = 1$.

Assim, ao lidarmos com esses tipos de superálgebras, temos meios mais práticos para se determinar alguns resultados.

Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra de dimensão finita. Como foi visto no Corolário 3.2.7, podemos escrever $A = A_{ss} + J(A)$, onde A_{ss} é uma subálgebra semissimples maximal de A, e $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$ (soma direta de álgebras), com $A_1,\dots,A_m$ superálgebras simples. Além disso, $J(A) = J = J^{(0)} \oplus J^{(1)}$ é o radical de Jacobson de A. Então, quando citarmos A, uma superálgebra de dimensão finita, lembremos dessas notações aqui fixadas.

Definição 4.2.1. Seja A uma superálgebra de dimensão finita. Então A é uma **superálgebra minimal** se A é uma superálgebra simples ou se $A = A_{ss} + J$, onde:

(i) $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$, com $A_1, \ldots, A_m$ superálgebras simples e $m \geq 2$;

(ii) existem elementos homogêneos $w_{12}, \ldots, w_{m-1,m} \in J^{(0)} \cup J^{(1)}$ e idempotentes graduados minimais $e_1 \in A_1, \ldots, e_m \in A_m$ tais que

$$e_i w_{i,i+1} = w_{i,i+1} e_{i+1} = w_{i,i+1}, \qquad i = 1, \ldots, m-1, \tag{4.3}$$

e

$$w_{12} w_{23} \cdots w_{m-1,m} \neq 0; \tag{4.4}$$

(iii) $w_{12}, \ldots, w_{m-1,m}$ geram J como ideal bilateral de A.

Lembramos que dizer que o conjunto $\mathcal{X} = \{w_{12}, \ldots, w_{m-1,m}\}$ gera J como ideal bilateral de A é o mesmo que dizer $J = \{\sum_i a_i x_i b_i \mid a_i, b_i \in A,\ x_i \in \mathcal{X}\}$.

Exemplo 4.2.2. As superálgebras simples de dimensão finita $M_n(F)$, $M_{k,l}(F)$ e $M_n(F \oplus cF)$, com $c^2 = 1$, são superálgebras minimais.

Exemplo 4.2.3. Seja $A = \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$ com a graduação trivial. Note que a decomposição de Wedderburn-Malcev da superálgebra A é dada por $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 + J(A)$, onde $A_i = \mathrm{span}_F\{E_{ii}\}$, para $i = 1, 2, 3$, e $J = \mathrm{span}_F\{E_{12}, E_{13}, E_{23}\}$. Se tomarmos $e_1 = E_{11}$, $e_2 = E_{22}$ e $e_3 = E_{33}$ e, além disso, escolhermos $w_{12} = E_{12}$, $w_{23} = E_{23}$, obtemos que $e_i w_{i,i+1} = w_{i,i+1} e_{i+1} = w_{i,i+1}$, para $i = 1, 2$. Temos também que J é gerado como ideal bilateral de A por $\{E_{12}, E_{23}\}$. Logo A é uma superálgebra minimal. Em geral, a álgebra $UT_n(F)$, das matrizes triangulares superiores com a graduação trivial, é uma superálgebra minimal.

Exemplo 4.2.4. Considere $A = \begin{pmatrix} M_2(F) & * & * \\ 0 & M_3(F) & * \\ 0 & 0 & M_3(F) \end{pmatrix}$ com a graduação trivial. Dessa forma A é uma superálgebra minimal. Para ver isso, basta tomar $e_1 = E_{11}, e_2 = E_{33}, e_3 = E_{66}, w_{12} = E_{13}, w_{23} = E_{36}$.

Exemplo 4.2.5. Seja $A = \begin{pmatrix} M_{1,1}(F) & M_{2\times 1}(F) \\ 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0 & F \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ F & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nesse caso, temos que A é uma superálgebra minimal. De fato, tome $e_1 = E_{11}$, $e_2 = E_{33}$ e $w_{12} = E_{13}$, e note que as condições da Definição 4.2.1 são satisfeitas.

Em geral é fácil ver que a álgebra $UT(k+l,m)$ munida com cada uma das $\mathbb{Z}_2$-graduações vistas no Exemplo 3.1.21 satisfaz as condições da Definição 4.2.1, e assim é uma superálgebra minimal.

Observe que a condição (ii) da Definição 4.2.1 implica em $e_1w_{12}e_2w_{23}\cdots e_{m-1}w_{m-1,m}e_m \neq 0$, com $e_i \in A_i$ e $w_{i,i+1} \in J$. Portanto, $A_1JA_2J\cdots JA_m \neq 0$, mas em geral não é verdade que $A_{i_1}JA_{i_2}J\cdots JA_{i_m} \neq 0$, para qualquer escolha de $i_1,\ldots,i_m$ (veja que já no Exemplo 4.2.3, temos $A_2JA_1JA_3 = 0$). Disso observamos que a ordem das componentes simples $A_1,\ldots,A_m$ é importante. Assim, no decorrer dessa seção e nos próximos capítulos concordamos que se A é uma superálgebra minimal tal que $A = A_1\oplus\cdots\oplus A_m + J$, então $A_1JA_2J\cdots JA_m \neq 0$.

Observação 4.2.6. Considere $A = A_{ss} + J(A) = A_1\oplus\cdots\oplus A_m + J(A)$ uma superálgebra minimal. Como $A_1JA_2J\cdots JA_m \neq 0$ e, relembrando que $\exp(G(A)) = q$, onde $q = \max \dim_F(B_1\oplus\cdots\oplus B_r)$, tais que $B_1,\ldots,B_r$ são subálgebras distintas contidas no conjunto $\{A_1,\ldots,A_m\}$ que satisfazem a condição $B_1JB_2J\cdots JB_r \neq 0$, concluímos que

$$\exp(G(A)) = \dim_F\{A_1\oplus\cdots\oplus A_m\} = \dim_F A_{ss}.$$

Lema 4.2.7. *Seja A uma superálgebra minimal tal que $A = A_{ss}+J$, com $A_{ss} = A_1\oplus\cdots\oplus A_m$, $A_1,\ldots,A_m$ superálgebras simples, e $w_{12},\ldots,w_{m-1,m} \in J$. Então $w_{i,i+1}w_{j,j+1} \neq 0$ ou $w_{i,i+1}A_j \neq 0$ se, e somente se, $j = i+1$. Além disso, $A_iA_j \neq 0$ ou $A_jw_{i,i+1} \neq 0$ se, e somente se, $j = i$.*

Demonstração. Observe primeiramente que, como $A_{ss} = A_1\oplus\cdots\oplus A_m$(soma direta como álgebras), temos $A_iA_j \neq 0$ se, e somente se, $i = j$. Dessa forma, lembrando das Condições (4.3) e (4.4) da Definição 4.2.1, considerando os idempotentes graduados minimais $e_{i+1} \in A_{i+1}$, $e_j \in A_j$, obtemos $w_{i,i+1}w_{j,j+1} = w_{i,i+1}e_{i+1}e_jw_{j,j+1} \neq 0$ se, e somente se, $j = i+1$. É válido também que $w_{i,i+1}A_j = w_{i,i+1}e_{i+1}A_j \neq 0$ se, e somente se, $j = i+1$. De maneira similar, $A_jw_{i,i+1} \neq 0$ se, e somente se, $j = i$. □

Queremos agora ver como são as estruturas de uma superálgebra minimal A. Consideremos $A = A_{ss} + J(A)$ uma superálgebra minimal, com $A_{ss} = A_1\oplus\cdots\oplus A_m$, onde $A_1,\ldots,A_m$ são superálgebras simples e, além disso, $w_{12},\ldots,w_{m-1,m}$ são os elementos geradores de $J(A)$, conforme a Definição 4.2.1. O seguinte lema nos fornece uma primeira estrutura para A.

Lema 4.2.8. *Seja A uma superálgebra minimal. Então A tem a seguinte decomposição em soma direta (como espaço vetorial) de superálgebras*

$$A = \bigoplus_{1\leq i\leq j\leq m} A_{ij},$$

onde $A_{11} := A_1, \ldots, A_{mm} := A_m$, *e, para todo* $i < j$,

$$A_{ij} := A_i w_{i,i+1} A_{i+1} \cdots A_{j-1} w_{j-1,j} A_j.$$

Além disso, $J = \oplus_{i<j} A_{ij}$ *e* $A_{ij}A_{kl} = \delta_{jk} A_{il}$, *onde* δ_{jk} *é o delta de Kronecker.*

Demonstração. Temos que $A = A_{11} \oplus \cdots \oplus A_{mm} + J$, onde $A_{ii} = A_i$ para todo $1 \leq i \leq m$ e J é gerado como ideal bilateral de A pelos elementos $w_{12}, \ldots, w_{m-1,m}$. Assim, cada elemento de A é uma combinação linear de elementos $b \in A_{ss} = A_{11} \oplus \cdots \oplus A_{mm}$ ou de produtos da forma

$$a_1 w_{i_1,i_1+1} a_2 w_{i_2,i_2+1} \cdots a_k w_{i_k,i_k+1} a_{k+1} \in J,$$

com $a_1, \ldots, a_k \in A_{ss}$ e $k \geq 1$. Pelo Lema 4.2.7, esse produto é não nulo somente quando $i_1 + 1 = i_2, \ldots, i_{k-1} + 1 = i_k$ e $a_1 \in A_{i_1}, \ldots, a_{k+1} \in A_{i_k+1}$, e assim tal produto pertence a A_{i_1,i_k+1}. Portanto, A é soma dos subespaços A_{ij}, com $1 \leq i \leq j \leq m$, e $J = \sum_{i<j} A_{ij}$. A fim de mostrar que a soma é direta, considere uma soma $\sum_{i \leq j} a_{ij} = 0$, com $a_{ij} \in A_{ij}$. Para $1 \leq k \leq l \leq m$ fixos, sejam 1_k e 1_l as unidades de A_k e A_l, respectivamente. Daí, temos $\sum_{i \leq j} 1_k a_{ij} 1_l = 0$, o que implica $a_{kl} = 0$. Assim, a soma $A = \oplus_{1 \leq i \leq j \leq m} A_{ij}$ é direta e $J = \oplus_{i<j} A_{ij}$.

Por fim, temos

$$\begin{aligned} A_{ij}A_{kl} &= (A_i w_{i,i+1} A_{i+1} \cdots A_{j-1} w_{j-1,j} A_j)(A_k w_{k,k+1} A_{k+1} \cdots A_{l-1} w_{l-1,l} A_l) \\ &= A_i w_{i,i+1} A_{i+1} \cdots A_{j-1} w_{j-1,j} \cdot \underbrace{(A_j A_k)}_{=\delta_{jk} A_j A_k} \cdot w_{k,k+1} A_{k+1} \cdots A_{l-1} w_{l-1,l} A_l \\ &= \delta_{jk} A_i w_{i,i+1} A_{i+1} \cdots A_{j-1} w_{j-1,j} \cdot A_j^2 \cdot w_{j,j+1} A_{j+1} \cdots A_{l-1} w_{l-1,l} A_l. \end{aligned}$$

Como A_j é uma superálgebra simples, segue que $A_j^2 = A_j$ e portanto $A_{ij}A_{kl} = \delta_{jk} A_{il}$. Logo temos também que, para todo $1 \leq i \leq j \leq m$, A_{ij} é uma álgebra e, claramente, uma superálgebra. □

Como vimos acima, se A é uma superálgebra minimal, então A se decompõe em soma direta (como espaço vetorial) de superálgebras $A = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq m} A_{ij}$. Para $1 \leq r \leq s \leq m$, consideremos

$$A^{(r,s)} := \bigoplus_{r \leq i \leq j \leq s} A_{ij}. \tag{4.5}$$

Note que claramente $A^{(r,s)}$ é uma superálgebra minimal, para todo $1 \leq r \leq s \leq m$. Neste texto, denotaremos por $A - A^{(r,s)}$ a soma de todos os A_{ij}'s que não aparecem como somandos em $A^{(r,s)}$.

Exemplo 4.2.9. Se A é uma superálgebra minimal e $A = \bigoplus_{1\leq i\leq j\leq 5} A_{ij}$, então

$$A^{(2,4)} = A_{22} \oplus A_{23} \oplus A_{24} \oplus A_{33} \oplus A_{34} \oplus A_{44} \qquad \text{e}$$

$$A - A^{(2,4)} = A_{11} \oplus A_{12} \oplus A_{13} \oplus A_{14} \oplus A_{15} \oplus A_{25} \oplus A_{35} \oplus A_{45} \oplus A_{55}.$$

Em particular, no caso em que $A = UT(1,1,2,2,3)$ munida, por exemplo, da graduação trivial, tomando $e_1 = E_{11}, e_2 = E_{22}, e_3 = E_{33}, e_4 = E_{55}, e_5 = E_{77}$, e $w_{12} = E_{12}, w_{23} = E_{23}, w_{34} = E_{35}, w_{45} = E_{57}$, temos que A é uma superálgebra minimal. Além disso, a decomposição de A na forma $A = \bigoplus_{1\leq i\leq j\leq 5} A_{ij}$ pode ser explicitada na divisão em blocos

$$A = \left(\begin{array}{c|c|cc|cc|ccc}
F & F & F & F & F & F & F & F & F \\ \hline
0 & F & F & F & F & F & F & F & F \\ \hline
0 & 0 & F & F & F & F & F & F & F \\
0 & 0 & F & F & F & F & F & F & F \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & F & F & F & F & F \\
0 & 0 & 0 & 0 & F & F & F & F & F \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & F & F \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & F & F \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & F & F
\end{array}\right),$$

onde, para cada $1 \leq i \leq j \leq 5$, temos que A_{ij} corresponde ao bloco da posição (i,j). Por exemplo, $A_{24} = \text{span}_F\{E_{25}, E_{26}\}$. Assim,

$$A^{(2,4)} = \left(\begin{array}{c|c|cc|cc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & F & F & F & F & F & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & F & F & F & F & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & F & F & F & F & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & F & F & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & F & F & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \quad \text{e} \quad A - A^{(2,4)} = \left(\begin{array}{c|c|cc|cc|ccc}
F & F & F & F & F & F & F & F & F \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & F & F \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & F & F \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & F & F \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & F & F \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & F & F \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & F & F \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & F & F \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & F & F
\end{array}\right).$$

Observação 4.2.10. Se $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é um polinômio em $F\langle X\rangle$, tal que $f \in \text{Id}(A^{(r,s)})$ para alguns $1 \leq r \leq s \leq m$, então $f(A) \subseteq A - A^{(r,s)}$. De fato, para cada $a_k \in A$, podemos escrever $a_k = \sum_{1\leq i\leq j\leq m} a_k^{i,j}$, onde $a_k^{i,j} \in A_{ij}$. Assim, lembrando que $A_{ij}A_{kl} = \delta_{jk}A_{il}$, temos

$$f\left(\sum_{1\leq i_1\leq j_1\leq m} a_1^{i_1,j_1}, \sum_{1\leq i_2\leq j_2\leq m} a_2^{i_2,j_2}, \ \ldots \ , \sum_{1\leq i_n\leq j_n\leq m} a_n^{i_n,j_n}\right) = \bar{g} + \bar{h},$$

com $\bar{g}$ sendo a soma de todos os monômios (em elementos de A) tais que em todas as posições temos apenas elementos $a_k^{i,j} \in A^{(r,s)}$, e $\bar{h}$ sendo a soma de todos os monômios (em elementos de A) tais que em cada monômio aparece pelo menos um $a_k^{i,j} \in A - A^{(r,s)}$. Pela definição dos A_{ij}, vale que $\bar{h} \in A - A^{(r,s)}$. Mais ainda, como $f \in \mathrm{Id}(A^{(r,s)})$, todos os polinômios multihomogêneos que são consequências de f também pertencem a $\mathrm{Id}(A^{(r,s)})$ e assim segue que $\bar{g} = 0$. Portanto, concluímos que $f(A) \subseteq A - A^{(r,s)}$.

Observação 4.2.11. Note que se A é uma superálgebra minimal tal que $A = \bigoplus_{1\leq i\leq j\leq m} A_{ij}$, então, pelo Lema 3.3.9, $G(A) = \bigoplus_{1\leq i\leq j\leq m} G(A_{ij})$. Além disso, $G(A_{ij})G(A_{kl}) = \delta_{jk}G(A_{il})$. Assim, segue da observação anterior que, se f é um polinômio em $F\langle X\rangle$ tal que $f \in \mathrm{Id}(G(A^{(r,s)}))$ para alguns $1 \leq r \leq s \leq m$, então $f(G(A)) \subseteq G(A) - G(A^{(r,s)})$.

Veremos agora um lema essencial neste trabalho. Ele diz que, dada uma superálgebra minimal $A = A_{ss} + J$, em que $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$, então o produto dos T-ideias verbalmente primos $\mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m))$ está contido em $\mathrm{Id}(G(A))$.

Lema 4.2.12. *Se $A = A_{ss} + J$, com $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$, é uma superálgebra minimal, então $\mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m)) \subseteq \mathrm{Id}(G(A))$.*

Demonstração. Para mostrar que $\mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m)) \subseteq \mathrm{Id}(G(A))$, consideremos $f_1 \in \mathrm{Id}(G(A_1)), \ldots, f_m \in \mathrm{Id}(G(A_m))$ e $f = f_1 \cdots f_m$. Usaremos indução sobre o número de componentes $\mathbb{Z}_2$-simples da superálgebra minimal A. Se $m = 1$, então $J = J(A) = 0$ e portanto a conclusão é imediata. Considere então $m \geq 2$ e suponha por indução que, se A é uma superálgebra minimal com $m - 1$ componentes $\mathbb{Z}_2$-simples, então a afirmação é válida. Assim para a superálgebra minimal $A^{(1,m-1)}$ temos, pela hipótese de indução, que $\mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_{m-1})) \subseteq \mathrm{Id}(G(A^{(1,m-1)}))$ e assim $f_1 \cdots f_{m-1}(G(A^{(1,m-1)})) = 0$. Note que, como $A = A^{(1,m-1)} \oplus A_{1m} \oplus A_{2m} \oplus \cdots \oplus A_{mm}$, pelo Lema 3.3.9 temos $G(A) = G(A^{(1,m-1)}) \oplus G(A_{1m}) \oplus \cdots \oplus G(A_{mm})$. Disso, uma vez que $f_1 \cdots f_{m-1}(G(A^{(1,m-1)})) = 0$, pela Observação 4.2.11 segue que

$$f_1 \cdots f_{m-1}(G(A)) \subseteq G(A_{1m}) \oplus \cdots \oplus G(A_{mm}). \tag{4.6}$$

Por outro lado, como $f_m \in \mathrm{Id}(G(A_m))$, novamente pela Observação 4.2.11 temos

$$f_m(G(A)) \subseteq G(A_1) \oplus \cdots \oplus G(A_{m-1}) \oplus G(J). \tag{4.7}$$

Portanto, segue de (4.6) e (4.7),

$$f(G(A)) \subseteq (G(A_{1m}) \oplus \cdots \oplus G(A_{mm}))(G(A_1) \oplus \cdots \oplus G(A_{m-1}) \oplus G(J)).$$

Como $A_i = A_{ii}$, $J = \oplus_{1\leq i<j\leq m} A_{ij}$ e $A_{ij}A_{kl} = \delta_{jk}A_{il}$, então $A_{im}J = 0$ e $A_{im}A_t = 0$, $i =$

$1, \ldots, m$, $t = 1, \ldots, m-1$. Logo, para $i = 1, \ldots, m$, $t = 1, \ldots, m-1$, temos $G(A_{im})G(A_t) = 0$, $G(A_{im})G(J) = 0$. Assim, $f(G(A)) \subseteq \{0\}$, donde $f \in \mathrm{Id}(G(A))$, como queríamos. □

O nosso próximo lema tem por finalidade exibir elementos que geram as superálgebras A_{ij} como um (A_i, A_j)-bimódulo. Contudo, para isso, fazemos algumas considerações, como seguem.

Pelo Lema 4.2.8, $A = \oplus_{1 \leq i \leq j \leq m} A_{ij}$ (soma direta como espaço vetorial). Consideremos o caso em que $m \geq 3$, ou seja, A possui pelo menos três componentes de superálgebras simples e, nesse caso, nosso objetivo é determinar a estrutura dos subespaços $w_{i-1,i}A_iw_{i,i+1}$, para $i = 2, \ldots, m-1$. Note que se $m = 1$ ou $m = 2$, então não teríamos tais subespaços.

Primeiramente, suponhamos que as superálgebras A_i sejam isomorfas ou a $M_n(F)$ ou a $M_{k,l}(F)$. Portanto, pela Observação 3.2.10, temos que $e_iA_ie_i = \mathrm{span}_F\{e_i\}$ e assim

$$w_{i-1,i}A_iw_{i,i+1} = w_{i-1,i}e_iA_ie_iw_{i,i+1} = \mathrm{span}_F\{w_{i-1,i}w_{i,i+1}\}.$$

Agora, se as superálgebras A_i são isomorfas a $M_{n_i}(F \oplus c_iF)$, com $c_i^2 = 1$, então de acordo com a Observação 3.2.10 segue que $e_iA_ie_i = \mathrm{span}_F\{e_i, c_ie_i\}$. Com isso,

$$w_{i-1,i}A_iw_{i,i+1} = w_{i-1,i}e_iA_ie_iw_{i,i+1} = \mathrm{span}_F\{w_{i-1,i}w_{i,i+1}, w_{i-1,i}c_iw_{i,i+1}\}.$$

A Condição (iii) da Definição 4.2.1 diz que $w_{12}w_{23}\cdots w_{m-1,m} \neq 0$ e isso implica que $w_{i-1,i}w_{i,i+1}$
$\neq 0$, para todo $i = 2, \ldots, m-1$.

Estendendo esse processo para quaisquer i, j com $j - i \geq 2$, definimos

$$w_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1}) = w_{i,i+1}q_{i+1}w_{i+1,i+2}\cdots w_{j-2,j-1}q_{j-1}w_{j-1,j},$$

onde $q_r = 1$ se A_r é uma superálgebra simples $M_n(F)$ ou $M_{k,l}(F)$, e $q_r = 1$ ou $q_r = c_r$ se A_r é uma superálgebra simples $M_{n_r}(F \oplus c_rF)$, com $c_r^2 = 1$. Denotaremos apenas como w_{ij} quando tratarmos de $w_{ij}(1, \ldots, 1)$, isto é, $w_{ij} := w_{ij}(1, \ldots, 1)$.

Temos assim que $w_{i,i+1}A_{i+1}\cdots A_{j-1}w_{j-1,j}$ é gerado, como espaço vetorial, pelos elementos $w_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1})$ para todos os possíveis valores de $q_{i+1}, \ldots, q_{j-1}$.

Lema 4.2.13. *Seja A uma superálgebra minimal. Então, os elementos*

$$w_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1}),$$

para todos os possíveis valores de $q_{i+1}, \ldots, q_{j-1}$, geram A_{ij} como um (A_i, A_j)-bimódulo. Além disso, $w_{ij} = w_{ij}(1, \ldots, 1)$ gera um (A_i, A_j)-bimódulo irredutível graduado não nulo.

Demonstração. Para (i, j) fixo com $1 \leq i \leq j \leq m$, temos $A_{ij} = A_i w_{i,i+1} A_{i+1} \cdots A_{j-1} w_{j-1,j} A_j$ e, pela discussão acima, $w_{i,i+1} A_{i+1} \cdots A_{j-1} w_{j-1,j}$ é gerado pelos elementos $w_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1})$, para todos os possíveis valores de $q_{i+1}, \ldots, q_{j-1}$. Logo a primeira parte do lema está concluída.

Agora, para qualquer $w = w_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1}) \neq 0$, temos

$$e_i w = e_i w_{i,i+1} q_{i+1} w_{i+1,i+2} \cdots w_{j-2,j-1} q_{j-1} w_{j-1,j} = w_{i,i+1} q_{i+1} w_{i+1,i+2} \cdots w_{j-2,j-1} q_{j-1} w_{j-1,j} = w$$

e também $we_j = w$. Logo podemos identificar $A_i w A_j = A_i e_i w e_j A_j$ com $A_i e_i \otimes e_j A_j$ através de $\sum_i a_i w b_i \mapsto \sum_i a_i \otimes b_i$. Como $A_i e_i \otimes e_j A_j$ é um (A_i, A_j)-bimódulo irredutível graduado (veja Lema 3.2.9) concluímos que $A_i w A_j$ é um (A_i, A_j)-bimódulo irredutível graduado não nulo. □

4.3 Relações entre superálgebras de dimensão finita e as minimais

Nesta seção veremos a ligação que temos ao tratarmos de superálgebras de dimensão finita e superálgebras minimais. Começamos com o seguinte lema.

Lema 4.3.1. *Seja B uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero, $B = B_{ss} + J$ onde $B_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, com $A_1, \ldots, A_n$ superálgebras simples. Se $m \leq n$ é tal que $A_{r_1} J A_{r_2} J \cdots J A_{r_m} \neq 0$, onde $A_{r_1}, A_{r_2}, \ldots, A_{r_m}$ são superálgebras simples do conjunto $\{A_1, \ldots, A_n\}$, então existe uma superálgebra minimal A contida em B tal que $A_{ss} = A_{r_1} \oplus \cdots \oplus A_{r_m}$.*

Demonstração. Por hipótese, para algum $m \leq n$, temos $A_{r_1} J A_{r_2} J \cdots J A_{r_m} \neq 0$. Assim, existem $x_1, \ldots, x_{m-1} \in J$ e $a_1 \in A_{r_1}, \ldots, a_m \in A_{r_m}$ que satisfazem

$$a_1 x_1 a_2 \cdots a_{m-1} x_{m-1} a_m \neq 0. \tag{4.8}$$

Agora note que, para cada i, podemos escrever $a_i = a_i^{(0)} + a_i^{(1)}$, com $a_i^{(0)} \in A_{r_i}^{(0)}$ e $a_i^{(1)} \in A_{r_i}^{(1)}$, e $x_i = x_i^{(0)} + x_i^{(1)}$, com $x_i^{(0)} \in J^{(0)}$ e $x_i^{(1)} \in J^{(1)}$. Então, de (4.8), temos

$$(a_1^{(0)} + a_1^{(1)})(x_1^{(0)} + x_1^{(1)}) \cdots (x_{m-1}^{(0)} + x_{m-1}^{(1)})(a_m^{(0)} + a_m^{(1)}) \neq 0.$$

Distribuindo esses produtos, segue que existem $\varepsilon_1, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1}, \varepsilon_m \in \{0, 1\}$, tais que

$$a_1^{(\varepsilon_1)} x_1^{(\eta_1)} a_2^{(\varepsilon_2)} \cdots a_{m-1}^{(\varepsilon_{m-1})} x_{m-1}^{(\eta_{m-1})} a_m^{(\varepsilon_m)} \neq 0.$$

Isto quer dizer que podemos assumir que $x_1, \ldots, x_{m-1}, a_1, \ldots, a_m$ são elementos homogêneos. Sejam $1_1, \ldots, 1_m$ as unidades de $A_{r_1}, \ldots, A_{r_m}$, respectivamente. Novamente, de (4.8), temos

$$1_1(a_1x_1a_2)1_2(x_2a_3)1_3 \cdots 1_{m-1}(x_{m-1}a_m)1_m \neq 0. \tag{4.9}$$

Pelo Lema 3.2.8, cada unidade 1_j, com $j = 1, \ldots, m$, pode ser decomposta como soma de idempotentes graduados minimais, isto é, para cada $1_j \in A_{r_j} = A_{r_j}^{(0)} \oplus A_{r_j}^{(1)}$, escrevemos $1_j = e_{j1} + e_{j2} + \cdots + e_{jn_j}$, onde $e_{jt} \in A_{r_j}^{(0)}$, para todo $t \in \{1, \ldots, n_j\}$. Assim, de (4.9), seque que

$$(e_{11}+e_{12}+\cdots+e_{1n_1})(a_1x_1a_2)(e_{21}+e_{22}+\cdots+e_{2n_2})(x_2a_3)\cdots(x_{m-1}a_m)(e_{m1}+e_{m2}+\cdots+e_{mn_m}) \neq 0.$$

Isso implica que existem idempotentes graduados minimais $e_1 \in A_{r_1}, \ldots, e_m \in A_{r_m}$, tais que

$$e_1(a_1x_1a_2)e_2(x_2a_3)e_3 \cdots e_{m-1}(x_{m-1}a_m)e_m \neq 0.$$

Definimos

$$w_{12} = e_1(a_1x_1a_2)e_2,\ w_{23} = e_2(x_2a_3)e_3,\ w_{34} = e_3(x_3a_4)x_4, \ldots, w_{m-1,m} = e_{m-1}(x_{m-1}a_m)e_m.$$

Tais elementos pertencem a J, uma vez que J é ideal bilateral de A e $x_1, \ldots, x_{m-1} \in J$, e além disso são homogêneos, satisfazendo as seguintes propriedades:

$$e_1w_{12} = e_1e_1(a_1x_1a_2)e_2 = e_1(a_1x_1a_2)e_2 = e_1(a_1x_1a_2)e_2e_2 = w_{12}e_2,$$

$$e_iw_{i,i+1} = e_ie_i(x_ia_{i+1})e_{i+1} = e_i(x_ia_{i+1})e_{i+1} = e_i(x_ia_{i+1})e_{i+1}e_{i+1} = w_{i+1}e_{i+1}, \quad i = 2, \ldots, m-1,$$

$$w_{12} \cdots w_{m-1,m} = e_1(a_1x_1a_2)e_2(x_2a_3)e_3 \cdots e_{m-1}(x_{m-1}a_m)e_m \neq 0.$$

Seja $A = A_{r_1} \oplus \cdots \oplus A_{r_m} + J(A)$ a álgebra gerada por $A_{r_1}, \ldots, A_{r_m}, w_{12}, \ldots, w_{m-1,m}$ sobre F. Temos que $A \subseteq B$ e o radical de Jacobson de A é gerado por $w_{12}, \ldots, w_{m-1,m}$, já que $w_{12}, \ldots, w_{m-1,m}$ pertencem ao radical de Jacobson de B e assim geram o ideal nilpotente maximal de A. Logo, A satisfaz as condições da Definição 4.2.1, e assim A é uma superálgebra minimal contida em B tal que $A_{ss} = A_{r_1} \oplus \cdots \oplus A_{r_m}$. □

O Teorema de Kemer, que vimos na Seção 3.3, garante que toda variedade de álgebras associativas, sobre um corpo de característica zero, é gerada pela envolvente de Grassmann de uma superálgebra de dimensão finita. O próximo resultado estabelece que, dada uma variedade de álgebras, temos a existência da envolvente de Grassmann de uma superálgebra minimal nessa variedade.

Lema 4.3.2. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Se $\exp(\mathcal{V}) \geq 2$, então existe uma superálgebra minimal A com subálgebra semissimples maximal A_{ss} tal que $G(A) \in \mathcal{V}$ e $\exp(\mathcal{V}) = \dim_F A_{ss}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.3.4, existe uma superálgebra de dimensão finita B tal que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(B))$. Considere $B_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, com $A_1, \ldots, A_n$ superálgebras simples. Então, pela caracterização do expoente que vimos na Seção 4.1, temos que existe $1 \leq m \leq n$ tal que $A_{r_1} J A_{r_2} J \cdots A_{r_{m-1}} J A_{r_m} \neq 0$ com $A_{r_1}, A_{r_2}, \ldots, A_{r_m}$ superálgebras simples distintas pertencentes ao conjunto $\{A_1, \ldots, A_n\}$, e $\exp(\mathcal{V}) = \exp(G(B)) = \dim_F(A_{r_1} \oplus \cdots \oplus A_{r_m})$.

Com isso, pelo Lema 4.3.1, existe uma superálgebra minimal A contida em B de tal forma que $A = A_{ss} + J(A)$, com $A_{ss} = A_{r_1} \oplus \cdots \oplus A_{r_m}$. Logo, $\exp(\mathcal{V}) = \dim_F A_{ss}$. Como $A \subseteq B$, segue que $G(A) \subseteq G(B)$, e isso implica $G(A) \in \mathrm{var}(G(B)) = \mathcal{V}$, como queríamos. □

Exemplo 4.3.3. Se $\mathcal{V} = \mathrm{var}(UT_2(F))$, então $\exp(\mathcal{V}) = \exp(UT_2(F)) = 2$ (veja Exemplo 4.1.2). Logo, considerando $A = UT_2(F)$ com a graduação trivial, temos que A é uma superálgebra minimal e $G(A) \in \mathcal{V}$, pois $\mathrm{Id}(G(A)) = \mathrm{Id}(A \otimes G^{(0)}) = \mathrm{Id}(A) = \mathrm{Id}(UT_2(F))$ (veja Lema 2.3.13). Além disso, $\exp(\mathcal{V}) = 2 = \dim_F A_{ss}$.

Por outro lado, se considerarmos $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G)$, onde G é a álgebra de Grassmann, então temos $\exp(\mathcal{V}) = \exp(G) = 2$ (veja Exemplo 4.1.2). Neste caso, a superálgebra minimal $A = F \oplus cF$ (em que $c^2 = 1$) é tal que $G(A) \in \mathcal{V}$, pois $\mathrm{Id}(G(F \oplus cF)) = \mathrm{Id}(G)$ (veja Exemplo 3.3.7). Além disso, $\exp(\mathcal{V}) = 2 = \dim_F(F \oplus cF) = \dim_F A_{ss}$.

No próximo resultado veremos que, se A é uma superálgebra minimal com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial, então A pode ser realizada como uma álgebra de matrizes bloco triangular superior com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial.

Lema 4.3.4. *Seja A uma superálgebra minimal, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial. Então $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$, com $A_j \cong M_{d_j}(F)$, a álgebra de matrizes com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial, para todo $j = 1, \ldots, m$. Além disso,*

$$A \cong UT(d_1, \ldots, d_m) = \begin{pmatrix} M_{d_1}(F) & M_{d_1 \times d_2}(F) & \cdots & M_{d_1 \times d_m}(F) \\ 0 & M_{d_2}(F) & \cdots & M_{d_2 \times d_m}(F) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{d_m}(F) \end{pmatrix},$$

ou seja, A é isomorfa a uma álgebra de matrizes bloco triangular superior com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial.

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.5, segue que $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$, com $A_j \cong M_{d_j}(F)$, a álgebra de matrizes com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial, para todo $j = 1, \ldots, m$.

Assim, podemos identificar a álgebra $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$ com uma subálgebra de $M_q(F)$ de matrizes bloco-diagonal, onde $q = d_1 + \cdots + d_m$. Basta considerar

$$q_0 = 0, q_1 = d_1, \ldots, q_k = d_1 + \cdots + d_k, \ldots, q_m = d_1 + \cdots + d_m = q.$$

e A_j o espaço vetorial gerado por todas as matrizes unitárias $e_{\alpha,\beta}$ com $q_{j-1} + 1 \leq \alpha, \beta \leq q_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Como A é uma superálgebra minimal, existem idempotentes graduados minimais $e_{\alpha_1\alpha_1}, e_{\alpha_2\alpha_2}, \ldots, e_{\alpha_m\alpha_m}$ com $q_{i-1} + 1 \leq \alpha_i \leq q_i, i = 1, \ldots, m$ e $w_{i,i+1} \in J$, onde

$$e_{\alpha_i\alpha_i} w_{i,i+1} = w_{i,i+1} e_{\alpha_{i+1}\alpha_{i+1}} = w_{i,i+1}.$$

Além disso, pelo Lema 4.2.8, $A = \oplus_{1 \leq i \leq j \leq m} A_{ij}$, e para $i < j$, $A_{ij} = A_i w_{i,i+1} w_{i+1,i+2} \cdots w_{j-1,j} A_j$, $w_{i,i+1} w_{i+1,i+2} \cdots w_{j-1,j} \neq 0$, já que A possui graduação trivial.

Definiremos elementos x_{rs} em A e mostraremos que tais elementos formam uma base de A com as mesmas constantes estruturais de $UT(d_1, \ldots, d_m)$.

Para todo $1 \leq i \leq j \leq m$, considere o par (r, s) tal que $1 \leq r \leq s \leq q$, $q_{i-1} + 1 \leq r \leq q_i$ e $q_{j-1} + 1 \leq s \leq q_j$. Então definimos

$$x_{rs} = \begin{cases} e_{rs}, & \text{se } \ i = j \\ e_{r\alpha_i} e_{\alpha_i\alpha_i} w_{i,i+1} w_{i+1,i+2} \cdots w_{j-1,j} e_{\alpha_j\alpha_j} e_{\alpha_j,s}, & \text{se } \ i < j. \end{cases}$$

Temos assim que os elementos x_{rs} são todos não nulos, pertencem a A_{ij} e claramente $\{x_{rs}\}_{r,s}$ gera A como espaço vetorial. Mais ainda,

$$x_{rs} x_{lk} = \delta_{sl} x_{rk}. \tag{4.10}$$

Afirmamos que os elementos x_{rs} são linearmente independentes, pois se $\sum_{r,s} \lambda_{rs} x_{rs} = 0$, então de (4.10), para r_0, s_0 fixos, temos

$$0 = e_{r_0r_0} \left(\sum_{r,s} \lambda_{rs} x_{rs} \right) e_{s_0s_0} = x_{r_0r_0} \left(\sum_{r,s} \lambda_{rs} x_{rs} \right) x_{s_0s_0} = \lambda_{r_0s_0} x_{r_0s_0}$$

e portanto $\lambda_{r_0s_0} = 0$.

Dessa forma, $\{x_{rs}\}_{r,s}$ é uma base de A. Por fim, como $x_{rs} x_{lk} = \delta_{sl} x_{rk}$, a aplicação natural $\varphi(\sum a_{rs} x_{rs}) = \sum a_{rs} e_{rs}$ é um isomorfismo de A sobre $UT(d_1, \ldots, d_m)$, como queríamos. □

Sendo assim, o Lema 4.3.4 tem como consequência quase imediata o próximo teorema.

Teorema 4.3.5. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero, $A = A_{ss} + J$, onde $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, com $A_i \cong M_{d_i}(F)$, $1 \leq i \leq n$. Se para algum $m \leq n$ temos $A_{r_1}JA_{r_2}J\cdots JA_{r_m} \neq 0$, onde $A_{r_1}, A_{r_2}, \ldots, A_{r_m}$ são superálgebras simples pertencentes ao conjunto $\{A_1, \ldots, A_n\}$, então A contém uma subálgebra isomorfa a $UT(d_1, \ldots, d_m)$.*

Demonstração. Note que podemos ver A como uma superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial. Sob as hipóteses do teorema, para algum $m \leq n$, temos que $A_{r_1}JA_{r_2}J\cdots JA_{r_m} \neq 0$. Logo, pelo Lema 4.3.1 existe uma superálgebra minimal B contida em A tal que $B_{ss} = A_{r_1} \oplus \cdots \oplus A_{r_m}$. Já que B também possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial, concluímos pelo Lema 4.3.4 que $B \cong UT(d_1, \ldots, d_m)$, e assim A contém uma subálgebra isomorfa a $UT(d_1, \ldots, d_m)$. $\square$

Em geral, sejam A e B superálgebras minimais, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, com subálgebras semissimples maximais $\mathbb{Z}_2$-estáveis A_{ss} e B_{ss}, respectivamente. Vimos no Lema 4.3.4 que, se A e B têm ambas $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial, então a existência de um isomorfismo de superálgebras entre A_{ss} e B_{ss} (que neste caso é um isomorfismo de álgebras entre A_{ss} e B_{ss}) implica necessariamente em um isomorfismo entre A e B. Podemos assim nos perguntar se, em geral, um isomorfismo de superálgebras entre A_{ss} e B_{ss} implica em um isomorfismo de superálgebras entre A e B. Vejamos então alguns exemplos que nos mostram o que pode acontecer quando A_{ss} e B_{ss} são isomorfas como superálgebras. Nestes exemplos estaremos usando a nomenclatura introduzida na Observação 3.2.5.

Caso 1: A_{ss} e B_{ss} tem apenas componentes $\mathbb{Z}_2$-simples do tipo $\mathcal{A}$. Neste caso, A será isomorfa a B como álgebra não graduada, uma vez que ambas serão isomorfas a $UT(d_1, \ldots, d_m)$, para algum $m \geq 1$ (veja Teorema 4.3.5). Sobre a existência (ou não) de um isomorfismo de superálgebras entre A e B temos as seguintes possibilidades:

(i) A e B são isomorfas como superálgebras: Tal situação ocorre sempre que A e B estão munidas da $\mathbb{Z}_2$ graduação trivial (veja Lema 4.3.4), mas também no caso não trivial (veja Exemplo 3.1.20).

(ii) A e B não são isomorfas como superálgebras: Veja Exemplos 3.1.19 e 3.1.21.

Caso 2: Superálgebras simples do tipo $\mathcal{B}$ também aparecem na decomposição de A_{ss} e B_{ss}. Neste caso, não podemos garantir nem mesmo que A e B são isomorfas como álgebras não graduadas. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.3.6. Considere a álgebra $M_n(F \oplus cF)$, $c^2 = 1$. O Exemplo 3.1.17 nos mostra que existe uma correspondência dessa álgebra com a álgebra de matrizes diagonal $\begin{pmatrix} M_n(F) & 0 \\ 0 & M_n(F) \end{pmatrix}$. Denotando $M_n(F)$ por M, consideremos as seguintes álgebras R_1 e R_2, com suas respectivas graduações

$$R_1 = \begin{pmatrix} M & 0 & M & M \\ 0 & M & M & M \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} A & 0 & C & D \\ 0 & A & D & C \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & 0 & C' & D' \\ 0 & -A' & -D' & -C' \\ 0 & 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B' \end{pmatrix} \right)$$

e

$$R_2 = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & M \\ 0 & M & M & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & C \\ 0 & A & C & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 & D \\ 0 & -A' & -D & 0 \\ 0 & 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B' \end{pmatrix} \right),$$

onde $A, B, C, D, A', B', C', D' \in M_n(F)$. Pode-se verificar que R_1 e R_2 são superálgebras minimais. Observe que ambas as superálgebras R_1 e R_2 têm subálgebra maximal semissimples $\mathbb{Z}_2$-estáveis isomorfas a $M_n(F \oplus cF) \oplus M_n(F \oplus cF)$. No entanto, R_1 e R_2 não são isomorfas nem mesmo como álgebras.

Vemos assim que, em geral, se A e B são superálgebras minimais, o isomorfismo de superálgebras entre A_{ss} e B_{ss} não necessariamente implica em um isomorfismo de superálgebras entre A e B. Contudo, veremos no Teorema 6.1.1 que, embora A e B possam ser superálgebras não isomorfas, se tomarmos a envolvente de Grassmann das superálgebras A e B, então a existência de um isomorfismo de superálgebras entre A_{ss} e B_{ss} implicará necessariamente em uma PI-equivalência entre $G(A)$ e $G(B)$.

Capítulo 5

Envolventes supercomutativas

Neste capítulo introduziremos a definição de álgebra livre supercomutativa $S = F[U, V]$ sobre um corpo F e, a partir dessa álgebra, definiremos a superenvolvente de uma superálgebra A, denotada por $S(A)$. A superenvolvente possui interessantes ligações com a envolvente de Grassmann e, no caso em que A é uma superálgebra minimal, veremos que $S(A)$ desempenha um papel fundamental na demonstração do Teorema 6.1.1. Os resultados aqui trabalhados podem ser encontrados na Seção 3.8 e no Capítulo 8 de [20]. Assumimos que F é um corpo de característica zero.

5.1 Definições e resultados básicos

Primeiramente vamos apresentar o conceito de superálgebra supercomutativa, para então definirmos a superenvolvente de uma superálgebra A.

Definição 5.1.1. Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra. Se, para todos os elementos homogêneos $a, b \in A$, tivermos $ab - (-1)^{|a||b|}ba = 0$, então dizemos que A é uma **superálgebra supercomutativa**.

Note que a álgebra de Grassmann com a graduação canônica, vista no Exemplo 3.1.8, é uma superálgebra supercomutativa.

Iremos agora definir um outro objeto algébrico relevante na PI-teoria. Assim como temos $F\langle X\rangle$ a álgebra livre associativa unitária gerada por um conjunto infinito e enumerável de variáveis não comutativas, podemos construir a álgebra livre supercomutativa gerada por conjuntos infinitos e enumeráveis de variáveis comutativas U e anticomutativas V e que será denotada por $F[U, V]$.

Mais precisamente, sejam $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ e $V = \{v_1, v_2, \ldots\}$ dois conjuntos enumeráveis. Definimos $S = F[U, V]$ como sendo a álgebra com unidade gerada por $U \cup V$, sujeita às condições que os elementos de U são centrais e os elementos de V anticomutam, isto é,

$$S = \langle 1, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots \mid u_iu_j = u_ju_i,\ v_iv_j = -v_jv_i,\ u_iv_j = v_ju_i,\ i,j = 1,2,\dots\rangle.$$

Pode-se verificar, sem muitas dificuldades, que a álgebra S é uma superálgebra com a graduação $S = S^{(0)} \oplus S^{(1)}$, onde $S^{(0)}$ é gerado, como espaço vetorial, por todos os monômios de S contendo um número par de variáveis de V, enquanto $S^{(1)}$ é gerado, como espaço vetorial, por todos os monômios de S contendo uma quantidade ímpar de variáveis de V.

A superálgebra $S = F[U,V]$ tem a seguinte propriedade universal: dada qualquer álgebra supercomutativa A e qualquer aplicação $\varphi : \{U,V\} \to A$ tais que $\varphi(U) \subseteq A^{(0)}$ e $\varphi(V) \subseteq A^{(1)}$, temos que φ se estende unicamente a um homomorfismo de superálgebras $\overline{\varphi} : S \to A$.

Definição 5.1.2. A álgebra $S = F[U,V]$ é chamada de **álgebra livre supercomutativa sobre** F gerada por conjuntos enumeráveis U e V constituídos por variáveis que comutam e anticomutam, respectivamente.

Observação 5.1.3. Seja G a álgebra de Grassmann. Podemos identificar os geradores $e_1, e_2, \dots,$ de G como os elementos $v_1, v_2, \dots,$ de S de maneira natural. Assim, G é uma subálgebra de S com uma $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida, onde $G^{(0)}$ é o espaço gerado por todos os monômios em $v_i's$ de tamanho par e $G^{(1)}$ é o espaço gerado por todos os monômios em $v_i's$ de tamanho ímpar. Logo, $S \cong F[U] \otimes_F G$.

Definição 5.1.4. Seja A uma superálgebra. A **superenvolvente** de A é a superálgebra

$$S(A) = (A^{(0)} \otimes S^{(0)}) \oplus (A^{(1)} \otimes S^{(1)}).$$

Podemos também dizer que $S(A)$ é a **S-envolvente** de A.

A seguir, veremos uma consequência de quando tivermos uma superálgebra A e um polinômio multilinear que não é uma identidade de $S(A)$.

Lema 5.1.5. *Sejam $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra e $f = f(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio multilinear que não é uma identidade de $S(A)$. Então existem elementos homogêneos $a_1, \dots, a_n \in A$ e monômios $p_1, \dots, p_n \in F[U,V]$ tais que $f(a_1 \otimes p_1, \dots, a_n \otimes p_n) = a \otimes p \neq 0$, para alguns elementos homogêneos $a \in A$, $p := p_1 \cdots p_n \in F[U,V]$.*

Demonstração. Como f é um polinômio multilinear, escrevemos $f = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma_n}$, com $\alpha_\sigma \in F$. Por hipótese, temos que f não é uma identidade de $S(A)$, sendo assim existem elementos homogêneos $a_i \otimes p_i \in A^{(j_i)} \otimes S^{(j_i)}$, com $j_i \in \{0,1\}$ e $p_1, \ldots, p_n$ monômios, tais que

$$\begin{aligned} 0 \neq f(a_1 \otimes p_1, \ldots, a_n \otimes p_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_{\sigma(1)} \otimes p_{\sigma(1)})(a_{\sigma(2)} \otimes p_{\sigma(2)}) \otimes (a_{\sigma(n)} \otimes p_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)}) \otimes (p_{\sigma(1)} \cdots p_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

Já que $p_1, \ldots, p_n \in S^{(0)} \cup S^{(1)}$, basta reordenar $p_{\sigma(1)} \cdots p_{\sigma(n)}$ (considerando o sinal de σ e o grau homogêneo de cada p_i) de tal forma que iremos obter

$$0 \neq \left(\sum_{\sigma \in S_n} \pm \alpha_\sigma a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} \right) \otimes (p_1 \cdots p_n).$$

Assim, tomando $a = \sum_{\sigma \in S_n} \pm \alpha_\sigma (a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)}) \in A$ e $p = p_1 \cdots p_n \in F[U,V]$, obtemos $f(a_1 \otimes p_1, \ldots, a_n \otimes p_n) = a \otimes p \neq 0$. □

Observação 5.1.6. Note que temos resultados análogos ao Lema 3.3.9 e à Observação 4.2.11 para $S(A)$, a superenvolvente de uma superálgebra A.

Finalizamos esta seção com um lema técnico que servirá de suporte para resultados futuros. Tal lema mostra a existência de certos elementos em um ideal de Lie de $S(A)$ de uma superálgebra simples A do tipo $\mathcal{A}$.

Lema 5.1.7. *Sejam A uma superálgebra simples do tipo $\mathcal{A}$ e L um ideal de Lie de $S(A)$. Suponhamos que existam um elemento não central $a \in A$ e um monômio não nulo $p \in S$ tais que $0 \neq a \otimes p \in L$. Então, para cada par (r,s), com $r \neq s$, existe um monômio não nulo p' pertencente a S tal que $E_{rs} \otimes p' \in L$.*

Demonstração. Como L é um ideal de Lie de $S(A)$, segue que L é um espaço vetorial e $[L, S(A)] \subseteq L$. Sejam $E_{kl}, 1 \leq k,l \leq n$, as matrizes unitárias que formam uma base para A e $a = \sum_{k,l} a_{kl} E_{kl} \in A$ não central. Temos duas possibilidades, ou a possui algum elemento não nulo fora da diagonal principal ou $a = \sum_k a_{kk} E_{kk}$ é uma matriz diagonal com pelo menos duas entradas diferentes. Mostraremos inicialmente que, em ambos os casos, existem um monômio não nulo $\widetilde{p}$ pertencente a S e um par (i,j), com $i \neq j$, tais que $E_{ij} \otimes \widetilde{p} \in L$.

Considere primeiro o caso em que a possui algum elemento não nulo fora da diagonal principal, ou seja, existe um elemento $a_{ij} \neq 0$, com $i \neq j$. Como $E_{ii} \in A^{(0)}$ temos $E_{ii} \otimes 1 \in S(A)$ e assim

$$[\underbrace{a \otimes p}_{\in L}, \underbrace{E_{ii} \otimes 1}_{\in S(A)}] = \sum_{k,l} [a_{kl} E_{kl} \otimes p, E_{ii} \otimes 1] = \sum_k (a_{ki} E_{ki} \otimes p) - \sum_l (a_{il} E_{il} \otimes p) \in L.$$

Disso, como $i \neq j$,

$$\begin{aligned} [a \otimes p, E_{ii} \otimes 1, E_{jj} \otimes 1] &= \left[\sum_k (a_{ki} E_{ki} \otimes p) - \sum_l (a_{il} E_{il} \otimes p), E_{jj} \otimes 1\right] \\ &= -a_{ji} E_{ji} \otimes p - a_{ij} E_{ij} \otimes p \in L \end{aligned} \tag{5.1}$$

e portanto

$$\begin{aligned} [a \otimes p, E_{ii} \otimes 1, E_{jj} \otimes 1, E_{jj} \otimes 1] &= [-a_{ji} E_{ji} \otimes p - a_{ij} E_{ij} \otimes p, E_{jj} \otimes 1] \\ &= a_{ji} E_{ji} \otimes p - a_{ij} E_{ij} \otimes p \in L. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Somando (5.1) e (5.2) temos $-2a_{ij} E_{ij} \otimes p \in L$. Como $a_{ij} \neq 0$ e F tem característica zero, concluímos $E_{ij} \otimes p \in L$.

Agora, analisemos o segundo caso onde $a = \sum_k a_{kk} E_{kk}$ é uma matriz diagonal com $a_{ii} \neq a_{jj}$, para algum $i \neq j$. Se $A = M_n(F)$, então $E_{ij} \in A^{(0)}$ e assim

$$\begin{aligned} [a \otimes p, E_{ij} \otimes 1] &= \sum_k [a_{kk} E_{kk} \otimes p, E_{ij} \otimes 1] = a_{ii} E_{ij} \otimes p - a_{jj} E_{ij} \otimes p \\ &= (a_{ii} - a_{jj}) E_{ij} \otimes p \in L. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Como $a_{ii} \neq a_{jj}$, é válido que $E_{ij} \otimes p \in L$.

Se $A = M_{k,l}(F), k \geq l > 0$, temos dois casos dependendo do grau homogêneo de E_{ij}. Se $E_{ij} \in A^{(0)}$, temos como acima

$$[a \otimes p, E_{ij} \otimes 1] = (a_{ii} - a_{jj}) E_{ij} \otimes p \in L,$$

o que implica $E_{ij} \otimes p \in L$. Se $E_{ij} \in A^{(1)}$, temos para todo $q \in S^{(1)}$,

$$[a \otimes p, E_{ij} \otimes q] = (a_{ii} - a_{jj}) E_{ij} \otimes pq \in L,$$

e disso $E_{ij} \otimes pq \in L$.

Assim, concluímos que em todos os casos existe um monômio não nulo $\widetilde{p}$ pertencente a S e um par (i, j), com $i \neq j$, tais que $E_{ij} \otimes \widetilde{p} \in L$. Consequentemente, se $s \neq i$, temos que, para todo $\widetilde{q} \in S^{(t)}$, com $t = |E_{js}|$, vale $[E_{ij} \otimes \widetilde{p}, E_{js} \otimes \widetilde{q}] = E_{is} \otimes \widetilde{p}\widetilde{q} \in L$. Logo, se $r \neq s$, segue que, para todo $q' \in S^{(t')}$, com $t' = |E_{ri}|$, $[E_{is} \otimes \widetilde{p}\widetilde{q}, E_{ri} \otimes q'] = -E_{rs} \otimes q' \widetilde{p}\widetilde{q} \in L$, e portanto $E_{rs} \otimes q' \widetilde{p}\widetilde{q} \in L$.

Assim, para cada $r \neq s$, podemos encontrar um elemento homogêneo não nulo $p' \in S$ tal que $E_{rs} \otimes p' \in L$. $\square$

5.2 A superenvolvente e a envolvente de Grassmann de uma superálgebra

Veremos nesta seção que $G(A)$ e $S(A)$ têm relações muito mais profundas que a inclusão $G(A) \subseteq S(A)$ decorrente da Observação 5.1.3. Começamos mostrando que $\mathrm{Id}(G(A)) = \mathrm{Id}(S(A))$.

Proposição 5.2.1. *Seja A uma superálgebra sobre um corpo de característica zero. Então $S(A)$ e $G(A)$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais.*

Demonstração. Na seção anterior vimos que a álgebra de Grassmann G está contida na álgebra supercomutativa livre S. Assim, segue que $G(A) \subseteq S(A)$ e portanto $\mathrm{Id}(S(A)) \subseteq \mathrm{Id}(G(A))$. Mostraremos agora a inclusão contrária. Como estamos lidando com um corpo de característica zero, consideremos $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear que não é uma identidade de $S(A)$. Pelo Lema 5.1.5, existem elementos $a_1, \ldots, a_n \in A^{(0)} \cup A^{(1)}$ e monômios $p_1, \ldots, p_n \in S^{(0)} \cup S^{(1)}$ tais que

$$f(a_1 \otimes p_1, \ldots, a_n \otimes p_n) \neq 0.$$

Reordenando, se necessário, as variáveis $x_1, ..., x_n$, podemos assumir que $a_1, \ldots, a_r \in A^{(0)}$, $p_1, \ldots, p_r \in S^{(0)}$, $a_{r+1}, \ldots, a_n \in A^{(1)}$, $p_{r+1}, \ldots, p_n \in S^{(1)}$, para algum $1 \leq r \leq n$. Logo, pelo Lema 5.1.5, temos

$$f(a_1 \otimes p_1, \ldots, a_n \otimes p_n) = a \otimes p_1 \cdots p_n \neq 0,$$

onde $0 \neq a \in A$ e $0 \neq p_1 \cdots p_n \in S$. Usando um raciocínio análogo ao utilizado no Lema 5.1.5, concluímos que

$$f(a_1 \otimes u_1, \ldots, a_r \otimes u_r, a_{r+1} \otimes v_1, \ldots, a_n \otimes v_{n-r}) = a \otimes u_1 \cdots u_r v_1 \cdots v_{n-r} \neq 0. \tag{5.4}$$

Defina $\varphi : \{U, V\} \to G$ como $\varphi(u_i) = e_{n+2i-1}e_{n+2i}$ e $\varphi(v_i) = e_i$. Logo $\varphi(U) \subseteq G^{(0)}$ e $\varphi(V) \subseteq G^{(1)}$ e assim, como S é uma álgebra supercomutativa livre, segue que φ se estende a um homomorfismo de superálgebras $\overline{\varphi} : S \to G$. Pela propriedade universal do produto tensorial, $\overline{\varphi}$ se estende a um homomorfismo $\widehat{\varphi} : A \otimes S \to A \otimes G$ que fixa os elementos de A e $\widehat{\varphi}(S(A)) \subseteq G(A)$. Portanto, segue de (5.4) que

$$\widehat{\varphi}(f(a_1 \otimes u_1, \ldots, a_r \otimes u_r, a_{r+1} \otimes v_1, \ldots, a_n \otimes v_{n-r})) = \widehat{\varphi}(a \otimes u_1 \cdots u_r v_1 \cdots v_{n-r}),$$

o que implica

$$f(a_1 \otimes e_{n+1}e_{n+2}, \ldots, a_r \otimes e_{n+2r-1}e_{n+2r}, a_{r+1} \otimes e_1, \ldots, a_n \otimes e_{n-r})$$

$$= a \otimes e_{n+1}e_{n+2}\cdots e_{n+2r-1}e_{n+2r}e_1\cdots e_{n-r} \neq 0.$$

Logo f não é uma identidade de $G(A)$, e assim concluímos que $S(A)$ e $G(A)$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais. $\square$

Proposição 5.2.2. *Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Se $\{a_1, \ldots, a_k\}$ e $\{b_1, \ldots, b_t\}$ são bases de $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$, respectivamente, então a subálgebra de $S(A)$ gerada pelos elementos*

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{k} a_j \otimes u_{ij} + \sum_{j=1}^{t} b_j \otimes v_{ij},\ i = 1, 2, \ldots$$

é uma álgebra relativamente livre da variedade $\mathrm{var}(G(A))$ *com geradores livres $\xi_1, \xi_2, \ldots$.*

Demonstração. Seja $\widehat{A}$ a álgebra gerada pelos ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$. Note que $\xi_i \in S(A)$, para todo i, e assim $\widehat{A} \subseteq S(A)$, donde $\mathrm{Id}(S(A)) \subseteq \mathrm{Id}(\widehat{A})$. Mostremos que $\mathrm{Id}(\widehat{A}) \subseteq \mathrm{Id}(S(A))$. Considere $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio não nulo tal que $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$. Sejam $c_1, \ldots, c_n \in S(A)$, então, como $\{a_1, \ldots, a_k\}$ e $\{b_1, \ldots, b_t\}$ são bases de $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$, respectivamente, podemos escrever

$$c_i = a_1 \otimes p_{i1} + \cdots + a_k \otimes p_{ik} + b_1 \otimes q_{i1} + \cdots + b_t \otimes q_{it},$$

com $i = 1, \ldots, n$ e $p_{ij} \in S^{(0)}$, $q_{ij} \in S^{(1)}$. Usando raciocínios análogos aos da Proposição 5.2.1, é válido que existe um homomorfismo $\widehat{\varphi} : A \otimes S \to A \otimes S$ tal que

$$\widehat{\varphi}(a_i) = a_i,\ \widehat{\varphi}(b_j) = b_j,\ \widehat{\varphi}(u_{ij}) = p_{ij},\ \widehat{\varphi}(v_{ij}) = q_{ij},\ 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq t.$$

Note que $\widehat{\varphi}(\xi_i) = c_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto,

$$f(c_1, \ldots, c_n) = f(\widehat{\varphi}(\xi_1), \ldots, \widehat{\varphi}(\xi_n)) = \widehat{\varphi}(f(\xi_1, \ldots, \xi_n)) = 0,$$

e assim f é uma identidade de $S(A)$, o que implica na igualdade $\mathrm{Id}(S(A)) = \mathrm{Id}(\widehat{A})$.

Com isso, pode-se facilmente verificar que $\widehat{A}$ é isomorfa a $F\langle X\rangle/\mathrm{Id}(S(A))$ conforme a correspondência $\xi_i \mapsto x_i + \mathrm{Id}(S(A))$. Portanto, pelo Teorema 2.2.9, temos que a álgebra $\widehat{A}$ é uma álgebra relativamente livre da variedade $\mathrm{var}(S(A))$. Sabendo que, pela Proposição 5.2.1, $\mathrm{var}(S(A)) = \mathrm{var}(G(A))$, concluímos o resultado. $\square$

O próximo resultado é um lema técnico que nos auxiliará no Capítulo 6.

Lema 5.2.3. *Sejam A uma superálgebra e $Y_k := \sum_j b_j^{(0)} \otimes u_{kj} + \sum_j b_j^{(1)} \otimes v_{kj} \in S(A)$, $k = 1, 2, \ldots$, onde $u_{kj} \in U, v_{kj} \in V$ são elementos distintos, e $b_j^{(i)} \in A^{(i)}$, para todo $j \geq 1$. Se existem* *elementos não nulos $a_i, Z, b_i \in S(A)$ tais que $\sum_{i=1}^n a_i Z b_i = 0$, com $b_1, \ldots, b_n$ polinômios não nulos em $Y_1, Y_2, \ldots$, e $a_1, \ldots, a_n, Z$ elementos de $S(A)$ dependendo de variáveis pertencentes a $(U - \{u_{kj} \mid k, j \geq 1\}) \cup (V - \{v_{kj} \mid k, j \geq 1\})$, então existem polinômios multilineares e não nulos $g_1, \ldots, g_n$ em $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, para algum $k \geq 1$, tais que $\sum_{i=1}^n a_i Z g_i = 0$.*

Demonstração. Mostraremos primeiramente que existem polinômios multihomogêneos e não nulos satisfazendo as condições do lema. Suponha que $b_1, \ldots, b_n$ sejam polinômios não nulos em $Y_1, \ldots, Y_k$ e considere $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in F$. Defina a aplicação $\varphi : U \cup V \to S$ como $\varphi(u_{ij}) = \gamma_i u_{ij}, \varphi(v_{ij}) = \gamma_i v_{ij}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, $j \geq 1$, e sobre os outros elementos de $U \cup V$, a aplicação φ é a identidade. Então φ se estende a um homomorfismo $\overline{\varphi} : A \otimes S \to A \otimes S$ de F-álgebras tal que $\overline{\varphi}$ é a identidade sobre A. Note que

$$\overline{\varphi}(a_i) = a_i, \text{ para } i \geq 1, \ \overline{\varphi}(Z) = Z \quad \text{e} \quad \overline{\varphi}(Y_i) = \begin{cases} \gamma_i Y_i, & \text{para } \ 1 \leq i \leq k \\ Y_i, & \text{para } \ i \geq k+1. \end{cases}$$

Escrevamos $b_i = f_i(Y_1, \ldots, Y_k)$, com $i = 1, \ldots, n$. Para cada variável Y_t fixa, $1 \leq t \leq k$, podemos decompor $f_i = \sum_{j=0}^{d_i} f_{ij}$, onde f_{ij} é a soma de todos os monômios de f_i nos quais Y_t aparece com grau j, e $d_i = deg_{Y_t} f_i$. Sejam $d = \max_{1 \leq i \leq n}\{d_i\}$ e $f_{ij} = 0$, para $j > d_i$. Como F é um corpo infinito, existem $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ elementos distintos pertencentes a F. Temos $f_{ij}(Y_1, \ldots, \alpha_s Y_t, \ldots, Y_k) = \alpha_s^j f_{ij}(Y_1, \ldots, Y_k)$. Logo

$$f_i(Y_1, \ldots, \alpha_s Y_t, \ldots, Y_k) = \sum_{j=0}^{d} \alpha_s^j f_{ij}(Y_1, \ldots, Y_k) = \sum_{j=0}^{d} \alpha_s^j f_{ij},$$

onde $f_{ij} = f_{ij}(Y_1, \ldots, Y_k)$.

Considere $\overline{\varphi}$ definido a partir de $\gamma_t = \alpha_s$ e $\gamma_u = 1$, para $1 \leq u \leq k$ com $u \neq t$. Aplicando $\overline{\varphi}$ em $\sum_{i=1}^n a_i Z b_i = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i Z b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i Z \overline{\varphi}(b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i Z f_i(Y_i, \ldots, \alpha_s Y_t, \ldots, Y_k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i Z \left(\sum_{j=0}^{d} \alpha_s^j f_{ij}\right) = \sum_{j=0}^{d} \alpha_s^j \left(\sum_{i=1}^{n} a_i Z f_{ij}\right) = \sum_{j=0}^{d} \alpha_s^j c_j, \end{aligned}$$

com $c_j = \sum_{i=1}^n a_i Z f_{ij}$, $j = 0, \ldots, d$. Logo,

$$\sum_{j=0}^{d} \alpha_s^j c_j = 0, \quad \text{para todo } \ s = 0, \ldots, d.$$

Para $\Delta := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_0 & \cdots & \alpha_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0^d & \cdots & \alpha_d^d \end{pmatrix}$, segue que $\Delta^T(c_0 \cdots c_d)^T = 0$, onde T denota a aplicação transposta. Como $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ são distintos, temos que o determinante $\det(\Delta) \neq 0$, já que se trata do determinante de Vandermonde. Logo $c_j = 0$, para todo $j = 0, \ldots, d$. Assim,

$$\sum_i a_i Z f_{ij} = 0, \quad \text{para todo} \quad j = 0, \ldots, d.$$

Repetindo indutivamente este raciocínio para cada variável, levando em conta os termos não nulos e renomeando os $b_j's$, podemos considerar $\sum_{i=1}^n a_i Z b_j = 0$ com $b_1, \ldots, b_n$ homogêneos em cada variável Y_t, ou seja, multihomogêneos.

Agora, a fim de mostrarmos a existência de polinômios $g_1, \ldots, g_n$ multilineares, fixamos Y_i, $1 \leq i \leq k$, e construímos um endomorfismo $\psi : A \otimes S \to A \otimes S$ que fixe os elementos de A e

$$\psi(Y_i) = Y_i + Y_{k+1}, \quad \psi(Y_j) = Y_j, \ j \neq i,$$

$$\psi(a_i) = a_i, \ \text{para } i \geq 1, \ \text{e } \psi(Z) = Z.$$

Substituindo em $\sum_i a_i Z b_i = 0$ cada Y_i por $Y_i + Y_{k+1}$, temos

$$0 = \psi\left(\sum_i a_i Z b_i\right) = \sum_i a_i Z \psi(b_i) = \sum_i a_i Z b_i(Y_1, \ldots, Y_i + Y_{k+1}, \ldots, Y_k).$$

Disso,

$$\begin{aligned} 0 \ &= \sum_i a_i Z b_i(Y_1, ..., Y_i + Y_{k+1}, ..., Y_k) - \sum_i a_i Z b_i(Y_1, ..., Y_i, ..., Y_k) - \sum_i a_i Z b_i(Y_1, ..., Y_{k+1}, ..., Y_k) \\ &= \sum_i a_i Z(b_i(Y_1, ..., Y_i + Y_{k+1}, ..., Y_k) - b_i(Y_1, ..., Y_i, ..., Y_k) - b_i(Y_1, ..., Y_{k+1}, ..., Y_k)). \end{aligned}$$

Prosseguindo com o processo de multilinearização standard, visto na Seção 2.3, obtemos polinômios multilineares não nulos $g_1, \ldots, g_n$ tais que $\sum_i^n a_i Z g_i = 0$. □

5.3 A superenvolvente de uma superálgebra minimal

Dada uma superálgebra minimal $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$, mostraremos nesta seção que, se f é um polinômio multilinear que não é uma identidade de $S(A)$, então existem elementos "estratégicos" em $f(S(A))$. Começamos com o caso $m = 1$, isto é, A é uma superálgebra simples. Para tanto, dada uma superálgebra simples A e um monômio não nulo p pertencente a $F[U,V]$, definimos $\xi_A(p)$ como sendo:

$$\xi_A(p) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = M_n(F) \text{ ou } A = M_{k,l}(F) \\ 1, & \text{se } |p| = 0 \text{ e } A = M_n(F \oplus cF) \\ c, & \text{se } |p| = 1 \text{ e } A = M_n(F \oplus cF). \end{cases}$$

Proposição 5.3.1. *Seja A uma superálgebra simples sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e suponha que $f = f(x_1, ..., x_n)$ é um polinômio multilinear que não é uma identidade de $S(A)$, a superenvolvente de A. Então existe um monômio não nulo $p \in F[U,V]$ tal que uma das seguintes afirmações é satisfeita:*

(i) $\xi_A(p)E \otimes p \in f(S(A))$, onde E é o elemento unidade de A;

(ii) para quaisquer dois idempotentes graduados minimais e_1, e_2 pertencentes a A, temos ou $\xi_A(p)(e_1 - e_2) \otimes p \in f(S(A))$, ou $\xi_A(p)(e_1 + e_2) \otimes p \in f(S(A))$.

Demonstração. Como f não é uma identidade de $S(A)$, temos, pelo Lema 5.1.5, que existem elementos homogêneos $a_1, \ldots, a_n \in A$ e monômios $p_1, \ldots, p_n \in F[U,V]$ tais que

$$f(a_1 \otimes p_1, \ldots, a_n \otimes p_n) = a \otimes p \neq 0,$$

para alguns elementos homogêneos $a \in A$, $p = p_1 \cdots p_n \in F[U,V]$. Consideremos agora duas situações, a primeira quando o elemento $a \in A$ é central, e a segunda quando a não é central em A.

Se a é central e A coincide com $M_n(F)$ ou a $M_{k,l}(F), k \geq l > 0$, então, $a = \alpha E$, para algum $\alpha \in F$, onde E é a unidade de A. Logo, $\alpha E \otimes p \in f(S(A))$ e, como a característica de F é zero, concluímos que $E \otimes p \in f(S(A))$. Se $A = M_n(F \oplus cF) = M_n(F) \oplus cM_n(F)$, com $c^2 = 1$, então, como a é homogêneo, ou $a = \alpha E$ ou $a = \alpha cE$, onde $\alpha \in F$ e E é a unidade de A. Se $a = \alpha E$, então $|a| = 0$ e assim, como $a \otimes p \in S(A)$, temos $|p| = 0$. Analogamente, se $a = \alpha cE$, então $|a| = 1$, o que implica $|p| = 1$. Procedendo como acima obtemos $\xi_A(p)E \otimes p \in f(S(A))$.

Assumimos agora o segundo caso, quando a não é central em A. Se $A = M_n(F)$ ou $M_{k,l}(F)$, $k \geq l > 0$, então, pelo Lema 5.1.7, temos que, para cada par (r,s), com $r \neq s$, existe um monômio não nulo p' pertencente a S tal que $E_{rs} \otimes p' \in f(S(A))$.

Se $A = M_n(F)$, então $|E_{rs}| = 0$ e assim, como $f(S(A))$ é um ideal de Lie de $S(A)$ (veja Lema 1.2.9), temos

$$[E_{rs} \otimes p', E_{sr} \otimes 1] = (E_{rr} - E_{ss}) \otimes p' \in f(S(A)).$$

Agora, pelo Lema 3.2.8, sabemos que $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ são todos os idempotentes graduados minimais de $M_n(F)$. Assim, concluímos que, quando $A = M_n(F)$, para quaisquer dois idempotentes graduados minimais $e_1, e_2 \in A$ temos $(e_1 - e_2) \otimes p' \in f(S(A))$, com p' um monômio não nulo de S.

Por outro lado, se $A = M_{k,l}(F)$, tomando $q' \in S^{(0)} \cup S^{(1)}$ tal que $p'q' \neq 0$ e $|q'| = |E_{sr}|$, vale que

$$[E_{rs} \otimes p', E_{sr} \otimes q'] = (E_{rr} \pm E_{ss}) \otimes p'q' \in f(S(A)),$$

sendo que o sinal $\pm$ depende do grau homogêneo de p' e q'. Assim, se $A = M_{k,l}(F)$, então existe um monômio não nulo $p'' \in F[U,V]$ tal que, para quaisquer dois idempotentes graduados minimais $e_1, e_2 \in A$, temos $\xi_A(p'')(e_1 \pm e_2) \otimes p'' \in f(S(A))$.

Se $A = M_n(F \oplus cF)$, e a é um elemento não central homogêneo, segue que $a \in M_n(F)$ ou $a \in cM_n(F)$. Se $a \in M_n(F)$, temos $|a| = |p| = 0$. Já no caso $a \in cM_n(F)$, temos $|a| = |p| = 1$. Em ambos os casos, procedendo de modo análogo ao que fizemos quando A coincidia com $M_n(F)$, obtemos que, para cada $r \neq s$, existe um monômio não nulo $\widetilde{p} \in F[U,V]$ tal que $\xi_A(\widetilde{p})(E_{rr} - E_{ss}) \otimes \widetilde{p} \in f(S(A))$. Logo, se $A = M_n(F \oplus cF)$, para quaisquer dois idempotentes graduados minimais $e_1, e_2 \in A$, temos que existe um monômio não nulo $\widetilde{p} \in F[U,V]$ tal que $\xi_A(\widetilde{p})(e_1 - e_2) \otimes \widetilde{p} \in f(S(A))$. □

Veremos agora dois lemas que tratam de casos particulares e nos auxiliam na demonstração da Proposição 5.3.4 que trabalha o caso geral em que $m \geq 2$.

Lema 5.3.2. *Seja $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$ uma superálgebra minimal sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e suponha que $f = f(x_1, ..., x_n)$ é um polinômio multilinear que não é uma identidade da $S(A_i)$, para algum $1 \leq i \leq m$. Se $m \geq 2$, então existe um monômio não nulo $p \in F[U,V]$ tal que $f(S(A))$ contém o elemento $\xi_{A_i}(p)w_{1m} \otimes p$.*

Demonstração. Primeiro, como A é uma superálgebra minimal, a Condição (4.3) da Definição 4.2.1 nos diz que existe um idempotente graduado minimal $e_i \in A_i$ de tal forma que se $i < m$ temos $e_i w_{i,i+1} = w_{i,i+1}$ e, se $i = m$, então $w_{m-1,m}e_m = w_{m-1,m}$.

Pela Proposição 5.3.1, existe um monômio não nulo $p \in F[U,V]$ tal que $a \otimes p \in f(S(A_i))$, onde ou $a = \beta E$, com E o elemento unidade de A_i, ou $a = \beta(e_i \pm e_i')$, para algum idempotente graduado minimal e_i' ortogonal a e_i e pertencente a A_i, onde $\beta = \xi_{A_i}(p)$. Como $A_i = A_i^{(0)} \oplus A_i^{(1)}$ é uma superálgebra simples, pelo Lema 3.2.8, E pode ser decomposto como soma de idempotentes graduados minimais pertencentes a $A_i^{(0)}$, e disso escrevemos $E = e_{i1} + e_{i2} + \ldots + e_{in_i}$, com $e_{it} \in A_i^{(0)}$, para todo $t \in \{1, \ldots, n_i\}$ e, $e_{ij} = e_i$, para algum j.

Se $i < m$, desde que esses idempotentes são ortogonais e $A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$ é uma soma direta de álgebras, temos para $a = \beta E$

$$\begin{aligned} aw_{i,i+1} \cdots w_{m-1,m} &= \beta(e_{i1} + e_{i2} + \ldots + e_{in_i})e_i w_{i,i+1} \cdots w_{m-1,m} = \beta e_i^2 w_{i,i+1} \cdots w_{m-1,m} \\ &= \beta w_{i,i+1} \cdots w_{m-1,m}, \end{aligned}$$

$$w_{i,i+1}\cdots w_{m-1,m}a = \beta w_{i,i+1}\cdots w_{m-1,m}e_m(e_{i1}+e_{i2}+\ldots+e_{in_i}) = 0.$$

Similarmente, concluímos que $aw_{i,i+1}\cdots w_{m-1,m} = \beta w_{i,i+1}\cdots w_{m-1,m}$ e $w_{i,i+1}\cdots w_{m-1,m}a = 0$, quando $a = \beta(e_i \pm e'_i)$.

Se $i = m$, então, como acima, $E = e_{m1}+e_{m2}+\ldots+e_{mn_m}$, e portanto, quando $a = \beta E$,

$$w_{1m}a = \beta w_{12}\cdots w_{m-1,m}e_m(e_{m1}+e_{m2}+\ldots+e_{mn_m}) = \beta w_{12}\cdots w_{m-1,m} = \beta w_{1m},$$

$$aw_{1m} = \beta(e_{m1}+e_{m2}+\ldots+e_{mn_m})w_{12}\cdots w_{m-1,m} = 0.$$

De maneira análoga, para $a = \beta(e_m \pm e'_m)$, temos $w_{1m}a = \beta w_{1m}$ e $aw_{1m} = 0$.

Considere agora p', p'' monômios pertencentes a S tais que $p'pp'' \neq 0$, $|p'| = |w_{12}\cdots w_{i-1,i}|$ e $|p''| = |w_{i,i+1}\cdots w_{m-1,m}|$. A superenvolvente de A_i é a superálgebra $S(A_i) = (A_i^{(0)}\otimes S^{(0)}) \oplus (A_i^{(1)}\otimes S^{(1)})$. Sendo assim, $f(S(A_i)) \subseteq f(S(A))$ e o Lema 1.2.9 diz que $f(S(A))$ é um ideal de Lie de $S(A)$, ou seja, $[f(S(A)), S(A)] \subseteq f(S(A))$, e isso implica que, $[S(A), f(S(A))] = -[f(S(A)), S(A)] \subseteq f(S(A))$. Daí, se $i < m$,

$$\begin{aligned}[\underbrace{w_{12}\cdots w_{i-1,i}\otimes p'}_{\in S(A)}, \underbrace{[a\otimes p, w_{i,i+1}\cdots w_{m-1,m}\otimes p'']}_{\in f(S(A))}] &= [w_{12}\cdots w_{i-1,i}\otimes p', \beta w_{i,i+1}\cdots w_{m-1,m}\otimes pp''] \\ &= \beta w_{1m}\otimes p'pp'' \in f(S(A)).\end{aligned}$$

Se $i = m$, temos

$$[a\otimes p, w_{1m}\otimes p'] = -\beta w_{1m}\otimes p'p \in f(S(A)),$$

e assim, $\beta w_{1m}\otimes p'p \in f(S(A))$. □

Lema 5.3.3. *Seja $A = A_1\oplus\cdots\oplus A_m + J$ uma superálgebra minimal sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, com $m \geq 2$ e suponha que $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ é um polinômio multilinear que não é uma identidade de $S(A)$. Se todos os valores não nulos de f pertencem a $S(A_{1m})$, então existe um monômio não nulo $p \in F[U,V]$ tal que $f(S(A))$ contém um elemento $w_{1m}\otimes p$ ou $cw_{1m}\otimes p$, com $c^2 = 1$.*

Demonstração. Como f não é uma identidade de $S(A)$, pelo Lema 5.1.5, existem elementos homogêneos $a_1,\ldots,a_n \in A$ e monômios $p_1,\ldots,p_n \in S$, satisfazendo $|a_i| = |p_i|$ e

$$f(a_1\otimes p_1,\ldots,a_n\otimes p_n) = a\otimes p \neq 0. \tag{5.5}$$

Uma vez que todos os valores não nulos de f pertencem a $S(A_{1m})$, temos que $a\otimes p \in S(A_{1m})$ e assim $a \in A_{1m}$. Mais ainda, alguns dos elementos $a_1,\ldots,a_n$, digamos $a_1,\ldots,a_k$, com $k \geq 1$, pertencem a $J = \oplus_{i<j} A_{ij}$ e $a_{k+1}, \ldots, a_n \in A_{ss}$. Logo, pelo Lema 4.2.13, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$a = a' w_{1m}(q_2, \ldots, q_{m-1}) b',\ a_1 = a'_{i_1} w_{i_1 j_1}(q^{(1)}_{i_1+1}, \ldots, q^{(1)}_{j_1-1}) b'_{j_1},\ \ldots\ , a_k = a'_{i_k} w_{i_k j_k}(q^{(k)}_{i_k+1}, \ldots, q^{(k)}_{j_k-1}) b'_{j_k},$$

com $a' \in A_1$, $b' \in A_m$, $a'_{i_1} \in A_{i_1}, b'_{j_1} \in A_{j_1}, \ldots, a'_{i_k} \in A_{i_k}, b'_{j_k} \in A_{j_k}$.

Considere agora os elementos

$$\bar{a}_1 = a'_{i_1} w_{i_1 j_1}(1, \ldots, 1) b'_{j_1},\ \ldots\ , \bar{a}_k = a'_{i_k} w_{i_k j_k}(1, \ldots, 1) b'_{j_k},$$

com $a'_{i_l} \in A_{i_l}, b'_{j_l} \in A_{j_l}$, $l = 1, \ldots, k$. Substituindo em (5.5) o elemento a_l por $\bar{a}_l$, para $l = 1, \ldots, k$, e levando em conta a regra de multiplicação para os elementos em A, temos

$$f(\bar{a}_1 \otimes p_1, \ldots, \bar{a}_k \otimes p_k, a_{k+1} \otimes p_{k+1}, \ldots, a_n \otimes p_n) = \bar{a} \otimes p,$$

com $\bar{a} = a' w_{1m}(1, \ldots, 1) b' = a' w_{1m} b' \neq 0$.

Por nossa escolha dos $w'_{ij}s$, existem idempotentes graduados minimais $e_1 \in A_1$ e $e_m \in A_m$ tais que $e_1 w_{1m} = w_{1m} e_m = w_{1m}$. Desde que $0 \neq A_1 a' e_1 \subseteq A_1 e_1$ e $0 \neq e_m b' A_m \subseteq A_m$, pelo Lema 3.2.8, temos que $e_1 \in A_1 a' e_1$ e $e_m \in e_m b' A_m$ e assim existem elementos homogêneos $\widetilde{a}_1 \in A_1$, $\widetilde{a}_m \in A_m$ tais que $e_1 = \widetilde{a}_1 a' e_1$ e $e_m = e_m b' \widetilde{a}_m$. Tomando $p', p'' \in F[U, V]$ de tal forma que seja válido $p' p p'' \neq 0$, $|p'| = |\widetilde{a}_1|$ e $|p''| = |\widetilde{a}_m|$, segue que

$$0 \neq w_{1m} \otimes p' p p'' = \widetilde{a}_1 a' e_1 w_{1m} e_m b' \widetilde{a}_m \otimes p' p p'' = [[\widetilde{a}_1 \otimes p', a' w_{1m} b' \otimes p], \widetilde{a}_m \otimes p''] \in f(S(A)),$$

como queríamos demonstrar. □

Proposição 5.3.4. *Seja $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$ uma superálgebra minimal sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e suponha que $f = f(x_1, ..., x_n)$ é um polinômio multilinear que não é uma identidade de $S(A)$, a superenvolvente de A. Se $m \geq 2$, então existe um monômio não nulo $p \in F[U, V]$ tal que $f(S(A))$ contém um elemento $w_{1m} \otimes p$ ou $c w_{1m} \otimes p$, com $c^2 = 1$.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre m, ou seja, sobre o número de componentes $\mathbb{Z}_2$-simples de A. Considere primeiro o caso $m = 2$. Se f não é uma identidade da superenvolvente de A_1 ou de A_2, então pelo Lema 5.3.2 segue o resultado. Assim, podemos assumir que f é uma identidade da superenvolvente de $A_1 \oplus A_2$. Disso, como vimos na Observação 4.2.11, todos os valores não nulos de f pertencem a $S(A_{12})$ e assim o resultado segue do Lema 5.3.3.

Desta forma, suponha agora que $m > 2$ e considere as superálgebras minimais $A^{(1,m-1)}$ e $A^{(2,m)}$ contidas em A, definidas em (4.5), ou seja,

$$A^{(1,m-1)} = \bigoplus_{1\leq i\leq j\leq m-1} A_{ij} \quad \text{e} \quad A^{(2,m)} = \bigoplus_{2\leq i\leq j\leq m} A_{ij}.$$

Se f não é uma identidade de $S(A^{(1,m-1)})$, como $A_{ss}^{(1,m-1)} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_{m-1}$, temos pela nossa hipótese de indução que existe um monômio não nulo $p \in F[U,V]$ tal que $\beta w_{1,m-1} \otimes p \in f(S(A^{(1,m-1)}))$, onde $\beta = 1$ ou $\beta = c$. Tome $p' \in F[U,V]$ tal que $pp' \neq 0$ e $|p'| = |w_{m-1,m}|$. Logo, observando que $f(S(A^{(1,m-1)})) \subseteq f(S(A))$, segue que

$$[\beta w_{1,m-1} \otimes p, w_{m-1,m} \otimes p'] = \beta w_{1,m} \otimes pp' \in f(S(A)).$$

Analogamente, se f não é uma identidade de $S(A^{(2,m)})$, como $A_{ss}^{(2,m)} = A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$, temos que existe um monômio não nulo p'' em $F[U,V]$ tal que $\beta' w_{2,m} \otimes p'' \in f(S(A^{(2,m)}))$, onde $\beta' = 1$ ou $\beta' = c$. Por argumentos similares ao caso de f não ser identidade de $S(A^{(1,m-1)})$, obtemos que existe um monômio não nulo $p''' \in F[U,V]$ tal que $\beta' w_{1m} \otimes p''' \in f(S(A))$.

Consequentemente, podemos assumir que f é uma identidade de $S(A^{(1,m-1)})$ e $S(A^{(2,m)})$, pois caso contrário já temos a conclusão do lema. Nessa condição, pela Observação 4.2.11, todos os valores não nulos de f pertencem a $S(A_{1m})$ e o resultado segue aplicando o Lema 5.3.3. $\square$

Até o presente momento, sabemos pelo Lema 4.2.12, que se $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$ é uma superálgebra minimal, então $\mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m)) \subseteq \mathrm{Id}(G(A))$. Entretanto, veremos no próximo capítulo que vale uma afirmação ainda mais forte, a saber, a igualdade. Para tanto, finalizamos esta seção com uma proposição crucial na demonstração do Teorema 6.1.1, que por sua vez nos garantirá que, para $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$ uma superálgebra minimal, temos $\mathrm{Id}(G(A)) = \mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m))$.

Proposição 5.3.5. *Seja $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$ uma superálgebra minimal sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então $S(A)$ contém uma álgebra relativamente livre da variedade determinada pelo T-ideal $\mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m))$.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre m. Se $m = 1$, então a Proposição 5.2.2 nos dá o resultado para este caso. Suponhamos $m > 1$. Vamos particionar os conjuntos U e V das variáveis comutativas e anticomutativas, respectivamente, da álgebra supercomutativa livre $S = F[U,V]$, em três subconjuntos disjuntos enumeráveis

$$U = \widetilde{U} \cup \overline{U} \cup \widehat{U} \quad \text{e} \quad V = \widetilde{V} \cup \overline{V} \cup \widehat{V}.$$

Logo a álgebra supercomutativa livre $S = F[U, V]$ contém três cópias isomorfas, a saber, $\widetilde{S} = F[\widetilde{U}, \widetilde{V}], \overline{S} = F[\overline{U}, \overline{V}]$ e $\widehat{S} = F[\widehat{U}, \widehat{V}]$.

Considere C a superálgebra minimal $A^{(1,m-1)} = \oplus_{1\leq i\leq j\leq m-1} A_{ij}$. Pela hipótese de indução temos que a álgebra $\widetilde{S}(C)$ contém uma álgebra relativamente livre $\widetilde{C}$ da variedade determinada pelo T-ideal $\mathrm{Id}(G(A_1))\cdots\mathrm{Id}(G(A_{m-1}))$. Logo

$$\mathrm{Id}(\widetilde{S}(C)) \subseteq \mathrm{Id}(\widetilde{C}) = \mathrm{Id}(G(A_1))\cdots\mathrm{Id}(G(A_{m-1})). \tag{5.6}$$

Por outro lado, como C é uma superálgebra minimal, pelo Lema 4.2.12, temos

$$\mathrm{Id}(\widetilde{C}) = \mathrm{Id}(G(A_1))\cdots\mathrm{Id}(G(A_{m-1})) \subseteq \mathrm{Id}(G(C)). \tag{5.7}$$

Desde que, pela Proposição 5.2.1, $\mathrm{Id}(G(C)) = \mathrm{Id}(\widetilde{S}(C))$, de (5.6) e (5.7) obtemos $\mathrm{Id}(\widetilde{C}) = \mathrm{Id}(\widetilde{S}(C)) = \mathrm{Id}(G(C))$. Logo, $\widetilde{C}$ é a álgebra relativamente livre da variedade $\mathrm{var}(G(C))$.

Agora, como C é uma superálgebra, podemos escrever $C = C^{(0)} \oplus C^{(1)}$ e assim fixar bases homogêneas $\{c_1^{(0)}, \ldots, c_{r_1}^{(0)}\}$ e $\{c_1^{(1)}, \ldots, c_{s_1}^{(1)}\}$ de $C^{(0)}$ e $C^{(1)}$, respectivamente. Para $k = 1, 2, \ldots$, definimos

$$X_k = \sum_j c_j^{(0)} \otimes \widetilde{u}_{kj} + \sum_j c_j^{(1)} \otimes \widetilde{v}_{kj},$$

com $\widetilde{u}_{kj} \in \widetilde{U}, \widetilde{v}_{kj} \in \widetilde{V}$ elementos distintos. Já que $\widetilde{C}$ é uma álgebra relativamente livre da variedade $\mathrm{var}(G(C))$, pela Proposição 5.2.2 podemos supor que $\widetilde{C} = F\{X_1, X_2, \ldots\}$ e $X_1, X_2, \ldots$ são geradores livres da álgebra $\widetilde{C}$.

Seja $B = A_m$ e escreva $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$. Tomemos $\{b_1^{(0)}, \ldots, b_{r_2}^{(0)}\}$ e $\{b_1^{(1)}, \ldots, b_{s_2}^{(1)}\}$ bases de $B^{(0)}$ e $B^{(1)}$, respectivamente. Como antes, para $k = 1, 2, \ldots$, definimos

$$Y_k = \sum_j b_j^{(0)} \otimes \widehat{u}_{kj} + \sum_j b_j^{(1)} \otimes \widehat{v}_{kj},$$

onde $\widehat{u}_{kj} \in \widehat{U}, \widehat{v}_{kj} \in \widehat{V}$ são elementos distintos. Se $\widehat{B} \subseteq \widehat{S}(B)$ é a álgebra relativamente livre da variedade $\mathrm{var}(G(A_m))$ então, novamente, pela Proposição 5.2.2, temos $\widehat{B} = F\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ com $Y_1, Y_2, \ldots$ geradores livres de $\widehat{B}$ sobre F.

Vamos agora considerar o subespaço $A_{m-1}w_{m-1,m}A_m = A_{m-1,m} = A_{m-1,m}^{(0)} \oplus A_{m-1,m}^{(1)}$ e sejam $\{d_1^{(0)}, \ldots, d_{r_3}^{(0)}\}$ e $\{d_1^{(1)}, \ldots, d_{s_3}^{(1)}\}$ bases homogêneas de $A_{m-1,m}^{(0)}$ e $A_{m-1,m}^{(1)}$, respectivamente. Para $k = 1, 2, \ldots$, definimos

$$Z_k = \sum_j d_j^{(0)} \otimes \overline{u}_{kj} + \sum_j d_j^{(1)} \otimes \overline{v}_{kj},$$

com $\overline{u}_{kj} \in \overline{U}, \overline{v}_{kj} \in \overline{V}$ distintos.

Seja $M = A_{1m} \oplus \cdots \oplus A_{m-1,m}$. Note que M é um (C, B)-bimódulo e assim $S(M)$ é um

$(S(C), S(B))$-bimódulo, e consequentemente $S(M)$ é um $(\widetilde{S}(C), \widehat{S}(B))$-bimódulo. Finalmente, seja $\overline{M}$ o $(\widetilde{C}, \widehat{B})$-bimódulo, contido em $S(M)$, gerado pelos elementos $Z_1, Z_2, \ldots$. Observe que, a fim de concluirmos nossa demonstração, é suficiente provarmos que $\overline{M}$ é um $(\widetilde{C}, \widehat{B})$-bimódulo livre com geradores livres $Z_1, Z_2, \ldots$. De fato, se assim o fizermos, teremos que todas as condições do Teorema de Lewin (Teorema 2.2.10) serão satisfeitas para as F-álgebras $\widetilde{S}(C)$ e $\widehat{S}(B)$ e o $(\widetilde{S}(C), \widehat{S}(B))$-bimódulo $S(M)$. Mais precisamente,

(1) $\widetilde{S}(C)$ contém uma subálgebra relativamente livre $\widetilde{C}$ com geradores livres $X_1, X_2, \ldots$;

(2) $\widehat{S}(B)$ contém uma subálgebra relativamente livre $\widehat{B}$ com geradores livres $Y_1, Y_2, \ldots$;

(3) $S(M)$ contém um $(\widetilde{C}, \widehat{B})$-bimódulo livre $\overline{M}$ com geradores livres $Z_1, Z_2, \ldots$.

Com isso, aplicando o Teorema de Lewin, obteremos que os elementos $\begin{pmatrix} X_i & Z_i \\ 0 & Y_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \ldots$, são geradores livres de uma subálgebra relativamente livre $\widetilde{D}$ da álgebra $\begin{pmatrix} \widetilde{S}(C) & S(M) \\ 0 & \widehat{S}(B) \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} S(C) & S(M) \\ 0 & S(B) \end{pmatrix}$ e $\mathrm{Id}(\widetilde{D}) = \mathrm{Id}(\widetilde{C})\,\mathrm{Id}(\widehat{B})$. Como $A = C \oplus B \oplus M$ (soma direta de espaços vetoriais), pela Observação 5.1.6 temos $S(A) = S(C) \oplus S(B) \oplus S(M)$ e assim $S(A)$ pode ser naturalmente identificada com $\begin{pmatrix} S(C) & S(M) \\ 0 & S(B) \end{pmatrix}$. Desta forma teremos que a subálgebra de $S(A)$ gerada por $X_i + Y_i + Z_i$, com $i = 1, 2, \ldots$, é uma álgebra relativamente livre determinada pelo T-ideal $\mathrm{Id}(\widetilde{C})\mathrm{Id}(\widehat{B}) = \mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_{m-1})) \cdot \mathrm{Id}(G(A_m))$, e concluiremos o lema.

Vamos então mostrar que os elementos $Z_1, Z_2, \ldots$, geram um $(\widetilde{C}, \widehat{B})$-bimódulo livre em $S(A)$. Para tanto, suponhamos por contradição que existe uma relação não trivial

$$\sum_{i,j} a_{ij} Z_j b_{ij} = 0, \tag{5.8}$$

onde $a_{ij} \in \widetilde{C}, b_{ij} \in \widehat{B}$. Lembramos que quaisquer dois elementos distintos Z_i e Z_j, conforme definidos, dependem de conjuntos distintos de variáveis de $\overline{U}$ e $\overline{V}$. Com isso, de (5.8), conseguimos uma relação não trivial da forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i Z_1 b_i = a_1 Z_1 b_1 + \cdots + a_n Z_1 b_n = 0, \tag{5.9}$$

de tal maneira que os elementos $a_1, \ldots, a_n \in \widetilde{C}$ são linearmente independentes e $b_1, \ldots, b_n \in \widehat{B}$ são todos não nulos. Lembre que esses elementos $b_1, \ldots, b_n$ são polinômios em $Y_1, Y_2, \ldots$, e assim, pelo Lema 5.2.3, podemos assumir que tais polinômios são multilineares em $Y_1, \ldots, Y_k$.

Agora, considere e_m um idempotente graduado minimal de $A_m = B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$ tal que $w_{m-1,m} e_m = w_{m-1,m}$. Pelo Lema 3.2.8, é válido que $e_m = e_{\alpha\alpha} \in B^{(0)}$ é uma matriz diagonal unitária da superálgebra simples B. Observe que b_1 não é uma identidade de $S(B) = S(A_m)$, pois $0 \neq b_1 = b_1(Y_1, \ldots, Y_k) \in \widehat{B} = F\{Y_1, Y_2, \ldots\}$, $\mathrm{var}(\widehat{B}) = \mathrm{var}(G(A_m)) = \mathrm{var}(\widehat{S}(A_m)) = \mathrm{var}(\widehat{S}(B))$. Assim, a Proposição 5.3.1 nos fala que existe um monômio não nulo $p \in F[\widehat{U}, \widehat{V}]$ e $\xi \in \{1, c \mid c^2 = 1\}$ tal que ou $\xi E \otimes p \in b_1(\widehat{S}(B))$ ou $\xi(e_{\alpha\alpha} \pm e_{\beta\beta}) \otimes p \in b_1(\widehat{S}(B))$, para qualquer $\beta \neq \alpha$ com $e_{\beta\beta} \in B$. Logo existe uma avaliação $\varphi : Y_i \mapsto h_i \otimes p_i,\ i = 1, \ldots, k$, onde $h_i \in B^{(0)} \cup B^{(1)}$ são elementos homogêneos e $p_i \in \widehat{S}$ são monômios, tal que

$$\varphi(b_1) = \left(\xi \sum_{i,l} \gamma_{il}^1 e_{il}\right) \otimes p,$$

com $\gamma_{il}^1 \in F$ e $\gamma_{\alpha\alpha}^1 \neq 0$. Como $b_1, \ldots, b_n$ são polinômios multilineares em $Y_1, \ldots, Y_k$, podemos escrever $b_j = \sum_{\sigma \in S_k} \lambda_\sigma^j Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(k)}$, com $\lambda_\sigma^j \in F$, e assim

$$\begin{aligned}\varphi(b_j) &= b_j(\varphi(Y_1), \ldots, \varphi(Y_k)) = b_j(h_1 \otimes p_1, \ldots, h_k \otimes p_k) = \sum_\sigma \lambda_\sigma h_{\sigma(1)} \cdots h_{\sigma(k)} \otimes p_{\sigma(1)} \cdots p_{\sigma(k)} \\ &= \left(\sum_\sigma \pm\lambda_\sigma h_{\sigma(1)} \cdots h_{\sigma(k)}\right) \otimes p_1 \cdots p_k = \left(\sum_\sigma \pm\lambda_\sigma h_{\sigma(1)} \cdots h_{\sigma(k)}\right) \otimes p = \left(\xi \sum_{i,l} \gamma_{il}^j e_{il}\right) \otimes p,\end{aligned}$$

com $\gamma_{i,l}^j \in F$. Logo

$$\varphi(b_j) = \left(\xi \sum_{i,l} \gamma_{il}^j e_{il}\right) \otimes p, \quad \gamma_{il}^j \in F, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5.10}$$

com $\gamma_{\alpha\alpha}^1 \neq 0$. Note que, como $a_1, \ldots, a_n \in \widetilde{C}$ são linearmente independentes e $\gamma_{\alpha\alpha}^1 \neq 0$, o polinômio

$$f = f(X_1, \ldots, X_t) = \sum_j \gamma_{\alpha\alpha}^j a_j \tag{5.11}$$

não é uma identidade de $\widetilde{S}(C)$.

Lembramos que os elementos X_i, Y_i e Z_i dependem de conjuntos disjuntos de indeterminadas. Portanto, obtemos que, para qualquer avaliação $\eta : \widetilde{C} \to \widetilde{S}(C)$, existe um homomorfismo $\theta : A \otimes S \to A \otimes S$ tal que

$$\theta(X_i) = \eta(X_i),\ i = 1, 2, \ldots$$

$$\theta(Y_i) = \varphi(Y_i),\ i = 1, 2, \ldots$$

$$\theta(Z_1) = w_{m-1,m} \otimes p',$$

onde $p' = 1$ se $w_{m-1,m}$ é par, $0 \neq p' \in \overline{V}$ se $w_{m-1,m}$ é ímpar. Logo, de (5.10), temos

$$\theta(b_j) = \left(\xi \sum_{i,l} \gamma^j_{il} e_{il}\right) \otimes p,\ j = 1, \ldots, n.$$

Da igualdade dada em (5.9) segue que

$$0 = \theta(a_1 Z_1 b_1 + \cdots + a_n Z_1 b_n) = \sum_j \theta(a_j)(w_{m-1,m} \otimes p') \left(\left(\xi \sum_{i,l} \gamma^j_{il} e_{il}\right) \otimes p\right).$$

Mas $w_{m-1,m} = w_{m-1,m} e_{\alpha\alpha}$. Daí,

$$0 = \sum_j \theta(a_j)(w_{m-1,m} \otimes p') \left(\left(\xi \sum_{l} \gamma^j_{\alpha l} e_{\alpha l}\right) \otimes p\right).$$

Multiplicando a relação acima por $e_{\alpha\alpha} \otimes 1$ à direita, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j \theta(a_j)(w_{m-1,m} \otimes p')((\xi \gamma^j_{\alpha\alpha} e_{\alpha\alpha}) \otimes p) = \sum_j \xi \gamma^j_{\alpha\alpha} \theta(a_j) w_{m-1,m} \otimes p'p \\ &= \xi\theta\left(\sum_j \gamma^j_{\alpha\alpha} a_j\right) w_{m-1,m} \otimes p'p = \xi\eta\left(\sum_j \gamma^j_{\alpha\alpha} a_j\right) w_{m-1,m} \otimes p'p \\ &= \xi\eta(f(X_1, \ldots, X_t)) \cdot w_{m-1,m} \otimes p'p, \end{aligned}$$

onde a última igualdade foi obtida a partir da definição de f em (5.11). Como $\eta : \widetilde{C} \to \widetilde{S}(C)$ é uma avaliação arbitrária, obtemos

$$\xi f(\widetilde{S}(C)) \cdot w_{m-1,m} \otimes p'p = 0.$$

Se $m > 2$, já que f não é uma identidade de $\widetilde{S}(C)$, segue da Proposição 5.3.4 que $f(\widetilde{S}(C))$ contém um elemento $\bar{\xi} w_{1,m-1} \otimes p''$ para algum monômio não nulo $p'' \in \widetilde{S}$, com $\bar{\xi} \in \{1, \bar{c} \mid \bar{c}^2 = 1\}$. Deste modo,

$$0 \neq \xi\bar{\xi} w_{1,m} \otimes p''p'p = \xi(\bar{\xi} w_{1,m-1} \otimes p'')(w_{m-1,m} \otimes p'p) \in \xi f(\widetilde{S}(C)) \cdot w_{m-1,m} \otimes p'p,$$

e isso é uma contradição pois $\xi f(\widetilde{S}(C)) \cdot w_{m-1,m} \otimes p'p = 0$.

Se $m = 2$, então existe um idempotente minimal $e_1 \in A_1$ satisfazendo $e_1 w_{12} = w_{12}$. Pela Proposição 5.3.1, existe um monômio não nulo $p''' \in \widetilde{S}$ tal que ou $\bar{\xi} E_1 \otimes p''' \in f(\widetilde{S}(C))$ ou $\bar{\xi}(e_1 \pm e_1') \otimes p''' \in f(\widetilde{S}(C))$, onde $e_1' \neq e_1$ é um idempotente minimal de A_1, E_1 é o elemento unidade de A_1 e $\bar{\xi} \in \{1, \bar{c} \mid \bar{c}^2 = 1\}$. Disso,

$$0 \neq \xi\bar{\xi}w_{1,2} \otimes p'''p'p \in \xi f(\widetilde{S}(C)) \cdot w_{12} \otimes p'p,$$

que também é uma contradição.

Portanto, temos que os elementos $Z_1, Z_2, \ldots,$ geram o $(\widetilde{C}, \widehat{B})-$bimódulo livre em $S(A)$, como queríamos. $\square$

Capítulo 6

Classificação de variedades minimais

Este capítulo tem como objetivo principal caracterizar as variedades minimais que possuem expoente maior ou igual a dois. Tal caracterização está intimamente ligada com a envolvente de Grassmann de uma superálgebra minimal e o produto de T-ideais verbalmente primos. Dedicamos a primeira seção a esses tópicos e na segunda seção exibiremos o teorema que classifica as variedades minimais. Na terceira seção, finalizamos este trabalho discutindo a relação entre as supervariedades minimais de posto finito e as superálgebras minimais. Lembramos que utilizamos, na maior parte, os artigos [19] e [21], escritos por Giambruno e Zaicev, para desenvolver esta dissertação.

6.1 Superálgebras minimais e produtos de T-ideais verbalmente primos

Nesta seção assumiremos que F é um corpo algebricamente fechado de característica zero. Seja $A = A_{ss} + J$ uma superálgebra minimal com $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$. O Lema 4.2.12 afirma que $\mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m)) \subseteq \mathrm{Id}(G(A))$. Note que, pelo Teorema 3.3.8, como A_i é superálgebra simples de dimensão finita, então $\mathrm{Id}(G(A_i))$ é um T-ideal verbalmente primo, para cada $i = 1, \ldots, m$. O próximo resultado nos mostrará que $\mathrm{Id}(G(A))$ é um produto de T-ideais verbalmente primos.

Teorema 6.1.1. *Se $A = A_{ss} + J$ é uma superálgebra minimal, com $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$, então $\mathrm{Id}(G(A)) = \mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m))$.*

Demonstração. A inclusão $\mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m)) \subseteq \mathrm{Id}(G(A))$ é válida pelo Lema 4.2.12. Agora, a Proposição 5.3.5 afirma que $S(A)$ contém uma álgebra relativamente livre da variedade determinada pelo T-ideal $\mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m))$ e assim $\mathrm{Id}(S(A)) \subseteq \mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m))$.

Na Proposição 5.2.1 provamos que $G(A)$ e $S(A)$ satisfazem as mesmas identidades. Sendo assim, $\mathrm{Id}(G(A)) \subseteq \mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m))$. Consequentemente, o teorema está demonstrado.

$\square$

Neste sentido, considere agora T-ideais próprios verbalmente primos $I_1, \ldots, I_m$. Como recíproca do teorema acima, mostraremos no resultado a seguir que, sob essas condições, existe uma superálgebra minimal A tal que $\mathrm{Id}(G(A)) = I_1 \cdots I_m$.

Teorema 6.1.2. *Para quaisquer superálgebras simples de dimensão finita $A_1, \ldots, A_m$, existe uma superálgebra minimal A tal que $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$. Consequentemente, se $I_1, \ldots, I_m$ são T-ideais próprios verbalmente primos de $F\langle X \rangle$, então existe uma superálgebra minimal A tal que* $\mathrm{Id}(G(A)) = I_1 \cdots I_m$.

Demonstração. Sejam $A_1, \ldots, A_m$ as superálgebras simples de dimensão finita tais que $I_j = \mathrm{Id}(G(A_j))$, para $j = 1, \ldots, m$ (as quais existem pelo Teorema 3.3.8). Para cada $j = 1, \ldots, m$, vamos definir subconjuntos Q_j da seguinte maneira:

(i) se $A_j = M_{n_j}(F)$ com uma $\mathbb{Z}_2$-graduação apropriada, então definimos $Q_j = \{1_j\}$, sendo que o elemento 1_j é o elemento unidade da superálgebra simples A_j;

(ii) se $A_j = M_{n_j}(F \oplus c_j F)$, com $c_j^2 = 1$, então definimos $Q_j = \{1_j, c_j\}$, sendo que 1_j é o elemento unidade de $M_{n_j}(F)$.

Agora fixemos algumas notações. Se A_α é do tipo $\mathcal{A}$, então vamos denotar por e_{ij}^α as matrizes unitárias de A_α. Se A_α é do tipo $\mathcal{B}$, então vamos denotar por e_{ij}^α as matrizes unitárias de $A_\alpha^{(0)}$.

A fim de construirmos uma superálgebra minimal A tal que $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$, vamos definir, para cada $1 \leq i \leq j \leq m$, os subespaços A_{ij} que constituirão a álgebra A.

Começamos observando que, para cada $i = 1, \ldots, m-1$, pelo Lema 3.2.9 temos que $A_i e_{11}^i \otimes e_{11}^{i+1} A_{i+1}$ é um (A_i, A_{i+1})-bimódulo irredutível $\mathbb{Z}_2$-graduado e seu gerador $e_{11}^i \otimes e_{11}^{i+1}$ satisfaz $e_{11}^i \otimes e_{11}^{i+1} = e_{11}^i (e_{11}^i \otimes e_{11}^{i+1}) = (e_{11}^i \otimes e_{11}^{i+1}) e_{11}^{i+1}$. Assim, seja $A_{i,i+1} \cong A_i e_{11}^i \otimes e_{11}^{i+1} A_{i+1}$ um (A_i, A_{i+1})-bimódulo irredutível $\mathbb{Z}_2$-graduado com gerador par $w_{i,i+1}$ que satisfaz as igualdades $w_{i,i+1} = e_{11}^i w_{i,i+1} = w_{i,i+1} e_{11}^{i+1}$. Em geral, para $j \geq i+2$ e para quaisquer $q_{i+1} \in Q_{i+1}, \ldots, q_{j-1} \in Q_{j-1}$, considere $A_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1})$ um (A_i, A_j)-bimódulo irredutível $\mathbb{Z}_2$-graduado com gerador homogêneo $w_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1})$ que satisfaz

$$w_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1}) = e_{11}^i w_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1}) = w_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1}) e_{11}^j. \tag{6.1}$$

Observe que o grau do elemento $w_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1})$ em uma dada $\mathbb{Z}_2$-graduação depende dos elementos $q_{i+1}, \ldots, q_{j-1}$ da seguinte forma: $w_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1})$ é par ou ímpar conforme o número de ocorrências dos $q_\alpha \in Q_\alpha$, $i+1 \leq \alpha \leq j-1$, sejam par ou ímpar, respectivamente.

Vamos definir $A_{11} = A_1, \ldots, A_{mm} = A_m$ e, para $j \geq i+2$,

$$A_{ij} = \bigoplus_{q_{i+1} \in Q_{i+1}, \ldots, q_{j-1} \in Q_{j-1}} A_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1}).$$

E consideremos

$$A = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq m} A_{ij}.$$

Por fim, definimos em A uma multiplicação a fim de que A seja uma álgebra.

(i) se $a, b \in A_{ii}$, para algum i, então o produto ab é o próprio produto da álgebra A_{ii};

(ii) para quaisquer $1 \leq i \leq j \leq m$ e $1 \leq k \leq l \leq m$, tais que $j \neq k$, definimos $A_{ij}A_{kl} = 0$. Se $a \in A_{ij}$ e $b \in A_{jk}$, então definimos a multiplicação ab da seguinte forma: de (6.1), temos que os elementos $q_i e^i_{\alpha 1} w_{ij}(q_{i+1}, \ldots, q_{j-1}) q_j e^j_{1\beta}$, com $q_i \in Q_i, \ldots, q_j \in Q_j$, $1 \leq \alpha \leq n_i$, $1 \leq \beta \leq n_j$, nos dão uma base linear dos A_{ij}. Para simplificar nossa notação, escrevemos $\overline{q}_{ij} = (q_{i+1}, \ldots, q_{j-1})$. Disso, definimos a multiplicação

$$q_i e^i_{\alpha 1} w_{ij}(\overline{q}_{ij}) q_j e^j_{1\beta} \cdot q'_j e^j_{\gamma 1} w_{jk}(\overline{q}'_{jk}) q'_k e^k_{1\delta} = \begin{cases} q_i e^i_{\alpha 1} w_{ik}(\overline{q}_{ij}, q_j q'_j, \overline{q}'_{jk}) q'_k e^k_{1\delta}, & \text{se } \beta = \gamma \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, com essas definições, temos que A é uma superálgebra associativa com dimensão finita, onde sua subálgebra semissimples maximal é $A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$ e o radical de Jacobson é dado por $J = \oplus_{1 \leq i < j \leq m} A_{ij}$. Claramente, A é uma superálgebra minimal e, pelo Teorema 6.1.1, segue que $\mathrm{Id}(G(A)) = I_1 \cdots I_m$, onde $I_1, \ldots, I_m$ são T-ideais próprios verbalmente primos de $F\langle X \rangle$. □

Pretendemos agora generalizar a noção de T-ideal verbalmente primo para produtos de T-ideais verbalmente primos. Para tanto, daremos o próximo teorema.

Teorema 6.1.3. *Sejam $I_1, \ldots, I_m$ T-ideais verbalmente primos e considere $I = I_1 \cdots I_m$. Se P, Q são T-ideais tais que $PQ \subseteq I$, então ou $P \subseteq I$ ou $Q \subseteq I$ ou existe $1 \leq k \leq m-1$ tal que $P \subseteq I_1 \cdots I_k$ e $Q \subseteq I_{k+1} \cdots I_m$.*

Demonstração. Se $P \subseteq I$ ou $Q \subseteq I$, então estamos feitos. Suponha então que $P \nsubseteq I$ e $Q \nsubseteq I$. Por hipótese, I é o produto de T-ideais verbalmente primos, disso, aplicando o Teorema 6.1.2, temos que existe uma superálgebra minimal A tal que $I_1 \cdots I_m = I = \mathrm{Id}(G(A))$. Mais ainda, escrevendo $A = A_{ss} + J$ com $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$ sendo uma subálgebra semissimples maximal homogênea na $\mathbb{Z}_2$-graduação, temos $I_k = \mathrm{Id}(G(A_k))$, para $k = 1, \ldots, m$.

Uma vez que $P \nsubseteq I$, temos que existe um menor inteiro $k \in \{1, \ldots, m\}$ de tal maneira que $P \nsubseteq I_1 \cdots I_k$. Se $Q \subseteq I_k \cdots I_m$, estamos feitos já que, neste caso, $k > 1$ (pois $Q \nsubseteq I$) e assim teríamos $1 \leq k-1 \leq m-1$, $P \subseteq I_1 \cdots I_{k-1}$ e $Q \subseteq I_k \cdots I_m$. Dessa forma, podemos assumir que $Q \nsubseteq I_k \cdots I_m$.

Considere $f \in P \backslash I_1 \cdots I_k$ e $g \in Q \backslash I_k \cdots I_m$ polinômios multilineares em conjuntos disjuntos de variáveis. Como $fg \in PQ$ e temos $PQ \subseteq I$, segue que $fg \in I$. Assim, nosso intuito nessa demonstração é provar que $fg \notin \mathrm{Id}(G(A)) = I$, e com isso teremos uma contradição.

Observe primeiro que $m \geq 2$, pois senão teríamos necessariamente $P \subseteq I$ ou $Q \subseteq I$. Consideremos agora dois casos.

(i) Suponha que $k \neq 1, m$. Sejam B e C as subálgebras de A geradas por $A_1, \ldots, A_k, w_{12}, \ldots, w_{k-1,k}$ e $A_k, \ldots, A_m, w_{k,k+1}, \ldots, w_{m-1,m}$, respectivamente, ou seja, $B = A^{(1,k)}$ e $C = A^{(k,m)}$. Temos que B e C são superálgebras minimais. Como $f \in P \backslash I_1 \cdots I_k = \mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_k))$, pelo Teorema 6.1.1, $f \in P \setminus \mathrm{Id}(G(B))$. Lembrando que $G(B)$ e $S(B)$ satisfazem as mesmas identidades (veja Proposição 5.2.1), concluímos que $f \in P \setminus \mathrm{Id}(S(B))$, ou seja, f não é uma identidade de $S(B)$. De maneira análoga temos que g não é uma identidade de $S(C)$. Pela Proposição 5.3.4, existem monômios não nulos $p, q \in S = F[U, V]$, $\xi \in \{1, c \mid c^2 = 1\}$ e $\xi' \in \{1, c' \mid (c')^2 = 1\}$ tais que

$$\xi w_{1k} \otimes p \in f(S(B)) \quad \text{e} \quad \xi' w_{km} \otimes q \in g(S(C)).$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $pq \neq 0$ e disso

$$0 \neq \xi\xi' w_{1m} \otimes pq = (\xi w_{1k} \otimes p)(\xi' w_{km} \otimes q) \in f(S(B))g(S(C)),$$

e isto quer dizer que fg não é uma identidade de $S(A)$. Mas, pela Proposição 5.2.1, $S(A)$ e $G(A)$ satisfazem as mesmas identidades. Logo, fg não é uma identidade de $G(A)$, o que é uma contradição.

(ii) Suponha agora $k = 1$. Usando os mesmos argumentos de antes, pelas Proposições 5.3.1 e 5.3.4, existem monômios não nulos $p, q \in S = F[U, V]$ tais que $\xi w_{1m} \otimes q \in g(S(A))$ e, ou $\xi'(e_1 \pm e_1') \otimes p \in f(S(A_1))$, onde $e_1 w_{1m} = w_{1m}, e_1' w_{1m} = 0$, ou $\xi' E \otimes p \in f(S(A_1))$, com E elemento unidade de A_1, $\xi \in \{1, c \mid c^2 = 1\}$ e $\xi' \in \{1, c' \mid (c')^2 = 1\}$ Como antes, $f(S(A_1))g(S(A)) \neq 0$ o que implica em fg não ser uma identidade de $S(A)$ e, consequentemente, fg não ser uma identidade de $G(A)$, uma contradição. O caso quando $k = m$ é análogo ao caso $k = 1$. □

Terminamos esta seção discutindo o problema levantado no fim da Seção 4.3, onde debatíamos a possibilidade de duas superálgebras minimais A e B serem isomorfas (como álgebras ou superálgebras) dado que suas componentes semissimples maximais são isomorfas como superálgebras. Veremos adiante que, assumindo um isomorfismo entre essas componentes semissimples maximais, temos uma importante consequência que relaciona o conjunto das identidades polinomiais das envolventes de Grassmann de A e B.

Mais precisamente, considere duas superálgebras minimais $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$ e $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m + J'$, onde $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m$ são superálgebras simples e J e J' são o radical de Jacobson de A e B, respectivamente. Se $A_i \cong B_i, i = 1, \ldots, m$, e A e B possuem $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial, então pelo Lema 4.3.4 segue que $A \cong B$, já que ambas serão isomorfas a $UT(d_1, \ldots, d_m)$. Em geral, vimos nos Exemplos 3.1.21 e 4.3.6 que o isomorfismo como superálgebras $A_i \cong B_i, i = 1, \ldots, m$, não implica em A e B serem isomorfas como superálgebras. Entretanto, neste caso, como uma interessante consequência do Teorema 6.1.1, temos que $G(A)$ e $G(B)$ geram a mesma variedade.

Corolário 6.1.4. *Sejam $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$ e $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m + J'$ duas superálgebras minimais, onde J e J' são o radical de Jacobson de A e B, respectivamente. Se A_i é isomorfa, como superálgebra, a B_i, para todo $i = 1, \ldots, m$, então* $\mathrm{Id}(G(A)) = \mathrm{Id}(G(B))$.

Demonstração. Basta notar que, como A_i é isomorfa, como superálgebra, a B_i, então $G(A_i)$ é isomorfa a $G(B_i)$ e assim $\mathrm{Id}(G(A_i)) = \mathrm{Id}(G(B_i))$, para todo $i = 1, \ldots, m$. O resultado segue então aplicando o Teorema 6.1.1 às superálgebras minimais A e B. □

Se tivermos $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$ uma superálgebra minimal, onde $A_1, \ldots, A_m$ são álgebras de matrizes com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial, então temos a seguinte caracterização de $\mathrm{Id}(G(A))$.

Corolário 6.1.5. *Seja $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$ uma superálgebra minimal tal que $A_1 \cong M_{d_1}(F), \ldots, A_m \cong M_{d_m}(F)$ são superálgebras simples com uma $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial. Então* $\mathrm{Id}(G(A)) = \mathrm{Id}(UT(d_1, \ldots, d_m))$.

Demonstração. Note que, pelas hipóteses do corolário, $A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$ tem graduação trivial, mas J não tem necessariamente graduação trivial. Assim, seja J' o radical J munido da graduação trivial e considere $B := A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J'$. Logo B é uma superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial e, pelo Lema 4.3.4, temos $B \cong UT(d_1, \ldots, d_m)$. Além disso, uma vez que $G^{(0)}$ é comutativo, pelo Lema 2.3.13 é válido $\mathrm{Id}(B) = \mathrm{Id}(B \otimes G^{(0)})$. Dessa forma,

$$\mathrm{Id}(UT(d_1, \ldots, d_m)) = \mathrm{Id}(B) = \mathrm{Id}(B \otimes G^{(0)}) = \mathrm{Id}(G(B)) = \mathrm{Id}(G(A)),$$

onde a última igualdade foi obtida aplicando o Corolário 6.1.4. □

Exemplo 6.1.6. Vimos no Exemplo 3.1.19 que, se A e B denotam a álgebra $UT_2(F)$ com as graduações trivial e canônica, respectivamente, então A e B não são isomorfas como superálgebras. As envolventes de Grassmann de A e B são

$$G(A) = \begin{pmatrix} G^{(0)} & G^{(0)} \\ 0 & G^{(0)} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G(B) = \begin{pmatrix} G^{(0)} & G^{(1)} \\ 0 & G^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Pelo Corolário 6.1.4, temos que $G(A)$ e $G(B)$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais. Note que, A_1, A_2, B_1 e B_2 são todas isomorfas a F e possuem graduação trivial. Logo, pelo Corolário 6.1.5, segue que $\mathrm{Id}(G(A)) = \mathrm{Id}(UT_2(F))$ e $\mathrm{Id}(G(B)) = \mathrm{Id}(UT_2(F))$. Como $\mathrm{Id}(UT_2(F)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$ (veja Exemplo 2.1.14), então

$$\mathrm{Id}(G(A)) = \mathrm{Id}(G(B)) = \mathrm{Id}(UT_2(F)) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T.$$

6.2 Classificando variedades minimais

Daremos nessa seção o resultado principal deste trabalho que classifica todas as variedades minimais, sobre um corpo de característica zero, que possuem expoente maior ou igual a dois. Começamos com a definição de variedade minimal e assumiremos que F é um corpo de característica zero, não necessariamente algebricamente fechado.

Definição 6.2.1. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras. Dizemos que $\mathcal{V}$ é **minimal de expoente** $d \geq 2$ se $\exp(\mathcal{V}) = d$ e para toda subvariedade própria $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ temos $\exp(\mathcal{U}) < d$.

Drensky provou em [10] e [11] que se $\mathcal{V}$ é uma variedade de álgebras cujo o T-ideal é gerado por um produto de comutadores de peso 2 ou 3 então $\mathcal{V}$ minimal. E, nesses mesmos artigos, ele conjecturou que uma variedade é minimal se, e somente se, $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ é um produto de T-ideais verbalmente primos. Essa conjectura foi provada por Giambruno e Zaicev em [21] e veremos esse resultado mais adiante.

Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras sobre F. Pelos Teoremas 6.1.1 e 6.1.2 temos que $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ é um produto de T-ideias verbalmente primos se, e somente se, $\mathcal{V}$ é gerada pela envolvente de Grassmann de alguma superálgebra minimal A. Assim, a fim de comprovar a conjectura de Drensky, é suficiente verificar que uma variedade $\mathcal{V}$ é minimal se, e somente se, $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$, para alguma superálgebra minimal A. Neste sentido, vejamos o seguinte teorema.

Teorema 6.2.2. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras sobre um corpo F de característica zero tal que $\exp(\mathcal{V}) = d \geq 2$. Então existe uma superálgebra minimal A tal que $G(A) \in \mathcal{V}$ e $\exp_F(G(A)) = d$. Além disso, se $\mathcal{V}$ é minimal de expoente $d \geq 2$, então $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$.*

Demonstração. Seja B uma álgebra tal que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(B)$. Considere $\overline{F}$ o fecho algébrico de F e $\overline{B} = B \otimes_F \overline{F}$. Pelo Teorema 2.3.15 temos $c_n^{\overline{F}}(\overline{B}) = c_n^F(B)$, para todo $n \geq 1$. Como $\mathcal{V} = \mathrm{var}(B)$, segue que $\exp_F(B) = \exp_F(\mathcal{V}) = d$ e disso $\exp_{\overline{F}}(\overline{B}) = d \geq 2$.

Denotando por $\overline{\mathcal{V}}$ a variedade da álgebra $\overline{B}$ sobre $\overline{F}$, isto é, $\overline{\mathcal{V}} = \mathrm{var}(\overline{B})$, temos $\exp_{\overline{F}}(\overline{\mathcal{V}}) = \exp_{\overline{F}}(\overline{B}) = d \geq 2$. Pelo Lema 4.3.2, existe uma superálgebra minimal $A = A_{ss} + J$ com $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$ sobre $\overline{F}$ tal que $G(A) \in \overline{\mathcal{V}}$ e $\dim_{\overline{F}} A_{ss} = \exp_{\overline{F}}(\overline{\mathcal{V}}) = d$. Logo, pela Observação 4.2.6, obtemos

$$\exp_{\overline{F}}(G(A)) = \dim_{\overline{F}} A_{ss} = \exp_{\overline{F}}(\overline{\mathcal{V}}) = \exp_{\overline{F}}(\overline{B}) = d. \tag{6.2}$$

Como $\overline{B}$ é uma $\overline{F}$-álgebra e $F \subseteq \overline{F}$, podemos considerar $\overline{B}$ como uma F-álgebra. Além disso, desde que $\mathrm{Id}_F(\mathcal{V}) = \mathrm{Id}_F(B)$ e, pelo Lema 2.3.13, $\mathrm{Id}_F(B) \subseteq \mathrm{Id}_F(\overline{B})$, obtemos $\mathrm{Id}_F(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Id}_F(\overline{B})$, ou seja, $\overline{B}$ é uma F-álgebra contida em $\mathcal{V}$.

Agora, observe que $\mathrm{Id}_F(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Id}_F(\overline{B}) \subseteq \mathrm{Id}_{\overline{F}}(\overline{B}) \subseteq \mathrm{Id}_{\overline{F}}(G(A))$, logo

$$\mathrm{Id}_F(\mathcal{V}) \cap F\langle X\rangle \subseteq \mathrm{Id}_{\overline{F}}(G(A)) \cap F\langle X\rangle \Rightarrow \mathrm{Id}_F(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Id}_F(G(A)) \Rightarrow G(A) \in \mathcal{V},$$

como queríamos. Como pelo Lema 2.3.16, $c_n^{\overline{F}}(G(A)) \leq c_n^F(G(A))$, segue de (6.2) que $d = \exp_{\overline{F}}(G(A)) \leq \exp_F(G(A))$. Uma vez que $G(A) \in \mathcal{V}$, temos que $\exp_F(G(A)) \leq \exp_F(\mathcal{V}) = d$, e assim $\exp_F(G(A)) = d$.

Por fim, se $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal de expoente $d \geq 2$, então como $G(A) \in \mathcal{V}$ e $\exp_F(\mathcal{V}) = d = \exp_F(G(A))$, concluímos que $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$, sobre F.

$\square$

Corolário 6.2.3. *Se $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal de expoente $d \geq 2$ sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, então existem T-ideais verbalmente primos $I_1, \ldots, I_m$ tais que* $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) = I_1 \cdots I_m$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, temos $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$, para alguma superálgebra minimal $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$, o que implica $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) = \mathrm{Id}(G(A))$. Desde que, pelo Teorema 6.1.1, $\mathrm{Id}(G(A)) = \mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m))$, então $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) = \mathrm{Id}(G(A)) = \mathrm{Id}(G(A_1)) \cdots \mathrm{Id}(G(A_m))$. E, pelo Teorema 3.3.8, para cada $k = 1, \ldots, m$, $\mathrm{Id}(G(A_k))$ é um T-ideal verbalmente primo já que A_k é uma superálgebra simples. Portanto, concluímos que $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ é um produto de T-ideais verbalmente primos. $\square$

Assim, temos em mãos grande parte dos resultados que irão nos auxiliar quando formos demonstrar o teorema que tem por finalidade classificar todas as variedades minimais que possuem expoente maior ou igual a dois. Para esse fim, nosso intuito daqui pra frente é exibir algumas ferramentas que nos possibilite concluir tal feito.

Ora, da conjectura dada por Drensky, resta-nos verificar a implicação que afirma: se $\mathcal{V}$ é uma variedade tal que $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ é o produto de T-ideais verbalmente primos, então $\mathcal{V}$ é minimal. Lembre que a definição de uma variedade minimal envolve o expoente de suas subvariedades próprias, e com isso buscamos métodos que nos permitem trabalhar com esses expoentes. Enunciamos a seguir um resultado que nos mostra, em certas condições, como comporta o expoente de produtos de T-ideais verbalmente primos.

Lema 6.2.4 ([21], Lema 7.3)**.** *Sejam $I_1, \dots, I_m, Q_1, \dots, Q_n$ T-ideais verbalmente primos próprios tais que*

$$Q_1 \cdots Q_n \subseteq I_1 \cdots I_m.$$

Então ou $\exp(Q_1 \cdots Q_n) > \exp(I_1 \cdots I_m)$ *ou $m = n$ e $I_k = Q_k$, para todo $k = 1, \dots, m$.*

Como corolário desse lema, temos uma importante e útil consequência a respeito de produtos de T-ideais verbalmente primos. Uma vez válida a igualdade entre produtos de T-ideais verbalmente primos, então cada T-ideal deste produto coincide um a um. Além disso, a recíproca é também verdadeira. Vejamos esse resultado a seguir.

Corolário 6.2.5. *Sejam $I_1, \dots, I_m, Q_1, \dots, Q_n$ T-ideais verbalmente primos próprios. Então*

$$I_1 \cdots I_m = Q_1 \cdots Q_n$$

se, e somente se, $m = n$ e $I_1 = Q_1, \dots, I_m = Q_m$.

Demonstração. Se $I_1 \cdots I_m = Q_1 \cdots Q_n$, então $\exp(I_1 \cdots I_m) = \exp(Q_1 \cdots Q_n)$ e assim, pelo lema anterior, segue que $m = n$ e $I_1 = Q_1, \dots, I_m = Q_m$. Evidentemente, se $m = n$ e $I_1 = Q_1, \dots, I_m = Q_m$, então $I_1 \cdots I_m = Q_1 \cdots Q_n$. $\square$

Finalmente, estamos em condições de enunciar e demonstrar o Teorema de Classificação das variedades minimais. Note que esse teorema tem como foco as variedades minimais de crescimento exponencial, já que consideramos variedades minimais $\mathcal{V}$ tais que $\exp(\mathcal{V}) = d \geq 2$. Sua demonstração é feita aplicando vários dos resultados vistos ao longo dessa dissertação.

Teorema 6.2.6. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero tal que* $\exp(\mathcal{V}) \geq 2$. *Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(1) *$\mathcal{V}$ é uma variedade minimal de expoente d;*

(2) $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ *é o produto de T-ideais verbalmentes primos;*

(3) $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$, *para alguma superálgebra minimal $A = A_{ss} + J(A)$ tal que* $\dim_F A_{ss} = d$.

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras sobre F de expoente $d \geq 2$ tal que $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) = I_1 \cdots I_m$, onde $I_1, \dots, I_m$ são T-ideais verbalmente primos. Pelo Teorema 6.1.2, segue que existe uma superálgebra minimal $A = A_{ss} + J(A)$ tal que $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$ e $\mathrm{Id}(G(A)) = I_1 \cdots I_m$. Portanto, $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$ e pela Observação 4.2.6 temos $\dim_F A_{ss} = \exp(G(A)) = \exp(\mathcal{V}) = d$.

Portanto (2) implica em (3). Reciprocamente, pelo Teorema 6.1.1, se $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$, para alguma superálgebra minimal, então $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ é o produto de T-ideais verbalmentes primos. Dessa forma, temos que as propriedades (2) e (3) são equivalentes.

A propriedade (1) implica nas propriedades (2) e (3) aplicando o Corolário 6.2.3 e o Teorema 6.2.2, respectivamente.

Por fim, mostraremos que se $\mathrm{Id}(\mathcal{V}) = I_1 \cdots I_m$, onde $I_1, \ldots, I_m$ são T-ideais verbalmente primos, então $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal, ou seja, a propriedade (2) implica na propriedade (1). Seja $\mathcal{U}$ uma subvariedade própria de $\mathcal{V}$. Usando o Teorema 6.2.2 aplicado à subvariedade $\mathcal{U}$, temos que existe uma superálgebra minimal A tal que $\mathrm{var}(G(A)) \subseteq \mathcal{U}$ e $\exp(G(A)) = \exp(\mathcal{U})$. Então, $\mathrm{Id}(\mathcal{U}) \subseteq \mathrm{Id}(G(A)) = Q_1 \cdots Q_n$, onde $Q_1, \ldots, Q_n$ são T-ideais verbalmente primos. Mas $\mathcal{U} \subsetneqq \mathcal{V}$ e assim

$$I_1 \cdots I_m = \mathrm{Id}(\mathcal{V}) \subsetneqq \mathrm{Id}(\mathcal{U}) \subseteq Q_1 \cdots Q_n \Rightarrow I_1 \cdots I_m \subsetneqq Q_1 \cdots Q_n.$$

Pelo Lema 6.2.4, obtemos

$$\exp(\mathcal{U}) = \exp(Q_1 \cdots Q_n) < \exp(I_1 \cdots I_m) = \exp(\mathcal{V}),$$

e isso quer dizer que $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal, e assim finalizamos a demonstração do teorema. □

O seguinte corolário é um resultado extremamente útil e decorre diretamente do teorema acima.

Corolário 6.2.7. *Para qualquer inteiro $d \geq 2$, existe somente um número finito de variedades minimais de expoente d.*

Existem somente duas variedades minimais de expoente $d = 2$, as quais são geradas pelas álgebras de matrizes triangular superior $UT_2(F)$ e pela álgebra de Grassmann G (veja [20], Capítulo 7). De posse do Teorema 6.2.6, obteremos aqui este resultado.

Exemplo 6.2.8. Se $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero tal que $\exp(\mathcal{V}) = 2$, então, pelo Teorema 6.2.6, $\mathcal{V} = \mathrm{var}(G(A))$, para alguma superálgebra minimal $A = A_{ss} + J(A)$, onde $\dim_F A_{ss} = 2$. Ora, neste caso, temos somente duas possibilidades, a menos de isomorfismo, para a componente semissimples maximal A_{ss}, a saber:

$(i) A_{ss} = F \oplus F$;
$(ii) A_{ss} = F \oplus cF$, onde $c^2 = 1$.

No primeiro caso, temos

$$\mathrm{Id}(\mathcal{V}) = \mathrm{Id}(G(A)) = \mathrm{Id}(G(F))\ \mathrm{Id}(G(F)) = \mathrm{Id}(UT_2(F)) = \langle [x_1, x_2], [x_3, x_4] \rangle_T.$$

De maneira similar, obtemos para o segundo caso

$$\mathrm{Id}(\mathcal{V}) = \mathrm{Id}(G(A)) = \mathrm{Id}(G(F \oplus cF)) = \mathrm{Id}(G) = \langle [[x_1, x_2], x_3] \rangle_T,$$

como queríamos.

6.3 O caso $\mathbb{Z}_2$-graduado

Vimos na seção anterior que, ao lidarmos com variedades minimais, o T-ideal de suas identidades polinomiais coincide com o T-ideal das identidades polinomiais da envolvente de Grassmann de uma superálgebra minimal. Entretanto, no contexto das identidades $\mathbb{Z}_2$ graduadas, surgem diferentes resultados que envolvem superálgebras minimais e supervariedades. Neste sentido, terminamos esta dissertação com uma discussão interessante que diz respeito ao que acontece ao lidarmos com as supervariedades. Para tanto, vamos introduzir algumas definições. Começamos lembrando que uma **PI-superálgebra** é uma superálgebra que satisfaz uma identidade (ordinária) não trivial.

Para F um corpo de característica zero, sejam $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ dois conjuntos disjuntos, infinitos e enumeráveis de variáveis e considere $F\langle Y \cup Z\rangle$ a **álgebra livre associativa unitária gerada por** Y **e** Z. A álgebra $F\langle Y \cup Z\rangle$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural tal que as variáveis de Y são homogêneas de grau zero e as variáveis de Z são homogêneas de grau um. Neste caso, vamos escrever $F\langle Y \cup Z\rangle = F\langle Y \cup Z\rangle^{(0)} \oplus F\langle Y \cup Z\rangle^{(1)}$, e assim dizemos que $F\langle Y \cup Z\rangle$ é uma **superálgebra associativa livre** em Y e Z sobre F. Seja $f = f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m)$ um elemento pertencente a $F\langle Y \cup Z\rangle$. Dizemos que f é uma **identidade polinomial** $\mathbb{Z}_2$**-graduada** para uma superálgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$, se $f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A^{(0)}$ e $b_1, \ldots, b_m \in A^{(1)}$.

Um ideal graduado $I = I^{(0)} \oplus I^{(1)}$ de $F\langle Y \cup Z\rangle$ é chamado de T_2**-ideal** se I é invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle Y \cup Z\rangle$ que preservam sua graduação. Dada uma superálgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$, definimos $T_2(A)$ como sendo o **conjunto das identidades polinomiais** $\mathbb{Z}_2$**-graduadas de uma superálgebra** A, ou seja,

$$T_2(A) = \{f \in F\langle Y \cup Z\rangle \mid f \text{ é uma identidade polinomial } \mathbb{Z}_2\text{-graduada para } A\}.$$

Verifica-se que este conjunto é um T_2-ideal de $F\langle Y \cup Z\rangle$, e assim como vimos para identidades ordinárias, temos também que qualquer T_2-ideal de $F\langle Y \cup Z\rangle$ é da forma $T_2(A)$, para alguma superálgebra A.

Seja $S = S^{(0)} \cup S^{(1)} \subseteq F\langle Y \cup Z\rangle$ um conjunto não vazio tal que $S^{(0)} \subseteq F\langle Y \cup Z\rangle^{(0)}$ e $S^{(1)} \subseteq F\langle Y \cup Z\rangle^{(1)}$. A classe de todas as superálgebras $A = A^{(1)} \oplus A^{(0)}$ tais que f é uma identidade polinomial $\mathbb{Z}_2$-graduada para A, para quaisquer $f \in S$, é dita a **supervariedade (ou variedade de superálgebras associativas) $\mathcal{V}^{sup}$ determinada por** S. O T_2-ideal de $F\langle Y \cup Z\rangle$ associado a $\mathcal{V}^{sup}$ é denotado por $T_2(\mathcal{V}^{sup})$. Se $T_2(\mathcal{V}^{sup}) = T_2(A)$, para alguma superálgebra A, então dizemos que a **supervariedade $\mathcal{V}^{sup}$ é gerada por** A, e neste caso escrevemos $\mathcal{V}^{sup} = \text{supvar}(A)$. Neste caso, $\mathcal{V}^{sup}$ é uma **supervariedade de posto finito** se A é uma PI-superálgebra finitamente gerada.

Note que, até o momento, nossa discussão em torno dessas primeiras definições segue, de maneira similar, àquelas que inserimos quando trabalhávamos com identidades ordinárias. Assim, veremos agora, como se dá o conceito de n-codimensão para uma superálgebra A, para em seguida generalizarmos a definição do PI-expoente de uma álgebra A.

Considere P_n^{sup} o espaço vetorial, sobre F, gerado pelos polinômios multilineares de grau n de $F\langle Y \cup Z\rangle$, nas variáveis $y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n$. Para uma superálgebra A, definimos

$$c_n^{sup}(A) = \dim_F \frac{P_n^{sup}}{P_n^{sup} \cap T_2(A)},$$

para todo $n \geq 1$, como sendo a **n-ésima codimensão $\mathbb{Z}_2$-graduada (ou n-ésima supercodimensão)** da superálgebra A.

Da mesma forma que temos o Teorema das Codimensões de Regev para uma PI-álgebra, Giambruno e Regev, em [16], provaram que $\{c_n^{sup}(A)\}_{n\geq 1}$ é exponencialmente limitada se, e somente se, A satisfaz uma identidade polinomial ordinária. No artigo [2], Giambruno, em parceria com Benanti e Pipitone, mostraram que no caso de A ser uma PI-superálgebra finitamente gerada, o número $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{sup}(A)}$ existe e é um inteiro não negativo. Com isso, definimos

$$\exp_2(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{sup}(A)}$$

e dizemos que $\exp_2(A)$ é o **expoente $\mathbb{Z}_2$-graduado (ou superexpoente) de** A. Se $\mathcal{V}^{sup} = \text{supvar}(A)$, então o superexpoente da supervariedade $\mathcal{V}^{sup}$ é dado por $\exp_2(\mathcal{V}^{sup}) = \exp_2(A)$.

O comportamento assintótico da supercodimensão de uma superálgebra A é também um objeto de estudo para vários matemáticos. Assim como no caso ordinário, foram classificadas as supervariedades cuja sequência de supercodimensões é limitada polinomialmente. Mais precisamente, em [15], temos o seguinte resultado:

Teorema 6.3.1 ([15], Teorema 2)**.** *Uma supervariedade $\mathcal{V}^{sup}$ tem crescimento polinomial se, e somente se, nenhuma das seguintes superálgebras pertencem a $\mathcal{V}^{sup}$:*

(1) *G com a graduação trivial;*

(2) *G com a graduação canônica;*

(3) *$UT_2(F)$ com a graduação trivial;*

(4) *$UT_2(F)$ com a graduação canônica;*

(5) *$F \oplus cF$, onde $c^2 = 1$, com a graduação (F, cF).*

Seja $\mathcal{V}^{sup}$ uma supervariedade de uma PI-superálgebra associativa. Dizemos que $\mathcal{V}^{sup}$ é uma **supervariedade minimal de superexpoente igual a** d, se $\exp_2(\mathcal{V}^{sup}) = d$ e para toda subvariedade própria $\mathcal{U}^{sup} \subset \mathcal{V}^{sup}$ é válido que $\exp_2(\mathcal{U}^{sup}) < d$.

Supervariedades de superexpoente iguais a um foram classificadas em [15]. Neste trabalho, Giambruno, Mishchenko e Zaicev concluíram, a partir de alguns resultados, que a supervariedade gerada por um corpo F é a única supervariedade minimal de expoente igual a um. O Teorema 6.2.6 afirma que as variedades minimais de expoente maior ou igual a dois são geradas pela envolvente de Grassmann de uma superálgebra minimal. Veremos a seguir um resultado similar para supervariedades minimais de posto finito. Mais precisamente, a próxima proposição nos mostra que qualquer supervariedade de posto finito, cujo superexpoente é maior ou igual a dois, é gerada por uma superálgebra minimal adequada.

Proposição 6.3.2 ([8], Proposição 3.2)**.** *Seja $\mathcal{V}^{sup}$ uma supervariedade de posto finito sobre um corpo F de característica zero. Se $\mathcal{V}^{sup}$ é minimal tal que $\exp_2(\mathcal{V}^{sup}) = d \geq 2$, então $\mathcal{V}^{sup} = \mathrm{supvar}(B)$, para alguma superálgebra minimal adequada B.*

Lembrando da caracterização das variedades minimais, uma questão natural que surge neste momento é a seguinte: é verdade que para uma dada supervariedade de posto finito ser minimal é necessário e suficiente que ela seja gerada por uma determinada superálgebra minimal? Uma direção foi provada pelo teorema acima, contudo a outra direção não é verdadeira. De fato, existem superálgebras minimais que geram supervariedades não minimais (veja [6] e [7]).

Referências Bibliográficas

[1] S. A. Amitsur and J. Levitzki. *Minimal identities for algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 449-463.

[2] F. Benanti, A. Giambruno and M. Pipitone. *Polynomial identities on superalgebras and exponential growth.* J. Algebra. **269** (2003) 422-438.

[3] G. Birkhoff. *On the structure of abstract algebras.* Proc. Camb. Philos. Soc. **31** (1935) 433-454.

[4] C. W. Curtis and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Interscience Publishers, New York, 1962.

[5] M. Dehn. *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme.* Math. Ann. **85** (1922) 184-194.

[6] O.M. Di Vincenzo, V. R. T. Silva and E. Spinelli. *Minimal superalgebras generating minimal supervarieties.* Preprint.

[7] O.M. Di Vincenzo and E. Spinelli. *Minimal varieties of associative PI (super)-algebras with respect to their (graded) exponent.* São Paulo J. Math. Sci. (2015).

[8] O.M. Di Vincenzo and E. Spinelli. *On some minimal supervarieties of exponential growth.* J. of Algebra. **368** (2012) 182-198.

[9] V. Drensky. *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0.* Algebra i Logika **20** (1981) 282-290 (in Russian).

[10] V. Drensky. *Extremal varieties of algebras I.* Serdica. **13** (1987) 320-332 (in Russian).

[11] V. Drensky. *Extremal varieties of algebras II.* Serdica. **14** (1988) 20-27 (in Russian).

[12] V. Drensky. *Free Algebras and PI-Algebras.* Springer-Verlag, Singapore, 2000.

[13] B. Farb and R. K. Dennis. *Noncommutative Algebra*. Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, **Vol. 144**, New York, 1993.

[14] E. Formanek. *Invariants and the ring of generic matrices*. Journal of Algebra. **98** (1984) 178-223.

[15] A. Giambruno, S. Mishchenko and M. Zaicev. *Polynomial identities on superalgebras and almost polynomial growth*. Commun. Algebra. **29** (2001) 3787-3800.

[16] A. Giambruno and A. Regev. *Wreath products and PI-algebras*. J. Pure Appl. Algebra. **35** (1985) 133-149.

[17] A. Giambruno and M. Zaicev. *On codimension growth of finitely generated associative algebras*. Adv. Math. **140** (1998) 145-155.

[18] A. Giambruno and M. Zaicev. *Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimative*. Adv. Math. **142** (1999) 221-243.

[19] A. Giambruno and M. Zaicev. *Minimal varieties of algebras of exponential growth*. Adv. Math. **174** (2003) 310-323.

[20] A. Giambruno and M. Zaicev. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*. AMS Mathematical Surveys and Monographs, **Vol. 122**, Providence R.I., 2005.

[21] A. Giambruno and M. Zaicev. *Codimension growth and minimal superalgebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 5091-5117.

[22] I. Kaplansky. *Rings with a polynomial identity*. Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948) 496-500.

[23] A. R. Kemer. *Varieties of finite rank*. Proc. 15th All the Union Algebraic Conf., Krasnoyarsh **2** (1979) (in Russian).

[24] A. R. Kemer. *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math. **5** (1984) 1042-1059 (in Russian). Translation: Math. USSR Izv. **2** (1985).

[25] A. R. Kemer. *Finite basis property of identities of associative algebras*. Algebra and Logic **26** (1987) 362-397.

[26] A. R. Kemer. *Ideals of identities of associatives algebras*. Transl. Math. Monogr., **87**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1991.

[27] D. Krakowski and A. Regev. *The polynomial identities of the Grassmann algebra*. Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973) 429-438.

[28] Yu. N. Malcev. *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices.* Algebra i Logika. **10** (1971) (in Russian).

[29] C. P. Milies and S. K. Sehgal. *An introduction to group rings.* Kluwer Academic Publishers, (2002).

[30] J. B. Olson and A. Regev. *An application of representation theory to PI-algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976) 253-257.

[31] Ju. P. Razmyslov. *A certain problem of Kaplansky.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. **37** (1973) 483-501 (in Russian).

[32] A. Regev. *Existence of identities in $A \otimes B$.* Israel J. Math. **11** (1972) 131-152.

[33] A. Regev. *Codimensions and trace codimensions of matrices are asymptotically equal.* Israel J. Math. **47** (1984) 246-250.

[34] W. Specht. *Gesetze in Ringen.* Mathematische Zeitschrift **52** (1950) 557-589.

[35] W. Wagner. *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme.* Math. Ann. **113** (1936) 528-567.