UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Álgebras Derivadamente Mansas com Três Módulos Simples

Adriana Xavier Freitas

Belo Horizonte, novembro de 2016

Adriana Xavier Freitas

Álgebras Derivadamente Mansas com Três Módulos Simples

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, para a obtenção do grau de doutor em Matemática.

Orientador: Viktor Bekkert

Belo Horizonte, novembro de 2016

Agradecimentos

A Deus por ter me dado força, saúde e permitido que eu concluísse com sucesso essa tese.

Ao Viktor por ter aceitado me orientar. Pela paciência e dedicação ao longo desses anos.

Ao Helvécio, companheiro de todas horas, por ter me dado força quando a minha já havia acabado, pela paciência, ajuda com o latex e etc... Pois, se fosse enumerar todos os motivos que tenho para agradecê-lo faltaria espaço.

Aos meus pais e às minhas irmãs pela paciência com minha ausência nesses anos de estudo.

A todos os professores que contribuíram para a minha formação. Em especial aos do Departamento de Matemática da UFMG.

Àqueles que fizeram parte da Olimpíada Mineira de Matemática e da OBMEP.

Ao professor Bernardo por ter me incentivado a continuar os estudos na matemática.

Ao Marcelo Terra pela amizade e orientação no mestrado possibilitando que chegasse ao doutorado.

Aos amigos da graduação em matemática e às colegas de república Adriana e Neila que hoje fazem parte da minha família.

Aos colegas da pós-graduação: Antônio, Jeane, Lia, Dani, Juliano, Camila e tantos outros que transformaram as horas de estudos em momentos agradáveis.

Ao clube da Lulu: Silviane, Gra e Lilica pelas alegrias, pelos momentos que foram minhas psicólogas e pelo incentivo.

Aos colegas de trabalho da UFLA pelo apoio.

À Andréa e à Kelli pela ajuda com a burocracia e paciência mesmo quando o pedido era feito em cima da hora ou até mesmo atrasado.

As agências de financiamento, CNPQ e CAPES, pelo suporte financeiro.

À banca que mesmo com todo o trabalho que tem que desempenhar nas suas universidades aceitaram ler essa tese.

A todos aqueles que me ajudaram ao longo dessa jornada meus sinceros agradecimentos. Por falta de espaço não é possível nominar todos.

Resumo

Dada uma álgebra de dimensão finita ela pertence a uma das seguintes classes: álgebras derivadamente mansas ou álgebras derivadamente selvagens. Nosso objetivo nesse trabalho é determinar quais $K-$álgebras de dimensão finita com três módulos simples são derivadamente mansas.

Palavras-chave: Categoria derivada, álgebra derivadamente mansa, álgebra derivadamente selvagem, álgebras com três módulos simples, álgebra mansa, álgebra selvagem.

Abstract

Given a finite-dimensional algebra it belongs to one of the following classes: derived tame or derived wild algebras. In this thesis our aim is to determine which finite-dimensional K-algebras with three simple modules are derived tame.

Keywords: Derived category, derived tame algebra, derived wild algebra, algebras with three simple modules, tame algebra, wild algebra.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nesse trabalho o corpo K será sempre algebricamente fechado e as álgebras serão $K-$álgebras, associativas, com unidade, básicas, conexas e de dimensão finita. Podemos assumir que elas serão básicas porque uma álgebra A sempre é Morita equivalente a uma álgebra básica, isto é, suas categorias de módulos são equivalentes. A categoria $modA$ é a de $A-$módulos à direita finitamente gerados.

O teorema de Krull-Shmidt para álgebras de dimensão finita afirma que todo módulo $M \in modA$ é isomorfo a uma soma direta de módulos indecomponíveis e essa soma direta é única a menos de permutação. Desse modo, os indecomponíveis desempenham um papel importante na categoria $modA$. Dada uma $K-$álgebra uma pergunta natural é se a quantidade de módulos indecomponíveis, não isomorfos em $modA$, é finita ou não. Quando $modA$ possui uma quantidade finita de indecomponíveis não isomorfos dizemos que A é de representação finita. No outro caso dizemos que A é de representação infinita. Consta na literatura, veja por exemplo [6] e [59], que por volta de 1940 Brauer deixou como exercício para seus alunos as seguintes conjecturas:

Conjectura 1: Uma $K-$álgebra é de representação finita ou possui módulos indecomponíveis com dimensões arbitrariamente grandes.

Conjectura 2: Uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo infinito K é de representação finita ou existe uma sequência infinita de números $d_i \in \mathbb{N}$ tal que, para cada i, existe um número infinito de módulos indecomponíveis não isomorfos com $K-$dimensão d_i.

Atualmente essas conjecturas são conhecidas como conjecturas de Brauer-Thrall. A conjectura 1 foi mostrada primeiro para corpos algebricamente fechados por Roiter

[61] e posteriormente generalizada por Auslander em [4]. Bautista [9] deu uma prova usando métodos geométricos para a segunda conjectura no caso em que os corpos são algebricamente fechados com característica diferente de dois, veja também [53].

O estudo das álgebras de representação infinita levou a acreditarem que essas álgebras se dividiam em duas classes distintas: álgebras mansas e álgebras selvagens. Freislich e Donovan [25] propuseram uma definição explícita para essas classes de álgebras. As álgebras mansas são aquelas nas quais dada uma dimensão d existe uma parametrização dos módulos indecomponíveis dessa dimensão por um número finito de famílias de um parâmetro. Podemos considerar que é possível classificar os módulos indecomponíveis dessas álgebras. Exemplos bem conhecidos são a álgebra $K[X]$ e a álgebra de Kronecker.

Uma álgebra A de dimensão finita é selvagem se para toda álgebra de dimensão finita B existe um funtor $K-$linear de $modB$ para $modA$ o qual é exato, preserva classe de isomorfismos e leva indecomponível em indecomponível - veja [6], (no capítulo 2 apresentamos uma definição equivalente para álgebra selvagem). De certo modo, a classificação de todos os módulos de uma álgebra selvagem de dimensão finita dá a classificação de todos os módulos de todas as álgebras de dimensão finita. Por isso, a classificação dos módulos indecomponíveis das álgebras selvagens é de certa forma impossível, um exemplo de tal álgebra é $K[X, Y]$. Note que a classe de álgebras mansas engloba a de álgebras de representação finita.

Em [29], Drozd mostrou a dicotomia mansa-selvagem: uma $K-$álgebra de dimensão finita é mansa ou selvagem e não pode ser ambas, com K um corpo algebricamente fechado. A classificação das álgebras mansas de dimensão finita é conhecida nos casos nos quais a álgebra possui um módulo simples [17], [19], [28], [35], [40], [46], [57] e [58] ou dois módulos simples [18], [21], [27], [33], [34], [42] e [47]. Para álgebras que possuem três ou mais módulos simples o problema de classificação continua em aberto. Existem alguns resultados para quando a álgebra possui três módulos simples [31] e [51].

No início dos anos 60, Grothendieck e Verdier introduziram o conceito de categoria derivada, cuja aplicação encontra-se em várias áreas da matemática. Passados alguns anos Happel em [44] começou o estudo sistemático de categorias derivadas de categorias de módulos de álgebras associativas de dimensão finita. Em [43], os autores enunciaram e provaram uma versão das conjecturas de Brauer-Thrall para categorias derivadas de categoria de módulos de álgebras associativas de dimensão finita.

Com esses novos conceitos uma pergunta natural era se existiria definições análogas de mansas e selvagens para categorias derivadas de álgebras. De la Peña [55] introduziu o conceito de álgebra derivadamente mansa via álgebra repetitiva. Vossieck [64] definiu e classificou as álgebras derivadamente discretas que são de dimensão finita. Baseados nesses trabalhos Geiss e Krause [37] apresentaram uma definição de álgebra derivadamente mansa mais geral e mostraram que equivalência derivada preserva a propriedade de ser derivadamente mansa. Em [11], Bekkert e Drozd apresentaram uma definição para álgebras derivadamente mansas e álgebras derivadamente selvagens[1] e estabeleceram a dicotomia mansa-selvagem para categoria derivada de álgebras de dimensão finita. À luz desse último resultado passou-se ao desafio de descobrir quais álgebras são derivadamente mansas e quais são derivadamente selvagens. Porém, a estrutura da categoria derivada é conhecida para poucas classes de álgebras de dimensão finita. Para alguns resultados veja [44], [55], [16], [15], [13], [23], [14], [20], [24], [7], [8], [36], [12], [45] e [50].

Em [13], os autores classificaram quais álgebras locais ou com dois módulos simples são derivadamente mansas. Baseado no trabalho [13] investigamos quais as álgebras de três módulos simples são derivadamente mansas. Chegamos ao resultado abaixo, o qual iremos demonstrar ao longo desse texto.

Teorema Principal. *Seja A uma $K-$álgebra de dimensão finita, básica e conexa sobre um corpo algebricamente fechado K que possui exatamente 3 módulos simples. As afirmações abaixo são equivalentes:*

a) A é derivadamente mansa.

b) A é uma álgebra gentle ou A é isomorfa ou anti-isomorfa a uma das álgebras da tabela 1.1.

---

[1] A definição de derivadamente mansa de [11] não coincide com a definição de derivadamente mansa de [37]. Mas, são equivalentes.

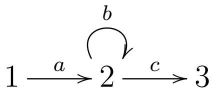
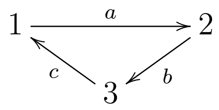
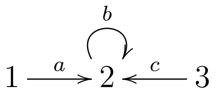
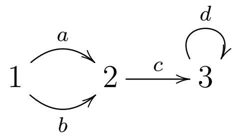
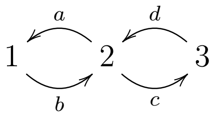
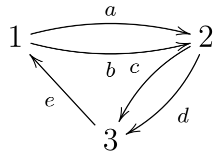
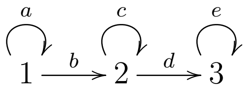
 $I =< b^2 >$ (1.1) $I =< b^2, ac, abc >$ (1.2)	 $I =< abc, cab >$ (1.3)
 $I =< b^2 >$ (1.4)	 $I =< ac + bcd, d^2 >$ (1.5)
 $I =< ba, dc, da, bc, cd - ab >$ (1.6)	 $I =< ac, bd + adebc, ea, ce >$ (1.7)
 $I =< a^2, c^2, e^2, bd + abcde >$ (1.8)	

Tabela 1.1: Álgebras derivadamente mansas que não são álgebras gentle.

Note que as álgebras 1.4 e 1.6 são álgebras skewed-gentle conforme os exemplos 2.11 e 2.12 da seção 2.5. Já as álgebras 1.1, 1.2 e 1.3 são derivadamente equivalentes, respectivamente, as álgebras 1.4, 1.5 e 1.6, veja o apêndice B. Temos que as álgebras 1.5, 1.7 e 1.8 se degeneram para álgebras gentle. Nas tabelas A.5, A.7, A.9 e A.11 temos uma lista completa, a menos de isomorfismo e anti-isomorfismo, das álgebras gentle que possuem 3 módulos simples.

Esse trabalho divide-se da seguinte forma: no capítulo inicial apresentamos os conceitos básicos da teoria de representação necessários para o entendimento do texto. O capítulo 3 destina-se a demonstrar o Teorema Principal. Nas seções 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 classificamos as álgebras derivadamente mansas de dimensão finita com três módulos simples cujo quiver é bisserial e possui, respectivamente, duas, três, quatro, cinco e seis flechas. Já na seção 3.6 classificamos as álgebras derivadamente mansas de dimensão finita com três módulos simples cujo quiver não é bisserial. Finalizamos esse capítulo com a seção 3.7 na qual demonstramos o Teorema Principal. O apêndice destina-se a dois propósitos: listar as álgebras gentle com três módulos simples e mostrar as equivalências derivadas que foram afirmadas durante o trabalho.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Neste capítulo faremos uma revisão de alguns conceitos básicos de teoria de representação de álgebras de dimensão finita, álgebras gentle, álgebras skewed-gentle e categoria derivada para auxiliar o leitor no restante desse texto. Mais informações básicas sobre teoria de representação consulte [5], [2], [62] e [63]; para álgebras gentle e skewed-gentle veja [3] e [38]; já para categoria derivada e trianguladas sugerimos [39], [65], [48] e [44].

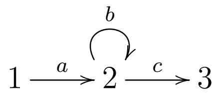
2.1 Quivers

Nesta seção definiremos quivers, que como veremos é um grafo orientado e a ele associaremos uma álgebra.

Definição 2.1. *Um quiver* $Q = (Q_0, Q_1; s, t)$ *é uma quádrupla consistindo de dois conjuntos:* Q_0 *(cujos elementos chamamos de vértices) e* Q_1 *(cujos elementos chamamos de flechas), e dois mapas:* $s, t : Q_1 \to Q_0$ *que associam a cada flecha* $a \in Q_1$ *o seu ponto inicial* $s(a) \in Q_0$ *e seu ponto final* $t(a) \in Q_0$*.*

Os vértices serão representados por números naturais. Frequentemente representaremos as flechas como $s(a) \overset{a}{\to} t(a)$.

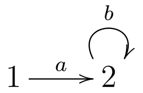
Exemplo 2.1. *Com as convenções acima o grafo abaixo é um quiver.*



Quando os conjuntos Q_0 e Q_1 são finitos dizemos que o quiver é *finito*. Um quiver é *conexo* se, ao desconsiderar a orientação das suas flechas, o grafo obtido é conexo. Na maioria das vezes, para denotar um quiver usaremos apenas a expressão $Q = (Q_0, Q_1)$ ou Q.

Definição 2.2. *Sejam* $Q = (Q_0, Q_1; s, t)$ *e* $Q' = (Q'_0, Q'_1; s', t')$ *quivers, dizemos que* Q' *é um subquiver de* Q *se* $Q'_0 \subseteq Q_0, Q'_1 \subseteq Q_1$, *e caso* $\alpha \in Q'_1$ *temos que* $s'(a) = s(a), t'(a) = t(a)$. *Esse subquiver será chamado pleno se* $Q'_1 = \{a \in Q_1 | s(a) \in Q'_0 \text{ e } t(a) \in Q'_0\}$.

Exemplo 2.2. *O quiver abaixo é um subquiver pleno do quiver do Exemplo 2.1*



Se i e j são dois vértices não necessariamente distintos, um *caminho* de i para j com *comprimento* $l \geq 1$ é uma sequência de flechas $(i|a_1 a_2 \cdots a_l|j)$, em que $s(a_1) = i, t(a_k) = s(a_{k+1})$ com $1 \leq k \leq l-1$ e $t(a_l) = j$. Podemos visualizar esse caminho como

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "a_1"] & t(a_1) \arrow[r, "a_2"] & t(a_2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "a_l"] & j \end{tikzcd}$$

A cada vértice i de Q_0 associamos um caminho de comprimento 0, chamado de *caminho trivial* e denotado por e_i ou $(i||i)$. Se o ponto inicial de um caminho não trivial coincide com o seu ponto final dizemos que esse caminho é um *ciclo*. Um ciclo cujo comprimento é 1 é chamado de *laço*.

Definição 2.3. *Seja* K *um corpo. Uma* $K-$*álgebra é um anel* A *com unidade (denotada por* 1*), que possui uma estrutura de* $K-$*espaço vetorial compatível com a multiplicação do anel, ou seja,*

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

para todo $\lambda \in K$ *e para todo* $a, b \in A$. *Dizemos que uma* $K-$*álgebra é de dimensão finita se a dimensão dela sobre* K *é finito.*

Ao conjunto de caminhos de um quiver podemos associar uma estrutura de álgebra como veremos na próxima definição.

Definição 2.4. *Dado Q um quiver e K um corpo, a álgebra de caminhos KQ de Q é a $K-$ álgebra que tem como base de seu espaço vetorial o conjunto de caminhos de Q de comprimento maior ou igual a zero. Sejam $\alpha_1 = (i|a_1a_2\cdots a_l|j)$ e $\alpha_2 = (k|b_1b_2\cdots b_s|t)$ dois elementos da base de KQ, o produto desses elementos é definido por*

$$\alpha_1\alpha_2 = \begin{cases} (i|a_1a_2\cdots a_lb_1b_2\cdots b_s|t), & \textit{se} \ \ j{=}k, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Esse produto é estendido por linearidade para qualquer elemento de KQ.

Nesse trabalho os quivers serão sempre finitos. Nessa situação, a álgebra de caminhos sempre possui unidade dada por $1 = \sum\limits_{i\in Q_0} e_i$.

Dado o quiver $Q = (Q_0, Q_1)$ finito e conexo denotamos por R_Q o ideal da álgebra de caminhos KQ gerado pelas flechas $a \in Q$. Um ideal bilateral I de KQ é dito *admissível* se existe $m \geq 2$ tal que $R_Q^m \subset I \subset R_Q^2$.

Um fato conhecido, veja [2] página 57, é que $I =< \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n >$ onde $\rho_i = \sum_i \lambda_i C_i$, com $\lambda_i \in K$ e C_i caminhos de comprimento maior ou igual que dois que possuem o mesmo começo e final. Os elementos ρ_i são chamados de *relações* em Q. Uma relação formada por um único caminho é chamada *relação nula.* Quando a relação tem a forma $C_1 - C_2$, onde C_1 e C_2 são caminhos chamamos-a de *relação comutativa.* Se $I =< \rho_i >$ é um ideal admissível, chamamos o par (Q, I) de *quiver com relações* e a álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ é chamada de *álgebra de caminhos sobre o quiver com relações* e denotada por $A = K(Q, I)$.

Dado uma álgebra A denotaremos seu radical por $radA$. Se Q é um quiver finito e I um ideal admissível então $rad\left(\frac{KQ}{I}\right) = \frac{R_Q}{I}$. Além disso, a álgebra $\frac{KQ}{I}$ é básica.

No capítulo 3 precisaremos da seguinte definição.

Definição 2.5. *Seja Q' um subquiver de Q. Se para qualquer caminho $x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_t$ em Q, com $x_0, x_t \in Q'_0$, temos que $x_i \in Q'_0$ para todo i, com $0 \leq i \leq t$, dizemos que Q' é um subquiver convexo de Q.*

2.2 O quiver de uma álgebra de dimensão finita

Já vimos que dado um quiver podemos associar a ele uma álgebra associativa. Além disso, essa álgebra é uma $K-$álgebra básica. Nessa seção determinaremos sobre quais condições a recíproca seria verdadeira, isto é, quando dada uma $K-$álgebra A podemos associar a ela um quiver de modo que A é isomorfa a $K(Q,I)$.

Definição 2.6. *Seja A uma K-álgebra de dimensão finita, conexa e básica, sendo K um corpo algebricamente fechado. Seja $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonais de A. O quiver de A, denotado por Q_A, é definido do seguinte modo:*

a) Os pontos de Q_A são números $1, 2, \cdots, n$, os quais estão em bijeção com os idempotentes $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.

b) Dados dois pontos i e $j \in (Q_A)_0$, as flechas $a : i \to j$ estão em correspondência bijetiva com os vetores de uma base do K-espaço vetorial $e_i \left(\frac{radA}{rad^2A}\right) e_j$, onde $radA$ é o radical da álgebra A.

O quiver Q_A definido acima não depende da escolha do conjunto de idempotentes primitivos ortogonais em A. Como A é de dimensão finita Q_A é finito.

Teorema 2.1. ***(Gabriel)*** *Seja A uma K-álgebra de dimensão finita, conexa e básica. Existe um ideal admissível I de KQ_A tal que $A \cong \frac{KQ_A}{I}$.*

Ideia da demonstração:

1) Construir um homomorfismo de álgebras $\phi : KQ_A \to A$.

2) Mostrar que ϕ é sobrejetivo.

3) Mostrar que $I = ker\phi$ é um ideal admissível de KQ_A.

Faremos apenas o passo 1). Para os outros veja a demonstração do Teorema 3.7, página 75, de [2].

Sejam $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ elementos de $radA$ tais que $\{\overline{\alpha_1}, \cdots, \overline{\alpha_m}\}$ é uma base de $e_i \left(\frac{radA}{rad^2A}\right) e_j$. As flechas de i para j em Q_A serão denotadas por $x_{\alpha_1}, \cdots, x_{\alpha_m}$. Sejam $\phi_0 : (Q_A)_0 \to A$ o mapa definido por $\phi_0(a) = e_a$ e $\phi_1 : (Q_A)_1 \to A$ para ser o mapa definido por $\phi_1(x_{\alpha_k}) = \alpha_k$.

Pela propriedade universal das álgebras de caminho (veja Teorema 1.8 página 48 de [2]) existe um único homomorfismo de $K-$álgebras $\phi : KQ_A \to A$ que estende ϕ_0 e ϕ_1. ■

Definição 2.7. *Seja A uma $K-$álgebra básica, conexa e de dimensão finita. Um isomorfismo $A \cong \frac{KQ_A}{I}$ onde I é um ideal admissível de KQ_A (como construído na demonstração acima) é chamado uma presentação da álgebra A.*

A partir de agora toda K-álgebra de dimensão finita, básica e conexa será vista como uma álgebra de caminhos de um quiver com relações.

Definição 2.8. *Dada uma K-álgebra A, denotamos por A^{op} a álgebra oposta de A. A álgebra A^{op} é uma K-álgebra com o mesmo espaço vetorial de A, mas a multiplicação $*$ é definida pela fórmula $a * b = ba$.*

Dada uma K-álgebra $A = K(Q, I)$ considere o quiver $Q^{op} = (Q_0^{op}, Q_1^{op})$ onde $Q_0^{op} = (Q)_0$ e $Q_1^{op} = \{\ t(a) \xrightarrow{a^{op}} s(a)\ | a \in (Q)_1\}$. Seja $p = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$ um caminho em Q definimos $p^{op} = a_n^{op} a_{n-1}^{op} \cdots a_2^{op} a_1^{op}$, para uma combinação linear de caminhos $\sum \lambda_i p_i$ temos que $(\sum \lambda_i p_i)^{op} = \sum \lambda_i (p_i)^{op}$. Tome $I^{op} = \{f^{op} | f \in I_A\}$. A álgebra A^{op} é isomorfa a $K(Q^{op}, I^{op})$.

2.3 Representação de um quiver

Aprendemos que quivers é uma boa ferramenta para visualizar álgebras de dimensão finita. Agora veremos como visualizar módulos através deles.

Definição 2.9. *Seja $Q = (Q_0, Q_1)$ um quiver finito. Uma $R-$representação de um quiver Q, em que R é um anel, é um par*

$$V = \Big((V_i)_{i \in Q_0}, (V_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \Big)$$

de duas famílias: a primeira, indexada sobre os vértices de Q, é uma família de $R-$módulos e a segunda, indexada sobre as flexas de Q, consiste de homomorfismos de $R-$módulos $V_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)}$.

Em alguns casos os $R-$módulos da definição acima são módulos à esquerda em outros casos são módulos à direita, o contexto determinará em qual situação estamos.

Se $R = K$ em que K é um corpo e todos os $(V_i)_{i \in Q_0}$ são de dimensão finita, a representação é dita de *representação finita.*

Exemplo 2.3. *Uma $K-$representação do quiver de Kronecker*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 2 \end{tikzcd}$$

é

$$\begin{tikzcd} K^2 \arrow[r, bend left, "{[\ 1 \quad 0\ ]}"] \arrow[r, bend right, "{[\ 0 \quad 1\ ]}"'] & K \end{tikzcd}$$

onde $V_1 = K^2$, $V_2 = K$, $V_\alpha = [\ 1 \quad 0\ ]$ *e* $V_\beta = [\ 0 \quad 1\ ]$.

Já temos os objetos da categoria de $R-$representações de Q. Definiremos agora os morfismos.

Definição 2.10. *Sejam* $Q = (Q_0, Q_1)$ *um quiver finito,* $V = \Big((V_i)_{i\in Q_0}, (V_\alpha)_{\alpha\in Q_1}\Big)$ *e* $U = \Big((U_i)_{i\in Q_0}, (U_\alpha)_{\alpha\in Q_1}\Big)$ $R-$*representações de* Q*. Um morfismo* $f : V \to U$ *é uma família* $f = (f_i : V_i \to U_i)_{i\in Q_0}$ *de homomorfismo de* $R-$*módulos tais que para cada flecha* $\alpha : i \to j$ *temos que*

$$f_j V_\alpha = U_\alpha f_i. \tag{2.1}$$

A equação (2.1) afirma que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "V_\alpha"] \arrow[d, "f_i"] & V_j \arrow[d, "f_j"] \\ U_i \arrow[r, "U_\alpha"] & U_j \end{tikzcd}$$

Um morfismo é um *isomorfismo* se cada f_i é um isomorfismo. Dizemos que V e W são *representações isomorfas* se existe um isomorfismo de V para W.

Na maioria dos casos o nosso anel é um corpo, portanto os $(V_i)_{i\in Q_0}$ são espaços vetoriais e $(V_\alpha)_{\alpha\in Q_1}$ são transformações lineares. Por isso, não mencionaremos o anel caso ele seja K. Sejam $f : V \to V'$ e $g : V' \to U$ dois morfismos de $R-$representações de Q, onde $f = (f_i)_{i\in Q_0}$ e $g = (g_i)_{i\in Q_0}$. Definimos a *composição* desses dois morfismos como $g \circ f = (g_i \circ f_i)_{i\in Q_0}$. É fácil ver que $g \circ f$ é um morfismo de V para U.

A categoria de representações de Q sobre um corpo K (respectivamente, representações de dimensão finita) será denotado por $Rep_K(Q)$ (respectivamente, por $rep_K(Q)$).

Definição 2.11. *Seja Q um quiver finito e $V = (V_i, V_\alpha)$ uma representação de Q. Para qualquer caminho não trivial $\omega = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l$ de a para b em Q, definimos a avaliação de V no caminho ω para ser o mapa K-linear de V_a para V_b definido por*

$$V_\omega = V_{\alpha_l} V_{\alpha_{l-1}} \cdots V_{\alpha_2} V_{\alpha_1}.$$

Se temos uma combinação K-linear de caminhos com mesmo começo e final, o mapa avaliação estende-se por linearidade, isto é, se $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \omega_i$, onde $\lambda_i \in K$ e ω_i é um caminho de Q, temos

$$V_\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i V_{\omega_i}.$$

Considere Q um quiver e I um ideal admissível de KQ. Uma representação $V = (V_i, V_\alpha)$ de Q *satisfaz as relações* em I ou é *limitada* por I, se temos

$$V_\rho = 0, \text{para todas as relações } \rho \in I.$$

Denotamos por $Rep_K(Q, I)$ (respectivamente, $rep_K(Q, I)$) a subcategoria plena de $Rep_K Q$ (respectivamente, de $rep_K Q$) consistindo das representações de Q limitadas por I.

Exemplo 2.4. *Considere o ideal $I =< \alpha\beta >$ de KQ onde Q é o quiver*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \end{tikzcd}$$

Uma representação desse quiver com relação é

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"] & K^2 \arrow[r, "{[\ 0 \quad 1\ ]}"] & K \end{tikzcd}$$

Nosso interesse é na categoria dos $A-$módulos à direita finitamente gerados, denotada por $modA$, onde A é uma K-álgebra de dimensão finita. O teorema seguinte relaciona a categoria $modA$ com a categoria $rep_K\,(Q_A, I)$ das representações K-lineares de Q_A de dimensão finita limitadas por I. Denotaremos a categoria dos $A-$módulos à direita por $ModA$.

Teorema 2.2. *Seja $A = KQ/I$ conexa, básica e de dimensão finita, onde I um ideal admissível de KQ. Existe uma equivalência K-linear de categorias*

$$F : ModA \xrightarrow{\simeq} Rep_K(Q, I) \tag{2.2}$$

a qual restringe a uma equivalência de categorias

$$F : \text{mod } A \xrightarrow{\simeq} rep_K(Q, I). \tag{2.3}$$

Teorema 2.3. *Seja $A \cong KQ/I$ conexa, básica e de dimensão finita, onde I é um ideal admissível. Dado $a \in Q_0$, considere a representação $S(a) = (S(a)_b, V_\alpha)$ de Q, onde*

$$\begin{aligned} S(a)_b &= \begin{cases} K, & se \quad b = a, \\ 0, se \quad b \neq a \end{cases} \\ V_\alpha &= 0, \quad para\ toda\ \alpha \in Q_1. \end{aligned}$$

O conjunto $\{S(a) | a \in Q_0\}$ é um conjunto completo dos representantes das classes de isomorfismos dos A-módulos simples.

2.4 Álgebras mansas e selvagens

O teorema de Krull-Schmidt para álgebras de dimensão finita diz que na categoria $modA$ todo módulo M é isomorfo a uma soma direta de módulos indecomponíveis. Além disso, essa decomposição é única a menos da ordem dos somandos diretos. Com isso, percebemos a importância de estudar os indecomponíveis da categoria $modA$. Nessa seção estudaremos as álgebras do ponto de vista do comportamento quantitativo dos $A-$módulos indecomponíveis em $modA$

Definição 2.12. *Seja A uma $K-$álgebra de dimensão finita. Dizemos que A é de representação finita se a quantidade de classes de isomorfismos de módulos indecomponíveis é finita.*

Exemplo 2.5. *A álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ em que Q : $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "b"] & 2 \arrow[loop above, "a"] \end{tikzcd}$ e $I =< a^2 >$ é de representação finita. Os seus módulos indecomponíveis são isomorfos a um dos módulos abaixo:*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & 0 \arrow[loop above, "0"] & 0 \arrow[r] & K \arrow[loop above, "0"] & 0 \arrow[r] & K^2 \arrow[loop above, "\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}"] & K \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"] & K^2 \arrow[loop above, "\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}"] \\
K \arrow[r, "1"] & K \arrow[loop above, "0"] & K \arrow[r, "\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}"] & K^2 \arrow[loop above, "\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}"] & K^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}"] & K^2 \arrow[loop above, "\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}"] & &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 2.6. *A álgebra* $A = \frac{KQ}{I}$ *em que* $Q :\ \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "b"] & 2 \arrow[loop above, "a"] \end{tikzcd}$ *e* $I =< a^2, ba >$ *é de representação finita. Os seus módulos indecomponíveis são isomorfos a um dos módulos abaixo:*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & 0 \arrow[loop above, "0"] & 0 \arrow[r] & K \arrow[loop above, "0"] & 0 \arrow[r] & K^2 \arrow[loop above, "\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}"] \\
K \arrow[r, "1"] & K \arrow[loop above, "0"] & K \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"] & K^2 \arrow[loop above, "\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}"] & &
\end{tikzcd}$$

De acordo com o comportamento quantitativo dos módulos indecomponíveis em $modA$ as $K-$álgebras dividem-se em duas classes: álgebras mansas e álgebras selvagens. Como veremos essas classes são disjuntas.

Intuitivamente uma álgebra é mansa se todos os seus módulos indecomponíveis, a menos de uma quantidade finita, de uma dada dimensão podem ser parametrizados por um número finito de famílias de um paramêtro. Já para as álgebras selvagens isso não ocorre. De certo modo em uma álgebra selvagem A a categoria $modA$ possui todos os módulos indecomponíveis de todas as $K-$álgebras de dimensão finita.

Denotaremos por $finK < x, y >$ a subcategoria plena e exata de $K < x, y >$ cujo os objetos são os módulos de dimensão finita.

Definição 2.13. *[30, 63] Seja* A *uma* K*-álgebra de dimensão finita. Dizemos que* A *é selvagem se existe um* $K\langle x, y\rangle - A$ *bimódulo* M *tal que*

1. *M é livre e finitamente gerado como um $K\langle x, y\rangle$-módulo.*

2. *O funtor*

$$- \otimes_{K\langle x,y\rangle} M : finK\langle x, y\rangle \to modA$$

respeita classes de isomorfismo (ou seja, $L \simeq L'$ se, e somente se, $L \otimes_{K\langle x,y\rangle} M \simeq L' \otimes_{K\langle x,y\rangle} M$) e leva módulo indecomponível em indecomponível.

Note que se A é selvagem a álgebra A^{op} também será selvagem.

Exemplo 2.7. *A álgebra KQ onde Q é o quiver*

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, bend right=40, "\beta"'] \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[l, bend left=40, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

é selvagem. Basta tomar M como sendo o bimódulo abaixo:

$$\begin{tikzcd} K < x, y > & K < x, y > \arrow[l, bend right=40, "y"'] \arrow[l, bend right=20, "x"] \arrow[l, bend left=20, "1"] \end{tikzcd}$$

Lema 2.1. *[30] Suponha que A é uma $K-$álgebra de dimensão finita. Se I é um ideal, não necessariamente admissível, tal que $\frac{A}{I}$ é uma álgebra selvagem. Então, A é uma álgebra selvagem.*

Definição 2.14. *[30, 63] Seja A uma K-álgebra de dimensão finita. Dizemos que A é mansa se para qualquer dimensão $d > 0$, existe um número finito de $K[x] - A$ bimódulos M_i tal que*

1. *M_i é finitamente gerado e livre como um $K[x]-$módulo.*

2. *Todo módulo indecomponível X de dimensão d, exceto para uma quantidade finita, é isomorfo a $\frac{K[x]}{(x-\lambda)} \otimes_{K[x]} M_i$, para algum $\lambda \in K$.*

Note que toda álgebra de representação finita é uma álgebra mansa.

Exemplo 2.8. *A álgebra $A = KQ$ do quiver de Kronecker*

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, bend right=40, "\beta"'] \arrow[l, bend left=40, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

é mansa.

Para vermos isso será necessário relembrarmos quais são os módulos indecomponíveis de modKQ. *Esse resultado é bem conhecido na literatura, iremos apenas listar esses módulos - o leitor que deseja conhecer como foram feitos os cálculos pode consultar [62].*

Os módulos indecomponíveis são dados pelas representações abaixo:

$$\begin{tikzcd} K^m & K^{m+1} \arrow[l, bend right, "{\begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix}}"'] \arrow[l, bend left, "{\begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K^{m+1} & K^m \arrow[l, bend right, "{\begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}}"'] \arrow[l, bend left, "{\begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K^m & K^m \arrow[l, bend right, "I_m"'] \arrow[l, bend left, "\lambda I_m+J_m"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K^m & K^m \arrow[l, bend right, "J_m"'] \arrow[l, bend left, "I_m"] \end{tikzcd}$$

onde I_m *é a identidade* $m \times m$, J_m *denota o bloco de Jordan nilpotente de tamanho* $m \times m$ *e* $\lambda \in K$. *Se* $d \neq 2m$, *já sabemos que existe uma quantidade finita de módulos indecomponíveis com essa dimensão. No caso* $d = 2m$, *considere o bimódulo* M_1 *abaixo*

$$M_1 : \begin{tikzcd} K[x]^m & K[x]^m \arrow[l, bend right, "I_m"'] \arrow[l, bend left, "xI_m+J_m"] \end{tikzcd}$$

onde J_m *denota o bloco Jordan nilpotente de tamanho* $m \times m$. *O bimódulo* M_1 *é um* $K[x]-$*módulo livre de posto* $2m$. *Então, caso* $d = 2m$ *somente uma quantidade finita de módulos indecomponíveis com essa dimensão não é isomorfa a* $\frac{K[x]}{x-\lambda} \otimes_{K[x]} M_1$ *com* $\lambda \in K$. *Logo, A é mansa.*

A princípio uma álgebra poderia ser mansa e selvagem, porém Drozd mostrou em [29] que isso não ocorre, conforme o teorema:

Teorema 2.4. *Toda álgebra de dimensão finita é mansa ou selvagem, mas não ambas.*

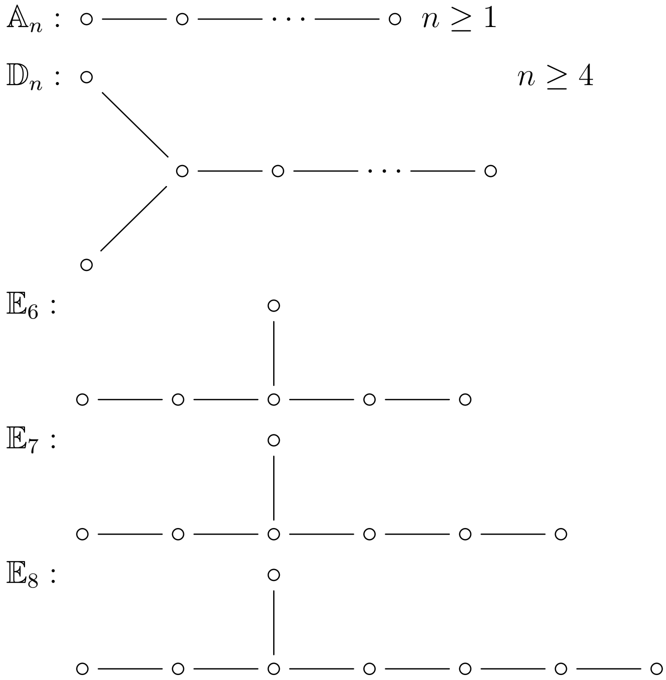
As álgebras da definição abaixo é uma classe de álgebras que já foram classificadas.

Definição 2.15. *[2] Seja A uma K-álgebra básica e de dimensão finita. Dizemos que A é uma álgebra hereditária se todo submódulo de um A−módulo projetivo é projetivo.*

O próximo teorema caracteriza uma álgebra hereditária em termos de seu quiver.

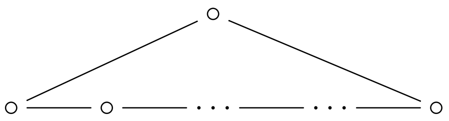
Teorema 2.5. *[2] Considere A uma K-álgebra básica, conexa e de dimensão finita. Então A é hereditária se, e somente se, $A \cong KQ$, onde Q é um quiver finito, conexo e acíclico.*

Para descrevermos a classificação das álgebras hereditárias precisamos listar os diagramas de Dynkin e os diagramas de Dynkin estendido. Os diagramas de Dynkin são:



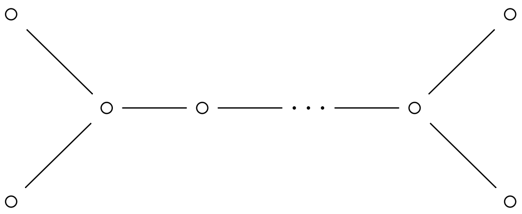
Enquanto que os diagramas de Dynkin estendidos são:

$\tilde{\mathbb{A}}_n$:



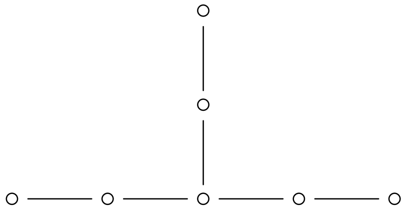
$n \geq 1$

$\tilde{\mathbb{D}}_n$:

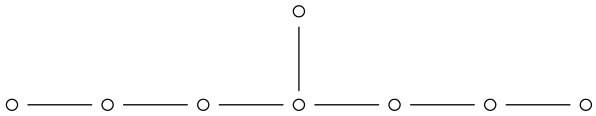


$n \geq 4$

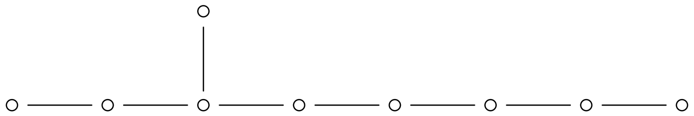
$\tilde{\mathbb{E}}_6$:



$\tilde{\mathbb{E}}_7$:



$\tilde{\mathbb{E}}_8$:



Teorema 2.6. *[32, 26, 52] Seja $A = KQ$ uma álgebra hereditária conexa. Então são equivalentes:*

i) A é mansa;

ii) O grafo que obtemos ao desconsiderarmos a orientação das flechas de Q é um diagrama de Dynkin ou um diagrama de Dynkin estendido.

2.5 Álgebras gentle e skewed-gentle

Nesse trabalho duas classes de álgebras terão papel fundamental. São as álgebras gentles [3] e as álgebras skewed-gentle [38] definidas abaixo.

Definição 2.16. *Dizemos que um quiver Q é bisserial se todo vértice é origem e fim de no máximo duas flechas;*

Definição 2.17. *Sejam Q um quiver e I um ideal admissível de KQ. O par (Q, I) é chamado gentle se satisfaz:*

1) Q é um quiver bisserial.

2) dada uma flecha $\alpha \in Q_1$, existe no máximo uma flecha $\beta \in Q_1$ com $t(\beta) = s(\alpha)$ (respectivamente, $\gamma \in Q_1$ com $s(\gamma) = t(\alpha)$) tal que $\beta\alpha \in I$ (respectivamente, $\alpha\gamma \in I$);

3) dada uma flecha $\alpha \in Q_1$, existe no máximo uma flecha $\beta \in Q_1$ com $t(\beta) = s(\alpha)$ (respectivamente, $\gamma \in Q_1$ com $s(\gamma) = t(\alpha)$) tal que $\beta\alpha \notin I$ (respectivamente, $\alpha\gamma \notin I$);

4) o ideal I é gerado por caminhos de comprimento 2.

Definição 2.18. *Uma $K-$álgebra A é gentle se ela é Morita equivalente a uma álgebra quociente $\frac{KQ}{I}$, onde o par (Q, I) é gentle.*

Exemplo 2.9. *A álgebra $K(Q, I)$ é gentle, onde Q é o quiver*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[r, "c"] \arrow[loop above, "b"] & 3
\end{tikzcd}$$

e $I =< b^2, ac >$.

Seja $Q = (Q_0, Q_1)$ um quiver. Fixaremos alguns elementos de Q_0 e denotaremos o subconjunto formado por eles por S_p. Chamaremos os elementos de S_p de vértices especiais. Os vértices que pertencem a $Q_0 \backslash S_p$ serão chamados de vértices ordinários.

Dado um conjunto I de relações para Q - com isso temos uma tripla (Q, S_p, I) - consideremos o par (Q^{sp}, I^{sp}), onde $Q_0^{sp} := Q_0$, $Q_1^{sp} := Q_1 \cup \{a_i | i \in S_p\}$, $s(a_i) := t(a_i) = i$ e $I^{sp} := I \cup \{a_i^2 | i \in S_p\}$.

Definição 2.19. *Uma tripla (Q, S_p, I) como acima é chamada skewed-gentle se o correspondente par (Q^{sp}, I^{sp}) é gentle.*

Seja (Q, S_p, I) uma tripla skewed-gentle. Associamos para cada vértice $i \in Q_0$ um conjunto, o qual será denotado por $Q_0(i)$, da seguinte maneira: se i é um vértice especial então $Q_0(i) = \{(i, -), (i, +)\}$, caso contrário $Q_0(i) = \{i\}$.

Agora definiremos o quiver com relações (Q^{sg}, I^{sg}) do seguinte modo:

$$Q_0^{sg} := \cup_{i \in Q_0} Q_0(i),$$

$$Q_1^{sg}[\alpha, \beta] := \{(\alpha, a, \beta) | a \in Q_1, \alpha \in Q_0(s(a)), \beta \in Q_0(e(a))\},$$

$$I^{sg} := \left\{ \sum_{\beta \in Q_0(s(b))} \lambda_\beta (\alpha, a, \beta)(\beta, b, \gamma) \mid ab \in I, \alpha \in Q_0(s(a)), \gamma \in Q_0(e(b)) \right\},$$

onde $Q_1^{sg}[\alpha, \beta]$ é o conjunto das flechas de α para β; $\lambda_\beta = -1$ se $\beta = (i, -)$ para algum $i \in Q_0$ e $\lambda_\beta = 1$, caso contrário.

Definição 2.20. *Uma K-álgebra A é chamada skewed-gentle, se é Morita equivalente a uma álgebra quociente $\frac{KQ^{sg}}{\langle I^{sg} \rangle}$, onde a tripla (Q, S_p, I) é skewed-gentle.*

Exemplo 2.10. *Toda álgebra gentle é skewed-gentle, basta tomar $S_p = \emptyset$.*

Os dois exemplos abaixo são as duas álgebras skewed-gentle que não são gentle que aparecerá no nosso trabalho.

Exemplo 2.11. *Sejam $Q :$* $$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[loop above, "b"] \end{tikzcd}$$ *e $I =< b^2 >$, tome $S_p = \{1\}$. O par (Q^{sp}, I^{sp}) é gentle, logo a álgebra $\frac{KQ^{sg}}{\langle I^{sg} \rangle}$ é skewed-gentle, onde*

$$Q^{sg} : \begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, "p"] & \beta \arrow[loop above, "q"] & \gamma \arrow[l, "r"'] \end{tikzcd},$$

$\alpha = (1, -), \beta = 2, \gamma = (1, +), p = (\alpha, a, \beta), q = (\beta, b, \beta)$ e $r = (\gamma, a, \beta)$. Temos que $I^{sg} =< q^2 >$.

Exemplo 2.12. *Sejam $Q :$* $$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "b"'] & 2 \arrow[l, bend right, "a"'] \end{tikzcd}$$ *e $I =< ab, ba >$, tome $S_p = \{1\}$. O par (Q^{sp}, I^{sp}) é gentle, logo a álgebra $\frac{KQ^{sg}}{\langle I^{sg} \rangle}$ é skewed-gentle, onde*

$$Q^{sg} : \begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, bend right, "p"'] & \beta \arrow[l, bend right, "q"'] \arrow[r, bend right, "s"'] & \gamma \arrow[l, bend right, "r"'] \end{tikzcd},$$

$\alpha = (1, -)$, $\beta = 2$, $\gamma = (1, +)$, $p = (\alpha, b, \beta)$, $q = (\beta, a, \alpha), s = (\beta, a, \gamma)$ e $r = (\gamma, b, \beta)$. Temos que $I^{sg} =< rs, rq, pq, ps, sr - qp >$.

2.6 Categoria de complexos e categoria homotópica

Dada $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana iremos definir a categoria de complexos, denotada por $C(\mathcal{A})$. Seja $(X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ uma família de objetos de $\mathcal{A}$ e $d_X = (d_X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ uma família de morfismos de $\mathcal{A}$, onde $d_X^i : X^i \to X^{i+1}$. Um *complexo* é uma sequência como

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] & X^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

tal que $d_X^i \circ d_X^{i-1} = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Os objetos de $C(\mathcal{A})$ são complexos.

Dados $X, Y \in C(\mathcal{A})$, um *morfismo entre complexos* é uma família de morfismos de $\mathcal{A}$ $f = (f^i)_{i\in\mathbb{Z}}$, onde $f^i : X^i \to Y^i$ tal que

$$f^i \circ d_X^{i-1} = d_Y^{i-1} \circ f^{i-1}$$

isto é, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] & X^i \arrow[r] \arrow[d, "f^i"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r, "d_Y^{i-1}"] & Y^i \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

A categoria $C(\mathcal{A})$ também é abeliana.

A próxima definição é ferramenta chave para definirmos a categoria homotópica.

Definição 2.21. *Sejam $f = (f^i)_{i\in\mathbb{Z}}, g = (g^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ morfismos em $C(\mathcal{A})$. Dizemos que f e g são homotópicos e denotamos $f \sim g$ se existe uma família de morfismos em $\mathcal{A}$ $s = (s^i)$, onde $s^i : X^i \to Y^{i-1}$ tal que $f^i - g^i = d_Y^{i-1} \circ s^i + s^{i+1} \circ d_X^i$.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[dl, dashed, "s^i"'] \arrow[d, shift right, "f^i"'] \arrow[d, shift left, "g^i"] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "s^{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r, "d_Y^{i-1}"] & Y^i \arrow[r, "d_Y^i"] & Y^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Chamamos s de homotopia. Um morfismo f é homotopicamente nulo se $f \sim 0$.

O conjunto dos morfismos homotopicamente nulos formam um ideal $\mathcal{I}$ em $C(\mathcal{A})$, ou seja, dados morfismos $f, g, h \in C(\mathcal{A})$ com $h \in \mathcal{I}$ tal que $f \circ h$ e $h \circ g$ existem, então $f \circ h, h \circ g \in \mathcal{I}$.

A *categoria homotópica* $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é o quociente $C(\mathcal{A})$ com relação ao ideal $\mathcal{I}$. Em outras palavras, os objetos de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ são os mesmos de $C(\mathcal{A})$ e os morfismos são morfismos de complexos módulo homotópicos a zero, isto é,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X,Y)=\frac{\mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X,Y)}{\mathcal{I}(X,Y)}$$

Como a categoria $\mathcal{A}$ é abeliana podemos definir o funtor de cohomologia H^n, para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$H^n \ : \ C(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$$

da seguinte forma. Nos objetos $H^n(X)=\frac{\mathrm{Ker}d^n}{\mathrm{Im}d^{n-1}}$. Dado um morfismo $f : X \to Y$ definimos $H^n(f) : H^n(X) \to H^n(Y)$ por $H^n(f)(\overline{x}) = \overline{f^n(n)}$. Caso $H^n(X) \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de índices n dizemos que X tem *cohomologia limitada.* Esse funtor está bem definido em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, pois se $f \sim g$ então $H^n(f) = H^n(g)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Um morfismo entre complexos $f : X \to Y$ é chamado *quase isomorfismo* se $H^n(f)$ é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esses morfismos terão um papel fundamental na definição de categoria derivada.

Definição 2.22. ***(Localização)*** *Sejam C uma categoria e S uma classe de morfismos em C. A localização de C com relação a S é uma categoria $C[S^{-1}]$ junto com um funtor $Q : C \to C[S^{-1}]$ tal que:*

1) $Q(f)$ é um isomorfismo para todo $f \in S$, e;

2) Qualquer funtor, $F : C \to D$ tal que $F(f)$ é um isomorfismo para todo $f \in S$, se fatora unicamente através de Q, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "F"'] & C[S^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists!\ G"] \\ & D \end{tikzcd}$$

A *categoria derivada* de $\mathcal{A}$, denotada por $D(\mathcal{A})$ é a localização de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ no conjunto S formado por todos os quase isomorfismos, isto é, $D(\mathcal{A}) := \mathcal{K}(\mathcal{A})[S^{-1}]$. A categoria $D(\mathcal{A})$ é obtida de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ invertendo formalmente os quase isomorfismos.

As categorias $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ e $D(\mathcal{A})$ não são abelianas, mas elas possuem algumas propriedades adicionais que as tornam uma categoria triangulada.

2.7 Categoria Triangulada

Em geral, as categorias trianguladas não são abelianas, mas os seus triângulos distinguidos serão bons substitutos para as sequências exatas.

Seja $\mathcal{T}$ uma categoria aditiva e $\Sigma : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ um automorfismo aditivo. Um *triângulo* em $\mathcal{T}$ é uma sequência de objetos e morfismos em $\mathcal{T}$ da forma:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

Um *morfismo de triângulos* é uma tripla de morfismos (f, g, h) tal que o diagrama abaixo é comutativo em $\mathcal{T}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

Caso f, g e h sejam isomorfismos diremos que temos um *isomorfismo de triângulos.*

Definição 2.23. *Uma categoria triangulada é uma categoria aditiva $\mathcal{T}$ junto com um automorfismo aditivo Σ - chamado funtor translação - e uma coleção de triângulos distinguidos, também chamados de exatos, satisfazendo os seguintes axiomas:*

(TR 1) A coleção de triângulos distinguidos é fechada sobre isomorfismos de triângulos. Para cada objeto $X \in \mathcal{T}$, o triângulo $X \xrightarrow{id} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$ é um triângulo distinguido e para cada morfismo $f : X \to Y \in \mathcal{T}$ existe um triângulo distinguido da forma $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$;

(TR 2) Se $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ é um triângulo distinguido, então o triângulo $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y$ também é distinguido e vice-versa;

(TR 3) Dados triângulos distinguidos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ e $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} \Sigma X'$ então cada diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"] & Z \arrow[r, "h"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma\phi"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & \Sigma X'
\end{tikzcd}$$

pode ser completado para um morfismo de triângulos;

(TR 4) (Axioma do octaedro) Dados os seguintes triângulos distinguidos:

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow \Sigma X$$
$$Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X' \longrightarrow \Sigma Y$$
$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow \Sigma X$$

então existe um triângulo distinguido

$$Z' \xrightarrow{a} Y' \xrightarrow{b} X' \xrightarrow{c} \Sigma Z'$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma id"] \\
X \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "id"] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "id"] & \Sigma Y \arrow[d] \\
Z' \arrow[r, "a"] & Y' \arrow[r, "b"] & X' \arrow[r, "c"] & \Sigma Z'
\end{tikzcd}$$

A categoria abeliana que iremos trabalhar nesse texto é a categoria de módulos à direita finitamente gerados de uma $K-$álgebra A de dimensão finita denotada por $modA$. Suas categorias homotópica e derivada serão denotadas, respectivamente, por $\mathcal{K}(A)$ e $\mathcal{D}(A)$. Essas categorias serão trianguladas. Para tanto, precisamos exibir o funtor translação e o conjunto de triângulos distinguidos.

O funtor translação

$$\Sigma : \mathcal{K}(A) \to \mathcal{K}(A)$$

no objeto $(X^n, d_X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é dado por $((\Sigma X)^n, d_{\Sigma X}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, onde $(\Sigma X)^n = X^{n+1}$ e $d_{\Sigma X}^n = -d_X^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$; no morfismo $f : X \to Y$ é tal que $(\Sigma f)^n = f^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Será muito comum nesse texto adotarmos a notação $X[i]$ para $\Sigma^i X$ e $f[i]$ para $\Sigma^i f$.

Para definirmos o conjunto de triângulos distinguidos precisamos definir o cone de um morfismo $f : X \to Y$.

Definição 2.24. *Dado um morfismo $f : X \to Y$ de complexos (X^i, d^i_X) e (Y^i, d^i_Y) o cone C_f é o complexo com $C^n_f = X^{n+1} \oplus Y^n$ e*

$$d^n_{C_f} = \begin{bmatrix} -d^{n+1}_X & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{bmatrix}.$$

Por definição, um triângulo em $\mathcal{K}(A)$ é um *triângulo exato* se ele é isomorfo a um triângulo da forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"] & C_f \arrow[r, "\beta(f)"] & X[1] \end{tikzcd}$$

onde $\alpha(f)^n = \begin{bmatrix} 0 \\ id \end{bmatrix}$ e $\beta(f)^n = \begin{bmatrix} id & 0 \end{bmatrix}$.

A categoria homotópica $K(A)$ com o automorfismo e os triângulos distinguidos definidos acima é uma categoria triangulada, ou seja, satisfaz os axiomas (TR 1)-(TR 4).

O próximo lema será útil nesse trabalho.

Lema 2.2. *([48], pag. 8) Considere os complexos*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] X : & \cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X^0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \\ W : & \cdots 0 \arrow[r] & W^{-1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \\ Y : & \cdots 0 \arrow[r] & Y^{-1} \arrow[r, "d"] & Y^0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

em que $Y^0 = X^0$ e $W^{-1} = Y^{-1}$. Sejam f e g os morfismos definidos pelos diagramas abaixo:

$$\begin{tikzcd} X : & \cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X^0 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \cdots \\ f : & & & & & \\ Y : & \cdots 0 \arrow[r] & Y^{-1} \arrow[r, "d"] & X^0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Y : & \cdots 0 \arrow[r] & Y^{-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "id"] & Y^0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \\ g : & & & & & \\ W : & \cdots 0 \arrow[r] & W^{-1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

Em $\mathcal{K}(A)$ o cone C_f é isomorfo ao complexo $Z = (Z^i, d^i_Z)$ em que $Z^i = 0$, para todo $i \neq -1, Z^{-1} = Y^{-1}$ e $d^i_Z = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Já o cone C_g é isomorfo ao complexo $T = (T^i, d^i_T)$ em que $T^i = 0$, para todo $i \neq -1, Z^{-1} = Y^0$ e $d^i_T = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

A estrutura triangulada de $\mathcal{K}(A)$ induz uma estrutura triangulada em $\mathcal{D}(A)$ via o funtor localização. Para ver esse fato necessitamos de algumas definições.

Definição 2.25. *Sejam $\mathcal{B}$ uma categoria e S um conjunto de morfismos em $\mathcal{B}$. Dizemos que S é um sistema multiplicativo se S satisfaz as seguintes condições:*

(MS 1) se $s, s' \in S$ são tais que $s \circ s'$ existe, então $s \circ s' \in S$. O morfismo identidade id está em S, para todo $X \in \mathcal{B}$;

(MS 2) seja $s : X \to Y$ tal que $s \in S$. Então, quaisquer morfismos $f : Y' \to Y$ e $g : X \to X''$ em $\mathcal{B}$ podem ser completados para um par de diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "s'"] & X \arrow[d, "s"] \\ Y' \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"] & X'' \arrow[d, "s''"] \\ Y \arrow[r] & Y'' \end{tikzcd}$$

tal que $s', s'' \in S$;

(MS 3) Para quaisquer $f, g : X \to Y$ morfismos em $\mathcal{B}$ existe $s \in S$ com $f \circ s = \beta \circ s$ se, e somente se, existe $s' \in S$ com $s' \circ f = s' \circ g$.

Definição 2.26. *Sejam $\mathcal{T}$ uma categoria triangulada com funtor translação Σ e S um conjunto de morfismos os quais formam um sistema multiplicativo. Se S satisfaz as condições abaixo dizemos que S é compatível com a triangulação:*

1) $s \in S$ se, e somente se, o mapa $\Sigma f \in S$.

2) Dados triângulos distinguidos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ e $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} \Sigma X'$ então cada diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s'"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "t"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma s"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

com $s, s' \in S$ *pode ser completado para um morfismo de triângulos tal que* $t \in S$.

Teorema 2.7. *Sejam* $\mathcal{T}$ *uma categoria triangulada e* S *um sistema multiplicativo o qual é compatível com a triangulação. Então, a localização* $\mathcal{T}[S^{-1}]$ *é uma categoria triangulada e o funtor de localização leva triângulos distinguidos em triângulos distinguidos.*

Em $\mathcal{K}(A)$ o conjunto S formado pelos quase isomorfismos que usamos para localizar e obter $\mathcal{D}(A)$ é um sistema multiplicativo que é compatível com a triangulação. Logo, $\mathcal{D}(A)$ é triangulada.

Dada A uma $K-$álgebra, a subcategoria plena de $modA$ cujos objetos são os projetivos será denotada por $projA$. Na categoria $\mathcal{K}(A)$ temos as seguintes subcategorias trianguladas plenas:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^-(A) &= \{X = (X^i) \in \mathcal{K}(A) | X^i = 0 \ \forall \ i \geq i_0\} \\ \mathcal{K}^+(A) &= \{X = (X^i) \in \mathcal{K}(A) | X^i = 0 \ \forall \ i \leq i_0\} \\ \mathcal{K}^b(A) &= \mathcal{K}^+(A) \cap \mathcal{K}^-(A) \end{aligned}$$

Localizando no conjunto dos quase isomorfismos obtemos as correspondentes categorias derivadas $\mathcal{D}^+(A), \mathcal{D}^-(A)$ e $\mathcal{D}^b(A)$. Outras subcategorias plenas importantes são,

$$\mathcal{K}^{+,b}(A) = \{X = (X^i) \in \mathcal{K}^+(A) | \ X \text{ tem cohomologia limitada}\}$$

$$\mathcal{K}^{-,b}(A) = \{X = (X^i) \in \mathcal{K}^-(A) | \ X \text{ tem cohomologia limitada}\}$$

Teorema 2.8. *([48], pág. 113)* $\mathcal{D}^-(A)$ *é equivalente a* $\mathcal{K}^-(projA)$. *A imagem de* $\mathcal{D}^b(A)$ *sobre essa equivalência é* $\mathcal{K}^{-,b}(projA)$.

Definição 2.27. *Dadas* $K-$*álgebras* A *e* B, *dizemos que* A *é derivadamente equivalente a* B *se* $\mathcal{D}^b(A)$ *é equivalente a* $\mathcal{D}^b(B)$ *como categoria triangulada.*

Muitas vezes a prova de que a categoria derivada de uma dada álgebra é derivadamente mansa será feita de maneira indireta, mostrando que ela é derivadamente equivalente a uma outra que já é conhecida ser derivadamente mansa. Para isso, o teorema de Morita para categorias derivadas será muito útil.

Definição 2.28. *Dado um objeto* X *em uma categoria aditiva* C, *denotamos por* $add\,X$ *a subcategoria plena cujos objetos são os somandos diretos de somas finitas de cópias de* X.

Definição 2.29. *Seja C uma categoria triangulada. Dizemos que uma subcategoria $\mathcal{B}$ gera C como categoria triangulada se não existe uma subcategoria própria, plena e triangulada de C, fechada sobre isomorfismos, que contém $\mathcal{B}$.*

Teorema 2.9. *[56] (Teorema de Morita para categorias derivadas) Considere as $K-$álgebras A e B . As seguintes condições são equivalentes:*

a) $\mathcal{D}^b(A)$ e $\mathcal{D}^b(B)$ são equivalentes como categorias trianguladas;

b) B é isomorfo a $End(T)$, onde T é um objeto de $K^b(\text{proj } A)$ satisfazendo:

  (1) $Hom\,(T, T[i]) = 0$ para todo $i \neq 0$;

  (2) $add\, T$ gera $K^b(\text{proj } A)$ como uma categoria triangulada.

Se T é um objeto em $K^b(\text{proj } A)$ que satisfaz (b1) e (b2) ele é chamado de *complexo inclinante* para A.

Antes de fazer um exemplo que ilustra esse teorema necessitamos de um lema e uma definição.

Definição 2.30. *Sejam $A = \frac{KQ}{I}$ uma $K-$álgebra, $i, j \in Q_0$, $P_i = e_iA$, $P_j = e_jA$ e w um caminho não nulo do vértice i para o vértice j.*

1. *A multiplicação à esquerda por w nos dá um homomorfismo de P_j para P_i que será denotado por w ou por $w\cdot$.*
2. *A multiplicação à direita por w nos dá um homomorfismo de Ae_i para Ae_j que será denotado por $\cdot w$.*

Lema 2.3. *Sejam $A = \frac{KQ}{I}$, $i, j, k \in Q_0$ e f um caminho não nulo de k para j. Considere os complexos:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, phantom, ":"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_j \arrow[r, "f"] & P_k \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ L \arrow[r, phantom, ":"] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_i \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

onde L é concentrado no grau 0 e M é concentrado nos graus 0 e 1.

Então,

1. $Hom_{D^b(A)}(L, M[i]) \cong \begin{cases} e_jAe_i \cap ker(f\cdot), & se\ i = 0 \\ \frac{e_kAe_i}{fAe_i}, & se\ i = 1 \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$

2. $Hom_{D^b(A)}(M, L[i]) \cong \begin{cases} e_iAe_k \cap ker(\cdot f), & se\ i = -1 \\ \frac{e_iAe_j}{e_iAf}, & se\ i = 0 \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$

3. $Hom_{D^b(A)}(M, M[i]) \cong \begin{cases} ker(\cdot f) \cap ker(f\cdot), & se\ i = -1 \\ \frac{V}{U}, & se\ i = 0 \\ \frac{e_kAe_j}{fAe_j + e_kAf} & se\ i = 1 \\ 0, & caso\ contrário, \end{cases}$

   onde $V = \{(s,t) \in e_jAe_j \times e_kAe_k \mid tf = fs\}$ *e* $U = \{(lf, fl) \mid l \in e_jAe_k\}$ *são espaços vetoriais.*

Demonstração : Como $Hom_A(P_i, P_j) \cong e_jAe_i$ e $D^b(A)$ é derivadamente equivalente a $K^{-,b}(projA)$ as afirmações seguem direto da definição de morfismo em $K^{-,b}(projA)$. ■

Precisaremos da próxima notação no exemplo abaixo. Seja S um espaço vetorial e $s_i \in S$, com $i \in J$. Denotaremos o subespaço gerado por $\{s_i | i \in J\}$ por $[(s_i)_{i\in J}]$.

Exemplo 2.13. *Considere a álgebra* $A = \frac{KQ}{I}$ *onde*

$$\begin{tikzcd} Q: 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[r, "c"] \arrow[loop above, "b"] & 3 \end{tikzcd} \quad e\ I = < b^2 > .$$

Temos o complexo $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ *onde:*

$$\begin{tikzcd} T_1 : \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "a"] & P_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ T_2 : \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ T_3 : \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

com T_2, T_3 *complexos concentrados no grau* 0 *e* T_1 *complexo concentrado nos graus* 0 *e* 1.

O complexo T é um complexo inclinante. Para provar essa afirmação é necessário ver que $Hom_{D^b(A)}(T, T[i]) = 0$ se $i \neq 0$ e a categoria $add(T)$ gera $K^b(projA)$ como categoria triangulada. A segunda condição segue do Lema 2.2.

Agora mostraremos a primeira condição. Se $i \notin \{0, -1\}, Hom_{D^b(A)}(T_1, T_2[i]) = 0$. Caso $i = -1$, do Lema 2.3 e do fato que $ker(\cdot a) = 0$ segue que $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_2[-1]) = 0$. Analogamente, $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_3[i]) = 0$ se $i \neq 0$. Se $i \notin \{0, 1, -1\}$ temos que $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_1[i]) = 0$. Caso $i = -1$, do Lema 2.3 e do fato que $ker(\cdot a) = 0$ segue que $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_1[-1]) = 0$. Quando $i = 1$, utilizando o Lema 2.3 e o fato que $e_1Ae_2 = aAe_2$ temos que $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_1[1]) = 0$. Logo, $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_1[i]) = 0$ com $i \neq 0$. Se $i \neq 0$ temos que $Hom_{D^b(A)}(T_2, T_2[i]) = 0, Hom_{D^b(A)}(T_2, T_3[i]) = 0, Hom_{D^b(A)}(T_3, T_2[i]) = 0$ e $Hom_{D^b(A)}(T_3, T_3[i]) = 0$. Caso $i = 1$, utilizando o Lema 2.3 e os fatos que $e_1Ae_2 = aAe_2$ e $e_1Ae_3 = aAe_3$ obtemos que $Hom_{D^b(A)}(T_2, T_1[1]) = 0$ e $Hom_{D^b(A)}(T_3, T_1[1]) = 0$. Portanto, $Hom_{D^b(A)}(T_2, T_1[i]) = 0$ e $Hom_{D^b(A)}(T_3, T_1[i]) = 0$ para todo $i \neq 0$.

Vamos encontrar a álgebra $End_{D^b(A)}T$. Pois, do Teorema 2.9 segue que $D^b(A)$ é derivadamente equivalente a $D^b(End_{D^b(A)}T)$. Considere os seguintes homomorfismos:

$\gamma \;:\; T_1 \to T_2$ *onde* γ *é dado por*

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "e_2"] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

$\alpha \;:\; T_2 \to T_2$ *onde* α *é dado por*

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

$\beta \;:\; T_3 \to T_2$ *onde* β *é dado por*

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

Do Lema 2.3 temos que os homomorfismos existentes entre os somandos diretos de T são:

$$Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = \begin{cases} [Id_{T_i}], \ se \ i = j = 1, 3 \\ [\alpha, Id_{T_i}], \ se \ i = j = 2 \\ [\gamma, \alpha\gamma], \ se \ i = 1 \ e \ j = 2 \\ [\beta, \alpha\beta], \ se \ i = 3 \ e \ j = 2 \\ 0, \ caso \ contrário. \end{cases}$$

Com os homomorfismos entre os somandos diretos calculados temos que $End\, T \cong \frac{K\Delta}{J}$ *para algum* J *contido em* $K\Delta$ *e*

$$\begin{tikzcd} \Delta: 1 \arrow[r, "\gamma"] & 2 \arrow[loop above, "\alpha"] & 3 \arrow[l, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

A flecha u *em* Δ *que começa em* i *e termina em* j *corresponde ao homomorfismo* u *que pertence a* $Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j)$*. Observe que em* $K\Delta$ *a multiplicação é da esquerda para a direita ao contrário do que ocorre na álgebra de endomorfismos.*

É fácil ver que $\alpha^2 = 0$ *em* $End_{D^b(A)}T$*. Logo,* $< \alpha^2 > \subseteq J$*. Seja* $L =< \alpha^2 >$*. Como* $dim_K Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = dim_K e_i \left(\frac{K\Delta}{L}\right) e_j$ *temos que* $L = J$*. Note que* $End_{D^b(A)}T$ *é isomorfa a uma álgebra skewed-gentle.*

2.8 Tipo de Representação Derivada

Já estamos em condições de definir o objeto central desse estudo: álgebras derivadamente mansas e álgebras derivadamente selvagens. Precisamos das definições abaixo para prosseguirmos.

Definição 2.31. *Dado* $X = (X^i, d_X^i)$ *um complexo limitado de módulos sobre* $\Gamma \otimes A$ *podemos definir o funtor abaixo:*

$$\begin{array}{rcl} - \otimes X : mod\Gamma & \rightarrow & C^b(A) \\ M & \mapsto & Y = (Y^i, d_Y^i) \ em \ que \ Y^i = M \otimes X^i \ e \ d_Y^i = Id_M \otimes d_X^i, \\ f & \mapsto & g = (g^i) \ em \ que \ g^i = f \otimes Id_{X^i}. \end{array}$$

Definição 2.32. *Dado um complexo* $X \in D^b(A)$ *a dimensão cohomológica de* X *é o vetor abaixo:*

$$h - dimX = (dimH^i(X))_{i \in \mathbb{Z}}$$

Definição 2.33. *Seja K um corpo algebricamente fechado. Uma álgebra A é chamada derivadamente mansa se para cada vetor $v = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de números naturais existe uma localização $R = K[x]_f$ com relação a algum $f \in K[x]$ e um número finito de complexos limitados de $R - A$ bimódulos $C_1, \cdots, C_n$ tais que:*

1) cada C_j^i é finitamente gerado e livre como $R-$módulo à esquerda;

2) a menos de uma quantidade finita, todo indecomponível $X \in D^b(A)$ com $h - dimX = v$ é isomorfo a $S \otimes_R C_j$ para algum $j \in \{1, \cdots, n\}$ e algum $R-$módulo simples S.

Então, A é derivadamente mansa se para cada vetor de números naturais v os objetos indecomponíveis de $D^b(A)$ cuja dimensão cohomológica é v podem ser parametrizados por uma quantidade finita de famílias de um paramêtro.

Seja M um $A-$módulo, denotamos por JM o radical de M.

Definição 2.34. *Dada uma álgebra A, ela será chamada de derivadamente selvagem se existir um complexo limitado $N = (N^i, d^i)$ de módulos projetivos sobre $K < x, y > \otimes A$ tal que Im $d^n \subseteq JN^{n+1}$ e o funtor $- \otimes N : finK < x, y > \longrightarrow D^b(A)$ satisfaz:*

a) $L \otimes_{K<x,y>} N \simeq L' \otimes_{K<x,y>} N$ se, e somente se, $L \simeq L'$;

b) $L \otimes_{K<x,y>} N$ é indecomponível se, e somente se, L é indecomponível.

Exemplo 2.14. *Considere o quiver $Q: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "b"] & {} \arrow[loop above, "a"] \end{tikzcd}$ e as álgebras $A = \frac{KQ}{I_1}$ e $B = \frac{KQ}{I_2}$ em que $I_1 =< a^2 >$ e $I_2 =< ba, a^2 >$. Do Teorema 2.14 temos que a álgebra A é derivadamente mansa e a álgebra B é derivadamente selvagem.*

Lembre-se que nos Exemplos 2.5 e 2.6 concluímos que as álgebras A e B são de representação finita.

Em [11], Bekkert e Drozd obtiveram um análogo da dicotomia mansa-selvagem para categorias derivadas.

Teorema 2.10. *[11] Toda álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado é derivadamente mansa ou derivadamente selvagem, mas não ambas.*

Já em [37], Geiss e Krause provaram que equivalência derivada preserva a propriedade de ser derivadamente mansa.

Teorema 2.11. *(veja Teorema* 5.1 *de [37]) Sejam A e B álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Suponha que A e B são derivadamente equivalentes. Então, A é derivadamente mansa se, e somente se, B é derivadamente mansa.*

A proposição abaixo relaciona as álgebras derivadamente mansas com as álgebras mansas.

Proposição 2.1. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Se A é derivadamente mansa então A é mansa.*

Demonstração : Seja $i : modA \to D^b(A)$ o funtor que associa cada módulo M o complexo

$$i(M): \qquad \cdots 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots$$

onde $i(M)^i = 0$ para todo $i \neq 0$ e $i(M)^0 = M$. Esse funtor tem as seguintes propriedades:

1. M é indecomponível se, e somente se, $i(M)$ é indecomponível.
2. $M \cong N$ se, e somente se, $i(M) \cong i(N)$.

Se $dim_K M = l$ temos que $h - dim(i(M)) = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, onde $v_i = 0$ para todo $i \neq 0$ e $v_0 = l$.

Como A é derivadamente mansa, dado um vetor $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que $v_i = 0$ para todo $i \neq 0$ e $v_0 = d$ temos que existe uma localização $R = K[x]_f$ com relação a algum $f \in K[x]$ e um número finito de complexos limitados de $R - A$ bimódulos $C_1, \cdots, C_n$ satisfazendo as condições 1 e 2 da definição 2.33. Tome os $R - A$ bimódulos C_j^0 para $1 \leq j \leq n$. Devido ao fato que os C_j, com $1 \leq j \leq n$, satisfazem as condições 1 e 2 da definição 2.33 temos que cada C_j^0, para $1 \leq j \leq n$, é um $R-$módulo livre e finitamente gerado e dado $M \in modA$ um módulo indecomponível tal que $dim_K M = d$ obtemos que $M \cong S \otimes C_j^0$ para algum $1 \leq j \leq n$ e algum $R-$módulo simples S. Logo, a Proposição 3.2 página 338 de [63] implica que A é mansa. ■

Da proposição acima, da dicotomia para a categoria de módulos e da dicotomia para categoria derivada concluímos o corolário abaixo:

Corolário 2.1. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Se A é selvagem então A é derivadamente selvagem.*

Corolário 2.2. *Toda álgebra hereditária cujo grafo não é Dynkin ou Dynkin estendido é derivadamente selvagem.*

Demonstração: segue do corolário 2.1 e do Teorema 2.6.■

O problema de classificar quais álgebras são derivadamente mansa continua em aberto. Ele foi resolvido somente para algumas classes de álgebras. Por exemplo, sabemos que as álgebras gentle [16] e as álgebras skewed-gentle [15] são derivadamente mansas.

Definição 2.35. *Uma álgebra de dimensão finita é dita derivadamente discreta se para todo vetor* $v = (v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *de números naturais existe somente um número finito de objetos indecomponíveis* $X \in D^b(A)$*, a menos de isomorfismos, tal que* $h{-}dimX = v$*.*

Em [64], Vossieck classificou quais são as álgebras derivadamente discretas de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Dado Q um quiver, denotamos por $\overline{Q}$ o grafo que obtemos ao desconsiderarmos a orientação das flechas de Q.

Teorema 2.12. *[64] Seja* A *uma* $K-$*álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. As afirmações abaixo são equivalentes:*

1. *A é derivadamente discreta.*
2. *A é derivadamente equivalente a uma álgebra hereditária KQ em que $\overline{Q}$ é um diagrama de Dynkin ou A possui uma presentação $\frac{KQ}{I}$, onde (Q, I) é um par gentle, tal que Q possui somente um ciclo não orientado e o número de caminhos com sentido horário e com sentido anti-horário de comprimento dois nesse ciclo que pertencem a I são diferentes.*

Definição 2.36. *Uma* K*-álgebra* A *é derivadamente finita se existe um conjunto finito de indecomponíveis* $X^1, \cdots, X^n \in D^b(A)$ *tal que todo indecomponível* $X \in D^b(A)$ *é isomorfo a* $X^j[i]$*, para algum* $i \in \mathbb{Z}$ *e* $1 \leq j \leq n$*.*

Pelo Teorema 2.8 temos que existe uma equivalência G entre $K^{-,b}(projA)$ e $D^b(A)$, sendo que G é a inclusão de $K^{-,b}(projA)$ em $D^b(A)$. Dizemos que um complexo de módulos projetivos $X = (X^n, d^n)$ é um complexo minimal se $Imd^n \subseteq radX^{n+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, onde $radX^{n+1}$ é o radical do $A-$módulo X^{n+1}. Em $K^{-,b}(projA)$ todo complexo é isomorfo a um complexo minimal (veja [41] Teorema 5). Se X e X' são dois complexos minimais, eles são isomorfos em $K^{-,b}(projA)$ se, e somente se, eles são isomorfos em $C(A)$ (veja [41] Lema 3). Denotaremos por $\mathcal{P}_{min}(A)$ a categoria de complexos minimais limitados à direita de $A-$módulos projetivos finitamente gerados com cohomologia limitada. Por causa das considerações acima para mostrar que uma álgebra A é derivadamente selvagem é suficiente que o funtor da definição 2.34 seja de $finK < x, y >$ para $\mathcal{P}_{min}(A)$.

Considere B uma álgebra hereditária selvagem. Logo, existe um $K < x, y > -B$ bimódulo M o qual é livre e finitamente gerado como $K < x, y > -$módulo e o funtor $- \otimes M : finK < x, y > \to modB$ preserva classes de isomorfismos e leva indecomponíveis em indecomponíveis. Denotamos por r_i o posto de $M_i = Me_i$ sobre $K < x, y >$.

Seja A uma $K-$álgebra e $P_i = e_iA$ um projetivo indecomponível, definimos o $K < x, y > -A$ bimódulo $\tilde{P}_i^{r_j} = (K < x, y >)^{r_j} \otimes_K P_i$. Nos exemplos abaixo apresentamos uma construção que será muito utilizada nesse trabalho para mostrar que uma $K-$álgebra é derivadamente selvagem.

Exemplo 2.15. *Considere $B = K\Delta$ onde*

$$\Delta : \begin{tikzcd} & & & & & 10 \arrow[dr, "l_9"] & & & \\ 1 \arrow[r, "l_1"] & 2 \arrow[r, "l_2"] & 3 \arrow[r, "l_3"] & 4 \arrow[r, "l_4"] & 5 \arrow[r, "l_5"] & 6 \arrow[r, "l_6"] & 7 \arrow[r, "l_7"] & 8 \arrow[r, "l_8"] & 9 \end{tikzcd}$$

Temos que B é selvagem pelo Teorema 2.6. Seja M o bimódulo da definição 2.13. Podemos trabalhar com o bimódulo M como sendo a $K < x, y > -$representação de Δ abaixo:

$$\begin{tikzcd} & & & & & M_{10} \arrow[dr, "M(l_9)"] & & & \\ M_1 \arrow[r, "M(l_1)"] & M_2 \arrow[r, "M(l_2)"] & M_3 \arrow[r, "M(l_3)"] & M_4 \arrow[r, "M(l_4)"] & M_5 \arrow[r, "M(l_5)"] & M_6 \arrow[r, "M(l_6)"] & M_7 \arrow[r, "M(l_7)"] & M_8 \arrow[r, "M(l_8)"] & M_9 \end{tikzcd}$$

Mostraremos que a álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ onde Q :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, bend left, "a"] \arrow[rr, bend right, "b"'] & & 2 \arrow[dl, "c"] \\ & 3 \arrow[ul, "d"] & \end{tikzcd}$$

e $I = < da, cd, ac, dbc >$ é derivadamente selvagem. Considere o complexo N de

$K < x, y > -A$ bimódulos abaixo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \tilde{P}_2^{r_{10}} \arrow[dr, "M(l_9)a"] & & & \\
\tilde{P}_1^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)d"] & \tilde{P}_3^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)bc"] & \tilde{P}_1^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)d"] & \tilde{P}_3^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)bc"] & \tilde{P}_1^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)d"] & \tilde{P}_3^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)bc"] & \tilde{P}_1^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)d"] & \tilde{P}_3^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)bc"] & \tilde{P}_1^{r_9}
\end{tikzcd}$$

onde $M(l_i)w = M(l_i) \otimes w$ com w um caminho não nulo em Q, ou equivalentemente

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \tilde{P}_1^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)d"] & \tilde{P}_3^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)bc"] & \tilde{P}_1^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)d"] & \tilde{P}_3^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)bc"] & \tilde{P}_1^{r_5} \arrow[r, dash] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 \\ M(l_5)d \end{pmatrix}"] & \tilde{P}_2^{r_{10}} \oplus \tilde{P}_3^{r_6} \arrow[r, "\begin{pmatrix} M(l_9)a & M(l_6)bc \end{pmatrix}"] & \tilde{P}_1^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)d"] & \tilde{P}_3^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)bc"] & \tilde{P}_1^{r_9} \arrow[r, dash] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Mostraremos que o funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem.

Sejam $(V_i, T(l_i))$ e (f_i), respectivamente, um objeto e um morfismo de $rep_K(\Delta)$. Considere o funtor $G : rep_K(\Delta) \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ tal que $G((V_i, T(l_i)))$ é o complexo abaixo:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \otimes P_1 \arrow[r, "T(l_1)\otimes d"] & V_2 \otimes P_3 \arrow[r, "T(l_2)\otimes bc"] & V_3 \otimes P_1 \arrow[r, "T(l_3)\otimes d"] & V_4 \otimes P_3 \arrow[r, "T(l_4)\otimes bc"] & V_5 \otimes P_1 \arrow[r, dash] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & V_{10} \otimes P_2 \arrow[dr, "T(l_9)\otimes a"] & & & & \\
{} \arrow[r, "T(l_5)\otimes d"] & V_6 \otimes P_3 \arrow[r, "T(l_6)\otimes bc"] & V_7 \otimes P_1 \arrow[r, "T(l_7)\otimes d"] & V_8 \otimes P_3 \arrow[r, "T(l_8)\otimes bc"] & V_9 \otimes P_1
\end{tikzcd}$$

e $G(f_i)$ é o morfismo abaixo

$$[f_1 \otimes e_1, f_2 \otimes e_3, f_3 \otimes e_1, f_4 \otimes e_3, f_5 \otimes e_1, \begin{pmatrix} f_{10} \otimes e_2 & 0 \\ 0 & f_6 \otimes e_3 \end{pmatrix}, f_7 \otimes e_1, f_8 \otimes e_3, f_9 \otimes e_1]$$

Temos que G preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, $G \circ - \otimes M : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Como os funtores $- \otimes_{K<x,y>} N$ e $G \circ - \otimes M$ são isomorfos temos que $- \otimes_{K<x,y>} N$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos.

Exemplo 2.16. *Considere* $B = K\Delta$ *onde*

$$\begin{tikzcd}
\Delta : & & 10 & & & & & \\
& 1 \arrow[ur, "l_9"] \arrow[r, "l_1"] \arrow[dr, "l_7"] & 2 \arrow[r, "l_2"] & 3 \arrow[r, "l_3"] & 4 \arrow[r, "l_4"] & 5 \arrow[r, "l_5"] & 6 \arrow[r, "l_6"] & 7 \\
& 8 \arrow[r, "l_8"] & 9 & & & & &
\end{tikzcd}$$

Temos que B *é selvagem pelo Teorema 2.6. Seja* M *o bimódulo da definição 2.13. Podemos trabalhar com o bimódulo* M *como sendo a* $K < x, y > -$*representação de* Δ *abaixo:*

$$\begin{tikzcd}
& M_{10} & & & & & \\
M_1 \arrow[ur, "M(l_9)"] \arrow[r, "M(l_1)"] \arrow[dr, "M(l_7)"] & M_2 \arrow[r, "M(l_2)"] & M_3 \arrow[r, "M(l_3)"] & M_4 \arrow[r, "M(l_4)"] & M_5 \arrow[r, "M(l_5)"] & M_6 \arrow[r, "M(l_6)"] & M_7 \\
M_8 \arrow[r, "M(l_8)"] & M_9 & & & & &
\end{tikzcd}$$

Mostraremos que a álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ *onde*

$$\begin{tikzcd}
Q : 1 \arrow[rr, "\gamma"] & & 2 \arrow[loop above, "\alpha"] \\
& 3 \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

e $I =< \alpha^2, \delta\gamma - \beta\alpha >$ *é derivadamente selvagem. Considere o complexo* N *de* $K < x, y > -A$ *bimódulos abaixo:*

$$\begin{tikzcd}
N : & \tilde{P}_1^{r_{10}} & & & & & \\
\tilde{P}_2^{r_1} \arrow[ur, "M(l_9)\gamma"] \arrow[r, "M(l_1)\alpha"] \arrow[dr, "M(l_7)\beta"] & \tilde{P}_2^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)\alpha"] & \tilde{P}_2^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)\alpha"] & \tilde{P}_2^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)\alpha"] & \tilde{P}_2^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)\alpha"] & \tilde{P}_2^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)\alpha"] & \tilde{P}_2^{r_7} \\
\tilde{P}_1^{r_9} \arrow[r, "M(l_8)\delta"'] & \tilde{P}_3^{r_8} & & & & &
\end{tikzcd}$$

onde $M(l_i)w = M(l_i) \otimes w$ *com* w *um caminho não nulo em* Q*, ou equivalentemente*

$$N:\ \cdots 0 \longrightarrow \tilde{P}_2^{r_1}\oplus\tilde{P}_1^{r_9} \xrightarrow{\begin{pmatrix} M(l_9)\gamma & 0 \\ M(l_1)\alpha & 0 \\ M(l_7)\beta & M(l_8)\delta \end{pmatrix}} \tilde{P}_1^{r_{10}}\oplus\tilde{P}_2^{r_2}\oplus\tilde{P}_3^{r_8} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & M(l_2)\alpha & 0 \end{pmatrix}} \tilde{P}_2^{r_3} \xrightarrow{M(l_3)\alpha} \tilde{P}_2^{r_4} \xrightarrow{M(l_4)\alpha} \tilde{P}_2^{r_5} \xrightarrow{M(l_5)\alpha}$$

$$\longrightarrow \tilde{P}_2^{r_6} \xrightarrow{M(l_6)\alpha} \tilde{P}_2^{r_7} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Mostraremos que o funtor $-\otimes_{K<x,y>} N : finK < x,y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ *preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo,* A *é derivadamente selvagem.*

Sejam $(V_i, T(l_i))$ *e* (f_i)*, respectivamente, um objeto e um morfismo de* $rep_K(\Delta)$*. Considere o funtor* $G : rep_K(\Delta) \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ *tal que* $G((V_i, T(l_i)))$ *é o complexo abaixo:*

$$\begin{tikzcd}
 & V_{10}\otimes P_1 & & & & & \\
V_1\otimes P_2 \arrow[ur, "T(l_9)\otimes\gamma"] \arrow[r, "T(l_1)\otimes\alpha"] \arrow[dr, "T(l_7)\otimes\beta"] & V_2\otimes P_2 \arrow[r, "T(l_2)\otimes\alpha"] & V_3\otimes P_2 \arrow[r, "T(l_3)\otimes\alpha"] & V_4\otimes P_2 \arrow[r, "T(l_4)\otimes\alpha"] & V_5\otimes P_2 \arrow[r, "T(l_5)\otimes\alpha"] & V_6\otimes P_2 \arrow[r, "T(l_6)\otimes\alpha"] & V_7\otimes P_2 \\
V_9\otimes P_1 \arrow[r, "T(l_8)\otimes\delta"] & V_8\otimes P_3 & & & & &
\end{tikzcd}$$

e $G(f_i)$ *é o morfismo* $[g_1, g_2, f_3\otimes e_2, f_4\otimes e_2, f_5\otimes e_2, f_6\otimes e_2, f_7\otimes e_2]$ *onde* $g_1 = \begin{pmatrix} f_1\otimes e_2 & 0 \\ 0 & f_9\otimes e_1 \end{pmatrix}$ *e* $g_2 = \begin{pmatrix} f_{10}\otimes e_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2\otimes e_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_8\otimes e_3 \end{pmatrix}$*. Temos que* G *preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo,* $G\circ -\otimes M : finK < x,y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ *preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Como os funtores* $-\otimes_{K<x,y>} N$ *e* $G\circ -\otimes M$ *são isomorfos temos que* $-\otimes_{K<x,y>} N$ *preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos.*

Nos lemas abaixo $A = \frac{KQ}{I}$ é uma $K-$álgebra de dimensão finita. Eles serão importantes na demonstração do nosso resultado principal.

Definição 2.37. *Sejam* A *uma* $K-$*álgebra de dimensão finita e* B *uma subálgebra de* A*. Dizemos que* B *é uma subálgebra plena de* A *se* B *é da forma* eAe *para algum idempotente* e*.*

Lema 2.4. *Seja B uma subálgebra plena de A. Se B é derivadamente selvagem, então A é derivadamente selvagem.*

Lema 2.5. *Suponha que existam $a, b \in Q_1$ tal que $s(a) = t(a) = t(b)$ (respectivamente, $s(a)$=$t(a)$=$s(b)$) e $a^2, ba \in I$ (respectivamente, $a^2, ab \in I$). Então, A é derivadamente selvagem.*

Lema 2.6. *Suponha que existam $a, b \in Q_1$ e $w = \sum_i \lambda_i w_i \notin I$, onde w_i são caminhos de comprimento maior ou igual que 1, tais que $s(w_i) = s(w_j)$ e $t(w_i) = t(w_j)$ para todo i, j; $\lambda_i \in K$. Se $s(a) = s(b), t(a) = t(b), t(a) = s(w)$, (respectivamente, $s(a) = t(w)$) e $aw, bw \in I$ (respectivamente, $wa, wb \in I$), então A é derivadamente selvagem.*

Para demonstração desses lemas basta ver as páginas 9 e 10 de [13]. Nesse mesmo artigo os autores classificam todas as álgebras finitamente geradas completas cujo quiver possui um ou dois pontos e são derivadamente mansas. Como no nosso trabalho estamos interessados apenas no caso de dimensão finita, enunciamos os resultados, considerando apenas esse caso.

Teorema 2.13. *(veja Teorema A de [13]) Seja $\frac{KQ}{I}$ uma $K-$álgebra de dimensão finita com um módulo simples. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *A é derivadamente mansa.*
2. *A é isomorfa a uma das álgebras $L_1 = K$ ou $L_2 = \frac{K[x]}{(x^2)}$.*

Corolário 2.3. *Seja A uma $K-$álgebra de dimensão finita. Suponha que exista $a \in Q_1$ com $t(a) = s(a)$. Se A é derivadamente mansa então $a^2 \in I$.*

***Demonstração**: A álgebra A é derivadamente mansa de dimensão finita. Logo, pelo Lema 2.4 a subálgebra $B = e_{s(a)}Ae_{s(a)}$ também é. Como $a \in (Q_A)_1$ temos que $dim_K \frac{radB}{rad^2B} \geq 1$. Então, do Teorema 2.13 segue que $e_{s(a)}Ae_{s(a)} \cong L_2$. Portanto, $a^2 \in I$.*■

Teorema 2.14. *(veja Teorema B de [13])*

Seja $A = \frac{KQ}{I}$ uma $K-$álgebra de dimensão finita com dois módulos simples. Então as seguintes condições são equivalentes:

1. *A é derivadamente mansa.*
2. *A é isomorfa a uma das álgebras da tabela 2.1.*

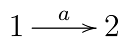
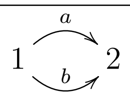
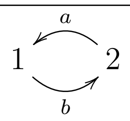
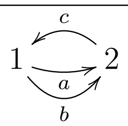
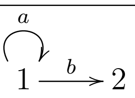
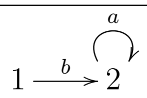
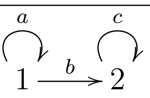
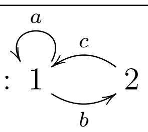
$Q1:$  $A_1 : I = 0$	$Q2:$  $A_2 : I = 0$	$Q3:$  $A_3 : I =< ab >$ $A_5 : I =< ab, ba >$	$Q4:$  $A_4 : I =< ca, bc >$
$Q5:$  $A_6 : I =< a^2 >$	$Q6:$  $A_7 : I =< a^2 >$	$Q7:$  $A_8 : I =< a^2, c^2 >$	$Q8:$  $A_9 : I =< a^2, cb, bc >$

Tabela 2.1: Tabela com as álgebras que possuem dois módulos simples que são derivadamente mansas.

Do Teorema 2.14 concluímos os corolários abaixo que serão fundamentais na demonstração do nosso Teorema Principal. Antes de enunciá-los, apresentaremos um lema necessário para a demonstração dos mesmos.

Lema 2.7. *Seja* $\phi : A \to B$ *um isomorfismo de* $K-$*álgebras. Então,* $\phi(e_i(rad^n A)e_j) = \phi(e_i)(rad^n B)\phi(e_j)$.

Corolário 2.4. *Seja* $A \cong A_3$ *ou* $A \cong A_5$*. Então,* $rad^3 A = 0$ *e* $dim_K e_1 rad^2 A e_1 = 0$ *ou* $dim_K e_2 rad^2 A e_2 = 0$.

Demonstração: Segue do Lema 2.7.■

Corolário 2.5. *Se* $A = \frac{KQ4}{J}$ *é isomorfa a* A_4*, então:* $rad^4 A = 0, dim_K e_1 rad^2 A e_2 = 1, dim_K e_1 rad^2 A e_1 = 1, dim_K e_1 rad A e_2 = 3, dim_K e_2 rad A e_1 = 1, dim_K e_2 rad^2 A e_1 = 0$ *e* $dim_K e_2 rad^2 A e_2 = 1$*. Além disso,* $\lambda_1 ca + \lambda_2 cb, \lambda_3 bc + \lambda_4 ac \in J$*, para* $\lambda_i \in K$*,* $i = 1, \cdots, 4$ *com* $\lambda_1\lambda_3 - \lambda_4\lambda_2 \neq 0$.

Demonstração: A primeira parte segue do Lema 2.7. Como $dim_K e_1 rad^2 A e_1 = 1$ (resp., $dim_K e_2 rad^2 A e_2 = 1$) temos que $\lambda_1 ca + \lambda_2 cb \in J$ (resp., $\lambda_3 bc + \lambda_4 ac \in J$) para $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ não simultaneamente nulos (resp., para $\lambda_3, \lambda_4 \in K$ não simultaneamente nulos). Com isso, temos que $\lambda_1\lambda_3 - \lambda_4\lambda_2 = 0$ se, e somente se, $\lambda_1 a + \lambda_2 b$ é múltiplo de $\lambda_4 a + \lambda_3 b$. Se isso ocorre, assumiremos que $\lambda_1 \neq 0$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca a por $\tilde{a} = \lambda_1 a + \lambda_2 b$ temos que $c\tilde{a}, \tilde{a}c \in J$. Então, a menos de mudança do conjunto de geradores podemos assumir que $ac, ca \in J$. Do fato de $dim_K e_2 radAe_1 = 1$ concluímos que $cbc \in J$. Como $ac, ca \in J$, do Lema 2.6 segue que $cb, bc \notin J$. Com isso, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, temos o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \tilde{P}_1^{r_{10}} \arrow[dr, "M(l_9)bc"] & & & \\
\tilde{P}_1^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)c"] & \tilde{P}_2^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)a"] & \tilde{P}_1^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)c"] & \tilde{P}_2^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)a"] & \tilde{P}_1^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)c"] & \tilde{P}_2^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)a"] & \tilde{P}_1^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)c"] & \tilde{P}_2^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)a"] & \tilde{P}_1^{r_9}
\end{tikzcd}$$

Como o funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos A é derivadamente selvagem. O caso $\lambda_1 = 0$ é análogo. Portanto, $\lambda_1\lambda_3 - \lambda_4\lambda_2 \neq 0$. ■

Corolário 2.6. *Seja* $A = \frac{KQ8}{J}$ *uma álgebra isomorfa a* A_9. *Então,* $dim_K e_2 rad^3 Ae_2 = 1, dim_K e_2 rad^2 Ae_2 = 1, dim_K e_2 radAe_1 = 2, dim_K e_1 radAe_2 = 2$, $dim_K e_1 radAe_1 = 1, dim_K e_1 rad^2 Ae_2 = 1$ *e* $dim_K e_2 rad^2 Ae_1 = 1$. *Além disso, existe* $\lambda \in K$ *tal que* $a^2, cb + \lambda cab, bc \in J$.

Demonstração: A primeira parte segue do Lema 2.7. Do Teorema 2.13 segue que $a^2, bc \in J$. Sabemos que $dim_K e_2 rad^2 Ae_2 = 1$. Logo, $\lambda_1 cb + \lambda_2 cab \in J$, para alguns $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ não simultaneamente nulos. Se $\lambda_1 = 0$ temos que $cab \in J$. Como $a^2 \in J$ do Lema 2.5 segue que $ca \notin J$. Com isso, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, temos o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \tilde{P}_1^{r_9} \arrow[r, "M(l_8)c"] & \tilde{P}_2^{r_8} \arrow[dr, "M(l_7)b"] & & \\
\tilde{P}_1^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)a"] & \tilde{P}_1^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)a"] & \tilde{P}_1^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)a"] & \tilde{P}_1^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)a"] & \tilde{P}_1^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)a"] & \tilde{P}_1^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)a"] & \tilde{P}_1^{r_7} \arrow[r, "M(l_9)ca"] & \tilde{P}_1^{r_{10}}
\end{tikzcd}$$

Como o funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos A é derivadamente selvagem. Portanto, $\lambda_1 \neq 0$ e $ca + \lambda cab \in J$, onde $\lambda = \lambda_1^{-1}\lambda_2$.■

Corolário 2.7. *Se* $A = \frac{KQ7}{J}$ *é isomorfa a* A_8, *então* $dim_K e_1 radAe_2 = 4$ *e* $dim_K e_1 rad^2 Ae_2 = 3$.

Demonstração: Segue do Lema 2.7.■

Corolário 2.8. *Se* $A = \frac{KQ6}{J}$ *é isomorfa a* A_7, *então* $dim_K e_1 rad^2 Ae_2 = 1$.

Demonstração: Segue do Lema 2.7.■

Para demonstrar o Teorema Principal precisaremos de alguns resultados sobre degeneração de álgebras que veremos abaixo.

Dado um inteiro positivo d, denotamos por $alg_d(K)$ a variedade afim das estruturas de álgebras associativas com identidade no espaço afim K^d. O grupo linear geral $GL_d(K)$ age naturalmente em $alg_d(K)$, e as $GL_d(K)-$órbitas em $alg_d(K)$ correspondem às classes de isomorfismos de álgebras de dimensão d (para mais detalhes veja [49]). Identificamos uma álgebra A de dimensão d com o ponto de $alg_d(K)$ correspondente a ela. Dadas as álgebras A e B de dimensão finita d, dizemos que B é uma *degeneração* de A (A é uma *deformação* de B) se B pertence ao fecho da $GL_d(K)-$órbita de A na topologia de Zariski de $alg_d(K)$.

Definição 2.38. *Uma família de álgebras* $A(\lambda)_{\lambda \in K}$ *em* $alg_d(K)$ *é chamada algébrica se o mapa induzido* $A(-) : K \to alg_d(K)$ *é um mapa regular de variedades afins.*

Para mais informações sobre o teorema abaixo veja a Proposição 2.1 de [22] e o Corolário 1.5 de [11].

Teorema 2.15. *Seja* d *um inteiro positivo e* $A(\lambda)$, $\lambda \in K$, *uma família algébrica em* $alg_d(K)$ *tal que* $A(\lambda) \cong A(1)$ *para todo* $\lambda \in K \backslash 0$. *Então,* $A(1)$ *se degenera para* $A(0)$. *Além disso, se* $A(0)$ *é derivadamente mansa então* $A(1)$ *é derivadamente mansa.*

Exemplo 2.17. *Seja* Q *o quiver*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, bend left, "a"] \arrow[rr, bend right, "b"'] & & 2 \arrow[dl, bend right, "c"'] \arrow[dl, bend left, "d"] \\
& 3 \arrow[ul, "e"] &
\end{tikzcd}$$

. *A família de álgebras* $A_\lambda = \frac{KQ}{I_\lambda}$ *onde* $\lambda \in K$ *e* $I_\lambda =< ac, ea, ce, bd + \lambda adebc >$ *é algébrica. A álgebra* $A(0)$ *é derivadamente mansa, pois ela é gentle. Logo, o Teorema 2.15 implica que* $A(1)$ *é derivadamente mansa.*

Capítulo 3

Classificação das álgebras derivadamente mansas com três módulos simples

Sejam $A = \frac{KQ}{I}$ uma $K-$álgebra e $s, t \in Q_0$ com $s \neq t$, a subálgebra $(e_s + e_t)A(e_s + e_t)$ de A será denotada por A_{st} onde e_s (resp. e_t) é o idempotente no vértice $s \in Q_0$ (resp. é o idempotente no vértice $t \in Q_0$).

Com todos os conceitos necessários já revistos no capítulo anterior, nesse podemos nos dedicar a demonstrar os nossos resultados. Relembrando, K é um corpo algebricamente fechado. Nesse trabalho nosso objetivo é classificar as álgebras derivadamente mansas de dimensão finita que possuem três módulos simples. Essa classificação é apresentada no Teorema Principal.

Nas seções 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 encontramos as álgebras derivadamente mansas cujo quiver é bisserial e possui, respectivamente, $2, 3, 4, 5$ e 6 flechas. Na seção 3.6 encontramos as álgebras derivadamente mansas cujo quiver não é bisserial. Finalizaremos demonstrando o Teorema Principal na seção 3.7.

Os lemas abaixo nos auxiliarão na demonstração do Teorema Principal.

Lema 3.1. *Sejam* $A = \frac{KQ}{I}$ *uma* $K-$*álgebra de dimensão finita e* $s, t \in Q_0$ *com* $s \neq t$. *Se* $e_s(radA)e_t$ *é cíclico como* $e_sAe_s - e_tAe_t$ *bimódulo com um gerador* $w \neq 0$ *então* $w \in e_s(radA_{st})e_t \backslash e_s(rad^2 A_{st})e_t$.

Demonstração: Caso $w \in rad^2 A_{st}$ mostraremos que $w \in rad^n A_{st}$ para todo $n \geq 1$. Devido o fato de A ser de dimensão finita existe $m \geq 2$ tal que $rad^m A = 0$. Logo,

$rad^m A_{st} = 0$ e $w = 0$, o que é uma contradição. Disso segue que $w \in radA_{st} \backslash rad^2 A_{st}$.

Se $w \in rad^2 A_{st}$ veremos que $w \in rad^3 A_{st}$. Já que $w \in rad^2 A_{st}$ temos que

$$w = \sum \lambda_i u_i v_i \tag{3.1}$$

com $\lambda_i \in K$ e $u_i, v_i \in radA_{st}$. Logo, $u_i \in e_s(radA_{st})e_t$ ou $v_i \in e_s(radA_{st})e_t$ para todo i. Devido a hipótese que w gera $e_s(radA)e_t$ como $e_sAe_s - e_tAe_t$ bimódulo segue que, para todo i, u_i ou v_i é da forma $\sum \mu_j p_j w q_j$ com $\mu_j \in K, p_j \in e_sAe_s$ e $q_j \in e_tAe_t$. Substituindo em (3.1) e usando os fatos que $w \in rad^2 A_{st}$ e $u_i, v_i \in radA_{st}$ concluímos que $w \in rad^3 A_{st}$.

Agora se supormos que $w \in rad^{n-1} A_{st}$ concluíremos que $w \in rad^n A_{st}$. O raciocínio é análogo ao apresentado acima. Portanto, por indução temos que se $w \in rad^2 A_{st}$ segue que $w \in rad^n A_{st}$ para todo $n \geq 1$. ■

Lema 3.2. *Sejam* $A = \frac{KQ}{I}$ *uma* $K-$*álgebra de dimensão finita,* $s, t \in Q_0$ *com* $s \neq t$ *e* $e_s radAe_s \neq 0$. *Se todo caminho de* s *para* s *que passa pelo vértice* t *pertence a* I *e* w *gera* $e_s radAe_s$ *como* $e_sAe_s - e_sAe_s$ *bimódulo, então* $w \in radA_{st} \backslash rad^2 A_{st}$.

Demonstração: Análoga a demonstração do Lema 3.1. ■

Lema 3.3. *Sejam* $A = \frac{KQ}{I}$ *uma* K*-álgebra de dimensão finita e* B *uma subálgebra plena. Considere* $\alpha, \gamma \in e_i(radB \backslash rad^2 B)e_j$, *onde* $i, j \in (Q_B)_0$, *com* $\alpha \in rad^2 A$ *e* $\gamma \in radA \backslash rad^2 A$. *Suponha que* $dim_K e_i \frac{radB}{rad^2 B} e_j = 2$, *então* $\bar{\alpha}$ *e* $\bar{\gamma}$ *formam uma base de* $e_i \frac{radB}{rad^2 B} e_j$.

Demonstração: Se $\lambda_1 \bar{\alpha} + \lambda_2 \bar{\gamma} = 0$, então $\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \gamma \in rad^2 B$. Como $rad^2 B \subset rad^2 A$ e $\gamma \in radA \backslash rad^2 A$ segue que $\lambda_2 = 0$. Do fato de $\alpha \notin rad^2 B$ temos que $\lambda_1 = 0$. Portanto, $\bar{\alpha}$ e $\bar{\gamma}$ são linearmente independentes. Como $dim_K e_i \frac{radB}{rad^2 B} e_j = 2$ eles formam uma base para esse espaço vetorial.■

Definição 3.1. *Seja* (Q, I) *um par gentle. Dado* w *um caminho em* Q *dizemos que* w *é um caminho em* (Q, I) *se* $w \notin I$.

Definição 3.2. *Sejam* (Q, I) *um par gentle e* w *um caminho em* (Q, I). *Chamamos* w *de caminho maximal se para todo* $p \in Q_1$ *temos que* $wp, pw \in I$.

Definição 3.3. *Seja* $A = \frac{KQ}{I}$ *uma* $K-$*álgebra com* (Q, I) *um par gentle. Dados* $i, j \in Q_0$, *com* $i \neq j$, *chamaremos um caminho* w *em* (Q, I) *de* i *para* j *de acíclico na* *extremidade i (resp, acíclico na extremidade j) se* $w = pw_1$ *(resp,* $w = w_2q$*) implica que p (resp, q) não é um ciclo. Dizemos que w é acíclico nas extremidades se w é acíclico no ponto inicial e no ponto final.*

Lema 3.4. *Sejam* (Q, I) *um par gentle e* $i, j \in Q_0$ *com* $i \neq j$*. Se p e q são dois caminhos em* (Q, I) *de i para j que possuem uma flecha em comum, então eles possuem em comum um subcaminho acíclico nas extremidades cujos pontos inicial e final são, respectivamente, i e j.*

Demonstração : Como (Q, I) é um par gentle para qualquer caminho u em (Q, I) existe no máximo uma flecha b (resp. no máximo uma flecha d) tal que ub (resp. du) é um caminho em (Q, I). Por isso, existe um único caminho t em (Q, I) de i para j com comprimento mínimo que contém a. Disso segue o lema.■

Corolário 3.1. *Sejam* (Q, I) *um par gentle e* $i, j \in Q_0$ *com* $i \neq j$*. Existem no máximo dois caminhos de i para j acíclicos nas extremidades.*

Demonstração : Como (Q, I) é um par gentle existem no máximo duas flechas cujos pontos iniciais são i. Então, a afirmação segue do Lema 3.4.■

Teorema 3.1. *Sejam* $A = \frac{KQ}{I}$ *uma K-álgebra de dimensão finita com* (Q, I) *um par gentle e L um ideal tal que* $0 \neq L \subseteq rad^2 A$*. Se* $B = \frac{A}{L}$ *é derivadamente mansa então existem* ρ_i *com* $i \in S$ *tais que* $L =< \rho_i, i \in S >$ *e cada* ρ_i *tem a forma* $f_i - \lambda_i g_i$*, onde* f_i *e* g_i *são caminhos que não possuem subcaminhos em comum e* $\lambda_i \in K$*.*

Demonstração: Seja $S = \{\rho_i\}$ um conjunto minimal de geradores para L que não satisfaz a condição do teorema. Então, existe pelo menos um ρ_i que denotaremos por ρ que possui uma das formas abaixo:

1. $\rho = \mu f$ onde f é um caminho e $\mu \in K^*$. Em S basta trocarmos ρ por $\mu^{-1}\rho$.

2. $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ sendo que w_i são caminhos distintos em (Q, I), $\lambda_i \in K$ e pelo menos dois deles não nulos. Como A é gentle segue que A é derivadamente mansa, veja [16]. Como A é derivadamente mansa e de dimensão finita do Teorema 2.13 segue que $e_s A e_s$ é isomorfa a L_2 ou L_1 para todo $s \in Q_0$. Logo, para todo $s \in Q_0$ existe no máximo um ciclo em (Q, I) no vértice s e esse ciclo ao quadrado pertence a I. Assim, segue que $s(w_i) \neq t(w_i)$, para todo i. Do Teorema 2.14 temos que $dim_K s(\rho)(radA)t(\rho) \leq 4$. Logo, $n \leq 4$. Temos dois casos para considerar:

2.1 Existem dois caminhos distintos de $s(\rho)$ para $t(\rho)$ acíclicos nas extremidades os quais serão denotados por w_1 e w_2. Então, do Teorema 2.14 segue que o quiver de $A_{s(\rho)t(\rho)}$ é $Q2$ ou $Q4$. No primeiro caso, $\rho = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ com $\lambda_i \in K^*$. Nesse caso, basta substituir ρ por $\lambda_1^{-1}\rho$ em S.

No segundo caso, $dim_K s(\rho)(radA)t(\rho) = 3$, $2 \leq n \leq 3$ e, sem perda de generalidade, $\rho = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_2 t$ com t um ciclo em (Q, I) tal que $t^2 \in I$, $\lambda_i \in K$ e dois deles não nulos. Como (Q, I) é um par gentle e $w_2 t \notin I$ temos que $w_1 t \in I$. Se $\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 \neq 0$ multiplicamos ρ à direita por t. Do fato que $t^2, w_1 t \in I$ concluímos que $w_2 t \in L$. Logo, $\tilde{\rho} = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in L$ e podemos substituir ρ por $\lambda_2^{-1}\tilde{\rho}$ em S. Vamos supor que $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 \neq 0$. Substituímos ρ por $\lambda_3^{-1}\rho$ em S. O caso $\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 = 0$ é análogo ao último.

2.2 Existe um único caminho w de $s(\rho)$ para $t(\rho)$ acíclico nas extremidades. Desse último fato e do fato que $n \geq 2$ temos que o Teorema 2.14 implica que $Q_{A_{s(\rho)t(\rho)}}$ é $Q5$, $Q6$, $Q7$ ou $Q8$. Se $Q_{A_{s(\rho)t(\rho)}}$ é $Q5$, $Q6$ ou $Q8$ temos que $\rho = \lambda_1 w + \lambda_2 w t_1$ ou $\rho = \lambda_1 w + \lambda_2 t_2 w$ com $\lambda_i \in K^*$ e t_i um ciclo em (Q, I) e $t_i^2 \in I$. Os dois casos são análogos, por isso analisaremos apenas o primeiro. Sabemos que $\rho = \lambda_1 w + \lambda_2 w t_1 = \lambda_1 w(e_{t(\rho)} + \lambda_1^{-1}\lambda_2 t_1)$. Multiplicando a expressão anterior à direita por $\lambda_1^{-1}(e_{t(\rho)} + \lambda_1^{-1}\lambda_2 t_1)^{-1}$ concluímos que $w \in L$. Logo, podemos substituir ρ por w em S.

Caso $Q_{A_{s(\rho)t(\rho)}}$ seja $Q7$, em (Q, I) temos um ciclo com ponto inicial igual ao ponto inicial de w e um ciclo com ponto final igual ao ponto final de w denotados, respectivamente, por t_2 e t_1 com $t_i^2 \in I$. Por isso, $\rho = \lambda_1 w + \lambda_2 w t_1 + \lambda_3 t_2 w + \lambda_4 t_2 w t_1$, onde $\lambda_i \in K$ com pelo menos dois deles não nulos. Suponha que $\lambda_1 \neq 0$, multiplicando convenientemente por t_1 e t_2 concluímos que $t_2 w t_1 \in L$. Logo, podemos assumir que $\rho = w + \mu_1 w t_1 + \mu_2 t_2 w = (e_{s(\rho)} + \mu_2 t_2)w + \mu_1 w t_1$, com $\mu_i \in K$. Multiplicando à esquerda por $(e_{s(\rho)} + \mu_2 t_2)^{-1}$ e usando o fato que $t_2 w t_1 \in L$ obtemos que $w + \mu_1 w t_1 \in L$. Multiplicando à direita por t_1 concluímos que $w t_1, w \in L$. Desse modo, ρ pode ser substituído por w em S. Se $\lambda_1 = 0$, temos que $\rho = \lambda_2 w t_1 + \lambda_3 t_2 w + \lambda_4 t_2 w t_1$. Multiplicando por t_1 ou t_2 temos que $t_2 w t_1 \in L$. Portanto, podemos assumir que $\rho = \lambda_2 w t_1 + \lambda_3 t_2 w$. Assumindo que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, do fato que $Q_{A_{s(\rho)t(\rho)}}$ é $Q7$ e do Teorema 2.14 concluímos que $A_{s(\rho)t(\rho)}$ não possui álgebra quociente derivadamente mansa, exceto $\frac{A_{s(\rho)t(\rho)}}{<0>}$. Como $\rho \in L$

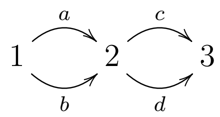
obtemos que $B_{s(\rho)t(\rho)}$ é derivadamente selvagem. E o Lema 2.4 implica que B é derivadamente selvagem. Quando $\lambda_2 = 0$ substituímos ρ por $\lambda_3^{-1}t_2w$. O caso $\lambda_3 = 0$ é análogo ao anterior.$\blacksquare$

Lema 3.5. *Sejam* $A = \frac{KQ}{I}$ *uma* $K-$*álgebra de dimensão finita com* (Q, I) *um par gentle, tal que* $\#Q_0 = 3$ *e* $0 \neq L \subseteq rad^2A$ *um ideal que não contém os caminhos maximais de* (Q, I)*. Então* $\frac{A}{L}$ *é derivadamente selvagem.*

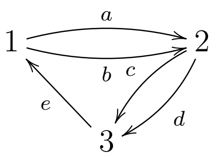
Demonstração: Vamos supor que $\frac{A}{L}$ é derivadamente mansa. Denotemos por S um conjunto minimal de geradores de L que satisfaz as condições do Teorema 3.1. Como $L \neq 0$ segue que $S \neq \emptyset$. Seja $f \in S$. Do fato de L não conter nenhum caminho maximal segue que f não é múltiplo de um caminho em (Q, I). Assim, do Teorema 3.1 temos que $f = f_1 + \lambda f_2$ sendo que $\lambda \in K^*$, f_1 e f_2 não possuem subcaminhos em comum.

Nas tabelas A.11, A.9, A.7 e A.5 temos todas as álgebras gentles de dimensão finita com três módulos simples, a menos de isomorfismos. Analisando essas álgebras vemos que as únicas álgebras que podem ter uma subálgebra quociente $\frac{A}{L}$ tal que L possui dentre seu conjunto minimal de geradores $f = f_1 + \lambda f_2$ onde $\lambda \in K^*$, f_1 e f_2 não possuem subcaminhos em comum são $A_1 = \frac{K\Delta_1}{I_1}$ e $A_2 = \frac{K\Delta_2}{I_2}$ onde $I_1 =< ac, bd >$, $I_2 =< ac, bd, ea, ce >$ e os quivers são respectivamente:

Δ_1



Δ_2



As álgebras obtidas de A_1 como quociente por um ideal L como acima são isomorfas a $D = \frac{K\Delta_1}{T}$, onde $T =< ac, bd, ad + bc >$. Do apêndice B, temos que D é derivadamente equivalente a uma álgebra que é derivadamente selvagem. As álgebras obtidas de A_2 como quociente por um ideal L como acima são isomorfas a $B \cong \frac{K\Delta_2}{R}$, onde $R =< ac, bd, ea, ce, ad + bc >$. Para que a subálgebra B_{12} seja derivadamente mansa de dimensão finita é necessário que B_{12} seja isomorfa à álgebra A_4 do Teorema 2.14. Como $ad + bc, ce, bd \in R$ temos que $dim_K e_1(radB_{12})e_1 = 0$. Então, o corolário 2.5 implica que B_{12} é derivadamente selvagem, portanto, B também. Com isso concluímos que para $\frac{A}{L}$ ser derivadamente mansa é necessário que $L = 0$. Uma contradição com o fato de $L \neq 0$.$\blacksquare$

Lema 3.6. *Sejam* $A = \frac{KQ}{I}$ *uma* $K-$*álgebra gentle de dimensão finita com* (Q, I) *um par gentle,* $\#Q_0 = 3$ *e* $J \subseteq rad^2 A$ *um ideal. Suponha que* $B = \frac{A}{J}$ *não é gentle e* J *é gerado por um conjunto minimal de caminhos de comprimento dois. Então,* B *é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Como B não é gentle e J é gerado por um conjunto minimal de caminhos de comprimento 2 existem $a, b, c \in Q_1$ tais que $ac, bc \in J$ ou $ab, ac \in J$. Justificaremos apenas o primeiro caso, o outro é análogo. Como (Q, I) é um par gentle c não pode ser um laço e b, a não podem ser laços ao mesmo tempo. Do fato que $\#Q_0 = 3$ segue que Q possui um dos subquivers abaixo:

$$\begin{tikzcd} s(a) \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & t(a) \arrow[r, "c"] & t(c) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} s(a) \arrow[r, bend right, "a"'] & t(a) \arrow[l, bend right, "c"'] & s(b) \arrow[l, "b"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} s(a) \arrow[r, "a"] & t(a) \arrow[r, "c"] \arrow[loop above, "b"] & t(c) \end{tikzcd}$$

No primeiro caso, o Lema 2.6 implica que B é derivadamente selvagem.

No segundo, se $ca \in J$, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, podemos construir o complexo N de $K < x, y > -B$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd} &&&&&&& \tilde{P}^{r_{10}}_{s(b)} & \\ \tilde{P}^{r_1}_{t(a)} \arrow[r, "M(l_1)a"] & \tilde{P}^{r_2}_{s(a)} \arrow[r, "M(l_2)c"] & \tilde{P}^{r_3}_{t(a)} \arrow[r, "M(l_3)a"] & \tilde{P}^{r_4}_{s(a)} \arrow[r, "M(l_4)c"] & \tilde{P}^{r_5}_{t(a)} \arrow[r, "M(l_5)a"] & \tilde{P}^{r_6}_{s(a)} \arrow[r, "M(l_6)c"] & \tilde{P}^{r_7}_{t(a)} \arrow[r, "M(l_7)a"] \arrow[ur, "M(l_9)b"] & \tilde{P}^{r_8}_{s(a)} \arrow[r, "M(l_8)c"] & \tilde{P}^{r_9}_{t(a)} \end{tikzcd}$$

Como o funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \to \mathcal{P}_{min}(B)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos B é derivadamente selvagem. Caso $ca \notin J$, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, podemos construir o complexo N de $K < x, y > -B$ bimódulos

$$\begin{tikzcd} &&&&&&& \tilde{P}^{r_{10}}_{s(b)} & \\ \tilde{P}^{r_1}_{t(a)} \arrow[r, "M(l_1)ca"] & \tilde{P}^{r_2}_{t(a)} \arrow[r, "M(l_2)ca"] & \tilde{P}^{r_3}_{t(a)} \arrow[r, "M(l_3)ca"] & \tilde{P}^{r_4}_{t(a)} \arrow[r, "M(l_4)ca"] & \tilde{P}^{r_5}_{t(a)} \arrow[r, "M(l_5)ca"] & \tilde{P}^{r_6}_{t(a)} \arrow[r, "M(l_6)ca"] & \tilde{P}^{r_7}_{t(a)} \arrow[r, "M(l_7)ca"] \arrow[ur, "M(l_9)b"] & \tilde{P}^{r_8}_{t(a)} \arrow[r, "M(l_8)ca"] & \tilde{P}^{r_9}_{t(a)} \end{tikzcd}$$

Como o funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \to \mathcal{P}_{min}(B)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos B é derivadamente selvagem.

Caso B possui $\begin{tikzcd} s(a) \arrow[r, "a"] & t(a) \arrow[loop above, "b"] \arrow[r, "c"] & t(c) \end{tikzcd}$ como subquiver do corolário 2.3 segue que $b^2 \in I$ e por hipótese $bc \in I$. Então, do Lema 2.5 segue que B é derivadamente selvagem. ■

3.1 Quivers bisseriais com 2 flechas

Seja $A = \frac{KQ}{I}$ uma $K-$álgebra derivadamente mansa de dimensão finita com três módulos simples cujo quiver é bisserial e possui duas flechas, nessa seção veremos quais são as relações que geram I. Pelos cálculos feitos no apêndice A sabemos que os quivers bisseriais com três vértices que possuem duas flechas são os da tabela A.10. Os quivers $2-2$ e $2-3$ são opostos entre si, por isso precisamos estudar apenas um deles. Escolheremos $2-2$. Nele só existe uma possibilidade de álgebra $A = KQ$ que é isomorfa à álgebra A.57 da tabela A.11, sendo a mesma uma álgebra gentle. No caso $2-1$, temos duas possibilidades de ideais: $I = 0$ e $I =< ab >$. Portanto, A é isomorfa, respectivamente, às álgebras A.55 e A.56 da tabela A.11. Em ambos os casos, A é gentle. Concluímos que todas as álgebras derivadamente mansas de dimensão finita tais que o quiver é bisserial, possui 3 vértices e duas flechas são álgebras gentles.

3.2 Quivers bisseriais com 3 flechas

Seja $A = \frac{KQ}{I}$ uma $K-$álgebra derivadamente mansa de dimensão finita com três módulos simples cujo quiver é bisserial e possui três flechas, nessa seção veremos quais são as relações que geram I. Pelos cálculos feitos no apêndice A sabemos que os quivers bisseriais com três vértices que possuem três flechas são os da tabela A.8.

Não será necessário analisar todos os quivers da tabela A.8, pois, os casos $3-1, 3-2, 3-4$ e $3-10$ são tais que, a menos de reordenação de vértices, seus quivers opostos são, respectivamente, $3-6, 3-9, 3-8$ e $3-11$. Se mostrarmos que as álgebras derivamente mansas de dimensão finita associadas aos quivers $3-1, 3-2, 3-4$ e $3-10$ são álgebras gentle ou isomorfa a uma das álgebras da tabela 1.1, então as álgebras derivadamente mansas de dimensão finita associadas aos quivers $3-6, 3-9, 3-8$ e $3-11$ são gentle ou anti-isomorfa a uma das álgebras da tabela 1.1.

$$\textbf{Caso } 3-1: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & 2 \arrow[r, "c"] & 3 \end{tikzcd}$$

Na subálgebra A_{13} temos que $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 \in \{0, 1, 2\}$. Portanto, temos os casos abaixo:

1) $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 2$. Logo, $I = 0$ e temos uma álgebra hereditária, a qual é selvagem, veja o Teorema 2.6. Logo, a Proposição 2.1 implica que A é derivadamente selvagem.

2) $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 0$. Então, $ac, bc \in I$ e o Lema 2.6 implica que A é derivadamente selvagem.

3) $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 1$. Temos que $I =< \lambda_1 ab + \lambda_2 ac >$ sendo que λ_1 e λ_2 não se anulam simultaneamente. Se $\lambda_1 \neq 0$ podemos fazer uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $\lambda_1 b + \lambda_2 c$. Logo, A é isomorfa à álgebra A.42 da tabela A.9, ou seja, A é gentle. Caso $\lambda_1 = 0$, temos que $I =< ac >$, novamente A é isomorfa à álgebra A.42 da tabela A.9.

$$\textbf{Caso } 3-2: \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r, "b"] & 2 \arrow[r, "c"] & 3 \end{tikzcd}$$

Do corolário 2.3 temos que $a^2 \in I$. A álgebra $B = \frac{KQ}{J}$, onde $J =< a^2 >$ é isomorfa à álgebra A.43 da tabela A.9. Qualquer álgebra derivadamente mansa $A = \frac{KQ}{I}$ associada a esse quiver é isomorfa a $C = \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$. O Lema 2.5 implica que $ab \notin L$. Temos duas possibilidades:

1. $bc \in L$. Como $ab \notin L$ temos que $L =< bc >$. Assim, A é isomorfa à álgebra A.44 da tabela A.9, a qual é gentle.

2. $bc \notin L$. Pelo Lema 3.1 temos que $\overline{bc} \in radC_{13} \backslash rad^2C_{13}$. Logo, $e_1 \left(\frac{radC_{13}}{rad^2C_{13}}\right) e_3 = 1$, $e_1 \left(\frac{radC_{13}}{rad^2C_{13}}\right) e_1 = 1$ e $e_3 \left(\frac{radC_{13}}{rad^2C_{13}}\right) e_3 = 0$. Desse modo, temos uma presentação de C_{13} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{13} & \longrightarrow & C_{13} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_{bc} & \longmapsto & \overline{bc} \end{array}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_a"] \arrow[r, "x_{bc}"] & 3 \end{tikzcd}$. Para $\frac{KQ_{13}}{ker\phi}$ ser derivadamente mansa, pelo Lema 2.5, é necessário que $x_a x_{bc} \notin ker\phi$, ou seja, $\overline{abc} \neq 0$. Portanto, $L = 0$ e a álgebra A é isomorfa a álgebra A.43 da tabela A.9.

$$\textbf{Caso } 3-3\textbf{:}\quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "b"'] & & 2 \arrow[dl, "c"] \\ & 3 & \end{tikzcd}$$

As únicas possibilidades de ideais são $I = 0$ ou $I =< ac >$. Portanto, A é isomorfa, respectivamente, às álgebras A.45 e A.46 da tabela A.9.

$$\textbf{Caso } 3-4\textbf{:}\quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "b"'] & 2 \arrow[l, bend right, "a"'] \arrow[r, "c"] & 3 \end{tikzcd}$$

O subquiver pleno cujos vértices são $\{1, 2\}$ é convexo. Por causa desse último fato e do Teorema 2.14 temos as possibilidades abaixo:

1) $ab \in I$ e $ba \notin I$. Na subálgebra A_{13}, por causa do Lema 3.2, temos que $\overline{ba} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$. Se $bc \notin I$, o Lema 3.1 implica que $\overline{bc} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$. Como $ab \in I$ e $\overline{ba}, \overline{bc} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$ temos que $\overline{babc} = 0$. Então, o Lema 2.5 implica que A_{13} é derivadamente selvagem. Logo, $bc \in I$. Assim, qualquer álgebra derivadamente mansa é uma álgebra quociente $A = \frac{B}{L}$, onde $B = \frac{KQ}{J}$ com $J =< ab, bc >$. Temos que B é isomorfa à álgebra A.49 da tabela A.9. O único caminho de comprimento maior ou igual a dois em (Q, J) é ba o qual não pertence a I. Logo, $L = 0$.

2) $ba \in I$ e $ab \notin I$. Como $ab \notin I$, do Lema 3.2 segue que $\overline{ab} \in radA_{23}\backslash rad^2A_{23}$. O Lema 2.5 implica que $\overline{ab}\,\overline{c} \neq 0$. Então, $I =< ba >$. Logo, $A = \frac{KQ}{I}$ é isomorfa à álgebra A.47 da tabela A.9.

3) $ab, ba \in I$. Então, $A \cong \frac{B}{L}$, onde $B = \frac{KQ}{J}$ com $J =< ba, ab >$. Como o único caminho de comprimento maior ou igual a 2 em (Q, J) é bc, temos que $L = 0$ ou $L =< bc >$. Se $L = 0$, a álgebra A é isomorfa à álgebra A.48 da tabela A.9. Caso $L =< bc >$ o Lema 3.6 implica que A é derivadamente selvagem.

$$\textbf{Caso } 3-5 :\quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[loop above, "b"] \arrow[r, "c"] & 3 \end{tikzcd}$$

Do corolário 2.3 temos que $b^2 \in I$. Desse fato, juntamente com o Lema 2.5, segue que $ab, bc \notin I$.

Na subálgebra A_{13} temos que $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3 \in \{0, 1, 2\}$. Analisando as possibilidades para $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3$ concluímos que I é um dos seguintes ideais: $< b^2 >$; $< b^2, ac + \lambda abc >$; $< b^2, abc >$ ou $< b^2, ac, abc >$.

Caso $I =< b^2, ac + \lambda abc >$ podemos fazer uma mudança no conjunto de geradores de A que troca c por $\tilde{c} = (e_2 + \lambda b)c$. Portanto, A é isomorfa à álgebra A.50 da tabela A.9.

Caso $I =< b^2 >$ a álgebra A é isomorfa à álgebra 1.1 da tabela 1.1.

Quando $I =< b^2, ac, abc >$ a álgebra A é isomorfa à álgebra 1.2 da tabela 1.1.

Se $I =< b^2, abc >$, o complexo T do Exemplo 2.13 é um complexo inclinante para essa álgebra. A álgebra A é derivadamente equivalente a $\Gamma = EndT$. Do apêndice B sabemos que $\Gamma = \frac{K\Delta}{H}$, onde

$$\begin{tikzcd}
\Delta : & 1 \arrow[rr, "\gamma"] & & 2 \arrow[loop above, "\alpha"] \\
& & 3 \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

e $H =< \alpha^2, \delta\gamma - \beta\alpha >$. Em Γ, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, podemos construir o complexo N de $K < x, y > -\Gamma$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
& \tilde{P}_1^{r_{10}} & & & & & \\
\tilde{P}_2^{r_1} \arrow[ur, "M(l_9)\gamma"] \arrow[r, "M(l_1)\alpha"] \arrow[dr, "M(l_7)\beta"] & \tilde{P}_2^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)\alpha"] & \tilde{P}_2^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)\alpha"] & \tilde{P}_2^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)\alpha"] & \tilde{P}_2^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)\alpha"] & \tilde{P}_2^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)\alpha"] & \tilde{P}_2^{r_7} \\
\tilde{P}_1^{r_9} \arrow[r, "M(l_8)\delta"] & \tilde{P}_3^{r_8} & & & & &
\end{tikzcd}$$

O funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \to \mathcal{P}_{min}(\Gamma)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, Γ é derivadamente selvagem. Então, dos Teoremas 2.11 e 2.10 concluímos que A é derivadamente selvagem.

$$\begin{tikzcd}
\textbf{Caso } 3-7 : 1 \arrow[rr, "a"] & & 2 \arrow[dl, "b"] \\
& 3 \arrow[ul, "c"] &
\end{tikzcd}$$

Temos duas possibilidades:

1. Nenhum caminho em Q de comprimento 2 pertence a I. Então, o Lema 3.1 implica que $\overline{bc} \in radA_{12} \backslash rad^2A_{12}$. Assim, temos que $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2A_{12}}\right) e_1 = 1, dim_K e_1 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2A_{12}}\right) e_2 = 1, dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2A_{12}}\right) e_2 = 0$ e $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2A_{12}}\right) e_1 = 0$. Logo, temos uma presentação para A_{12} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_{bc} & \longmapsto & \overline{bc} \end{array}$$

onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "x_a"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_{bc}"'] \end{tikzcd}$. Para $\frac{KQ_{12}}{ker\phi}$ ser derivadamente mansa é necessário, pelo corolário 2.4, que $x_a x_{bc} \in ker\phi$ ou $x_{bc} x_a \in ker\phi$. Com isso, temos os casos abaixo:

1.1 $x_a x_{bc} \in ker\phi$ e $x_{bc} x_a \notin ker\phi$. Logo, $bca \notin I$ e $abc \in I$. Como nenhum caminho em Q de comprimento 2 pertence a I temos do Lema 3.1 que $\overline{ca} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$. Portanto, $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right) e_2 = 0, dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right) e_3 = 0, dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right) e_2 = 1$ e $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right) e_3 = 1$. Assim, temos uma presentação para A_{23} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_b & \longmapsto & \overline{b} \\ x_{ca} & \longmapsto & \overline{ca} \end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "x_b"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_{ca}"'] \end{tikzcd}$. Como $bca \notin I$ segue do corolário 2.4 que para $\frac{KQ_{23}}{ker\varphi}$ ser derivadamente mansa é necesário que $x_{ca} x_b \in ker\varphi$, ou seja, $cab \in I$. O único caminho não nulo de comprimento maior ou igual a três em Q é bca e ele não pertence a I. Logo, $I =< abc, cab >$. A álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ é isomorfa à álgebra 1.3 da tabela 1.1.

1.2 $x_a x_{bc} \notin ker\phi$ e $x_{bc} x_a \in ker\phi$. Esse caso é análogo ao anterior.

1.3 $x_a x_{bc}, x_{bc} x_a \in ker\phi$, temos que $I =< abc, bca >$ ou $I =< abc, bca, cab >$. No primeiro caso A é isomorfa à álgebra 1.3 da tabela 1.1. Já no segundo a álgebra A é uma álgebra autoinjetiva. Devido ao Teorema 2.12 dessa tese e ao Corolário 2.6 de [10] concluímos que A é derivadamente selvagem.

2. Pelo menos um caminho de comprimento dois pertence a I. Sem perda de generalidade podemos supor que $bc \in I$. Os únicos caminhos em Q de comprimento maior ou igual a dois que não são múltiplos de bc são ab, ca e cab. Então, I é um dos seguintes ideais:

$$< bc >, \; < bc, ab >, \; < bc, ca >, \; < bc, ab, ca > \text{ ou } < bc, cab > .$$

Se $I =< bc, cab >$ a álgebra A é derivadamente selvagem, pois, conforme apêndice B, A é derivadamente equivalente a $\Gamma = \frac{K\Delta}{H}$ onde $\Delta :$ $\begin{tikzcd} 1 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & 2 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \end{tikzcd}$ e $H =< \alpha\gamma, \alpha\beta, \gamma\alpha >$. Do Lema 3.6 segue que Γ é derivadamente selvagem. Portanto, o Teorema 2.11 e o Teorema 2.10 implicam que A é derivadamente selvagem. Em todos os outros casos A é gentle.

$$\textbf{Caso } 3-10 : \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r, "b"] & 2 & 3 \arrow[l, "c"'] \end{tikzcd}$$

Do Corolário 2.3 sabemos que $a^2 \in I$. Já do Lema 2.5 segue que $ab \notin I$. Portanto, $I =< a^2 >$ e A é isomorfa à álgebra A.54 da tabela A.9.

3.3 Quivers bisseriais com 4 flechas

Começaremos a analisar quais as possíveis álgebras derivadamente mansas que podemos associar aos quivers da tabela A.6. Não será necessário analisar todos os quivers, pois alguns deles, a menos de reordenação de vértices, são opostos de outros. Desse modo basta analisar apenas um deles. Os quivers $4-2, 4-4, 4-5, 4-6, 4-9, 4-11$ e $4-20$ são opostos, respectivamente, a $4-18, 4-7, 4-19, 4-17, 4-16, 4-14$ e $4-21$.

$$\textbf{Caso } 4-1: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & 2 \arrow[r, bend left, "c"] \arrow[r, bend right, "d"'] & 3 \end{tikzcd}$$

Do Lema 2.4 sabemos que para A ser derivadamente mansa a súbálgebra A_{13} também deve ser. Pela classificação feita no Teorema 2.14 temos que $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3 \in \{0, 1, 2\}$.

Na verdade $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3$ é igual a 1 ou 2, pois se $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3 = 0$ teríamos $I =< ac, ad, bd, bc >$. Pelo Lema 2.6, a álgebra A seria derivadamente selvagem.

Agora veremos o que ocorre se $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3 = 1$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $bc \notin I$. Como $rad^2 A_{13} = 0$ segue que $\overline{bc} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$. Então, temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{aligned} \psi : KQ_{13} &\longrightarrow A_{13} \\ x_{bc} &\longmapsto \overline{bc} \end{aligned}$$

onde Q_{13} é $1 \xrightarrow{x_{bc}} 3$. Portanto, $ac + \mu_1 bc, bd + \mu_2 bc, ad + \mu_3 bc \in I$, com $\mu_i \in K$. Logo, $I =< ac + \mu_1 bc, bd + \mu_2 bc, ad + \mu_3 bc >$. Faremos uma mudança no conjunto de geradores que troca a por $a + \mu_1 b$ e d por $d + \mu_2 c$. Se $\mu_1 \mu_2 \neq -\mu_3$, após uma mudança do conjunto de geradores, podemos assumir que $I =< ad + bc, ac, bd >$. Caso $\mu_1 \mu_2 = -\mu_3$, após uma mudança do conjunto de geradores, temos que $I =< ad, ac, bd >$ e o Lema 2.6 implica que A é derivadamente selvagem. Logo, $A = \frac{KQ}{I}$ em que $I =< ad + bc, ac, bd >$.

Do apêndice B temos que a álgebra A é derivadamente equivalente à álgebra $\Gamma = \frac{K\Lambda}{H}$ com $\Lambda :$ $$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, bend left=60, "\delta"] \arrow[r, bend left=20, "\epsilon"] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & 1 \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\alpha"'] & 2 \end{tikzcd}$$ e $H =< \gamma\beta, \delta\alpha, \epsilon\alpha - \delta\beta, \epsilon\beta - \gamma\alpha >$. Do Teorema

2.6 segue que a subálgebra Γ_{13} é selvagem. Logo, o Lema 2.1 implica que Γ também é selvagem. Então, da Proposição 2.1 obtemos que Γ é derivadamente selvagem. Como Γ é derivadamente equivalente à álgebra A os Teoremas 2.10 e 2.11 implicam que A é derivadamente selvagem.

Ainda falta analisar o que ocorre quando $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 2$. Temos que $e_1(radA_{13})e_3$ é gerado por $\overline{ac}, \overline{bd}, \overline{bc}, \overline{ad}$ e tem dimensão 2. Logo, o ideal I pode ser gerado por duas relações. Uma relação ρ de 1 para 3 tem a forma $\mu_1 ac + \mu_2 ad + \mu_3 bc + \mu_4 bd$, com $\mu_i \in K$, que podemos expressar como um produto de matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$. Denominamos a matriz $M_\rho = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_4 \end{bmatrix}$ por matriz associada a ρ. Inversamente dada uma matriz $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ podemos associar uma relação θ de 1 para 3 do seguinte modo: $\theta = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$.

Dado o quiver $\Delta :$ $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\alpha"'] & 2 \end{tikzcd}$ considere a categoria $\mathcal{C}$ em que os objetos são $V = (V_i, N_j), i \in Q_0, j \in Q_1$ sendo V_i o espaço vetorial K^2 com base $\{(1,0);(0,1)\}$ e N_j uma matriz 2×2. Dados $V = (V_i, N_j), U = (U_i, T_j) \in \mathcal{C}$ um morfismo de V para U é dado por uma família $f = (f_k)_{k \in Q_0}$ de matrizes 2×2 invertíveis tais que $T_\alpha f_1 = f_2 N_\alpha$ e $T_\beta f_1 = f_2 N_\beta$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, bend left, "N_\beta"] \arrow[r, bend right, "N_\alpha"'] \arrow[d, "f_1"'] & V_2 \arrow[d, "f_2"] \\
U_1 \arrow[r, bend left, "T_\beta"] \arrow[r, bend right, "T_\alpha"'] & U_2
\end{tikzcd}$$

Considere o quiver $Q :$ $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & 2 \arrow[r, bend left, "c"] \arrow[r, bend right, "d"'] & 3 \end{tikzcd}$, seja $\mathcal{D}$ a categoria cujos objetos são as álgebras $A = \frac{KQ}{<\rho_1, \rho_2>}$, onde $\rho_i \in rad^2KQ$. Observamos que $\{\rho_1, \rho_2\}$ não é necessariamente um conjunto minimal de geradores. Os morfismos em $\mathcal{D}$ são homorfismos de $K-$álgebras. Com as definições acima introduzidas podemos definir o funtor abaixo:

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

em que $F(V = (V_i, N_j)) = \frac{KQ}{I}$ onde $I =< \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} N_j \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} >_{j\in\{1,2\}}$. Dado $f = (f_k)_{k\in\{1,2\}}$ temos que $F(f) = \phi$ em que $\phi(a) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} f_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\phi(b) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} f_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\phi(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} f_1^{-1} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ e $\phi(d) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} f_1^{-1} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$.

O funtor F é denso. Pois, dada $A = \frac{KQ}{<\rho_1,\rho_2>}$ temos que $F(V_i, M_{\rho_j}) = A$.

Lema 3.7. *Sejam* Q : $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "b"] \arrow[r, bend right, "a"'] & 2 \arrow[r, bend left, "d"] \arrow[r, bend right, "c"'] & 3 \end{tikzcd}$, $A_i = \frac{KQ}{I_i}$, *com* $i \in \{1,2,3,4\}$, *onde* $I_1 =< ac + bd, bc >$, $I_2 =< ad, ac >$, $I_3 =< bc, ac >$ *e* $I_4 =< ac, bd >$. *Se* $A = \frac{KQ}{I}$ *em que* $I =< \rho_1, \rho_2 >$, *com* $\{\rho_1, \rho_2\}$ *um conjunto minimal de geradores de I, então A é isomorfa a* A_i *para algum* $i \in \{1,2,3,4\}$.

Demonstração: Como F é denso, dado $A \in \mathcal{D}$ temos que existe $X \in \mathcal{C}$ tal que $F(X) \cong A$. Seja $U \in \mathcal{C}$, do teorema de Krull-Shmidt sabemos que U se decompõe em soma direta de indecomponíveis. Então, do Exemplo 2.8 segue que U é isomorfa a uma das seguintes representações: $V_1 = \left(K^2, K^2; I, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$,

$V_2 = \left(K^2, K^2; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, I\right)$, $V_3 = \left(K^2, K^2; I, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}\right)$,

$V_4 = \left(K^2, K^2; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$, $V_5 = \left(K^2, K^2; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$,

$V_6 = \left(K^2, K^2; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$, $V_7 = \left(K^2, K^2; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$,

$V_8 = \left(K^2, K^2; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$, $V_9 = \left(K^2, K^2; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

e $V_{10} = \left(K^2, K^2; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ onde $\lambda, \mu \in K$.

Temos que $F(V_1) = \frac{KQ}{J_1}$ com $J_1 =< ac + bd, \lambda ac + ad + \lambda bd >$. Logo, $F(V_1) \cong A_1$. A imagem de V_2 por F é isomorfa a A_1. Se $\lambda \neq \mu$ obtemos que $F(V_3) = \frac{KQ}{J_2}$ com $J_2 =< ac + bd, \lambda ac + \mu bd >$. Como $\lambda \neq \mu$ temos que $F(V_3) = A_4$. Caso $\lambda = \mu$ concluímos que $F(V_3) = \frac{KQ}{J_3}$ em que $J_3 =< ac + bd >$, nesse caso J_3 não possui um conjunto minimal de geradores com cardinalidade 2. Temos que $F(V_4) = A_2$, $F(V_5) = A_3$, $F(V_6) = \frac{KQ}{J_4}$ em que $J_4 =< ac >$, $F(V_7) = KQ$, $F(V_9) = \frac{KQ}{J_3}$, $F(V_{10}) = \frac{KQ}{J_4}$ e $F(V_8) = A_4$.

Como o ideal das álgebras $F(V_3)$, se $\lambda = \mu$, $F(V_6), F(V_7), F(V_9)$ e $F(V_{10})$ não possui um conjunto minimal de geradores com cardinalidade 2 concluímos que $A \cong A_i$ com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

■

A álgebra A_1 é selvagem devido ao Exemplo 2.11.c de [54]. Logo, derivadamente selvagem pela Proposição 2.1. O Lema 2.6 implica que as álgebras A_2 e A_3 são derivadamente selvagens. Já a álgebra A_4 é isomorfa a uma álgebra gentle.

Caso $4 - 2:$ $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "b"] \arrow[r, bend right=50, "c"'] & 2 \arrow[l, bend right, "a"'] \arrow[r, "d"] & 3 \end{tikzcd}$

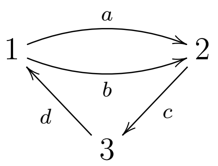
O subquiver pleno cujos vértices são $\{1, 2\}$ é convexo. Por causa desse último fato e do Teorema 2.14 podemos assumir que $ca, ab \in I$. Como $ca, ab \in I$, do Lema 2.6, temos que $ba, ac \notin I$. Esse último fato, junto com o Lema 3.2, implica que $\overline{ac} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$ e $\overline{ba} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Do fato que $\overline{ac} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$ e do Lema 2.5 segue que $\overline{acd} \neq 0$. Logo, $cd \notin I$. Como $\overline{ba} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$ e $ab \in I$ segue do Lema 2.5 que $\overline{bd} \notin radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$, caso contrário, A_{13} é derivadamente selvagem. Portanto, $\overline{bd} \in rad^2A_{13}$. O Lema 2.6 implica que $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 \neq 0$, ou seja, $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 \in \{1, 2\}$. Como $\overline{bd} \in rad^2A_{13}$ concluímos que $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 1$. Dos fatos que $cd \notin I$, $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 1$ e $\overline{bd} \in rad^2A_{13}$ segue que $\overline{cd} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Já que $\overline{ba} \in e_1 \left(radA_{13} \backslash rad^2A_{13}\right) e_1$ temos que $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_1 = 1$. Além disso, temos que $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_1 = 0$ e $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 0$. Logo, temos uma presentação de A_{13} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_{ba} & \longmapsto & \overline{ba} \\ x_{cd} & \longmapsto & \overline{cd} \end{array}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_{ba}"] \arrow[r, "x_{cd}"] & 3 \end{tikzcd}$. Para $\frac{KQ_{13}}{ker\phi}$ ser derivadamente mansa, pelo Lema 2.5, é necessário que $x_{ba}x_{cd} \notin ker\phi$, isto é, $bacd \notin I$. Logo, $dim_K e_1 rad^2 \frac{KQ_{13}}{ker\phi} e_3 = 1$. Como

$\frac{KQ_{13}}{ker\phi} \cong A_{13}$ temos que $dim_K e_1 rad^2 A_{13} e_3 = 1$. Portanto, $\{\overline{bacd}\}$ é uma base para $e_1 rad^2 A_{13} e_3$. Desse último fato e do fato que $\overline{bd} \in rad^2 A_{13}$ temos que $\overline{bd} + \lambda \overline{bacd} = 0$, ou seja, $bd + \lambda bacd \notin I$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores de A que troca d por $\tilde{d} = d + \lambda acd$ podemos assumir que $bd \in I$ e $bacd \notin I$. Logo, $J =< ca, ab, bd > \subset I$. Desse modo, $A \cong \frac{B}{L}$, onde $B = \frac{KQ}{J}$ e $L \subseteq rad^2 B$. A álgebra B é gentle e isomorfa a álgebra A.15 da tabela A.7. O único caminho maximal de (Q,J) é $bacd$ e $bacd \notin I$ como vimos acima. Então, do Lema 3.5 temos que $L = 0$.

Caso $4-3$:



Como estamos interessados em álgebras derivadamente mansas de dimensão finita as subálgebras $e_i A e_i$ com $i \in \{1, 2, 3\}$ devem ser álgebras derivadamente mansas de dimensão finita. Então, do Teorema 2.13 segue que $rad^2 e_i A e_i = 0$ para qualquer $i \in \{1, 2, 3\}$. Logo, $rad^6 A = 0$. Se dentre os geradores minimais de I não tivermos uma relação do tipo $\lambda_1 da + \lambda_2 db + \lambda_3 dbcdb + \lambda_4 dbcda + \lambda_5 dacdb + \lambda_6 dacda$ com $\lambda_1 \neq 0$ ou $\lambda_2 \neq 0$, quando fizermos $\frac{A}{<c>}$ o Teorema 2.6 implicará que a álgebra quociente será selvagem, pois será uma álgebra hereditária cujo grafo não é Dynkin nem Dynkin extendido. Assim, pelo Lema 2.1, A é selvagem. Logo, A é derivadamente selvagem pela Proposição 2.1. Então, $\lambda_1 da + \lambda_2 db + \lambda_3 dbcdb + \lambda_4 dbcda + \lambda_5 dacdb + \lambda_6 dacda \in I$ com $\lambda_1 \neq 0$ ou $\lambda_2 \neq 0$. A menos de trocarmos a com b podemos supor que $\lambda_1 \neq 0$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca a por $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 bcdb + \lambda_4 bcda + \lambda_5 acdb + \lambda_6 acda = \tilde{a}$ temos que $d\tilde{a} \in I$. Então, podemos supor que $da \in I$.

Temos duas possibilidades em A:

1. $cd \in I$. Temos que $cd, da \in I$. Na álgebra A temos que $\lambda_1 ac + \lambda_2 bc \in I$ com λ_1 e λ_2 não simultaneamente nulos. Caso contrário, $\frac{A}{<d>}$ seria selvagem pelo Teorema 2.6. Portanto, A seria selvagem pelo Lema 2.1. Logo, derivadamente selvagem pela Proposição 2.1.

   Se $\lambda_2 \neq 0$ trocando b por $\tilde{b} = \lambda_1 a + \lambda_2 b$ obtemos que $\tilde{b}c, cd, da \in I$. Logo, podemos assumir que $bc \in I$. Então, $J =< da, cd, bc > \subset I$ e $A \cong \frac{B}{L}$, para algum $L \subseteq rad^2 B$, onde $B = \frac{KQ}{J}$. Sabemos que B é isomorfa à álgebra A.17 da tabela A.7, portanto é gentle e de dimensão finita. Os únicos caminhos de

(Q, J) de comprimento maior ou igual a dois são db e ac, que não pertencem a I por causa do Lema 2.6. Então, $L = 0$ e $A \cong B$.

Caso $\lambda_2 = 0$ temos que $ac \in I$. Então, $J =< da, cd, ac >\subset I$ e $A = \frac{B}{L}$, para algum ideal $L \subseteq rad^2 B$, onde $B = \frac{KQ}{J}$. Sabemos que B é isomorfa à álgebra A.18 da tabela A.7, portanto é gentle e de dimensão finita. Do Lema 2.6 temos que $db, bc \notin I$. Então, se $L \neq 0$ temos que $L =< dbc >$. Neste caso, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16 temos o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \tilde{P}_2^{r_{10}} \arrow[dr, "M(l_9)a"] & & & \\
\tilde{P}_1^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)d"] & \tilde{P}_3^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)bc"] & \tilde{P}_1^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)d"] & \tilde{P}_3^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)bc"] & \tilde{P}_1^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)d"] & \tilde{P}_3^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)bc"] & \tilde{P}_1^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)d"] & \tilde{P}_3^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)bc"] & \tilde{P}_1^{r_9}
\end{tikzcd}$$

O funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem.

2. $cd \notin I$. Pelo Lema 3.1 concluímos que $\overline{cd} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$. Com isso temos que $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2 A_{12}}\right) e_1 = 0, dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2 A_{12}}\right) e_2 = 0, dim_K e_1 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2 A_{12}}\right) e_2 = 2$ e $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2 A_{12}}\right) e_1 = 1$. Então, temos uma presentação para A_{12} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
\phi : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\
x_a & \longmapsto & \overline{a} \\
x_b & \longmapsto & \overline{b} \\
x_{cd} & \longmapsto & \overline{cd}
\end{array}$$

onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "x_a"] \arrow[r, "xb"] & 2 \arrow[l, bend left, "x_{cd}"] \end{tikzcd}$. Do fato que $da \in I$ segue que $x_{cd}x_a \in ker\phi$. Para a álgebra $\frac{KQ_{12}}{ker\phi} \cong A_{12}$ ser derivadamente mansa é necessário, pelo corolário 2.5, que $x_b x_{cd} + \lambda x_a x_{cd} \in ker\phi$, ou seja, $bcd + \lambda acd \in I$. Então, trocando b por $\tilde{b} = b + \lambda a$ temos que $da, \tilde{b}cd \in I$. Por isso, podemos assumir que $bcd \in I$. Novamente, do corolário 2.5, segue que $dim_K e_1 \left(rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\phi}\right) e_2 = 1$. Logo, $x_a x_{cd} x_b \notin ker\phi$, isto é, $acdb \notin I$.

Como $da \in I$ o Lema 2.6 implica que $db \notin I$. Logo, $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}}\right) e_2 = 1$ e $\overline{db} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Além disso, $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}}\right) e_3 = 1, dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}}\right) e_3 =$

0 e $dim_K e_2\left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right)e_2 = 0$. Com isso temos uma presentação para a álgebra A_{23} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \theta : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_c & \longmapsto & \overline{c} \\ x_{db} & \longmapsto & \overline{db} \end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend left, "x_c"] & 3 \arrow[l, bend left, "x_{db}"] \end{tikzcd}$. Como $cdb \notin I$, do corolário 2.4 segue que $x_{db}x_c \in ker\theta$ isto é, $dbc \in I$. Na álgebra A_{13} temos que $dim_K e_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 \in \{0, 1, 2\}$. Analisamos essas possibilidades abaixo:

a) $dim_K e_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 0$. Então, $ac, bc \in I$ e o Lema 2.6 implica que A é derivadamente selvagem.

b) $dim_K e_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 2$. Logo, $\overline{ac}, \overline{bc} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Assim, $dim_K e_3\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 0$, $dim_K e_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_1 = 0, dim_K e_3\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_1 = 1$ e $dim_K e_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 2$. Desse modo, temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \tau : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_{ac} & \longmapsto & \overline{ac} \\ x_{bc} & \longmapsto & \overline{bc} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \end{array}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left=40, "x_{ac}"] \arrow[r, bend left=10, "x_{bc}"] & 3 \arrow[l, bend left, "x_d"] \end{tikzcd}$. Como $dac, dbc \in I$ temos que $x_d x_{ac}, x_d x_{bc} \in ker\tau$. Como $x_d x_{ac}, x_d x_{bc} \in ker\tau$ o Lema 2.6 implica que $\frac{KQ_{213}}{ker\tau} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem. Logo, A é derivadamente selvagem.

c) $dim_K e_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 1$. Então, o quiver de A_{13} é

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] & 3 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Do corolário 2.4 segue que $rad^3A_{13} = 0$. Como $acdb \notin I$, veja início do caso 2, segue que $ac \notin I$. Se $\overline{ac} \in rad^2A_{13}$ teríamos que $\overline{ac} \in rad^3A_{13}$

pois, $e_1rad^2A_{13}e_3 \subseteq rad^3A_{13}$. Como $rad^3A_{13} = 0$ concluímos que $\overline{ac} = 0$, ou seja, $ac \in I$, absurdo. Portanto, $\overline{ac} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$. Se $\overline{bc} \in e_1\left(radA_{13}\backslash rad^2A_{13}\right)e_3$, como $\overline{ac} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$ e $dim_Ke_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 1$ segue que $\overline{ac} + \lambda\overline{bc} = 0$, com $\lambda \neq 0$. Como $\overline{bcd} = 0$, veja início do caso 2, segue que $\overline{acd} = 0$, ou seja, $acd \in I$. Logo, $dim_Ke_1\left(\frac{KQ_{12}}{ker\phi}\right)e_1 = 0$. Então, pelo corolário 2.5, A_{12} é derivadamente selvagem, implicando que A também será.

Caso $\overline{bc} \in rad^2A_{13}$ temos que $\overline{bc} \in rad^3A_{13}$ pois, $e_1rad^2A_{13}e_3 \subseteq rad^3A_{13}$. Como $rad^3A_{13} = 0$ obtemos que $bc \in I$. Então, $J =< da, bc >\subset I$ e $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. Sabemos que B é isomorfa à álgebra A.16 da tabela A.7, portanto gentle. O único caminho maximal de (Q, J) é $acdb$, já vimos que $acdb \notin I$. Portanto, pelo Lema 3.5 segue que $L = 0$ e $A \cong B$.

Caso $4-4:$ $$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & 2 \arrow[r, "c"] & 3 \arrow[loop above, "d"] \end{tikzcd}$$

O corolário 2.3 implica que $d^2 \in I$. Devido o Teorema 2.14 temos que $dim_Ke_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 \in \{0, 1\}$. Como A é derivadamente mansa o caso $dim_Ke_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 0$ não ocorre por causa do Lema 2.6. Logo, $dim_Ke_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 1$. Então, $\overline{ac} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$ ou $\overline{bc} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\overline{bc} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$. Assim, temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_{bc} & \longmapsto & \overline{bc} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \end{array}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x_{bc}"'] & 3 \arrow[loop above, "x_d"] \end{tikzcd}$. O Teorema 2.14 implica que $x_{bc}x_d \notin ker\phi$, ou seja, $bcd \notin I$. Temos que $\{x_{bc}, x_{bc}x_d\}$ é uma base para $e_1rad\left(\frac{KQ_{13}}{ker\phi}\right)e_3$. Do fato que $A_{13} \cong \frac{KQ_{13}}{ker\phi}$ segue que $\{\overline{bc}, \overline{bcd}\}$ é uma base para $e_1(radA_{13})e_3$. Como $\overline{ac} \in e_1(radA_{13})e_3$ e $\{\overline{bc}, \overline{bcd}\}$ é uma base para esse espaço vetorial temos que $\overline{ac} = \lambda_1\overline{bc} + \lambda_2\overline{bcd}$, isto é, $ac - \lambda_1bc - \lambda_2bcd \in I$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca a por $a - \lambda_1b$ podemos assumir que $ac - \lambda_2bcd, d^2 \in I$.

Se $\lambda_2 = 0$ temos que $I =< d^2, ac >$ e a álgebra A é isomorfa à álgebra A.19 da tabela A.7, portanto é gentle. Caso $\lambda_2 \neq 0$ temos que $I =< d^2, ac - \lambda_2 bcd >$ e a álgebra A é isomorfa à álgebra 1.5 da tabela 1.1.

$$\textbf{Caso } 4-5: \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r, bend right, "c"'] & 2 \arrow[l, bend right, "b"'] \arrow[r, "d"] & 3 \end{tikzcd}$$

O subquiver pleno cujos vértices são $\{1, 2\}$ é convexo. Logo, pelo Teorema 2.14 podemos assumir que $a^2, cb, bc \in I$ e $bac \notin I$. Esses últimos fatos junto com o Lema 3.2 nos dá que $\overline{bac} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Como $\overline{bac}, \overline{d} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$ e $(\overline{bac})^2 = 0$ o Lema 2.5 implica que $\overline{bacd} \neq 0$, ou seja, $bacd \notin I$. Temos que $J =< a^2, bc, cb > \subset I$ e $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2 B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. Logo, B é isomorfa à álgebra A.20 da tabela A.7, portanto é gentle. O único caminho maximal de (Q, J) é $bacd$. Como já mostramos ele não pode pertencer a I. Esse fato, junto com o Lema 3.5 implica que, a menos de isomorfismo, A.20 é a única álgebra derivadamente mansa associada a esse quiver.

$$\textbf{Caso } 4-6: \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r, "b"] & 2 \arrow[loop above, "c"] \arrow[r, "d"] & 3 \end{tikzcd}$$

Do corolário 2.3 temos que $a^2, c^2 \in I$. Já o Lema 2.5 implica que $ab, bc, cd \notin I$. O subquiver pleno cujos vértices são $\{1, 2\}$ é convexo. Por isso, podemos assumir que $I_{A_{12}} = \{a^2, c^2\}$. Na álgebra A_{13} temos que $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3 < 2$, por causa do Teorema 2.14. As outras possibilidades analisamos abaixo:

1. $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3 = 0$. Como $cd, bc \notin I$ temos que $I =< a^2, c^2, bd, bcd >$. Do apêndice B segue que $A = \frac{KQ}{I}$ é derivadamente equivalente à álgebra $\Gamma = \frac{K\Delta}{H}$ onde Δ é o quiver

   $$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\alpha"] & 3 \arrow[l, bend right, "\beta"'] \arrow[l, bend left, "\epsilon"] & 2 \arrow[loop above, "\delta"] \arrow[l, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

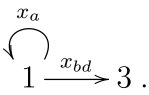
   e $H =< \alpha^2, \delta^2, \gamma\epsilon - \delta\gamma\beta >$. A subálgebra Γ_{13} é derivadamente selvagem pela classificação feita no Teorema 2.14. Logo, Γ também será. Portanto, pelos Teoremas 2.10 e 2.11 temos que A é derivadamente selvagem.

2. $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3 = 1$. Vamos considerar dois casos:

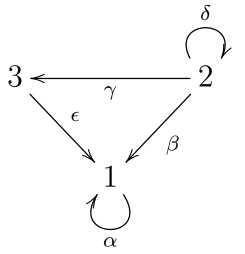
2.1 $\overline{bcd} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$. Como $\overline{a}, \overline{bcd} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$ e $a^2 \in I$ o Lema 2.5 implica $\overline{a}\overline{bcd} \neq 0$. Temos que $\{\overline{bcd}, \overline{abcd}\}$ é uma base para $e_1radA_{13}e_3$. Como $\overline{bd} \in e_1radA_{13}e_3$ obtemos que $\overline{bd} + \lambda_1\overline{bcd} + \lambda_2\overline{abcd} = 0$, ou seja, $bd + \lambda_1 bcd + \lambda_2 abcd \in I$. Após uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $\tilde{b} = b + \lambda_1 bc + \lambda_2 abc$, podemos assumir que $bd \in I$. Temos que $J =< a^2, c^2, bd >\subset I$ e $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subsetneq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. Logo, B é isomorfa à álgebra A.21 da tabela A.7, portanto é gentle. O único caminho maximal de (Q, J) é $abcd$, como vimos esse caminho não pertence a I. Esse fato junto com o Lema 3.5 implica que $L = 0$ e $A \cong B$.

2.2 $\overline{bcd} \in rad^2A_{13}$. Como $\overline{bcd} \in rad^2A_{13}$ e $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 1$ segue que $\overline{bd} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$. Assim, temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_{bd} & \longmapsto & \overline{bd} \end{array}$$

onde Q_{13} é 

. Assim, do Lema 2.5 segue que $x_a x_{bd} \notin ker\phi$, ou seja, $abd \notin I$. Temos que $\{x_a x_{bd}\}$ é uma base para $e_1 rad^2 \left(\frac{KQ_{13}}{ker\phi}\right) e_3$. Do fato que $\frac{KQ_{13}}{ker\phi} \cong A_{13}$ segue que $\{\overline{abd}\}$ é uma base para $e_1rad^2A_{13}e_3$. Como $\overline{bcd} \in e_1rad^2A_{13}e_3$ e $\{\overline{abd}\}$ é uma base para esse espaço vetorial temos que $\overline{bcd} + \lambda\overline{abd} = 0$, ou seja, $bcd + \lambda abd \in I$. Logo, $I =< a^2, c^2, bcd + \lambda abd >$. A álgebra A é derivadamente equivalente, por cálculos feitos no apêndice B, à álgebra $\Gamma = \frac{K\Delta}{H}$ onde Δ é o quiver



sendo que $H =< \alpha^2, \delta^2, \delta\beta + \lambda\beta\alpha - \gamma\epsilon >$. Logo, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, podemos construir o complexo N de $K < x, y > -\Gamma$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \tilde{P}_3^{r_{10}} \arrow[dr, "M(l_9)\gamma"] & \\
\tilde{P}_2^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)\delta"] & \tilde{P}_2^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)\delta"] & \tilde{P}_2^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)\delta"] & \tilde{P}_2^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)\delta"] & \tilde{P}_2^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)\delta"] & \tilde{P}_2^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)\delta"] & \tilde{P}_2^{r_7} \\
 & & & & & \tilde{P}_1^{r_8} \arrow[ur, "M(l_7)\beta"'] \arrow[dr, "M(l_8)\alpha"] & \\
 & & & & & & \tilde{P}_1^{r_9}
\end{tikzcd}$$

O funtor $-\otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \rightarrow \mathcal{P}_{min}(\Gamma)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, Γ é derivadamente selvagem e o Teorema 2.11 implica que A é derivadamente selvagem.

$$\textbf{Caso } 4-8 : \begin{tikzcd}
1 \arrow[loop above, "d"] \arrow[rr, "a"] & & 2 \arrow[dl, "b"] \\
 & 3 \arrow[ul, "c"] &
\end{tikzcd}$$

Pelo corolário 2.3, sabemos que $d^2 \in I$. Suponha que $cda \in I$. O Lema 2.5 implica que $cd, da \notin I$. Se $ab \notin I$ o Lema 3.1 implica que $\overline{ab} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$. Então, temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
\phi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\
x_{ab} & \longmapsto & \overline{ab} \\
x_c & \longmapsto & \overline{c} \\
x_d & \longmapsto & \overline{d}
\end{array}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_d"] \arrow[r, bend right, "x_{ab}"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_c"'] \end{tikzcd}$. Do corolário 2.6 segue que $x_{ab}x_c \in ker\phi$, ou seja, $abc \in I$. Assim, temos duas possibilidades para considerar: na primeira $ab, cda, d^2 \in I$; na segunda $ab \notin I$ e $abc, cda, d^2 \in I$. Com isso, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, podemos construir, respectivamente, os complexos M e N

de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
M : & & & & \tilde{P}_3^{r_9} \arrow[r, "M(l_8)b"] & \tilde{P}_2^{r_8} \arrow[dr, "M(l_7)a"] & & \\
\tilde{P}_1^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)d"] & \tilde{P}_1^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)d"] & \tilde{P}_1^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)d"] & \tilde{P}_1^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)d"] & \tilde{P}_1^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)d"] & \tilde{P}_1^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)d"] & \tilde{P}_1^{r_7} \arrow[r, "M(l_9)cd"] & \tilde{P}_3^{r_{10}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
N : & & & & & \tilde{P}_2^{r_{10}} \arrow[dr, "M(l_9)a"] & & & \\
\tilde{P}_1^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)d"] & \tilde{P}_1^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)d"] & \tilde{P}_1^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)d"] & \tilde{P}_1^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)d"] & \tilde{P}_1^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)d"] & \tilde{P}_1^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)d"] & \tilde{P}_1^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)cd"] & \tilde{P}_3^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)ab"] & \tilde{P}_1^{r_9}
\end{tikzcd}$$

Os funtores $- \otimes_{K<x,y>} M : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ e $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preservam indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, em ambos os casos A é derivadamente selvagem.

Acabamos de ver que para A ser derivadamente mansa é necessário que $cda \notin I$. Com isso, temos que $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right) e_2 \in \{1, 2\}$. Analisamos essas duas possibilidades abaixo:

1) $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right) e_2 = 2$. Então, temos uma presentação para A_{23} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
\psi : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\
x_b & \longmapsto & \overline{b} \\
x_{ca} & \longmapsto & \overline{ca} \\
x_{cda} & \longmapsto & \overline{cda}
\end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "x_b"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_{cda}"'] \arrow[l, bend right=60, "x_{ca}"'] \end{tikzcd}$. Temos dois casos: $bc \in I$ ou $bc \notin I$. No segundo caso, o Lema 3.1 implica que $\overline{bc} \in radA_{12} \backslash rad^2A_{12}$. Logo, temos uma presentação para A_{12} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
\tau : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\
x_d & \longmapsto & \overline{d} \\
x_a & \longmapsto & \overline{a} \\
x_{bc} & \longmapsto & \overline{bc}
\end{array}$$

onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_d"] \arrow[r, bend right, "x_a"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_{bc}"'] \end{tikzcd}$. Do corolário 2.6 segue que $x_a x_{bc} \in ker\tau$, isto é, $abc \in I$. Em ambos os casos concluímos que $x_{cda}x_bx_{cda}, x_{cda}x_bx_{ca}, x_{ca}x_bx_{cda}, x_{ca}x_bx_{ca} \in$

$ker\psi$. Logo, $dim_K e_3\left(rad\frac{KQ_{23}}{ker\psi}\right)e_2 = 2$ e o corolário 2.5 implica que $\frac{KQ_{23}}{ker\psi} \cong A_{23}$ é derivadamente selvagem. Portanto, pelo Lema 2.4 a álgebra A é derivadamente selvagem.

2) $dim_K e_3\left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right)e_2 = 1$. Como o quiver de A_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right] & 3 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$, do corolário 2.4 temos que $rad^3A_{23} = 0$. Esse último fato junto com $cda \notin I$ implica que $\overline{cda} \in radA_{23}\backslash rad^2A_{23}$. Como $dim_K e_3(radA_{23})e_2 = 1$ e $\overline{cda} \in radA_{23}\backslash rad^2A_{23}$ temos que $\overline{ca} + \lambda\overline{cda} = 0$ ou seja, $ca + \lambda cda \in I$. Após uma mudança no conjunto de geradores que troca c por $\tilde{c} = c(e_1 + \lambda d)$ podemos assumir que $ca \in I$. Temos as seguintes possibilidades:

2.1 $bc \in I$. Temos que $J =< d^2, bc, ca >\subset I$, $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.23 da tabela A.7. Os caminhos de comprimento maior ou igual a dois em (Q, J) são: cd, da, ab, cda, dab e $cdab$. Já vimos que $cd, da, cda \notin I$. Caso $ab+\lambda dab \in I$, após uma mudança no conjunto de geradores podemos assumir que $ab \in I$. Dessas últimas considerações segue que L é um dos seguintes ideais: $< ab >, < dab >$, $< cdab >$.

Se $L =< ab >$, a álgebra A é gentle e isomorfa á álgebra A.24 da tabela A.7. Caso $L =< dab >$ ou $L =< cdab >$ temos que $ab \notin I$ e o Lema 3.1 implica que $\overline{ab} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$. Então, em ambos os casos temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \chi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_{ab} & \longmapsto & \overline{ab} \\ x_c & \longmapsto & \overline{c} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \end{array}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_d"] \arrow[r, bend right, "x_{ab}"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_c"'] \end{tikzcd}$. Logo, em ambos os casos $dim_K e_3\left(rad\frac{KQ_{13}}{ker\chi}\right)e_3 = 0$ e o corolário 2.6 implica que $\frac{KQ_{13}}{ker\chi}$ é derivadamente selvagem. Portanto, em ambos os casos A é derivadamente selvagem.

2.2 $bc \notin I$. Logo, o Lema 3.1 implica que $\overline{bc} \in radA_{12}\backslash rad^2A_{12}$. Assim, temos uma presentação para A_{12} como abaixo:

$$\begin{aligned} \varphi : KQ_{12} &\longrightarrow A_{12} \\ x_a &\longmapsto \overline{a} \\ x_{bc} &\longmapsto \overline{bc} \\ x_d &\longmapsto \overline{d} \end{aligned}$$

onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_d"] \arrow[r, bend right, "x_a"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_{bc}"'] \end{tikzcd}$. Do corolário 2.6 e do fato que $ca \in I$ temos que $x_d^2, x_{bc}x_a, x_ax_{bc} \in ker\varphi$ e $x_{bc}x_dx_a \notin ker\varphi$, ou seja, $d^2, bca, abc \in I$ e $bcda \notin I$. Como $ca \in I$ e $cda \notin I$ temos que $\overline{cda} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$. Então, temos uma presentação para A_{23} como abaixo:

$$\begin{aligned} \kappa : KQ_{23} &\longrightarrow A_{23} \\ x_{cda} &\longmapsto \overline{cda} \\ x_b &\longmapsto \overline{b} \end{aligned}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "x_b"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_{cda}"'] \end{tikzcd}$. Como $bcda \notin I$ do corolário 2.4 segue que $x_{cda}x_b \in ker\kappa$, isto é, $cdab \in I$. Temos duas possibilidades:

2.2.1 $ab \notin I$. Logo, o Lema 3.1 implica que $\overline{ab} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Então, temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{aligned} \eta : KQ_{13} &\longrightarrow A_{13} \\ x_{ab} &\longmapsto \overline{ab} \\ x_c &\longmapsto \overline{c} \\ x_d &\longmapsto \overline{d} \end{aligned}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_d"] \arrow[r, bend right, "x_{ab}"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_c"'] \end{tikzcd}$. Como $ca, cdab \in I$ temos que $dim_K e_3 \left(rad^2 \frac{KQ_{13}}{ker\eta} \right) e_3 = 0$. Então, o corolário 2.6 implica que $\frac{KQ_{13}}{ker\eta} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem. Portanto, A é derivadamente selvagem.

2.2.2 $ab \in I$. Com isso temos que $J =< d^2, ab, ca >\subset I$, $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.22 da tabela A.7. O único caminho maximal de (Q, J) é $bcda$ o qual, como vimos, não pertence a I. Portanto, o Lema 3.5 implica que $L = 0$ e $A \cong B$.

Caso $4 - 9 :$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r, "b"] & 2 \arrow[r, bend right, "d"'] & 3 \arrow[l, bend right, "c"'] \end{tikzcd}$$

Sabemos do corolário 2.3 que $a^2 \in I$. O subquiver pleno cujo conjunto de vértices é $\{2, 3\}$ é convexo. Desse último fato junto com o Teorema 2.14 concluímos que temos as três possibilidades abaixo:

1) $cd \in I$ e $dc \notin I$. Como $dc \notin I$ o Lema 3.2 implica que $\overline{dc} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$. Então, temos uma presentação para A_{12} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_b & \longmapsto & \overline{b} \\ x_{dc} & \longmapsto & \overline{dc} \end{array}$$

onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_a"] \arrow[r, "x_b"] & 2 \arrow[loop above, "x_{dc}"] \end{tikzcd}$. Devido ao fato que $a^2, (dc)^2 \in I$ e ao corolário 2.7 concluímos que $x_a x_b x_{dc} \notin ker\phi$, ou seja, $abdc \notin I$. Temos que $J =< a^2, cd >\subset I$ e $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2 B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.25 da tabela A.7. O único caminho maximal de (Q, J) é $abdc$ o qual não pode pertencer a I. Então, o Lema 3.5 implica que $L = 0$ e $A \cong B$.

2) $cd \notin I$ e $dc \in I$. Como $cd \notin I$ o Lema 3.2 implica que $\overline{cd} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$. Se $bd \notin I$ o Lema 3.1 implica que $\overline{bd} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$. Como $dc \in I$ e $\overline{cd}, \overline{bd} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$ o Lema 2.5 implica que A_{13} é derivadamente selvagem. Logo, $bd \in I$. Sabemos que $J =< a^2, dc, bd >\subset I$ e $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2 B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.26 da tabela A.7. Os caminhos de comprimento maior ou igual a dois em (Q, J) são cd e ab. Por hipótese $cd \notin I$ e, por causa do Lema 2.5, $ab \notin I$. Então, $L = 0$ e $A \cong B$.

3) $cd, dc \in I$. Temos que $J =< a^2, cd, dc >\subset I$ e $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2 B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.27 da tabela A.7. Então $L = 0$ ou

$L =< bd >$. Se $L =< bd >$ como B é uma álgebra gentle o Lema 3.6 implica que A é derivadamente selvagem. Portanto, $A \cong B$.

$$\text{\textbf{Caso} } 4-10: \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r, "b"] & 2 \arrow[r, "c"] & 3 \arrow[loop above, "d"] \end{tikzcd}$$

O corolário 2.3 implica que $a^2, d^2 \in I$. Do Lema 2.5 sabemos que $ab, cd \notin I$. Temos duas possibilidades:

1. $bc \in I$. Como $ab, cd \notin I$ segue que $I =< a^2, bc, d^2 >$. A álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ é gentle e isomorfa A.29 da tabela A.7.

2. $bc \notin I$. Logo, pelo Lema 3.1 temos que $\overline{bc} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$. Então, temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_{bc} & \longmapsto & \overline{bc} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \end{array}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_a"] \arrow[r, "x_{bc}"] & 3 \arrow[loop above, "x_d"] \end{tikzcd}$. Devido ao Teorema 2.14 para $\frac{KQ_{13}}{ker\phi} \cong A_{13}$ ser derivadamente mansa é necessário que $ker\phi =< x_a^2, x_d^2 >$. Portanto, $I =< a^2, d^2 >$. A álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ é gentle e isomorfa à álgebra A.28 da tabela A.7.

$$\text{\textbf{Caso} } 4-11: \begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, bend right, "b"'] \arrow[dr, "c"'] & & 2 \arrow[ll, bend right, "a"'] \arrow[dl, "d"] \\ & 3 & \end{tikzcd}$$

O subquiver pleno cujo conjunto de vértices é $\{1, 2\}$ é convexo. Esse fato junto com o Teorema 2.14 implica que $ab \in I$ ou $ba \in I$. Suponha que $ab \in I$. Logo, temos as possibilidades abaixo:

1) $ba \in I$. Portanto, $J =< ab, ba > \subset I$, $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2 B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.30 da tabela A.7. Os caminhos em (Q, J) de comprimentos maior ou igual a dois são ac e bd. Se um deles pertence a L o Lema 3.6 implica que A é derivadamente selvagem. Portanto, $L = 0$ e $A \cong B$.

2) $ba \notin I$. Logo, o Lema 3.2 implica que $\overline{ba} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Então, temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{aligned} \phi : KQ_{13} &\longrightarrow A_{13} \\ x_{ba} &\longmapsto \overline{ba} \\ x_c &\longmapsto \overline{c} \end{aligned}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_{ba}"] \arrow[r, "x_c"] & 3 \end{tikzcd}$. Do Lema 2.5 obtemos que $x_{ba}x_c \notin ker\phi$, isto é, $bac \notin I$. Suponha que $\overline{bd} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Como $\overline{bd}, \overline{ba} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$ e $ab \in I$ o Lema 2.5 implica que A_{13} é derivadamente selvagem. Portanto, $\overline{bd} \in rad^2A_{13}$. Como $A_{13} \cong \frac{KQ_{13}}{ker\phi}$, $ab \in I$ e $x_{ba}x_c \notin ker\phi$ temos que $dim_K e_1 rad^2 A_{13} e_3 = 1$. Já que $dim_K e_1 rad^2 A_{13} e_3 = 1$ e $bac \notin I$ concluímos que $\overline{bd} + \lambda\overline{bac} = 0$, para algum $\lambda \in K$. Logo, $bd + \lambda bac \in I$. Após uma mudança do conjunto de geradores que troca d por $d + \lambda ac$ podemos assumir que $bd \in I$. Temos que $J =< ab, bd > \subset I$, $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.31 da tabela A.7. O único caminho maximal de (Q, J) é bac e ele não pode pertencer a I. Logo, o Lema 3.5 implica que $L = 0$ e $A \cong B$.

Ainda nos resta analisar o que ocorre se $ba \in I$. Esse caso é análogo ao anterior, basta trocar 1 com 2, a com b e c com d.

Caso $4-12$: $\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "a"'] & & 2 \arrow[loop above, "c"] \arrow[dl, "d"] \\ & 3 & \end{tikzcd}$

O corolário 2.3 implica que $c^2 \in I$. Do Lema 2.5 segue que $bc, cd \notin I$. Na subálgebra A_{13} o Teorema 2.14 implica que $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 \in \{1, 2\}$.

Se $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 1$ temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{aligned} \phi : KQ_{13} &\longrightarrow A_{13} \\ x_a &\longmapsto \overline{a} \end{aligned}$$

onde Q_{13} é $1 \xrightarrow{x_a} 3$. Como $dim_K radA_{13} = 1$ e $a \in (Q_A)_1$ temos que $\overline{bd} = 0$ e $\overline{bcd} = 0$. Logo, $bd, bcd \in I$. Do fato que $bc, cd \notin I$ concluímos que $I =< c^2, bd, bcd >$.

Do apêndice B segue que A é derivadamente equivalente à álgebra $\Gamma = \frac{K\Delta}{H}$, onde

$$\begin{tikzcd}
\Delta : 1 \arrow[r, bend right, "\alpha"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\gamma"'] \arrow[l, "\beta"] & 2 \arrow[l, "\epsilon"] \arrow[loop above, "\delta"]
\end{tikzcd}$$

e $H =< \delta^2, \alpha\beta, \alpha\gamma, \delta\epsilon\gamma - \epsilon\beta >$. Como $\alpha\beta, \alpha\gamma \in H$, o Lema 2.6 implica que Γ é derivadamente selvagem. Portanto, dos Teoremas 2.11 e 2.10 segue que A é derivadamente selvagem.

Caso $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 2$ o quiver de A_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & 3 \end{tikzcd}$ e $rad^2A_{13} = 0$. Assim, temos os seguintes casos a considerar:

1. $\overline{bcd} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Como $a \in (Q_A)_1$, $\overline{bcd} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$ e $dim_K e_1 radA_{13} e_3 = 2$ concluímos que $\{\overline{a}, \overline{bcd}\}$ é uma base para $e_1 radA_{13} e_3$. Desse último fato e do fato que $\overline{bd} \in e_1 radA_{13} e_3$ obtemos que $\overline{bd} + \lambda\overline{bcd} = 0$, ou seja, $bd + \lambda bcd \in I$. Após uma mudança no conjunto de geradores que troca d por $d + \lambda cd$ podemos assumir que $bd, c^2 \in I$. Como $bc, cd \notin I$ temos que $I =< c^2, bd >$. Essa álgebra é gentle e isomorfa à álgebra A.32 da tabela A.7.

2. $\overline{bcd} \in rad^2A_{13}$. Já que $rad^2A_{13} = 0$ concluímos que $\overline{bcd} = 0$, ou seja, $bcd \in I$. Como $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 2$ temos que $\overline{bd} \in e_1 \left(radA_{13} \backslash rad^2A_{13}\right) e_3$. Do fato que $bc, cd \notin I$ segue que $I =< c^2, bcd >$. Assim, a álgebra A é derivadamente equivalente à álgebra $\Gamma = \frac{K\Delta}{H}$ onde

$$\begin{tikzcd}
\Delta : 2 \arrow[loop above, "\delta"] \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\epsilon"] & & 1 \arrow[dl, bend right, "\alpha"] \\
& 3 \arrow[ur, bend right, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

e $H =< \alpha\beta, \delta^2, \delta\gamma - \epsilon\beta >$. Mostraremos que a álgebra Γ é derivadamente selvagem. Com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16

podemos construir o complexo N de $K < x, y > -\Gamma$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \tilde{P}_3^{r_{10}} \arrow[dr, "M(l_9)\epsilon"] & \\
\tilde{P}_2^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)\delta"] & \tilde{P}_2^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)\delta"] & \tilde{P}_2^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)\delta"] & \tilde{P}_2^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)\delta"] & \tilde{P}_2^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)\delta"] & \tilde{P}_2^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)\delta"] & \tilde{P}_2^{r_7} \\
 & & & & & \tilde{P}_1^{r_8} \arrow[ur, "(l_7)\gamma"'] \arrow[dr, "M(l_8)\beta"] & \\
 & & & & & & \tilde{P}_3^{r_9}
\end{tikzcd}$$

O funtor $-\otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(\Gamma)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, Γ é derivadamente selvagem. Já que A é derivadamente equivalente a Γ, dos Teoremas 2.11 e 2.10, segue que A é derivadamente selvagem.

$$\textbf{Caso } 4-13: \begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, bend right, "a"'] & & 2 \arrow[ll, bend right, "b"'] \arrow[dl, "c"] \\
 & 3 \arrow[ul, "d"] &
\end{tikzcd}$$

Temos duas possibilidades:

1. $cd \in I$. Do corolário 2.4 sabemos que para a subálgebra A_{12} ser derivadamente mansa é necessário que $ab \in I$ ou $ba \in I$. O que nos dá os seguintes casos:

   1.1. $ab \in I$ e $ba \notin I$. Do Lema 3.2 obtemos que $\overline{ba} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Se $da \notin I$ segue do Lema 3.1 que $\overline{da} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Como $ab \in I$ e $\overline{ba}, \overline{da} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$ temos do Lema 2.5 que A_{23} é derivadamente selvagem. Portanto, $da \in I$. Com isso, obtemos que $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}}\right) e_2 = 1, dim_K e_2 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}}\right) e_3 = 1, dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}}\right) e_3 = 0$ e $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}}\right) e_2 = 0$. Desse modo, temos a seguinte presentação para A_{23}

$$\begin{array}{rcl}
\phi : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\
x_{ba} & \longmapsto & \overline{ba} \\
x_c & \longmapsto & \overline{c}
\end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[loop above, "x_{ba}"] \arrow[r, "x_c"] & 3 \end{tikzcd}$. Pelo Lema 2.5 concluímos que $x_{ba}x_c \notin ker\phi$, ou seja, $\overline{bac} \neq 0$. Temos que $J =< cd, ab, da >\subseteq I$. Logo, $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é isomorfa à álgebra A.35 da tabela A.7. O único caminho maximal de comprimento maior ou igual a dois em (Q, J) é bac, o qual já vimos que não pode pertencer a I. Portanto, do Lema 3.5 concluímos que $L = 0$.

1.2. $ba \in I$ e $ab \notin I$. Do Lema 3.2 segue que $\overline{ab} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$. Se $ac \notin I$ o Lema 3.1 implica que $\overline{ac} \in e_1\left(radA_{13}\backslash rad^2A_{13}\right)e_3$. Como $ba \in I$ e $\overline{ab}, \overline{ac} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$ temos do Lema 2.5 que A_{13} é derivadamente selvagem. Por isso, $ac \in I$. Logo, $dim_Ke_3\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 0, dim_Ke_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 0$, $dim_Ke_3\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_1 = 1, dim_Ke_3\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 1$ e $dim_Ke_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_1 = 1$. Desse modo, temos a seguinte presentação para A_{13}

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_{ab} & \longmapsto & \overline{ab} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \end{array}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_{ab}"] & 3 \arrow[l, "x_d"'] \end{tikzcd}$. Então, do Lema 2.5 concluímos que $x_dx_{ab} \notin ker\phi$, ou seja, $\overline{dab} \neq 0$. Sabemos que $J =< cd, ba, ac >\subseteq I$. Portanto, $A \cong \frac{B}{L}$, com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é isomorfa à álgebra A.37 da tabela A.7. O único caminho maximal de comprimento maior ou igual a dois em (Q, J) é dab, o qual já vimos que não pode pertencer a I. Portanto, do Lema 3.5 segue que $L = 0$.

1.3. $ab, ba \in I$. Concluímos que $J =< ba, ab, cd >\subseteq I$. Logo, $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é isomorfa à álgebra A.36 da tabela A.7. Logo, B é gentle. O único caminho maximal de comprimento maior ou igual a dois em B é dac. Se $ac \in I$ ou $da \in I$ do Lema 3.6 segue que A é derivadamente selvagem. Caso $ac, da \notin I$ obtemos que $L = 0$ ou $L =< dac >$. Na última opção, como $ac \notin I$, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, podemos construir o complexo N

de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo

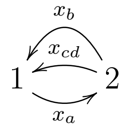
$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & & \tilde{P}_2^{r_{10}} & \\
\tilde{P}_1^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)d"] & \tilde{P}_3^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)ac"] & \tilde{P}_1^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)d"] & \tilde{P}_3^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)ac"] & \tilde{P}_1^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)d"] & \tilde{P}_3^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)ac"] & \tilde{P}_1^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)d"] \arrow[ur, "M(l_9)b"] & \tilde{P}_3^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)ac"] & \tilde{P}_1^{r_9}
\end{tikzcd}$$

O funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem.

2. $cd \notin I$. Temos que $\overline{cd} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$. Caso contrário, o quiver de A_{12} é $1 \rightleftarrows 2$ e $\overline{cd} \in rad^3 A_{12}$. Do corolário 2.4 segue que $rad^3 A_{12} = 0$. Logo, $cd \in I$, o que contradiz a nossa hipótese. Como $\overline{cd} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$ obtemos que $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2 A_{12}} \right) e_1 = 0, dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2 A_{12}} \right) e_2 = 0, dim_K e_1 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2 A_{12}} \right) e_2 = 1$ e $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2 A_{12}} \right) e_1 = 2$. Assim, temos a seguinte presentação para A_{12}

$$\begin{array}{rcl}
\phi : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\
x_a & \longmapsto & \overline{a} \\
x_{cd} & \longmapsto & \overline{cd} \\
x_b & \longmapsto & \overline{b}
\end{array}$$

onde Q_{12} é o quiver abaixo



O corolário 2.5 implica que $\lambda_1 x_a x_b + \lambda_2 x_a x_{cd}, \lambda_3 x_b x_a + \lambda_4 x_{cd} x_a \in ker\phi$ para alguns $\lambda_i \in K$ com $\lambda_1 \lambda_4 - \lambda_3 \lambda_2 \neq 0$. Logo, $\lambda_1 ab + \lambda_2 acd, \lambda_3 ba + \lambda_4 cda \in I$, com $\lambda_i \in K$ e $\lambda_1 \lambda_4 - \lambda_3 \lambda_2 \neq 0$. Temos que considerar dois casos:

2.1 $\lambda_1 = 0$. Do fato que $\lambda_1 \lambda_4 - \lambda_3 \lambda_2 \neq 0$ concluímos que $\lambda_3 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Então, a menos de mudança do conjunto de geradores que troca b por $\lambda_3 b + \lambda_4 cd$ obtemos que $acd, ba \in I$. Do corolário 2.5 segue que $x_a x_b \notin ker\phi$, isto é, $\overline{ab} \neq 0$. Logo, do Lema 3.2 concluímos que $\overline{ab} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$. Se $ac \notin I$ o Lema 3.1 implica que $\overline{ac} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$. Do fato que $ba \in I$ e $\overline{ab}, \overline{ac} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$ segue, do Lema 2.5, que A_{13} é derivadamente selvagem. Logo, $ac \in I$. Devido ao corolário 2.5 para $\frac{KQ_{12}}{ker\phi} \cong A_{12}$ ser derivadamente mansa é necessário que $dim_K e_2 rad\left(\frac{KQ_{12}}{ker\phi}\right)e_1 = 3$. Logo, $x_{cd}x_a x_b \notin ker\phi$, isto é, $\overline{cdab} \neq 0$. Temos que $J =< ba, ac >\subseteq I$ e $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2 B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é isomorfa à álgebra A.33 da tabela A.7. Portanto, a álgebra B é gentle. O único caminho maximal existente em (Q, J) é $cdab$, o qual não pode pertencer a I. Logo, o Lema 3.5 implica que $L = 0$.

2.2 $\lambda_1 \neq 0$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $\tilde{b} = \lambda_2 cd + \lambda_1 b$ temos que $a\tilde{b}, cda + \mu\tilde{b}a \in I$, com $\mu = \lambda_3(\lambda_1\lambda_4 - \lambda_3\lambda_2)^{-1}$. A menos de mudança do conjunto de geradores assumiremos que $ab, cda + \mu ba \in I$. Temos que considerar os seguintes casos:

2.2.1 $\mu = 0$, ou seja, $ab, cda \in I$. Como $ab, cda \in I$ temos que $x_a x_b, x_{cd}x_a \in ker\phi$. Esse último fato junto com o corolário 2.5 implica que $x_b x_a \notin ker\phi$, ou seja, $\overline{ba} \neq 0$. Já que $\overline{ba} \neq 0$ do Lema 3.2 segue que $\overline{ba} \in radA_{23}\backslash rad^2 A_{23}$. Se $da \notin I$ o Lema 3.1 implica que $\overline{da} \in radA_{23}\backslash rad^2 A_{23}$. Devido ao fato que $ab \in I$ e $\overline{ba}, \overline{da} \in radA_{23}\backslash rad^2 A_{23}$ do Lema 2.5 concluímos que A_{23} é derivadamente selvagem. Portanto, $da \in I$. Para $\frac{KQ_{12}}{ker\phi} \cong A_{12}$ ser derivadamente mansa, devido ao corolário 2.5, é necessário que $dim_K e_2 rad^2\left(\frac{KQ_{12}}{ker\phi}\right)e_1 = 1$. Logo, $x_b x_a x_{cd} \notin ker\phi$, ou seja, $\overline{bacd} \neq 0$. Sabemos que $J =< ab, da >\subseteq I$ e $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2 B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é isomorfa à álgebra A.34 da tabela A.7. Portanto, a álgebra B é gentle. O único caminho maximal existente em (Q, J) é $bacd$, o qual não pode pertencer a I. Logo, do Lema 3.5 segue que $L = 0$.

2.2.2 $\mu \neq 0$. Então, $ab, cda + \mu ba \in I$. Como $ab, cda + \mu ba \in I$ temos que $x_a x_b, x_{cd}x_a + \mu x_b x_a \in ker\phi$. Do corolário 2.5 segue que $x_a x_{cd} \notin ker\phi$, senão $dim_K e_1 rad^2\left(\frac{KQ_{12}}{ker\phi}\right)e_1 = 0$, ou seja, $acd \notin I$. Logo, $\overline{ac} \neq 0$. Do Lema 3.1 temos que $\overline{ac} \in radA_{13}\backslash rad^2 A_{13}$. Desse modo, $dim_K e_3\left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right)e_1 = 1, dim_K e_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right)e_3 = 1$, $dim_K e_3\left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right)e_3 = 0$ e $dim_K e_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right)e_1 = 0$. Então, temos uma presentação para A_{13} como abaixo

$$\begin{aligned} \theta : KQ_{13} &\longrightarrow A_{13} \\ x_{ac} &\longmapsto \overline{ac} \\ x_d &\longmapsto \overline{d} \end{aligned}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "x_{ac}"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_d"'] \end{tikzcd}$. Como $acd \notin I$, pelo corolário 2.4, temos que $x_d x_{ac} \in ker\theta$. Logo, $dac \in I$. Do fato que $cda + \mu ba, dac, ab \in I$ segue que $x_{cd}x_a x_{cd}, x_b x_a x_{cd}, x_b x_a x_b, x_{cd} x_a x_b \in ker\phi$. Logo, $dim_K e_2 rad\left(\frac{KQ_{12}}{ker\phi}\right) e_1 = 2$. Então, o corolário 2.5 implica que $\frac{KQ_{12}}{ker\phi} \cong A_{12}$ é derivadamente selvagem.

Caso $4 - 15$: $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "b"'] & 2 \arrow[l, bend right, "a"'] \arrow[r, bend right, "c"'] & 3 \arrow[l, bend right, "d"'] \end{tikzcd}$

Do corolário 2.3 concluímos que $0 \leq dim_K rad(e_2 A e_2) \leq 1$. Logo, a menos de trocarmos 1 por 3, a por c e b por d temos as seguintes possibilidades:

1. $cd \notin I$. Temos dois casos a considerar:

   1.1 $cd - \lambda ab \in I$ com $\lambda \neq 0$. Assim, temos uma presentação para A_{12} como abaixo:

   $$\begin{aligned} \phi : KQ_{12} &\longrightarrow A_{12} \\ x_a &\longmapsto \overline{a} \\ x_b &\longmapsto \overline{b} \end{aligned}$$

   onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "x_b"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_a"'] \end{tikzcd}$. Como $ab \notin I$, do corolário 2.4, segue que $x_b x_a \in ker\phi$, ou seja, $ba \in I$.

   Uma presentação para a subálgebra A_{23} é dada abaixo:

   $$\begin{aligned} \theta : KQ_{13} &\longrightarrow A_{13} \\ x_c &\longmapsto \overline{c} \\ x_d &\longmapsto \overline{d} \end{aligned}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "x_c"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_d"'] \end{tikzcd}$. Do fato que $cd \notin I$, o corolário 2.4 implica que $x_d x_c \in ker\theta$, isto é, $dc \in I$. Como $ba, dc, cd - \lambda ab \in I$ com $\lambda \neq 0$ segue que $rad^3 A = 0$. Por isso, temos as seguintes possibilidades para o ideal I: $< ba, dc, da, cd - \lambda ab >, < ba, dc, bc, cd - \lambda ab >, < ba, dc, da, bc, cd - \lambda ab >$ ou $< ba, dc, cd - \lambda ab >$. A álgebra $A = \frac{KQ}{I}$, onde $I =< ba, dc, da, bc, cd - \lambda ab >$ é isomorfa à álgebra 1.6 da tabela 1.1. Além disso, A é uma álgebra skewed-gentle, como visto no Exemplo 2.12. As álgebras $A = \frac{KQ}{I}$ com $I =< ba, dc, da, cd - \lambda ab >$ e $I =< ba, dc, bc, cd - \lambda ab >$ são isomorfas à álgebra $B = \frac{KQ}{J}$, onde $J =< ba, dc, bc, cd - ab >$. Mostraremos que a álgebra B é derivadamente selvagem. Com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16 podemos construir o complexo N de $K < x, y > -B$ bimódulos abaixo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \tilde{P}_2^{r_{10}} \arrow[dr, "M(l_{10})a"] & & & \\
\tilde{P}_2^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)b"] & \tilde{P}_1^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)da"] & \tilde{P}_3^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)c"] & \tilde{P}_2^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)b"] & \tilde{P}_1^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)da"] & \tilde{P}_3^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)c"] & \tilde{P}_2^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)b"] & \tilde{P}_1^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)da"] & \tilde{P}_3^{r_9}
\end{tikzcd}$$

O funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, B é derivadamente selvagem e como nesse caso A é isomorfa a B segue que A é derivadamente selvagem. A álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ em que $I =< ba, dc, cd - \lambda ab >$ é uma álgebra autoinjetiva. Logo, devido ao corolário 2.6 de [10] e ao Teorema 2.12 dessa tese concluímos que essa álgebra é derivadamente selvagem.

1.2 $cd - \lambda ab \notin I$ para todo $\lambda \in K$. Logo, $\overline{cd} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$. Caso contrário, o quiver de A_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right] & 2 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$ e pelo Corolário 2.4 temos que $rad^3 A_{12} = 0$. Portanto, $cd \in I$ o que contradiz nossa hipótese. Assim, temos uma presentação para A_{12} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
\psi : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\
x_a & \longmapsto & \overline{a} \\
x_b & \longmapsto & \overline{b} \\
x_{cd} & \longmapsto & \overline{cd}
\end{array}$$

onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "x_b"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_a"'] \arrow[loop above, "x_{cd}"] \end{tikzcd}$. Para a álgebra $\frac{KQ_{12}}{ker\psi}$ ser derivadamente mansa, pelo Corolário 2.6, é necessário que $x_a x_b, x_{cd}^2, x_b x_a - \lambda x_b x_a x_{cd} \in ker\psi$, isto é, $ab, (cd)^2, ba - \lambda bcda \in I$. Então, fazendo uma mudança do conjunto de geradores que troca a por $(e_2 - \lambda cd)a$ podemos assumir que que $ab, ba, (cd)^2 \in I$. Uma presentação para a subálgebra A_{23} é dada abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \chi : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \\ x_c & \longmapsto & \overline{c} \end{array}$$

onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "x_c"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_d"'] \end{tikzcd}$. Como $cd \notin I$ o Corolário 2.4 implica que $x_d x_c \in ker\chi$, ou seja, $dc \in I$. Então, $J =< ab, ba, dc > \subseteq I$. Logo, $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2 B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.38 da tabela A.7. O Corolário 2.6 aplicado a álgebra $\frac{KQ_{12}}{ker\psi}$ implica que $x_b x_{cd} x_a \notin ker\psi$, ou seja, $bcda \notin I$. o único caminho maximal de (Q, J) é $bcda$ o qual não pertence a I. Portanto, do Lema 3.5 segue que $L = 0$ e $A \cong B$.

2. $cd \in I$. Temos as três possibilidades abaixo:

   2.1 $ba \in I$ e $ab \notin I$. Como $ab \notin I$ e $cd \in I$ do Lema 3.2 segue que $\overline{ab} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Assim, temos uma presentação para A_{23} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \theta : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_{ab} & \longmapsto & \overline{ab} \\ x_c & \longmapsto & \overline{c} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "x_c"'] \arrow[loop above, "x_{ab}"] & 3 \arrow[l, bend right, "x_d"'] \end{tikzcd}$. Do Corolário 2.6 segue que $x_c x_d, x_{ab}^2, x_d x_c - \lambda x_d x_{ab} x_c \in ker\theta$, ou seja, $cd, (ab)^2, dc - \lambda dabc \in I$. Então, fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca c por $(e_2 - \lambda ab)c$ podemos assumir que $dc, cd, (ab)^2 \in I$. Logo, $J =< dc, cd, ba > \subseteq I$. Então, $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq$

rad^2B e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.38 da tabela A.7. Do Corolário 2.6 aplicado a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\theta}$ segue que $x_d x_{ab} x_c \notin ker\theta$, ou seja, $dabc \notin I$. O único caminho maximal de (Q, J) é $dabc$ o qual não pertence a I. Portanto, do Lema 3.5 temos que $L = 0$ e $A \cong B$.

2.2 $ab \in I$ e $ba \notin I$. Como $ba \notin I$ e $cd \in I$ do Lema 3.2 segue que $\overline{ba} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Se $da \notin I$ o Lema 3.1 implica que $\overline{da} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Como $ab \in I$ e $\overline{ba}, \overline{da} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$ o Lema 2.5 implica A_{13} é derivadamente selvagem. Logo, $da \in I$. Por raciocínio análogo concluímos que $bc \in I$. Portanto, $J =< cd, ab, bc, da > \subseteq I$. Logo, $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.39 da tabela A.7. As únicas possibilidades que temos é $L = 0$ ou $L =< dc >$. No segundo caso, A é uma álgebra não gentle que foi obtida de um quociente de uma álgebra gentle cujos geradores de I possuem comprimento 2. Então, pelo Lema 3.6 concluímos que A é derivadamente selvagem.

2.3 $ba, ab \in I$. Temos as possibilidades abaixo:

2.3.1 $dc \notin I$. O Lema 3.2 implica que $\overline{dc} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Se $da \notin I$ o Lema 3.1 implica que $\overline{da} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Como $cd \in I$ e $\overline{dc}, \overline{da} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$ do Lema 2.5 concluímos que A_{13} é derivadamente selvagem. Logo, $da \in I$. Por um raciocínio análogo obtemos que $bc \in I$. Portanto, $I =< ab, ba, cd, bc, da >$. A álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ é isomorfa ao quociente da álgebra A.39 da tabela A.7 pelo ideal $L =< ba >$. Logo, o Lema 3.6 implica que A é derivadamente selvagem.

2.3.2 $dc \in I$. Temos que $J =< ab, ba, cd, dc > \subseteq I$. Logo, $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.40 da tabela A.7. Se $da \in L$ ou $bc \in L$ a álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ é uma álgebra não gentle que foi obtida de um quociente de uma álgebra gentle cujos geradores de I possuem comprimento 2. Portanto, pelo Lema 3.6 concluímos que A é derivadamente selvagem. Portanto, $L = 0$ e $A \cong B$.

$$\textbf{Caso } 4-20 : \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r, "b"] & 2 & 3 \arrow[l, "c"'] \arrow[loop above, "d"] \end{tikzcd}$$

Do Corolário 2.3 temos que $a^2, d^2 \in I$. Já o Lema 2.5 implica que $ab, dc \notin I$.

Então, $I =< a^2, d^2 >$ e a álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ é isomorfa à álgebra A.41 da tabela A.7.

3.4 Quivers bisseriais com 5 flechas

Conforme cálculos feitos no apêndice A os quivers bisseriais conexos com 5 flechas são dados na tabela A.4. Nessa seção encontraremos as álgebras $A = \frac{KQ}{I}$ derivadamente mansas cujo quiver é bisserial com 3 vértices e 5 flechas.

Os casos $5-3$ e $5-6$ possuem os quivers $5-9$ e $5-11$ como respectivos opostos. Por isso, analisaremos apenas os primeiros.

Caso $5-1$:
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, bend left, "a"] \arrow[rr, "b"'] & & 2 \arrow[dl, bend right, "c"'] \arrow[dl, bend left, "d"] \\ & 3 \arrow[ul, "e"] & \end{tikzcd}$$

Pela classificação feita no Teorema 2.14 para a subálgebra A_{12} ser derivadamente mansa é necessário que $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2A_{12}}\right) e_1 \in \{0,1\}$. Porém, se $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2A_{12}}\right) e_1 = 0$ temos que $ce, de \in I$ e o Lema 2.6 implica que A é derivadamente selvagem. Caso $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2A_{12}}\right) e_1 = 1$ a subálgebra A_{12} será isomorfa a álgebra A_4 do Teorema 2.14. Assim, do Corolário 2.5 segue que $dim_K e_2 radA_{12} e_1 = 1$ e $dim_K e_2 rad^2 A_{12} e_1 = 0$. Logo, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, não simultaneamente nulos, tais que $\lambda_1 ce + \lambda_2 de \in I$. Se $\lambda_1 \neq 0$ temos que $(c + \lambda_1^{-1}\lambda_2 d)e \in I$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca c por $c + \lambda_1^{-1}\lambda_2 d$ podemos assumir que $ce \in I$. Caso $\lambda_1 = 0$ teremos $de \in I$. Então, a menos de mudança no conjunto de geradores que troca c por d podemos assumir que $ce \in I$. Por um raciocínio análogo aplicado a subálgebra A_{23} podemos considerar que $ea \in I$. Como $ce, ea \in I$ o Lema 2.6 implica que $de, eb \notin I$. Portanto, do Lema 3.1 concluímos que $de \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$ e $eb \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Assim, abaixo temos uma presentação das subálgebras A_{12} e A_{23}:

$$\begin{array}{rlcrl} \phi : KQ_{12} & \longrightarrow A_{12} & \quad & \theta : KQ_{23} & \longrightarrow A_{23} \\ x_a & \longmapsto \overline{a} & & x_d & \longmapsto \overline{d} \\ x_b & \longmapsto \overline{b} & & x_c & \longmapsto \overline{c} \\ x_{de} & \longmapsto \overline{de} & & x_{eb} & \longmapsto \overline{eb} \end{array}$$

onde Q_{12} e Q_{23} são, respectivamente, $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left=50, "x_a"] \arrow[r, "x_b"] & 2 \arrow[l, bend left=50, "x_{de}"] \end{tikzcd}$ e $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend left=50, "x_d"] \arrow[r, "x_c"] & 3 \arrow[l, bend left=50, "x_{eb}"] \end{tikzcd}$.

Como $ea \in I$ para que a álgebra $\frac{KQ_{12}}{ker\phi} \cong A_{12}$ seja derivadamente mansa, pelo corolário 2.5, é necessário que $x_b x_{de} + \lambda x_a x_{de} \in ker\phi$, ou seja, $bde + \lambda ade \in I$.

Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $b + \lambda a$ podemos assumir que $bde, ce, ea \in I$.

Do Teorema 2.14 sabemos que para A_{13} ser derivadamente mansa é necessário que $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3 \in \{0, 1, 2\}$. A dimensão ser zero não pode ocorrer, senão A_{13} seria derivadamente selvagem pelo Lema 2.6, pois nesse caso $bd, bc \in I$. Só nos resta analisar os outros dois casos:

1. $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3 = 1$. O quiver de A_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right] & 3 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$. Então, do corolário 2.4 segue que $rad^3 A_{13} = 0$. Como $e_1 rad^2 A_{13} e_3 \subseteq rad^3 A_{13}$ e $rad^3 A_{13} = 0$ concluímos que para todo $w \in \{\overline{ad}, \overline{ac}, \overline{bd}, \overline{bc}\}$ temos que $w = 0$ ou $w \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$. Já sabemos que $ce, ea, bde \in I$. Caso $\overline{ad} = 0$ temos que $dim_K e_1 rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\phi} e_1 = 0$ implicando que $\frac{KQ_{12}}{ker\phi} \cong A_{12}$ é derivadamente selvagem, pelo corolário 2.5. Se $\overline{ad} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$ temos que $\overline{ade} \neq 0$, senão $dim_K e_1 rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\phi} e_1 = 0$ e o corolário 2.5 implicaria que a álgebra $\frac{KQ_{12}}{ker\phi} \cong A_{12}$ é derivadamente selvagem. Por essa mesma razão $\overline{bd} \notin radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$, caso contrário $\overline{bd} = \mu \overline{ad}$ para algum $\mu \in K$. Como $bde \in I$ teríamos que $ade \in I$. Então, $\overline{bd} = 0$, ou seja $bd \in I$. Como $bd \in I$, do Lema 2.6 segue que $bc \notin I$. Portanto, $\overline{bc} = \lambda \overline{ad}$, com algum $\lambda \neq 0$ e $\lambda \in K$. Do fato que $\overline{bc} = \lambda \overline{ad}$ e $ea \in I$ segue que $ebc \in I$. Como $ebd, ebc \in I$ temos que $dim e_3 rad^2 \frac{KQ_{23}}{ker\theta} e_3 = 0$ e o corolário 2.5 implica que $\frac{KQ_{23}}{ker\theta} \cong A_{23}$ é derivadamente selvagem. Portanto, A é derivadamente selvagem.

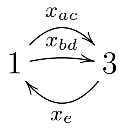
2. $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3 = 2$. Olhando para o quiver de A vemos que $\overline{ac}, \overline{ad}, \overline{bc}$ e $\overline{bd}$ geram o espaço vetorial $e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3$. Logo, dois desses vetores são linearmente independentes e temos as seguintes possibilidades de presentação para A_{13}:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \varphi_1 : KQ_{131} \longrightarrow A_{13} & \varphi_2 : KQ_{132} \longrightarrow A_{13} & \varphi_3 : KQ_{133} \longrightarrow A_{13} \\ x_{ac} \longmapsto \overline{ac} & x_{bd} \longmapsto \overline{bd} & x_{ad} \longmapsto \overline{ad} \\ x_{bd} \longmapsto \overline{bd} & x_{bc} \longmapsto \overline{bc} & x_{bd} \longmapsto \overline{bd} \\ x_e \longmapsto \overline{e} & x_e \longmapsto \overline{e} & x_e \longmapsto \overline{e} \end{array}$$

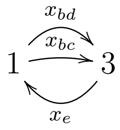
$$\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \\ \varphi_4 : KQ_{134} \longrightarrow A_{13} & \varphi_5 : KQ_{135} \longrightarrow A_{13} & \varphi_6 : KQ_{136} \longrightarrow A_{13} \\ x_{ac} \longmapsto \overline{ac} & x_{ad} \longmapsto \overline{ad} & x_{ad} \longmapsto \overline{ad} \\ x_{bc} \longmapsto \overline{bc} & x_{ac} \longmapsto \overline{ac} & x_{bc} \longmapsto \overline{bc} \\ x_e \longmapsto \overline{e} & x_e \longmapsto \overline{e} & x_e \longmapsto \overline{e} \end{array}$$

onde

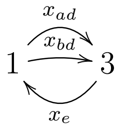
Q_{131}



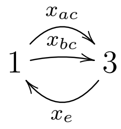
Q_{132}



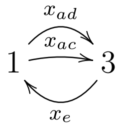
Q_{133}



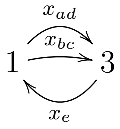
Q_{134}



Q_{135}



Q_{136}



Analisaremos cada um desses casos abaixo:

2.1. caso 1. Como $ce, bde \in I$ temos que $dim_K e_1 \left(rad^2 \frac{KQ_{131}}{ker\varphi_1} \right) e_1 = 0$. Então, o corolário 2.5 implica que $\frac{KQ_{131}}{ker\varphi_1} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem. Portanto, A é derivadamente selvagem.

2.2. caso 2. Como $ce, bde \in I$ temos que $dim_K e_1 \left(rad^2 \frac{KQ_{132}}{ker\varphi_2} \right) e_1 = 0$. Então, o corolário 2.5 implica que $\frac{KQ_{132}}{ker\varphi_2} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem. Portanto, A é derivadamente selvagem.

2.3. caso 3. Para resolvê-lo iremos assumir apenas que $ea, ce \in I$ e analisaremos a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\theta} \cong A_{23}$. Como $ce \in I$ para $\frac{KQ_{23}}{ker\theta}$ ser derivadamente mansa, pelo corolário 2.5, é necessário que $x_{eb}x_d + \lambda x_{eb}x_c \in ker\theta$, ou seja, $ebd +$

$\lambda ebc \in I$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca d por $d+\lambda c$ podemos assumir que $ebd \in I$. Logo, $dim_K e_3 \left(rad^2 \frac{KQ_{133}}{ker\varphi_3} \right) e_3 = 0$ e o corolário 2.5 implica que $\frac{KQ_{133}}{ker\varphi_3} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem. Portanto, A é derivadamente selvagem.

2.4. caso 4. Como $ce \in I$ temos que $dim_K e_1 \left(rad^2 \frac{KQ_{134}}{ker\varphi_4} \right) e_1 = 0$. Então, o corolário 2.5 implica que $\frac{KQ_{134}}{ker\varphi_4} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem. Logo, A é derivadamente selvagem.

2.5. caso 5. Como $ea \in I$ temos que $dim_K e_3 \left(rad^2 \frac{KQ_{135}}{ker\varphi_5} \right) e_3 = 0$. Então, o corolário 2.5 implica que $\frac{KQ_{135}}{ker\varphi_5} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem. Logo, A é derivadamente selvagem.

2.6. caso 6. Como $ce, ea \in I$ para a álgebra $\frac{KQ_{136}}{ker\varphi_6}$ ser derivadamente mansa, pelo corolário 2.5, é necessário que $x_{ad}x_e x_{bc} \notin ker\varphi_6$ ou seja, $\overline{adebc} \neq 0$. Logo, o conjunto $\{\overline{ad}, \overline{bc}, \overline{adebc}\}$ é uma base do espaço vetorial $e_1 radA_{13} e_3$. Sabemos que $\overline{ac} \in e_1 radA_{13} e_3$, logo existem $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in K$, tais que

$$\overline{ac} = \mu_1 \overline{ad} + \mu_2 \overline{bc} + \mu_3 \overline{adebc}. \tag{3.2}$$

Multiplicando a igualdade (3.2) à esquerda por $\overline{e}$ concluímos que $ebc \in I$, caso $\mu_2 \neq 0$. Neste caso, o corolário 2.5 implicaria que $\frac{KQ_{136}}{ker\varphi_6} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem, pois teríamos $dim_K e_3 \left(rad^2 \frac{KQ_{136}}{ker\varphi_6} \right) e_3 = 0$. Portanto, a equação (3.2) torna-se $\overline{ac} = \mu_1 \overline{ad} + \mu_3 \overline{adebc}$. Multiplicando à direita por $\overline{e}$ concluímos que $ade \in I$ e $dim_K e_1 \left(rad^2 \frac{KQ_{136}}{ker\varphi_6} \right) e_1 = 0$, se $\mu_1 \neq 0$. Portanto, do corolário 2.5 teríamos que $\frac{KQ_{136}}{ker\varphi_6} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem. Logo, $\mu_1 = 0$ e $\overline{ac} = \mu_3 \overline{adebc}$, isto é, $ac - \mu_3 adebc \in I$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca a por $\tilde{a} = a(e_2 - \mu_3 deb)$ temos que $\tilde{a}c \in I$ e que ea torna-se $e\tilde{a}(e_2 + \mu_3 deb) \in I$. Como $e_2 - \mu_3 deb$ é invertível, logo $e\tilde{a} \in I$. Então, a menos de mudança do conjunto de geradores podemos assumir que $ac \in I$.

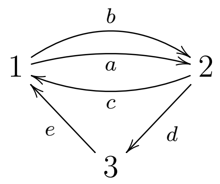
Temos que $\overline{bd} \in e_1 radA_{13} e_3$. Como o conjunto $\{\overline{ad}, \overline{bc}, \overline{adebc}\}$ é uma base do espaço vetorial $e_1 radA_{13} e_3$ obtemos que

$$\overline{bd} = \lambda_1 \overline{ad} + \lambda_2 \overline{bc} + \lambda_3 \overline{adebc}. \tag{3.3}$$

Multiplicando a equação (3.3) à direita por $\overline{e}$ temos $ade \in I$, caso $\lambda_1 \neq 0$. Neste caso $dim_K e_1 \left(rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\phi} \right) e_1 = 0$. Logo, $\frac{KQ_{12}}{ker\phi} \cong A_{12}$ é derivadamente selvagem, pelo corolário 2.5. Então, $\lambda_1 = 0$ e a equação (3.3) torna-se $\overline{bd} = \lambda_2\overline{bc} + \lambda_3\overline{adebc}$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca d por $\tilde{d} = d - \lambda_2 c$ temos que $\overline{b\tilde{d}} = \lambda_3\overline{a\tilde{d}ebc} + \lambda_3\lambda_2\overline{acebc}$, ou seja, $\overline{b\tilde{d}} = \lambda_3\overline{a\tilde{d}ebc}$, pois $ce \in I$. Como $bde \in I$, após a mudança no conjunto de geradores essa relação torna-se $b(\tilde{d}+\lambda_2 c)e$, isto é, $b\tilde{d}e \in I$, visto que $ce \in I$. Então, a menos de mudança do conjunto de geradores podemos assumir que $bd \in rad^2 A_{13}$, isto é, $bd \in I$ ou $bd + \lambda adebc \in I$, com $\lambda \neq 0$. Portanto, $J =< ac, bd, ea, ce >\subseteq I$ ou $J_\lambda =< ac, bd - \lambda adebc, ea, ce >\subseteq I$ com $\lambda \neq 0$. No primeiro caso A é isomorfa a $\frac{B}{L}$, com $L \subseteq rad^2 B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é isomorfa à álgebra A.1 da tabela A.5. O único caminho maximal de B é $adebc$, como vimos esse caminho não pertence a I. Portanto, do Lema 3.5 temos que $L = 0$.

No segundo caso, A é isomorfa a $\frac{B_\lambda}{L}$, com $L \subseteq rad^2 B$ e $B_\lambda = \frac{KQ}{J_\lambda}$. Seja ρ uma relação que pertence ao conjunto gerador de L, ela não é monomial. Pois, qualquer monômio é um subcaminho de bd ou $abcde$. Mas, sabemos que $bd \notin I$ e $abcde \notin I$. Os caminhos paralelos (isto é, caminhos que possuem o mesmo ponto inicial e o mesmo ponto final) de comprimento maior ou igual a 2 não nulos que existem em (Q, J_λ) são ad, bc, bd e $adebc$. Como $bd - \lambda adebc \in J_\lambda$ com $\lambda \neq 0$ temos que ρ é da forma $\mu_1 ad + \mu_2 bc + \mu_3 bd$. Se $\rho \neq 0$, do fato que $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3 = 2$ segue que $\mu_3 \neq 0$. Já do fato que $adebc \notin I$ concluímos que $\mu_1 \neq 0$ ou $\mu_2 \neq 0$. Caso $\mu_1 \neq 0$ multiplicando ρ à direita por e concluímos que $ade \in I$. Como $bde \in I$ temos que $dim_K e_1 rad\frac{KQ_{12}}{ker\phi} e_1 = 0$ e do corolário 2.5 segue que $\frac{KQ_{12}}{ker\phi} \cong A_{12}$ é derivadamente selvagem. Quando $\mu_2 \neq 0$ e $\mu_1 = 0$ multiplicando à esquerda por e obtemos que $ebc \in I$. Já tínhamos que $ea \in I$, então $dim_K e_3 rad\frac{KQ_{136}}{ker\varphi_6} e_3 = 0$ e do corolário 2.5 segue que $\frac{KQ_{136}}{ker\varphi_6} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem. Portanto, $L = 0$ e A é isomorfa à álgebra 1.7 da tabela 1.1.

Caso $5 - 2$:



Na subálgebra A_{12} temos que $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2 A_{12}}\right) e_1 \geq 1$ e $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2 A_{12}}\right) e_2 = 2$.

Estamos trabalhando com álgebras de dimensão finita que são derivadamente mansas, logo pelo Teorema 2.14 temos que $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2A_{12}}\right) e_1 = 1$. Como $c \in Q_1$ temos que $\overline{c} \in radA_{12} \backslash rad^2A_{12}$. Assim, uma presentação para A_{12} é dada abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_b & \longmapsto & \overline{b} \\ x_c & \longmapsto & \overline{c} \end{array}$$

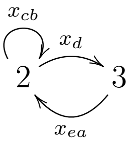
onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "x_b"] \arrow[r, "x_a"] & 2 \arrow[l, bend left, "x_c"] \end{tikzcd}$. Temos as duas possibilidades abaixo:

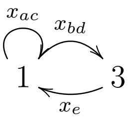
1. $\overline{de} \in radA_{12} \backslash rad^2A_{12}$. Do corolário 2.5 obtemos que $dim_K e_2 rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\phi} e_1 = 1$. Logo, $\overline{de} = \lambda \overline{c}$ com $\lambda \in K^*$. O que contradiz o fato que I é admissível.

2. $\overline{de} \in rad^2A_{12}$. O corolário 2.5 implica que $dim_K e_2 rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\phi} e_1 = 0$. Logo, $\overline{de} = 0$, ou seja, $de \in I$. Para que a álgebra $\frac{KQ_{12}}{ker\phi}$ seja derivadamente mansa, pelo corolário 2.5, é necessário que $\lambda_1 x_a x_c + \lambda_2 x_b x_c, \lambda_3 x_c x_a + \lambda_4 x_c x_b \in ker\phi$, com $\lambda_i \in K$ e $\lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3 \neq 0$. Então, $\lambda_1 ac + \lambda_2 bc, \lambda_3 ca + \lambda_4 cb \in I$, com $\lambda_i \in K$ e $\lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3 \neq 0$. Se $\lambda_1 \neq 0$, faremos uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $\lambda_1 a + \lambda_2 b$ e a por $\lambda_3 a + \lambda_4 b$. Com isso, podemos assumir que $bc, ca \in I$. Caso, $\lambda_1 = 0$ o raciocínio é análogo, por isso analisaremos apenas o caso $\lambda_1 \neq 0$. Do corolário 2.5 temos que $x_a x_c x_b \notin ker\phi$, ou seja, $acb \notin I$. Como $de, bc, ca \in I$ do Lema 3.2 segue que $\overline{cb} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$ e $\overline{ac} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$.

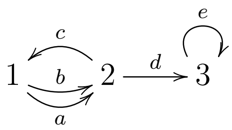
   Disto, do Lema 2.6 e do Teorema 2.14 concluímos que $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right) e_2 = 1$ e $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 1$. Como $\overline{cb} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$ e $bc \in I$ o Lema 2.5 aplicado a subálgebra A_{23} implica que $\overline{eb} \in rad^2A_{23}$. Já que $\overline{ac} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$ e $ca \in I$ do Lema 2.5 aplicado a subálgebra A_{13} concluímos que $\overline{ad} \in rad^2A_{13}$. Esses fatos juntamente com $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right) e_2 = 1$ e $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 1$ implicam que $\overline{ea} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$ e $\overline{bd} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Logo, temos presentação para as álgebras A_{23} e A_{13} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \theta : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \\ x_{cb} & \longmapsto & \overline{cb} \\ x_{ea} & \longmapsto & \overline{ea} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_e & \longmapsto & \overline{e} \\ x_{bd} & \longmapsto & \overline{bd} \\ x_{ac} & \longmapsto & \overline{ac} \end{array}$$

onde Q_{23} e Q_{13} são, respectivamente, 

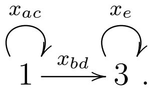
e 

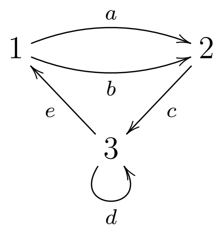
. Do fato que $bc, de \in I$ temos que $\{x_{ea}x_{cb}\}$ é uma base para $e_3\left(rad^2\frac{KQ_{23}}{ker\theta}\right)e_2$. Como $\frac{KQ_{23}}{ker\theta} \cong A_{23}$ concluímos que $\{\overline{eacb}\}$ é uma base para $e_3rad^2A_{23}e_2$. Desse último fato e do fato que $\overline{eb} \in rad^2A_{23}$ temos que $\overline{eb} = \mu\overline{eacb}$, ou seja, $eb - \mu eacb \in I$. Podemos fazer uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $b - \mu acb = \tilde{b}$. Após a mudança, bc torna-se $(e_1 + \mu ac)\tilde{b}c$. Como $(e_1 + \mu ac)$ é invertível temos que $\tilde{b}c \in I$. Então, sempre podemos assumir que $eb, bc, ca, de \in I$. Como $ca, de \in I$ temos que $\{x_{ac}x_{bd}\}$ é uma base para $e_1\left(rad^2\frac{KQ_{13}}{ker\varphi}\right)e_3$. Já que $\frac{KQ_{13}}{ker\varphi} \cong A_{13}$ concluímos que $\{\overline{acbd}\}$ é uma base para $e_1rad^2A_{13}e_3$. Desse último fato e do fato que $\overline{ad} \in rad^2A_{13}$ segue que $\overline{ad} = \lambda\overline{acbd}$, ou seja, $ad - \lambda acbd \in I$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca d por $d - \lambda cbd = \tilde{d}$ vemos que $a\tilde{d} \in I$ e que de torna-se $(e_3 + \lambda cb)\tilde{d}e$. Do fato que $(e_3 + \lambda cb)$ é invertível segue que $\tilde{d}e \in I$. Portanto, a menos de mudança no conjunto de geradores podemos assumir que $ad, de, ca, bc, eb \in I$. Do corolário 2.6 aplicado a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\theta}$ segue que $x_{ea}x_{cb}x_d \notin ker\theta$, ou seja, $eacbd \notin I$. Temos que $J =< de, ca, bc, eb, ad >\subseteq I$. A álgebra A é isomorfa a $\frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. É fácil ver que B é gentle e isomorfa à álgebra A.2 da tabela A.5. Como $eabcd$ é o único caminho maximal de (Q, J) e ele não pertence ao ideal I segue do Lema 3.5 que $L = 0$.

Caso $5 - 3$: 

Do corolário 2.3 segue que $e^2 \in I$. O subquiver pleno cujo conjunto de vértices é $\{1, 2\}$ é convexo. Então, pelo Teorema 2.14, a menos de trocarmos a com b, podemos assumir que $I \cap (e_1 + e_2)KQ(e_1 + e_2) =< bc, ca >$. Logo, $ac \notin I$. Como $ac \notin I$ e $bc \in I$, do Lema 3.2 segue que $\overline{ac} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Por causa do Lema 2.6 e do Teorema 2.14 concluímos que $dim_K e_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 1$. Se $\overline{ad} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$, como $\overline{ac} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$ e $ca \in I$, o Lema 2.5 implica que A_{13} é derivadamente selvagem. Logo, $\overline{ad} \in rad^2A_{13}$. Esse fato junto com $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 1$ mostra que $\overline{bd} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Com isso, temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{12} \\ x_{ac} & \longmapsto & \overline{ac} \\ x_{bd} & \longmapsto & \overline{bd} \\ x_e & \longmapsto & \overline{e} \end{array}$$

onde Q_{13} é  . Para que a álgebra $\frac{KQ_{13}}{ker\phi}$ seja derivadamente mansa, pelo corolário 2.7, é necessário que $x_{ac}x_{bd}x_e \notin ker\phi$, isto é, $acbde \notin I$. Como $\overline{ad} \in rad^2A_{13}$ e $e^2, ca \in I$ segue que $\overline{ad} = \lambda_1\overline{acbd} + \lambda_2\overline{bde} + \lambda_3\overline{acbde}$, ou seja, $ad - \lambda_1 acbd - \lambda_2 bde - \lambda_3 acbde \in I$. Se $\lambda_2 \neq 0$ multiplicando a expressão $ad - \lambda_1 acbd - \lambda_2 bde - \lambda_3 acbde$ por ac à esquerda concluímos que $acbde \in I$, e isso não pode ocorrer. Portanto, $\lambda_2 = 0$ e $ad - \lambda_1 acbd - \lambda_3 acbde \in I$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca d com $\tilde{d} = d - \lambda_1 cbd - \lambda_3 cbde$ temos que $a\tilde{d} \in I$. Então, a menos de mudança do conjunto de geradores, temos que $ad \in I$. Portanto, $J =< ca, bc, ad, e^2 >\subseteq I$. A álgebra A é isomorfa a $\frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. É fácil ver que B é gentle e isomorfa à álgebra A.3 da tabela A.5. O único caminho maximal de (Q, J) é $acbde$, o qual não pertence a I. Logo, segue do Lema 3.5 que $L = 0$.

Caso $5 - 4$: 

O Corolário 2.3 implica que $d^2 \in I$. Do Lema 2.6 e do Teorema 2.14 segue que $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right) e_2 = 1$. Esse fato implica que apenas uma das seguintes situações ocorre: $\overline{eb} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$ ou $\overline{ea} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\overline{eb} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$. Com isso temos uma presentação para a subálgebra A_{23} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_c & \longmapsto & \overline{c} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \\ x_{eb} & \longmapsto & \overline{eb} \end{array}$$

onde Q_{23} é $$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend left, "x_c"] & 3 \arrow[l, bend left, "x_{eb}"] \arrow[loop above, "x_d"] \end{tikzcd}$$.

Do Teorema 2.14 segue que para a subálgebra A_{12} ser derivadamente mansa e de dimensão finita é necessário que $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2A_{12}}\right) e_1$ seja igual a 0 ou 1.

Caso seja igual a 0 temos que $ce, cde \in I$. Como $ce, cde \in I$, concluímos que $dim_K e_2 \left(\frac{KQ_{23}}{ker\phi}\right) e_2 = 0$. Logo, o corolário 2.6 implica que $\frac{KQ_{23}}{ker\phi} \cong A_{23}$ é derivadamente selvagem.

Se $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2A_{12}}\right) e_1 = 1$ temos as possibilidades abaixo:

1. $\overline{ce} \in radA_{12} \backslash rad^2A_{12}$. Logo, temos uma presentação para a álgebra A_{12} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \theta : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\ x_{ce} & \longmapsto & \overline{ce} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_b & \longmapsto & \overline{b} \end{array}$$

onde Q_{12} é $$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "x_a"] \arrow[r, bend right=50, "x_b"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_{ce}"'] \end{tikzcd}$$. Para a álgebra $\frac{KQ_{12}}{ker\theta} \cong A_{12}$ ser derivadamente mansa, pelo corolário 2.5, é necessário que $dim_K e_2 \left(rad\frac{KQ_{12}}{ker\theta}\right) e_1 = 1$. Logo, $\overline{cde} + \lambda\overline{ce} = 0$, isto é, $cde + \lambda ce \in I$. Temos dois casos para considerar:

1.1. $\lambda = 0$. Portanto, $cde \in I$. Do corolário 2.6 aplicado a subálgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\phi}$ segue que $x_{eb}x_c \in ker\phi$, ou seja, $ebc \in I$. Se $bc \notin I$, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, podemos construir o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \tilde{P}_3^{r_9} \arrow[r, "M(l_8)bc"] & \tilde{P}_1^{r_8} \arrow[dr, "M(l_7)e"] & & \\
\tilde{P}_3^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)d"] & \tilde{P}_3^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)d"] & \tilde{P}_3^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)d"] & \tilde{P}_3^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)d"] & \tilde{P}_3^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)d"] & \tilde{P}_3^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)d"] & \tilde{P}_3^{r_7} \arrow[r, "M(l_9)cd"] & \tilde{P}_2^{r_{10}}
\end{tikzcd}$$

O funtor $-\otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem. Caso $bc \in I$, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, construímos o complexo M de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \tilde{P}_1^{r_8} \arrow[dr, "M(l_7)e"] & & & \\
\tilde{P}_3^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)d"] & \tilde{P}_3^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)d"] & \tilde{P}_3^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)d"] & \tilde{P}_3^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)d"] & \tilde{P}_3^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)d"] & \tilde{P}_3^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)d"] & \tilde{P}_3^{r_7} \arrow[r, "M(l_9)cd"] & \tilde{P}_2^{r_{10}} \arrow[r, "M(l_8)b"] & \tilde{P}_1^{r_9}
\end{tikzcd}$$

O funtor $-\otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem.

1.2. $\lambda \neq 0$. Podemos fazer uma mudança no conjunto de geradores que troca e por $\tilde{e} = \lambda^{-1}de + e$. Então, podemos supor que $ce \in I$ e esse caso torna-se análogo ao abaixo.

2. $\overline{ce} \in rad^2 A_{12}$. Como $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2 A_{12}}\right) e_1 = 1$ e $\overline{ce} \in rad^2 A_{12}$ segue que $\overline{cde} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$. Assim, temos uma presentação para a subálgebra A_{12} como abaixo

$$\begin{array}{rcl}
\varphi : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\
x_{cde} & \longmapsto & \overline{cde} \\
x_a & \longmapsto & \overline{a} \\
x_b & \longmapsto & \overline{b}
\end{array}$$

onde Q_{12} é

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "x_a"] \arrow[r, bend right, "x_b"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_{cde}"']
\end{tikzcd}$$

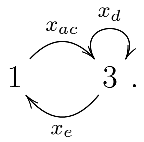
. Devido ao corolário 2.5 temos que $dim_K e_2 rad^2 A_{12} e_1 = 0$. Portanto, $\overline{ce} = 0$, ou seja, $ce \in I$. Para a subálgebra A_{23} ser derivadamente mansa, pelo corolário 2.6, é necessário que $dim_K e_2 rad^2 A_{23} e_2 = 1$. Como $ce \in I$ obtemos que $\overline{cdeb} \neq 0$, ou seja, $cdeb \notin I$. O corolário 2.6 aplicado a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\phi}$

implica que $x_{eb}x_c \in ker\phi$, ou seja, $ebc \in I$. Devido aos fatos que $\frac{KQ_{23}}{ker\phi} \cong A_{23}$ e $ce, d^2, ebc \in I$ temos que $\{\overline{eb}, \overline{deb}\}$ é uma base do espaço vetorial $e_3radA_{23}e_2$. Como $\overline{ea} \in e_3radA_{23}e_1$ concluímos que $\overline{ea} = \lambda_1\overline{eb} + \lambda_2\overline{deb}$, ou seja, $ea - \lambda_1 eb - \lambda_2 deb \in I$. Se $\lambda_2 \neq 0$, multiplicando a expressão anterior por c à esquerda e usando o fato que $ce \in I$ temos que $cdeb \in I$, absurdo. Logo, $\lambda_2 = 0$ e $ea - \lambda_1 eb \in I$. Assim, fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca a por $a - \lambda_1 b$ podemos assumir que $d^2, ce, ea \in I$.

Devido ao Lema 2.6 e ao Teorema 2.14 temos que $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right) e_3 = 1$. Com isso, temos os casos abaixo:

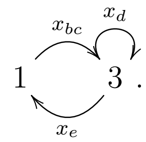
2.1. $\overline{ac} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Logo, temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \psi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \\ x_e & \longmapsto & \overline{e} \\ x_{ac} & \longmapsto & \overline{ac} \end{array}$$

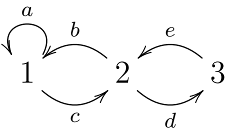
onde Q_{13} é . Como $ace \in I$, do corolário 2.6 concluímos que $x_{ac}x_dx_e \notin ker\psi$, ou seja, $acde \notin I$. Devido aos fatos que $\frac{KQ_{13}}{ker\psi} \cong A_{13}$ e $ce, d^2, ea \in I$ temos que $\{\overline{ac}, \overline{acd}\}$ é uma base para o espaço vetorial $e_1radA_{13}e_3$. Como $\overline{bc} \in e_1radA_{13}e_3$ temos que $\overline{bc} = \lambda_1\overline{ac} + \lambda_2\overline{acd}$, ou seja, $bc - \lambda_1 ac - \lambda_2 acd \in I$. Caso $\lambda_2 \neq 0$ multiplicando à direita por e a expressão $bc - \lambda_1 ac - \lambda_2 acd$ concluímos que $acde \in I$, absurdo. Logo, $\lambda_2 = 0$ e $bc - \lambda_1 ac \in I$. Assim, fazendo um mudança no conjunto de geradores que troca b por $\tilde{b} = b + \lambda_1 a$ podemos assumir que $\tilde{b}c \in I$. Então, a menos de mudança do conjunto de geradores assumiremos que $bc, ea, ce, d^2 \in I$. Portanto, $J =< ce, ea, bc, d^2 >\subseteq I$. A álgebra A é isomorfa a $\frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.4 da tabela A.5. O corolário 2.5 aplicado a álgebra $\frac{KQ_{12}}{ker\varphi}$ implica que $x_ax_{cde}x_b \notin ker\varphi$. Logo, $\overline{acdeb} \neq 0$, ou seja, $acdeb \notin I$. O caminho $acdeb$ é o único caminho maximal de (Q, J) e ele não pertence a I. Então, segue do Lema 3.5 que $L = 0$.

2.2. $\overline{ac} \in rad^2A_{13}$. Como $dim_K e_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 1$ temos que $\overline{bc} \in radA_{13}\backslash rad^2A_{13}$. Logo, temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \nu : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \\ x_e & \longmapsto & \overline{e} \\ x_{bc} & \longmapsto & \overline{bc} \end{array}$$

onde Q_{13} é 

. Como $bce \in I$, do corolário 2.6, concluímos que $x_{bc}x_dx_e \notin ker\nu$ e $x_ex_{bc} \in I$, ou seja, $bcde \notin I$ e $ebc \in I$. Devido aos fatos que $\frac{KQ_{13}}{ker\nu} \cong A_{13}$ e $ce, d^2, ebc \in I$ temos que $\{\overline{bcd}\}$ é uma base para $e_1rad^2A_{13}e_3$. Como $\overline{ac} \in rad^2A_{13}$, logo $\overline{ac} = \lambda\overline{bcd}$, ou seja, $ac - \lambda bcd \in I$. Se $\lambda \neq 0$, multiplicando a expressão anterior à direita por e obtemos que $bcde \in I$, um absurdo. Portanto, $\lambda = 0$ e $ac \in I$. Para que a álgebra $\frac{KQ_{12}}{ker\varphi} \cong A_{12}$ seja derivadamente mansa é necessário que $\lambda_1x_ax_{cde} + \lambda_2x_bx_{cde}, \lambda_3x_{cde}x_a + \lambda_4x_{cde}x_b \in ker\varphi$ com $\lambda_i \in K$ e $\lambda_1\lambda_4 - \lambda_3\lambda_2 \neq 0$, ou seja, $\lambda_1acde + \lambda_2bcde, \lambda_3cdea + \lambda_4cdeb \in I$ com $\lambda_i \in K$ e $\lambda_1\lambda_4 - \lambda_3\lambda_2 \neq 0$. Como $acde, cdea \in I$ e $bcde, cdeb \notin I$ temos que $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$, um absurdo. Portanto, A_{12} é derivadamente selvagem.

Caso $5 - 5$: 

Para que A_{12} seja derivadamente mansa de dimensão finita, pelo Teorema 2.14, é necessário que $\overline{de} \in rad^2A_{12}$. Com isso, temos uma presentação para A_{12} como abaixo

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\ x_c & \longmapsto & \overline{c} \\ x_b & \longmapsto & \overline{b} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \end{array}$$

onde Q_{12} é
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_a"] \arrow[r, bend right, "x_c"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_b"'] \end{tikzcd}$$
. Do corolário 2.3 temos que $a^2 \in I$. Para que a álgebra $\frac{KQ_{12}}{ker\phi}$ seja derivadamente mansa, pelo corolário 2.6, é necessário que $x_bx_c - \mu x_bx_ax_c, x_cx_b \in ker\phi$, ou seja, $bc - \mu bac, cb \in I$. Então, fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $\tilde{b} = b(e_1 - \mu a)$ temos que $\tilde{b}c \in I$ e que cb torna-se $c\tilde{b}(e_1 + \mu a)$. Como $e_1 + \mu a$ é invertível obtemos que $c\tilde{b} \in I$. Assim, a menos de mudança de geradores podemos assumir que $bc, cb, a^2 \in I$. Logo, do corolário 2.6 segue que $x_bx_ax_c \notin ker\phi$, isto é, $bac \notin I$. Do corolário 2.6 temos que $dim_K e_2 \left(rad\frac{KQ_{12}}{ker\phi} \right) e_2 = 1$. Devido aos fatos que $dim_K e_2 \left(rad\frac{KQ_{12}}{ker\phi} \right) e_2 = 1$, $\frac{KQ_{12}}{ker\phi} \cong A_{12}$ e $bac \notin I$ concluímos que $\{\overline{bac}\}$ é uma base para $e_2 rad A_{12} e_2$. Como $\overline{de} \in rad^2 A_{12}$ temos que $\overline{de} = \lambda \overline{bac}$, ou seja, $de - \lambda bac \in I$. Temos dois casos a considerar:

1. $\lambda \neq 0$. Dos fatos que $bc \in I$ e $\overline{bac} \in rad^2 A_{23}$ temos uma presentação para A_{23} abaixo

$$\begin{aligned} \theta : KQ_{23} &\longrightarrow A_{23} \\ x_d &\longmapsto \overline{d} \\ x_e &\longmapsto \overline{e} \end{aligned}$$

onde Q_{23} é
$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "x_d"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_e"'] \end{tikzcd}$$
. Como $de \notin I$, para que $\frac{KQ_{23}}{ker\theta}$ seja derivadamente mansa, pelo corolário 2.4, é necessário que $x_ex_d \in ker\theta$, ou seja, $ed \in I$.

Se algum dos caminhos eb ou cd pertencer a I a álgebra A será derivadamente selvagem, pois com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16 podemos construir, respectivamente, os complexos N e M de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo

N :

$$\begin{tikzcd} & & & & & & & \tilde{P}_3^{r_{10}} & \\ \tilde{P}_2^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)c"] & \tilde{P}_1^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)b"] & \tilde{P}_2^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)c"] & \tilde{P}_1^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)b"] & \tilde{P}_2^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)c"] & \tilde{P}_1^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)b"] & \tilde{P}_2^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)c"] \arrow[ur, "M(l_9)e"] & \tilde{P}_1^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)b"] & \tilde{P}_2^{r_9} \end{tikzcd}$$

M :

$$\begin{tikzcd} & & & & & \tilde{P}_3^{r_{10}} \arrow[dr, "M(l_9)d"] & & & \\ \tilde{P}_2^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)c"] & \tilde{P}_1^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)b"] & \tilde{P}_2^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)c"] & \tilde{P}_1^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)b"] & \tilde{P}_2^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)c"] & \tilde{P}_1^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)b"] & \tilde{P}_2^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)c"] & \tilde{P}_1^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)b"] & \tilde{P}_2^{r_9} \end{tikzcd}$$

Os funtores $-\otimes_{K<x,y>}N : finK < x,y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ e $-\otimes_{K<x,y>}M : finK < x,y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preservam indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem.

Como $eb, cd \notin I$ do Lema 3.1 segue que $eb, cd \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$. Logo, temos uma presentação para A_{13} como abaixo

$$\begin{array}{rcl} \varphi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_{eb} & \longmapsto & \overline{eb} \\ x_{cd} & \longmapsto & \overline{cd} \end{array}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_a"] \arrow[r, bend right, "x_{cd}"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_{eb}"'] \end{tikzcd}$. Como $de - \lambda bac, ed \in I$ multiplicando $de - \lambda bac$ por e à esquerda concluímos que $ebac \in I$. Logo, $ebacd \in I$. Do fato que $bc \in I$ segue que $ebcd \in I$. Portanto, $dim_K e_3 rad^2 A_{13} e_3 = 0$ e do corolário 2.6 obtemos que $\frac{KQ_{13}}{ker\varphi} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem.

2. $\lambda = 0$. Sabemos que $bc, cb, a^2, de \in I$. Como $bac \notin I$ e $de, bc \in I$ do Lema 3.2 segue que $\overline{bac} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Então, temos uma presentação para A_{23} como abaixo

$$\begin{array}{rcl} \nu : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_{bac} & \longmapsto & \overline{bac} \\ x_e & \longmapsto & \overline{e} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[loop above, "x_{bac}"] \arrow[r, bend right, "x_d"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_e"'] \end{tikzcd}$. Para que a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\nu}$ seja derivadamente mansa, pelo corolário 2.6, é necessário que $x_e x_d + \lambda x_e x_{bac} x_d \in ker\nu$, isto é, $ed + \lambda ebacd \in I$. Fazendo a mudança no conjunto de geradores que troca d por $\tilde{d} = (e_2 + \lambda bac)d$ concluímos que $e\tilde{d} \in I$ e que de torna-se $(e_2 - \lambda bac)\tilde{d}e$. Como $(e_2 - \lambda bac)$ é invertível temos que $\tilde{d}e \in I$. Assim, a menos de mudança no conjunto de geradores podemos assumir que $de, ed, a^2, bc, cb \in I$. Então, o corolário 2.6 aplicado a $\frac{KQ_{23}}{ker\nu}$ implica que $x_e x_{bac} x_d \notin ker\nu$, isto é, $ebacd \notin I$. Temos que,

$J =< a^2, bc, cb, de, ed >\subseteq I$. A álgebra A é isomorfa a $\frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.5 da tabela A.5. O único caminho maximal de (Q, J) é $ebacd$ que não pertence a I. Então, do Lema 3.5 segue que $L = 0$.

$$\textbf{Caso } 5-6: \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r, bend right, "c"'] & 2 \arrow[l, bend right, "b"'] \arrow[r, "d"] & 3 \arrow[loop above, "e"] \end{tikzcd}$$

O Corolário 2.3 implica que $e^2 \in I$. O subquiver pleno cujos vértices são 1 e 2 é convexo e igual a $Q8$ do Teorema 2.14. Logo, sem perda de generalidade podemos assumir que $a^2, bc, cb \in I$ e $bac \notin I$. Como $bac \notin I$ e $bc \in I$ do Lema 3.2 segue que $\overline{bac} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$. Portanto, temos uma presentação para A_{23} como abaixo

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_{bac} & \longmapsto & \overline{bac} \\ x_e & \longmapsto & \overline{e} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[loop above, "x_{bac}"] \arrow[r, "x_d"'] & 3 \arrow[loop above, "x_e"] \end{tikzcd}$. Para que a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\phi} \cong A_{23}$ seja derivadamente mansa, pelo corolário 2.7, é necessário que $x_{bac}x_dx_e \notin ker\phi$, isto é, $bacde \notin I$. Temos que, $J =< a^2, bc, cb, e^2 >\subseteq I$. A álgebra A é isomorfa a $\frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. É fácil ver que B é gentle e isomorfa à álgebra A.6 da tabela A.5. O único caminho maximal de (Q, J) é $bacde$ o qual não pode pertencer a I. Assim, segue do Lema 3.5 que $L = 0$.

$$\textbf{Caso } 5-7: \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[rr, "b"] & & 2 \arrow[loop above, "c"] \arrow[dl, "d"] \\ & 3 \arrow[ul, "e"] & \end{tikzcd}$$

Do corolário 2.3 segue que $a^2, c^2 \in I$. Se $de \notin I$ o Lema 3.1 implica que $de \in radA_{12} \backslash rad^2A_{12}$. Logo, $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2A_{12}}\right) e_1 = 1$. Porém, para que a subálgebra A_{12} seja derivadamente mansa de dimensão finita, pelo Teorema 2.14, é necessário que $dim_K e_2 \left(\frac{radA_{12}}{rad^2A_{12}}\right) e_1 = 0$. Logo, $de \in I$. O Lema 2.5 implica que $ea \notin I$. O caminho

eab não pertence a I, senão com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16 poderíamos construir o complexo N de $K<x,y>-A$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \tilde{P}_2^{r_{10}} \arrow[dr, "M(l_9)b"] & & & \\
\tilde{P}_1^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)a"] & \tilde{P}_1^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)a"] & \tilde{P}_1^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)a"] & \tilde{P}_1^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)a"] & \tilde{P}_1^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)a"] & \tilde{P}_1^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)a"] & \tilde{P}_1^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)ea"] & \tilde{P}_3^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)d"] & \tilde{P}_2^{r_9}
\end{tikzcd}$$

O funtor $-\otimes_{K<x,y>} N : finK<x,y> \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem.

Devido ao fato que $eab \notin I$ e ao Teorema 2.14 temos que $dim_K e_3\left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right)e_2 = 1$. Logo, temos as possibilidades abaixo:

1. $\overline{eb} \in rad^2A_{23}$. Como $dim_K e_3\left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right)e_2 = 1$ temos que $\overline{eab} \in radA_{23}\backslash rad^2A_{23}$. Então, temos uma presentação para A_{23} como abaixo

$$\begin{array}{rcl}
\phi : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\
x_{eab} & \longmapsto & \overline{eab} \\
x_c & \longmapsto & \overline{c} \\
x_d & \longmapsto & \overline{d}
\end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[loop above, "x_c"] \arrow[r, bend right, "x_d"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_{eab}"'] \end{tikzcd}$. Para a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\phi} \cong A_{23}$ ser derivadamente mansa, pelo corolário 2.6, é necessário que $x_{eab}x_d+\lambda x_{eab}x_cx_d \in ker\phi$, ou seja, $eabd+\lambda eabcd \in I$. Então, fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $b(e_2+\lambda c)$ podemos assumir que $eabd, de, a^2, c^2 \in I$. O Lema 2.5 implica que $x_{eab}x_c \notin ker\phi$, ou seja, $eabc \notin I$. O corolário 2.6 implica que $dim_K e_3\left(rad^2\frac{KQ_{23}}{ker\phi}\right)e_2 = 1$. Logo, $\{\overline{eabc}\}$ é uma base para $e_3rad^2A_{23}e_2$. Como $\overline{eb} \in e_3rad^2A_{23}e_2$ temos que $\overline{eb} = \mu\overline{eabc}$, ou seja, $eb-\mu eabc \in I$, com $\mu \in K$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $\tilde{b} = b-\mu abc$ concluímos que $e\tilde{b} \in I$. A relação $eabd$ torna-se $ea(\tilde{b}+\mu a\tilde{b}c)d = ea\tilde{b}d$, pois $a^2 \in I$. Portanto, a menos de mudança do conjunto de geradores, podemos assumir que $eb, eabd, de, a^2, c^2 \in I$. O corolário 2.6 implica que $x_{eab}x_cx_d \notin ker\phi$, ou seja, $eabcd \notin I$. Logo, $bcd \notin I$. Devido ao fato que $bcd \notin I$ e ao Teorema 2.14 segue que $dim_K e_1\left(\frac{radA_{13}}{rad^2A_{13}}\right)e_3 = 1$. Assim, temos os casos abaixo:

1.1 $\overline{bcd} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$. Então, temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{aligned} \varphi : KQ_{13} &\longrightarrow A_{13} \\ x_{bcd} &\longmapsto \overline{bcd} \\ x_c &\longmapsto \overline{c} \\ x_a &\longmapsto \overline{a} \end{aligned}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_a"] \arrow[r, bend right, "x_{bcd}"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_e"'] \end{tikzcd}$. O Lema 2.5 implica que $x_a x_{bcd} \notin ker\varphi$, ou seja, $abcd \notin I$. Do corolário 2.6 temos que $dim_K e_1 \left(rad \frac{KQ_{13}}{ker\varphi} \right) e_3 = 2$. Como $\frac{KQ_{13}}{ker\varphi} \cong A_{13}$, $dim_K e_1 \left(rad \frac{KQ_{13}}{ker\varphi} \right) e_3 = 2$, $eb, de, a^2 \in I$ e $abcd \notin I$ temos que o conjunto $\{\overline{bcd}, \overline{abcd}\}$ é uma base para $e_1 radA_{13} e_3$. Já que $\overline{bd} \in e_1 radA_{13} e_3$ segue que $\overline{bd} = \mu_1 \overline{bcd} + \mu_2 \overline{abcd}$, isto é, $bd - \mu_1 bcd - \mu_2 abcd \in I$, com $\mu_i \in K$. Se $\mu_2 \neq 0$, multiplicando a expressão anterior por e à esquerda, do fato que $eb \in I$, concluímos que $eabcd \in I$. Temos que $ebcd, eabcd \in I$, logo $dim_K e_3 radA_{13} e_3 = 0$ e do corolário 2.6 segue que $\frac{KQ_{13}}{ker\varphi} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem. Portanto, $\mu_2 = 0$ e $bd - \mu_1 bcd \in I$. Caso $\mu_1 \neq 0$, multiplicando à esquerda por ea e usando o fato que $eabd \in I$ concluímos que $eabcd \in I$. Como $ebcd, eabcd \in I$ obtemos que $dim_K e_3 \left(rad \frac{KQ_{13}}{ker\varphi} \right) e_3 = 0$. Assim, o corolário 2.6 implica que $\frac{KQ_{13}}{ker\varphi} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem. Logo, $\mu_1 = 0$ e $bd \in I$. Temos que $J =< a^2, c^2, de, eb, bd > \subseteq I$. A álgebra A é isomorfa a $\frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2 B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.7 da tabela A.5. O único caminho maximal de (Q, J) é $eabcd$ o qual não pertence a I. Portanto, do Lema 3.5 segue que $L = 0$.

1.2 $\overline{bcd} \in rad^2 A_{13}$. Como $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}} \right) e_3 = 1$ temos que $\overline{bd} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$. Então, temos uma presentação para A_{13} como abaixo:

$$\begin{aligned} \theta : KQ_{13} &\longrightarrow A_{13} \\ x_{bd} &\longmapsto \overline{bd} \\ x_c &\longmapsto \overline{c} \\ x_a &\longmapsto \overline{a} \end{aligned}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_a"] \arrow[r, bend right, "x_{bd}"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_e"'] \end{tikzcd}$. Sabemos que $eabd, eb \in I$, portanto $dim_K e_3 \left(rad\frac{KQ_{13}}{ker\theta}\right) e_3 = 0$ e o corolário 2.6 implica que $\frac{KQ_{13}}{ker\theta} \cong A_{13}$ é derivadamente selvagem.

2. $\overline{eb} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Temos uma presentação para A_{23} como abaixo:

$$\begin{aligned} \nu : KQ_{23} &\longrightarrow A_{23} \\ x_d &\longmapsto \overline{d} \\ x_c &\longmapsto \overline{c} \\ x_{eb} &\longmapsto \overline{eb} \end{aligned}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[loop above, "x_c"] \arrow[r, bend right, "x_d"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_{eb}"'] \end{tikzcd}$. Para que a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\nu}$ seja derivadamente mansa, pelo corolário 2.6, é necessário que $x_{eb}x_d - \lambda x_{eb}x_cx_d \in ker\nu$, isto é, $ebd - \lambda ebcd \in I$, com $\lambda \in K$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $b(e_2 - \lambda c)$ temos que $e\tilde{b}d \in I$. Então, a menos de mudança no conjunto de geradores podemos assumir que $de, a^2, c^2, ebd \in I$. O Lema 2.6 implica que $x_{eb}x_c \notin ker\nu$, ou seja, $ebc \notin I$. Do corolário 2.6 concluímos que $dim_K e_3 \left(rad\frac{KQ_{23}}{ker\nu}\right) e_2 = 2$. Como $\frac{KQ_{23}}{ker\nu} \cong A_{23}$, $dim_K e_3 \left(rad\frac{KQ_{23}}{ker\nu}\right) e_2 = 2$, $de, a^2, c^2, ebd \in I$ e $ebc \notin I$ temos que o conjunto $\{\overline{eb}, \overline{ebc}\}$ é uma base para $e_3radA_{23}e_2$. Já que $\overline{eab} \in e_3radA_{23}e_2$ obtemos que $\overline{eab} = \lambda_1\overline{eb} + \lambda_2\overline{ebc}$, isto é, $eab - \lambda_1 eb - \lambda_2 ebc \in I$. Temos as possibilidades abaixo:

2.1 $\lambda_1 = 0$. Logo, $\lambda_2 \neq 0$, pois, $eab \notin I$. Nesse caso $eab - \lambda_2 ebc \in I$. Como, $c^2 \in I$, multiplicando c à direita na expressão anterior temos que $eabc \in I$. O Lema 2.5 implica que $ea, bc \notin I$. Como $de \in I$, pelo Teorema 2.14, temos que $I \cap (e_1 + e_2)KQ(e_1 + e_2) =< a^2, c^2 >$. Então, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16 podemos construir o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd} & & & & \tilde{P}_2^{r9} \arrow[r, "M(l_8)c"] & \tilde{P}_2^{r8} \arrow[dr, "M(l_7)bc"] & & \\ \tilde{P}_1^{r1} \arrow[r, "M(l_1)a"] & \tilde{P}_1^{r2} \arrow[r, "M(l_2)a"] & \tilde{P}_1^{r3} \arrow[r, "M(l_3)a"] & \tilde{P}_1^{r4} \arrow[r, "M(l_4)a"] & \tilde{P}_1^{r5} \arrow[r, "M(l_5)a"] & \tilde{P}_1^{r6} \arrow[r, "M(l_6)a"] & \tilde{P}_1^{r7} \arrow[r, "M(l_9)ea"] & \tilde{P}_3^{r10} \end{tikzcd}$$

O funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem.

2.2 $\lambda_1 \neq 0$. Podemos fazer uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $\tilde{b} = b - \lambda_1^{-1}ab + \lambda_1^{-1}\lambda_2 bc$ assim, $e\tilde{b} \in I$. A menos de mudança do conjunto de geradores esse caso é análogo ao caso 1.

$$\textbf{Caso } 5-8: \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r, "b"] & 2 \arrow[loop above, "c"] \arrow[r, "d"] & 3 \arrow[loop above, "e"] \end{tikzcd}$$

Do Corolário 2.3 concluímos que $a^2, c^2, e^2 \in I$. Os subquivers plenos cujos conjuntos de vértices são, respectivamente, $\{1,2\}$ e $\{2,3\}$ são convexos. Assim, pelo Teorema 2.14 podemos assumir, respectivamente, que $I \cap (e_1+e_2)KQ(e_1+e_2) =< a^2, c^2 >$ e $I \cap (e_2+e_3)KQ(e_2+e_3) =< c^2, e^2 >$. Devido ao Teorema 2.14 a subálgebra A_{13} será derivadamente mansa se $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3 \in \{0,1\}$. Se a dimensão é 0 temos que $a^2, c^2, e^2, bd, bcd \in I$. O Lema 2.5 implica que o caminho bc não pertence a I. Nesse caso a álgebra A é derivadamente selvagem pois, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16 podemos construir o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd} \tilde{P}_2^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)c"] & \tilde{P}_2^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)c"] & \tilde{P}_2^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)c"] & \tilde{P}_2^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)c"] & \tilde{P}_2^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)c"] & \tilde{P}_2^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)c"] & \tilde{P}_2^{r_7} \arrow[r, "M(l_9)bc"] & \tilde{P}_1^{r_{10}} \\ & & & & & \tilde{P}_3^{r_8} \arrow[ur, "M(l_7)d"'] \arrow[dr, "M(l_8)e"] & & \\ & & & & & & \tilde{P}_3^{r_9} & \end{tikzcd}$$

O funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos.

Quando $dim_K e_1 \left(\frac{radA_{13}}{rad^2 A_{13}}\right) e_3 = 1$ temos as possibilidades abaixo:

1. $\overline{bd} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$ e $\overline{bcd} \in rad^2 A_{13}$. Portanto, temos uma presentação para A_{13} abaixo

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_e & \longmapsto & \overline{e} \\ x_{bd} & \longmapsto & \overline{bd} \end{array}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_a"] \arrow[r, "x_{bd}"] & 3 \arrow[loop above, "x_e"] \end{tikzcd}$. Devido aos fatos que $a^2, e^2 \in I$ e $\frac{KQ_{13}}{ker\phi}$ é derivadamente mansa, o corolário 2.7, implica que $\{\overline{x_a x_{bd}}, \overline{x_{bd} x_e}, \overline{x_a x_{bd} x_e}\}$ é uma base para $e_1 \left(rad^2 \frac{KQ_{13}}{ker\phi}\right) e_3$. Já que $\frac{KQ_{13}}{ker\phi} \cong A_{13}$ temos que $\{\overline{abd}, \overline{bde}, \overline{abde}\}$ é uma base para $e_1 rad^2 A_{13} e_3$. Como $\overline{bcd} \in rad^2 A_{13}$ temos que $\overline{bcd} = \lambda_1 \overline{abd} + \lambda_2 \overline{bde} + \lambda_3 \overline{abde}$, ou seja, $bcd - \lambda_1 abd - \lambda_2 bde - \lambda_3 abde \in I$. Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ não são simultaneamente nulos podemos multiplicar a expressão anterior por a à esquerda e por e à direita. Com isso, concluímos que $abcde \in I$. O Lema 2.5 implica que $ab \notin I$. Como $I \cap (e_2 + e_3) KQ (e_2 + e_3) =< c^2, e^2 >$ temos que $cde \notin I$. Além disso, sabemos que $I \cap (e_1 + e_2) KQ (e_1 + e_2) =< a^2, c^2 >$. Então, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16 podemos construir o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & & \tilde{P}_1^{r_{10}} & & \\
\tilde{P}_3^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)e"] & \tilde{P}_3^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)e"] & \tilde{P}_3^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)e"] & \tilde{P}_3^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)e"] & \tilde{P}_3^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)e"] & \tilde{P}_3^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)cde"] & \tilde{P}_2^{r_7} \arrow[ru, "M(l_9)ab"] \arrow[r, "M(l_7)c"] & \tilde{P}_2^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)c"] & \tilde{P}_2^{r_9}
\end{tikzcd}$$

O funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem. Caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ concluímos que $bcd \in I$. No complexo acima basta trocar ab por b para obtermos que A é derivadamente selvagem.

2. $\overline{bcd} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$ e $\overline{bd} \in rad^2 A_{13}$. Portanto, temos uma presentação para A_{13} abaixo

$$\begin{array}{rcl}
\varphi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\
x_a & \longmapsto & \overline{a} \\
x_e & \longmapsto & \overline{e} \\
x_{bcd} & \longmapsto & \overline{bcd}
\end{array}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_a"] \arrow[r, "x_{bcd}"] & 3 \arrow[loop above, "x_e"] \end{tikzcd}$. O corolário 2.7 implica que $x_a x_{bcd} x_e \notin ker\varphi$, isto é, $abcde \notin I$. Devido aos fatos que $a^2, e^2 \in I$ e $\frac{KQ_{13}}{ker\varphi}$ é derivadamente mansa, o corolário 2.7, implica que $\{\overline{x_a x_{bcd}}, \overline{x_{bcd} x_e}, \overline{x_a x_{bcd} x_e}\}$ é uma base para $e_1 \left(rad^2 \frac{KQ_{13}}{ker\varphi}\right) e_3$. Já que $\frac{KQ_{13}}{ker\varphi} \cong A_{13}$ obtemos que $\{\overline{abcd}, \overline{bcde}, \overline{abcde}\}$ é uma base para $e_1 rad^2 A_{13} e_3$.

Como $\overline{bd} \in rad^2A_{13}$ temos que $\overline{bd} = \lambda_1\overline{abcd} + \lambda_2\overline{bcde} + \lambda_3\overline{abcde}$, ou seja, $bd - \lambda_1 abcd - \lambda_2 bcde - \lambda_3 abcde \in I$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $b - \lambda_1 abc$ obtemos que $\tilde{b}d - \lambda_2(\tilde{b} + \lambda_1 a\tilde{b}c)cde + \lambda_3 a(\tilde{b} + \lambda_1 a\tilde{b}c)cde \in I$. Como $c^2 \in I$ temos que $\tilde{b}d - \lambda_2\tilde{b}cde - \lambda_3 a\tilde{b}cde \in I$. Então, a menos de mudança no conjunto de geradores, podemos assumir que $bd - \lambda_2 bcde - \lambda_3 abcde \in I$. Novamente, fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca d por $d - \lambda_2 cde$ podemos assumir que $bd - \lambda_3 abcde \in I$. Temos dois casos para considerar:

2.1 $\lambda_3 = 0$. Logo, $J =< a^2, c^2, e^2, bd >\subseteq I$. A álgebra A é isomorfa à álgebra $\frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.8 da tabela A.5. O único caminho maximal de (Q, J) é $abcde$, o qual já vimos não pertence a I. Logo, do Lema 3.5 obtemos que $L = 0$.

2.2 $\lambda_3 \neq 0$. Logo, $J =< a^2, c^2, e^2, bd - \lambda_3 abcde >\subseteq I$. A álgebra A é isomorfa à álgebra $\frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é isomorfa à álgebra 1.7 da tabela 1.1. Como $I \cap (e_1 + e_2)KQ(e_1 + e_2) =< a^2, c^2 >$ e $I \cap (e_2 + e_3)KQ(e_2 + e_3) =< c^2, e^2 >$ qualquer gerador de L é da forma $\lambda_1\overline{abcd} + \lambda_2\overline{bcde} + \lambda_3\overline{abcde}$ com $\lambda_i \in K$. Caso algum $\lambda_i \neq 0$ o corolário 2.7 aplicado a subálgebra A_{13} implica que A_{13} é derivadamente selvagem. Logo, $L = 0$.

3. $\overline{bcd}, \overline{bd} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Portanto, temos uma presentação para A_{13} abaixo

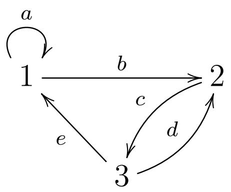
$$\begin{array}{rcl} \varphi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_e & \longmapsto & \overline{e} \\ x_{bcd} & \longmapsto & \overline{bcd} \end{array}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_a"] \arrow[r, "x_{bcd}"] & 3 \arrow[loop above, "x_e"] \end{tikzcd}$. Devido aos fatos que $a^2, e^2 \in I$ e $\frac{KQ_{13}}{ker\varphi}$ é derivadamente mansa, o corolário 2.7, implica que $\{\overline{x_{bcd}}, \overline{x_a x_{bcd}}, \overline{x_{bcd}x_e}, \overline{x_a x_{bcd} x_e}\}$ é uma base para $e_1\left(rad\frac{KQ_{13}}{ker\varphi}\right)e_3$. Já que $\frac{KQ_{13}}{ker\varphi} \cong A_{13}$ obtemos que $\{\overline{bcd}, \overline{abcd}, \overline{bcde}, \overline{abcde}\}$ é uma base para $e_1radA_{13}e_3$. Como $\overline{bd} \in radA_{13}$ temos que $\overline{bd} = \lambda_1\overline{bcd} + \lambda_2\overline{abcd} + \lambda_3\overline{bcde} + \lambda_4\overline{abcde}$, com $\lambda_i \in K$ e $\lambda_1 \neq 0$, ou seja, $bd - \lambda_1 bcd - \lambda_2 abcd - \lambda_3 bcde - \lambda_4 abcde \in I$. Manipulando algebricamente temos

$$b(e_2 - \lambda_1 c)d - \lambda_2 abcd - \lambda_3 bcde - \lambda_4 abcde \in I \tag{3.4}$$

Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca d por $\tilde{d} = (e_2 - \lambda_1 c)d$ a expressão (3.4) torna-se $b\tilde{d} - \lambda_2 abc(e_2 + \lambda_1 c)\tilde{d} - \lambda_3 bc(e_2 + \lambda_1 c)\tilde{d}e - \lambda_4 abc(e_2 + \lambda_1 c)\tilde{d}e \in I$. Como $c^2 \in I$ obtemos que $b\tilde{d} - \lambda_2 abc\tilde{d} - \lambda_3 bc\tilde{d}e - \lambda_4 abc\tilde{d}e \in I$. Então, recaímos no caso anterior.

Caso $5 - 10$:



Lema 3.8. *Se* $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}}\right) e_2 = 1$ *ou* $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}}\right) e_2 = 3$ *então,* A *é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Caso $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}}\right) e_2 = 3$, o quiver de A_{23} torna-se $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right] & 3 \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend right=50] \arrow[l, bend right=70] \end{tikzcd}$. Segue do Teorema 2.14 que A_{23} é derivadamente selvagem. Então, o Lema 2.4 implica que A é derivadamente selvagem.

O corolário 2.3 implica que $a^2 \in I$. Agora veremos o que ocorre quando $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}}\right) e_2 = 1$. Como $\overline{d} \in radA \backslash rad^2 A$ temos uma presentação para A_{23} abaixo

$$\begin{aligned} \phi : KQ_{23} &\longrightarrow A_{23} \\ x_d &\longmapsto \overline{d} \\ x_c &\longmapsto \overline{c} \end{aligned}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "x_c"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_d"'] \end{tikzcd}$. Como $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}}\right) e_2 = 1$ e $\overline{d} \in radA \backslash rad^2 A$ temos que $\overline{eab}, \overline{eb} \in rad^2 A_{23}$. Do corolário 2.4 segue que $rad^3 A_{23} = 0$. Temos que $e_3 rad^2 A_{23} e_2 \subseteq rad^3 A_{23}$. Como $\overline{eb}, \overline{eab} \in e_3 rad^2 A_{23} e_2$ temos que $\overline{eb} = \overline{eab} = 0$, ou seja, $eb, eab \in I$. Do Lema 2.5 segue que $ea \notin I$. Como $a^2, eab \in I$, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, temos o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & \tilde{P}_3^{r_9} & \\
 & & & & & \tilde{P}_2^{r_{10}} \arrow[ur, "M(l_8)d"] \arrow[dr, "M(l_9)b"] & & \\
\tilde{P}_1^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)a"] & \tilde{P}_1^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)a"] & \tilde{P}_1^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)a"] & \tilde{P}_1^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)a"] & \tilde{P}_1^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)a"] & \tilde{P}_1^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)a"] & \tilde{P}_1^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)ea"] & \tilde{P}_3^{r_8}
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

O funtor $-\otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem.■

O corolário 2.3 implica que $a^2 \in I$. Na subálgebra A_{12} as possibilidades que temos para $\overline{ce}$ e $\overline{cd}$ são:

1. $\overline{ce}, \overline{cd} \in rad^2 A_{12}$;
2. $\overline{cd} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$ e $\overline{ce} \in rad^2 A_{12}$;
3. $\overline{ce} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$ e $\overline{cd} \in rad^2 A_{12}$;
4. $\overline{ce}, \overline{cd} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$.

Caso 1: $\overline{ce}, \overline{cd} \in rad^2 A_{12}$. Se $ce \notin I$ o Lema 3.1 implica que $\overline{ce} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$, absurdo. Logo, $ce \in I$. Como $ce \in I$, caso $cd \notin I$ o Lema 3.2 implica que $\overline{cd} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$, absurdo. Portanto, $cd \in I$. O fato desses caminhos pertencerem a I, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, possibilita a construção do complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
\tilde{P}_1^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)a"] & \tilde{P}_1^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)a"] & \tilde{P}_1^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)a"] & \tilde{P}_1^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)a"] & \tilde{P}_1^{r_5} & \\
& & & \tilde{P}_2^{r_6} \arrow[ur, "M(l_5)b"] \arrow[r, "M(l_6)d"] & \tilde{P}_3^{r_7} \arrow[r, "M(l_{10})c"] & \tilde{P}_2^{r_{10}} \\
& & & \tilde{P}_1^{r_8} \arrow[ur, "M(l_7)e"'] \arrow[r, "M(l_8)a"'] & \tilde{P}_1^{r_9} &
\end{tikzcd}$$

O funtor $-\otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \rightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem.

Caso 2: $\overline{cd} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$ e $\overline{ce} \in rad^2 A_{12}$. Se $ce \notin I$ o Lema 3.1 implica que $\overline{ce} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$, absurdo. Logo, $ce \in I$. Segue do Lema 3.8 que $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}} \right) e_2 = 2$. Esse caso dividir-se á nos dois abaixo:

2.1 $\overline{eab} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Como $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}} \right) e_2 = 2$ e $\overline{eab}, \overline{d} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$

temos uma presentação para A_{23} abaixo

$$\begin{array}{rcl} \phi : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \\ x_c & \longmapsto & \overline{c} \\ x_{eab} & \longmapsto & \overline{eab} \end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "x_c"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_{eab}"'] \arrow[l, "x_d"'] \end{tikzcd}$. Devido ao fato que $ce \in I$ para $\frac{KQ_{23}}{ker\phi} \cong A_{23}$ ser derivadamente mansa, pelo corolário 2.5, é necessário que $x_dx_c - \lambda x_{eab}x_c \in ker\phi$, ou seja, $dc - \lambda eabc \in I$. Então, fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca d por $d - \lambda eab$, podemos assumir que $dc, ce, a^2 \in I$. O corolário 2.5, aplicado a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\phi} \cong A_{23}$, implica que $x_{eab}x_cx_d \notin ker\phi$, isto é, $eabcd \notin I$. O corolário 2.5 implica que $dim_K e_3 \left(rad\frac{KQ_{23}}{ker\phi}\right) e_2 = 3$. Como $dc, ce \in I$ e $x_{eab}x_cx_d \notin ker\phi$ temos que $\{\overline{x_d}, \overline{x_{eab}}, \overline{x_{eab}x_cx_d}\}$ é uma base para $e_3\left(rad\frac{KQ_{23}}{ker\phi}\right)e_2$. Já que $\frac{KQ_{23}}{ker\phi} \cong A_{23}$ obtemos que $\{\overline{eabcd}, \overline{d}, \overline{eab}\}$ é uma base para $e_3radA_{23}e_2$. Como $\overline{eb} \in radA_{23}$ e $\overline{d} \in radA\backslash rad^2A$ concluímos que $\overline{eb} = \lambda_1\overline{eab} + \lambda_2\overline{eabcd}$, ou seja, $eb - \lambda_1eab - \lambda_2eabcd \in I$, com $\lambda_i \in K$. Assim, fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $\tilde{b} = b - \lambda_1ab - \lambda_2abcd$, podemos assumir que $eb, dc, ce, a^2 \in I$. Temos que $J =< a^2, ce, dc, eb >\subseteq I$. A álgebra $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa álgebra A.9 da tabela A.5. O único caminho maximal de (Q, J) é $eabcd$ o qual não pertence a I. Logo, do Lema 3.5 segue que $L = 0$.

2.2 $\overline{eab} \in rad^2A_{23}$. Como $dim_Ke_3\left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right)e_2 = 2$ temos que $\overline{eb} \in radA_{23}\backslash rad^2A_{23}$. Assim, temos uma presentação para A_{23} abaixo

$$\begin{array}{rcl} \varphi : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \\ x_c & \longmapsto & \overline{c} \\ x_{eb} & \longmapsto & \overline{eb} \end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "x_c"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_{eb}"'] \arrow[l, "x_d"'] \end{tikzcd}$. Com argumentos análogos ao do caso 2.1 podemos assumir que $dc \in I$. Como $ce, dc \in I$ o corolário 2.5 implica que $x_{eb}x_cx_d \notin ker\varphi$, isto é,

$ebcd \notin I$. Logo, $bc \notin I$. Assim, o Lema 3.1 implica que $\overline{bc} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$. Portanto, temos uma presentação para A_{13} abaixo

$$\begin{array}{rcl} \psi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_e & \longmapsto & \overline{e} \\ x_{bc} & \longmapsto & \overline{bc} \end{array}$$

onde Q_{13} é

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_a"] \arrow[r, bend right, "x_{bc}"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_e"'] \end{tikzcd}$$

. Para que $\frac{KQ_{13}}{ker\psi} \cong A_{13}$ seja derivadamente mansa, pelo corolário 2.6, é necessário que $x_e x_{bc} + \lambda x_e x_a x_{bc} \in ker\psi$ e $dim_K e_3 \left(rad^2 \frac{KQ_{13}}{ker\psi} \right) e_3 = 1$. Logo, $x_e x_a x_{bc} \notin ker\psi$, isto é, $eabc \notin I$. Desse modo, $eab \notin I$. O corolário 2.5 aplicado à álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\varphi} \cong A_{23}$ implica que $dim_K e_3 \left(rad^2 \frac{KQ_{23}}{ker\varphi} \right) e_2 = 1$. Como $dim_K e_3 \left(rad^2 \frac{KQ_{23}}{ker\varphi} \right) e_2 = 1$ e $x_{eb} x_c x_d \notin ker\varphi$ temos que $\{\overline{x_{eb} x_c x_d}\}$ é uma base para $e_3 \left(rad^2 \frac{KQ_{23}}{ker\varphi} \right) e_2$. Já que $\frac{KQ_{13}}{ker\psi} \cong A_{13}$ obtemos que $\{\overline{ebcd}\}$ é uma base para $e_3 rad^2 A_{23} e_2$. Já que $\overline{eab} \in rad^2 A_{23}$ e $eab \notin I$ segue que $\overline{eab} = \lambda \overline{ebcd}$, com $\lambda \in K$ e $\lambda \neq 0$. Assim, $eab - \lambda ebcd \in I$ com $\lambda \neq 0$. Multiplicando $eab - \lambda ebcd$ à direita por c concluímos que $eabc \in I$, visto que $dc \in I$. O que é uma contradição. Portanto, A é derivadamente selvagem.

Caso 3: $\overline{ce} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$ e $\overline{cd} \in rad^2 A_{12}$. Assim, temos uma presentação para A_{12} abaixo

$$\begin{array}{rcl} \nu : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_b & \longmapsto & \overline{b} \\ x_{ce} & \longmapsto & \overline{ce} \end{array}$$

onde Q_{12} é

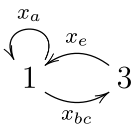
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_a"] \arrow[r, bend right, "x_b"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_{ce}"'] \end{tikzcd}$$

. Para que $\frac{KQ_{12}}{ker\nu}$ seja derivadamente mansa, pelo corolário 2.6, é necessário que ${x_a}^2, x_b x_{ce}, x_{ce} x_b - \lambda x_{ce} x_a x_b \in ker\nu$, ou seja, $a^2, bce, ceb - \lambda ceab \in I$, com $\lambda \in K$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca e por $\tilde{e} = e(e_1 - \lambda a)$ temos que $c\tilde{e}b, bc\tilde{e}(e_1 + \lambda a) \in I$. Como $(e_1 + \lambda a)$ é invertível segue que

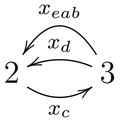
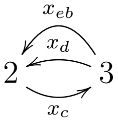
$c\tilde{e}b, bc\tilde{e} \in I$. Assim, a menos de mudança no conjunto de geradores podemos assumir que $ceb, bce, a^2 \in I$. Do corolário 2.6 concluímos que $dim_K e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\nu}\right) e_2 = 1$. Desses últimos fatos obtemos que $x_{ce}x_a x_b \notin ker\nu$. Como $dim_K e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\nu}\right) e_2 = 1$ e $x_{ce}x_a x_b \notin ker\nu$ temos que $\{\overline{x_{ce}x_a x_b}\}$ é uma base para $e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\nu}\right) e_2$. Do fato que $e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\nu}\right) e_2 \cong A_{12}$ temos que $\{\overline{ceab}\}$ é uma base para $e_2 rad^2 A_{12} e_2$. Como $\overline{cd} \in e_2(rad^2 A_{12})e_2$ concluímos que $\overline{cd} = \lambda\overline{ceab}$, isto é, $cd - \lambda ceab \in I$, com $\lambda \in K$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca d por $d - \lambda eab$ iremos supor que $cd, ceb, bce, a^2 \in I$. Na subálgebra A_{13} temos as possibilidades abaixo:

3.1 $\overline{bc} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$ e $\overline{dc} \in rad^2 A_{13}$. Então, temos uma presentação para A_{13} abaixo

$$\begin{array}{rcl} \chi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_e & \longmapsto & \overline{e} \\ x_{bc} & \longmapsto & \overline{bc} \end{array}$$

onde Q_{13} é  . Para que a subálgebra $\frac{KQ_{13}}{ker\chi} \cong A_{13}$ seja derivadamente mansa, pelo corolário 2.6, é necessário que ${x_a}^2, x_{bc}x_e, x_e x_{bc} + \lambda x_e x_a x_{bc} \in ker\chi$ e $dim_K e_3 \left(rad^2 \frac{KQ_{13}}{ker\chi}\right) e_3 = 1$. Logo, $x_e x_a x_{bc} \notin ker\chi$ e $\{\overline{x_e x_a x_{bc}}\}$ é uma base para $e_3 \left(rad^2 \frac{KQ_{13}}{ker\chi}\right) e_3$. Já que $\frac{KQ_{13}}{ker\chi} \cong A_{13}$ obtemos que $\{\overline{eabc}\}$ é uma base para $e_3 rad^2 A_{13} e_3$. Como $\overline{dc} \in e_3(rad^2 A_{13})e_3$ segue que $\overline{dc} = \mu\overline{eabc}$, ou seja, $dc - \mu eabc \in I$, com $\mu \in K$. Por causa do Lema 3.8 sabemos que só precisamos analisar o caso em que $dim_K e_3 \left(\frac{radA_{23}}{rad^2 A_{23}}\right) e_2 = 2$. Então, $\overline{eab} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$ ou $\overline{eb} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Com isso, temos, respectivamente, as seguintes presentações para A_{23}

$$\begin{array}{rcl} \theta_1 : KQ_{231} \longrightarrow A_{23} & & \theta_2 : KQ_{232} \longrightarrow A_{23} \\ x_d \longmapsto \overline{d} & \text{ou} & x_d \longmapsto \overline{d} \\ x_c \longmapsto \overline{c} & & x_c \longmapsto \overline{c} \\ x_{eab} \longmapsto \overline{eab} & & x_{eb} \longmapsto \overline{eb} \end{array}$$

onde Q_{231} e Q_{232} são, respectivamente ,  e  . Na álgebra $\frac{KQ_{231}}{ker\theta_1} \cong$

A_{23} temos que $x_{eab}x_cx_d, x_{eab}x_cx_{eab}, x_dx_cx_d, x_dx_cx_{eab} \in ker\theta_1$, pois $bce, cd, dc - \lambda eabc \in I$. Já na álgebra $\frac{KQ_{232}}{ker\theta_2} \cong A_{23}$ obtemos que $x_{eb}x_cx_d, x_{eb}x_cx_{eb}, x_dx_cx_d, x_dx_cx_{eb} \in ker\theta_2$, pois $bce, cd, dc - \lambda eabc \in I$. Em ambos os casos, $dim_Ke_3rad^2A_{23}e_2 = 0$. Logo, pelo Corolário 2.5, a álgebra A_{23} não será isomorfa a álgebra A_4 do Teorema 2.14, então podemos concluir que A_{23} é derivadamente selvagem, consequentemente pelo Lema 2.4 a álgebra A também será.

3.2 $\overline{dc} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Se $bc \notin I$ o Lema 3.1 implica que $\overline{bc} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$. Nesse caso, como $cd \in I$ e $\overline{dc} \in radA_{13} \backslash rad^2A_{13}$ do Lema 2.5 segue que A_{13} é derivadamente selvagem. Logo, $bc \in I$. Do Lema 3.8 obtemos que $dim_Ke_3\left(\frac{radA_{23}}{rad^2A_{23}}\right)e_2 = 2$. Se $\overline{eb} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$ temos uma presentação para A_{23} abaixo

$$\begin{array}{rcl} \zeta : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \\ x_c & \longmapsto & \overline{c} \\ x_{eb} & \longmapsto & \overline{eb} \end{array}$$

onde Q_{23} é

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "x_c"'] & 3 \arrow[l, "x_d"'] \arrow[l, bend right=60, "x_{eb}"'] \end{tikzcd}$$

. Como $cd, ceb \in I$ temos que $dim_Ke_2\left(rad^2\frac{KQ_{23}}{ker\zeta}\right)e_2 = 0$. Logo, pelo corolário 2.5, $A_{23} \cong \frac{KQ_{23}}{ker\zeta}$ é derivadamente selvagem.

Só nos restou $\overline{eab} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$ e $\overline{eb} \in rad^2A_{23}$. Então, temos uma presentação para A_{23} abaixo

$$\begin{array}{rcl} \eta : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \\ x_c & \longmapsto & \overline{c} \\ x_{eab} & \longmapsto & \overline{eab} \end{array}$$

onde Q_{23} é

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "x_c"'] & 3 \arrow[l, "x_d"'] \arrow[l, bend right=60, "x_{eab}"'] \end{tikzcd}$$

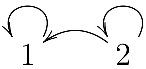
. Do corolário 2.5 aplicado a $\frac{KQ_{23}}{ker\eta}$, segue que $dim_Ke_3\left(rad^2\frac{KQ_{23}}{ker\eta}\right)e_2 = 1$. Do último fato e do fato que $cd, bc \in I$ obtemos que $x_dx_cx_{eab} \notin ker\eta$. Logo, $\{\overline{x_dx_cx_{eab}}\}$ é uma base para $e_3\left(rad^2\frac{KQ_{23}}{ker\eta}\right)e_2$. Como

$e_3\left(rad^2\frac{KQ_{23}}{ker\eta}\right)e_2 \cong A_{23}$ temos que $\{\overline{dceab}\}$ é uma base para $e_3rad^2A_{23}e_2$. Já que $\overline{eb} \in rad^2A_{23}$ obtemos que $\overline{eb} = \lambda\overline{dceab}$, ou seja, $eb - \lambda dceab \in I$, com $\lambda \in I$. Então, fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca e por $e - \lambda dcea$ podemos assumir que $eb, cd, bc, a^2 \in I$. Temos que $J =< cd, bc, a^2, eb >\subseteq I$. A álgebra $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa álgebra A.10 da tabela A.5. O único caminho maximal de (Q, J) é $dceab$, o qual não pertence a I. Logo, do Lema 3.5 segue que $L = 0$.

3.3 $\overline{dc}, \overline{bc} \in rad^2A_{13}$. Do Lema 3.1 segue que $bc \in I$. Devido ao fato que $bc \in I$ e ao Lema 3.2 obtemos que $dc \in I$. Como $cd, bc, dc \in I$, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, podemos construir o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo

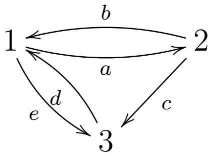
$$\begin{tikzcd}
\tilde{P}_2^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)d"] & \tilde{P}_3^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)c"] & \tilde{P}_2^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)d"] & \tilde{P}_3^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)c"] & \tilde{P}_2^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)d"] & \tilde{P}_3^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)c"] & \tilde{P}_2^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)d"] \arrow[dr, "M(l_9)b"] & \tilde{P}_3^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)c"] & \tilde{P}_2^{r_9} \\
& & & & & & & \tilde{P}_1^{r_{10}} &
\end{tikzcd}$$

O funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem.

Caso 4: $\overline{ce}, \overline{cd} \in radA_{12} \backslash rad^2A_{12}$. Como nesse caso o quiver de A_{12} é 

segue do Teorema 2.14 que A_{12} é uma álgebra derivadamente selvagem. Logo, pelo Lema 2.4 a álgebra A é derivadamente selvagem

Caso $5 - 12$:



Lema 3.9. *Seja* $A = \frac{KQ}{I}$ *onde* Q *é o quiver acima. Se* $da, ba, de \in I$ *temos que* A *é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Na álgebra A_{12} temos as possibilidades abaixo:

1. $\overline{cd} \in radA_{12} \backslash rad^2A_{12}$. Para que A_{12} seja derivadamente mansa, pelo Teorema 2.14, é necessário que $\overline{ed} \in rad^2A_{12}$. Assim, temos uma presentação para A_{12}

abaixo:

$$\begin{aligned} \sigma : KQ_{12} &\longrightarrow A_{12} \\ x_a &\longmapsto \overline{a} \\ x_b &\longmapsto \overline{b} \\ x_{cd} &\longmapsto \overline{cd} \end{aligned}$$

onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "x_a"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_b"'] \arrow[l, bend right=70, "x_{cd}"'] \end{tikzcd}$. Como $da, ba \in I$ temos que $dim_K e_2 \left(\frac{KQ_{12}}{ker\sigma}\right) e_2 = 0$. Logo, do corolário 2.5 segue que $\frac{KQ_{12}}{ker\sigma}$ é derivadamente selvagem. Como $\frac{KQ_{12}}{ker\sigma} \cong A_{12}$ temos que A_{12} também o é. Então, pelo Lema 2.4 obtemos que A é derivadamente selvagem.

2. $\overline{cd} \in rad^2 A_{12}$. Como $\overline{b} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$ e $da, de, ba \in I$ temos que $\overline{cd} = \lambda \overline{bed}$, para $\lambda \in K$, ou seja, $cd - \lambda bed \in I$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores podemos assumir que $cd \in I$. Logo, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16 podemos construir o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo:

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{P}_1^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)b"] & \tilde{P}_2^{r_2} & \\
\tilde{P}_1^{r_4} \arrow[r, "M(l_3)d"] \arrow[dr, "M(l_4)b"] & \tilde{P}_3^{r_3} \arrow[ur, "M(l_2)c"] & & \\
\tilde{P}_3^{r_6} \arrow[r, "M(l_5)c"] \arrow[dr, "M(l_6)e"] & \tilde{P}_2^{r_5} & & \\
\tilde{P}_2^{r_{10}} \arrow[r, "M(l_9)a"'] & \tilde{P}_1^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)d"] & \tilde{P}_3^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)c"] & \tilde{P}_2^{r_9}
\end{tikzcd}$$

O funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem. ■

Na álgebra A temos as possibilidades abaixo:

1. $ba, de \in I$. Se $da \in I$, pelo Lema 3.9, temos que A é derivadamente selvagem. Logo, $da \notin I$. Caso $be \in I$, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos

2.15 e 2.16, podemos construir o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo:

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{P}_3^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)e"] \arrow[dr, "M(l_2)c"] & \tilde{P}_1^{r_2} \\
 & \tilde{P}_3^{r_5} \arrow[r, "M(l_4)e"] \arrow[dr, "M(l_5)c"] & \tilde{P}_1^{r_4} \arrow[r, "M(l_3)b"] & \tilde{P}_2^{r_3} \\
\tilde{P}_2^{r_{10}} \arrow[r, "M(l_9)a"] & \tilde{P}_1^{r_7} \arrow[r, "M(l_6)b"] & \tilde{P}_2^{r_6} & \\
\tilde{P}_3^{r_9} \arrow[r, "M(l_8)c"] \arrow[ur, "M(l_7)e"] & \tilde{P}_2^{r_8} & &
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

O funtor $-\otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Portanto, A é derivadamente selvagem.

Logo, $be \notin I$. Do fato que $da \notin I$ e do Lema 3.1 segue que $\overline{da} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Se $\overline{be} \in rad^2 A_{23}$, como $ba, de \in I$ e $\overline{da} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$, temos que o quiver de A_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right] & 3 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$. Do fato que $e_2 \left(rad^2 A_{23}\right) e_3 \subseteq rad^3 A_{23}$ temos que $\overline{be} \in rad^3 A_{23}$. Então, segue do corolário 2.4 que $be \in I$, o que é um absurdo. Portanto, $\overline{be} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Assim, temos uma presentação para A_{23} abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
\phi : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\
x_{da} & \longmapsto & \overline{da} \\
x_{be} & \longmapsto & \overline{be} \\
x_c & \longmapsto & \overline{c}
\end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "x_c"'] \arrow[r, bend right=60, "x_{be}"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_{da}"'] \end{tikzcd}$.

Se $\overline{cd}, \overline{ed} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$ obtemos que $Q_{A_{12}}$ é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above] \arrow[r, bend right] & 2 \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend right=50] \end{tikzcd}$. Logo, o Teorema 2.14 implica que A_{12} é derivadamente selvagem. Desse modo, na álgebra A_{12} temos as possibilidades abaixo:

1.1. $\overline{ed}, \overline{cd} \in rad^2 A_{12}$. Assim, temos uma presentação para A_{12} abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
\chi : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\
x_a & \longmapsto & \overline{a} \\
x_b & \longmapsto & \overline{b}
\end{array}$$

onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "x_a"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_b"'] \end{tikzcd}$. Como $e_2(rad^2 A_{12})e_1 \subseteq rad^3 A_{12}$ temos que $\overline{cd} \in rad^3 A_{12}$. Assim, o corolário 2.4 implica que $\overline{cd} = 0$, ou seja, $cd \in I$. Como $\overline{ed} \in rad^2 A_{12}$ obtemos que $\overline{ed} = \lambda \overline{ab}$, com $\lambda \in K$, ou seja, $ed - \lambda ab \in I$.

Do fato que $cd, ba, ed - \lambda ab \in I$, na álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\phi}$ temos que $x_c x_{da}, x_{be} x_{da} \in ker\phi$. Portanto, $dim_K e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{23}}{ker\phi} \right) e_2 = 0$ e o corolário 2.5 implica que $\frac{KQ_{23}}{ker\phi}$ é derivadamente selvagem. Como $\frac{KQ_{23}}{ker\phi} \cong A_{23}$ temos que A_{23} também o é. Logo, do Lema 2.4 temos que A é derivadamente selvagem.

1.2. $\overline{ed} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$ e $\overline{cd} \in rad^2 A_{12}$. Assim, temos uma presentação para A_{12} abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \psi : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\ x_{ed} & \longmapsto & \overline{ed} \\ x_b & \longmapsto & \overline{b} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \end{array}$$

onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_{ed}"] \arrow[r, bend right, "x_a"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_b"'] \end{tikzcd}$. O corolário 2.6 implica que $dim_K e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\psi} \right) e_1 = 1$ e $x_a x_b \in ker\psi$, ou seja, $ab \in I$. Do Lema 2.5 segue que $x_b x_{ed} \notin ker\psi$. Como $dim_K e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\psi} \right) e_1 = 1$ e $x_b x_{ed} \notin ker\psi$ temos que $\{\overline{x_b x_{ed}}\}$ é uma base para $e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\psi} \right) e_1$. Do fato que $\frac{KQ_{12}}{ker\psi} \cong A_{12}$ obtemos que $\{\overline{bed}\}$ é uma base para $e_2 rad^2 A_{12} e_1$. Uma vez que $\overline{cd} \in rad^2 A_{12}$ temos que $\overline{cd} = \mu \overline{bed}$, com $\mu \in K$, isto é, $cd - \mu bed \in I$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores podemos assumir que $cd \in I$. Logo, $ba, ab, de, cd \in I$. O corolário 2.5 aplicado a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\phi}$ implica que $x_{be} x_{da} x_c \notin ker\phi$, ou seja, $bedac \notin I$. Temos que $J =< ab, ba, cd, de > \subseteq I$. Então, $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2 B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.13 da tabela A.5. O único caminho maximal de (Q, J) é $bedac$, o qual não pertence a I. Portanto, o Lema 3.5 implica que $L = 0$. Logo, A é gentle.

1.3. $\overline{cd} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$ e $\overline{ed} \in rad^2 A_{12}$. Assim, temos uma presentação para

A_{12} abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \eta : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_b & \longmapsto & \overline{b} \\ x_{cd} & \longmapsto & \overline{cd} \end{array}$$

onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "x_a"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_{cd}"'] \arrow[l, "x_b"'] \end{tikzcd}$. Para que a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\phi}$ seja derivadamente mansa, pelo corolário 2.5, é necessário que $\lambda_1 x_{be}x_{da} + \lambda_2 x_c x_{da}, \lambda_3 x_{da}x_c + \lambda_4 x_{da}x_{be} \in ker\phi$, com $\lambda_i \in K$ e $\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_4 \neq 0$, ou seja, $\lambda_1 beda + \lambda_2 cda, \lambda_3 dac + \lambda_4 dabe \in I$, com $\lambda_i \in K$ e $\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_4 \neq 0$. Se $\lambda_2 \neq 0$ podemos fazer uma mudança no conjunto de geradores e assumir que $cda, ba \in I$. Como $cda, ba \in I$ temos que $dim_K e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\eta} \right) e_2 = 0$. Então, o corolário 2.5 implica que $\frac{KQ_{12}}{ker\eta}$ é derivadamente selvagem. Como $\frac{KQ_{12}}{ker\eta} \cong A_{12}$ temos que A_{12} também o é. Logo, $\lambda_2 = 0$. Uma vez que $\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_4 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ temos que $\lambda_3 \neq 0$. Portanto, $beda, de, dac + \lambda dabe, ba \in I$, com $\lambda = \lambda_3^{-1}\lambda_4$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores podemos assumir que $beda, de, dac, ba \in I$. Para que a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\phi}$ seja derivadamente mansa, pelo corolário 2.5, é necessário que $x_c x_{da} x_{be} \notin ker\phi$, isto é, $cdabe \notin I$. Logo, $ab \notin I$. O corolário 2.5 aplicado a álgebra $\frac{KQ_{12}}{ker\eta}$ implica que $dim_K e_1 \left(rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\eta} \right) e_1 = 1$. Como $dim_K e_1 \left(rad^2 \frac{KQ_{12}}{ker\eta} \right) e_1 = 1$, $ab \notin I$ e $\overline{ed} \in rad^2 A_{12}$ temos que $\overline{ed} = \mu\overline{ab}$, com $\mu \in K$, ou seja, $ed - \mu ab \in I$. Se $\mu \neq 0$, devido ao fato que $de \in I$ temos que $dabe \in I$, contradição com o fato que $cdabe \notin I$. Portanto, $\mu = 0$ e $ed, de, ba, dac \in I$.

Se $\overline{ab} \in rad^2 A_{13}$, como $ed, ba, dac \in I$ e $rad^2 e_1 A e_1 = 0$ (veja Teorema 2.13), temos que $\overline{ab} = \lambda\overline{acd}$ com $\lambda \in K$. Multiplicando a equação anterior por $\overline{e}$ temos que $\overline{abe} = 0$, visto que $de \in I$, o que é um absurdo, pois $cdabe \notin I$. Logo, $\overline{ab} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$. Caso $\overline{ac} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$, como $\overline{ab} \in radA_{13} \backslash rad^2 A_{13}$ e $ba \in I$ o Lema 2.5 implica que A_{13} é derivadamente selvagem. Portanto,

$\overline{ac} \in rad^2A_{13}$. Assim, temos uma presentação para A_{13} abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \xi : KQ_{13} & \longrightarrow & A_{13} \\ x_d & \longmapsto & \overline{d} \\ x_e & \longmapsto & \overline{e} \\ x_{ab} & \longmapsto & \overline{ab} \end{array}$$

onde Q_{13} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_{ab}"] \arrow[r, bend right, "x_e"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_d"'] \end{tikzcd}$. O corolário 2.6 implica que $dim_Ke_1\left(rad^2\frac{KQ_{13}}{ker\xi}\right)e_3 = 1$. Desse último fato e do fato que $cdabe \notin I$ obtemos que $\{\overline{x_{ab}x_e}\}$ é uma base para $e_1\left(rad^2\frac{KQ_{13}}{ker\xi}\right)e_3$. Uma vez que $\frac{KQ_{13}}{ker\xi} \cong A_{13}$ temos que $\{\overline{abe}\}$ é uma base para $e_1rad^2A_{13}e_3$. Do fato que $\overline{ac} \in rad^2A_{13}$ segue que $\overline{ac} = \kappa\overline{abe}$, com $\kappa \in K$, isto é, $ac - \kappa abe \in I$. Se $\kappa \neq 0$, multiplicando a expressão por d à esquerda obtemos que $dabe \in I$, visto que $dac \in I$, contradição com o fato que $cdabe \notin I$. Portanto, $\kappa = 0$ e $ac \in I$. Temos que $J =< ba, ac, de, ed > \subseteq I$. Então, $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.12 da tabela A.5. O único caminho maximal de (Q, J) é $cdabe$, o qual não pertence a I. Portanto, do Lema 3.5 temos que $L = 0$. Logo, A é gentle.

2. $ba \in I$ e $de \notin I$. Logo, pelo Teorema 2.13 temos que $dim_Krad\,(e_3Ae_3) = 1$ e $rad^2e_3Ae_3 = 0$. Então, $\overline{dac} = \lambda\overline{de}$ e $\overline{dabe} = \mu\overline{de}$, com $\lambda, \mu \in K$. Se $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$ podemos fazer uma mudança no conjunto de geradores e assumir que $de \in I$ recaindo no caso anterior. Só nos resta analisar o que ocorre quando $de \notin I$ e $dabe, dac \in I$. Como $de \notin I$ e $dac, ba, dabe \in I$ temos pelo Lema 3.2 que $\overline{de} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$.

   Se $\overline{be} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$ obtemos que $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & 3 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$ é subquiver de $Q_{A_{23}}$. Logo, do Teorema 2.14 segue que A_{23} é derivadamente selvagem. Portanto, $\overline{be} \in rad^2A_{23}$. Caso $\overline{da} \notin I$, o Lema 3.1 implica que $\overline{da} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$. Logo, temos uma presentação para A_{23} abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \vartheta : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_{de} & \longmapsto & \overline{de} \\ x_c & \longmapsto & \overline{c} \\ x_{da} & \longmapsto & \overline{da} \end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend right, "x_c"'] & 3 \arrow[l, bend right, "x_{da}"'] \arrow[loop above, "x_{de}"] \end{tikzcd}$. O corolário 2.6 implica que $x_cx_{da}+\lambda x_cx_{de}x_{da}, (x_{de})^2 \in ker\vartheta$, com $\lambda \in K$, ou seja, $cda + \lambda cdeda, (de)^2 \in I$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca c por $\tilde{c} = c(e_3 + \lambda de)$ temos que a relação dac torna-se $da\tilde{c}(e_3 - \lambda de)$. Uma vez que $(e_3 - \lambda de)$ é invertível temos que $da\tilde{c} \in I$. Logo, podemos assumir que $dabe, cda, ba, dac \in I$.

Do corolário 2.6 temos que $dim_K e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{23}}{ker\vartheta}\right) e_3 = 1$. O Lema 2.5 implica que $x_cx_{de} \notin ker\vartheta$. Logo, $\{\overline{x_cx_{de}}\}$ é uma base para $e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{23}}{ker\vartheta}\right) e_3$. Como $\frac{KQ_{23}}{ker\vartheta} \cong A_{23}$ concluímos que $\{\overline{cde}\}$ é uma base para $e_2rad^2A_{23}e_3$. Desse último fato e do fato que $\overline{be} \in rad^2A_{23}$ temos que $\overline{be} = \lambda\overline{cde}$, com $\lambda \in K$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca b por $\tilde{b} = b - \lambda cd$ temos que a relação ba torna-se $(\tilde{b} + \lambda cd)a$. Como $cda \in I$ temos que $\tilde{b}a \in I$. Logo, podemos assumir que $be, ba \in I$. Desse fato podemos construir o complexo (3.6) de $K < x, y > -A$ bimódulos. Logo, A é derivadamente selvagem.

Assim, $da \in I$. Como $da, ba \in I$, $\overline{be} \in rad^2A_{23}$ e $\overline{de} \in radA_{23} \backslash rad^2A_{23}$ temos uma presentação para A_{23} abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \vartheta_1 : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\ x_{de} & \longmapsto & \overline{de} \\ x_c & \longmapsto & \overline{c} \end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "x_c"'] & 3 \arrow[loop above, "x_{de}"] \end{tikzcd}$. Do corolário 2.8 aplicado a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\vartheta_1}$ concluímos que $dim_K e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{23}}{ker\vartheta_1}\right) e_3 = 1$. O Lema 2.5 implica que $x_cx_{de} \notin ker\vartheta_1$. Logo, $\{\overline{x_cx_{de}}\}$ é uma base para $e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{23}}{ker\vartheta_1}\right) e_3$. Como $\frac{KQ_{23}}{ker\vartheta_1} \cong A_{23}$ concluímos que $\{\overline{cde}\}$ é uma base para $e_2rad^2A_{23}e_3$. Desse último fato e do fato que $\overline{be} \in rad^2A_{23}$ temos que $\overline{be} = \lambda\overline{cde}$, com $\lambda \in K$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca

b por $\tilde{b} = b - \lambda cd$ temos que a relação ba torna-se $(\tilde{b} + \lambda cd)a$. Como $da \in I$ temos que $\tilde{b}a \in I$. Logo, podemos assumir que $be, ba \in I$. Desse fato podemos construir o complexo (3.6) de $K < x, y > -A$ bimódulos. Logo, A é derivadamente selvagem.

3. $ba \notin I$. Logo, pelo Teorema 2.13 temos que $dim_K rad\,(e_2Ae_2) = 1$. Então, $\overline{beda} = \lambda\overline{ba}$ e $\overline{cda} = \mu\overline{ba}$ com $\lambda, \mu \in I$. Se $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$, fazendo uma mudança no conjunto de geradores podemos assumir que $ba \in I$. Esse caso já foi discutido acima. Só precisamos estudar o caso $ba \notin I$ e $beda, cda \in I$.
Se $\overline{cd}, \overline{ed} \in radA_{12} \backslash rad^2A_{12}$ obtemos que $Q_{A_{12}}$ é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above] \arrow[r, bend right] & 2 \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend right=50] \end{tikzcd}$. Logo, o Teorema 2.14 implica que A_{12} é derivadamente selvagem. Desse modo, na álgebra A_{12} temos as possibilidades abaixo:

3.1. $\overline{ed} \in radA_{12} \backslash rad^2A_{12}$ e $\overline{cd} \in rad^2A_{12}$. Assim, temos uma presentação para A_{12} abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \iota : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\ x_{ed} & \longmapsto & \overline{ed} \\ x_b & \longmapsto & \overline{b} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \end{array}$$

onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "x_{ed}"] \arrow[r, bend right, "x_a"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_b"'] \end{tikzcd}$. Do corolário 2.6 concluímos que $x_bx_a + \lambda x_bx_{ed}x_a \in ker\iota$ com $\lambda \in K$. Desse último fato junto com o fato que $beda \in I$ concluímos que $dim_K e_2 rad\left(\frac{KQ_{12}}{ker\iota}\right)e_2 = 0$. Então, o corolário 2.6 implica que $\frac{KQ_{12}}{ker\iota}$ é derivadamente selvagem. Como $\frac{KQ_{12}}{ker\iota} \cong A_{12}$ temos que A_{12} também o é. Portanto, do Lema 2.4 concluímos que A é derivadamente selvagem.

3.2. $\overline{ed}, \overline{cd} \in rad^2A_{12}$. Assim, temos uma presentação para A_{12} abaixo:

$$\begin{array}{rcl} \pi : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\ x_a & \longmapsto & \overline{a} \\ x_b & \longmapsto & \overline{b} \end{array}$$

onde Q_{12} é $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "x_a"'] & 2 \arrow[l, bend right, "x_b"'] \end{tikzcd}$. Como $ba \notin I$ o corolário 2.4 implica que $x_ax_b \in ker\pi$. Logo, $dim_K e_1\left(rad^2\frac{KQ_{12}}{ker\pi}\right)e_1 = 0$. Uma vez que $\frac{KQ_{12}}{ker\pi} \cong A_{12}$ e $\overline{ed} \in e_1rad^2A_{12}e_1$ temos que $\overline{ed} = 0$, ou seja, $ed \in I$. Devido ao fato que $\overline{cd} \in rad^2A_{12}$ e

$e_2 rad^2 A_{12} e_1 \subseteq rad^3 A_{12}$ concluímos que $\overline{cd} \in rad^3 A_{12}$. Então, do corolário 2.4 segue que $cd \in I$. Logo, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16 podemos construir o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{P}_3^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)c"] & \tilde{P}_2^{r_2} & & \\
\tilde{P}_1^{r_3} \arrow[ur, "M(l_2)b"] \arrow[r, "M(l_3)d"] & \tilde{P}_3^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)c"] & \tilde{P}_2^{r_5} & \\
 & \tilde{P}_1^{r_6} \arrow[ur, "M(l_5)b"] \arrow[r, "M(l_6)d"] & \tilde{P}_3^{r_7} \arrow[r, "M(l_9)e"] \arrow[dr, "M(l_7)c"] & \tilde{P}_1^{r_{10}} \\
 & & \tilde{P}_1^{r_9} \arrow[r, "M(l_8)b"'] & \tilde{P}_2^{r_8}
\end{tikzcd}$$

O funtor $-\otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem.

3.3. $\overline{cd} \in radA_{12} \backslash rad^2 A_{12}$ e $\overline{ed} \in rad^2 A_{12}$. Assim, temos uma presentação para A_{12} abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
\theta : KQ_{12} & \longrightarrow & A_{12} \\
x_a & \longmapsto & \overline{a} \\
x_b & \longmapsto & \overline{b} \\
x_{cd} & \longmapsto & \overline{cd}
\end{array}$$

onde Q_{12} é

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, bend right, "x_a"'] & 2 \arrow[l, "x_b"'] \arrow[l, bend right=60, "x_{cd}"']
\end{tikzcd}$$

. Uma vez que $cda \in I$ temos, pelo corolário 2.5, que $x_a x_b + \lambda x_a x_{cd} \in ker\theta$, com $\lambda \in K$, ou seja, $ab + \lambda acd \in I$. Além disso, $dim_K e_1 rad^2 \left(\frac{KQ_{12}}{ker\theta}\right) e_1 = 1$. Logo, $x_a x_{cd} \notin ker\theta$. Como $\overline{ed} \in rad^2 A_{12}$, $dim_K e_1 rad^2 \left(\frac{KQ_{12}}{ker\theta}\right) e_1 = 1$ e $x_a x_{cd} \notin ker\theta$ concluímos que $ed - \mu acd \in I$, com $\mu \in K$. Fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca b e e, respectivamente, por $b + \lambda cd$ e $e - \mu ac$ podemos assumir que $ab, cda, ed \in I$. Como $ed, cda \in I$ e $ba \notin I$, o Lema 3.2 implica que $\overline{ba} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Se $da \notin I$, o Lema 3.1 implica que $\overline{da} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Dos fatos que $\overline{ba}, \overline{da} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$, $ab \in I$ e do Lema 2.5 segue que A_{23} é derivadamente selvagem. Logo, $da \in I$. Por esses mesmos motivos concluímos que $\overline{be} \in rad^2 A_{23}$. Assim, $da, ab, ed \in I$, $\overline{be} \in rad^2 A_{23}$ e $\overline{ba} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$.

Esse caso divide-se nos abaixo:

3.3.1. $de \in I$. Como $ed, de, da \in I$, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, podemos construir o seguinte complexo N de $K<x,y>-A$ bimódulos abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \tilde{P}_2^{r_{10}} \arrow[dr, "M(l_9)a"] & & & \\
\tilde{P}_1^{r_1} \arrow[r, "M(l_1)d"] & \tilde{P}_3^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)e"] & \tilde{P}_1^{r_3} \arrow[r, "M(l_3)d"] & \tilde{P}_3^{r_4} \arrow[r, "M(l_4)e"] & \tilde{P}_1^{r_5} \arrow[r, "M(l_5)d"] & \tilde{P}_3^{r_6} \arrow[r, "M(l_6)e"] & \tilde{P}_1^{r_7} \arrow[r, "M(l_7)d"] & \tilde{P}_3^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)e"] & \tilde{P}_1^{r_9}
\end{tikzcd}$$

O funtor $-\otimes_{K<x,y>} N : finK<x,y> \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem.

3.3.2. $de \notin I$. Como $da \in I$ e $de \notin I$ o Lema 3.2 implica que $\overline{de} \in radA_{23} \backslash rad^2 A_{23}$. Portanto, temos uma presentação para A_{23} abaixo:

$$\begin{array}{rcl}
\sigma : KQ_{23} & \longrightarrow & A_{23} \\
x_{ba} & \longmapsto & \overline{ba} \\
x_{de} & \longmapsto & \overline{de} \\
x_c & \longmapsto & \overline{c}
\end{array}$$

onde Q_{23} é $\begin{tikzcd} 2 \arrow[loop above, "x_{ba}"] \arrow[r, "x_c"] & 3 \arrow[loop above, "x_{de}"] \end{tikzcd}$. O Corolário 2.7 implica que $x_{ba}x_cx_{de} \notin ker\sigma$, isto é, $\overline{bacde} \neq 0$. Portanto, $bacde \notin I$. Para que a álgebra $\frac{KQ_{23}}{ker\sigma}$ seja derivadamente mansa, pelo Corolário 2.7, é necessário que $dim_K e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{23}}{ker\sigma}\right) e_3 = 3$. Temos que $\{\overline{x_{ba}x_c}, \overline{x_cx_{de}}, \overline{x_{ba}x_cx_{de}}\}$ é uma base para $e_2 \left(rad^2 \frac{KQ_{23}}{ker\sigma}\right) e_3$. Do fato que $A_{23} \cong \frac{KQ_{23}}{ker\sigma}$ segue que $\{\overline{bac}, \overline{cde}, \overline{bacde}\}$ é uma base para $e_2 rad^2 A_{23} e_3$. Como $\overline{be} \in rad^2 A_{23}$ temos que

$$\overline{be} = \lambda_1 \overline{bac} + \lambda_2 \overline{cde} + \lambda_3 \overline{bacde}, \tag{3.7}$$

com $\lambda_i \in K$. Multiplicando a equação (3.7) à direita por $\overline{d}$, se $\lambda_1 \neq 0$, temos que $\overline{bacd} = 0$, visto que $ed \in I$. Caso multipliquemos à esquerda por $\overline{a}$ e se $\lambda_2 \neq 0$ concluímos que $\overline{acde} = 0$, pois $ab \in I$. Ambas as situações não podem ocorrer, pois $\overline{bacde} \neq 0$. Logo, $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$. Então, $\overline{be} = \lambda_3 \overline{bacde}$, isto é, $be - \lambda_3 bacde \in I$. Portanto, fazendo uma mudança no conjunto de geradores que troca e por $\tilde{e} = (e_1 - \lambda_3 acd)e$ temos que $b\tilde{e} \in I$.

A relação ed torna-se $(e_1 + \lambda_3 acd)\tilde{e}d$. Devido ao fato que $(e_1 + \lambda_3 acd)$ é invertível obtemos que $\tilde{e}d \in I$. Assim, a menos de mudança do conjunto de geradores podemos assumir que $be, ed, ab, da \in I$. Temos que $J =< ed, ab, da, be >\subseteq I$. Portanto, $A \cong \frac{B}{L}$ com $L \subseteq rad^2 B$ e $B = \frac{KQ}{J}$. A álgebra B é gentle e isomorfa à álgebra A.11 da tabela A.5. O único caminho maximal de (Q, J) é $bacde$, o qual não pertence a I. Logo, do Lema 3.5 segue que $L = 0$. Portanto, A é gentle.

3.5 Quivers bisseriais com 6 flechas

Lema 3.10. *Seja* $A = \frac{KQ}{I}$ *uma* $K-$*álgebra de dimensão finita tal que para todo* $i \in Q_0$ *temos pelo menos duas flechas que começam e pelo menos duas que terminam em* i*, então* A *é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Como $radA \neq 0$ e A é uma álgebra de dimensão finita sempre existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $rad^n A \neq 0$ e $rad^{n+1}A = 0$. Seja $z \in rad^n A$, com $z \neq 0$, temos que $(radA)z = 0$, pois $rad^{n+1}A = 0$. Como $(radA)z = 0$ e em todo vértice de Q tem duas flechas começando e duas terminando, com raciocínio e notações análogos aos dos Exemplos 2.15 e 2.16, podemos construir o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo, sendo que $\alpha_i \in Q_1$, $t(\alpha_2) = t(\alpha_3) = s(z)$ e $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{P}^{r_1}_{t(\alpha_8)} \arrow[r, "M(l_1)\alpha_8"] & \tilde{P}^{r_2}_{s(\alpha_8)} \\
 & \tilde{P}^{r_3}_{t(\alpha_7)} \arrow[r, "M(l_3)\alpha_6"] \arrow[ur, "M(l_2)\alpha_7"] & \tilde{P}^{r_4}_{s(\alpha_6)} \\
 & \tilde{P}^{r_5}_{t(\alpha_5)} \arrow[r, "M(l_5)\alpha_4"] \arrow[ur, "M(l_4)\alpha_5"] & \tilde{P}^{r_6}_{s(\alpha_4)} \\
 & \tilde{P}^{r_7}_{s(z)} \arrow[r, "M(l_7)\alpha_2"] \arrow[ur, "M(l_6)\alpha_3"] & \tilde{P}^{r_8}_{s(\alpha_1)} \\
\tilde{P}^{r_{10}}_{t(z)} \arrow[ur, "M(l_9)z"] & \tilde{P}^{r_9}_{t(\alpha_1)} \arrow[ur, "M(l_8)\alpha_1"] &
\end{tikzcd}$$

O funtor $- \otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem. ■

Corolário 3.2. *Seja* $A = \frac{KQ}{I}$ *uma* K*-álgebra derivadamente mansa e de dimensão finita. Se* $\#Q_0 = 3$ *e* Q *é bisserial então* $\#Q_1 \leq 5$.

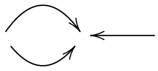
Demonstração: Segue do Lema 3.10. ■

Então, não existem álgebras derivadamente mansas cujos quivers são os da tabela A.3.

3.6 Álgebras cujos quivers não são bisseriais

Nosso objetivo agora é encontrar todos os quivers Q que não são bisseriais para os quais existem ideais admissíveis I em KQ tais que a álgebra $\frac{KQ}{I}$ é derivadamente mansa. Devido ao lema 2.4, temos que, se A é derivadamente mansa toda subálgebra plena é derivadamente mansa. Por isso, na construção desses quivers devemos levar em consideração que quando olharmos para as subálgebras do tipo $(e_i + e_j)A(e_i + e_j)$, com $i \neq j$, o quiver dessas subálgebras devem ser um dos quivers do teorema 2.14.

Se um quiver Q não é bisserial em pelo menos um de seus vértices devemos ter 3 flechas terminando ou começando. Trataremos apenas o primeiro caso, pois o outro é similar. Para essas três flechas que terminam em um mesmo vértice temos as possibilidades abaixo:

1. Nenhuma dessas flechas é um laço. Logo, Q possui o seguinte subquiver:  . Se Q é o subquiver anterior, então o teorema 2.6 implica que a álgebra KQ é selvagem. Então, pelo lema 2.1, qualquer álgebra cujo quiver possui o subquiver acima como subquiver será selvagem. Logo, pela proposição 2.1 essa álgebra será derivadamente selvagem.

2. Pelo menos duas dessas flechas são um laço. Denotemos por a um desses laços. Então, pelo teorema 2.13 temos que $e_{s(a)}Ae_{s(a)}$ é derivadamente selvagem. Logo, o lema 2.4 implica que A é derivadamente selvagem.

3. Exatamente uma dessas flechas é um laço. Então, a menos de isomorfismo, Q possui o subquiver abaixo, denotado por Δ,

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow["b", loop, above, distance=2em, in=125, out=55] & 3 \arrow[l, "c"'] \end{tikzcd}$$

Caso $Q = \Delta$, por causa do lema 2.5 e do corolário 2.3, concluímos que o único ideal admissível possível em KQ de modo que $A = \frac{KQ}{I}$ seja derivadamente mansa é $I =< b^2 >$. Logo, A é isomorfa à álgebra 1.4 da tabela 1.1. Essa álgebra é skewed-gentle, veja o exemplo 2.11. Se $Q \neq \Delta$, mostraremos que para todo ideal admissível I de KQ a álgebra $\frac{KQ}{I}$ é derivadamente selvagem. Em Q, além de a, não temos outra flecha d começando em 1. Caso contrário, como do corolário 2.3 temos que $b^2 \in I$, com raciocínio e notações análogos aos dos exemplos 2.15 e 2.16 podemos construir o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo:

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{P}_2^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)b"] & \tilde{P}_2^{r_2} \arrow[r, "M(l_3)b"] & \tilde{P}_2^{r_3} \arrow[r, "M(l_4)b"] & \tilde{P}_2^{r_4} \arrow[r, "M(l_5)b"] & \tilde{P}_2^{r_5} \arrow[r, "M(l_6)b"] & \tilde{P}_2^{r_6} \\
\tilde{P}_2^{r_7} \arrow[ur, "M(l_1)b"] \arrow[r, "M(l_9)c"] \arrow[dr, "M(l_7)a"] & \tilde{P}_3^{r_{10}} & & & & & \\
 & \tilde{P}_1^{r_8} & & & & & \\
\tilde{P}_{t(d)}^{r_9} \arrow[ur, "M(l_8)d"] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

O funtor $-\otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Logo, A é derivadamente selvagem. De maneira análoga concluímos que a única flecha que começa no vértice 3 é c. Se em Q houver alguma outra flecha começando no vértice 2, além da flecha b, temos que Q possui o seguinte subquiver, a menos de isomorfismo: $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "a"'] & 2 \arrow[l, bend right, "d"'] \arrow[loop above, "b"] & 3 \arrow[l, "c"'] \end{tikzcd}$. O teorema 2.13 implica que $e_2Ae_2 \cong \frac{K[x]}{(x^2)}$. Logo, $da \in I$. Portanto, com raciocínio e notações análogos aos dos exemplos 2.15 e 2.16 podemos construir o complexo N de $K < x, y > -A$ bimódulos abaixo:

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{P}_2^{r_2} \arrow[r, "M(l_2)b"] & \tilde{P}_2^{r_2} \arrow[r, "M(l_3)b"] & \tilde{P}_2^{r_3} \arrow[r, "M(l_4)b"] & \tilde{P}_2^{r_4} \arrow[r, "M(l_5)b"] & \tilde{P}_2^{r_5} \arrow[r, "M(l_6)b"] & \tilde{P}_2^{r_6} \\
\tilde{P}_2^{r_7} \arrow[ur, "M(l_1)b"] \arrow[r, "M(l_9)c"] \arrow[dr, "M(l_7)a"] & \tilde{P}_3^{r_{10}} & & & & & \\
 & \tilde{P}_1^{r_8} \arrow[r, "M(l_8)d"] & \tilde{P}_2^{r_9} & & & &
\end{tikzcd}$$

O funtor $-\otimes_{K<x,y>} N : finK < x, y > \longrightarrow \mathcal{P}_{min}(A)$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Portanto, A é derivadamente selvagem.

Desse modo, a única álgebra cujo quiver não é bisserial que é derivadamente mansa é isomorfa à álgebra 1.4 da tabela 1.1, a menos de anti-isomorfismo. Além disso, essa álgebra é derivadamente equivalente, pelo exemplo 2.13, à álgebra 1.1 da tabela 1.1.

3.7 Demonstração do Teorema Principal

Essa seção destina-se a demonstrar o Teorema Principal.

Demonstração: "$\Rightarrow$"

Seja A uma $K-$álgebra de dimensão finita, básica e conexa sobre um corpo algebricamente fechado que possui exatamente 3 módulos simples. Então, pelo Teorema 2.1 de Gabriel podemos supor que A é uma álgebra de caminhos de um quiver com relações. Do Teorema 2.3 sabemos que a quantidade dos representantes das classes de isomorfismos dos $A-$módulos simples está em correspondência bijetiva com o número de vértices de Q_A. Desse modo, $\#(Q_A)_0 = 3$. Um quiver Q bisserial que possui 3 vértices possui no máximo 6 flechas. Nas seções 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 classificamos, a menos de isomorfismo e anti-isomorfismos, as álgebras derivadamente mansas cujo quiver é bisserial e possui, respectivamente, $2, 3, 4, 5$ e 6 flechas. Como pode ser conferido nessas respectivas seções, essas álgebras são gentles ou são isomorfas ou anti-isomorfas a uma das seguintes álgebras: 1.1-1.3, 1.5-1.8 da tabela 1.1. Na seção 3.6 classificamos as álgebras derivadamente mansas cujo quiver não é bisserial. Como vimos nessa seção essa álgebra é única e isomorfa à álgebra 1.4 da tabela 1.1, a menos de anti-isomorfismo.

"$\Leftarrow$"

Do Teorema 4 de [16] segue que toda álgebra gentle é derivadamente mansa. As álgebras 1.4 e 1.6 são álgebras skewed-gentle, veja os Exemplos 2.11 e 2.12 da seção 2.5. Logo, pelo Corolário 5 de [15] elas são derivadamente mansas. Conforme apêndice B, as álgebras 1.1 e 1.3 são derivadamente equivalentes, respectivamente, as álgebras 1.4 e 1.6. Como as álgebras 1.4 e 1.6 são derivadamente mansas o Teorema 2.11 implica que as álgebras 1.1 e 1.3 são derivadamente mansas. A álgebra 1.5 se degenera para a álgebra A.19 da tabela A.7. Enquanto que as álgebras 1.7 e 1.8 se degeneram, respectivamente, para as álgebras A.1 e A.8 da tabela A.5. Assim, de acordo com o Teorema 2.15 essas álgebras são derivadamente mansas. Já a álgebra 1.2 é derivadamente equivalente, conforme apêndice B, à álgebra 1.5. Portanto, o Teorema 2.11 implica que a álgebra 1.2 é derivadamente mansa. ■

Como consequência do teorema temos os seguintes corolários.

Corolário 3.3. *Seja A uma $K-$álgebra de dimensão finita, básica e conexa sobre um corpo algebricamente fechado que possui exatamente* 3 *módulos simples. A álgebra A*

é derivadamente discreta, se e somente se, ela é isomorfa ou anti-isomorfa a uma das álgebras da tabela A.11 ou a uma das álgebras da tabela A.9 exceto as álgebras A.42 e A.45.

Demonstração: Do Teorema 2.12 segue que precisamos encontrar as álgebras que são derivadamente equivalente à álgebras hereditárias KQ em que $\overline{Q}$ é um diagrama de Dynkin e as álgebras que possuem uma presentação $\frac{KQ}{I}$, onde (Q, I) é um par gentle, tal que Q possui somente um ciclo não orientado e o número de caminhos com sentido horário e com sentido anti-horário de comprimento dois nesse ciclo que pertencem a I são diferentes.

Como estamos trabalhando com álgebras cujo quiver possui três vértices então as álgebras do primeiro tipo são derivadamente equivalentes a KQ em que Q é o diagrama de Dynkin $\mathbb{A}_3$. Do Teorema da página 186 e do Corolário 5.5 de [44] segue que essas álgebras são as álgebras $A = \frac{KQ}{I}$ com (Q, I) um par gentle e $\overline{Q}$ um grafo árvore. Logo, A é isomorfa ou anti-isomorfa a uma das álgebras da tabela A.11.

Já as álgebras do segundo tipo são isomorfas ou anti-isomorfas a uma das álgebras da tabela A.9 exceto as álgebras A.42 e A.45.

Corolário 3.4. *Seja A uma $K-$álgebra de dimensão finita, básica e conexa sobre um corpo algebricamente fechado que possui exatamente 3 módulos simples. A álgebra A é derivadamente finita se, e somente se, A é isomorfa ou anti-isomorfa a uma das álgebras da tabela A.11*

Demonstração: Toda álgebra derivadamente finita é derivadamente discreta. Utilizando o Corolário 3.3 dessa tese e o Teorema 4 de [16] concluímos o resultado. ■

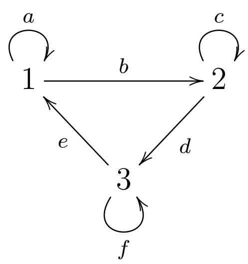
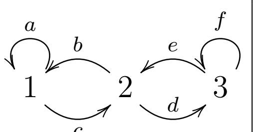
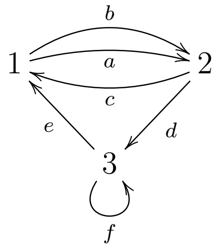
Apêndice A

Quivers bisseriais

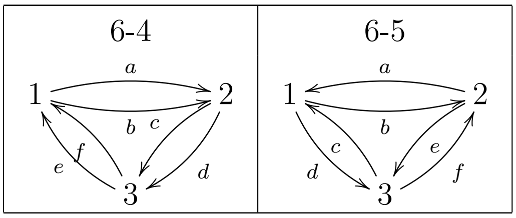
Nosso objetivo é encontrar todos os quivers bisseriais conexos que possuem 3 vértices. Por isso, nesse apêndice todos os quivers satisfazem as condições anteriores e não mencionaremos mais esse fato.

Como estamos trabalhando com quivers que possuem 3 vértices, para eles serem bisseriais eles devem possuir no máximo 6 flechas. Por isso, nosso objetivo se resume a encontrar os quivers que possuem seis, cinco, quatro, três e duas flechas.

Começaremos com os quivers que possuem 6 flechas. Logo, em cada um de seus vértices começa e termina duas flechas. Para cada uma das seguintes quantidades de laços: três, dois e um, temos apenas um quiver, a menos de isomorfismo, que são, respectivamente,

6-1	6-2	6-3
		

Caso o quiver não tenha laços, temos apenas duas opções: as flechas que começam em um determinado vértice terminam em um mesmo vértice ou terminam em vértices distintos, dando as opções:



A tabela abaixo resume todos os quivers bisseriais possíveis com 6 flechas,

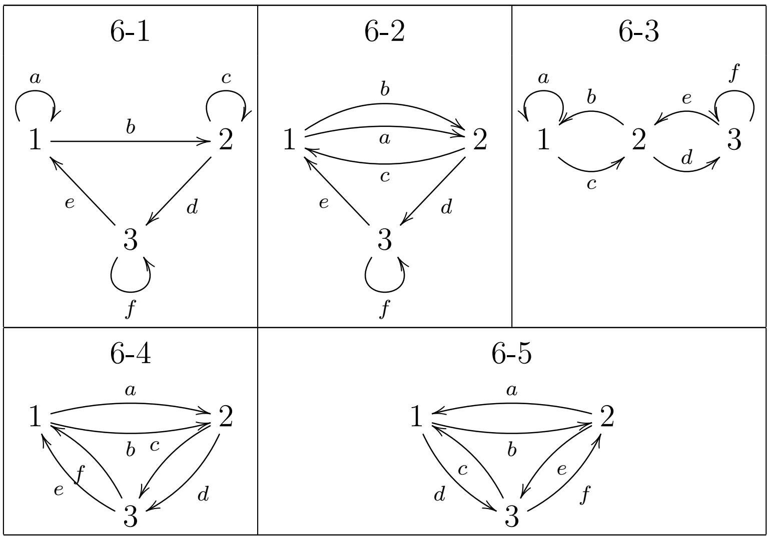


Tabela A.3: Quivers bisseriais conexos com seis flechas.

Lema A.1. *Seja* $A = \frac{KQ}{I}$ *uma* $K-$*álgebra tal que* (Q, I) *é um par que satisfaz as condições* $1 - 4$ *da definição 2.17 e em todo vértice começa exatamente duas flechas. Então,* A *é de dimensão infinita.*

Demonstração : Suponha que A seja de dimensão finita. Do fato que $radA \neq 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $rad^m A \neq 0$ e $rad^{m+1}A = 0$. Como (Q, I) é um par que satisfaz as condições $1 - 4$ da definição 2.17 e em todo vértice começa exatamente duas flechas concluímos que $m \geq 2$. Então, podemos tomar $\overline{z} \in rad^m A$, com $\overline{z} \neq 0$, tal que $\overline{z} = \overline{z_1\alpha_1}$ com $\alpha_1 \in Q_1$ e $z_1 \in radKQ$. Do fato que (Q, I) é um par que satisfaz as condições $1 - 4$ da definição 2.17 e em todo vértice começa exatamente duas flechas temos que existe $\alpha_2 \in Q_1$ tal que $\alpha_1\alpha_2 \notin I$. Devido ao fato que $m \geq 2$ e (Q, I) é um par que satisfaz as condições $1 - 4$ da definição 2.17 concluímos que $z\alpha_2 \notin I$, contradição com o fato que $rad^{m+1}A = 0$. ■

Como toda álgebra gentle é de dimensão finita o Lema A.1 implica que não existe álgebra gentle cujo quiver possui três vértices e seis flechas.

Eliminando uma flecha dos quivers da tabela A.3 de modo que o quiver resultante seja conexo obtemos os quivers bisseriais que possuem 5 flechas. A menos de isomorfismo, eles são apresentados na tabela abaixo:

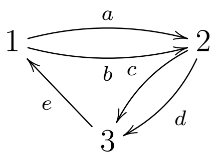
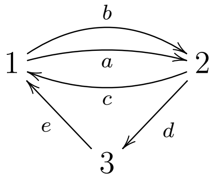
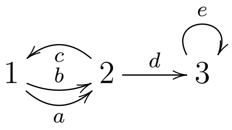
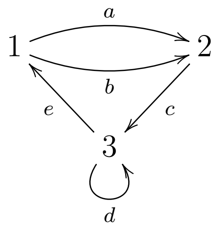
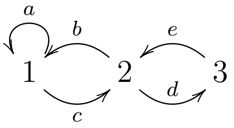
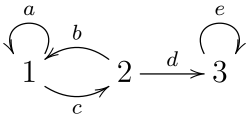
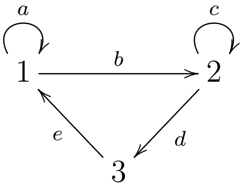
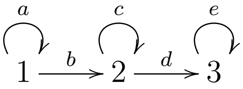
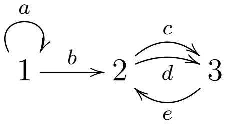
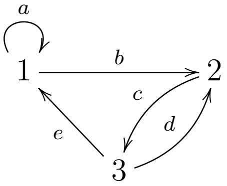
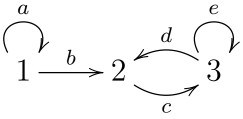
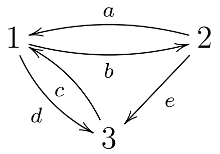
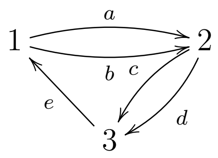
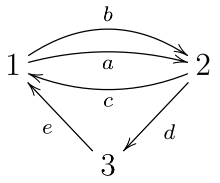
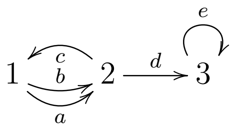
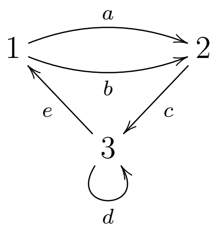
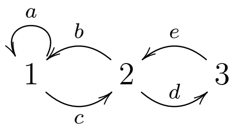
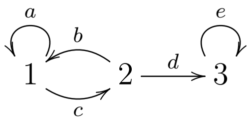
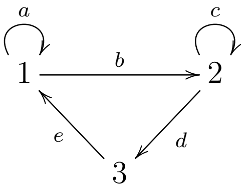
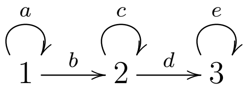
5-1 	5-2 	5-3 	5-4 
5-5 	5-6 	5-7 	5-8 
5-9 	5-10 	5-11 	5-12 

Tabela A.4: Quivers bisseriais conexos com cinco flechas.

Qualquer álgebra gentle cujo quiver possui 3 vértices e 5 flechas é isomorfa ou anti-isomorfa a uma das álgebras da tabela abaixo:

5 − 1  $I =< ac, bd, ea, ce >$ (A.1)	5 − 2  $I =< de, ca, bc, eb, ad >$ (A.2)
5 − 3  $I =< ca, bc, ad, e^2 >$ (A.3)	5 − 4  $I =< ce, bc, d^2, ea >$ (A.4)
5 − 5  $I =< a^2, bc, cb, de, ed >$ (A.5)	5 − 6  $I =< a^2, bc, cb, e^2 >$ (A.6)
5 − 7  $I =< a^2, c^2, de, eb, bd >$ (A.7)	5 − 8  $I =< a^2, c^2, e^2, bd >$ (A.8)

Continua na próxima página ...

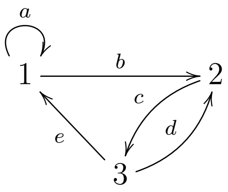
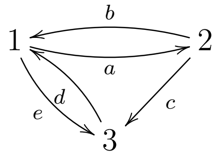
... continuação da página anterior.	
$5-10$  $I =< a^2, ce, dc, eb >$ (A.9) $I =< a^2, cd, bc, eb >$ (A.10)	$5-12$  $I =< ed, ab, da, be >$ (A.11) $I =< ba, ac, de, ed >$ (A.12) $I =< ab, ba, cd, de >$ (A.13)

Tabela A.5: Álgebras gentle cujos quivers possuem cinco flechas.

Eliminando uma flecha dos quivers da tabela A.4 de modo que o quiver resultante seja conexo obtemos os quivers bisseriais que possuem 4 flechas. A menos de isomorfismo, eles são apresentados na tabela seguinte:

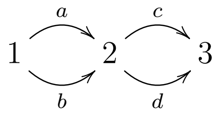
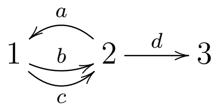
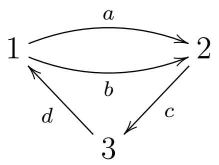
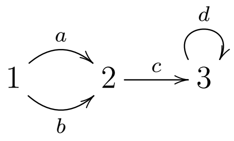
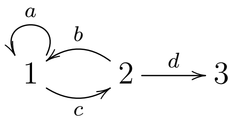
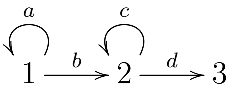
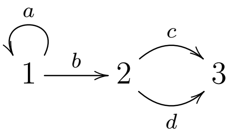
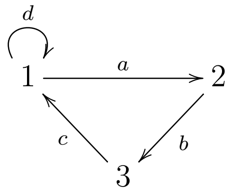
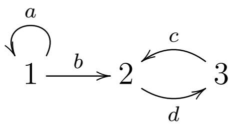
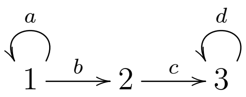
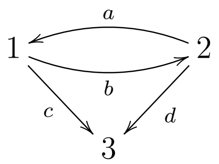
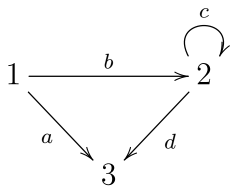
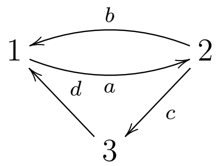
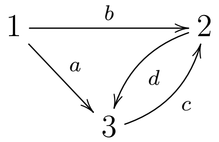
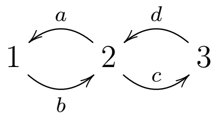
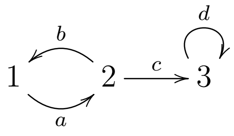
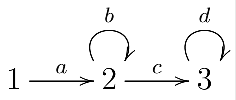
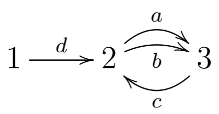
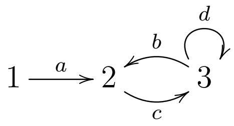
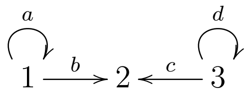
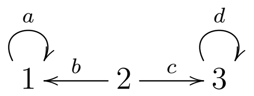
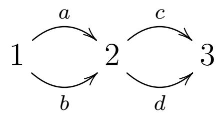
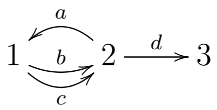
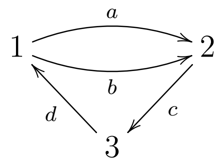
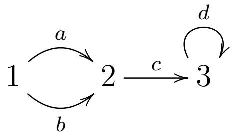
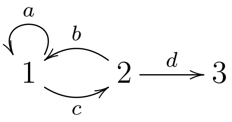
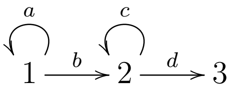
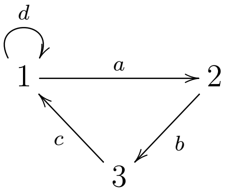
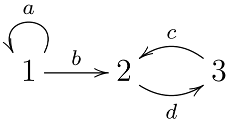
4-1 	4-2 	4-3 	4-4 
4-5 	4-6 	4-7 	4-8 
4-9 	4-10 	4-11 	4-12 
4-13 	4-14 	4-15 	4-16 
4-17 	4-18 	4-19 	4-20 
4-21 			

Tabela A.6: Quivers bisseriais conexos com quatro flechas.

Qualquer álgebra gentle cujo quiver possui 3 vértices e 4 flechas é isomorfa ou anti-isomorfa a uma das álgebras da tabela abaixo:

$4-1$  $I =< ac, bd >$ (A.14)	$4-2$  $I =< ab, ca, bd >$ (A.15)
$4-3$  $I =< da, bc >$ (A.16) $I =< da, cd, bc >$ (A.17) $I =< da, cd, ac >$ (A.18)	$4-4$  $I =< ac, d^2 >$ (A.19)
$4-5$  $I =< a^2, cb, bc >$ (A.20)	$4-6$  $I =< a^2, c^2, bd >$ (A.21)
$4-8$  $I =< d^2, ca, ab >$ (A.22) $I =< d^2, ca, bc >$ (A.23) $I =< d^2, ca, ab, bc >$ (A.24)	$4-9$  $I =< a^2, cd >$ (A.25) $I =< a^2, dc, bd >$ (A.26) $I =< a^2, cd, dc >$ (A.27)
Continua na próxima página ...	

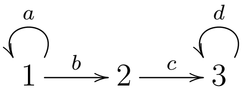
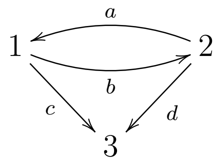
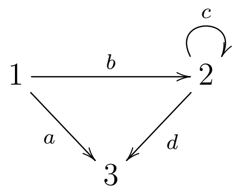
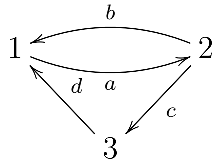
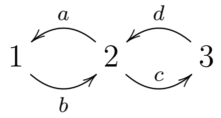
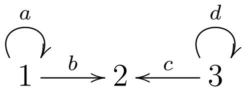
<table>
<tr><td colspan="2">... continuação da página anterior.</td></tr>
<tr><td>$4-10$

$I =< a^2, b^2 >$ (A.28)
$I =< a^2, b^2, bc >$ (A.29)</td><td>$4-11$

$I =< ab, ba >$ (A.30)
$I =< ab, bd >$ (A.31)</td></tr>
<tr><td>$4-12$

$I =< c^2, bd >$ (A.32)</td><td>$4-13$

$I =< ba, ac >$ (A.33)
$I =< ab, da >$ (A.34)
$I =< ab, cd, da >$ (A.35)
$I =< ab, cd, ba >$ (A.36)
$I =< cd, ba, ac >$ (A.37)</td></tr>
<tr><td>$4-15$

$I =< ba, ab, dc >$ (A.38)
$I =< ab, cd, bc, da >$ (A.39)
$I =< ab, ba, cd, dc >$ (A.40)</td><td>$4-20$

$I =< a^2, d^2 >$ (A.41)</td></tr>
</table>

Tabela A.7: Álgebras gentle cujos quivers possuem quatro flechas.

Eliminando uma flecha dos quivers da tabela A.6 de modo que o quiver resultante seja conexo obtemos os quivers que possuem 3 flechas. A menos de isomorfismo, eles são apresentados na tabela abaixo:

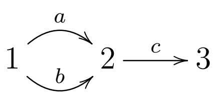
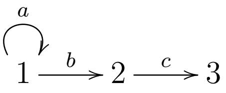
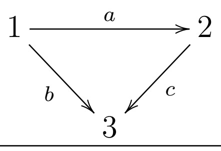
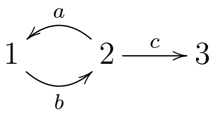
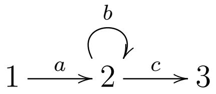
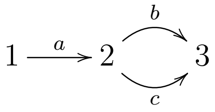
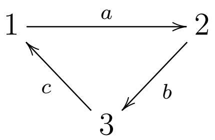
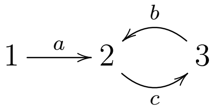
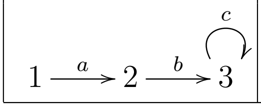
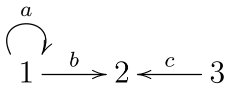
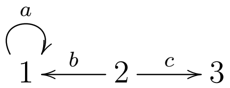
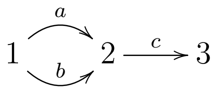
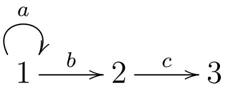
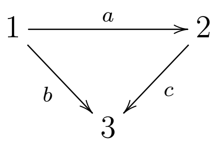
<table>
<tr>
<td>$3-1$
 </td>
<td>$3-2$
 </td>
<td>$3-3$
 </td>
<td>$3-4$
 </td>
</tr>
<tr>
<td>$3-5$
 </td>
<td>$3-6$
 </td>
<td>$3-7$
 </td>
<td>$3-8$
 </td>
</tr>
<tr>
<td>3-9
 </td>
<td>3-10
 </td>
<td colspan="2">3-11
 </td>
</tr>
</table>

Tabela A.8: Quivers bisseriais conexos com três flechas.

Qualquer álgebra gentle cujo quiver possui 3 vértices e 3 flechas é isomorfa ou anti-isomorfa a uma das álgebras da tabela abaixo:

<table>
<tr>
<td>$3-1$

$I =< ac >$ (A.42)</td>
<td>$3-2$

$I =< a^2 >$ (A.43)
$I =< a^2, bc >$ (A.44)</td>
<td>$3-3$

$I = 0$ (A.45)
$I =< ac >$ (A.46)</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Continua na próxima página ...</td>
</tr>
</table>

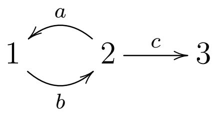
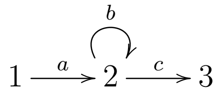
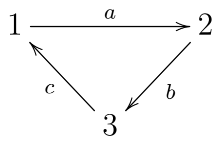
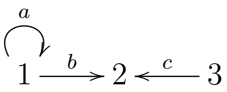
<table>
<tr><td colspan="3">... continuação da página anterior.</td></tr>
<tr>
<td>3 − 4

$I =< ba >$ (A.47)
$I =< ab, ba >$ (A.48)
$I =< ab, bc >$ (A.49)</td>
<td>3 − 5

$I =< b^2, ac >$ (A.50)</td>
<td>3 − 7

$I =< bc >$ (A.51)
$I =< ab, bc >$ (A.52)
$I =< ab, bc, ca >$ (A.53)</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">3 − 10

$I =< a^2 >$ (A.54)</td></tr>
</table>

Tabela A.9: Álgebras gentle cujos quivers possuem três flechas.

Eliminando uma flecha dos quivers da tabela A.8 de modo que o quiver resultante seja conexo obtemos os quivers bisseriais que possuem 2 flechas. A menos de isomorfismo, eles são apresentados na tabela abaixo:

2 − 1	2 − 2	2 − 3
$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$	$1 \xrightarrow{a} 2 \xleftarrow{b} 3$	$1 \xleftarrow{b} 2 \xrightarrow{a} 3$

Tabela A.10: Quivers bisseriais conexos com duas flechas.

Qualquer álgebra gentle cujo quiver possui 3 vértices e 2 flechas é isomorfa ou anti-isomorfa a uma das álgebras da tabela abaixo:

$2-1$	$2-3$
$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$	$1 \xleftarrow{b} 2 \xrightarrow{a} 3$
$I = 0$ (A.55) $I =< ab >$ (A.56)	$I = 0$ (A.57)

Tabela A.11: Álgebras gentle cujos quivers possuem duas flechas.

Apêndice B

Equivalência Derivada

Ao longo do nosso trabalho afirmamos que algumas álgebras eram derivadamente equivalentes a outras. Nesse apêndice fazemos os cálculos e mostramos porque a equivalência ocorre. Na maioria dos casos o mais importante é apresentar o complexo inclinante, pois as outras verificações serão triviais.

Nessa seção, Δ e J são, respectivamente, um quiver e um ideal admissível de $K\Delta$. Temos também que $End_{D^b(A)}T \cong \frac{K\Delta}{J}$, onde T é um complexo inclinante dado por $T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$. A flecha u em Δ que começa em i e termina em j corresponde ao homomorfismo u que pertence a $Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j)$. Observe que em $K\Delta$ a multiplicação é da esquerda para a direita ao contrário do que ocorre na álgebra de endomorfismos.

Vamos relembrar o fato a seguir porque ele será muito utilizado nesse apêndice. Seja S um espaço vetorial e $s_i \in S$, com $i \in J$. Denotaremos o subespaço gerado por $\{s_i | i \in J\}$ por $[(s_i)_{i \in J}]$.

1. Considere a álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ com $Q : \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[r, "c"] \arrow[loop above, "b"] & 3 \end{tikzcd}$ e $I =< b^2, abc >$. O complexo $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ onde

$$\begin{tikzcd}
T_1 & : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "a"] & P_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
T_2 & : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
T_3 & : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

é um complexo inclinante por motivo análogo ao do Exemplo 2.13.

Considere os seguintes homomorfismos:

$$\gamma \ : \ T_1 \to T_2 \text{ dado por } \begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "e_2"] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$$\alpha \ : \ T_2 \to T_2 \text{ dado por } \begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$$\delta \ : \ T_3 \to T_1 \text{ dado por } \begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "bc"] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "a"] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$$\beta \ : \ T_3 \to T_2 \text{ dado por } \begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

Do Lema 2.3 temos que

$$Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = \begin{cases} [Id_{T_i}], \text{ se } i = j = 1, 3 \\ [\alpha, Id_{T_2}], \text{ se } i = j = 2 \\ [\gamma, \alpha\gamma], \text{ se } i = 1 \text{ e } j = 2 \\ [\delta], \text{ se } i = 3 \text{ e } j = 1 \\ [\beta, \alpha\beta], \text{ se } i = 3 \text{ e } j = 2 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, temos que $End_{D^b(A)}T \cong \frac{K\Delta}{J}$ para algum J contido em $K\Delta$ e

$$\Delta : \begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "\gamma"] & & 2 \arrow[loop above, "\alpha"] \\ & 3 \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

É fácil ver que $\alpha^2 = \gamma\delta - \alpha\beta = 0$ em $End_{D^b(A)}T$. Logo, $< \alpha^2, \delta\gamma - \beta\alpha > \subseteq J$. Seja $L =< \alpha^2, \delta\gamma - \beta\alpha >$. Como $dim_K Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = dim_K e_i \left(\frac{K\Delta}{L}\right) e_j$ temos que $L = J$. Sabemos pelo Teorema 2.9 que A é derivadamente equivalente a $End_{D^b(A)}T$.

2. Considere a álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ com $Q:$ $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[loop above, "b"] \arrow[r, "c"] & 3 \end{tikzcd}$ e $I =< b^2, ac, abc >$. O complexo $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ onde

$$\begin{tikzcd} T_1 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "a"] & P_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ T_2 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ T_3 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

é um complexo inclinante por motivo análogo ao do Exemplo 2.13.

Considere os seguintes homomorfismos:

$$\gamma : T_1 \to T_2 \text{ dado por } \begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "e_2"] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$$\alpha : T_2 \to T_2 \text{ dado por } \begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$$\delta : T_3 \to T_1 \text{ dado por } \begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "bc"] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "a"] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$$\beta : T_3 \to T_1 \text{ dado por } \begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "a"] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

Do Lema 2.3 temos que

$$Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = \begin{cases} [Id_{T_i}], \text{ se } i = j = 1, 3 \\ [\alpha, Id_{T_2}], \text{ se } i = j = 2 \\ [\gamma, \alpha\gamma], \text{ se } i = 1 \text{ e } j = 2 \\ [\delta, \beta], \text{ se } i = 3 \text{ e } j = 1 \\ [\alpha\gamma\beta] = [\gamma\delta], \text{ se } i = 3 \text{ e } j = 2 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, temos que $End_{D^b(A)}T \cong \frac{K\Delta}{J}$ para algum J contido em $K\Delta$ e

$$\begin{tikzcd} \Delta : 3 \arrow[r, bend left, "\delta"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 1 \arrow[r, "\gamma"] & 2 \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

É fácil ver que $\alpha\gamma\beta - \gamma\delta = \alpha^2 = 0$ em $End_{D^b(A)}T$. Logo, $< \beta\gamma\alpha - \delta\gamma, \alpha^2 > \subseteq J$. Seja $L =< \beta\gamma\alpha - \delta\gamma, \alpha^2 >$. Como $dim_K Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = dim_K e_i \left(\frac{K\Delta}{L}\right) e_j$ temos que $L = J$. Sabemos pelo Teorema 2.9 que A é derivadamente equivalente a $End_{D^b(A)}T$.

3. Para a álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ onde $Q :$
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "a"] & & 2 \arrow[dl, "b"] \\ & 3 \arrow[ul, "c"] & \end{tikzcd}$$
e $I =< ab, bca >$ o complexo $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ é um complexo inclinante, onde

$$\begin{tikzcd} T_1 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "c"] & P_3 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ T_2 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ T_3 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Temos que verificar que $Hom_{D^b(A)}(T, T[i]) = 0$ se $i \neq 0$ e que add$T$ gera K^b(proj A) como categoria triangulada. A segunda condição segue do Lema 2.2. Agora verificaremos a primeira. Como $ker(c\cdot) = 0 = ker(\cdot c)$ do Lema 2.3 segue que $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_1[-1]) = 0$. Já $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_1[1]) = 0$, $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_2[1]) = 0$ e $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_3[1]) = 0$, por causa do Lema 2.3 e dos fatos que $e_3Ae_1 = e_3Ac$ e $e_2Ae_1 = e_2Ac$. Nos demais casos, se $j \neq 0$, temos que $Hom_{D^b(A)}(T_1, T[j]) = 0$. Do Lema 2.3 e do fato que $ker(c\cdot) = 0$ obtemos que $Hom_{D^b(A)}(T_2, T_1[-1]) = 0$ e $Hom_{D^b(A)}(T_3, T_1[-1]) = 0$. Logo, se $j \neq 0$, temos que $Hom_{D^b(A)}(T_2, T[j]) = 0$ e $Hom_{D^b(A)}(T_3, T[j]) = 0$.

Considere os seguintes homomorfismos:

$$\begin{tikzcd}
\alpha : T_2 \to T_3 \text{ dado por } & \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "ca"] & 0 \cdots \\
& \cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\beta : T_3 \to T_1 \text{ dado por } & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "e_3"] & 0 \cdots \\
& \cdots 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "c"] & P_3 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\gamma : T_3 \to T_2 \text{ dado por } & \cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \cdots \\
& \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

Do Lema 2.3 temos que

$$Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = \begin{cases} [Id_{T_i}], \text{ se } i = j = 1, 2, 3 \\ [\alpha], \text{ se } i = 2 \text{ e } j = 3 \\ [\beta], \text{ se } i = 3 \text{ e } j = 1 \\ [\gamma], \text{ se } i = 3 \text{ e } j = 2 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, temos que $End_{D^b(A)}T \cong \frac{K\Delta}{J}$ para algum J contido em $K\Delta$ e Δ : $\begin{tikzcd} 1 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & 2 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \end{tikzcd}$. É fácil ver que $\gamma\alpha = \beta\alpha = \alpha\gamma = 0$ em $End_{D^b(A)}T$. Logo, $< \alpha\gamma, \alpha\beta, \gamma\alpha > \subseteq J$. Seja $L =< \alpha\gamma, \alpha\beta, \gamma\alpha >$. Como $dim_K Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = dim_K e_i \left(\frac{K\Delta}{L}\right) e_j$ temos que $L = J$. Sabemos pelo Teorema 2.9 que A é derivadamente equivalente a $End_{D^b(A)}T$.

4. Para a álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ em que Q : $\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "a"] & & 2 \arrow[dl, "b"] \\ & 3 \arrow[ul, "c"] & \end{tikzcd}$ e $I =< abc, cab >$ o complexo $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ é um complexo inclinante, onde

$$\begin{tikzcd}
T_1 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "a"] & P_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
T_2 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
T_3 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Temos que verificar que $Hom_{D^b(A)}(T, T[i]) = 0$ se $i \neq 0$ e que add$T$ gera K^b(proj A) como categoria triangulada. A segunda condição segue do Lema 2.2. Enquanto que a primeira segue do Lema 2.3.

Considere os seguintes homomorfismos:

$\alpha \ : \ T_1 \to T_2$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "e_2"] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

$\delta \ : \ T_2 \to T_1$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "bca"] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "a"] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

$\beta \ : \ T_2 \to T_3$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "ca"] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

$\gamma \ : \ T_3 \to T_2$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

Do Lema 2.3 temos que

$$Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = \begin{cases} [Id_{T_i}], \text{ se } i = j = 1, 3 \\ [Id_{T_i}, \alpha\delta], \text{ se } i = j = 2 \\ [\alpha], \text{ se } i = 1 \text{ e } j = 2 \\ [\delta], \text{ se } i = 2 \text{ e } j = 1 \\ [\beta], \text{ se } i = 2 \text{ e } j = 3 \\ [\gamma], \text{ se } i = 3 \text{ e } j = 2 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, temos que $End_{D^b(A)}T \cong \frac{K\Delta}{J}$ para algum J contido em $K\Delta$ e Δ : $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "\alpha"'] & 2 \arrow[l, bend right, "\delta"'] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\gamma"'] \end{tikzcd}$. É fácil ver que $\alpha\delta - \gamma\beta = \delta\alpha = \beta\gamma = \beta\alpha = \delta\gamma = 0$ em $End_{D^b(A)}T$. Logo, $< \delta\alpha - \beta\gamma, \alpha\delta, \gamma\beta, \alpha\beta, \gamma\delta > \subseteq J$. Seja $L =< \delta\alpha - \beta\gamma, \alpha\delta, \gamma\beta, \alpha\beta, \gamma\delta >$. Como $dim_K Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = dim_K e_i \left(\frac{K\Delta}{L}\right) e_j$

temos que $L = J$. Sabemos pelo Teorema 2.9 que A é derivadamente equivalente a $End_{D^b(A)}T$.

5. Na álgebra $A = \frac{KQ}{I}$ em que Q : $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & 2 \arrow[r, bend left, "c"] \arrow[r, bend right, "d"'] & 3 \end{tikzcd}$ e $I = < ad + bc, ac, bd >$ o complexo $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ é um complexo inclinante, onde

$$\begin{tikzcd}
T_1 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \oplus P_2 \arrow[r, "{\left[\begin{array}{cc} a & b \end{array}\right]}"] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \\
T_2 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \\
T_3 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

Temos que verificar que $Hom_{D^b(A)}(T, T[i]) = 0$ se $i \neq 0$ e que add$T$ gera K^b(proj A) como categoria triangulada. A segunda condição segue do Lema 2.2. Agora verificaremos a primeira. Como $e_iAe_1 = 0$ para $i \in \{2, 3\}$ temos que $Hom_{D^b(A)}(T_1, T[-1]) = 0$. Seja $\phi \in Hom_{D^b(A)}(T_1, T_1[1])$. Temos que $\phi^i = 0$ se $i \neq 0$ e $\phi^0 = \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 a + \lambda_2 b & \lambda_3 a + \lambda_4 b \end{array} \right)$, com $\lambda_i \in K$. Tomando a família de morfismos $s^i : T_1^i \to T_1^{i-1}[1]$ dada por $s^i = 0$, se $i \neq 0$, e $s^0 = \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 e_2 & \lambda_3 e_2 \\ \lambda_2 e_2 & \lambda_4 e_2 \end{array} \right)$, com $\lambda_i \in K$, obtemos que $\phi^i = d^{i-1} \circ s^i + s^{i+1} \circ d^i$. Portanto, $\phi \sim 0$. Por isso, $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_1[1]) = 0$. Assim, $Hom_{D^b(A)}(T_1, T[k]) = 0$ se $k \neq 0$.

Dado $\psi \in Hom_{D^b(A)}(T_2, T_1[1])$ temos que $\psi^i = 0$, se $i \neq 0$, e $\psi^0 = \lambda_1 a + \lambda_2 b$, com $\lambda_i \in K$. Considere a família de morfismos $s^i : T_2^i \to T_1^{i-1}[1]$ dada por $s^i = 0$, se $i \neq 0$, e $s^0 = \left(\begin{array}{c} \lambda_1 e_2 \\ \lambda_2 e_2 \end{array} \right)$, com $\lambda_i \in K$. Obtemos que $\psi^i = d^{i-1} \circ s^i + s^{i+1} \circ d^i$. Portanto, $\psi \sim 0$. Por isso, $Hom_{D^b(A)}(T_2, T_1[1]) = 0$. Assim, $Hom_{D^b(A)}(T_2, T[k]) = 0$ se $k \neq 0$.

Seja $\varphi \in Hom_{D^b(A)}(T_3, T_1[1])$. Temos que $\varphi^i = 0$ se $i \neq 0$ e $\varphi^0 = \lambda_1 bc$, com $\lambda_1 \in K$. Considere a família de morfismos $s^i : T_3^i \to T_1^{i-1}[1]$ dada por $s^i = 0$ se $i \neq 0$ e $s^0 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \lambda_1 c \end{array} \right)$, com $\lambda_1 \in K$. Obtemos que $\varphi^i = d^{i-1} \circ s^i + s^{i+1} \circ d^i$. Portanto, $\varphi \sim 0$. Por isso, $Hom_{D^b(A)}(T_3, T_1[1]) = 0$. Assim, $Hom_{D^b(A)}(T_3, T[k]) = 0$ se $k \neq 0$.

Considere os seguintes homomorfismos:

$\alpha \ : \ T_1 \to T_2$ dado por

$$\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&]
\cdots 0 \arrow[r] \& P_2 \oplus P_2 \arrow[r, "{\begin{bmatrix} a \& b \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "\alpha_1"] \& P_1 \arrow[r] \& 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] \& P_2 \arrow[r] \& 0 \arrow[r] \& 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

onde $\alpha_1 = \begin{bmatrix} e_2 & 0 \end{bmatrix}$;

$\beta \ : \ T_1 \to T_2$ dado por

$$\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&]
\cdots 0 \arrow[r] \& P_2 \oplus P_2 \arrow[r, "{\begin{bmatrix} a \& b \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "\beta_1"] \& P_1 \arrow[r] \& 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] \& P_2 \arrow[r] \& 0 \arrow[r] \& 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

onde $\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & e_2 \end{bmatrix}$;

$\gamma \ : \ T_3 \to T_1$ dado por

$$\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&]
\cdots 0 \arrow[r] \& P_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_1"] \& 0 \arrow[r] \& 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] \& P_2 \oplus P_2 \arrow[r, "{\begin{bmatrix} a \& b \end{bmatrix}}"] \& P_1 \arrow[r] \& 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

onde $\gamma_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\delta \ : \ T_3 \to T_1$ dado por

$$\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&]
\cdots 0 \arrow[r] \& P_3 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] \& 0 \arrow[r] \& 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] \& P_2 \oplus P_2 \arrow[r, "{\begin{bmatrix} a \& b \end{bmatrix}}"] \& P_1 \arrow[r] \& 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

onde $\delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$;

$\epsilon \ : \ T_3 \to T_1$ dado por

$$\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&]
\cdots 0 \arrow[r] \& P_3 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_1"] \& 0 \arrow[r] \& 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] \& P_2 \oplus P_2 \arrow[r, "{\begin{bmatrix} a \& b \end{bmatrix}}"] \& P_1 \arrow[r] \& 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

onde $\epsilon_1 = \begin{bmatrix} d \\ c \end{bmatrix}$.

Devido ao fato que $e_3Ae_2 = 0$ temos que $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_3) = 0$ e $Hom_{D^b(A)}(T_2, T_3) = 0$. Como $e_2Ae_2 \cong K$ e $e_3Ae_3 \cong K$ temos, respectivamente, que $Hom_{D^b(A)}(T_2, T_1) = 0$, $Hom_{D^b(A)}(T_2, T_2) \cong K$ e $Hom_{D^b(A)}(T_3, T_3) \cong K$.

Dado $\phi \in Hom_{D^b(A)}(T_1, T_1)$ temos que $\phi^i = 0$, se $i \notin \{0, 1\}$, $\phi^0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_2 & \lambda_2 e_2 \\ \lambda_3 e_2 & \lambda_4 e_2 \end{pmatrix}$ e $\phi^1 = \mu e_1$, com $\lambda_i, \mu \in K$. Além disso, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \oplus P_2 \arrow[r, "{\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "\phi^0"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi^1"] & 0 \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \oplus P_2 \arrow[r, "{\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}}"] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

Como $Hom_A(P_1, P_2) = 0$, segue da comutatividade do diagrama que $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_1) \cong K$.

Se $\varphi \in Hom_{D^b(A)}(T_1, T_2)$ temos que $\varphi^i = 0$, se $i \neq 0$, e $\varphi^0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_2 & \lambda_2 e_2 \end{pmatrix}$, com $\lambda_i \in K$. Além disso, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \oplus P_2 \arrow[r, "{\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}}"] \arrow[d, "\varphi^0"] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

Como $Hom_A(P_1, P_2) = 0$, segue da comutatividade do diagrama que $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_2) = [\alpha, \beta]$.

Dado $\psi \in Hom_{D^b(A)}(T_3, T_1)$ temos que $\psi^i = 0$, se $i \neq 0$, e $\psi^0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 c + \lambda_2 d \\ \lambda_3 c + \lambda_4 d \end{pmatrix}$, com $\lambda_i \in K$. Além disso, o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "\psi^0"] & 0 \arrow[r] & 0 \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \oplus P_2 \arrow[r, "{\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}}"] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

Da comutatividade do diagrama temos que $\lambda_2 = \lambda_3$. Logo, $\psi = \lambda_1 \gamma + \lambda_4 \delta + \lambda_2 \epsilon$. Por isso, $Hom_{D^b(A)}(T_3, T_1) = [\delta, \gamma, \epsilon]$.

Como $Hom_A(P_3, P_2) \cong e_2 A e_3$ temos que $Hom_{D^b(A)}(T_3, T_2) = [\alpha\gamma, \beta\delta]$.

Resumindo obtemos que

$$Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = \begin{cases} [Id_{T_i}], \text{ se } i = j = 1, 2, 3 \\ [\alpha, \beta], \text{ se } i = 1 \text{ e } j = 2 \\ [\delta, \gamma, \epsilon], \text{ se } i = 3 \text{ e } j = 1 \\ [\alpha\gamma, \beta\delta], \text{ se } i = 3 \text{ e } j = 2 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, temos que $End_{D^b(A)}T \cong \frac{K\Delta}{J}$ para algum J contido em $K\Delta$ e Δ : $\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, bend left=50, "\delta"] \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[r, bend right=50, "\gamma"'] & 1 \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\alpha"'] & 2 \end{tikzcd}$. É fácil ver que $\beta\gamma = \alpha\delta = \alpha\epsilon - \beta\delta = \beta\epsilon - \alpha\gamma = 0$ em $End_{D^b(A)}T$. Logo, $< \gamma\beta, \delta\alpha, \epsilon\alpha - \delta\beta, \epsilon\beta - \gamma\alpha > \subseteq J$. Seja $L =< \gamma\beta, \delta\alpha, \epsilon\alpha - \delta\beta, \epsilon\beta - \gamma\alpha >$. Como $dim_K Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = dim_K e_i \left(\frac{K\Delta}{L}\right) e_j$ temos que $L = J$. Sabemos pelo Teorema 2.9 que A é derivadamente equivalente a $End_{D^b(A)}T$.

6. Na álgebra $A = \frac{KQ}{I}$, em que Q : $\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r, "b"] & 2 \arrow[loop above, "c"] \arrow[r, "d"] & 3 \end{tikzcd}$ e $I =< a^2, c^2, bd, bcd >$ segue dos Lemas 2.2 e 2.3 que o complexo $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ é inclinante, onde

$$\begin{tikzcd} T_1 : \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T_2 : \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T_3 : \cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "d"] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

Considere os seguintes homomorfismos:

$\alpha \ : \ T_1 \to T_1$ dado por
$$\begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"] & 0\cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0\cdots \end{tikzcd}$$

$\delta \ : \ T_2 \to T_2$ dado por
$$\begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0\cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0\cdots \end{tikzcd}$$

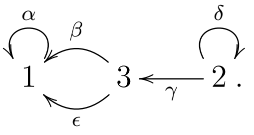
$\gamma \ : \ T_2 \to T_3$ dado por
$$\begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "e_2"] & 0\cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "d"] & P_2 \arrow[r] & 0\cdots \end{tikzcd}$$

$\epsilon \ : \ T_3 \to T_1$ dado por
$$\begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "d"] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "bc"] & 0\cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0\cdots \end{tikzcd}$$

$\beta \ : \ T_3 \to T_1$ dado por
$$\begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "d"] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0\cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0\cdots \end{tikzcd}$$

Do Lema 2.3 temos que os homomorfismos entre os somandos diretos de T são:

$$Hom_{D^b(A)}(T_i,T_j) = \begin{cases} [Id_{T_i}, \alpha], \text{ se } i=j=1 \\ [Id_{T_i}, \delta], \text{ se } i=j=2 \\ [Id_{T_i}], \text{ se } i=j=3 \\ [\beta\gamma, \alpha\beta\gamma, \beta\gamma\delta, \alpha\beta\gamma\delta], \text{ se } i=2 \text{ e } j=1 \\ [\gamma, \gamma\delta], \text{ se } i=2 \text{ e } j=3 \\ [\beta, \epsilon, \alpha\epsilon, \alpha\beta], \text{ se } i=3 \text{ e } j=1 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, temos que $End_{D^b(A)}T \cong \frac{K\Delta}{J}$ para algum J contido em $K\Delta$ e Δ : . É fácil ver que $\alpha^2 = \delta^2 = \epsilon\gamma - \beta\gamma\delta = 0$ em $End_{D^b(A)}T$. Logo, $< \alpha^2, \delta^2, \gamma\epsilon - \delta\gamma\beta > \subseteq J$. Seja $L =< \alpha^2, \delta^2, \gamma\epsilon - \delta\gamma\beta >$. Como

$dim_K Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = dim_K e_i \left(\frac{K\Delta}{L}\right) e_j$ temos que $L = J$. Sabemos pelo Teorema 2.9 que A é derivadamente equivalente a $End_{D^b(A)}T$.

7. Na álgebra $A = \frac{KQ}{I}$, onde $Q : \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r, "b"] & 2 \arrow[loop above, "c"] \arrow[r, "d"] & 3 \end{tikzcd}$ e $I =< a^2, c^2, bcd + \lambda abd >$ com $\lambda \in K$, segue dos Lemas 2.2 e 2.3 que o complexo $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ é inclinante, onde

$$\begin{tikzcd} T_1 : \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T_2 : \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T_3 : \cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "d"] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

Considere os seguintes homomorfismos:

$\alpha : T_1 \to T_1$ dado por
$$\begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"] & 0 \cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$\beta : T_2 \to T_1$ dado por
$$\begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$\delta : T_2 \to T_2$ dado por
$$\begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$\gamma : T_2 \to T_3$ dado por
$$\begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "e_2"] & 0 \cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "d"] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

$\epsilon : T_3 \to T_1$ dado por
$$\begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "d"] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "bc+\lambda ab"] & 0 \cdots \\ \cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots \end{tikzcd}$$

Do Lema 2.3 temos que os homomorfismos entre os somandos diretos de T são:

$$Hom_{D^b(A)}(T_i,T_j) = \begin{cases} [Id_{T_i},\alpha], \text{ se } i=j=1 \\ [Id_{T_i},\delta], \text{ se } i=j=2 \\ [Id_{T_i}], \text{ se } i=j=3 \\ [\beta,\alpha\beta,\beta\delta,\alpha\beta\delta], \text{ se } i=2 \text{ e } j=1 \\ [\gamma,\gamma\delta], \text{ se } i=2 \text{ e } j=3 \\ [\epsilon,\alpha\epsilon], \text{ se } i=3 \text{ e } j=1 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, temos que $\Gamma = End_{D^b(A)}T \cong \frac{K\Delta}{J}$ para algum J contido em $K\Delta$ e

$$\begin{tikzcd} \Delta: & 2 \arrow[loop above, "\delta"] \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & 1 \arrow[loop above, "\alpha"] \\ & & 3 \arrow[ur, "\epsilon"'] & \end{tikzcd}$$

É fácil ver que $\alpha^2 = \delta^2 = \beta\delta + \lambda\alpha\beta - \epsilon\gamma = 0$ em $End_{D^b(A)}T$. Logo, $<\alpha^2,\delta^2,\delta\beta+\lambda\beta\alpha-\gamma\epsilon>\subseteq J$. Seja $L = <\alpha^2,\delta^2,\delta\beta+\lambda\beta\alpha-\gamma\epsilon>$. Como $dim_K Hom_{D^b(A)}(T_i,T_j) = dim_K e_i\left(\frac{K\Delta}{L}\right)e_j$ temos que $L = J$. Sabemos pelo Teorema 2.9 que A é derivadamente equivalente a $End_{D^b(A)}T$.

8. Na álgebra $A = \frac{KQ}{I}$, onde

$$\begin{tikzcd} Q: & 1 \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "a"'] & & 2 \arrow[loop above, "c"] \arrow[dl, "d"] \\ & & 3 & \end{tikzcd}$$

e $I = <c^2, bd, bcd>$ o complexo $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ é inclinante, em que

$$\begin{tikzcd} T_1 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ T_2 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ T_3 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Temos que verificar que $Hom_{D^b(A)}(T, T[i]) = 0$ se $i \neq 0$ e que add$T$ gera K^b(proj A) como categoria triangulada. A segunda condição segue do Lema 2.2. Agora verificaremos a primeira. Como $e_3Ae_i = 0$ para $i \in \{1, 2\}$ temos que $Hom_{D^b(A)}(T, T_3[-1]) = 0$. Assim, $Hom_{D^b(A)}(T_j, T[l]) = 0$ se $l \neq 0$ e $j \in \{1, 2\}$. Dos fatos que $e_1Ae_3 = e_1Aa$ e $e_2Ae_3 = e_2Ad$ obtemos que $Hom_{D^b(A)}(T_3, T[1]) = 0$. Logo, $Hom_{D^b(A)}(T_3, T[l]) = 0$ se $l \neq 0$.

Considere os seguintes homomorfismos:

$\alpha \ : \ T_1 \to T_3$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & 0\cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "{\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}}"'] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & 0\cdots
\end{tikzcd}$$

em que $\alpha_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\delta \ : \ T_2 \to T_2$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0\cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0\cdots
\end{tikzcd}$$

$\epsilon \ : \ T_2 \to T_3$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_1"] & 0\cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "{\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}}"'] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & 0\cdots
\end{tikzcd}$$

em que $\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}$;

$\beta \ : \ T_3 \to T_1$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "{\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}}"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_1"] & 0\cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

em que $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & bc \end{pmatrix}$;

$\gamma \ : \ T_3 \to T_1$ é dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "{\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}}"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_1"] & 0\cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0\cdots
\end{tikzcd}$$

em que $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \end{pmatrix}$.

Já que $e_1Ae_1 \cong K$ obtemos que $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_1) \cong K$. Como $e_2Ae_1 = e_3Ae_1 =$

0 e $e_1Ae_1 \cong K$ segue que $Hom_{D^b(A)}(T_1,T_2) = 0$ e $Hom_{D^b(A)}(T_1,T_3) = [\alpha]$. Do fato que $Hom_A(P_2,P_1) \cong e_1Ae_2$ e $Hom_A(P_2,P_2) \cong e_2Ae_2$ temos, respectivamente, que $Hom_{D^b(A)}(T_2,T_1) = [\gamma\epsilon, \beta\epsilon]$ e $Hom_{D^b(A)}(T_2,T_2) = [Id_{T_2}, \delta]$.

Seja $\phi \in Hom_{D^b(A)}(T_2,T_3)$. Temos que $\phi^i = 0$ para todo $i \neq 1$ e $\phi^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 b + \lambda_2 bc \\ \lambda_3 e_2 + \lambda_4 c \end{pmatrix}$, com $\lambda_i \in K$. Além disso, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\phi^1"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "{\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}}"'] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como o diagrama comuta e $e_3Ae_2 = 0$ temos que $Hom_{D^b(A)}(T_2,T_3) = [\epsilon, \alpha\gamma\epsilon, \alpha\beta\epsilon, \epsilon\delta]$.

Dado $\psi \in Hom_{D^b(A)}(T_3,T_1)$, temos que $\psi^i = 0$ para todo $i \neq 1$ e $\psi^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_1 & \lambda_2 b + \lambda_3 bc \end{pmatrix}$, com $\lambda_i \in K$. Além disso, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "{\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}}"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\psi^1"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Logo, $\lambda_1 a + \lambda_2 bd + \lambda_3 bcd = 0$. Portanto, $\lambda_1 = 0$ e $Hom_{D^b(A)}(T_3,T_1) = [\beta, \gamma]$.

Seja $\varphi \in Hom_{D^b(A)}(T_3,T_2)$. Temos que $\varphi^i = 0$ para todo $i \neq 1$ e $\varphi^1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 e_2 + \lambda_2 c \end{pmatrix}$, com $\lambda_i \in K$. Além disso, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "{\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}}"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^1"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Então, $\lambda_1 d + \lambda_2 cd = 0$. Portanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Assim, $Hom_{D^b(A)}(T_3,T_2) = 0$.

Dado $\xi \in (T_3, T_3)$, temos que $\xi^i = 0$ para $i \notin \{0,1\}$, $\xi^0 = \mu e_3$ e $\xi^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_1 & \lambda_2 b + \lambda_3 bc \\ 0 & \lambda_4 e_2 + \lambda_5 c \end{pmatrix}$, com $\mu, \lambda_i \in K$. Além disso, o diagrama abaixo é comutativo:

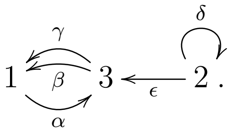
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\xi^0"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\xi^1"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}"'] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Então, $\begin{pmatrix} \mu a \\ \mu d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a + \lambda_2 bd + \lambda_3 bcd \\ \lambda_4 d + \lambda_5 cd \end{pmatrix}$. Logo, $\mu = \lambda_1 = \lambda_4$ e $\lambda_5 = 0$. Assim, $Hom_{D^b(A)}(T_3, T_3) = [Id_{T_3}, \alpha\beta, \alpha\gamma]$.

Resumindo obtemos que:

$$Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = \begin{cases} [Id_{T_i}], \text{ se } i = j = 1 \\ [Id_{T_i}, \delta], \text{ se } i = j = 2 \\ [Id_{T_i}, \alpha\beta, \alpha\gamma], \text{ se } i = j = 3 \\ [\alpha], \text{ se } i = 1 \text{ e } j = 3 \\ [\gamma\epsilon, \beta\epsilon], \text{ se } i = 2 \text{ e } j = 1 \\ [\epsilon, \alpha\gamma\epsilon, \alpha\beta\epsilon, \epsilon\delta], \text{ se } i = 2 \text{ e } j = 3 \\ [\beta, \gamma], \text{ se } i = 3 \text{ e } j = 1 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, temos que $End_{D^b(A)}T \cong \frac{K\Delta}{J}$ para algum J contido em $K\Delta$ e Δ :



. É fácil ver que $\delta^2 = \beta\alpha = \gamma\alpha = \gamma\epsilon\delta - \beta\epsilon = 0$ em $End_{D^b(A)}T$. Logo, $< \delta^2, \alpha\beta, \alpha\gamma, \delta\epsilon\gamma - \epsilon\beta > \subseteq J$. Seja $L = < \delta^2, \alpha\beta, \alpha\gamma, \delta\epsilon\gamma - \epsilon\beta >$. Como $dim_K Hom_{D^b(A)}(T_i, T_j) = dim_K e_i \left(\frac{K\Delta}{L}\right) e_j$ temos que $L = J$. Sabemos pelo Teorema 2.9 que A é derivadamente equivalente a $End_{D^b(A)}T$.

9. Na álgebra $A = \frac{KQ}{I}$, onde

$$\begin{tikzcd}
Q: 1 \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "a"'] & & 2 \arrow[loop above, "c"] \arrow[dl, "d"] \\
& 3 &
\end{tikzcd}$$

e $I =< c^2, bcd >$ o complexo $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ é inclinante, em que

$$\begin{tikzcd}
T_1 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
T_2 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
T_3 : & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Temos que verificar que $Hom_{D^b(A)}(T, T[i]) = 0$ se $i \neq 0$ e que add$T$ gera K^b(proj A) como categoria triangulada. A segunda condição segue do Lema 2.2. Agora verificaremos a primeira. Como $e_3Ae_i = 0$ para $i \in \{1, 2\}$ temos que $Hom_{D^b(A)}(T, T_3[-1]) = 0$. Assim, $Hom_{D^b(A)}(T_j, T[l]) = 0$ se $l \neq 0$ e $j \in \{1, 2\}$. Dos fatos que $e_1Ae_3 = e_1Aa + e_1Ad$ e $e_2Ae_3 = e_2Ad$ obtemos que $Hom_{D^b(A)}(T_3, T[1]) = 0$. Logo, $Hom_{D^b(A)}(T_3, T[l]) = 0$ se $l \neq 0$.

Considere os seguintes homomorfismos:

$\alpha \ : \ T_1 \to T_3$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}"'] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

em que $\alpha_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\gamma \ : \ T_2 \to T_1$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

$\delta \ : \ T_2 \to T_2$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

$\epsilon \ : \ T_2 \to T_3$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_1"] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}"'] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

em que $\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}$;

$\beta \ : \ T_3 \to T_1$ dado por

$$\begin{tikzcd}
\cdots 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_1"] & 0 \cdots \\
\cdots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0 \cdots
\end{tikzcd}$$

em que $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & bc \end{pmatrix}$.

Por um raciocínio análogo ao do caso anterior concluímos que $Hom_{D^b(A)}(T_1, T_1) = [Id_{T_1}], Hom_{D^b(A)}(T_1, T_2) = 0, Hom_{D^b(A)}(T_1, T_3) = [\alpha], Hom_{D^b(A)}(T_2, T_1) = [\gamma, \gamma\delta]$, $Hom_{D^b(A)}(T_2, T_2) = [Id_{T_2}]$ e $Hom_{D^b(A)}(T_3, T_2) = 0$.

Seja $\phi \in Hom_{D^b(A)}(T_2, T_3)$. Temos que $\phi^i = 0$ para todo $i \neq 1$ e $\phi^1 =$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 b + \lambda_2 bc \\ \lambda_3 e_2 + \lambda_4 c \end{pmatrix}$, com $\lambda_i \in K$. Além disso, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\phi^1"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, swap, "{\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}}"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como o diagrama comuta e $e_3 A e_2 = 0$ temos que $Hom_{D^b(A)}(T_2, T_3) = [\epsilon, \alpha\gamma, \alpha\gamma\delta, \epsilon\delta]$.

Dado $\psi \in Hom_{D^b(A)}(T_3, T_1)$, temos que $\psi^i = 0$ para todo $i \neq 1$ e $\psi^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_1 & \lambda_2 b + \lambda_3 bc \end{pmatrix}$, com $\lambda_i \in K$. Além disso, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "{\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}}"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\psi^1"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Logo, $\lambda_1 a + \lambda_2 bd + \lambda_3 bcd = 0$. Portanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $Hom_{D^b(A)}(T_3, T_1) = [\beta]$.

Dado $\xi \in (T_3, T_3)$, temos que $\xi^i = 0$ para $i \notin \{0, 1\}$, $\xi^0 = \mu e_3$ e $\xi^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_1 & \lambda_2 b + \lambda_3 bc \\ 0 & \lambda_4 e_2 + \lambda_5 c \end{pmatrix}$, com $\mu, \lambda_i \in K$. Além disso, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, "{\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}}"] \arrow[d, "\xi^0"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\xi^1"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_3 \arrow[r, swap, "{\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}}"] & P_1 \oplus P_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Então, $\begin{pmatrix} \mu a \\ \mu d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a + \lambda_2 bd + \lambda_3 bcd \\ \lambda_4 d + \lambda_5 cd \end{pmatrix}$. Logo, $\mu = \lambda_1 = \lambda_4$ e $\lambda_5 = \lambda_2 = 0$. Assim, $Hom_{D^b(A)}(T_3, T_3) = [Id_{T_3}, \alpha\beta]$.

Resumindo obtemos que

$$Hom_{D^b(A)}(T_i,T_j) = \begin{cases} [Id_{T_i}], \text{ se } i=j=1 \\ [Id_{T_i},\delta], \text{ se } i=j=2 \\ [Id_{T_i},\alpha\beta], \text{ se } i=j=3 \\ [\alpha], \text{ se } i=1 \text{ e } j=3 \\ [\gamma,\gamma\delta], \text{ se } i=2 \text{ e } j=1 \\ [\epsilon,\alpha\gamma,\alpha\gamma\delta,\epsilon\delta], \text{ se } i=2 \text{ e } j=3 \\ [\beta], \text{ se } i=3 \text{ e } j=1 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, temos que $End_{D^b(A)}T \cong \frac{K\Delta}{J}$ para algum J contido em $K\Delta$ e Δ :

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[loop above, "\delta"] \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\epsilon"'] & & 1 \arrow[dl, bend right, "\alpha"'] \\ & 3 \arrow[ur, bend right, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

. É fácil ver que $\beta\alpha = \delta^2 = \gamma\delta - \beta\epsilon = 0$ em $End_{D^b(A)}T$. Logo, $< \alpha\beta, \delta^2, \delta\gamma - \epsilon\beta > \subseteq J$. Seja $L =< \alpha\beta, \delta^2, \delta\gamma - \epsilon\beta >$. Como $dim_K Hom_{D^b(A)}(T_i,T_j) = dim_K e_i \left(\frac{K\Delta}{L}\right) e_j$ temos que $L = J$. Sabemos pelo Teorema 2.9 que A é derivadamente equivalente a $End_{D^b(A)}T$.

Referências Bibliográficas

[1] Assem, I.; Happel, D. Generalized tilted algebra of type A_n. *Communications in Algebra*, **9**, 2101, (1981).

[2] Assem, I.; Simson, D.; Skowroński, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, vol. 1, Cambridge University Press, 2006.

[3] Assem, I.; Skowroński, A. Iterated tilted algebras of type $\tilde{A}_n$, *Math. Z.*, **195**, 269, (1987).

[4] Auslander, M. Representation theory of Artin algebras II. *Comm. Algebra I*, 269, (1974).

[5] Auslander, M.; Reiten, I.; Smalo, S. *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, 1997.

[6] Barot, M. *Introduction to the Representation Theory of Algebras*, Springer, 2015.

[7] Barot, M.; Brüstle, T.; de la Peña, J. A. Derived-tame tree algebras of type E. *Forum Mathematicum*, **12**, 713, (2000).

[8] Barot, M.; de la Peña, J. A. Derived tubular strongly simply connected algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **127**, 647, (1999).

[9] Bautista, R. On algebras of strongly unbounded representation type. *Comment. Math. Helv.*, **60** (3), 392, (1985).

[10] Bautista, R. On Derived Tame Algebras. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, **13**, 25, (2007).

[11] Bekkert, V; Drozd, Y. Tame-wild dichotomy for derived categories, *arXiv:math*/0310352, (2003).

[12] Bekkert, V.; Drozd, Y. Derived categories for algebras with radical square zero. *Contemporary Mathematics*, **483**, 55, (2009).

[13] Bekkert, V.; Drozd, Y.; Futorny, V. Derived tame local and two-point algebras. *Journal of Algebra*, **322**, 2433, (2009).

[14] Bekkert, V.; Futorny, V. Derived categories of Schur algebras. *Communications in Algebra*, **31**, 1799, (2003).

[15] Bekkert, V.; Marcos, E.; Merklen, H. A. Indecomposables in derived categories of skewed-gentle algebras, *Communications in Algebra*, **31**, 2615, (2003).

[16] Bekkert, V; Merklen, H. A. Indecomposables in derived categories of gentle algebras, *Representation Theory*, **6**, 285, (2003).

[17] Bondarenko, V.M.; Drozd, Y. Representation type of finite groups. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, **71**, 24, (1977).

[18] Bongartz, K.; Gabriel, P. Covering spaces in representation theory. *Invent. Math.*, **65**, 331, (1982).

[19] Brenner, V. Decomposition properties of some small diagrams of modules. *Sympos. Math. Ist. Naz. Alta Mat.*, **13**, 127, (1974).

[20] Brüstle, T. Derived-tame tree algebras. *Compositio Mathematica*, **129**, 301, (2001).

[21] Brüstle, T.; Han, Y. Two-point algebras without loops. *Comm. Algebra*, **29** (10), 4683, (2001).

[22] Brüstle, T.; de la Peña, J. A.; Skowroński, A. Tame algebras and Tits quadratic forms. *Advances in Mathematics*, **226**, 887, (2011).

[23] Burban, I.; Drozd, Y. Indecomposables of the derived categories of certain associative algebras. *Fields Institute Communications*, **45**, 109, (2004).

[24] Castonguay, D. Derived-tame blowing-up of tree algebras. *Journal of Algebra*, **289**, 20, (2005).

[25] Donovan, P.; Freislich, M. R. Some evidence for an extension of the Brauer-Thrall conjecture. *Sonderforschungsbereich Theor. Math.*, **40**, 24, (1973).

[26] Donovan, P.; Freislich, M. R. *The Representation Theory of Finite Graphs and Associated Algebras*, Carleton Mathematical Lecture Notes, No. 5. Carleton University, 1973.

[27] Dräxler, P.; Geiss, C. On the tameness of certain 2-point algebras. *CMS Conf. Proc.*, **18**, 189, (1996).

[28] Drozd, Y. Representations of commutative algebras. *Funct. Anal. Appl.*, **6**, 286, (1972).

[29] Drozd, Y. Tame and wild matrix problems, *Representations and Quadratic Forms*, 39, (1979). Tradução em inglês: *Amer. Math. Soc. Transl.*, **128**, 31, (1986).

[30] Erdmann, K. *Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras*, Springer, 1990.

[31] Fischbacher, U. The representation-finite algebras with at most 3 simple modules. *Lecture Notes in Mathematics*, **1177**, 94, (1984).

[32] Gabriel, P. Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripta Math.*, **6**, 71, (1972).

[33] Gabriel, P. The universal cover of a representation-finite algebra. *Lecture Notes in Math.*, **903**, 68, (1980).

[34] Geiss, C. Tame distributive two-point algebras. *CMS Conf. Proc.*, **14**, 193, (1993).

[35] Geiss, C. On degeneration of tame and wild algebras. *Arch. Math.*, **64**, 11, (1995).

[36] Geiss, C. Derived tame algebras and Euler-forms. *Mathematische Zeitschrift*, **239**, 829, (2002).

[37] Geiss, C.; Krause, H. On the notion of derived tameness. *J. Algebra Appl.*, **1**, 133, (2002).

[38] Geiss, C.; de la Peña, J. A. Auslander-Reiten components for clans, *Boll. Soc. Mat. Mexicana*, **5**, 307, (1999).

[39] Gelfand, S.I.; Manin, Y. *Methods of Homological Algebra*, Springer, 2003.

[40] Gelfand, I.M.; Ponomarev, V.A. Indecomposable representations of the Lorentz group. *Uspekhi Mat. Nauk*, **23**, 3, (1968).

[41] Giraldo, H; Merklen, H. Irreducible morphisms of categories of complexes. *Journal of Algebra*, **321**, 2716, (2009).

[42] Han, Y. Wild two-point algebras. *J. Algebra*, **247**, 57, (2002).

[43] Han, Y.; Zhang, C. Brauer-Thrall type theorems for derived category, *Algebras and Representation Theory*, (2016). *arXiv:math*/1310.2777.

[44] Happel, D. *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, Cambridge University Press, 1988.

[45] Happel, D.; Ringel, C. M. The derived category of a tubular algebra. *Representation Theory I Finite Dimensional Algebras: Proceedings of the Fourth International Conference on Representations of Algebras*, **1177**, 156, (1986).

[46] Heller, A.; Reiner, I. Indecomposable representations. *Illinois J. Math.*, **5**, 314, (1961).

[47] Hoshino, M.; Miyachi, J. Tame two-point algebras. *Tsukuba J. Math.*, **12**, 65, (1988).

[48] Konig, S; Zimmermann, A. *Derived Equivalences for Group Rings*, Springer, 1998.

[49] Kraft, H. Geometric methods in representation theory, *Representations of Algebras - Lecture Notes in Math.*, **944**, 180, (1982).

[50] Leszczyński, Z.; Skowroński, A. Tame generalized canonical algebras. *Journal of Algebra*, **273**, 412, (2004).

[51] Li,L.; Zhang, Y. Representation theory of the system quiver. *Science in China A*, **46** (6), (2003).

[52] Nazarova, L. A. Representations of a tetrad. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **31**, 1361, (1967).

[53] Nazarova, L.A.; Roiter, A.V. Kategorielle matrizen-probleme und die Brauer-Thrall-vermutung. *Mitt. Math. Sem. Giessen*, **115**, 1, (1975).

[54] de la Peña, J. A. *Tame Algebras: Some Fundamental Notions*, Universität Bielefeld, 1995.

[55] de la Peña, J. A. Algebras whose derived category is tame. *Contemporary Mathematics*, **229**, 117, (1998).

[56] Rickard, J. Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc.*, **39**, 436, (1989).

[57] Ringel, C.M. The indecomposable representations of the dihedral 2-groups. *Math. Ann.*, **214**, 19, (1975).

[58] Ringel, C.M. The representation type of local algebras. *Lecture Notes in Math.*, **488**, 282, (1975).

[59] Ringel, C. M. Report on the Brauer-Thrall conjectures. *Representation Theory I: Proceedings of the Workshop on the Present Trends in Representation Theory*, 104, (1980).

[60] Ringel, C. M. *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Springer-Verlag, 1984.

[61] Roiter, A.V. Unboundedness of the dimension of the indecomposable representations of an algebra which has infinitely many indecomposable representations. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, **32**, 1275, (1968).

[62] Simson, D.; Skowroński, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, vol. 2, Cambridge University Press, 2007.

[63] Simson, D.; Skowroński, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, vol. 3, Cambridge University Press, 2007.

[64] Vossieck, D. The algebras with discrete derived category. *Journal of Algebra*, **243**, 168, (2001).

[65] Weibel, C. *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.