Gheyza Ferreira da Silva

Realizações de Algumas Curvas Algebróides Planas

Tese apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Doctor Scientiae.*

Belo Horizonte
MINAS GERAIS - BRASIL
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Realizações de Algumas Curvas Algebróides Planas

Gheyza Ferreira da Silva

Orientador: Renato Vidal da Silva Martins

Coorientador: André Gimenez Bueno

Belo Horizonte

MINAS GERAIS - BRASIL

2016

Dedico à minha família.

Agradecimentos

Agradeço à Deus pela saúde, força e determinação que me permitiu a conclusão deste sonho.

Agradeço à minha família, por torcerem por mim. Em especial, agradeço aos meus pais Gerson e Célia, que sempre me apoiaram e me confortaram nos momentos difíceis. Ao meus irmãos George e Jeferson, pelo incentivo e pela disposição. Ao meu marido Michel pelo companheirismo, apoio e por estar ao meu lado nessa caminhada. Aos meus tios Ana e Kleber por me receberem inicialmente em Belo Horizonte, pelas palavras de carinho e incentivo e pela disposição.

Aos professores Renato Vidal e André Gimenez Bueno, pela orientação e coorientação (respec.), pelo valioso exemplo profissional, pela paciência, dedicação, disposição, incentivo e pela amizade durante esses anos. Além disso, agradeço imensamente, ao André por todo o suporte durante os estudos para o exame de qualificação e ao Renato por toda assistência principalmente na fase final deste trabalho.

Aos colegas do curso, pelas trocas de conhecimentos e de momentos de descontração. Ao amigos Edney, Tiago e Jane por pela força, amizade, pelas discussões e pelo apoio nas horas difíceis.

A todos os professores que contribuíram para a minha formação acadêmica até este momento.

Ao DEMAT-UFSJ pelo afastamento docente que possibilitou a dedicação exclusiva na fase final deste trabalho.

Ao CNPq pelo suporte financeiro durante parte do curso.

Aos membros da banca examinadora pela leitura e pelas sugestões para este trabalho.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema da realização de campo livre de curvas algebróides planas para as quais a diferença entre os números de Milnor e Tjurina é dois. Isto envolve as etapas de descrever sua extensão central universal, realizando a representação de Fock da álgebra de Lie do tipo Heisenberg, junto com a representação da álgebra de loop generalizada, e uma caracterização da representação do tipo Wakimoto.

Palavras-chave: Álgebras de Lie, Curvas Algebróides Planas, Extensão Central Universal, Representação.

Abstract

In this work we study the problem of a free field realization of plane algebroid curves for which the differences between Milnor and Tjurina numbers are two. This involves the steps of describing its universal central extension, realizing the Fock representation of the Heisenberg type Lie algebra, along with the representation of the generalized loop algebra, and a characterization of the Wakimoto type representation.

Key-words: Lie Algebras, Algebroid Plane Curves, Universal Central Extension, Representation.

Introdução

O estudo de álgebras de Lie de dimensão infinita começa com Kac e Moody no final dos anos 60, [10, 11], [16]. Do ponto de vista geométrico, pode-se dizer que a curva subjacente a tais estudos consiste de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$. Partindo desse ponto de vista, duas generalizações são bem naturais, e de fato foram seguidas: em vez de 2 pontos, podemos tirar mais pontos, mas mantendo a mesma curva, $\mathbb{P}^1$, ou podemos mudar a curva para uma curva *lisa* de gênero mais alto, mantendo os dois pontos retirados, ou ainda, obviamente, uma combinação dos dois. Por exemplo, isso foi feito I. M. Krichever e S. P. Novikov em [14], M. Bremner em [3], e por A. Bueno, B. Cox e F. Futorny em [4]. A razão para se considerar a curva menos alguns pontos, em vez da curva original, é que desta forma a álgebra de loop (generalizada) obtida possui extensão central universal não-trivial. Nesta tese, faremos um estudo de outra variação possível: escolhemos uma família de curvas singulares, cujo modelo não-singular tem gênero zero, se consideradas curvas menos um ponto. Estudaremos a construção de representações análogas as obtidas por Wakimoto em [19, 20]. Ao contrário do caso de curvas lisas, para curvas singulares a remoção de um ponto é suficiente para obter cociclos não triviais.

Mais precisamente, sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa simples de dimensão finita, e R uma $\mathbb{C}$-álgebra comutativa e associativa. Seja $\widehat{\mathfrak{L}}$ a extensão central universal da, assim chamada, álgebra de loop generalizada[1]

$$\mathfrak{L} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} R.$$

Como dito acima, $\widehat{\mathfrak{L}}$ tem sido estudada de várias formas diferentes. Uma delas é quando R é o anel de funções regulares de uma curva complexa lisa e projetiva com um número finito de pontos removidos. Tal extensão generaliza uma álgebra de Kac-Moody, já que para $\mathbb{P}^1$ com dois pontos removidos, $R \simeq \mathbb{C}[t, t^{-1}]$.

[1]No caso em que R é a álgebra de Laurent $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$, essa álgebra é chamada apenas de álgebra de loop (ou laços).

Na mesma linha, seria natural estender este estudo para anéis locais de singularidades de curvas, no sentido de que a remoção de pontos de uma variedade algébrica é essencialmente um procedimento de localização. Na verdade, tal como será claro ao longo destas linhas, em vez disso, é mais conveniente lidar com o completamento do anel local. Mas, antes de especificar o nosso objeto de estudo, vamos apenas lembrar um ponto-chave em tais extensões centrais universais.

Considere a extensão central universal

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{L}} \longrightarrow \mathfrak{L} \longrightarrow 0,$$

onde $\mathfrak{a}$ é central em $\widehat{\mathfrak{L}}$. Pelo Teorema de Kassel, [12], $\mathfrak{a}$ é linearmente isomorfo às diferenciais de Kähler de R módulo pelas diferenciais exatas, isto é,

$$\mathfrak{a} = \Omega_{R/\mathbb{C}}/dR.$$

Desse modo, é de alguma forma um fato surpreendente que a extensão $\mathfrak{a}$ é totalmente determinada por R, ou, mais precisamente, por suas diferenciais não-exatas. Se, por exemplo, R é o completamento do anel local de uma cúspide, ou equivalentemente, o anel local de um *curva algebróide* C, então seria interessante analisar quando $\mathfrak{a}$ é não-trivial, de modo que se poderia perguntar sobre a sua extensão central universal.

Na verdade, o problema de descrever $\mathfrak{a}$ quando R vem de um algebróide foi amplamente estudado por O. Zariski, em [22], o qual conectou o assunto a dois importantes invariantes espalhados na literatura de singularidades: o número de Milnor μ_C e o número Tjurina τ_C. Temos que o comprimento ℓ do R-módulo $\mathfrak{a}$ satisfaz

$$\ell := \ell(\mathfrak{a}) = \dim_{\mathbb{C}}(\Omega_{R/\mathbb{C}}/dR) = \mu_C - \tau_C,$$

onde a segunda igualdade não é propriamente um resultado, valendo em geral para quocientes de R-módulos. Zarisky provou que $\mathfrak{a}$ é trivial se, e somente se, C é monomial, ou seja, corresponde a uma curva da forma $Y^n = X^m$, ou equivalentemente, $f(X,Y) = X^m - Y^n$.

A fim de estudar curvas planas algébricas não-monomiais, de [22], pode-se colocar o assunto dentro de uma estrutura adequada, escrevendo

$$R = \mathbb{C}[[x, y]]$$

com

$$x = t^n \qquad y = t^m + t^\lambda + \dots,$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$ e λ é o *invariante de Zariski* dado por

$$\lambda := \min(v(\Omega_{R/\mathbb{C}}) \setminus v(dR)) - n + 1$$

e v é a valorização induzida pela aplicação valorização discreta do fecho integral $\overline{R}$.

A. Azevedo, em [1], deu importantes contribuições para o estudo de $\mathfrak{a}$, e, posteriormente, V. Bayer e A. Hefez, em [2], classificaram totalmente as curvas algébricas planas com ℓ pequeno. Eles provaram que $\ell = 1$ se, e somente se, y é binomial e $\lambda = (n-1)m-2n$; e curvas completamente caracterizadas com $\ell = 2$.

Da perspectiva de obter uma realização de campos livres de tal um R, o caso $\ell = 1$ produz uma extensão central unidimensional, que seria um tanto semelhante à álgebra de Lie de Heisenberg, já que os cociclos são escalares. Então escolhemos o caso onde $\ell = 2$ para discutir uma realização no caminho de Wakimoto, que é exatamente o tema deste trabalho.

As curvas algebróides planas com $\ell = 2$ são suficientemente importantes tal que qualquer informação adicional sobre elas possa ser de interesse. Por exemplo, em [23], Zariski descreveu seu espaço de moduli de classes de equisingularidade juntamente com o estudo de sua quase-compacidade. O semigrupo de valores de algumas dessas singularidades também apareceu na literatura em um contexto diferente. Eles foram relacionados a curvas projetivas não hiperelípticas suaves com pontos de Weierstrass de peso máximo. Tais curvas foram caracterizadas por T. Kato, em [13], como aquelas que admitem uma cobertura dupla de uma curva elíptica, é por isso que tais curvas - e na verdade os semigrupos também - são hoje em dia referidos como *bielípticos*. F. Torres generalizou o resultado de Kato, em [18], introduzindo a linguagem de ambas as curvas γ-hiperelípticas e semigrupos γ-hiperelípticos ($\gamma = 1$ no nosso caso).

Agora resumiremos o conteúdo deste trabalho. Para isso, sejam R o anel local de uma curva plana algébrica com $\ell = 2$ e $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ a álgebra de Lie linear especial de ordem 2. Sejam $\mathfrak{L} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} R$ a álgebra de loop generalizada e $\widehat{\mathfrak{L}}$ sua extensão central universal. No capítulo 1, apresentamos uma revisão de álgebras de Lie e de curvas algebróides. Visto que estes dois objetos pertencem a duas áreas de pesquisa diferentes, este capítulo, contém as definições e conceitos básicos de cada um deles e as principais referências bibliográficas para situar melhor o leitor que deseja aprofundar no assunto. No capítulo 2, daremos uma descrição de $\widehat{\mathfrak{L}}$ em termos de suas operações e cociclo (Teorema 2.1.7) e mostraremos que $\widehat{\mathfrak{L}}$ projeta sobre uma superalgebra (Proposição 2.1.8). No capítulo 3, obtemos uma representação de Fock para a álgebra de Lie do tipo Heisenberg (Teorema 3.2.1). Além disso, fazemos no Teorema 3.3.1 a realização da álgebra de loop generalizada de séries de potências formais em duas variáveis, de modo que tal realização possa ser útil para o nosso contexto devido à forma como estamos expressando os elementos de $\mathfrak{L}$. Por fim, caracterizamos uma realização de campo livre de $\widehat{\mathfrak{L}}$ em termos dos de $\mathfrak{L}$ (Teorema 3.4.1).

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é introduzir algumas definições e resultados que serão usados ao longo deste trabalho. Iniciaremos com o conceito álgebras de Lie e alguns resultados básicos. Com isso, introduziremos o conceito de álgebra de Lie de Heisenberg, que é uma extensão central universal da álgebra de Lie comutativa $\mathbb{C}((t))$ e veremos representações a ela relacionadas. Além disso, apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos sobre curvas algebróides plana. Não demonstraremos a maioria dos resultados apresentados, os quais poderão ser encontrados nas referências bibliográficas citadas em cada seção.

1.1 Álgebras de Lie

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e resultados de álgebras de Lie que serão úteis em nosso trabalho. As principais referências para esta seção são [8], [9] e [5].

1.1.1 Definições e propriedades básicas

Definição 1.1.1. *Uma* ***álgebra de Lie*** $\mathfrak{g}$ *é de um espaço vetorial sobre um corpo* K *munido de uma operação chamada* ***colchete de Lie***

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. *A operação colchete* $[\ ,\ ]$ *é bilinear;*

2. $[\ ,\ ]$ *é alternada, isto é,* $[x, x] = 0$, $\forall\ x \in \mathfrak{g}$;

3. $[\ ,\ ]$ *satisfaz a identidade de Jacobi:* $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] = 0$*,* $\forall\, x,y,z \in \mathfrak{g}$.

Note que, as propriedades (1) e (2) aplicadas à $[x+y, x+y]$ mostram que o colchete de Lie é a anti-simétrico,

$$[x,y] = -[y,x], \forall\, x,y \in \mathfrak{g}. \tag{1.1}$$

De fato, $\forall\, x,y \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= [x+y, x+y] \\ &= [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] \\ &= [x,y] + [y,x]. \end{aligned}$$

Portanto, $[x,y] = -[y,x]$. Reciprocamente, (1.1) implica (2), quando a característica de K é diferente de 2. Pois,

$$\begin{aligned} 0 &= [x,x] + [x,x] \\ &= 2[x,x], \forall\, x \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Logo, $[x,x] = 0$, se a característica de K é diferente de 2.

Definição 1.1.2. *Uma **subálgebra** de Lie $\mathfrak{h}$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ fechado para o colchete de Lie, ou seja, para todo $x,y \in \mathfrak{h}$ tem-se $[x,y] \in \mathfrak{h}$.*

Assim, uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie com a estrutura herdada pela estrutura de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.1.3. *A **dimensão** de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é sua dimensão como espaço vetorial.*

Exemplo 1.1.4. *Qualquer álgebra associativa $\mathfrak{A}$ pode tornar-se uma álgebra de Lie $\mathfrak{A}_L$ tomando o colchete de Lie como sendo o seu comutador em $\mathfrak{A}$:*

$$[a,b] = ab - ba, \tag{1.2}$$

para todo $a,b \in \mathfrak{A}$.

Exemplo 1.1.5. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo K. Denotaremos o conjunto dos endomorfismos de V por*

$$\mathrm{End}(V) = \{f : V \longrightarrow V \mid f \textit{ é uma transformação linear}\}.$$

Como um espaço vetorial sobre K, End(V) *tem dimensão n^2 e é uma álgebra associativa relativamente à composição. Portanto, como caso particular do exemplo 1.1.4,* End(V) *é também uma álgebra de Lie com o comutador como a operação colchete, ou seja,*

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

Denotaremos por $\mathfrak{gl}(V)$ para End(V) visto como uma álgebra de Lie e a chamaremos **álgebra linear geral** (devido à sua relação com o **grupo linear geral** $GL(V)$, que consiste dos endomorfismos invertíveis sobre V).

Temos que End$(V) \cong M_{n\times n}(K)$, onde $M_{n\times n}(K)$ é o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em K. Assim, confome a conveniência podemos trabalhar com matrizes para $\mathfrak{gl}(V)$ e denotaremos por $\mathfrak{gl}_n(K)$.

Exemplo 1.1.6. *Denote por $\mathfrak{sl}(V) = \{\phi \in \mathfrak{gl}(V) \mid \mathrm{tr}(\phi) = 0\}$, onde $\mathrm{tr}(\phi)$ denota do traço da matriz correspondente. Temos que $\mathfrak{sl}(V)$ é subespaço de $\mathfrak{gl}(V)$. De fato, já que $\mathrm{tr}(M + N) = \mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(N)$ e $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$, para todo $M, N \in M_{n\times n}(K)$, então, se $M, N \in \mathfrak{sl}(V)$ e $\alpha \in K$ temos:*

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(M + N) &= \mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(N) = 0 \\ \mathrm{tr}(\alpha M) &= \alpha \mathrm{tr}(M) = 0. \end{aligned}$$

As subálgebras de $\mathfrak{gl}(V)$ são chamadas **álgebras de Lie lineares**. Em particular, a subálgebra $\mathfrak{sl}(V)$ é chamada **álgebra linear especial** (devido à sua relação com o grupo linear especial $SL(V)$ dos endomorfismos com determinante 1).

Algumas álgebras de Lie de transformações lineares surgem naturalmente como derivações de álgebras.

Definição 1.1.7. *Seja A uma K-álgebra. Uma aplicação linear $d : A \longrightarrow A$ é uma **derivação** de A se satisfaz*

$$d(xy) = xd(y) + d(x)y, \ \forall \ x, y \in A.$$

Denotaremos por Der(A) o conjunto de todas as derivações de A.

Exemplo 1.1.8. Der(A) *é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(A)$. De fato, temos que* Der(A) *é um subespaço vetorial de* End(A), e o comutador de duas derivações é uma derivação, isto é,

$$[d_1, d_2](xy) = x[d_1, d_2](y) + [d_1, d_2](x)y.$$

Exemplo 1.1.9. *Seja x um elemento na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, considere a transformação linear (chamada* ***aplicação adjunta****) $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ definida por*

$$\mathrm{ad}_x(y) = [x, y].$$

Temos que ad_x é uma derivação, isto é, $\mathrm{ad}_x([y, z]) = [y, \mathrm{ad}_x(z)] + [\mathrm{ad}_x(y), z]$. Basta observar que, usando (1.1), podemos reescrever a Identidade de Jacobi na forma $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$.

Definição 1.1.10. *Um subespaço $\mathfrak{a}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um* ***ideal*** *de $\mathfrak{g}$ quando $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{a}$ implica $[x, y] \in \mathfrak{a}$.*

Os ideais desempenham na teoria das álgebras de Lie, o mesmo papel dos subgrupos normais na teoria dos grupos e dos ideais bilaterais na teoria dos anéis. Trivialmente, o subespaço que consiste apenas do vetor nulo (denotado por 0) e o próprio $\mathfrak{g}$ são ideais de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 1.1.11. *O* ***centro*** *de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definido por*

$$Z(\mathfrak{g}) = \{z \in \mathfrak{g} \mid [x, z] = 0, \forall\ x \in \mathfrak{g}\},$$

é um ideal de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.1.12. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é chamada* ***abeliana*** *se $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.*

Logo, $\mathfrak{g}$ é abeliana se, e somente se, $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Definição 1.1.13. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita* ***simples*** *se for não-abeliana e não possuir ideais de $\mathfrak{g}$ além dos triviais 0 e $\mathfrak{g}$.*

Exemplo 1.1.14. *Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(K)$, onde K é um corpo de característica diferente de 2, então $\mathfrak{g}$ é simples. Em particular, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ é simples ([8, Ex. p.6]).*

1.1.2 Representações

A teoria das representações é o estudo de estruturas algébricas abstratas representando seus elementos como transformações lineares de um espaço vetorial. Assim, o interesse desta teoria é tornar objetos abstratos em objetos mais concretos, ou seja, transformando problemas de álgebra abstrata, muitas vezes, em problemas de álgebra linear. Veremos a seguir a definição formal de uma representação de uma álgebra de Lie que será abordada neste trabalho.

Definição 1.1.15. *Sejam* $\mathfrak{g}_1$ *e* $\mathfrak{g}_2$ *álgebras de Lie sobre* K *e* $\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ *uma transformação linear. Dizemos que* ϕ *é um* ***homomorfismo*** *quando* $\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$*, para todo* $x, y \in \mathfrak{g}_1$*. A aplicação* ϕ *é chamada* ***isomorfismo*** *quando é um homomorfismo bijetivo, neste caso,* $\mathfrak{g}_1$ *e* $\mathfrak{g}_2$ *são ditas* ***isomorfas****.*

Definição 1.1.16. *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie,* V *um espaço vetorial e* $\mathfrak{gl}(V)$ *a álgebra linear geral (sobre o mesmo corpo* K*). Uma* ***representação*** *de* $\mathfrak{g}$ *em* V *é um homomorfismo* $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$*.*

Exemplo 1.1.17. *Considere a aplicação adjunta (veja ex. 1.1.9)* $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *definida por*

$$\mathrm{ad}_x(y) = [x, y].$$

A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ad}: \ \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \\ x & \longmapsto & \mathrm{ad}_x \end{array}$$

define uma representação de $\mathfrak{g}$ *chamada* ***representação adjunta****.*

De fato, note que $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *(veja Exemplo 1.1.9) e que* ad *é uma transformação linear. Vamos mostrar que* ad *é um homomorfismo:*

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}([x,y])(z) &= [[x,y],z] \\ &= [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \\ &= \mathrm{ad}_x([y,z]) - \mathrm{ad}_y([x,z]) \\ &= \mathrm{ad}_x(\mathrm{ad}_y(z)) - \mathrm{ad}_y(\mathrm{ad}_x(z)) \\ &= [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y](z), \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue da identidade de Jacobi.

Muitas vezes é conveniente usar a linguagem de módulos juntamente com a (equivalente) linguagem das representações. Como em outras teorias algébricas, há uma definição natural.

Definição 1.1.18. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um espaço vetorial V, munido com uma operação $\mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$ (denotada $(x,v) \mapsto x \cdot v$ ou apenas xv) é chamado de* ***$\mathfrak{g}$-módulo*** *se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. $(ax + by) \cdot v = a(x \cdot v) + b(y \cdot v)$;

2. $x \cdot (av + bw) = a(x \cdot v) + b(x \cdot w)$;

3. $[x, y] \cdot v = x \cdot y \cdot v - y \cdot x \cdot v$. $(x, y \in \mathfrak{g};\ v, w \in V;\ a, b \in K)$

Por exemplo, se $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$, então V pode ser visto como um $\mathfrak{g}$-módulo através da ação $x \cdot v = \phi(x)(v)$. Por outro lado, dado um $\mathfrak{g}$-módulo V, $(x, v) \mapsto \phi(x)(v) = x \cdot v$ define uma representação $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Definição 1.1.19. *Um* ***homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos*** *$\varphi : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear tal que $\varphi(x \cdot v) = x \cdot \varphi(v)$, $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$.*

Escrevemos $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ para o espaço vetorial de todos tais homomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos.

1.1.3 Forma de Killing

Definição 1.1.20. *Sejam x e y elementos de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. A forma bilinear simétrica sobre $\mathfrak{g}$ definida por*

$$k(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$$

é chamada ***forma de Killing****.*

Temos que se x, y, z são endormorfismos de um espaço vetorial de dimensão finita, então $\mathrm{tr}([x, y]z) = \mathrm{tr}(x[y, z])$. Com isso, temos que a forma k é também associativa, no sentido que $k([x, y], z) = k(x, [y, z])$.

Exemplo 1.1.21. *Vamos calcular a forma de Killing de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Seja $\{e, f, h\}$ uma base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, onde*

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note que, temos as seguintes relações de comutação:

$$[h, e] = 2e, \quad [e, f] = h, \quad [h, f] = -2f, \tag{1.3}$$

Escreveremos as matrizes na ordem (e, h, f)*. Então, por (1.3), temos:*

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_e(e) &= [e, e] = 0 \\ \mathrm{ad}_e(h) &= [e, h] = -2e = -2e + 0h + 0f \\ \mathrm{ad}_e(f) &= [e, f] = h = 0e + 1h + 0f. \end{aligned}$$

Analogamente, determina-se ad_f *e* ad_h*. Assim,*

$$\mathrm{ad}_e = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Seja $\mathcal{K}$ *a matriz da forma de Killing onde seus elementos são dados por* $k_{ij} = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_i \circ \mathrm{ad}_j)$*, onde* $(\circ)$*, neste caso, denota o produto usual de matrizes. Portanto,*

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.4 A álgebra envolvente universal

Para qualquer álgebra associativa, A, construímos uma álgebra de Lie, A_L, tendo o comutador como o colchete de Lie (Exemplo 1.1.4). Agora vamos pensar na direção inversa. Vamos construir uma álgebra associativa $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de uma determinada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Esta é denominada a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$ e é uma ferramenta básica na teoria de representações.

Definição 1.1.22. *Uma* ***álgebra envolvente universal*** *de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é um par* $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), i)$*, onde* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *é uma* K*-álgebra associativa com unidade e* $i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *é uma aplicação linear, satisfazendo:*

(a) *Para todo* $x, y \in \mathfrak{g}$*,*

$$i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x); \tag{1.4}$$

(b) *A seguinte propriedade universal: se A é uma K-álgebra associativa com unidade e $j : \mathfrak{g} \longrightarrow A$ satisfazendo (1.4), então existe um único homomorfismo de K-álgebras associativas $\phi : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ (levando 1 em 1), tal que $\phi \circ i = j$, ou seja, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"] & \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Consequentemente, $\mathrm{Hom_{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathrm{A_L}) \cong \mathrm{Hom_{Ass}}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{A})$, onde A_L é a álgebra de Lie correspondente à álgebra associativa A (Exemplo 1.1.4). Em particular,

$$\mathrm{Hom_{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(\mathrm{V})) \cong \mathrm{Hom_{Ass}}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{End}(\mathrm{V})),$$

ou seja, uma representação de $\mathfrak{g}$ em no espaço vetorial V é equivalente a uma representação de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ em V.

Construção de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita n, (vista como um espaço vetorial sobre um corpo K). Sua **álgebra tensorial** é dada por

$$T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}^{\otimes n} = \mathfrak{g}^{\otimes 0} \oplus \mathfrak{g}^{\otimes 1} \oplus \mathfrak{g}^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{\otimes n} \oplus \ldots,$$

onde $\mathfrak{g}^{\otimes 0} = K$, $\mathfrak{g}^{\otimes n} = \underbrace{\mathfrak{g} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{g}}_{n \text{ vezes}}$, com a operação produto dada por:

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r)(y_1 \otimes \ldots \otimes y_s) = x_1 \otimes \ldots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_s \in \mathfrak{g}^{\otimes (r+s)}.$$

Logo, $T(\mathfrak{g})$ é uma álgebra associativa com unidade. Definimos a álgebra envolvente universal da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, denotada por $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, pelo quociente de $T(\mathfrak{g})$ pelo ideal bilateral, $\mathfrak{J}$, de $T(\mathfrak{g})$ gerado por elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \frac{T(\mathfrak{g})}{\mathfrak{J}} \tag{1.5}$$

Note que, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ é uma álgebra associativa com uma unidade, e que qualquer representação de $\mathfrak{g}$ é automaticamente um $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-módulo.

Teorema 1.1.23. *[8, Cor. C, p.92] (Poincaré-Birkhoff-Witt): Sejam* $\pi : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *o homomorfismo canônico e* $\{x_i\}_{i\in I}$ *uma base de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *ordenada por um conjunto de índices* I*. Então, os elementos da forma* $x_{i_1}\cdots x_{i_m} = \pi(x_{i_1}\otimes\ldots\otimes x_{i_m})$*, com* $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_m$*,* $m \in \mathbb{Z}_+$*, formam uma base de* $\mathfrak{U}(g)$*.*

Esta base de $\mathfrak{U}(g)$ é chamada **base de Poincaré-Birkhoff-Witt** (ou base PBW).

Corolário 1.1.24. *[8, Cor. B, p.92] Se* $\mathfrak{g}$ *é uma álgebra de Lie sobre um corpo* K*, a aplicação canônica* $i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{U}(g)$ *é injetiva.*

Em particular, qualquer álgebra de Lie é isomorfa a uma subálgebra Lie de uma álgebra associativa.

Exemplo 1.1.25. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie tal que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ *então* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_2)$*.*

1.1.5 Extensão Central Universal

Para esta seção as principais referências são [21] e [5].

Definição 1.1.26. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Dizemos que* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ *é central se* $\mathfrak{a}$ *está contida no centro de* $\mathfrak{g}$*, ou seja,* $[a, x] = 0$*, para todo* $a \in \mathfrak{a}$*,* $x \in \mathfrak{g}$*.*

Definição 1.1.27. *Uma* ***extensão central*** $\widehat{\mathfrak{g}}$ *de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é uma sequência exata curta de álgebras de Lie*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0, \tag{1.6}$$

tal que $\mathfrak{a}$ *é central em* $\widehat{\mathfrak{g}}$*.*

Definição 1.1.28. *Uma extensão central* $\widehat{\mathfrak{g}}$ *é chamada* ***extensão central universal*** *se para qualquer outra extensão central* $\widehat{\mathfrak{g}}'$ *de* $\mathfrak{g}$*,* $0 \longrightarrow \mathfrak{a}' \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}' \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$*, existe um único homomorfismo* $\phi : \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}'$*, tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\psi"] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\phi"] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{a}' \arrow[r, "i'"] & \widehat{\mathfrak{g}}' \arrow[r, "\pi'"] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $\phi \circ i = i' \circ \psi$ *e* $\pi' \circ \phi = \pi$*.*

Claramente, uma extensão central universal de $\mathfrak{g}$ é única a menos de isomorfismo sobre $\mathfrak{g}$, desde que ela exista. Visto como espaços vetoriais temos que $\widehat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$, pois a sequência exata cinde como sequência de espaços vetoriais. Logo, os elementos de $\widehat{\mathfrak{g}}$ podem ser escritos na forma $x + a$, com $x \in \mathfrak{g}$ e $a \in \mathfrak{a}$.

1.2 Álgebra de Lie de Heisenberg

Nesta seção, veremos o conceito de uma álgebra de Lie de Heisenberg, e alguns resultados sobre tal álgebra. Mais detalhes podem ser encontrados em [5].

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com uma extensão central (1.6) unidimensional, então $\mathfrak{a} \simeq \mathbb{C}\mathbf{1}$ para algum gerador $\mathbf{1}$. Então o colchete de Lie sobre $\widehat{\mathfrak{g}}$ dá origem ao colchete de Lie sobre $\widehat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$ tal que $\mathbb{C}\mathbf{1}$ é central e

$$[x, y]_{\text{novo}} = [x, y]_{\text{velho}} + c(x, y)\mathbf{1},$$

onde, x, $y \in \mathfrak{g}$ e $c : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação linear. A fórmula acima define o colchete de Lie sobre $\mathfrak{g}$ se, e somente se c satisfaz:

(i) $c(x, y) = -c(y, x)$.

(ii) $c(x, [y, z]) + c(y, [z, x]) + c(z, [x, y]) = 0$.

Tais aplicações são chamadas **2-cociclos** sobre $\mathfrak{g}$.

Definição 1.2.1. *Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}((t))$ das séries formais de Laurent em uma variável como uma álgebra de Lie comutativa. Definimos a **álgebra de Lie de Heisenberg** $\mathcal{H}$ como a extensão central*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}\mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}((t)) \longrightarrow 0 \tag{1.7}$$

com o cociclo

$$c(f, g) = -\text{Res}_{t=0} f dg, \tag{1.8}$$

onde $\text{Res}_{t=0}$ denota o resíduo, ou seja, o coeficiente do termo de potência -1 (ex. a em $at^{-1}dt$).

Temos que $\mathcal{H}$ é topologicamente gerado por $b_n = t^n$, $n \in \mathbb{Z}$ e $\mathbf{1}$.

De (1.8), temos

$$\begin{aligned} c(t^n, t^m) &= -\mathrm{Res}_{t=0} t^n dt^m = -m\mathrm{Res}_{t=0} t^{n+m-1} dt \\ &= -m\delta_{n,-m} = n\delta_{n,-m}. \end{aligned}$$

Assim, os geradores satisfazem as seguintes relações:

$$[b_n, b_m] = n\delta_{n,-m}\mathbf{1}, \quad [\mathbf{1}, b_n] = 0.$$

A álgebra envolvente universal (ver seção 1.1.4) $\mathfrak{U}(\mathcal{H})$ de $\mathcal{H}$ é uma álgebra associativa com geradores $b_n,\ n \in \mathbb{Z}$, e $\mathbf{1}$, e as relações

$$b_n b_m - b_m b_n = n\delta_{n,-m}\mathbf{1}, \quad b_n\mathbf{1} - 1b_n = 0,$$

onde $m, n \in \mathbb{Z}$. Considere uma topologia sobre $\mathfrak{U}(\mathcal{H})$, em que a base de uma vizinhança aberta de 0 é formada pelos ideais a esquerda do subespaço $t^N\mathbb{C}[t] \subset \mathcal{H} \subset \mathfrak{U}(\mathcal{H})$, $N \in \mathbb{Z}$. Denotaremos por $\widetilde{\mathfrak{U}}(\mathcal{H})$ o completamento de $\mathfrak{U}(\mathcal{H})$ com respeito a esta topologia.

Definição 1.2.2. *A Álgebra de Weyl $\widetilde{\mathcal{H}}$ é definida como o quociente de $\widetilde{\mathfrak{U}}(\mathcal{H})$ pelo ideal bilateral gerado por $(\mathbf{1} - 1)$, isto é,*

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \frac{\widetilde{\mathfrak{U}}(\mathcal{H})}{(\mathbf{1} - 1)},$$

onde $\mathbf{1}$ é o elemento central de $\mathcal{H} \subset \widetilde{\mathfrak{U}}(\mathcal{H})$, e 1 é o elemento unidade de $\widetilde{\mathfrak{U}}(\mathcal{H})$.

1.2.1 Representação de Fock

Seja $\widetilde{\mathcal{H}}$ uma álgebra de Weyl da álgebra de Heisenberg $\mathcal{H}$. Ao contrário de álgebras comutativas, $\widetilde{\mathcal{H}}$ não possui representações unidimensionais, já que

$$b_n b_{-n} - b_{-n} b_n = n$$

é a única relação não trivial. Logo, para $n \neq 0$ é impossível haver uma representação onde ambos b_n e b_{-n} ajam como zero. Porém, considere a subálgebra $\widetilde{\mathcal{H}}_+ \subset \widetilde{\mathcal{H}}$ dada por $\widetilde{\mathcal{H}}_+ = \langle b_0, b_1, \cdots \rangle$, ou seja, a subálgebra gerada por $b_0, b_1, \ldots$. Esta é uma álgebra comutativa, e portanto tem uma representação unidimensional trivial $\mathbb{C}$. Podemos então definir uma representação de $\widetilde{\mathcal{H}}$ como a representação induzida a partir desta representação de $\widetilde{\mathcal{H}}_+$:

$$\pi := \mathrm{Ind}_{\widetilde{\mathcal{H}}_+}^{\widetilde{\mathcal{H}}} \mathbb{C} = \widetilde{\mathcal{H}} \otimes_{\widetilde{\mathcal{H}}_+} \mathbb{C}.$$

Seja $\widetilde{\mathcal{H}}_-$ a subálgebra comutativa de $\mathcal{H}$ gerada por $b_n, n < 0$. Temos que

$$\pi \simeq \widetilde{\mathcal{H}}_- = \mathbb{C}[b_{-1}, b_{-2}, \ldots], \tag{1.9}$$

já que, pelo teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, $\widetilde{\mathcal{H}} = \widetilde{\mathcal{H}}_+ \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_-$. Sob este isomorfismo, os geradores $b_n, n < 0$, agem em π pela multiplicação. Por indução sobre n, mostra-se que $b_n, n > 0$, age como derivação $n\frac{\partial}{\partial b_{-n}}$ e b_0 age como zero em π.

Definição 1.2.3. *Esta representação induzida de $\widetilde{\mathcal{H}}_+$ é chamada **representação de Fock** de $\widetilde{\mathcal{H}}$ (ou de $\mathcal{H}$).*

1.2.2 Realização de Wakimoto

A ação de $\mathbf{L}\mathfrak{sl}_2$ sobre $\mathbb{C}((t))$

A **álgebra de loop** de $\mathfrak{sl}_2$ é definida por

$$L\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))$$

como álgebra de Lie com o colchete de Lie dado por

$$[A \otimes f(t), B \otimes h(t)] = [A, B] \otimes f(t)h(t).$$

Considere os elementos da base de $\mathrm{L}\mathfrak{sl}_2$,

$$e_n = e \otimes t^n, \quad h_n = h \otimes t^n, \quad f_n = f \otimes t^n.$$

A ação de e_n, h_n e f_n em $V = \mathbb{C}[x_n]_{n\in\mathbb{Z}}$ é dada por

$$\begin{aligned} e_n &\mapsto \frac{\partial}{\partial x_n}, \\ h_n &\mapsto -2 \sum_{-p+q=n} x_p \frac{\partial}{\partial x_q}, \\ f_n &\mapsto - \sum_{-p-q+r=n} x_p x_q \frac{\partial}{\partial x_r}. \end{aligned}$$

Estas fórmulas podem ser simplificadas do seguinte modo:

$$e(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n z^{-n-1},$$

analogamente para h e f.

Agora, considere a notação $a_n = \dfrac{\partial}{\partial t_n}$ e $a_n^* = x_{-n}$, e defina

$$\begin{aligned} a(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\partial}{\partial x_n} z^{-n-1}, \\ a^*(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^* z^{-n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{-n} z^{-n}. \end{aligned}$$

Consideremos $M \simeq \mathbb{C}[a_n]_{n<0} \otimes \mathbb{C}[a_m^*]_{m\leq 0}$ e $\pi^{2(k+2)}$ a álgebra de vértice de Heisenberg (Veja [5, p. 37]) seja $V_k = M \otimes \pi^{2(k+2)}$ um espaço vetorial. Assim, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.2.4. *As ações*

$$\begin{aligned} e(z) &\mapsto a(z) \\ h(z) &\mapsto -2 : a^*(z)a(z) : +b(z), \\ f(z) &\mapsto - : a^*(z)^2 a(z) : +k\partial_z a^*(z) + a^*(z)b(z) \end{aligned}$$

dão origem a uma representação da extensão central universal de $L\mathfrak{sl}_2$ em V_k.

1.3 Curvas Algebróides Planas

Apresentaremos nesta seção, alguns conceitos e resultados a respeito de curvas algebróides planas abordados neste texto. As referências para esta seção são [23], [7] e [2].

Definição 1.3.1. *Seja K um corpo algebricamente fechado de característica zero. Considere o anel das séries formais em duas variáveis com coeficientes em K, $K[[X,Y]]$. Seja f um elemento de $K[[X,Y]]$, assumiremos que f satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) *f define uma série de potências convergente em uma vizinhança da origem em K^2;*

(b) *f é irredutível em $K[[X,Y]]$.*

A equação $f(X,Y) = 0$ define um ***germe de uma curva analítica irredutivel C****.*

Definição 1.3.2. *Uma* ***curva algebróide plana*** *(f) é a classe de equivalência de elementos não inversíveis f de $K[[X,Y]]\setminus\{0\}$ módulo a relação de associados, ou seja,*

$$(f) = \{u \cdot f \mid u \text{ é unidade em } K[[X,Y]]\}.$$

Portanto, por definição, temos $(f) = (g)$ se, e somente se, existe uma unidade $u \in K[[X,Y]]$, tal que $g = u \cdot f$.

Definição 1.3.3. *Seja $f \in K[[X,Y]]\backslash\{0\}$ tal que*

$$f = F_n + F_{n+1} + \ldots$$

onde cada F_i é um polinômio homogêneo de grau i e $F_n \neq 0$. O inteiro n é chamado de multiplicidade de f e denotado por mult(f).

Como a multiplicidade de uma série de potências é invariante quando multiplicamos por uma unidade, podemos definir a multiplicidade de uma curva algebróide plana (f) como sendo a multiplicidade de f. Uma curva algebróide de multiplicidade 1 será chamada regular. Quando a multiplicidade é maior do que 1, diremos que a curva é singular.

Uma curva algebróide plana (f) é irredutível se a série f é irredutível em $K[[X,Y]]$. Note que esta noção independe do representante f de (f).

Definição 1.3.4. *Seja C uma curva algebróide plana definida por uma série de potência irredutível f. O anel de coordenadas de C é dado por*

$$R = R_f = \frac{K[[X,Y]]}{\langle f \rangle} = K[[x,y]],$$

onde $\langle f \rangle$ é o ideal gerado por $f \in K[[X,Y]]$. Como f é irredutível, então R é um anel local e um domínio de integridade. Assim, R é chamado o ***anel local da curva algebróide*** *C.*

Denotaremos por $\mathcal{F}$ o corpo de frações de R e por $\widetilde{R}$ o fecho inteiro de R em $\mathcal{F}$, isto é, $\mathcal{F} = \{g/h \mid g,h \in R, h \neq 0\}$ e $\widetilde{\mathcal{O}} = \{s \in \mathcal{F} \mid g(s) = 0, \text{para algum } g \in R\}$. Temos que $\mathcal{F} \cong\ K((t))$ e $R \cong K[[t]]$, onde t é uma indeterminada.

Definiremos a seguir dois importantes invariantes para a classificação de curvas, o número de Milnor e o número de Tjurina. Além destes, definiremos um outro importante invariante, o semigrupo de valores de uma curva.

Definição 1.3.5. *Seja C uma curva algebróide plana definida por uma série de potência irredutível f. O* ***número de Milnor*** *μ e o* ***número de Tjurina*** *τ de C são definidos por*

$$\mu(C) = \dim_K \frac{K[[X,Y]]}{\langle f_X, f_Y \rangle} \quad e \quad \tau(C) = \dim_K \frac{K[[X,Y]]}{\langle f, f_X, f_Y \rangle},$$

onde f_X, f_Y são as derivadas parciais de f.

1.3.1 Semigrupos de Valores

Sejam R o anel local de uma curva algebróide irredutível C e $\widetilde{R}$ o fecho inteiro de R em seu corpo de frações $\mathcal{F}$. Este é o anel $K[[t]]$ de séries formais em uma indeterminada, onde K é um corpo algebricamente fechado. A valorização usual de multiplicidade em t faz o anel $K[[t]]$ um anel de valorização discreta. Esta valorização estende de uma forma natural para $K((t)) = \mathcal{F}$ (considerando a expansão de Laurent de elementos de $\mathcal{F}$) e nos dá uma aplicação sobrejetiva $v : \mathcal{F}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $v(xy) = v(x) + v(y)$;

(ii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ (com igualdade se $v(x) \neq v(y)$).

Por convenção, $v(0) = \infty$. Para definirmos o semigrupo de valores de uma curva algebróide irredutível C vamos relembrar alguns conceitos:

Definição 1.3.6. *Seja $S \neq \emptyset$ um subconjunto de $\mathbb{N}$ com $0 \in S$. Dizemos que S é um **semigrupo** se S é fechado em relação à operação usual de adição.*

Definição 1.3.7. *Seja S um semigrupo, definimos o conjunto das **lacunas** (ou gaps) de S como o conjunto $G = \mathbb{N}\backslash S$. No caso em que G for finito, existe um único elemento $c \in S$, chamado de **condutor** do semigrupo, tal que*

(i) $c - 1 \notin S$;

(ii) $c + n \in S,\ \forall\ n \in \mathbb{Z}_+$.

Definição 1.3.8. *O **semigrupo de valores de uma curva algebróide irredutível** C é o conjunto*

$$\Gamma = v(R \backslash\{0\}),$$

onde v é a valorização natural de $K((t))$.

Note que Γ é de fato um semigrupo: $0 \in \Gamma$, já que R é um anel comutativo com unidade u e $v(u) = 0$. Note também que, se $v(g), v(h) \in \Gamma$, com $g, h \in R\backslash\{0\}$ então $v(g) + v(h) \in \Gamma$, já que $g \cdot h \in R\backslash\{0\}$ e $v(g \cdot h) = v(g) + v(h) \in \Gamma$. Além disso, temos que o semigrupo $\Gamma = v(R\backslash\{0\})$ possui um condutor (Prop. 1.1, pg.9, [23]), ou seja, existe $c > 0$ tal que para todo $j \in \mathbb{Z}_+$, $j \geq c$ implica $j \in \Gamma$.

1.3.2 Parametrização e Condutor

Veremos agora uma das formas para determinar o condutor de um semigrupo de valores de uma curva algebróide plana irredutível. As referências para esta seção, como informado inicialmente, são [23], [7] e [2].

Seja C uma curva algebróide plana irredutível definida pela parametrização (expansão de Puiseux)

$$\begin{cases} x = t^n, \\ y = \sum_{i \geq m} a_i t^i, \end{cases} \tag{1.10}$$

onde n é a multiplicidade de C, $m > n$ e tal que m não é um múltiplo de n, isto é, $m \neq 0 \bmod n$. Existem duas sequências (e_i) e (β_i) de inteiros positivos, associados à parametrização de C como segue:

$$\begin{aligned} e_0 &= \beta_0 = n \\ \beta_i &= \min\{j |\ j \neq 0 \bmod e_{i-1} \text{ e } a_j \neq 0\}, \\ e_i &= \mathrm{mdc}(e_{i-1}, \beta_i). \end{aligned}$$

Note que e_i divide e_{i-1}, para todo $i \geq 1$, assim temos uma sequência de divisores de n

$$e_1 > e_2 > \ldots > e_d = 1.$$

Definição 1.3.9. *Os $d+1$ inteiros positivos $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_d\}$ são chamados **expoentes característicos** de C.*

Através da sequência (e_i) construída acima, obtemos

$$e_0 = n,\ e_d = 1 \text{ e } n_i = e_{i-1}/e_i \text{ para } i = 1, \ldots, d.$$

Os d inteiros $n_1, \ldots, n_d$ são estritamente maiores que 1 e

$$\begin{aligned} e_{i-1} &= n_i e_i \\ e_{i-1} &= n_i n_{i+1} \cdots n_d, \text{ para } i = 1,\ \ldots, d. \end{aligned}$$

Em particular, $n = n_1 \cdots n_d$.

Sejam $v_0 = n = v(x)$, $v_1 = m = v(y)$, por [23, Thm.3.9], o semigrupo de valores Γ de C tem um conjunto minimal de geradores $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$, onde $v_i = n_i v_{i-1} + \beta_i - \beta_{i-1}$

para $i = 2, \ldots, d$. Através deste conjunto minimal de geradores de Γ, podemos obter o condutor c como segue ([2])

$$c = \sum_{i=1}^{d} (n_i - 1)v_i - v_0 + 1. \tag{1.11}$$

1.3.3 Diferenciais de Kähler

Vamos relembrar primeiramente a definição de derivação. Seja A um anel comutativo, A uma K-álgebra e M um A-módulo. Uma K-derivação de A em M é uma aplicação K-linear $d : A \longrightarrow M$ que satisfaz a regra de Leibniz:

$$d(fg) = fdg + gdf, \ \forall f, g \in A.$$

Definição 1.3.10. *Seja R o anel local de curva algebróide irredutível $C = (f)$ e d uma derivação. O R-módulo, denotado por $Rd\mathcal{O}$, gerado por dx e dy módulo a relação $f_x dx + f_y dy = 0$ é chamado o* ***módulo das diferenciais de Kähler****, onde f_x, f_y são as derivadas parciais de f em relação a x e y, respectivamente.*

Esta é uma definição mais breve, para uma definição mais detalhada veja [15, Ch. 10] e [6, Ch. 2, sec. 8]. O módulo das diferenciais de Kähler é usualmente denotado por $\Omega_{R/K}$. Contudo, nas referências desta seção a notação mais antiga é a utilizada.

Definição 1.3.11. *Dizemos que $\omega \in RdR$ é* ***exata*** *se existe $g \in R$ tal que $\omega = dg$.*

Capítulo 2

A Extensão Central Universal

Nesta capítulo, descreveremos a extensão central universal do anel local de uma curva algebróide plana para a qual a diferença entre os números de Milnor e Tjurina é dois. Para isso, primeiramente vamos relembrar alguns resultados.

2.1 A Extensão Central Universal de $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} R$

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie complexa simples de dimensão finita e R uma $\mathbb{C}$-álgebra comutativa e associativa. Seja $\widehat{\mathfrak{L}}$ a extensão central universal de

$$\mathfrak{L} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} R. \tag{2.1}$$

Dessa forma, considere a sequência exata natural

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{L}} \longrightarrow \mathfrak{L} \longrightarrow 0, \tag{2.2}$$

onde $\mathfrak{a}$ é central em $\widehat{\mathfrak{L}}$.

Teorema 2.1.1 (Kassel, [12]). *A extensão central universal de $\mathfrak{L} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} R$ como espaços vetoriais é dada por $\widehat{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{a}$, onde $\mathfrak{a}$ é linearmente isomorfo às diferenciais de Kähler de R módulo pelas diferenciais exatas, isto é,*

$$\mathfrak{a} = \Omega_{R/\mathbb{C}}/dR. \tag{2.3}$$

E a relação de comutação em $\widehat{\mathfrak{L}}$ é dada por

$$[A \otimes f, B \otimes g] = [A, B] \otimes fg + (A, B)\overline{fdg}, \tag{2.4}$$

onde $A, B \in \mathfrak{g}, f, g \in R$, (A, B) é a forma de Killing sobre $\mathfrak{g}$ e $\overline{fdg} \in \mathfrak{a}$.

Note que a extensão é totalmente determinada por R, ou, mais precisamente, por suas diferenciais não-exatas.

Exemplos 2.1.2. *1. (Kac-Moody) Temos como curva* $\mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}$ *então* $R \simeq \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, $\Omega_{R/\mathbb{C}} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]dt$ *e* $\mathfrak{a} = \langle t^{-1}dt \rangle$.

2. *(Krichever-Novikov, [14])* $R :=$ *anel das funções regulares de uma curva projetiva lisa menos 2 pontos (a superfície de Riemann compacta com os pontos 0 e* ∞ *removidos).*

3. *(Bremner, [3]) Curvas hiperelípticas menos 2, 3, ou 4 pontos:* $R \simeq \mathbb{C}[t, t^{-1}, u]$ *onde* $u^2 \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. *Curva elíptica menos 2 pontos:* $R \simeq \mathbb{C}[t, t^{-1}, u]$ *com* $u^2 = t^3 - 2bt^2 + t$.

4. *(Bueno-Cox-Futorny, [4]) Curva elíptica menos 2 pontos:* $R \simeq \mathbb{C}[t, t^{-1}, u]$ *com* $u^2 = t^3 - 2bt^2 + t$.

Dessa forma, se R é o completamento do anel local de uma cúspide, ou equivalentemente, o anel local de uma *curva algebróide* C, então seria interessante analisar quando $\mathfrak{a}$ é não-trivial.

Seja C uma curva plana algebróide definida por uma série de potências irredutível f e seja R seu anel local. Definindo o número de Milnor μ_C e o número de Tjurina τ_C por

$$\mu_C := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[X, Y]]}{\langle f_X, f_Y \rangle} \qquad \tau_C := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[X, Y]]}{\langle f, f_X, f_Y \rangle},$$

onde f_X, f_Y são as derivadas parciais de f em relação a X e Y respectivamente, então o comprimento ℓ do R-módulo $\mathfrak{a}$ satisfaz

$$\ell := \ell(\mathfrak{a}) = \dim_{\mathbb{C}}(\Omega_{R/\mathbb{C}}/dR) = \mu_C - \tau_C.$$

Zariski provou que $\mathfrak{a}$ é trivial se, e somente se, C é monomial, ou seja, corresponde a uma curva da forma $Y^n = X^m$, ou equivalentemente, $f(X, Y) = X^m - Y^n$. Além disso, Zariski mostrou os seguintes resultados:

Observação 2.1.3. *[23, SecIII.3] Se* C *é uma curva algebróide plana irredutível, não-monomial, definida pela parametrização*

$$x = t^n \qquad y = t^m + t^\lambda + \dots, \tag{2.5}$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$, λ *é o* invariante de Zariski *dado por*

$$\lambda := \min(v(\Omega_{R/\mathbb{C}}) \setminus v(dR)) - n + 1 \tag{2.6}$$

e v *é a valorização induzida pela aplicação valorização discreta do fecho integral* $\overline{R}$*, então:*

(i) $\xi := mydx - nxdy$ *é uma diferencial não-exata de valorização mínima e esta valorização é dada por* $v(\xi) = \lambda + n - 1$*;*

(ii) se $\omega \in \Omega_{R/\mathbb{C}}$ *é tal que* $v(\omega) + 1 \notin \Gamma$*, então* ω *é não-exata, onde* Γ *é o semigrupo de valores de* C*;*

(iii) qualquer diferencial com ordem maior ou igual a $c - 1$ *é exata, onde* c *é o condutor de* Γ*.*

Através destes resultados de Zariski (além de outros resultados), V. Bayer e A. Hefez classificaram curvas planas algebróides com ℓ pequeno em [2]. Eles provaram que $\ell = 1$ se, e somente se, y é binomial e $\lambda = (n-1)m - 2n$. Da perspectiva de conseguir uma realização de campo livre de R, este caso, produz uma extensão central unidimensional, o que seria um pouco semelhante à álgebra de Lie Heisenberg, onde os cociclos são escalares. Para $\ell = 2$, Bayer e Hefez mostraram o seguinte resultado de classificação, o qual será utilizado neste trabalho.

Teorema 2.1.4 (V. Bayer, A. Hefez)**.** *Seja* C *uma curva plana algebróide irredutível, e seja* R *o seu anel local. Então* $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega_{R/\mathbb{C}}/dR) = 2$ *se, e somente se,* C *é analiticamente equivalente à curva cujo anel local*

$$R = \mathbb{C}[[x, y]]$$

tem uma das seguintes formas:

(I) a parametrização é dada por

$$x = t^n \qquad\qquad y = t^m + t^\lambda$$

com as seguintes duas possibilidades

(a) $n = 4$, $m = 6$ *e* $\lambda > 6$ *é ímpar; ou*

(b) $\lambda = (n-1)m - 3n$.

(II) a parametrização é dada por

$$x = t^n \qquad\qquad y = t^m + t^\lambda + f(t)$$

com as seguintes duas possibilidades

(a) $n = 4$, $m > 8$, $\lambda = 2m - 8$ *e*

$$f(t) = \frac{3m-8}{2m} t^{3m-16} + kt^{3m-12}$$

(b) $n \geq 5$, $m > 2n/(n-3)$, $\lambda = (n-2)m - 2n$ *e*

$$f(t) = kt^{(n-1)m-3n}$$

onde $k \in \mathbb{C}$ *é uma constante.*

Demonstração. Veja [2, Thm.12, Thm.17]. $\square$

Observação 2.1.5. *Para simplificar, vamos nos referir às curvas acima como sendo de tipo (I) ou (II), e nomearemos os subcasos com (I.a), (I.b), (II.a) e (II.b).*

Com isso em mente, temos o seguinte:

Proposição 2.1.6. *Seja* C *uma curva plana algebróide irredutível definida pela parametrização (2.5) cujo anel local dado por* $R = \mathbb{C}[[x,y]]$ *é tal que* $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega_{R/\mathbb{C}}/dR) = 2$. *Considere* $\xi := mydx - nxdy$. *Então uma base para* $\Omega_{R/\mathbb{C}}/dR$ *é dada por* ξ *e* $\eta = x\xi$, *se* C *é uma curva do tipo (I) e dada por* ξ *e* $\eta = y\xi$, *se* C *é uma curva do tipo (II).*

Demonstração. Por Zariski, Observação 2.1.3 (i), temos que ξ é uma diferencial não-exata com valorização mínima dada por $v(\xi) = \lambda + n - 1$ e pela Observação 2.1.3 (ii) em particular temos que ω é não-exata se $v(\omega) = c - 2$, pois o condutor de um semigrupo de valores Γ é o menor c para o qual $c - 1 \notin \Gamma$. Agora, pelo Teorema 2.1.4 (Bayer e Hefez), as curvas tal que $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega_{R/\mathbb{C}}/dR) = 2$ são as referidas acima como sendo de tipo (I) ou (II), com os subcasos (I.a), (I.b), (II.a) e (II.b). Assim, analisaremos cada caso.

Se C é como em (I.a), por (i), $\xi = 6ydx - 4xdy$ é uma diferencial não-exata com $v(\xi) = \lambda + 3$ é fácil ver que o condutor é $c = \lambda + 9$ (ou, usando a notação e os resultados da Seção 1.3.2, neste caso, temos que: $v(x) = 4$, $v(y) = 6$, $e_0 = \beta_0 = 4$, $\beta_1 = 6$, $e_1 = 2$, e $\beta_2 = \lambda$ e $e_2 = 1$. Logo, $d = 2$, $v_0 = 4$, $v_1 = 6$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$ e $v_2 = 6 + \lambda$. Assim, pela fórmula (1.11) $c = \lambda + 9$). Então, é suficiente encontrar $\eta \in \Omega_{R/\mathbb{C}}$ tal que $v(\eta) = c - 2 = \lambda + 7$, o qual é linearmente independente de ξ, pois tem valorização diferente, e não é exata devido à (ii). Logo, basta tomar $\eta = x\xi$, já que $v(\eta) = v(x) + v(\xi) = 4 + (3 + \lambda) = \lambda + 7$ como desejado.

Agora, de acordo com [2], os casos restantes correspondem às curvas para as quais o invariante é $d = 1$, então o condutor é dado pela fórmula $c = (n-1)m - n + 1$ (Veja Seção 1.3.2, fórmula (1.11)). Logo, se C é como em (I.b), por (i), $v(\xi) = (n-1)m - 2n - 1$, assim, para obter $v(\eta) = c - 2$ basta tomar $\eta = x\xi$. Se C é como em (II.a) então $v(\xi) = 2m - 5$ tome $\eta = y\xi$, já que deste modo $v(\eta) = 3m - 5 = c - 2$. E, se C é como em (II.b) então $v(\xi) = (n-2)m - n - 1$ e basta tomar, novamente, $\eta = y\xi$, pois $v(\eta) = (n-1)m - n - 1 = c - 2$. $\square$

Teorema 2.1.7. *Seja C uma curva plana algebróide irredutível cujo anel local dado por $R = \mathbb{C}[[x, y]]$ é tal que $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega_{R/\mathbb{C}}/dR) = 2$, e seja $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ a álgebra de Lie linear especial de ordem 2. Seja*

$$\mathfrak{L} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} R.$$

Então existem $\xi, \eta \in \Omega_{R/\mathbb{C}}$ tal que a extensão central universal de $\mathfrak{L}$ é

$$\widehat{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} \oplus (\mathbb{C}\,\overline{\xi} \oplus \mathbb{C}\,\overline{\eta})$$

e a operação colchete sobre $\widehat{\mathfrak{L}}$, computada sobre os geradores, é da forma

$$[A \otimes f + \overline{\alpha}\,,\, B \otimes g + \overline{\beta}] = [A, B] \otimes fg + (A, B)c(f, g),$$

onde $A, B \in \mathfrak{g}$, $f, g \in R$ são monomiais, $\alpha, \beta \in \Omega_{R/\mathbb{C}}$, (A, B) é a forma de Killing e

$$c(f,g) = \begin{cases} -\overline{\xi} & \textit{se } f = x \textit{ e } g = y \\ \overline{\xi} & \textit{se } f = y \textit{ e } g = x \\ -i\,\overline{\eta} & \textit{se } f = x^i \textit{ e } g = x^k y \textit{ com } i + k = 2 \textit{ e } i > 0 \\ k\,\overline{\eta} & \textit{se } f = x^i y \textit{ e } g = x^k \textit{ com } i + k = 2 \textit{ e } k > 0 \\ 0 & \textit{caso contrário,} \end{cases}$$

se C é do tipo (I), ou

$$c(f,g) = \begin{cases} -\overline{\xi} & \textit{se } f = x \textit{ e } g = y \\ \overline{\xi} & \textit{se } f = y \textit{ e } g = x \\ -l\,\overline{\eta} & \textit{se } f = xy^j \textit{ e } g = y^l \textit{ com } j+l=2 \textit{ e } l>0 \\ j\,\overline{\eta} & \textit{se } f = y^j \textit{ e } g = xy^l \textit{ com } j+l=2 \textit{ e } j>0 \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

se C é do tipo (II).

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e R uma $\mathbb{C}$-álgebra associativa e comutativa. Pelo Teorema 2.1.1 a extensão central universal do espaço vetorial $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \otimes R$ pode ser dada por $\widehat{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{a}$, onde $\mathfrak{a}$ é dada pela equação (2.3). Agora, também pelo Teorema 2.1.1, (equação (2.4)), temos que

$$[A \otimes f, B \otimes g] = [A,B] \otimes fg + (A,B)\overline{fdg},$$

onde $A, B \in \mathfrak{g}, f, g \in R$, $\omega, \eta \in \mathfrak{a}$ e (A,B) é a forma de Killing em $\mathfrak{g}$. Então, obter a afirmação do teorema, é uma questão de descrever $\mathfrak{a}$ e computar as classes $\overline{fdg}$ no nosso caso. Faremos isso expressando essas classes em termos de duas diferenciais adequadas, os geradores de $\mathfrak{a}$. Pela Proposição 2.1.6 uma base para $\Omega_{R/\mathbb{C}}/dR$ é dada por ξ e $\eta = x\xi$, se C é uma curva do tipo (I) e dada por ξ e $\eta = y\xi$, se C é uma curva do tipo (II), onde $\xi := mydx - nxdy$. A fim de determinar os cociclos $\overline{fdg}$ podemos tomar f e g monomiais. Deste modo, escrevemos

$$f = x^i y^j \qquad g = x^k y^l$$

e sejam $p := i + k$ e $q := j + l$. Afirmamos que

$$fdg = \frac{kq - lp}{mq + np}\, x^{p-1} y^{q-1} \xi \mod dR, \tag{2.7}$$

onde $\xi = mydx - nxdy$ e $p, q \geq 1$. De fato, seja $a = \dfrac{kq - lp}{mq + np}$. Então,

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{k - ma}{p} x^p y^q\right) &= \frac{k - ma}{p}\left(px^{p-1}y^q dx + qx^p y^{q-1} dy\right) \\
&= (k - ma)x^{p-1}y^q dx + \frac{kq - mqa}{p} x^p y^{q-1} dy \\
&= (k - ma)x^{p-1}y^q dx + \frac{lp + npa}{p} x^p y^{q-1} dy \\
&= (kx^{p-1}y^q dx + lx^p y^{q-1} dy) - (max^{p-1}y^q dx - nax^p y^{q-1} dy) \\
&= fdg - ax^{p-1}y^{q-1}\xi
\end{aligned}$$

assim a afirmação segue.

Logo, é suficiente lidar com fdg como em (2.7), se $p, q \geq 1$. Mas se, por exemplo, $q = 0$ então $j = l = 0$ e temos

$$fdg = x^i d(x^k) = kx^{i+k-1}dx = d(kx^{i+k}/(i + k))$$

então fdg é exata. Por um argumento similar, se $p = 0$, fdg também é exata.

Para as possibilidades restantes, para simplificar a notação, chamaremos $\omega := fdg$ e escrevemos

$$\omega = \frac{kq - lp}{mq + np}\, x^{p-1}y^{q-1}\xi. \tag{2.8}$$

Agora, pela Observação 2.1.3 (iii) qualquer diferencial com ordem pelo menos $c - 1$ é exata. Logo, para que ω seja não-exata, devemos ter $v(\omega) \leq c - 2$.

Se C é como em (I.a), pela demonstração da Proposição 2.1.6, $c = \lambda + 9$, assim, devemos ter

$$v(\omega) = 4(p - 1) + 6(q - 1) + \lambda + 3 \leq \lambda + 7$$

para ω não se anular em $\mathfrak{a}$, o qual produz

$$4p + 6q \leq 14. \tag{2.9}$$

Assim, de (2.9), permanecem apenas duas possibilidades à esquerda.

Se $p = q = 1$, pela fórmula (2.8) temos

$$\omega = \begin{cases} -(1/10)\xi, & \text{se } \; i = l = 1 \\ (1/10)\xi, & \text{se } k = j = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e se $p = 2$ e $q = 1$ temos

$$\omega = \begin{cases} -(i/14)\eta, & \text{se } i > 0 \text{ e } l = 1 \\ (k/14)\eta, & \text{se } k > 0 \text{ e } j = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, basta renomear ξ como 10ξ e η como 14η.

Se C é como em (I.b), pela demonstração da Proposição 2.1.6, $c = (n-1)m - n + 1$, e devemos considerar

$$v(\omega) = n(p-1) + m(q-1) + (n-1)m - 2n - 1 \leq (n-1)m - n - 1,$$

para que ω não seja nulo em $\mathfrak{a}$, o qual produz

$$n(p-2) + m(q-1) \leq 0. \tag{2.10}$$

Então, de (2.10) permanecem apenas duas possibilidades à esquerda.

Se $p = q = 1$, pela fórmula (2.8) temos

$$\omega = \begin{cases} -(1/(m+n))\xi & \text{se } \ i = l = 1 \\ (1/(m+n))\xi & \text{se } k = j = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e se $p = 2$ e $q = 1$, temos

$$\omega = \begin{cases} -(i/(m+2n))\eta & \text{se } i > 0 \text{ e } l = 1 \\ (k/(m+2n))\eta & \text{se } k > 0 \text{ e } j = 1\, \cdot \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo, basta renomear ξ como $(m+n)\xi$ e η como $(m+2n)\eta$.

Se C é como em (II.a), então $c = 3m - 3$, e devemos considerar

$$v(\omega) = 4(p-1) + m(q-1) + 2m - 5 \leq 3m - 5,$$

para ω não se anular em $\mathfrak{a}$, o qual produz

$$4(p-1) + m(q-2) \leq 0. \tag{2.11}$$

Assim, de (2.11) permanecem apenas três possibilidades à esquerda.

(i) $p = q = 1$, que coincide com o caso anterior.

(ii) $p = 1$ e $q = 2$,

$$\omega = \begin{cases} -(l/(2m+4))\eta & \text{se } \ l > 0 \text{ e } i = 1 \\ (j/(2m+4))\eta & \text{se } j > 0 \text{ e } k = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \cdot$$

Então, basta renomear ξ como $(m+n)\xi$ e η como $(2m+4)\eta$.

(iii) $p = \alpha$, $\alpha \geq 2$ e $q = 1$, por (2.11) temos

$$4(\alpha - 1) \leq m,$$

o qual satisfaz a hipótese $m > 8$, para $\alpha > 3$.

$$\omega = \begin{cases} (-i)/(m+4\alpha))x^{(\alpha-1)}\xi & \text{se } \ i > 0 \text{ e } l = 1 \\ (k/(m+4\alpha))x^{(\alpha-1)}\xi & \text{se } k > 0 \text{ e } j = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \cdot$$

Contudo,

$$v(x^{(\alpha-1)}\xi) = 4(\alpha - 1) + 2m - 5 = 4(\alpha - 2) + 2m - 1.$$

Como $4(\alpha-2)+2m \in S$, $\alpha \geq 2$ então $x^{(\alpha-1)}\xi$ é exata, para todo $\alpha \geq 2$, i.e, $\omega = 0 \bmod dR$.

Se C é como em (II.b), então $c = (n-1)m - n + 1$, e devemos considerar

$$v(\omega) = n(p-1) + m(q-1) + (n-2)m - n - 1 \leq (n-1)m - n - 1,$$

para ω não se anular em $\mathfrak{a}$, o qual produz

$$n(p-1) + m(q-2) \leq 0. \tag{2.12}$$

Logo, de (2.12) resta apenas três possibilidades.

(i) $p = q = 1$, idêntico ao caso anterior.

(ii) Se $p = 1$ e $q = 2$,

$$\omega = \begin{cases} -(l/(2m+n))\eta & \text{se } \ l > 0 \text{ e } i = 1 \\ (j/(2m+n))\eta & \text{se } j > 0 \text{ e } k = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \cdot$$

Então, basta renomear ξ como $(m+n)\xi$ e η como $(2m+n)\eta$.

(iii) $p=\alpha$, $\alpha \geq 2$ e $q=1$, por (2.12),

$$n(\alpha-1)-m \leq 0$$
$$n(\alpha-1) \leq m$$

o qual satisfaz a hipótese $m > 2n/(n-3)$.

$$\omega = \begin{cases} (-i)/(m+\alpha n))x^{(\alpha-1)}\xi & \text{se } \ i>0 \text{ e } l=1 \\ (k/(m+\alpha n))x^{(\alpha-1)}\xi & \text{se } k>0 \text{ e } j=1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \cdot$$

No entanto,

$$v(x^{(\alpha-1)}\xi) = n(\alpha-1)+(n-2)m-n-1 = n(\alpha-2)+(n-2)m-1.$$

Como $n(\alpha-2)+(n-2)m \in S$, $\alpha \geq 2$ então $x^{(\alpha-1)}\xi$ é exata, para todo $\alpha \geq 2$, i.e, $\omega = 0 \mod dR$. $\square$

O teorema acima nos permite concluir, como veremos a seguir, que $\widehat{\mathfrak{L}}$ projeta sobre uma superálgebra (i.e uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada) cuja multiplicação é induzida pelo colchete de $\mathfrak{L}$. Para o restante deste trabalho, R e $\mathfrak{g}$ são como no teorema anterior, e assim é a convenção para x, y, ξ, η e $\mathfrak{a}$.

Proposição 2.1.8. *Existe um epimorfismo natural $\widehat{\mathfrak{L}} \longrightarrow \mathfrak{L}'$, onde $\mathfrak{L}'$ é uma superálgebra não trivial.*

Demonstração. Faremos a seguinte decomposição de $\widehat{\mathfrak{L}}$ a saber

(i) se C é do tipo (I)

$$\widehat{\mathfrak{L}}^0 = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[x^2, y] \oplus \mathbb{C}\eta \qquad \widehat{\mathfrak{L}}^1 = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[x^2, y]x \oplus \mathbb{C}\xi,$$

(ii) se C é do tipo (II)

$$\widehat{\mathfrak{L}}^0 = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[x, y^2] \oplus \mathbb{C}\eta \qquad \widehat{\mathfrak{L}}^1 = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[x, y^2]y \oplus \mathbb{C}\xi.$$

Temos que $[\widehat{\mathfrak{L}}^0, \widehat{\mathfrak{L}}^0] \subset \widehat{\mathfrak{L}}^0$, $[\widehat{\mathfrak{L}}^0, \widehat{\mathfrak{L}}^1] \subset \widehat{\mathfrak{L}}^1$ e $[\widehat{\mathfrak{L}}^1, \widehat{\mathfrak{L}}^1] \subset \widehat{\mathfrak{L}}^0$. De fato, primeiramente, vamos considerar as curvas C do tipo (I). Sejam $M_0 := \mathbb{C}[x^2, y]$, $M_1 := \mathbb{C}[x^2, y]x$, e tome $A, B \in \mathfrak{g}$, $f, g \in R$. Note que

$$AB \otimes fg \in \begin{cases} \widehat{\mathfrak{L}}^0 & \text{se } f, g \in M_0 \\ \widehat{\mathfrak{L}}^1 & \text{se } \; f \in M_0 \text{ and } g \in M_1 \\ \widehat{\mathfrak{L}}^0 & \text{se } \; f, g \in M_1 \end{cases}. \tag{2.13}$$

Então, por (2.4), devemos mostrar que (2.13) é válido substituindo $AB \otimes fg$ por $\overline{fdg}$. Mas, pelo Teorema 2.1.7, os únicos cociclos não-nulos, a menos de sinal (uma vez que $\overline{fdg} = -\overline{gdf}$), são

$$\begin{aligned} \overline{xdy} &= -\xi \in \widehat{\mathfrak{L}}^1 \\ \overline{xdxy} &= -\eta \in \widehat{\mathfrak{L}}^0 \\ \overline{x^2dy} &= -2\eta \in \widehat{\mathfrak{L}}^0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como $x \in M_1$, $y \in M_0$, $xy \in M_1$ e $x^2 \in M_0$ então a afirmação segue. Analogamente, se C é do tipo (II) considere $M_0 := \mathbb{C}[x, y^2]$, $M_1 := \mathbb{C}[x, y^2]y$. Pelo Teorema 2.1.7, os únicos cociclos não-nulos, a menos de sinal (uma vez que $\overline{fdg} = -\overline{gdf}$), são

$$\begin{aligned} \overline{xdy} &= -\xi \in \widehat{\mathfrak{L}}^1 \\ \overline{xydy} &= -\eta \in \widehat{\mathfrak{L}}^0 \\ \overline{xdy^2} &= -2\eta \in \widehat{\mathfrak{L}}^0 \end{aligned}$$

Como $x \in M_0$, $y \in M_1$, $xy \in M_1$ e $y^2 \in M_0$, então o resultado segue como no caso anterior. Agora considere o ideal $M := \langle M_0 \cap M_1 \rangle \subset R$, e seja $R' = R/M$. Seja

$$\widehat{\mathfrak{L}}' := \big(\mathfrak{g} \otimes R'\big) \oplus \big(\mathbb{C}\xi \oplus \mathbb{C}\eta\big)$$

uma extensão central de $\mathfrak{g} \otimes R'$ tal que

$$[A \otimes \overline{f}, B \otimes \overline{g}] := [A, B] \otimes \overline{fg} + (A, B)\overline{fdg},$$

onde $A, B \in \mathfrak{g}$ e $f, g \in R$. Afirmamos que esta operação colchete está bem definida. De fato, para verificar isso, basta mostrar que o mapa bilinear induzido $M \times M \to \mathfrak{a}$ se anula. Para ver isso, tome $h \in M_0 \cap M_1$ e escreva $h = \overline{H}$ onde

$$H = \alpha_{00} + \alpha_{10}X + \alpha_{01}Y + \alpha_{20}X^2 + \alpha_{11}XY + \alpha_{02}Y^2 + ... \quad \in \mathbb{C}[[X, Y]].$$

Suponha que C é do tipo (I). Como $h \in M_0$, existem $\alpha'_{00}, \alpha'_{01}, \alpha'_{20}, \alpha'_{02} \in \mathbb{C}$ tais que

$$(\alpha_{00} - \alpha'_{00}) + \alpha_{10}X + (\alpha_{01} - \alpha'_{01})Y + (\alpha_{20} - \alpha'_{20})X^2 + \alpha_{11}XY + (\alpha_{02} - \alpha'_{02})Y^2 + \ldots \in \langle F \rangle, \tag{2.15}$$

onde $F \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ é tal que $R = \mathbb{C}[[X, Y]]/\langle F \rangle$. Já que $h \in M_1$, existem $\alpha'_{10}, \alpha'_{11} \in \mathbb{C}$ tal que

$$\alpha_{00} + (\alpha_{10} - \alpha'_{10})X + \alpha_{01}Y + \alpha_{20}X^2 + (\alpha_{11} - \alpha'_{11})XY + \alpha_{02}Y^2 + \ldots \in \langle F \rangle. \tag{2.16}$$

Agora, de acordo com [2], temos que

$$F = (X^2 + X^3)^2 + XY^{(a+3)/2}$$

com $a > 6$ e ímpar se C é do tipo (I.a), e

$$F = X^n - Y^m + X^{n-2}Y^{m-3}$$

com $n > 2$ e $m > 4$ se C é do tipo (I.b). Assim, em ambos os casos, concluímos que $\alpha_{10} = \alpha_{11} = 0$ por (2.15) e que $\alpha_{00} = \alpha_{01} = \alpha_{20} = \alpha_{02} = 0$ por (2.16). Segue trivialmente que se $f, g \in M$ então $\overline{fdg} = 0$, pois os únicos cociclos não triviais estão indicados nas equações (2.14) apenas lembrando que $x = \overline{X}$ e $y = \overline{Y}$. Assim, a boa definição da operação colchete segue para curvas de tipo (I). Para as curvas de tipo (II), segue-se por argumentos semelhantes, juntamente com o fato de que qualquer tal curva é da forma

$$F = X^n - Y^m + X^{m-3}Y^{m-2} + \sum_{i=2}^{2+\lfloor m/n \rfloor} X^{n-2}Y^{m-i}$$

com $n \geq 4$ e $m > 2n/(n-3)$ devido à [2]. Assim a decomposição

$$\widehat{\mathfrak{L}}' = \Big(\big(\mathfrak{g} \otimes \overline{M_0} \big) \oplus \mathbb{C}\eta \Big) \oplus \Big(\big(\mathfrak{g} \otimes \overline{M_1} \big) \oplus \mathbb{C}\xi \Big)$$

fornece uma $\mathbb{Z}_2$-graduação não trivial para $\widehat{\mathfrak{L}}'$. $\square$

Capítulo 3

A Álgebra de Lie do Tipo Heisenberg

Neste capítulo, veremos a definição da álgebra de Lie do Tipo Heisenberg e obtemos, no Teorema 3.2.1, uma representação de Fock para esta álgebra. Além disso, no Teorema 3.3.1, obtemos uma realização da álgebra de loop generalizada de séries de potências formais em duas variáveis, de modo que ela possa ser útil para o nosso contexto, devido à forma como estamos expressando os elementos de $\mathfrak{L}$. Por fim, caracterizamos uma realização de campo livre de $\widehat{\mathfrak{L}}$ no Teorema 3.4.1.

3.1 Definição da Álgebra de Lie do Tipo Heisenberg

Um passo intermediário para obter uma representação para a extensão central de $\mathfrak{L}$, $\widehat{\mathfrak{L}}$, será obter uma representação para uma extensão central R. Deste modo, considere o $\mathbb{C}$-espaço vetorial R como uma álgebra de Lie comutativa. Definimos sua *álgebra de Lie do tipo Heisenberg* $\mathfrak{R}$ como a extensão central

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}\overline{\xi} \oplus \mathbb{C}\overline{\eta} \longrightarrow \mathfrak{R} \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Esta álgebra de Lie é totalmente descrita pelos monômios $b_{ij} := x^i y^j$, com $i, j \in \mathbb{N}$, os elementos centrais $\overline{\xi}$ e $\overline{\eta}$, e, do Teorema 2.1.7, as seguintes relações

$$[b_{ij}, b_{kl}] = \begin{cases} -\overline{\xi}, & \text{se } i = 1,\ j = 0,\ k = 0 \text{ e } l = 1 \\ \overline{\xi}, & \text{se } i = 0,\ j = 1,\ k = 1 \text{ e } l = 0 \\ -i\,\overline{\eta}, & \text{se } j = 0,\ l = 1,\ i + k = 2 \text{ e } i > 0 \\ k\,\overline{\eta}, & \text{se } j = 1,\ l = 0,\ i + k = 2 \text{ e } k > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

se C for do tipo (I).

$$[b_{ij}, b_{kl}] = \begin{cases} -\overline{\xi}, & \text{se } i=1,\ j=0,\ k=0 \text{ e } l=1 \\ \overline{\xi}, & \text{se } i=0,\ j=1,\ k=1 \text{ e } l=0 \\ -l\,\overline{\eta}, & \text{se } i=1,\ k=0,\ j+l=2 \text{ e } l>0 \\ j\,\overline{\eta}, & \text{se } i=0,\ k=1,\ j+l=2 \text{ e } j>0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

se C for do tipo (II). Além disso, para todo $i, j \in \mathbb{N}$

$$[b_{ij}, \overline{\xi}] = 0, \qquad [b_{ij}, \overline{\eta}] = 0,$$

em ambos os casos.

Lembramos que a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{R}$ é dada por

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{R}) := \frac{\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{R}^{\otimes n}}{\langle r \otimes s - s \otimes r - [r,s]\rangle_{r,s\in\mathfrak{R}}}.$$

Note que $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$ é uma álgebra associativa com unidade, e, por princípios gerais, qualquer representação de $\mathfrak{R}$ é automaticamente um $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$-módulo. Assim, $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$ é uma álgebra associativa com geradores b_{ij}, $i, j \in \mathbb{N}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\xi}$ e relações

$$b_{10}b_{01} - b_{01}b_{10} = -\overline{\xi} \tag{3.1}$$

$$b_{10}b_{11} - b_{11}b_{10} = -\overline{\eta} \tag{3.2}$$

$$b_{20}b_{01} - b_{01}b_{20} = -2\overline{\eta} \tag{3.3}$$

$$b_{ij}b_{kl} - b_{kl}b_{ij} = 0, \quad \text{caso contrário, com } i, j, k, l \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

se C for do tipo (I). Ou

$$b_{10}b_{01} - b_{01}b_{10} = -\overline{\xi} \tag{3.5}$$

$$b_{11}b_{01} - b_{01}b_{11} = -\overline{\eta} \tag{3.6}$$

$$b_{10}b_{02} - b_{02}b_{10} = -2\overline{\eta} \tag{3.7}$$

$$b_{ij}b_{kl} - b_{kl}b_{ij} = 0, \quad \text{caso contrário, com } i, j, k, l \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

se C for do tipo (II). E,

$$b_{ij}\,\overline{\xi} - \overline{\xi}\,b_{ij} = 0 \tag{3.9}$$

$$b_{ij}\,\overline{\eta} - \overline{\eta}\,b_{ij} = 0 \tag{3.10}$$

em ambos os casos, para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

3.2 Representação de Fock

Agora, utilizaremos a álgebra associativa $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$, construída na seção anterior, para obter uma representação da álgebra de Lie do tipo Heisenberg $\mathfrak{R}$. A fim de simplicar a notação vamos continuar utilizando a Observação 2.1.5 a respeito das curvas do Teorema 2.1.4.

Teorema 3.2.1. *Seja $\pi := \mathbb{C}[b_{10}, b_{01}]$. Então a ação de $\mathfrak{R}$ em π dada por*

(i)

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{\xi} & \mapsto & 0 & \qquad & \overline{\eta} & \mapsto & 1 \\ b_{10} & \mapsto & b_{10} & & b_{01} & \mapsto & b_{01} \\ b_{11} & \mapsto & \dfrac{\partial}{\partial b_{10}} & & b_{20} & \mapsto & -2\dfrac{\partial}{\partial b_{01}} \end{array}$$

$$b_{ij} \mapsto 0 \qquad \textit{caso contrário}, (i, j \in \mathbb{N})$$

se C for do tipo (I),

(ii)

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{\xi} & \mapsto & 0 & \qquad & \overline{\eta} & \mapsto & 1 \\ b_{10} & \mapsto & b_{10} & & b_{01} & \mapsto & b_{01} \\ b_{11} & \mapsto & -\dfrac{\partial}{\partial b_{01}} & & b_{02} & \mapsto & 2\dfrac{\partial}{\partial b_{10}} \end{array}$$

$$b_{ij} \mapsto 0 \qquad \textit{caso contrário}, \ (i, j \in \mathbb{N})$$

se C for do tipo (II),

dá origem a uma representação da álgebra de Lie do tipo Heisenberg $\mathfrak{R}$ em π.

Demonstração. Começamos por definir a *álgebra do tipo Weyl* como

$$\widetilde{\mathfrak{R}} := \frac{\mathfrak{U}(\mathfrak{R})}{\langle \, \overline{\xi} \, , \, 1 - \overline{\eta} \, \rangle},$$

onde $\overline{\xi}, \overline{\eta} \in \mathfrak{R}^{\otimes 1} = \mathfrak{R}$ e $1 \in \mathfrak{R}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$.

Considere a subálgebra $\widetilde{\mathfrak{R}}'$ gerada por todos b_{ij} diferentes de b_{10}, b_{01}. Esta é uma subálgebra comutativa, assim tem uma representação trivial unidimensional (na verdade, $\widetilde{\mathfrak{R}}'$ é uma subálgebra comutativa maximal de $\widetilde{\mathfrak{R}}$). A representação de Fock de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ é a representação induzida de

$$\pi := \mathrm{Ind}_{\widetilde{\mathfrak{R}}'}^{\widetilde{\mathfrak{R}}} \mathbb{C} = \widetilde{\mathfrak{R}} \otimes_{\widetilde{\mathfrak{R}}'} \mathbb{C}.$$

Seja $\widetilde{\mathfrak{R}}''$ a subálgebra de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ gerada por b_{10}, b_{01}. Pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt temos que $\widetilde{\mathfrak{R}} \cong \widetilde{\mathfrak{R}}'' \otimes \widetilde{\mathfrak{R}}'$. Assim,

$$\pi = \widetilde{\mathfrak{R}} \otimes_{\widetilde{\mathfrak{R}}'} \mathbb{C} \cong \widetilde{\mathfrak{R}}'' \otimes \widetilde{\mathfrak{R}}' \otimes_{\widetilde{\mathfrak{R}}'} \mathbb{C} \cong \widetilde{\mathfrak{R}}'' \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cong \widetilde{\mathfrak{R}}''.$$

Logo,

$$\pi \cong \widetilde{\mathfrak{R}}'' \cong \mathbb{C}[b_{10}, b_{01}],$$

onde o último isomorfismo vem a partir da construção de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ juntamente com a equação (3.1) acima. Sob esse isomorfismo, os geradores b_{10}, b_{01} agem em π por multiplicação. Então, vamos encontrar a ação de b_{ij} com exceção de b_{10}, b_{01} para cada caso, ou seja, se C é uma curva do tipo (I) ou (II).

Seja C uma curva do tipo (I) e $b_{ij} \neq b_{10}, b_{01}$. Observe que, se também $b_{ij} \neq b_{11}, b_{20}$, eles agem como 0 devido à (3.4) e $b_{ij} \cdot 1 = 0$, onde $1 \in \mathbb{C}[b_{10}, b_{01}]$. Desse modo, nos resta encontrar a ação de b_{11}, b_{20}, o que será feito por indução utilizando as relações mencionadas acima. Assim, de (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} b_{11} \cdot b_{10} &= b_{11} b_{10} \cdot 1 = b_{10} b_{11} \cdot 1 + \overline{\eta} \cdot 1 \\ &= b_{10} \cdot (b_{11} \cdot 1) + 1 \cdot 1 \\ &= b_{10} \cdot 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Agora assuma, por indução, que $b_{11} \cdot b_{10}^{k-1} = (k-1) b_{10}^{k-2}$. Assim,

$$\begin{aligned} b_{11} \cdot b_{10}^{k} &= b_{11} b_{10} \cdot b_{10}^{k-1} = b_{10} b_{11} \cdot b_{10}^{k-1} + 1 \cdot b_{10}^{k-1} \\ &= b_{10} \cdot (k-1) b_{10}^{k-2} + b_{10}^{k-1} = k b_{10}^{k-1}. \end{aligned}$$

Uma vez que não há nenhuma relação (e, portanto, restrição) de b_{11} com respeito à b_{01}, temos que b_{11} age como $\partial / \partial b_{10}$ em $\mathbb{C}[b_{10}, b_{01}]$. Analogamente, usando (3.3), pode-se concluir que b_{20} age como $-2\partial / \partial b_{01}$ em $\mathbb{C}[b_{10}, b_{01}]$.

Analogamente, seja C uma curva do tipo (II) e $b_{ij} \neq b_{10}, b_{01}$. Note que, se os b_{ij} também se diferem de b_{11} e b_{02}, eles agem como 0 devido à (3.8) $b_{ij} \cdot 1 = 0$, onde $1 \in \mathbb{C}[b_{10}, b_{01}]$. Então, nos resta encontrar a ação de b_{11}, b_{02}, o que também será feito por indução utilizando as relações mencionadas acima, para este caso. Análogo ao caso anterior, temos também que $b_{ij} \cdot 1 = 0$ para todo $b_{ij} \neq b_{10}, b_{01}$ e onde $1 \in \mathbb{C}[b_{10}, b_{01}]$. Assim, de (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} b_{02} \cdot b_{10} &= b_{02}b_{10} \cdot 1 = b_{10}b_{02} \cdot 1 + 2\overline{\eta} \cdot 1 \\ &= b_{10} \cdot (b_{02} \cdot 1) + 2 \\ &= b_{10} \cdot 0 + 2 = 2. \end{aligned}$$

Agora assuma, por indução, que $b_{02} \cdot b_{10}^{k-1} = 2(k-1)b_{10}^{k-2}$. Assim,

$$\begin{aligned} b_{02} \cdot b_{10}^{k} &= b_{02}b_{10} \cdot b_{10}^{k-1} = b_{10}b_{02} \cdot b_{10}^{k-1} + 2 \cdot b_{10}^{k-1} \\ &= b_{10} \cdot 2(k-1)b_{10}^{k-2} + 2b_{10}^{k-1} = 2kb_{10}^{k-1}. \end{aligned}$$

Uma vez que não há nenhuma relação (e, portanto, restrição) de b_{02} com respeito à b_{10}, temos que b_{02} age como $2\partial/\partial b_{10}$ em $\mathbb{C}[b_{10}, b_{01}]$. Analogamente, usando (3.6), pode-se concluir que b_{11} age como $-\partial/\partial b_{01}$ em $\mathbb{C}[b_{10}, b_{01}]$. □

Tal representação é conhecida como *representação de Fock* da álgebra de Lie do tipo Heisenberg $\mathfrak{R}$ em π.

3.3 A Ação da Álgebra de Loop Generalizada

Para começar, relembraremos a nossa convenção anterior: seja $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, e seja $R := \mathbb{C}[[x, y]]$ o anel local de uma curva algebróide plana. Considere a álgebra de Lie

$$\mathfrak{L} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} R,$$

a qual chamaremos de *álgebra de loop generalizada*[1] de $\mathfrak{g}$, cuja a operação colchetes é dada por

$$[A \otimes f \, , \, B \otimes g] = [A, B] \otimes fg.$$

O objetivo desta seção, é dar a $\mathfrak{L}$ uma representação em um espaço adequado. Para isso, sejam E, F, H a base padrão de $\mathfrak{g}$, isto é,

$$E := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

temos que

$$[E, F] = H \qquad [H, E] = 2E \qquad [H, F] = -2F. \tag{3.11}$$

[1]No caso em que R é a álgebra de Laurent $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$, essa álgebra é chamada de álgebra de loop (ou laços).

Por uma questão de simplicidade, defina também

$$e_{ij} := E \otimes x^i y^j \qquad f_{ij} := F \otimes x^i y^j \qquad h_{ij} := H \otimes x^i y^j,$$

os quais são os elementos da base de $\mathfrak{L}$, com $i, j \in \mathbb{N}$.

Com isto em mente, temos o seguinte resultado para curvas de tipo (I). Um resultado semelhante, embora mais difícil de expressar, também seria válido para curvas de tipo (II).

Teorema 3.3.1. *Sejam R é o anel local das curvas de tipo (I) e $W := \mathbb{C}[[t_l]]_{l\in\mathbb{N}}$ o anel das séries de potências formais em infinitas variáveis. Afirmamos que a ação de $\mathfrak{L}$ em $\mathfrak{gl}(W)$ dada por*

$$\begin{array}{rcl} e_{ij} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{\partial}{\partial t_{N(i,j,k)}} \\ h_{ij} & \longmapsto & \displaystyle -2\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \Bigg(\sum_{q-p=N(i,j,k)} t_p \frac{\partial}{\partial t_q} \Bigg) \\ f_{ij} & \longmapsto & \displaystyle -\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \Bigg(\sum_{r-p-q=N(i,j,k)} t_p t_q \frac{\partial}{\partial t_r} \Bigg) \end{array}$$

onde

$$N(i,j,k) = ni + mk + \lambda(j-k)$$

dá origem a uma representação da álgebra de loop generalizada $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \otimes R$ em W.

Demonstração. Note que R é uma subálgebra de $\mathbb{C}[[t]]$, deste modo $\mathfrak{L}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[t]]$. Então, o resultado segue do fato que

$$x^i y^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} t^{N(i,j,k)},$$

onde $N(i,j,k) = ni + mk + \lambda(j-k)$ e que a ação de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[t]]$ em W dada por

$$\begin{array}{rcl} e_i := E \otimes t^i & \longmapsto & \displaystyle \frac{\partial}{\partial t_i} \\ h_i := H \otimes t^i & \longmapsto & \displaystyle -2 \sum_{q-p=i} t_p \frac{\partial}{\partial t_q} \\ f_i := F \otimes t^i & \longmapsto & \displaystyle -\sum_{r-p-q=i} t_p t_q \frac{\partial}{\partial t_r} \end{array}$$

da origem a uma representação de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[t]]$ em W.

Logo, para verificar isso, devemos mostrar que, em $\mathrm{End}(W)$, valem as relações correspondentes as seguintes relações em $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[t]]$:

(A) $\qquad [e_i, f_j] = h_{i+j}$

(B) $\qquad [h_i, e_j] = 2e_{i+j}$

(C) $\qquad [h_i, f_j] = -2f_{i+j}$

que são válidas em $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[t]]$ devido à (3.11). Então, tome $P \in \mathbb{C}[[t_u]]_{u\in\mathbb{N}}$.

Para provar (A), escrevemos

$$
\begin{aligned}
[e_i, f_j](P) &= e_i f_j(P) - f_j e_i(P) \\
&= \frac{\partial}{\partial t_i}\left(- \sum_{r-p-q=j} t_p t_q \frac{\partial P}{\partial t_r} \right) + \sum_{r-p-q=j} t_p t_q \frac{\partial}{\partial t_r}\Big(\frac{\partial P}{\partial t_i}\Big) \\
&= \sum_{r-p-q=j} -\Big(\frac{\partial (t_p t_q)}{\partial t_i}\frac{\partial P}{\partial t_r} + t_p t_q \frac{\partial^2 P}{\partial t_i \partial t_r} \Big) + t_p t_q \frac{\partial^2 P}{\partial t_r \partial t_i} \\
&= - \sum_{r-p-q=j} \Big(t_p \frac{\partial t_q}{\partial t_i} + t_q \frac{\partial t_p}{\partial t_i} \Big) \frac{\partial P}{\partial t_r} \\
&= - \sum_{r-p-q=j} \Big(t_p \delta_{q,i} + t_q \delta_{p,i} \Big) \frac{\partial P}{\partial t_r} \\
&= -\left(\sum_{r-p-i=j} t_p \frac{\partial P}{\partial t_r} + \sum_{r-i-q=j} t_q \frac{\partial P}{\partial t_r} \right) \\
&= -2 \sum_{r-p=i+j} t_p \frac{\partial P}{\partial t_r} = h_{i+j}(P)
\end{aligned}
$$

então (A) segue da generalidade de P. Para provar (B), escrevemos

$$
\begin{aligned}
[h_i, e_j](P) &= h_i e_j(P) - e_j h_i(P) \\
&= -2 \sum_{q-p=i} t_p \frac{\partial}{\partial t_q}\Big(\frac{\partial P}{\partial t_j}\Big) - \frac{\partial}{\partial t_j}\left(-2 \sum_{q-p=i} t_p \frac{\partial P}{\partial t_q} \right) \\
&= -2 \sum_{q-p=i} t_p \frac{\partial^2 P}{\partial t_q \partial t_j} - \frac{\partial t_p}{\partial t_j}\frac{\partial P}{\partial t_q} - t_p \frac{\partial^2 P}{\partial t_j \partial t_q} \\
&= 2\frac{\partial P}{\partial t_{i+j}} = 2e_{i+j}(P)
\end{aligned}
$$

então segue (B). Para provar (C), escrevemos

$$\begin{aligned}
[h_i, f_j](P) &= h_i f_j(P) - f_j h_i(P) \\
&= 2\sum_{q-p=i} t_p \frac{\partial}{\partial t_q}\left(\sum_{r-c-d=j} t_c t_d \frac{\partial P}{\partial t_r}\right) - \sum_{r-c-d=j} t_c t_d \frac{\partial}{\partial t_r}\left(2\sum_{q-p=i} t_p \frac{\partial P}{\partial t_q}\right) \\
&= 2\sum_{q-p=i} t_p \left(\sum_{r-c-d=j} \frac{\partial t_c t_d}{\partial t_q}\frac{\partial P}{\partial t_r} + t_c t_d \frac{\partial^2 P}{\partial t_q t_r}\right) \\
&\qquad - 2\sum_{r-c-d=j} t_c t_d \left(\sum_{q-p=i} \frac{\partial t_p}{\partial t_r}\frac{\partial P}{\partial t_q} + t_p \frac{\partial^2 P}{\partial t_r t_q}\right) \\
&= 2\sum_{q-p=i} t_p \Big(\sum_{r-q-d=j} t_d + \sum_{r-c-q=j} t_c\Big)\frac{\partial P}{\partial t_r} - 2\sum_{q-c-d=i+j} t_c t_d \frac{\partial P}{\partial t_q} \\
&= 4\sum_{r-c-p=i+j} t_p t_c \frac{\partial P}{\partial t_r} - 2\sum_{q-c-d=i+j} t_c t_d \frac{\partial P}{\partial t_q} \\
&= 2\sum_{r-c-p=i+j} t_p t_c \frac{\partial P}{\partial t_r} \\
&= -2 f_{i+j}(P)
\end{aligned}$$

e a afirmação segue. □

Agora, apenas por uma questão de manter a notação padrão da literatura, pode-se expressar as ações para e_{ij}, h_{ij} e f_{ij} acima usando funções geradoras. Assim, defina

$$e(z,u) := \sum_{i,j\in\mathbb{N}} e_{ij} z^{-i-1} u^{-j-1}$$

e da mesma forma para h e f. Sejam também

$$a_{ij} := \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{\partial}{\partial t_{N(i,j,k)}} \qquad a'_{ij} := -2\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \Bigg(\sum_{q-p=N(i,j,k)} t_p \frac{\partial}{\partial t_q}\Bigg)$$

$$a''_{ij} := -\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \Bigg(\sum_{r-p-q=N(i,j,k)} t_p t_q \frac{\partial}{\partial t_r}\Bigg)$$

e

$$a(z,u) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{ij} z^{-i-1} u^{-j-1} \qquad a'(z,u) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a'_{ij} z^{-i-1} u^{-j-1}$$

$$a''(z,u) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a''_{ij} z^{-i-1} u^{-j-1}.$$

Então, pode-se reformular o Teorema 3.3.1 dizendo que as ações de $\mathfrak{L}$ em W dadas por

$$\begin{aligned}
e(z,u) &\longmapsto a(z,u) \\
h(z,u) &\longmapsto a'(z,u) \\
f(z,u) &\longmapsto a''(z,u)
\end{aligned}$$

dão origem a uma representação da álgebra de loop generalizada $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \otimes R$ em W, onde R é um anel local de uma curva do tipo (I).

Sendo assim, reunindo as representações das álgebras de tipo Heisenberg e da álgebra de loop generalizada, podemos dar uma realização de campos livres das curvas algébricas que nos interessam, o que deixamos para a próxima seção.

3.4 Sobre as Realizações de Campo Livre do Tipo Wakimoto

Nesta seção, discutiremos uma realização de campo livre do tipo Wakimoto para a extensão central universal $\widehat{\mathfrak{L}}$ de $\mathfrak{L}$, onde $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \otimes R$, com $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e R é o anel local das curvas de tipo (I). Para isso, basicamente combinaremos os Teoremas 3.2.1 e 3.3.1. Assim, as ações que esses resultados produzem podem ser estendidas à um espaço mais amplo, a saber, o produto tensorial dos espaços de representação, isto é, $W \otimes \pi$, onde $W := \mathbb{C}[[t_l]]_{l \in \mathbb{N}}$ e $\pi = \mathbb{C}[b_{10}, b_{01}]$. Podemos abusar da notação e manter os mesmos símbolos para ambas as novas ações. Por exemplo, temos

$$\begin{array}{rccc} b_{ij}: & W \otimes \pi & \longrightarrow & W \otimes \pi \\ & P \otimes p & \longmapsto & P \otimes b_{ij} \cdot p \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} a_{ij}: & W \otimes \pi & \longrightarrow & W \otimes \pi \\ & P \otimes p & \longmapsto & a_{ij} \cdot P \otimes p \end{array}.$$

Também estabelecemos a seguinte notação padrão

$$b(z,u) := \sum_{i,j \in \mathbb{N}} b_{ij} z^{-i-1} u^{-j-1}$$

e se $\{c_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ é qualquer coleção de endomorfismos de $W \otimes \pi$ definimos

$$c(z,u) := \sum_{i,j \in \mathbb{N}} c_{ij} z^{-i-1} u^{-j-1}.$$

Com isso em mente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.4.1. *Seja $V := \mathbb{C}[[t_l]]_{l \in \mathbb{N}} \otimes \mathbb{C}[b_{10}, b_{01}]$. A ação de $\widehat{\mathfrak{L}}$ em V dada por*

$$\begin{aligned} e(z,u) &\mapsto a(z,u) \\ h(z,u) &\mapsto a'(z,u) + b(z,u), \\ f(z,u) &\mapsto a''(z,u) + c(z,u) \end{aligned}$$

onde os endomorfismos c_{ij} satisfazem a relação recursiva

$$c_{(k,l)+(i,j)} := \left[\sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} \Big(\sum_{q-p=N(i,j,r)} t_p \frac{\partial}{\partial t_q} \Big) - \frac{b_{ij}}{2} \, , \, c_{kl} \right]$$

juntamente com as condições

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_n} \, , \, c_{01} \right] = \frac{\partial}{\partial b_{10}} \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t_n} \, , \, c_{11} \right] = -4 \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t_{2n}} \, , \, c_{01} \right] = -8$$

$$e \quad \left[\sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} \frac{\partial}{\partial t_{N(i,j,r)}}, c_{kl} \right] = 0, \;\; \textit{caso contrário,}$$

dá uma realização de campo livre tipo Wakimoto da extensão central universal $\widehat{\mathfrak{L}}$ de $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \otimes R$, onde R é o anel local de uma curva do tipo (I).

Demonstração. Começamos trabalhando em $\widehat{\mathfrak{L}}$. Para isso, note que

$$\begin{aligned} [e_{ij}, f_{kl}] &= [E \otimes x^i y^j, F \otimes x^k y^l] \\ &= [E \otimes b_{ij}, F \otimes b_{kl}] \\ &= [E, F] \otimes b_{i+k,j+l} + (E, F)[b_{ij}, b_{kl}] \\ &= H \otimes b_{i+k,j+l} + (E, F)[b_{ij}, b_{kl}] \\ &= h_{i+k,j+l} + (E, F)[b_{ij}, b_{kl}], \end{aligned}$$

onde (E, F) é a forma de Killing (veja Exemplo 1.1.21). Analogamente,

$$\begin{aligned} [h_{ij}, e_{kl}] &= 2e_{i+k,j+l} + (H, E)[b_{ij}, b_{kl}] \\ [h_{ij}, f_{kl}] &= -2f_{i+k,j+l} + (H, F)[b_{ij}, b_{kl}]. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} [e(z, u), f(w, v)] &= \left[\sum_{i,j \in \mathbb{N}} e_{ij} z^{-i-1} u^{-j-1}, \sum_{k,l \in \mathbb{N}} f_{kl} w^{-k-1} v^{-l-1} \right] \\ &= \sum_{i,j,k,l \in \mathbb{N}} [e_{ij}, f_{kl}] z^{-i-1} u^{-j-1} w^{-k-1} v^{-l-1} \\ &= \sum_{i,j,k,l \in \mathbb{N}} \Big(h_{i+k,j+l} + (E, F)[b_{ij}, b_{kl}] \Big) z^{-i-1} u^{-j-1} w^{-k-1} v^{-l-1}. \end{aligned}$$

Assim, como $(E, F) = 4$ (veja Exemplo 1.1.21), temos

$$[e(z, u), f(w, v)] = \sum_{i,j,k,l \in \mathbb{N}} \Big(h_{i+k,j+l} + 4[b_{ij}, b_{kl}] \Big) z^{-i-1} u^{-j-1} w^{-k-1} v^{-l-1}. \tag{3.12}$$

Do mesmo modo, usando as formas de Killing $(H, E) = 0$ e $(H, F) = 0$, temos

$$[h(z,u), e(w,v)] = \sum_{i,j,k,l \in \mathbb{N}} 2e_{i+k,j+l}\, z^{-i-1}u^{-j-1}w^{-k-1}v^{-l-1} \tag{3.13}$$

$$[h(z,u), f(w,v)] = \sum_{i,j,k,l \in \mathbb{N}} -2f_{i+k,j+l}\, z^{-i-1}u^{-j-1}w^{-k-1}v^{-l-1}. \tag{3.14}$$

Devemos verificar se as três fórmulas acima valem em $\mathrm{End}(V)$.

Note que, as ações do teorema transformam a fórmula (3.12) em

$$\begin{aligned}[a(z,u), a''(w,v) + c(w,v)] &= \sum_{i,j,k,l \in \mathbb{N}} \left(a'_{i+k,j+l} + b_{i+k,j+l}\right) z^{-i-1}u^{-j-1}w^{-k-1}v^{-l-1} \\ &\quad + \sum_{i,j,k,l \in \mathbb{N}} 4[b_{ij}, b_{kl}]\; z^{-i-1}u^{-j-1}w^{-k-1}v^{-l-1}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

O qual é o resultado que queremos obter. Por outro lado,

$$\begin{aligned}[a(z,u), a''(w,v) + c(w,v)] &= [a(z,u), a''(w,v)] + [a(z,u), c(w,v)] \\ &= \sum_{i,j,k,l \in \mathbb{N}} a'_{i+k,j+l}\, z^{-i-1}u^{-j-1}w^{-k-1}v^{-l-1} \\ &\quad + [a(z,u), c(w,v)], \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde a última igualdade vem do Teorema 3.3.1. Assim, para que as ações definidas no enunciado do teorema definam uma representação de $\widehat{\mathfrak{L}}$ em V, pelas equações (3.15) e (3.16) deve-se valer a seguinte condição

$$[a(z,u), c(w,v)] = \sum_{i,j,k,l \in \mathbb{N}} \left(b_{i+k,j+l} + 4[b_{ij}, b_{kl}]\right) z^{-i-1}u^{-j-1}w^{-k-1}v^{-l-1}. \tag{3.17}$$

Novamente, em $\mathrm{End}(V)$, a fórmula (3.13) torna-se

$$[a'(z,u) + b(z,u), a(w,v)] = \sum_{i,j,k,l \in \mathbb{N}} 2a_{i+k,j+l}\, z^{-i-1}u^{-j-1}w^{-k-1}v^{-l-1}$$

mas, por outro lado, temos

$$\begin{aligned}[a'(z,u) + b(z,u), a(w,v)] &= [a'(z,u), a(w,v)] + [b(z,u), a(w,v)] \\ &= \sum_{i,j,k,l \in \mathbb{N}} 2a_{i+k,j+l}\, z^{-i-1}u^{-j-1}w^{-k-1}v^{-l-1}, \end{aligned}$$

devido ao Teorema 3.3.1 e o fato que $[b(z,u), a(w,v)] = 0$, pois como a e b agem em partes diferentes do produto tensorial então a ação desses elementos comutam entre si. Portanto, (3.13) vale em $\mathrm{End}(V)$.

Finalmente, em $\mathrm{End}(V)$, a fórmula (3.14) corresponde à

$$[a'(z,u)+b(z,u),a''(w,v)+c(w,v)] = \sum_{i,j,k,l\in\mathbb{N}} -2a''_{i+k,j+l}\ z^{-i-1}u^{-j-1}w^{-k-1}v^{-l-1} + \sum_{i,j,k,l\in\mathbb{N}} -2c_{i+k,j+l}\ z^{-i-1}u^{-j-1}w^{-k-1}v^{-l-1} \tag{3.18}$$

mas também temos

$$\begin{aligned}[a'(z,u)+b(z,u),a''(w,v)+c(w,v)] &= [a'(z,u),a''(w,v)]+[a'(z,u),c(w,v)] \\ &\quad + [b(z,u),a''(w,v)]+[b(z,u),c(w,v)] \\ &= \sum_{i,j,k,l\in\mathbb{N}} -2a''_{i+k,j+l}\, z^{-i-1}u^{-j-1}w^{-k-1}v^{-l-1} \\ &\quad + [a'(z,u),c(w,v)]+[b(z,u),c(w,v)],\end{aligned} \tag{3.19}$$

devido mais uma vez ao Teorema 3.3.1 e ao fato de que as ações de a'' e b comutam entre si. Assim, combinando as equações (3.18) e (3.19) obtemos a condição

$$[a'(z,u),c(w,v)]+[b(z,u),c(w,v)] = \sum_{i,j,k,l\in\mathbb{N}} -2c_{i+k,j+l}\ z^{-i-1}u^{-j-1}w^{-k-1}v^{-l-1}. \tag{3.20}$$

Agora (3.17) e (3.20) produzem as seguintes relações

$$\begin{aligned}[a_{ij},c_{kl}] &= b_{i+k,j+l}+4[b_{ij},b_{kl}] \\ [a'_{ij}+b_{ij},c_{kl}] &= -2c_{i+k,j+l}\end{aligned}$$

e o resultado segue das equações (3.1) à (3.4), (3.9), (3.10) juntamente com Teorema 3.2.1. Por exemplo, temos que

$$a_{ij} := \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\frac{\partial}{\partial t_{N(i,j,k)}},\ \text{ onde } N(i,j,k)=ni+mk+\lambda(j-k).$$

Então,

$$[a_{10},c_{01}] = b_{11}+4[b_{10},b_{01}] \Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t_n}\,,\,c_{01}\right] = \frac{\partial}{\partial b_{10}},$$

já que pelo Teorema 3.2.1, b_{11} age como $\dfrac{\partial}{\partial b_{10}}$, $\overline{\xi}$ age como zero e pela relação (3.1) $[b_{10},b_{01}] = -\overline{\xi}$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. Azevedo, *The Jacobian Ideal of a Plane Algebroid Curve*, Ph. D. Thesis, Purdue University (1967).

[2] V. Bayer, A. Hefez, *Algebroid Plane Curves whose Milnor and Tjurina Numbers Differ by One or Two*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, **32** (2001) 63-81.

[3] M. Bremner, *Universal central extension of elliptic affine Lie algebras*, J. Math. Phys., **35** (1994) 6685-6692.

[4] A. Bueno, B. Cox, V. Futorny, *Free field realizations of the elliptic affine Lie algebra* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \Omega_{R|\mathbb{C}}/dR$, Journal of Geometry and Physics **59** (2009) 1258-1270.

[5] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex Algebras and Algebraic Curves.* Mathematical Surveys and Monographs, Vol 88. AMS, 2 edition. United States of America, 2004.

[6] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, vol. 52 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[7] A. Hefez, *Irreducible plane curve singularities.* In Real and Complex Singularities, D. Mond and M. J. Saia, editors. Lectures Notes in Pure and Appl. Math., Vol.232 Marcel Dekker, New York, 1-120, 2003.

[8] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Graduates Texts in Matematics, v.9. Springer-Verlag, New York, 1972.

[9] N. Jacobson, *Lie Algebras.* Dover Publications, Inc., New York, 1979.

[10] V. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras and the Dedekind η-function*, Funkt. analys y ego prilozh. 8 (1974), No. 1, 77-78 [English translation: Funct. Anal. Appl. 8 (1974), 68-70].

[11] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press, 3rd edition. United Kingdom, 1990.

[12] C. Kassel, *Kähler differentials and coverings of complex simple Lie algebras extended over a commutative algebra,* J. Pure App. Algebra **34**, (1984) 265-275.

[13] T. Kato, *Non-hyperelliptic Weierstrass points of maximal weight*, Math. Ann. **239** (1979), 141-147.

[14] I. M. Krichever, S.P. Novikov, *Algebras of Virasoro type, Riemann surfaces and the structures of the theory of soliton*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **21** (2) (1987) 46-63.

[15] H. Matsumura. *Commutative Algebra.* Advanced Book Program. W.A. Benjamin Co., 2nd edition. Canadá, 1980.

[16] R.V. Moody, *A new class of Lie algebras*, J. of Algebra, **10** (1968) pp. 211-230.

[17] O. K. Sheinman, *Highest-weight modules for affine Lie algebras on Riemann surfaces*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **29** (1) (1995) 56-71.

[18] F. Torres, *Weierstrass points and double coverings of curves with application: symmetric numerical semigroups which cannot be realized as Weierstrass semigroups*, Manuscripta Math. **83** (1994), 39–58.

[19] M. Wakimoto, *Fock representations of the affine Lie algebra* $A_1^{(1)}$, Comm. Math. Phys. **104** (4) (1986) 605-609.

[20] M. Wakimoto, *Lectures on Infinite-Dimensional Lie Algebra.* World Scientific Publishing Co. Inc, River Edge, NJ, 2001.

[21] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge University Press, New York, 1994.

[22] O. Zariski, *Characterization of Plane Algebroid Curves whose Module of Differentials has Maximum Torsion*, Proc. Nat. Acad. Sc. **56** (1966) 781-786.

[23] O. Zariski, *Le problème des modules pour les branches planes*, Cours donné au Centre de mathématiques de l'École Polytechnique. HERMANN, Editeurs des Sciences et des Arts. Paris-France, 1986.