



Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Teorema da função implícita e suas aplicações

Cláudia Rabelo Oliveira Amorim

Belo Horizonte, 28 de setembro de 2016

Cláudia Rabelo Oliveira Amorim

Teorema da função implícita e suas aplicações

Dissertação apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Sônia Pinto de Carvalho

Belo Horizonte

2016

Il libro della natura é scritto in lingua matematica.

Galileo Galilei

RESUMO

Neste trabalho apresentaremos o teorema da função implícita e algumas de suas aplicações em muitas áreas da matemática. No capítulo um apresentamos a demonstração clássica do teorema como consequência do teorema da função inversa. Já no segundo capítulo, descrevemos o que é uma aplicação de bilhar e mostramos que dada uma curva de classe C^k a nossa aplicação de bilhar é um difeomorfismo local de classe C^{k-1} , depois calculamos a derivada da aplicação bilhar. No capítulo três provaremos que as raízes simples de um polinômio são C^∞ dependentes dos coeficientes deste polinômio, de modo que, se fizermos uma pequena perturbação nos coeficientes desse polinômio, perturbaremos também as raízes que dependem desses coeficientes de maneira suave. No quarto capítulo, estudamos alguns conceitos para chegar na demonstração do teorema do fluxo tubular, onde utilizamos o teorema da função inversa. No quinto capítulo, mostramos que a aplicação de um fluxo perto de uma órbita periódica é um difeomorfismo classe C^k . Por fim, no capítulo seis, demonstramos que dada $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável, o conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | F(x,y,z) = c\}$, onde c é um número real é o traço de uma superfície parametrizada regular. Para isso, estudamos algumas propriedades geométricas.

Palavras-chave: Teorema da função implícita. Bilhares. Teorema do fluxo tubular. Transformação de Poincaré. Dependência C^∞ das raízes de um polinômio.

ABSTRACT

In this paper we present the Implicit Function Theorem and some of its applications in many areas of mathematics. In chapter one we present the theorem in the most classical way. In the second chapter, we describe what a billiard map is and show that given a C^k curve, our billiard map is a C^{k-1} local diffeomorphism. We also calculate the derivative of the billiard map. In chapter three we prove that the roots of a polynomial are C^∞ dependent on the coefficients of the polynomial. So if we make a small perturbation in the coefficients of this polynomial we will also disturb the roots in a smooth way. In the fourth chapter, we present and prove the flow box theorem, using the theorem of the inverse function. In the fifth chapter, we show that the Poincaré map, near a periodic orbit of a C^k flow, is a C^k -diffeomorphism. Concluding, in chapter six, we prove that given a differentiable function $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, the set $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(x, y, z) = c\}$ where c is a real number is locally the trace of a regular parametrized surface. For this, we study some geometric properties.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela oportunidade a mim concedida e por me iluminar nas horas mais difíceis, à minha mãe Ivone que sempre me apoiou nas minhas decisões com toda sua doçura, ao meu pai Crisógno (in memoriam), aos meus irmãos pelos momentos de felicidade, a Isaú por estar sempre presente nas horas mais difíceis, me fazendo enxergar o outro lado de cada situação. Agradeço também a Kimiê por cada incentivo, conselho e risada, a Kênia por cada fim de semana que estivemos juntas não me permitindo esquecer o quão importante é a família, a Káthia pela preocupação e apoio, a Bárbara pelas inúmeras conversas agradáveis ao telefone. Agradeço aos professores que tentaram das mais diversas formas transmitir o conhecimento, aos meus colegas pelos inúmeros momentos de aflição e descontração que vivemos juntos, em especial a Letícia, Cláudia, Joel, Ayane e David. Agradeço ao Lucas, que sempre esteve presente nos momentos mais difíceis me incentivando e ao mesmo tempo me alegrando. Deixo meus agradecimentos a minha orientadora Sônia, a Sylvie por estar sempre presente na construção deste trabalho, a Susana e Marcelo que se disponibilizaram a ler esse trabalho. Não poderia deixar de agradecer aos meus amigos, família, tios e primos que me inspiraram a ser uma pessoa melhor. Agradeço a Andréa e a Kelli que tornaram meus dias no departamento muito mais agradáveis. Por fim, agradeço a Ludmila, Ísis e Vicente pelos muitos momentos de companheirismo na nossa casa. Muito obrigada a todos!

Sumário

1	Teorema da Função Implícita	8
1.1	Homeomorfismo, difeomorfismo e isomorfismo	8
1.2	Método das aproximações sucessivas	13
1.3	Perturbação da identidade	14
1.4	Teorema da função inversa	16
1.5	Teorema da função implícita	19
2	Bilhares	22
2.1	O teorema da função implícita aplicado a bilhares	22
3	Dependência C^∞ das raízes de um polinômio com respeito aos seus coeficientes	36
3.1	Aplicação do teorema da função implícita à álgebra	36
4	Teorema do fluxo tubular	40
4.1	Aplicação da teorema da função inversa ao teorema do fluxo tubular	40

Sumário	8
5 A transformação de Poincaré	61
5.1 Aplicação do teorema da função implícita a transformação de Poincaré	61
6 O teorema da função implícita aplicado à geometria	66
6.1 Geometria diferencial	66

Capítulo 1

Teorema da Função Implícita

Neste capítulo apresentaremos uma demonstração clássica do teorema das funções implícitas provando, a princípio, o teorema da função inversa e logo depois o teorema das funções implícitas como consequência.

1.1 Homeomorfismo, difeomorfismo e isomorfismo

Em *álgebra linear*, a inversa de uma transformação linear bijetiva também é linear. Na *teoria de grupos*, o inverso de um homomorfismo bijetivo é ainda um homomorfismo. Na *análise*, ocorre uma coisa diferente: existem funções contínuas bijetivas $f : U \rightarrow V$ tais que $f^{-1} : V \rightarrow U$ é descontínua. Neste texto, daremos atenção especial aos casos em que essa inversa é contínua, pois isso nos possibilitará construir um estudo a respeito das funções tratadas.

Definição 1.1.1. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^m$, abertos. Um homeomorfismo $f : U \rightarrow V$ é uma bijeção contínua cuja inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ também é contínua.*

Definição 1.1.2. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^m$, abertos. Um difeomorfismo $f : U \rightarrow V$ é uma bijeção diferenciável cuja inversa também é diferenciável. Se f e f^{-1} são de classe C^k , dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^k .*

Um difeomorfismo é um caso particular de homeomorfismo. A composição de difeomorfismos é um difeomorfismo. E a inversa de um difeomorfismo também é um difeomorfismo.

Exemplo 1.1.3. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ uma função definida por $f(x) = e^x$, f é um difeomorfismo de classe C^∞ cuja a inversa $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f^{-1}(x) = \log(x)$.*

Uma aplicação de classe C^k , $f : U \rightarrow V$, pode ser um homeomorfismo de U sobre V e ainda sim, sua inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ pode não ser uma aplicação diferenciável. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 1.1.4. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x) = x^3$, a inversa da f é dada por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, calculando a derivada da função obtemos: $[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, que não é diferenciável na origem. Esse é um exemplo concreto de uma aplicação de classe C^k , cuja a inversa não é diferenciável.*

Definição 1.1.5. *Seja $U, V \subset \mathbb{R}^m$ abertos, $f : U \rightarrow V$ é chamada um difeomorfismo local se, para cada $x \in U$, existe uma vizinhança V_x que é aplicada difeomorficamente por f sobre uma vizinhança W_x de $f(x)$. Quando f restrita a cada V_x , é um difeomorfismo C^k dizemos que f é um difeomorfismo local de classe C^k .*

Definição 1.1.6. *Seja $f : U \rightarrow V$, dizemos que f é um isomorfismo se f é uma aplicação linear bijetora.*

Dada $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$, para cada $x \in U$, a derivada de f , $f'(x)$, é uma aplicação linear de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m . Para verificar que $f'(x)$ é um isomorfismo, temos que observar se o determinante jacobiano $\det \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) \right]$ é não-nulo.

Exemplo 1.1.7. Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$.

O determinante jacobiano é:

$$A = \begin{bmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{bmatrix} = e^{2x} (\cos^2(y) + \sin^2(y)) = e^{2x}.$$

Como o determinante é não nulo para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, f' é um isomorfismo, a seguir, observamos que $f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ é um difeomorfismo local de classe C^∞ .

Exemplo 1.1.8. A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$, é um difeomorfismo local de classe C^∞ de \mathbb{R}^2 sobre $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Podemos concluir através da teoria de variáveis complexas, identificando (x,y) com $z = x + iy$, obtemos $f(z) = e^z$. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, queremos definir o logaritmo de z , se $w = e^z$ então $\log(w) = z$. Tomando $w = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$ e $z = x + iy$. A expressão acima fica:

$$re^{i\theta} = e^{x+iy} = e^x e^{iy}. \quad (1)$$

Primeiramente de $|w| = |e^{x+iy}|$, temos que:

$$r = e^x \quad (2)$$

e temos a única solução:

$$x = \log(r)$$

onde $\log(r)$ é o logaritmo real. De (1) e (2) resulta que:

$$e^{i\theta} = e^{iy}$$

e portanto,

$$y = \theta + 2\pi n, n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$z = \log(w) = \log(r) + i(\theta + 2\pi n)$$

ou

$$\log(w) = \log |w| + i \arg(w)$$

Essa igualdade deixa clara a natureza multiforme do logaritmo, pois um número não nulo w tem uma infinidade de argumentos. Observamos que f não é um difeomorfismo (global) visto que f não é injetiva, conseqüentemente não é biunívoca. Para obtermos uma *função*, somos forçados a nos restringir a domínios em \mathbb{C} nos quais o argumento possa ser determinado univocamente. Esses domínios podem ser obtidos da seguinte maneira: tome uma semirreta fechada saindo da origem, $L_\phi = \{(t\cos(\phi), t\sin(\phi)) | 0 \leq t \in \mathbb{R}\}$, onde $0 \leq \phi < 2\pi$ e ponha

$$D_\phi = \mathbb{C} \setminus L_\phi.$$

Para todo $w \in D_\phi$ temos precisamente um único valor $\arg_\phi(w)$ satisfazendo $\phi < \arg_\phi < \phi + 2\pi$. Portanto podemos definir uma função, chamada um *ramo*

do logaritmo

$$\log : D_\phi \longrightarrow \mathbb{C}$$

por

$$\log(w) = \log |w| + i \arg_\phi(w).$$

O ramo do logaritmo definido no domínio D_ϕ , obtido retirando-se de \mathbb{C} o semieixo $\{(x,0), x \leq 0\}$, é chamado de *ramo principal*. Para o ramo principal temos $-\pi < \arg_\phi(w) \leq \pi$ e afirmamos que $\arg_\phi(w)$ é uma função contínua em D_ϕ .

Lema 1.1.9. *Seja J um intervalo aberto da reta, todo difeomorfismo local $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ é injetivo, sendo portanto um difeomorfismo de J sobre $f(J)$.*

Demonstração. Isto segue do fato de que toda aplicação contínua aberta, isto é, que leva abertos em abertos, $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ é forçosamente injetiva. Se existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \max f$ ou $f(c) = \min f$ a prova é que f levaria um pequeno intervalo aberto $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ sobre um intervalo não-aberto $(d - \delta, d]$ respectivamente $[d, d + \delta)$ entrando em contradição pelo fato de f ser uma aplicação aberta. E se $f(a) = f(b) = \max f$ ou $\min f$ deve existir um $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \max\{f|_{(a,b)}\}$ ou $f(c) = \min\{f|_{(a,b)}\}$. \square

Um difeomorfismo local, visto como aplicação aberta, é um difeomorfismo (sobre sua imagem) se, e somente se, é biunívoco. Dado um difeomorfismo local $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo de espaços vetoriais (transformação linear bijetiva) para cada $x \in U$. O principal resultado deste capítulo estabelece que se $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$, $1 \leq k \leq \infty$ e $f'(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in U$, então f é um difeomorfismo local de classe C^k .

1.2 Método das aproximações sucessivas

Para demonstrar o resultado mais importante do capítulo, utilizaremos o *método das aproximações sucessivas*.

Definição 1.2.1. *Sejam (M, d) e (N, \bar{d}) espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é chamada contração quando existe um $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$, tal que $\bar{d}(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ para todos os $x, y \in M$.*

Exemplo 1.2.2. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto convexo, isto é, se $a, b \in U$ implica que $[a, b] \subset U$. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, tal que $|f'(x)| \leq \lambda < 1$ e $|f'(x)| = \sup\{f'(x) \cdot y, y \in \mathbb{R}^m, |y| = 1\}$ para uma certa constante λ e para todo $x \in U$. Utilizando a desigualdade do valor médio, obtemos $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$, portanto f é uma contração.*

Definição 1.2.3. *Um ponto fixo de uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Definição 1.2.4. *Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Definição 1.2.5. *O espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Proposição 1.2.6 (Aproximações sucessivas). *Seja M um espaço métrico completo. Toda contração $f : M \rightarrow M$ tem um único ponto fixo. Dado qualquer ponto $x_0 \in M$, sejam $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, A sequência (x_n) converge em M para o único ponto fixo de f .*

Demonstração. A partir de $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$, temos que: $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n)$ daí, $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^{n-1} \lambda (d(x_0, x_1))$, então $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1)$.

Pela desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq \sum_{i=0}^{p-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \\ &\leq \left[\sum_{i=0}^{p-1} \lambda^{n+i} \right] d(x_0, x_1) \leq \\ &\lambda^n \left[\sum_{i=0}^{p-1} \lambda^i \right] d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

O limite de $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$, pois $0 < \lambda < 1$, portanto (x_n) é uma sequência de Cauchy. Como M é um espaço métrico completo, resulta que (x_n) converge, seja $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Como f é contínua, $f(a) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$. Isto mostra que (x_n) é uma sequência de Cauchy no espaço métrico completo M . Quanto à unicidade, se $f(a) = a$ e $f(b) = b$ então $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq \lambda d(a, b)$ e portanto $(1 - \lambda)d(a, b) \leq 0$ o que implica que $d(a, b) = 0$, ou seja, $a = b$. \square

1.3 Perturbação da identidade

Como aplicação do método de *aproximações sucessivas* mostraremos que se perturbarmos a inclusão $U \rightarrow \mathbb{R}^m$ adicionando uma contração então obteremos um homeomorfismo de U sobre um aberto de \mathbb{R}^m .

Proposição 1.3.1 (Perturbação da identidade). *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Se $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma contração, então a aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por $f(x) = x + \Phi(x)$, é um homeomorfismo de U sobre um aberto de \mathbb{R}^m .*

Demonstração. Dados x e y quaisquer em U , temos que:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x - y + \Phi(x) - \Phi(y)| \geq |x - y| - |\Phi(x) - \Phi(y)| \\ &\geq (1 - \lambda)|x - y|. \end{aligned}$$

Daí concluímos que f é injetiva e que sua inversa $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ é contínua. Portanto, f é um homeomorfismo de U sobre $f(U)$. Para mostrar que $f(U)$ é aberto, seja $b \in f(U)$, de maneira que $b = f(a)$. Tomemos uma bola fechada \bar{A} de centro a e raio $\delta > 0$, $\bar{A} \subset U$. Afirmamos que a bola aberta B de centro em b e raio $(1 - \lambda)\delta$ está contida em $f(U)$. Seja $y \in B$, o que significa $|y - b| < (1 - \lambda)\delta$. Devemos encontrar uma solução $x \in U$ para a equação $y = f(x)$. Isto equivale a encontrar um ponto fixo $x \in U$ para a contração $\Phi_y : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\Phi_y(x) = y - \Phi(x)$. Como \bar{A} é um espaço métrico completo, é suficiente mostrar que $\Phi_y(\bar{A}) \subset \bar{A}$. Assim, a contração $\Phi_y|_{\bar{A}} : \bar{A} \rightarrow \bar{A}$ terá um ponto fixo pela proposição das aproximações sucessivas. Seja $x \in \bar{A}$, isto é, $|x - a| \leq \delta$. Devemos mostrar que $|\Phi_y(x) - a| \leq \delta$. Como $b = a + \Phi(a)$, temos:

$$\begin{aligned} |\Phi_y(x) - a| &= |y - \Phi(x) - a| = |y - \Phi(a) + \Phi(a) - \Phi(x) - a| \leq \\ &\leq |y - \Phi(a) - a| + |\Phi(x) - \Phi(a)| \leq \\ &\leq |y - b| + |\Phi(x) - \Phi(a)| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |y - b| + |b - x - (b - a)| \leq \\ &\leq |y - b| + \lambda|x - a| \leq (1 - \lambda)\delta + \lambda\delta = \delta. \end{aligned}$$

□

Definição 1.3.2. *Seja $GL(\mathbb{R}^m) \subset L(\mathbb{R}^m)$, o conjunto das transformações lineares invertíveis $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $T \in GL(\mathbb{R}^m)$ se, e somente se $\det(T) \neq 0$, e $\det : L(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, logo $GL(\mathbb{R}^m)$ é um aberto.*

Corolário 1.3.3. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação da forma $f(x) = T \cdot x + \Phi(x)$ onde $T \in GL(\mathbb{R}^m)$ e $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaz $|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq \lambda|x - y|$, com $\lambda \cdot |T^{-1}| \leq 1$. Então f é um homeomorfismo de U sobre o aberto $f(U) \subset \mathbb{R}^m$.*

Observamos que $T^{-1}f(x) = x + T^{-1}\Phi(x)$ onde $T^{-1}\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma contração. Portanto, $T^{-1}f$ é um homeomorfismo de U sobre o aberto $T^{-1}f(U) \subset \mathbb{R}^m$. Dessa maneira, concluímos que f é um homeomorfismo.

1.4 Teorema da função inversa

Nesta seção demonstraremos um dos teoremas mais importantes da análise matemática, o teorema da função inversa. Ele nos possibilitará chegar ao teorema da função implícita e algumas de suas aplicações.

Teorema 1.4.1 (Teorema da função inversa). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k , ($1 \leq k \leq \infty$) tal que, em um ponto $x_0 \in U$, $f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^m)$ é um isomorfismo. Então f é um difeomorfismo de classe C^k de uma vizinhança V de x_0 sobre uma vizinhança W de $f(x_0)$.*

Demonstração. Sabemos que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em x_0 quando existe na vizinhança uma boa aproximação linear, ou seja, deve existir uma transformação linear $f' : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + T \cdot h + r(h)$$

onde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$, chamamos a transformação T de derivada de f no ponto x_0 e indicamos por $f'(x_0)$. Para simplificar a notação, tomemos: $x_0 = 0$ e $f(x_0) = 0$. Daí, temos que $f(x) = f'(0) \cdot x + r(x)$, onde $r(x) = f(x) - f'(0) \cdot x$ é de classe C^k e $r'(0) = 0$. Seja λ tal que $0 < \lambda < \frac{1}{|f'(0)^{-1}|}$. Existe uma bola aberta V em torno da origem tal que $|r'(x)| < \lambda$ para todo $x \in V$. Pela desigualdade do valor médio, $|r(x) - r(y)| \leq \lambda|x - y|$ para todos $x, y \in V$. Sabemos do corolário anterior que $f|_V$ é um homeomorfismo de V sobre um aberto W que contém $f(x_0)$. Como $f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^m)$ é contínua e $f'(x_0)$ está no aberto $GL(\mathbb{R}^m)$, podemos redefinir a bola de forma que $f'(x)$ seja invertível para todo $x \in V$. Denominamos por $g = f^{-1} : W \rightarrow V$ o homeomorfismo inverso de f . Devemos mostrar que g é diferenciável em cada ponto $y = f(x) \in W$. Se existir, $g'(y)$ deverá ser igual a $[f'(x)]^{-1}$. Escrevemos:

$$g(y + k) = g(y) + [f'(x)]^{-1} \cdot k + s(k)$$

e tentaremos mostrar que $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{s(k)}{|k|} = 0$. Seja $f(x+h) = y+k$, então $k = f(x+h) - f(x)$. Sabemos que $k \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, pois $f|_V$ é um homeomorfismo. De $f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + r(h)$, temos que $f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + r(h)$.

Daí temos que:

$$\begin{aligned} h &= g(y+k) - g(y) = [f'(x)]^{-1} \cdot k + s(k) = \\ &= [f'(x)]^{-1}[f'(x) \cdot h + r(h)] + s(k) \\ h &= h + [f'(x)]^{-1}r(h) + s(k) \\ s(k) &= -[f'(x)]^{-1}r(h). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{s(k)}{|k|} = -\frac{|h|}{|k|} \left[f'(x)^{-1} \cdot \frac{r(h)}{|h|} \right]$$

Quando $k \rightarrow 0$ a razão $\frac{|h|}{|k|}$ permanece limitada e o fator entre colchetes tende a zero, o que mostra que g é diferenciável para cada $y \in W$, com $g'(y) = [f'(x)]^{-1}$, onde $y = f(x)$. Portanto, $f|_V : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo. Agora, basta mostrar que $g \in C^k$. Para isso, vamos demonstrar que se temos uma aplicação linear de classe C^k a inversão dessa aplicação também é de classe C^k . Para simplificar a notação seja $i : GL(\mathbb{R}^m) \rightarrow GL(\mathbb{R}^m)$ a inversa, tomemos $U = GL(\mathbb{R}^m)$. Defina $\Phi : U \times U \rightarrow U \times U$ por $\Phi(X,Y) = (X,XY)$. Portanto, $\Phi \in C^\infty$ com $\Phi'(X,Y) \cdot (H,K) = (H, XK + HY)$. Então $\Phi'(X,Y) : L(\mathbb{R}^m) \times L(\mathbb{R}^m) \rightarrow L(\mathbb{R}^m) \times L(\mathbb{R}^m)$ é um isomorfismo cujo inverso é dado por $(A,B) \mapsto (A, X^{-1}B - X^{-1}AY)$. Já sabemos que Φ é um difeomorfismo local, como Φ é injetiva, concluímos que Φ é um difeomorfismo. Em particular, sua inversa $\Phi^{-1} : U \times U \rightarrow U \times U$, dada por $\Phi^{-1}(S,T) = (S, S^{-1}T)$, é diferenciável. O que equivale dizer que $\xi : U \times U \rightarrow U$, definida por $\xi(S,T) = S^{-1}T$, é diferenciável. Definamos $\eta : U \rightarrow U \times U$ por $\eta(S) = (S, I)$. A composta de $\xi \circ \eta(S) = S^{-1} = i(S)$, então $i : U \rightarrow U$ é de fato um difeomorfismo (igual ao

seu inverso). Como $X \cdot i(X) = I$, onde I é a aplicação identidade, segue pela diferenciação que para todo $H \in L(\mathbb{R}^m)$, $H \cdot I(X) + X \cdot i'(X) \cdot H = 0$, então $i'(X) \cdot H = -X^{-1}HX^{-1}$, segue que $i(X) = X^{-1}$ é de classe C^∞ . Agora voltaremos ao fim da demonstração do teorema da função inversa. Já sabemos que $g = f^{-1} : W \rightarrow V$ é diferenciável com $g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}$ para todo $y \in W$. A derivada $g' : W \rightarrow L(\mathbb{R}^m)$ é a composição de $g' = i \circ f' \circ g$ onde:

$$i(X) = X^{-1} : W \rightarrow V \rightarrow GL(\mathbb{R}^m) \rightarrow GL(\mathbb{R}^m) \subset L(\mathbb{R}^m)$$

Como $f \in C^1$, i, f', g são contínuas, então $g' \in C^0$, logo $g \in C^1$. Suponha agora que $f \in C^2$. Então $i, g, f' \in C^1$, o que implica que $g' \in C^1$, portanto $g \in C^2$. Repetiremos o processo sucessivas tantas vezes quanto forem necessárias. \square

Corolário 1.4.2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$. Uma condição necessária e suficiente para que f seja um C^k -difeomorfismo local é que, para cada $x \in U$, $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja um isomorfismo.*

1.5 Teorema da função implícita

Nesta seção faremos uma demonstração clássica do teorema da função implícita. Objetivamos também utilizar o teorema da função implícita para demonstrar o teorema da função inversa.

Definição 1.5.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada uma submersão se, para todo $x \in U$ a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva. Isso só pode ocorrer quando $m \geq n$.*

Pela regra da cadeia, a composta de duas submersões ainda é uma submersão.

Exemplo 1.5.2. *Seja $\Pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção definida por $\Pi(x,y) = y$. Então $\Pi'(x,y) = \Pi$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, portanto é uma submersão.*

Podemos sempre escrever um espaço vetorial como uma soma direta, da forma $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$, os elementos do espaço original serão representados por pares (x,y) onde $x \in E$ e $y \in F$. Lembramos que, dada uma transformação linear sobrejetiva $T : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, existem muitas decomposições em soma direta $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$ tais que $T|_F$ é um isomorfismo sobre \mathbb{R}^n . É suficiente tomar E como o núcleo de T e F como qualquer subespaço suplementar de E em \mathbb{R}^{m+n} . Nesses casos, $\dim E = m$ e $\dim F = n$.

Teorema 1.5.3 (Teorema da função implícita). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k ($k \geq 1$). Suponha que $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$ é uma decomposição em soma direta tal que, para $z_0 = (x_0, y_0) \in U$, a derivada parcial segunda $\partial_2 f(z_0) : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Ponha $f(z_0) = c \in \mathbb{R}^n$. Então existem abertos $V \subset E$ contendo x_0 e $Z \subset U$ contendo z_0 com a seguinte propriedade: para cada $x \in V$ há um único $\xi(x) \in F$ tal que $(x, \xi(x)) \in Z$ e $f(x, \xi(x)) = c$. A aplicação $\xi : V \longrightarrow F$ assim definida é de classe C^k e sua derivada é dada por $\xi'(x) = -[\partial_2 f(x, \xi(x))]^{-1} \circ \partial_1 f(x, \xi(x))$.*

Demonstração. Vamos tomar um difeomorfismo $h : V \times W \longrightarrow Z$, de classe C^k , tal que $f \circ h(x,w) = w$ para todo $(x,w) \in V \times W$, onde $x_0 \in V$ é um aberto de E , $f(z_0) \in W$ é aberto em \mathbb{R}^n . A existência de tal difeomorfismo é garantido pela forma local das submersões. Definamos também $\Phi : U \longrightarrow E \times \mathbb{R}^n$, de classe C^k , como $\Phi(x,y) = (x, f(x,y))$. Segue-se que $h = \Phi^{-1}$ é da forma $h(x,w) = (x, h_2(x,w))$. Temos $Z = h(V \times W)$ e $h(x,y) = (x, h_2(x,y))$ para

$(x, w) \in V \times W$. Tomemos $\xi(x) = h_2(x, c)$. Então $\xi : V \rightarrow F$ é de classe C^k e $f(x, \xi(x)) = f \circ h(x, c) = c$ para todo $x \in V$. Para provar a unicidade de ξ , seja $(x, y) \in Z$ tal que $f(x, y) = c$. Então, $(x, y) = h(\Phi(x, y)) = h(x, c) = (x, h_2(x, c)) = (x, \xi(x))$ então $y = \xi(x)$. Para finalizar a demonstração, derivamos $f(x, \xi(x)) = c$, obtemos $\partial_1 f(x, \xi(x)) + \partial_2 f(x, \xi(x)) \circ \xi'(x) = 0$. Resulta que:

$$\xi'(x) = -[\partial_2 f(x, \xi(x))]^{-1} \circ \partial_1 f(x, \xi(x))$$

□

Algumas observações a respeito do teorema da função implícita devem ser feitas. O parâmetro c pode variar no aberto W . O que implica que existem abertos $V \subset E$, contendo x_0 , $W \subset \mathbb{R}^n$ contendo c e $Z \subset U$ contendo z_0 com a seguinte propriedade, para cada $(x, y) \in V \times W$, existe um único $\xi(x, y) \in F$ tal que $(x, \xi(x, y)) \in Z$ e $f(x, \xi(x, y)) = y$. A aplicação $\xi : V \times W \rightarrow F$ definida dessa maneira é de classe C^k . Tomemos $\xi(x, y) = h_2(x, y)$.

Capítulo 2

Bilhares

2.1 O teorema da função implícita aplicado a bilhares

Nosso intuito neste capítulo é definir a aplicação de bilhar e calcular a derivada dessa aplicação. Para isso, utilizaremos o teorema da função implícita. Seja Ω uma região simplesmente conexa do plano, Γ uma curva fechada, simples, ou seja, sem autointersecção, de classe C^k , com $k \geq 2$, orientada no sentido anti-horário contida em Ω , Γ é denominada bilhar. Consideremos uma partícula (a bola de bilhar) e suponhamos que ela se mova com velocidade constante, com colisão elástica na fronteira da curva e que valha a lei da reflexão.

Definição 2.1.1. *A trajetória de bilhar é o caminho descrito por uma partícula de Ω identificado com uma poligonal. Cada segmento dessa poligonal é chamado de um segmento de trajetória do bilhar.*

Sabemos que, como o movimento é retilíneo entre duas batidas consecutivas, logo após uma batida, a bola de bilhar retornará à curva Γ . Portanto podemos caracterizar a dinâmica do movimento especificando apenas uma sequência de posições da partícula nos instantes de colisão e suas direções de movimento após cada impacto. A posição será definida por um parâmetro de Γ , o *comprimento de arco* s . A direção do movimento após cada impacto será definida pelo ângulo α , orientado, entre o vetor tangente e o segmento de trajetória de saída da partícula. Denominamos α de *ângulo de bilhar da curva* Γ . Restringiremos nosso estudo apenas a trajetórias para quais α está entre $0 < \alpha < \Pi$, dessa maneira, eliminamos o bordo entre as possíveis trajetórias de uma partícula.

Definição 2.1.2. *Seja Γ uma curva fechada, simples e de classe C^k , $k \geq 2$. Seja Ω a região limitada do plano que tem Γ como fronteira. A curva Γ é convexa se dados dois pontos quaisquer P e Q de Γ , o segmento de reta $[P,Q]$ que une os pontos P e Q está inteiramente contido em $\bar{\Omega}$. A curva Γ é estritamente convexa se o interior de $[P,Q]$ está inteiramente contido em Ω .*

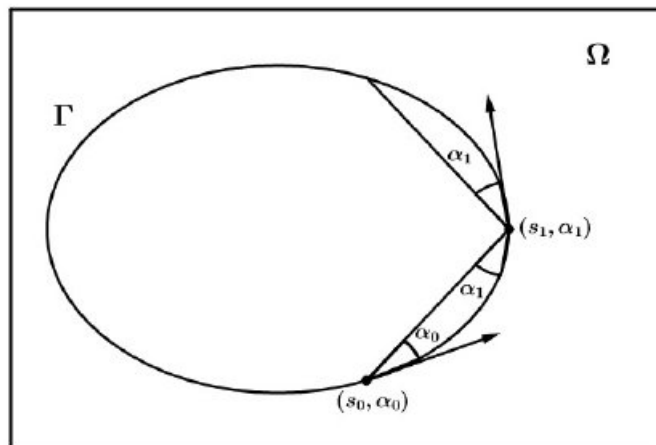


Figura 2.1: Bilhar

Neste texto, tomaremos uma direção fixada, no caso o eixo x , definiremos o ângulo φ como o ângulo formado entre o vetor tangente a Γ e essa direção fixa que foi tomada. Chamaremos ao ângulo φ de *ângulo de inclinação do vetor tangente*. Consideraremos daqui em diante, Γ como uma curva fechada, simples, de classe C^k , $k \geq 2$ e estritamente convexa. Tomando uma origem em Γ , parametrizamos a curva de maneira única, no intervalo de $0 \leq \varphi < 2\Pi$.

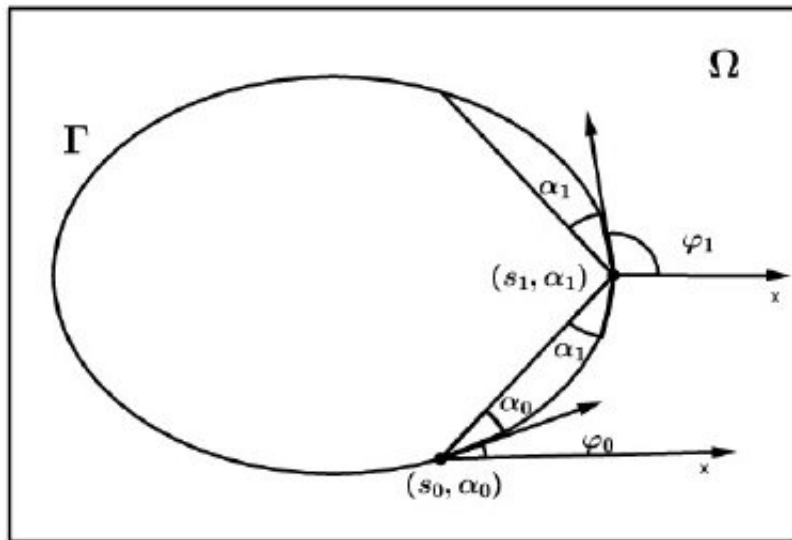


Figura 2.2: Bilhar

Definição 2.1.3. *A órbita de um bilhar de uma curva Γ é uma sucessão de pares (s_n, α_n) , correspondentes ao n -ésimo impacto, a partir de uma condição inicial dada (s_0, α_0) . O conjunto de todos os pontos de órbitas possíveis de um bilhar é chamado de espaço de fase do bilhar.*

Seja L o comprimento de Γ , podemos restringir o espaço de fase do bilhar ao cilindro $0 < \alpha < \Pi$, $0 \leq s < L$, pois como s é uma coordenada periódica, visto que a curva é fechada, então s é equivalente a $s + L$. Existe um homeomorfismo deste cilindro com o cilindro $0 < \alpha < \Pi$, $0 \leq s < 2\Pi$. Podemos definir um homeomorfismo do segundo cilindro com um anel circular. Tomando s como coordenada angular e α acrescida por uma constante, no caso Π , como coordenada radial. Dessa maneira, representaremos o conjunto dos valores de (s, α) por um anel circular, que denominaremos por A , limitado por círculos concêntricos de raios Π e 2Π . Como mostra a figura a seguir:

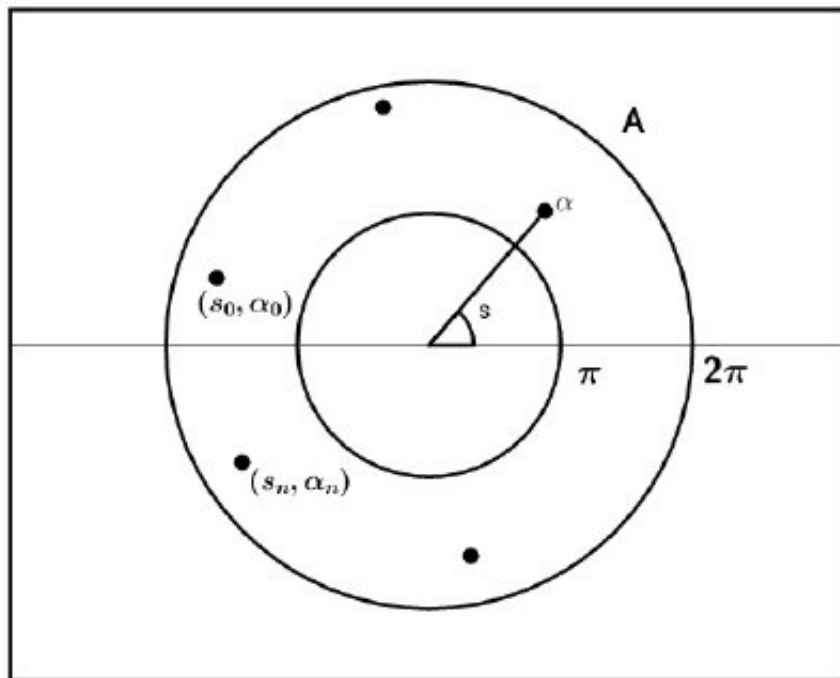


Figura 2.3: Órbita de uma trajetória de bilhar

Dado o raio de curvatura R de Γ , relacionaremos os parâmetros de s e φ pelas

seguintes relações:

$$R(\varphi) = \frac{ds}{d\varphi}$$

$$s(\varphi) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} R(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi}.$$

Definição 2.1.4. *A aplicação de bilhar de uma curva Γ é a aplicação, T definida no espaço de fase em coordenadas (s, α) por $T(s_n, \alpha_n) = (s_{n+1}, \alpha_{n+1})$.*

Considerando que $x = x(\varphi)$ e $y = y(\varphi)$ são equações paramétricas que descrevem Γ no parâmetro φ , dados φ_0 e α_0 , a inclinação do segmento da trajetória inicial é dada por:

$$\tan(\varphi_0 + \alpha_0) = \frac{y(\varphi_1) - y(\varphi_0)}{x(\varphi_1) - x(\varphi_0)}.$$

Como a Γ está parametrizada por comprimento de arco então:

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\varphi) \quad \frac{dy}{ds} = \sen(\varphi) \quad R(\varphi) = \frac{ds}{d\varphi}$$

daí, temos que:

$$x(\varphi_1) - x(\varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} x'(\varphi)d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{dx}{ds} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} R(\varphi)\cos(\varphi)d\varphi$$

da mesma maneira:

$$y(\varphi_1) - y(\varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} y'(\varphi)d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{dy}{ds} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} R(\varphi)\sen(\varphi)d\varphi.$$

Portanto,

$$\tan(\varphi_0 + \alpha_0) = \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} R(\varphi)\sen(\varphi)d\varphi \right) \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} R(\varphi)\cos(\varphi)d\varphi \right)^{-1}.$$

Esta equação nos fornece implicitamente φ_1 e s_1 se φ_0 e α_0 são dados. Podemos determinar α_1 pela relação:

$$\varphi_1 - \alpha_1 = \varphi_0 + \alpha_0$$

logo,

$$\alpha_1 = \varphi_1 - \varphi_0 - \alpha_0.$$

Teorema 2.1.5. *Sejam Γ uma curva, A o anel circular limitado por círculos concêntricos de raios Π e 2Π respectivamente e $T : A \rightarrow A$ a aplicação de bilhar de Γ , definida pelas equações:*

$$s_1 = s_1(s_0, \alpha_0)$$

$$\alpha_1 = \alpha_1(s_0, \alpha_0).$$

Sejam $(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0) \in A$ e $(\tilde{s}_1, \tilde{\alpha}_1) = T(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)$. Então T é um difeomorfismo local de classe C^{k-1} , em alguma vizinhança de $(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)$.

Demonstração. Tomando as equações paramétricas de Γ no parâmetro s , $x = F(s)$, $y = G(s)$. Vamos tomar dois pontos na curva $\tilde{P}_0 = (F(\tilde{s}_0), G(\tilde{s}_0)) \in \Gamma$ e $\tilde{P}_1 = (F(\tilde{s}_1), G(\tilde{s}_1)) \in \Gamma$. Tomemos também um ponto $P_0 = (F(s_0), G(s_0))$ que pertence à vizinhança de \tilde{P}_0 . Sempre existem vizinhanças disjuntas, dos pontos P_0 e \tilde{P}_0 . Definiremos o ângulo θ_0 , que é formado entre o eixo x e o segmento da trajetória do bilhar que liga P_0 a \tilde{P}_1 . Sabemos que $\theta_0 = \varphi_0 + \alpha_0$, então $\alpha_0 = \theta_0 - \varphi_0$ e $\alpha_1 = \varphi_1 - \theta_0$. Podemos supor que $F'(\tilde{s}_0) \neq 0$ e $F'(\tilde{s}_1) \neq 0$,

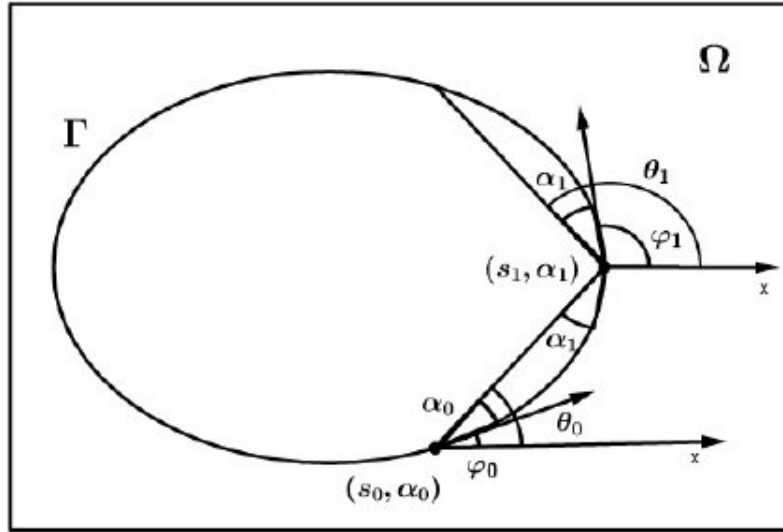


Figura 2.4: Bilhar

caso contrário, podemos girar a região Ω no plano. Sem perda de generalidade, podemos supor que $F'(s_0) \neq 0$ e $F'(s_1) \neq 0$ em vizinhanças pequenas de \tilde{s}_0 e \tilde{s}_1 respectivamente. Como $\Gamma(s) = (F(s), G(s))$, então $\Gamma'(s) = (F'(s), G'(s))$ e $\tau_{\varphi_0} = \Gamma' = (\cos(\varphi_0), \sin(\varphi_0))$. Verificamos que:

$$\tan(\varphi_0) = \frac{G'(s_0)}{F'(s_0)}$$

$$\tan(\varphi_1) = \frac{G'(s_1)}{F'(s_1)}$$

$$\tan(\varphi_0 + \alpha_0) = \tan(\theta_0) = \frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)}.$$

Daí conseguimos encontrar os ângulos φ_0 , φ_1 , θ_0 :

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{G'(s_0)}{F'(s_0)}\right)$$

$$\varphi_1 = \arctan \left(\frac{G'(s_1)}{F'(s_1)} \right)$$

$$\theta_0 = \arctan \left(\frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)} \right).$$

Trocando os ângulos encontrados nas relações feitas no início temos:

$$\alpha_0 = \theta_0 - \varphi_0$$

obtemos:

$$\alpha_0 = \arctan \left(\frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)} \right) - \arctan \left(\frac{G'(s_0)}{F'(s_0)} \right)$$

com isso vamos definir uma função que dependa apenas de (s_0, s_1) da seguinte maneira:

$$L(s_0, s_1) = \arctan \left(\frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)} \right) - \arctan \left(\frac{G'(s_0)}{F'(s_0)} \right).$$

Utilizando a mesma ideia, mas dessa vez com a outra relação entre os ângulos, temos:

$$\alpha_1 = \varphi_1 - \theta_0$$

$$\alpha_1 = \arctan \left(\frac{G'(s_1)}{F'(s_1)} \right) - \arctan \left(\frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)} \right).$$

Definindo um nova função que depende apenas de (s_0, s_1) :

$$M(s_0, s_1) = \arctan \left(\frac{G'(s_1)}{F'(s_1)} \right) - \arctan \left(\frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)} \right).$$

Se definirmos uma função $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$f(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1) = (U(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1), V(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1))$$

de maneira que:

$$f(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1) = \begin{cases} U(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1) = L(s_0, s_1) - \alpha_0 = 0 \\ V(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1) = M(s_0, s_1) - \alpha_1 = 0 \\ (s_1(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0), \alpha_1(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)) = (\tilde{s}_1, \tilde{\alpha}_1) \end{cases}$$

Sabemos que pelo teorema da função implícita, para que existam funções $s_1 = s_1(s_0, \alpha_0)$ e $\alpha_1 = \alpha_1(s_0, \alpha_0)$ de classe C^{k-1} em alguma vizinhança de $(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)$ é suficiente que $\partial_2 f(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1) \neq 0$. Nesse caso, a partição em soma direta do nosso domínio será feita da seguinte maneira, a primeira parte do domínio contém (s_0, α_0) , a segunda parte, que em especial é a que mais nos interessa, contém (s_1, α_1) , ou seja, f restrita às duas últimas coordenadas. Em resumo, precisamos que $\partial f(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1)|_{(s_1, \alpha_1)} \neq 0$. Para calcular esse jacobiano, façamos:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial s_1} & \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial V}{\partial s_1} & \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} \end{bmatrix}.$$

Observando que $\frac{\partial U}{\partial s_1} = \frac{\partial L}{\partial s_1}$, $\frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial s_1} = \frac{\partial M}{\partial s_1}$ e $\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = -1$. Portanto, o determinante do jacobiano vale:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial s_1}(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1) & 0 \\ \frac{\partial M}{\partial s_1}(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1) & -1 \end{bmatrix} = -\frac{\partial L}{\partial s_1}(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1).$$

Dessa maneira, devemos mostrar que $\frac{\partial L}{\partial s_1}(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1) \neq 0$. Se derivarmos parcialmente a função $L(s_0, s_1)$ com relação a s_1 , obtemos:

$$\frac{\partial L}{\partial s_1}(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1) = \left[\arctan \left(\frac{G(\tilde{s}_1) - G(\tilde{s}_0)}{F(\tilde{s}_1) - F(\tilde{s}_0)} \right) \right]' = \frac{\frac{G'(\tilde{s}_1)[F(\tilde{s}_1) - F(\tilde{s}_0)] - F'(\tilde{s}_1)[G(\tilde{s}_1) - G(\tilde{s}_0)]}{[F(\tilde{s}_1) - F(\tilde{s}_0)]^2}}{1 + \frac{[G(\tilde{s}_1) - G(\tilde{s}_0)]^2}{[F(\tilde{s}_1) - F(\tilde{s}_0)]^2}} =$$

$$\frac{\frac{G'(\tilde{s}_1)F(\tilde{s}_1) - G'(\tilde{s}_1)F(\tilde{s}_0) - F'(\tilde{s}_1)G(\tilde{s}_1) + F'(\tilde{s}_1)G(\tilde{s}_0)}{[F(\tilde{s}_1) - F(\tilde{s}_0)]^2}}{\frac{[F(\tilde{s}_1) - F(\tilde{s}_0)]^2 + [G(\tilde{s}_1) - G(\tilde{s}_0)]^2}{[F(\tilde{s}_1) - F(\tilde{s}_0)]^2}} = \frac{\det \begin{bmatrix} F'(\tilde{s}_1) & G'(\tilde{s}_1) \\ F(\tilde{s}_0) - F(\tilde{s}_1) & G(\tilde{s}_0) - G(\tilde{s}_1) \end{bmatrix}}{[F(\tilde{s}_0) - F(\tilde{s}_1)]^2 + [G(\tilde{s}_0) - G(\tilde{s}_1)]^2}.$$

Sabemos que denominador dessa equação nunca se anula, pois $\tilde{P}_0 \neq \tilde{P}_1$, portanto devemos nos ater a analisar o determinante, que deverá ser diferente de nulo. Dizer que esse determinante é diferente de nulo, significa dizer $(F(\tilde{s}_0) - F(\tilde{s}_1), G(\tilde{s}_0) - G(\tilde{s}_1))$ e $(F'(\tilde{s}_1), G'(\tilde{s}_1))$ não são vetores paralelos. O que de fato ocorre pois, $\tilde{\alpha}_1 \neq 0$ e $\tilde{\alpha}_1 \neq \Pi$. Portanto, está satisfeita a hipótese do teorema da função implícita a respeito do isomorfismo. Então T é uma aplicação de classe C^{k-1} em alguma vizinhança de $(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)$. Vamos tratar agora da aplicação T^{-1} , se considerarmos a função $T^{-1}(s, \alpha) = T(s, \Pi - \alpha)$, definida em uma vizinhança de $(\tilde{s}_1, \tilde{\alpha}_1)$, obteremos que T^{-1} é também uma aplicação de classe C^{k-1} em alguma vizinhança de $(\tilde{s}_1, \tilde{\alpha}_1)$. Uma observação que devemos fazer é que o processo para demonstrar que T^{-1} é de classe C^{k-1} é análogo ao modo de demonstrar que T é de que classe C^{k-1} . Com isso, completamos a prova de que T é um difeomorfismo de classe C^{k-1} em uma vizinhança de $(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)$. \square

Proposição 2.1.6. *Dado $(s_0, \alpha_0) \in A$ e a aplicação de bilhar $T : A \rightarrow A$ e $(s_0, \alpha_0) \mapsto (s_1, \alpha_1)$, a matriz derivada $dT(s_0, \alpha_0)$ dessa aplicação é:*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial s_0} & \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_0} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l}{R_0 d_1} - \frac{d_0}{d_1} & \frac{l}{d_1} \\ \frac{l - R_0 d_0}{R_0 R_1 d_1} - \frac{1}{R_0} & \frac{l}{R_1 d_1} - 1 \end{pmatrix}$$

onde R_0 e R_1 são raios de curvatura de Γ nos pontos $P_0 = (F(s_0), G(s_0))$ e $P_1 = (F(s_1), G(s_1))$ respectivamente, l é comprimento do segmento de trajetória que vai de P_0 a P_1 , $d_0 = \text{sen}(\alpha_0)$ e $d_1 = \text{sen}(\alpha_1)$.

Demonstração. Vamos derivar $L(s_0, s_1)$ implicitamente com relação à α_0 , temos:

$$L(s_0, s_1) = \arctan\left(\frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)}\right) - \arctan\left(\frac{G'(s_0)}{F'(s_0)}\right) = \alpha_0.$$

$$\frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} = 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_1} &= \frac{1}{\frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0}} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} F'(\tilde{s}_1) & G'(\tilde{s}_1) \\ F(\tilde{s}_0) - F(\tilde{s}_1) & G(\tilde{s}_0) - G(\tilde{s}_1) \end{bmatrix}} = \\ &= \frac{[F(\tilde{s}_0) - F(\tilde{s}_1)]^2 + [G(\tilde{s}_0) - G(\tilde{s}_1)]^2}{\det \begin{bmatrix} F'(\tilde{s}_1) & G'(\tilde{s}_1) \\ F(\tilde{s}_0) - F(\tilde{s}_1) & G(\tilde{s}_0) - G(\tilde{s}_1) \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$

O numerador dessa fração é o segmento de trajetória do bilhar ao quadrado, ou seja, l^2 . O denominador dessa fração é igual a área do paralelogramo formado pelos vetores $(F'(s_1), G'(s_1))$ e $(F(s_0) - F(s_1), G(s_0) - G(s_1))$, observamos que:

$$\det \begin{bmatrix} F'(\tilde{s}_1) & G'(\tilde{s}_1) \\ F(\tilde{s}_0) - F(\tilde{s}_1) & G(\tilde{s}_0) - G(\tilde{s}_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \|(F'(s_1), G'(s_1))\| \|(F(s_0) - F(s_1), G(s_0) - G(s_1))\| \operatorname{sen}(\Pi - \alpha_1).$$

Como $(F'(s_1), G'(s_1))$ é um vetor unitário e $\|(F(s_0) - F(s_1), G(s_0) - G(s_1))\| = l$, então:

$$\det \begin{bmatrix} F'(\tilde{s}_1) & G'(\tilde{s}_1) \\ F(\tilde{s}_0) - F(\tilde{s}_1) & G(\tilde{s}_0) - G(\tilde{s}_1) \end{bmatrix} = l \operatorname{sen}(\Pi - \alpha_1) = d_1 l.$$

Com isso, concluímos que:

$$\frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} = \frac{l}{d_1}.$$

Derivando implicitamente $L(s_0, s_1)$, dessa vez com relação à s_0 , obtemos:

$$\frac{\partial s_1}{\partial s_0}(s_0, \alpha_0) = -\frac{\frac{\partial L}{\partial s_0}(s_0, \alpha_0)}{\frac{\partial L}{\partial s_1}(s_0, \alpha_0)}.$$

Para obtermos essa expressão necessitamos saber quem é $\frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_0}$, derivando parcialmente $L(s_0, s_1)$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_0} &= \frac{-G(s_0)[F(s_1)-F(s_0)]+F'(s_0)[G(s_1)-G(s_0)]}{[F(s_1)-F(s_0)]^2} - \frac{G''(s_0)F'(s_0)-G'(s_0)F''(s_0)}{F'(s_0)^2} = \\ &= \frac{\det \begin{bmatrix} F'(s_0) & G'(s_0) \\ F(s_1) - F(s_0) & G(s_1) - G(s_0) \end{bmatrix}}{[F(s_1) - F(s_0)]^2} \frac{1}{1 + \frac{[G(s_1)-G(s_0)]^2}{[F(s_1)-F(s_0)]^2}} - \\ &= \frac{1}{1 + \frac{[G'(s_0)]^2}{[F'(s_0)]^2}} \frac{G''(s_0)F'(s_0) - G'(s_0)F''(s_0)}{[F'(s_0)]^2} = \\ &= \frac{1}{l^2} l \operatorname{sen}(\alpha_0) - \frac{1}{R_0} = \\ &= \frac{d_0}{l} - \frac{1}{R_0} = \frac{R_0 d_0 - l}{R_0 l}. \end{aligned}$$

Como consequência disso:

$$\frac{\partial s_1}{\partial s_0} = -\frac{\partial L(s_0, \alpha_0)}{\partial L(s_0, \alpha_0)} = -\frac{\frac{(R_0 d_0 - l)}{R_0 l}}{\frac{d_1}{l}} = \frac{l}{R_0 d_1} - \frac{d_0}{d_1}.$$

Derivando $M(s_0, s_1)$ com relação a s_0 , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(s_0, s_1)}{\partial s_0} &= -\frac{\det \begin{bmatrix} F'(s_0) & G'(s_0) \\ F(s_1) - F(s_0) & G(s_1) - G(s_0) \end{bmatrix}}{[F(s_1) - F(s_0)]^2 + [G(s_1) - G(s_0)]^2} = \\ &= -\frac{l \operatorname{sen}(\alpha_1)}{l^2} = -\frac{d_0}{l}. \end{aligned}$$

Agora, derivando $M(s_0, s_1)$ com respeito a s_1 :

$$\frac{\partial M(s_0, s_1)}{\partial s_1} = \frac{1}{R_1} - \frac{d_1}{l}.$$

Do mesmo modo, derivando $M(s_0, s_1)$ com relação a s_1 , temos que:

$$\frac{\partial M(s_0, s_1)}{\partial s_1} = \frac{1}{R_1} - \frac{d_1}{l}.$$

Derivando implicitamente $M(s_0, s_1)$, concluímos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} &= \frac{\partial M(s_0, s_1)}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_0} &= \frac{\partial M(s_0, s_1)}{\partial s_0} + \frac{\partial M(s_0, s_1)}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial s_0}. \end{aligned}$$

Substituindo as relações encontradas na equação acima:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{d_1}{l} \right) \frac{l}{d_1} = \frac{l}{R_1 d_1} - 1.$$

Novamente, derivando implicitamente temos:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial s_0} = \frac{\partial M(s_0, s_1)}{\partial s_0} + \frac{\partial M(s_0, s_1)}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial s_0}.$$

Substituindo as derivadas parciais:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial s_0} = -\frac{d_0}{l} + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{d_1}{l} \right) = \frac{l - R_0 d_0}{R_0 R_1 d_1} - \frac{1}{R_0}.$$

□

Devemos observar que o teorema acima ainda continua válido se tomarmos (φ, α) como coordenadas para o espaço de bilhar, onde φ é o ângulo de inclinação do vetor tangente. Representaremos por Υ a mudança de coordenadas de $(s, \alpha) \mapsto (\varphi, \alpha)$, obtemos a derivada da aplicação $d(\Upsilon \circ T \circ \Upsilon^{-1})(\varphi_0, \alpha_0)$, calculando temos:

$$d\Upsilon(s, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial s}{\partial \alpha} & \frac{\partial s}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R(\varphi)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, fazendo a mudança de base, obtemos:

$$d(\Upsilon \circ T \circ \Upsilon^{-1})(\varphi_0, \alpha_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l}{R_0 d_1} - \frac{d_0}{d_1} & \frac{l}{d_1} \\ \frac{l - R_0 d_0}{R_0 R_1 d_1} - \frac{1}{R_0} & \frac{l}{R_1 d_1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d(\Upsilon \circ T \circ \Upsilon^{-1})(\varphi_0, \alpha_0) = \begin{pmatrix} \frac{l - R_0 d_0}{R_1 d_1} & \frac{l}{R_1 d_1} \\ \frac{l - R_0 d_0}{R_1 d_1} - 1 & \frac{l}{R_1 d_1} - 1 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 3

Dependência C^∞ das raízes de um polinômio com respeito aos seus coeficientes

3.1 Aplicação do teorema da função implícita à álgebra

Neste capítulo vamos provar que as raízes de um polinômio são C^∞ dependentes dos coeficientes deste polinômio. De modo que se fizermos uma pequena perturbação nos coeficientes do polinômio, perturbaremos também as raízes desse polinômio de maneira suave. Consideremos uma função polinomial dada por $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, n$

Definição 3.1.1. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é raiz do polinômio $p(x)$, se $p(c) = 0$.

Teorema 3.1.2. Se c é raiz do polinômio $p(x)$, então existe uma função polinomial q tal que

$$p(x) = (x - c)q(x).$$

Demonstração. Se c é um zero de $p(x)$ temos que:

$$p(x) = p(x) - p(c) = \sum_{i=0}^n a_i(x^i - c^i) = (x - c)q(x).$$

□

Definição 3.1.3. Dizemos que c é uma raiz simples de p se $q(c) \neq 0$.

Se $q(c) = 0$ então $q(x) = (x - c)r(x)$, dessa maneira, $p(x) = (x - c)^2r(x)$, onde r é um outro polinômio.

Teorema 3.1.4. O número c é uma raiz simples de p se e somente se, $p'(c) \neq 0$

Demonstração. Seja c uma raiz simples de p , suponha $p(x) = (x - c)q(x)$, derivando esse polinômio obtemos: $p'(x) = q(x) + (x - c)q'(x)$. Observamos o polinômio $p'(x)$ no ponto c , $p'(c) = q(c) + (c - c)q'(c) \Rightarrow p'(c) = q(c)$, como c é raiz simples, então $q(c) \neq 0$, o que implica que $p'(c) \neq 0$. Por outro lado, suponha que $p'(c) \neq 0$, já sabemos que $p'(c) = q(c)$, logo $q(c) \neq 0$, o que significa que c é uma raiz simples de p . □

Teorema 3.1.5. Se c é uma raiz simples de p então c é uma função de classe C^∞ dos coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n do polinômio p .

Demonstração. Para fazer essa demonstração, vamos definir a seguinte função:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, \lambda) \longrightarrow f(x, \lambda) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

onde $\lambda = (a_0, \dots, a_n)$. Sabemos que f é de classe C^∞ , pois f é uma função polinomial com coeficientes em \mathbb{R} , o que significa que não teremos problema algum para derivá-la. Suponha que c_0 é uma raiz simples da função polinomial p^0 , que corresponde ao caso particular de $\lambda_0 = (a_0^0, a_1^0, \dots, a_n^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Agora, necessitamos verificar as hipóteses do teorema da função implícita. Seja $f(c_0, \lambda_0) = \sum_{i=0}^n a_i^0(c_0)^i = p^0(c_0) = 0$, pois c_0 é raiz simples de p^0 . Observamos também que:

$$\frac{\partial f(c_0, \lambda_0)}{\partial x} = \frac{\partial(\sum_{i=0}^n a_i x^i)}{\partial x} \Big|_{(c_0, \lambda_0)} = (p^0)'(c_0) \neq 0$$

Pelo teorema da função implícita, sabemos que existem vizinhanças abertas $U \subset \mathbb{R}$ de c_0 e $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de λ_0 tal que para todo $\lambda \in V$ existe um único $c \in U$ com $f(c, \lambda) = 0$. Desta maneira, temos uma única função:

$$c : V \longrightarrow U$$

$$\lambda \longrightarrow c(\lambda)$$

tal que $f(c(\lambda), \lambda) = 0$. Isso nos diz que a função polinomial p no parâmetro $\lambda = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ próximo de λ_0 , também possui exatamente uma raiz simples $c(\lambda) \in \mathbb{R}$ próxima de c_0 . Como $f \in C^k \forall k \in \mathbb{N}$ então $c(\cdot) \in C^k \forall k \in \mathbb{N}$. Significa que as raízes de p são C^∞ dependentes dos seus coeficientes. Além do

mais, temos que:

$$\frac{\partial c(\lambda)}{\partial \lambda} = - \left[\frac{\partial f(c(\lambda), \lambda)}{\partial c} \right]^{-1} \frac{\partial f(c(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda}.$$

□

Capítulo 4

Teorema do fluxo tubular

4.1 Aplicação da teorema da função inversa ao teorema do fluxo tubular

Nesse capítulo, mostraremos que a aplicação de um fluxo perto de uma órbita periódica é uma aplicação de classe C^k .

Antes de demonstrar o teorema principal do capítulo, vamos estudar alguns conceitos necessários para prosseguir o estudo. Seja Δ um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ em Δ é uma aplicação $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k . Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial

$$x' = X(x).$$

Chamamos de soluções desta equação às aplicações diferenciáveis $\varphi : I \rightarrow \Delta$

tais que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t))$$

para todo $t \in I$, onde I é um intervalo da reta, essas soluções são chamadas de trajetórias ou curvas integrais de X .

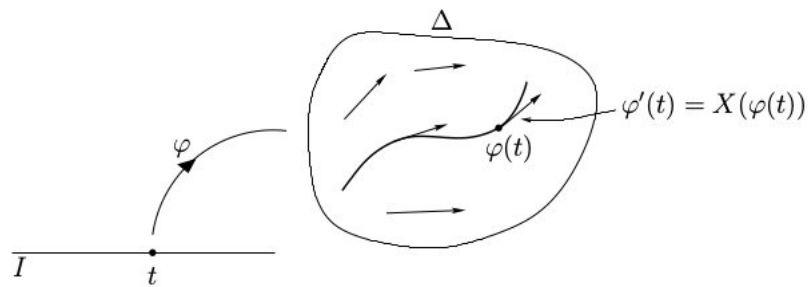


Figura 4.1: Curvas integrais
 FONTE: SOTOMAYOR, 2011, p.91.

Definição 4.1.1. Uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é dita *fluxo* se:

- i) $\varphi(0, x) = x$.
- ii) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$, com $t, s \in \mathbb{R}$.

Um *fluxo* chama-se *linear* se para cada $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ é uma aplicação linear em \mathbb{R}^n .

Definição 4.1.2. Um ponto $x \in \Delta$ é dito *ponto singular* de X se $X(x) = 0$ e é chamado *ponto regular* de X se $X(x) \neq 0$.

Definição 4.1.3. A aplicação $\varphi : D \rightarrow \Delta$ chama-se *fluxo gerado por X* , onde $D = \mathbb{R} \times \Delta$.

Podemos notar que as condições da definição de fluxo de classe C^k são satisfeitas, $\varphi(0, x) = x$ e $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$, essa segunda condição é válida somente no contexto da propriedade de grupos do teorema global da diferenciabilidade que enunciaremos à frente. Se o intervalo $I_x = \mathbb{R}$ para todo x , o fluxo gerado por X é um fluxo de classe C^k em Δ . Porém, muitas vezes $I_x \neq \mathbb{R}$, por esse motivo o fluxo gerado por X é chamado de *fluxo local* ou *grupo local de a um parâmetro gerado por X* . Essa última denominação decorre do fato de que a segunda condição do teorema global da diferenciabilidade define, quando $D = \mathbb{R} \times \Delta$ um homomorfismo do grupo aditivo dos reais no grupo dos difeomorfismos de classe C^r de Δ , munido da operação de composição. Definimos o homomorfismo $t \rightarrow \varphi_t$ e temos $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ e $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$, para $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$. Dessa maneira, podemos imaginar que os pontos de Δ fluem ao longo das trajetórias de X do mesmo modo que um fluido desloca-se ao longo de suas linhas de corrente. Uma observação a ser feita é que a segunda parte do teorema vem da unicidade de soluções e do fato da equação ser autônoma. Nesse caso, $\varphi_y(s)$ e $\varphi_x(t + s)$ são soluções do mesmo problema de Cauchy.

Definição 4.1.4. *Uma curva $\varphi : I \rightarrow \Delta$ de X chama-se máxima se para toda curva integral $\Psi : J \rightarrow \Delta$ tal que $I \subseteq J$ e $\varphi = \Psi|_I$ então $I = J$ e, conseqüentemente, $\varphi = \Psi$. Neste caso, I chama-se intervalo máximo.*

Corolário 4.1.5. *Seja X um campo vetorial C^k , $k \geq 1$, em $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $x \in \Delta$ e $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$ é tal que $\omega_+(x) < \infty$ (respectivamente $\omega_-(x) > -\infty$) então $\varphi_x(t)$ tende a $\partial\Delta$ quando $t \rightarrow \omega_+(x)$ (respectivamente $t \rightarrow \omega_-(x)$), isto é, para todo compacto $K \subseteq \Delta$ existe $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$ tal que se $t \in [(\omega_+(x) - \varepsilon, \omega_+(x))]$ (respectivamente $t \in [(\omega_-(x), \omega_+(x) + \varepsilon)]$) então $\varphi_x(t) \notin K$.*

Demonstração. Vamos supor por contradição, que exista um compacto $K \subseteq \Delta$

e uma sequência $t_n \rightarrow \omega_+(x) < \infty$ tal que $\varphi_x(t_n) \in K$ para todo n . Tomando uma subsequência podemos supor que $\varphi_x(t_n)$ converge a ponto $x_0 \in K$. Sejam $b > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $B_b \times I_\alpha \subseteq D$, onde $B_b = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x_0| \leq b\} \subseteq \Delta$ e $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R} \mid |t| < \alpha\}$. Como D é aberto e sabemos que $\varphi_x(t_n + s)$ está definido para $s < \alpha$ e coincide com $\varphi_y(s)$ para n suficientemente grande, onde $y = \varphi_x(t_n)$. Então $t_n + s > \omega_+(x)$, contradição. \square

Corolário 4.1.6. *Se $\Delta = \mathbb{R}^n$ e $|X(x)| < c$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então $I_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Suponhamos que $\omega_+(x) < \infty$ para algum $x \in \mathbb{R}^n$. Como $|x - \varphi_x(t)| = |\int_0^t X(\varphi_s(x)) ds| \leq ct \leq c\omega_+(x)$, temos que para todo $t \in (0, \omega_+(x))$, $\varphi_x(t)$ está na bola fechada de centro x e raio $c\omega_+(x)$, o que contradiz o colário anterior. Logo, $\omega_+(x) = \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Da mesma maneira, podemos provar que $\omega_-(x) = \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. \square

Corolário 4.1.7. *Se φ_x é uma solução regular de $x' = X(x)$ definida no intervalo máximo I_x e $\varphi_x(t_1) = \varphi_x(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$, então $I_x = \mathbb{R}$, $\varphi_x(t+c) = \varphi_x(t)$, para todo t , onde $c = t_2 - t_1$. Isto significa que φ_x é uma solução periódica.*

Demonstração. Vamos definir $\Psi : [t_2, t_2 + c] \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\Psi(t) = \varphi_x(t - c)$, tem-se $\Psi'(t) = \varphi'_x(t - c) = X(\varphi_x(t - c)) = X(\Psi(t))$ e $\Psi(t_2) = \varphi_x(t_1) = \varphi_x(t_2)$. Por causa da unicidade das soluções, tem-se que $[t_2, t_2 + c] \subseteq I_x$ e $\varphi_x(t) = \varphi_x(t+c)$ se $t \in [t_1, t_2]$. Repetindo essa ideia fazendo $[t_2, t_2 + c]$ no lugar de $[t_1, t_2]$, e assim por diante, para os dois lados, obtemos $I_x = \mathbb{R}$ e $\varphi_x(t+c) = \varphi_x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. \square

Teorema 4.1.8 (Teorema da contração nas fibras). *Sejam (X, d) e (\bar{X}, \bar{d}) espaços métricos completos e $\tilde{F} : X \times \bar{X} \rightarrow X \times \bar{X}$ uma aplicação da forma*

$\tilde{F}(x, \bar{x}) = (F(x), \bar{F}(x, \bar{x}))$. Suponha que

i) $F : X \rightarrow X$ tem um ponto fixo atrator p . Isto é, $F(p) = p$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p$ para todo $x \in X$.

ii) Para todo $\bar{x} \in \bar{X}$ a aplicação $F_{\bar{x}} : X \rightarrow \bar{X}$ definida por $F_{\bar{x}}(x) = \bar{F}(x, \bar{x})$ é contínua.

iii) Para todo $x \in X$ a aplicação $\bar{F}_x : \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ definida por $\bar{F}_x(\bar{x}) = \bar{F}(x, \bar{x})$ é uma λ -contração, com $\lambda < 1$, isto é, $\bar{d}(\bar{F}_x(\bar{x}), \bar{F}_x(\bar{y})) \leq \lambda \bar{d}(\bar{x}, \bar{y})$ para todo $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{X}$.

Se \bar{p} é o único ponto fixo atrator de \bar{F}_p , o ponto $\tilde{p} = (p, \bar{p})$ é um ponto fixo atrator de \tilde{F} .

Para demonstrar esse teorema, precisamos de alguns lemas que veremos a seguir. Já vimos, no início desse trabalho, o significado de contração, dessa vez vamos adaptá-lo de acordo com a nossa necessidade.

Lema 4.1.9. *Seja $\{c_n\}$, $n \geq 0$, uma sequência de números reais não negativos tal que $c_n \rightarrow 0$ e seja λ tal que $0 < \lambda < 1$. Então, $\sigma_n \rightarrow 0$, onde*

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} c_i.$$

Demonstração. Seja $M_k = \sup\{c_i | i \geq k\}$, temos que $M_k \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, pois $c_i \rightarrow 0$. Tomemos $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (parte inteira de $\frac{n}{2}$), temos

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} c_i = \sum_{i=0}^k \lambda^{n-i} c_i + \sum_{i=k+1}^n \lambda^{n-i} c_i$$

$$\leq M_0 \sum_{i=0}^k \lambda^{n-i} + M_k \sum_{i=k+1}^n \lambda^{n-i} \leq M_0 \left(\frac{\lambda^{n-k}}{1-\lambda} \right) + \frac{M_k}{1-\lambda}$$

Quando n tende para ∞ , $n-k$ e k também tendem a ∞ , logo $\lambda^{n-k} M_k$ tendem para 0, portanto, $\sigma_n \rightarrow 0$. \square

Lema 4.1.10. *Seja F_n uma seqüência de λ -contrações de um espaço métrico completo (Y, d) . Se para todo $y \in Y$ a seqüência $F_n(y)$ converge para $F_\omega(y)$, F_ω também é uma λ -contração. Denotemos por y_ω seu único ponto fixo atrator. Então para todo $y_0 \in Y$, a seqüência $\{y_n\}$ definida por*

$$y_1 = F_1(y_0), y_2 = F_2(y_1), \dots, y_n = F_n(y_{n-1})$$

converge para y_ω , quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Temos $y_n = F_n \circ F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(y_0)$,

$$\begin{aligned} d(y_n, y_\omega) &\leq d(F_n \circ \dots \circ F_1(y_0), F_n \circ \dots \circ F_1(y_\omega)) + d(F_n \circ \dots \circ F_1(y_\omega), y_\omega) \\ &\leq \lambda d(F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(y_0), F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(y_\omega)) \\ &\quad + d(F_n \circ \dots \circ F_1(y_\omega), F_n(y_\omega)) + d(F_n(y_\omega), y_\omega) \\ &\leq \lambda^n d(y_0, y_\omega) + \lambda d(F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(y_\omega), y_\omega) + d(F_n(y_\omega), y_\omega) \\ &\leq \lambda^n d(y_0, y_\omega) + d(F_n(y_\omega), y_\omega) + \lambda d(F_{n-1}(y_\omega), y_\omega) \\ &\quad + \lambda^2 d(F_{n-2}(y_\omega), y_\omega) + \dots + \lambda^{n-1} d(F_1(y_\omega), y_\omega) \\ &\quad \lambda^n d(y_0, y_\omega) + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i d(F_{n-i}(y_\omega), y_\omega) \end{aligned}$$

O primeiro termo da última parcela tende a 0, pois $0 < \lambda < 1$, o segundo

termo também tende a zero, pelo lema anterior, aplicando $c_n = d(F_n(y_\omega), y_\omega)$. Observamos que $c_n \rightarrow 0$, por hipótese $F_n(y_\omega) \rightarrow y_\omega$. E como consequência disso, temos $d(y_n, y_\omega) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. \square

Com esses lemas de apoio, agora vamos demonstrar o teorema da contração fibras.

Demonstração. Seja $\tilde{x}_0 = (x_0, \bar{x}_0)$ e $x_n = F^n(x_0)$, temos

$$\tilde{F}^n(\tilde{x}_0) = (x_n, \bar{F}_{x_{n-1}} \circ \dots \circ \bar{F}_{x_0}(\bar{x}_0))$$

Logo, fazendo $F_n = \bar{F}_{x_{n-1}}$, pelo lema anterior que $\tilde{F}^n(\tilde{x}_0) \rightarrow (p, \bar{p})$. \square

Teorema 4.1.11 (Teorema local de diferenciabilidade). *Seja f uma aplicação de classe C^1 definida num aberto $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$. Para todo ponto $x_0 \in \Delta$ existem números positivos α, β e uma única aplicação φ de classe C^1 em*

$$I_\alpha \times B_\beta = \{(t, x) \mid |t| < \alpha, |x - x_0| < \beta\}$$

com valores em Δ tal que

$$D_1\varphi(t, x) = \frac{\partial\varphi(t, x)}{\partial t} = f(\varphi(t, x)), \varphi(0, x) = x$$

$$D_1D_2\varphi(t, x) = Df(\varphi(t, x))D_2\varphi(t, x), D_2\varphi(t, x)|_{t=0} = E$$

para todo $(t, x) \in I_\alpha \times B_\beta$

Demonstração. Seja $b > 0$ tal que $\bar{B}_b = \{x \mid |x - x_0| \leq b\} \subseteq \Delta$ e sejam $m = \sup\{|f(x)|, x \in \bar{B}_b\}$, $l = \sup\{\|Df(x)\|, x \in \bar{B}_b\}$, onde $\|Df(x)\| = \sup\{|Df(x)v|, |v| = 1\}$. Tomando α e β tais que $\alpha m + \beta < b$ e $\lambda = l\alpha < 1$. Seja X o espaço das

aplicações contínuas de $I_\alpha \times B_\beta$ em \overline{B}_b , com a métrica

$$d(\varphi, \Psi) = \sup\{|\varphi(t,x) - \Psi(t,x)|, (t,x) \in I_\alpha \times B_\beta\}.$$

Vamos definir $F(\varphi)(t,x) = x + \int_0^t f(\varphi(s,x))ds$, para $\varphi \in X$, a condição $\alpha m + \beta < b$ implica que F toma valores em X , dessa maneira, $F : X \rightarrow X$ está bem definida. Se tomamos $\lambda = l\alpha < 1$ significa que F é uma contração. Já sabemos que $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é o espaço das aplicações lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n com a norma $\|L\| = \sup\{|Lx| \mid |x| = 1\}$. Seja \overline{X} o espaço das aplicações contínuas e limitadas de $I_\alpha \times B_\beta$ em L munido da métrica

$$\overline{d}(\overline{\varphi}, \overline{\Psi}) = \sup\{|\overline{\varphi}(t,x) - \overline{\Psi}(t,x)|, (t,x) \in I_\alpha \times B_\beta\}.$$

Definimos $\overline{F} : X \times \overline{X} \rightarrow \overline{X}$ por $\overline{F}(\varphi, \overline{\varphi})(t,x) = E + \int_0^t Df(\varphi(s,x))\overline{\varphi}(s,x)ds$, onde E é a identidade em L . A aplicação $\tilde{F} = (F, \overline{F})$ satisfaz as hipóteses do teorema da contração nas fibras. Vamos analisar:

i) F é uma λ -contração:

$$\begin{aligned} d(F(\varphi), F(\Psi)) &= \sup \left| \int_0^t [f(\varphi(s,x)) - f(\Psi(s,x))]ds \right| \\ &\leq \sup \left| \int_0^t l|\varphi(s,x) - \Psi(s,x)|ds \right| \leq \alpha l d(\varphi, \Psi) = \lambda d(\varphi, \Psi) \end{aligned}$$

Logo, F tem um único ponto fixo atrator $\varphi \in X$.

ii) Como Df é uniformemente contínua em \overline{B}_b , logo a aplicação é contínua.

$$\text{iii) } \bar{d}(\bar{F}_\varphi(\bar{\varphi}), \bar{F}_\varphi(\bar{\Psi})) = \sup \left\| \int_0^t Df(\varphi(s,x)) [\bar{\varphi}(s,x) - \bar{\Psi}(s,x)] ds \right\| \leq \lambda \bar{d}(\bar{\varphi}, \bar{\Psi}).$$

O ponto fixo atrator de \tilde{F} é da forma $\tilde{\varphi} = (\varphi, \bar{\varphi})$, onde $F(\varphi) = \varphi$. Derivando com relação a t , temos que $D_1\varphi(t,x) = \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = f(\varphi(t,x))$, $\varphi(0,x) = x$ é satisfeita. Além do mais, φ é única, por ser o único o ponto fixo de F e contínua em $I_\alpha \times B_\beta$ pois é elemento de X . Sabemos que $D_1\varphi = f \circ \varphi$ é contínua. Agora vamos provar que φ é de classe C^1 com respeito a x e que $D_2\varphi = \bar{\varphi}$. Daí teremos que φ é de classe C^1 em $I_\alpha \times B_\beta$. Seja $\tilde{\varphi}_n = (\varphi_n, \bar{\varphi}_n) = \tilde{F}^n(\tilde{\varphi}_0)$, onde $\varphi_0(t,x) = x$ e $\bar{\varphi}_0(t,x) = E$. Quando $\varphi_n \rightarrow \varphi$ e $\bar{\varphi}_n \rightarrow \bar{\varphi}$ uniformemente em $I_\alpha \times B_\beta$. Toda φ_n é de classe C^1 e $D_2\varphi_n = \bar{\varphi}$, para todo n , podemos verificar por indução. Portanto, como $\bar{\varphi}_n = D_2\varphi_n$ e contínua, pois pertence a \bar{X} , temos que $D_2\varphi$ existe e é igual a $\bar{\varphi}$, que é contínua em $I_\alpha \times B_\beta$. Aqui utilizamos o teorema de intercâmbio da ordem entre as operações de limite uniforme e diferenciação, ou seja, quando há um limite uniforme podemos trocar a ordem sem preocupação. A igualdade

$$D_1D_2\varphi(t,x) = Df(\varphi(t,x))D_2\varphi(t,x), D_2\varphi(t,x)|_{t=0} = E$$

vem da derivada da relação

$$D_2\varphi(t,x) = \bar{F}(\varphi, D_2\varphi(t,x)) = E + \int_0^t Df(\varphi(s,x))D_2\varphi(s,x)ds \quad \square$$

Teorema 4.1.12 (Teorema global de diferenciabilidade). *Seja f um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, em um aberto $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(Existência e unicidade de soluções máximas) *Para cada $x \in \Delta$ existe um intervalo aberto I_x , onde está definida a única curva integral máxima de $\varphi_x : I_x \rightarrow \Delta$, do campo passando por x , isto é, φ_x satisfaz em I_x a equação $\frac{dy}{dt} = f(y)$, $y(0) = x$.*

(Propriedade de grupo): *Se $y = \varphi_x(s)$ e se $s \in I_x$, então $I_y = I_x - s = \{\tau - s | \tau \in$*

$I_x\}$, $\varphi_y(0) = y$ e $\varphi_y(t) = \varphi_x(t + s)$ para todo $t \in I_y$.

(Diferenciabilidade em relação às condições iniciais): O conjunto $D = \{(t,x)|x \in \Delta, t \in I_x\}$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} e a aplicação $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(t,x) = \varphi_x(t)$ é de classe C^k . Mais ainda, φ satisfaz à equação

$$D_1 D_2 \varphi(t,x) = DX(\varphi(t,x)) \circ D_2 \varphi(t,x)$$

onde $D_2 \varphi(t,x)|_{t=0} = E$ para todo $(t,x) \in D$. A identidade de \mathbb{R}^n é denotada por E .

Dividiremos a demonstração desse teorema em três partes, a seguir temos as três proposições necessárias à demonstração.

Proposição 4.1.13. *Seja f um campo vetorial de classe C^1 em um aberto Δ de \mathbb{R}^n . Dado $x \in \Delta$, seja $I_x = \cup I_\Psi$ onde $\Psi : I_\Psi \longrightarrow \Delta$ percorre o conjunto das soluções de $x' = f(x)$, $x(0) = x$. Então:*

- i) $\varphi_x : I_x \longrightarrow \Delta$ definida por $\varphi_x(t) = \Psi(t)$ se $t \in I_\Psi$ é a única curva integral máxima de f por x .
- ii) se $s \in I_x$ e $y = \varphi_x(s)$, então $I_y = I_x - s = \{\tau - s | \tau \in I_x\}$ e para todo $t \in I_y$ tem-se $\varphi_y(t) = \varphi_x(t + s)$.

Demonstração.

- i) Temos que verificar que φ_x está bem definida. Para isso, se Ψ_1 e Ψ_2 são soluções do problema de Cauchy $x' = f(x)$, $x(0) = x$, então $\Psi_1 = \Psi_2$ no intervalo $(a,b) = I_{\Psi_1 \cap \Psi_2}$. Seja $A = \{t \in (a,b) | \Psi_1(t) = \Psi_2(t)\}$, sabemos que A é fechado em (a,b) e não vazio, precisamos mostrar que A é aberto. Sejam $t' \in A$ e $y = \Psi_1(t') = \Psi_2(t')$.

Pelo teorema da diferenciabilidade local (Sotomayor), existe uma única curva integral Ψ do problema de Cauchy $x' = f(x)$, $x(0) = y$, definida em um certo intervalo aberto I . Observamos que $\tilde{\Psi}_1 = \Psi_1(t' + s)$ é também uma solução de $x' = f(x)$, $x(0) = y$. De fato, pois $\frac{d\tilde{\Psi}_1(s)}{ds} = \frac{d\Psi_1(t' + s)}{ds} = f(\Psi_1(t' + s)) = f(\tilde{\Psi}_1(s))$. Logo, por unicidade, $\Psi_1 = \Psi$ em $(a,b) \cap (I + t')$. Da mesma maneira, $\tilde{\Psi}_2(s) = \Psi_2(t' + s)$ coincide com Ψ em $(a,b) \cap (I + t')$. Portanto, $\Psi_1 = \Psi_2$ em $(a,b) \cap (I + t')$, isto prova que A é aberto, pela conexidade $A = (a,b)$.

ii) Sabemos que $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$, portanto, $\varphi_y(s)$ está definida para $s \in I_x - t$, onde $I_x - t \subseteq I_y$. Olhando de outra maneira, $\varphi_y(-t) = x$ e $\varphi_x(s) = \varphi_y(-t + s)$, onde $\varphi_x(s)$ está definida para todo $s \in I_y + t$. Logo, $I_y + t \subseteq I_x - t$. Portanto, provamos que $I_y = I_x - t$. \square

Proposição 4.1.14. *Seja f um campo vetorial de classe C^1 em um aberto Δ de \mathbb{R}^n . Então $D = \{(t,x) | x \in \Delta \text{ e } t \in I_x\}$ é aberto de \mathbb{R}^{n+1} . Ainda, $\varphi(t,x) = \varphi_x(t)$ é uma aplicação de classe C^1 em D e*

$$D_1 D_2 \varphi(t,x) = Df(\varphi(t,x)) D_2 \varphi(t,x)$$

onde $D_2 \varphi(t,x)|_{t=0} = E$ para todo $(t,x) \in D$. E I_x é o intervalo maximal da solução φ_x do problema de Cauchy $x' = f(x)$, $x(0) = x$.

Demonstração. Seja C o conjunto dos pontos $t \in I_{x_0}$, $t > 0$, tais que existe uma vizinhança B_t de x_0 tal que $[0,t] \times B_t \subseteq D$ e φ é de classe C^1 e satisfaz $D_1 D_2 \varphi(t,x) = Df(\varphi(t,x)) D_2 \varphi(t,x)$, com $D_2 \varphi(t,x)|_{t=0} = E$ em $(0,t) \times B_t$. Pelo teorema local da diferenciabilidade, $C \neq \emptyset$. Seja s o supremo de C . Vamos provar que s é o extremo superior de I_x . Se $s \in I_x$, seja $x_1 = \varphi(s, x_0)$. Pelo teorema local da diferenciabilidade, existe $I \times B$, vizinhança de $(0, x_1)$, na qual

φ satisfaz $D_1 D_2 \varphi(t, x) = Df(\varphi(t, x)) D_2 \varphi(t, x)$, com $D_2 \varphi(t, x)|_{t=0} = E$. Sejam d o comprimento do intervalo I , u tal que $u < s$ e $s - u < \frac{d}{2}$ e \tilde{B} uma vizinhança de x_0 tal que $\varphi(u, y) \in B$ para todo $y \in \tilde{B}$. Se $y \in \tilde{B}$ e $t \in [0, u + \frac{d}{2}]$, sabemos que pela proposição anterior que $\varphi(t, y) = \varphi(t - u, \varphi(u, y))$. Portanto, φ é de classe C^1 em $(0, u + \frac{d}{2}) \times \tilde{B}$. Precisamos verificar que φ satisfaz $D_1 D_2 \varphi(t, x) = Df(\varphi(t, x)) D_2 \varphi(t, x)$, com $D_2 \varphi(t, x)|_{t=0} = E$ neste conjunto. A partir de $\varphi(t, x) = \varphi(t - u, \varphi(u, x))$, temos que:

$$D_2 \varphi(t, x) = [D_2 \varphi(t - u, \varphi(u, x))] D_2 \varphi(u, x)$$

Derivando com respeito a t e usando o fato de que $t - u \in C$, temos

$$\begin{aligned} D_1 D_2 \varphi(t, x) &= [D_1 D_2 \varphi(t - u, \varphi(u, x))] D_2 \varphi(u, x) \\ &= [Df(\varphi(t, x)) D_2 \varphi(t - u, \varphi(u, x))] D_2 \varphi(u, x) \\ &= Df(\varphi(t, x)) D_2 \varphi(t, x) \end{aligned}$$

Logo, $u + \frac{d}{2} \in C$ é maior do que s , o que é uma contradição. Portanto, $s = \sup I_x$. Agora basta tomar os pontos $t \in I_{x_0}$, $t < 0$ e concluimos a demonstração. \square

Retornaremos agora a demonstração do teorema global da diferenciabilidade.

Demonstração. Demonstraremos o teorema global da diferenciabilidade por indução em k . A proposição que demonstramos anteriormente prova o caso para $k = 1$. Suponhamos que o teorema seja válido para $k - 1$ e vamos mostrar que é válido para k . Consideremos o campo $F = (f, Df)$, que é de classe C^{k-1} em $\Delta \times \mathbb{R}^{n^2}$, definido por $F(x, L) = (f(x), Df(x)L)$, onde L é uma matriz $n \times n$ iden-

tificada canonicamente com uma aplicação linear ou com um ponto de de \mathbb{R}^{n^2} . Pela proposição anterior e pela hipótese de indução aplicada a F , temos que o seu fluxo $\Phi(t,y,Y) = (\varphi(t,y), D_2\varphi(t,y) \cdot Y)$ é de classe C^{k-1} em $D' = D \times \mathbb{R}^{n^2}$. Portanto, $D_2\varphi$ é de classe C^{k-1} em D . Também $D_1\varphi = f \circ \varphi$ é de classe C^{k-1} , pois f é C^k e φ é C^{k-1} . Logo, φ é de classe C^k em D . Com isso, finalizamos a demonstração do teorema global da diferenciabilidade. \square

Definição 4.1.15. *O conjunto $\gamma_p = \{\varphi(t,p) | t \in I_p\}$, isto é, a imagem da curva integral de X pelo ponto p , chama-se órbita de X pelo ponto p .*

Podemos observar que $q \in \gamma_p \Leftrightarrow \gamma_q = \gamma_p$. Se $q \in \gamma_p$, $q = \varphi(t_1, p)$ e $\varphi(t, p) = \varphi(t + t_1, p)$ e $I_p - t_1 = I_q$. Em outras palavras, podemos afirmar que duas órbitas de X coincidem ou são disjuntas. Isto significa que Δ fica decomposto numa união disjuntas de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser:

- i) Imagem biunívoca de um intervalo de \mathbb{R} .
- ii) Um ponto. $p = \gamma_p$ a órbita chama-se ponto singular.
- iii) Difeomorfa a um círculo. Nesse caso, a órbita chama-se fechada ou periódica.

onde cada caso corresponde a uma das alternativas do teorema a seguir.

Teorema 4.1.16. *Se φ_x é uma solução máxima de $x' = X(x)$ em I_x , verifica-se uma única das seguintes alternativas:*

- i) φ_x é injetiva.
- ii) $I_x = \mathbb{R}$ e φ_x é constante.

iii) $I_x = \mathbb{R}$ e φ_x é periódica, isto é, existe $\tau > 0$ tal que $\varphi_x(t + \tau) = \varphi_x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi_x(t_1) \neq \varphi_x(t_2)$ se $|t_1 - t_2| < \tau$.

Demonstração. Se φ_x não é biunívoca, $\varphi_x(t_1) = \varphi_x(t_2)$ para algum $t_1 \neq t_2$. Pelo corolário demonstrado anteriormente que afirma que uma solução regular definida no intervalo máximo e $\varphi_x(t_1) \neq \varphi_x(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$, então $I_x = \mathbb{R}$, $\varphi_x(t + c) = \varphi_x(t)$, para todo t , onde $c = t_2 - t_1 \neq 0$. Vamos provar que o conjunto $C = \{c \in \mathbb{R} | \varphi_x(t + c) = \varphi_x(t) \forall t \in \mathbb{R}\}$ é um subgrupo aditivo de \mathbb{R} que também é um subconjunto fechado de \mathbb{R} . Se $c, d \in C$, então $c + d \in C$ e $-c \in C$, pois $\varphi_x(t + c + d) = \varphi_x(t + c) = \varphi_x(t)$ e $\varphi_x(t - c) = \varphi_x(t - c + c) = \varphi_x(t)$, portanto, C é um subgrupo aditivo de \mathbb{R} . Por outro lado, se $c_n \in C$ e $c_n \rightarrow c$ temos que $c \in C$, pois

$$\begin{aligned} \varphi_x(t + c) &= \varphi_x(t + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n) = \varphi_x(\lim_{n \rightarrow \infty} (t + c_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_x(t + c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_x(t) = \varphi_x(t) \end{aligned}$$

Demonstraremos agora que todo subgrupo aditivo C de \mathbb{R} é descrito na forma $\tau\mathbb{Z}$, $\tau \geq 0$ ou então é denso em \mathbb{R} . Como $C \neq \{0\}$ e fechado, segue que $C = \mathbb{R}$ ou $C = \tau\mathbb{Z}$, $\tau > 0$. Cada uma dessas alternativas corresponde, respectivamente, ao segundo e terceiro caso do enunciado. \square

Lema 4.1.17. *Todo subgrupo aditivo $C \neq 0$ de \mathbb{R} é da forma $C = \tau\mathbb{Z}$, onde $\tau > 0$, ou C é denso em \mathbb{R} .*

Demonstração. Suponha que $C \neq \{0\}$, dessa maneira, $C \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$, onde \mathbb{R}_+ são os reais positivos, pois existe $c \in C$, $c \neq 0$, o que implica que c ou $-c$ está em $C \cap \mathbb{R}_+$. Tomemos $\tau = \inf[C \cap \mathbb{R}_+]$. Se $\tau > 0$, $C = \tau\mathbb{Z}$, pois se $c \in C - \tau\mathbb{Z}$,

existe um único $K \in \mathbb{Z}$ tal que $K\tau < c < (k+1)\tau$, portanto, $0 < c - K\tau < \tau$ e $c - K\tau \in C \cap \mathbb{R}_+$. Contradição, pois $\tau = \inf[C \cap \mathbb{R}_+]$. Se $\tau = 0$, podemos verificar que C é denso em \mathbb{R} . Dado $\varepsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, existe $c \in C$ tal que $|c - t| < \varepsilon$. Para ver isso, tomemos um $c_0 \in C \cap \mathbb{R}_+$ tal que $0 < c_0 < \varepsilon$. Todo número real t dista menos de ε de um ponto $c_0\mathbb{Z} \subseteq C$, pois este conjunto divide \mathbb{R} em intervalos de comprimentos $c_0 < \varepsilon$, com extremos nele. \square

Definição 4.1.18. *O conjunto aberto Δ , munido da decomposição em órbitas de X , chama-se retrato de fase de X . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo X , os pontos singulares são munidos da orientação trivial.*

Definição 4.1.19. *Sejam X_1, X_2 campos vetoriais definidos nos abertos de \mathbb{R}^n , Δ_1, Δ_2 , respectivamente. Diz-se que X_1 é topologicamente equivalente (respectivamente C^r) a X_2 quando existe um homeomorfismo (respectivamente um difeomorfismo de classe C^r) $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ que leva órbita de X_1 em órbita de X_2 preservando a orientação. Mais precisamente, sejam $p \in \Delta_1$ e $\gamma^1(p)$ a órbita orientada de X_1 passando por p , então $h(\gamma^1(p))$ é a órbita orientada de $\gamma^2(h(p))$ de X_2 passando por $h(p)$.*

Esta definição estabelece uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de \mathbb{R}^n . O homeomorfismo h chama-se equivalência topológica (respectivamente diferenciável) entre X_1 e X_2 .

Definição 4.1.20. *Sejam $\varphi : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $X_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ respectivamente. Dizemos que X_1 é topologicamente conjugado (respectivamente C^r -conjugado) a X_2 quando existe um homeomorfismo (respectivamente um difeomorfismo de classe C^r) $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$*

tal que $h(\varphi_1(t,x)) = \varphi_2(t, h(x))$ para todo $(t,x) \in D_1$. Neste caso, tem-se necessariamente $I_1(x) = I_2(h(x))$, onde $I_1(x)$ e $I_2(h(x))$ denotam os intervalos máximos das respectivas soluções máximas. O homeomorfismo h chama-se conjugação topológica (respectivamente C^r -conjugação) entre X_1 e X_2 .

Para entendermos melhor o que se passa, como em toda estrutura matemática, nas equações diferenciais, nos fluxos ou sistemas dinâmicos, levantamos o problema de comparar dois objetos com a mesma estrutura. A relação de conjugação é uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de \mathbb{R}^n . Uma equivalência h entre X_1 e X_2 leva ponto singular em ponto singular e órbita periódica em órbita periódica. Se h for uma conjugação, o período das órbitas periódicas também é preservado.

Lema 4.1.21. *Sejam $X_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos C^k e $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ um difeomorfismo de classe C^r . Então h é uma conjugação entre X_1 e X_2 se, e somente se,*

$$Dh(p)X_1(p) = X_2(h(p)), \forall p \in \Delta_1$$

Demonstração. Sejam $\varphi_1 : D_1 \rightarrow \Delta_1$ e $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \Delta_2$ os fluxos de X_1 e X_2 , respectivamente. Suponhamos que h satisfaz $Dh(p)X_1(p) = X_2(h(p)), \forall p \in \Delta_1$. Dado $p \in \Delta_1$, seja $\Psi(t) = h(\varphi_1(t,p))$, $t \in I_1(p)$. Então Ψ é solução do problema de Cauchy $x' = X_2(x), x(0) = h(p)$, pois

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= Dh(\varphi_1(t,p)) \frac{d\varphi_1(t,p)}{dt} = Dh(\varphi_1(t,p))X_1(\varphi_1(t,p)) \\ &= X_2(h(\varphi_1(t,p))) = X_2(\Psi(t)) \end{aligned}$$

Logo, $h(\varphi_1(t,p)) = \varphi_2(t, h(p))$. Suponhamos que h seja uma C^r -conjugação.

Dado $p \in \Delta_1$, temos que $h(\varphi_1(t,p)) = \varphi_2(t,h(p))$, $t \in I_1(p)$, intervalo contendo 0. Se derivarmos esta expressão com relação a t em $t = 0$, obtemos:

$$Dh(p)X_1(p) = X_2(h(p)), \forall p \in \Delta_1$$

□

Definição 4.1.22. *Sejam $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^k , $k \geq 1$, $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f : A \rightarrow \Delta$ de classe C^r chama-se seção transversal local de X (de classe C^r) quando, para todo $a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $X(f(a))$ geram o espaço \mathbb{R}^n . Seja $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida. Se $f : A \rightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo, dizemos que Σ é uma seção transversal de X .*

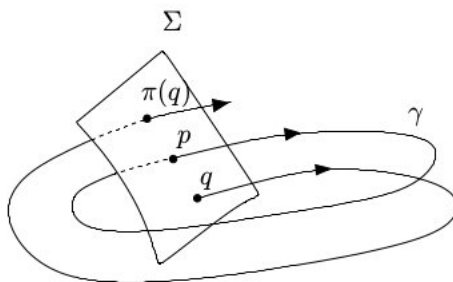


Figura 4.2: Seção transversal
 FONTE: SOTOMAYOR, 2011, p.108.

Para deixar mais claro a compreensão, a $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \Delta \subseteq \mathbb{R}^n$, sua derivada $Df(a) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow L(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^n)$ e $\Sigma = f(A) \subseteq \mathbb{R}^n$. Agora voltaremos ao objetivo principal desta seção, que é o teorema do fluxo tubular. Vamos enunciar o teorema.

Teorema 4.1.23 (Teorema do fluxo tubular). *Seja p um ponto não singular de $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k e $f : A \rightarrow \Sigma$ uma seção transversal local de X de classe C^k com $f(0) = p$. Então existe uma vizinhança V de p em Δ e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^k , onde $\varepsilon > 0$ e B é uma bola aberta em \mathbb{R}^{n-1} de centro na origem $0 = f^{-1}(p)$ tal que*

i) $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$.

ii) h é uma C^k -conjugação entre $X|_V$ e o campo constante $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

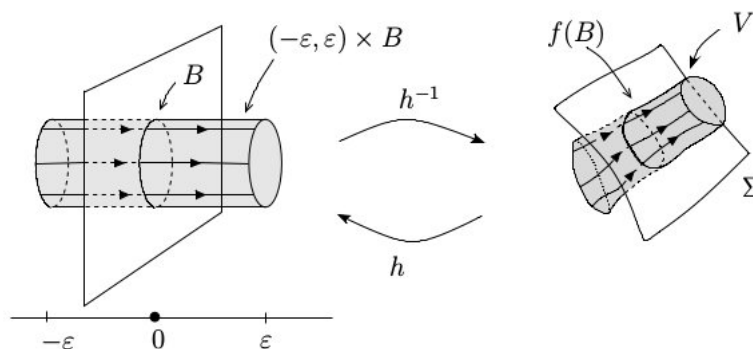


Figura 4.3: Teorema do fluxo tubular
 FONTE: SOTOMAYOR, 2011, p.104.

Demonstração. Seja $\varphi : D \rightarrow \Delta$ o fluxo do campo vetorial X . Vamos definir uma F que aplica linhas paralelas ao eixo t em curvas integrais de X , $F : D_A = \{(t, u) | (t, f(u)) \in D\} \rightarrow \Delta$ definida por $F(t, u) = \varphi(t, f(u))$. Temos que mostrar que F é um difeomorfismo local em $0 = (0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Utilizando o teorema

da função inversa, é suficiente provar que $DF(0)$ é um isomorfismo. Sabemos que

$$D_1F(0) = \left. \frac{d\varphi(t, f(0))}{dt} \right|_{t=0} = X(\varphi(0, p)) = X(p)$$

[!htp] e $D_jF(0) = D_{j-1}f(0)$ para todo $j = 2, \dots, n$, pois $\varphi(0, f(u)) = f(u) \forall u \in A$. Dessa maneira, os vetores $D_jF(0), j = 1, \dots, n$, geram o \mathbb{R}^n , observamos que agora nosso índice varia de $j = 1, \dots, n$, isso ocorre porque acrescentamos também a derivada da φ com respeito a t . Sendo assim, $DF(0)$ é um isomorfismo. Pelo teorema da função inversa, sabemos que existem $\varepsilon > 0$ e uma bola B em \mathbb{R}^{n-1} com centro na origem 0 tais que $F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B}$ é um difeomorfismo sobre o aberto $V = F((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$. Tomemos $h = (F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B})^{-1}$, se analisarmos bem, temos que $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$, pois $F(0, u) = f(u), \forall u \in B$, isso demonstra a primeira parte do teorema. Por outro lado, h^{-1} conjuga Y e X , com isso temos que:

$$Dh^{-1}(t, u) \cdot Y(t, u) = DF(t, u) \cdot (1, 0, \dots, 0) = D_1F(t, u)$$

$$X(\varphi(t, f(u))) = X(F(t, u)) = X(h^{-1}(t, u))$$

para todo $(t, u) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$, assim terminamos a demonstração. \square

Corolário 4.1.24. *Seja Σ a seção transversal de X . Para todo ponto $p \in \Sigma$ existem $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^n e uma função $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tais que $\tau(V \cap \Sigma) = 0$ e*

i) para todo $q \in V$, a curva integral $\varphi(t, q)$ de $X|_V$ é definida e biunívoca em $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$.

ii) $\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$ é o único ponto onde $\varphi(\cdot, q)|_{J_q}$ intercepta a seção Σ . Em particular, $q \in \Sigma \cap V$ se e só se $\tau(q) = 0$

iii) $\xi : V \rightarrow \Sigma$ é de classe C^k e $D\xi(q)$ é sobrejetiva para todo $q \in V$. Além disso, $D\xi(q) \cdot v = 0$ se e só se v é colinear a $X(q)$, isto é, $v = \alpha X(q)$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

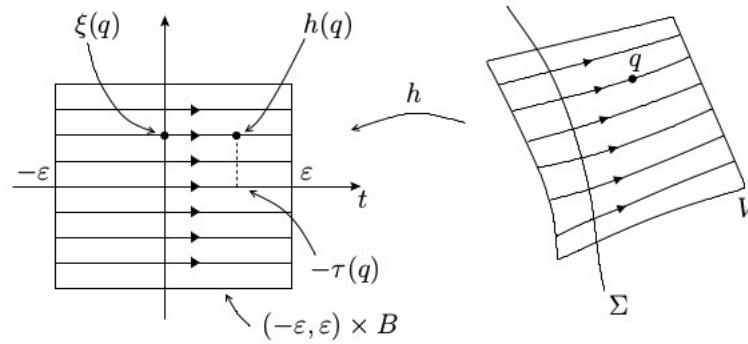


Figura 4.4: Seção transversal
 FONTE: SOTOMAYOR, 2011, p.105.

Demonstração. Suponha h, V e ε como no teorema do fluxo tubular. Tomemos $h = (-\tau, \xi)$, sabemos que o campo Y do teorema do fluxo tubular satisfaz todas as afirmações do corolário. Como h é uma C^k -conjugação, concluímos que X satisfaz estas afirmações. \square

Observamos que o teorema do fluxo tubular tem caráter local, nem todo campo sem singularidades no plano admite um homeomorfismo que trivialize suas órbitas. Um exemplo é o fluxo de Reeb, $X = (e^y(x^2 - 1), -2xe^y)$, o Hamiltoniano de $f(x,y) = e^y(x^2 - 1)$. Vejamos a figura:

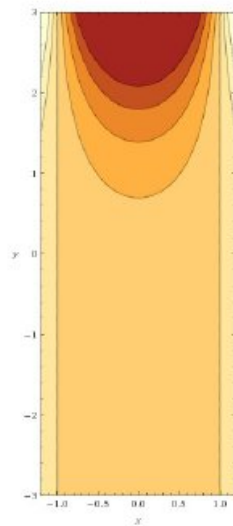


Figura 4.5: Fluxo de Reeb

Capítulo 5

A transformação de Poincaré

5.1 Aplicação do teorema da função implícita a transformação de Poincaré

Se p é um ponto regular de um campo vetorial X , de classe C^k , $k \geq 1$, pelo teorema do fluxo tubular, sabemos que existe um difeomorfismo de classe C^k que conjuga X , numa vizinhança de p com o campo constante $Y = (1, 0, \dots, 0)$. Dessa maneira, dois campos X e Z são localmente C^k -conjugados em torno de pontos regulares. Assim, o conhecimento qualitativo local das órbitas de um campo vetorial em torno de pontos regulares é satisfatório, pois existe apenas uma classe de conjugação diferenciável local. Se p é um ponto singular, a situação é mais delicada, pois mesmo nos sistemas lineares, já se apresentam várias classes diferentes de conjugação diferenciável. Em \mathbb{R}^2 temos, o centro, a sela, o nó, entre outros. Estudaremos os pontos singulares hiperbólicos e as órbitas periódicas.

Definição 5.1.1. *Um ponto singular p de um campo vetorial X de classe C^k ,*

$k \geq 1$, chama-se hiperbólico se todos os autovalores de $DX(p)$ tem parte real diferente de zero.

Podemos ver que essa definição não depende da classe de conjugação local de C^2 de X em p . Sejam X e Y campos de classe C^k , $k \geq 2$ e h uma C^2 -conjugação entre X e Y em torno de uma singularidade de p_0 de X , $q_0 = h(p_0)$ é uma singularidade de Y . Sabemos que h é uma C^2 -conjugação entre X e Y se, e somente se, $Dh(p)X(p) = Y(h(p))$, para todo p no domínio do campo X . Significa que $Y = Dh \circ h^{-1} \cdot X \circ h^{-1}$, temos que

$$DY(h(p)) = D^2h(p)Dh(p)X(p) + Dh(p)DX(p)Dp$$

sabemos que $p = h^{-1}(q)$, ou seja $h(p) = q$, dessa maneira temos:

$$DY(q) = D^2h(h^{-1}(q))Dh^{-1}(q)X(h^{-1}(q)) + Dh(h^{-1}(q))DX(h^{-1}(q))Dh^{-1}(q).$$

Portanto,

$$DY(q_0) = Dh(p_0)DX(p_0)[Dh(p_0)]^{-1}.$$

Definição 5.1.2. *O número de autovalores de $DX(p)$ que tem parte real menor que 0 chama-se índice de estabilidade de X em p .*

Assim, se temos dois campos C^2 -conjugados em torno de uma singularidade hiperbólica, ambos campos possuem o mesmo índice de estabilidade.

Teorema 5.1.3 (Teorema de Hartman-Grobman). *Sejam $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 e p um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças W de p em Δ e V de 0 em \mathbb{R}^n tais que $X|_W$ é topologicamente conjugado a $DX(p)|_V$.*

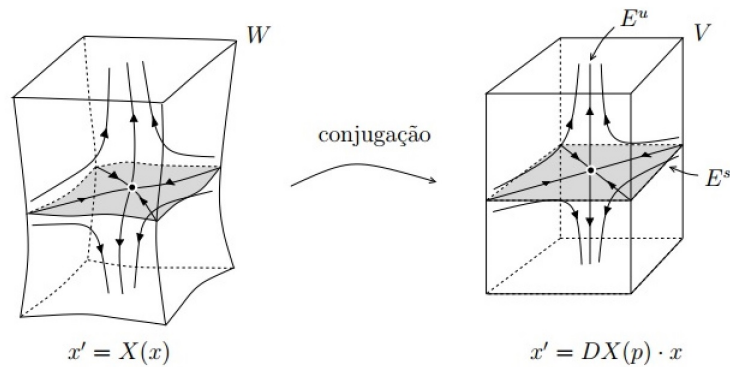


Figura 5.1: Teorema de Hartman-Grobman

Sejam $\varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $X_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ respectivamente. Dizemos que dois campos são topologicamente conjugados, quando existe um homeomorfismo $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ tal que $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$ para todo $(t, x) \in D_1$. O homeomorfismo h chama-se conjugação topológica entre X_1 e X_2 . Neste texto não faremos a demonstração do teorema Hartman-Grobman, teremos como objetivo de agora em diante, mostrar

que a transformação de Poincaré é um difeomorfismo de classe C^k .

A transformação de Poincaré associada a uma órbita fechada γ de um campo vetorial é um difeomorfismo Π que descreve o comportamento do campo numa vizinhança de γ . Seja $\gamma = \{\varphi(t,p) | 0 \leq t \leq \tau_0\}$ uma órbita periódica de período τ_0 de um campo X de classe C^k , $k \geq 1$, definido em $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Seja Σ uma seção transversal a X em p , como o fluxo φ de X é contínuo, para todo ponto $q \in \Sigma$ próximo de p a trajetória $\varphi(t,q)$ permanece próxima de γ , com t em um intervalo compacto fixado, por exemplo $[0, 2\tau_0]$. Vamos definir $\Pi(q)$ como primeiro ponto onde esta órbita, partindo de q , volta a interceptar novamente a seção Σ . Seja Σ_0 o domínio de Π , $p \in \Sigma_0$ e $\Pi(p) = p$. Várias propriedades do retrato de fase de X perto de γ se refletem em Π . As órbitas periódicas de X vizinhas de γ correspondem aos pontos periódicos de Π que são pontos de $q \in \Sigma_0$ para os quais $\Pi^n(q) = q$ para algum inteiro $n \geq 1$. O comportamento assintótico das órbitas de X perto de γ também é descrito por Π , dessa maneira, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^n(q) = p$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t,q), \gamma) = 0$, onde $d(\varphi(t,q), \gamma) = \inf\{|\varphi(t,q) - r|, r \in \gamma\}$.

Definição 5.1.4. *A órbita fechada γ é um atrator periódico, (ou orbitalmente estável) quando o $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t,q), \gamma) = 0$ para todo q numa vizinhança de γ .*

A seção Σ é uma hipersuperfície ou uma variedade $(n-1)$ -dimensional do aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Podemos supor que a variedade Σ é um disco de um subespaço vetorial ou afim de \mathbb{R}^n . Agora vamos demonstrar que a transformação de Poincaré é um difeomorfismo de classe C^k , para isso vamos utilizar o teorema da função inversa.

Teorema 5.1.5. *Seja $\Pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ a transformação de Poincaré, Π é um difeomorfismo de classe C^k sobre sua imagem Σ_1 .*

Demonstração. Seja Σ uma seção transversal de X . Para todo o ponto $p \in \Sigma$

existem $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^n . Como $\varphi(\tau_0, p) = p$, existe uma vizinhança Σ_0 de p em Σ tal que $\varphi(\tau_0, q) \in V$ para todo $q \in \Sigma_0$. Seja uma $\xi : V \rightarrow \Sigma$, de modo que $\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$ é o único ponto onde $\varphi(\cdot, q)|_{J_q}$ intercepta a seção Σ , onde $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$. Sabemos que $q \in \Sigma \cap V$ se e só se $\tau(q) = 0$. Agora definimos a transformação de Poincaré como $\Pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$, $\Pi(q) = \xi(\varphi(\tau_0, q))$, uma outra expressão para Π é $\Pi(q) = \varphi(\tau_0 + \tau(\varphi(\tau_0, q)), q)$, onde $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ é o tempo $\tau(x)$ que leva a órbita passando por x em V para interceptar Σ , já sabemos que τ é de classe C^k . Como a transformação de Poincaré é definida em função do fluxo gerado pelo campo, que é de classe C^k e da função τ que também é de classe C^k . Concluimos que Π é de classe C^k , ou seja, Π tem mesma classe de diferenciabilidade do campo X . Agora basta demonstrar que a inversa da transformação de Poincaré é de classe C^k . Seja $\Pi^{-1} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$ é definida apenas mudando o sentido do campo vetorial, ou seja, $-X$, definimos a transformação de maneira análoga, portanto Π^{-1} é de classe C^k . Logo, a transformação de Poincaré é um difeomorfismo de classe C^k sobre sua imagem. □

Capítulo 6

O teorema da função implícita aplicado à geometria

6.1 Geometria diferencial

Neste capítulo introduziremos a noção de uma superfície regular, a grosso modo, uma superfície regular em \mathbb{R}^3 é obtida pegando pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si, de tal modo que a superfície obtida não apresente pontas, arestas ou auto-interseções. Dessa maneira, podemos definir um plano tangente nos pontos dessa superfície. Assumimos que temos um sistema de coordenadas cartesianas $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e consideramos uma função

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

onde as variáveis (u,v) que variam em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $(u,v) \in U$, $X(u,v)$ determina um ponto de \mathbb{R}^3 . Chamaremos de S o subconjunto de

\mathbb{R}^3 formado pelos pontos $X(u,v)$. Como dissemos anteriormente, restringiremos nosso estudo a superfícies que em cada ponto admitem um plano tangente.

Definição 6.1.1. *Uma superfície parametrizada regular ou simplesmente uma superfície é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 , tal que*

i) X é diferenciável de classe C^∞ .

ii) Para todo $q = (u,v) \in U$ a diferencial de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

As variáveis (u,v) são os parâmetros da superfície. O subconjunto S de \mathbb{R}^3 obtido pela aplicação X é denominado *traço* de X . A aplicação $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ é diferenciável de classe C^∞ quando as funções x,y,z tem derivadas parciais de todas as ordens contínuas. Existem formas diferentes de expressar a condição do segundo item da definição acima. Sejam $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 e $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ a base canônica de \mathbb{R}^3 . Para cada $q = (u,v) \in U$ sabemos que a matriz associada a dX_q nas bases canônicas é a matriz jacobiana

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \end{bmatrix}$$

onde $dX_q(e_1) = (\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u})$ e $dX_q(e_2) = (\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v})$, denotando esses dois vetores por X_u e X_v respectivamente, observamos que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) dX_q é injetora.

ii) A matriz $J(u,v)$ tem posto 2.

iii) Os vetores X_u e X_v são linearmente independentes.

iv) O produto vetorial $X_u \wedge X_v \neq 0$

Se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada, então fixado um ponto $(u_0, v_0) \in U$, as curvas

$$u \mapsto X(u, v_0)$$

$$v \mapsto X(u_0, v)$$

são chamadas *curvas coordenadas* de X em (u_0, v_0) . Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ são vetores tangentes nas curvas coordenadas.

Exemplo 6.1.2. *Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ em um ponto \mathbb{R}^3 , $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$ vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^3 . Consideremos a aplicação que a cada ponto $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, associamos $X(u, v) = P_0 + ua + vb$, ou seja*

$$X(u, v) = (x_0 + ua_1 + vb_1, y_0 + ua_2 + vb_2, z_0 + ua_3 + vb_3)$$

X é uma superfície parametrizada regular, pois X é diferenciável e os vetores $X_u \equiv a$ e $X_v \equiv b$ são linearmente independentes. A aplicação X descreve um plano em \mathbb{R}^3 que passa pelo ponto P_0 e é ortogonal ao vetor $a \wedge b$. As curvas de X descrevem retas do plano paralelas aos vetores a e b respectivamente.

Proposição 6.1.3. *Se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real diferenciável de classe C^∞ , onde $(u, v) \in U$ é aberto de \mathbb{R}^2 , então a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma superfície parametrizada regular, que descreve o gráfico da função f .*

Demonstração. A diferenciabilidade de X decorre do fato de que as funções coordenadas de X são diferenciáveis. A matriz jacobiana de X tem posto 2 para

todo $(u,v) \in U$ e é igual a

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 6.1.4. *Seja a função $f(u,v) = u^2 + v^2$ então $G(f)$ é um parabolóide circular com parametrização $X(u,v) = (u,v,u^2 + v^2)$ tal que $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. O gráfico de f é esboçado da seguinte maneira:*

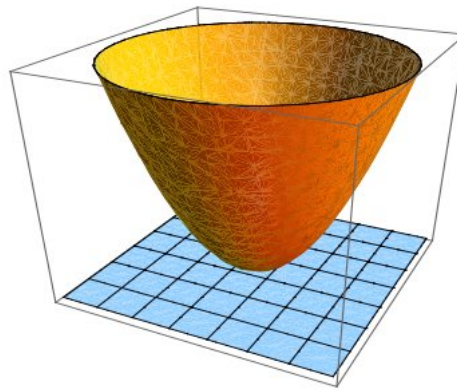


Figura 6.1: Parabolóide

Exemplo 6.1.5. *O cone não é uma superfície regular na origem. De fato, consideremos o cone parametrizado por $X(u,v) = (u,v,\sqrt{u^2 + v^2})$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Sabemos que:*

$$\frac{\partial X(u,v)}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)$$

e

$$\frac{\partial X(u,v)}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right).$$

Essas derivadas parciais não existem na origem, portanto o cone de duas folhas não é regular em $(0,0)$.

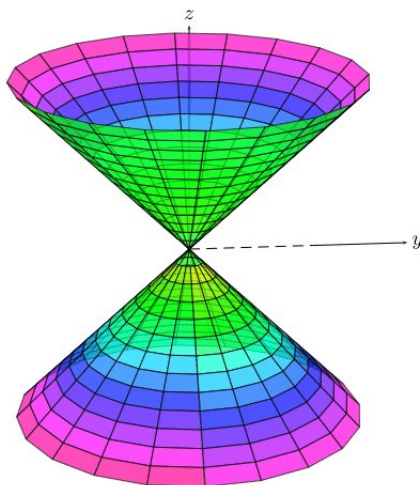


Figura 6.2: Cone de duas folhas

Um outro exemplo de superfície que não é regular, são os subconjuntos que se autointerceptam, neles não podemos definir um plano tangente. Vejamos a figura:

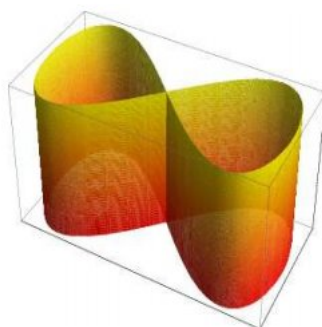


Figura 6.3: Superfície que se autointercepta

Proposição 6.1.6. *Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Consideremos o conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | F(x,y,z) = c\}$, onde c é um número real. Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ é tal que $(\frac{\partial F(P_0)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F(P_0)}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F(P_0)}{\partial z})^2 \neq 0$ então, o conjunto dos pontos $(x,y,z) \in S$ suficientemente próximos de P_0 , é o traço de uma superfície parametrizada regular.*

Demonstração. Suponhamos que $\frac{\partial F(P_0)}{\partial z} \neq 0$, podemos olhar para a F da seguinte maneira, $F : A \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, fixados $(a,b) \in A$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(a,b) = c$, então pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança U de $a = (x_0, y_0)$ em \mathbb{R}^2 e uma única função $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $\phi(x_0, y_0) = z_0$ e para todo $(x,y) \in U$, $F(x,y, \phi(x,y)) = c$. Dessa maneira, a aplicação

$$X(x,y) = (x,y, \phi(x,y)), (x,y) \in U$$

é uma superfície parametrizada regular como demonstramos na proposição anterior. O traço dessa superfície descreve pontos de S próximos de P_0 . Analogamente, supomos que $\frac{\partial F(P_0)}{\partial x} \neq 0$, segue do teorema da função implícita que existe uma aplicação diferenciável $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(y_0, z_0) = x_0$, para todo $(y,z) \in U$ tal que $F(\phi(y_0, z_0), y_0, z_0)$ basta olhar para a F da seguinte forma $F : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Por último supomos que $\frac{\partial F(P_0)}{\partial y} \neq 0$, novamente, pelo teorema da função implícita, sabemos que existe uma $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x_0, z_0) = y_0$, para todo $(x,z) \in U$ tal que $F(x_0, \phi(x_0, z_0), z_0)$. \square

Referências Bibliográficas

CARMO, Manfredo Perdigão. Differential geometry of curves and surfaces. Englewood: Prentice-Hall; 1976.

CRUZ, Germán Lozada. A simple application of the implicit function. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XIX, No 1. 6 p.

KRANTZ, Steven G; PARKS, Harold R. The implicit function theorem: history, theory, and applications. Boston: Birkhauser; 2002.

KENENBLAT, Keti. Introdução à geometria diferencial. 1ª reimpressão. Brasília: Editora Universidade de Brasília; 1990.

LIMA, Elon Lages. Análise no espaço R^n . 2ª edição. Rio de Janeiro: IMPA; 2013.

LIMA, Elon Lages. Curso de análise vol. 2 . 11ª edição. Rio de Janeiro: IMPA; 2014.

LIMA, Elon Lages. Espaços métricos. 4ª edição. Rio de Janeiro: IMPA; 2011.

OLIVEIRA, Oswaldo Rio Branco. The implicit and inverse function theorems: easy proofs. 2012. São Paulo. Universidade de São Paulo. 10 p.

PIMENTEL, Felipe Rogério. Pontos heteróclinos de um bilhar elíptico pertu-

bado. 1993. 57 p. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. 1993.

RUIZ, José M. Mazón. Cálculo diferencial, teoría y problemas. Universitat de València.

SOARES, Márcio Gomes. Cálculo em uma variável complexa. 5ª edição. Rio de Janeiro: IMPA; 2012.

SOTOMAYOR, Jorge. Equações diferenciais ordinárias. 1ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011. - (Coleção textos universitários do IME - USP, v.3).