UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

SOLUÇÃO DE VISCOSIDADE DA EQUAÇÃO EIKONAL EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Santos Francisco Quezada Castillo

Belo Horizonte - MG
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Santos Francisco Quezada Castillo

Orientador:
Prof. Rodney Josué Biezuner

Solução de Viscosidade da Equação Eikonal em Variedades Riemannianas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEx) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
Novembro - 2016

Agradecimentos

- Primeiramente a Deus pela oportunidade e força concedida para atravessar as dificuldades que não foram poucas e acreditar que o êxito seria possível embora muitas vezes parecesse o contrário.

- Aos meus pais, Elsa e Santos, e minha avó, Sabina, que me deram o suporte necessário para o início da minha carreira escolar, estimulando e apoiando sempre que necessitei.

- Ao professor Rodney Josué Biezuner, pela orientação, dedicação e apoio.

- Aos professores do departamento de matemáticas da UFMG, pela contribuição na minha formação acadêmica.

- Aos colegas do mestrado, que fizeram parte desta etapa da minha vida.

- À CAPES pelo apoio financeiro, que é de muita importância.

Resumo

O objetivo principal desta dissertação é estudar existência e unicidade de soluções de viscosidade da equação eikonal

$$\begin{cases} ||\nabla u(x)||_x = 1, & \text{se} \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{sobre} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

em que Ω é um subconjunto aberto e limitado de uma variedade Riemanniana M.

Para isso, primeiramente, apresentamos algumas noções básicas como: variedades de Banach-Finsler e variedade Finsler uniformemente bumpable. Alem disso, apresentamos uma demonstração detalhada de que toda variedade Finsler no sentido de Neeb-Upmeier fraca uniforme (em particular, toda variedade Riemanniana) é uniformemente bumpable, como é discutido por Jiménez e Sanchez [11].

Em seguida, estudamos as noções de cálculo subdiferencial em variedades Riemanianas e apresentamos uma demonstração detalhada de alguns resultados obtidos por Azagra, Ferrera e López [1], dentre os quais merecem destaque o principio variacional suave em variedades Riemannianas, o principio de minimização perturbada para a diferença de duas funções e a desigualdade do valor médio de Deville. Finalmente, aplicamos esses resultados para provar existência e unicidade de soluções de viscosidade da equação eikonal.

Palavras-chave Variedades Finsler, Variedade Riemanniana, uniformemente bumpable, Subdiferencial, Solução de viscosidade, Equação eikonal.

Abstract

The aim of this dissertation is to study the existence and uniqueness of viscosity solutions of the eikonal equation

$$\begin{cases} ||\nabla u(x)||_x = 1, & \text{if} \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{for all} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

where the Ω is a bounded open subset of a riemannian manifold M.

For this, firstly, We present some basic notions such as: Banach-Finsler Manifolds and uniformly bumpable Finsler manifold. Moreover, we present a detailed proof that every Finsler manifold in the sense of Neeb-Upmaier K-weak uniform (in particular, every riemannian manifold) is uniformly bumpable, as discussed by Jiménez and Sanchez [11].

Next, we study the notions of subdifferential calculus in riemannian manifolds and we present a detailed proof of some results obtained by Azagra, Ferrera and López [1], among which the smooth variational principle on riemannian manifolds, the perturbed minimization principle for the difference of two functions and the Deville's mean value inequality. Finally, we apply these results to show existence and uniqueness of viscosity solutions to eikonal equation.

Key-words: Finsler manifold, Riemannian manifold, Uniformly bumpable, Subdifferential, Viscosity solution, Eikonal equation.

Sumário

Introdução

As equações de Hamilton-Jacobi, são equações não lineares de primeira ordem que surgiram naturalmente na mecânica clássica mas que foram encontrando aplicações em muitas outras áreas, dentro e fora da matemática, tendo vindo a ter importância em problemas de controle ótimo [2], processamento de imagens e visão computacional, teoria dos jogos, ótica geométrica, etc.

As equações de Hamilton-Jacobi estacionárias de primeira ordem são equações do tipo

$$H(x, \nabla u(x), u(x)) = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega, \tag{1}$$

onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada chamada de Hamiltoniano.

Consideremos o problema de Cauchy para a equação de Hamilton-Jacobi estacionária

$$\begin{cases} H(x, \nabla u(x), u(x)) = 0, & \text{em} \quad x \in \Omega, \\ u(x) = u_0(x), & \text{sobre} \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$, $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $u_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas dadas.

Definição 0.1 *Dizemos que uma função $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ é solução fraca de (2) se u é Lipschitz contínua em $\overline{\Omega}$ e u satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi em quase toda parte.*

Exemplo 0.2 *Consideremos o problema de Dirichlet para a equação eikonal unidimensional*

$$\begin{cases} |u'(x)| = 1, & se \quad x \in (-1, 1) \\ u(x) = 0, & se \quad x \in \{-1, 1\}. \end{cases} \tag{3}$$

Este problema não tem solução clássica. De fato, se $u \in C^1((-1,1))$, o teorema de Rolle implica que existe $\xi \in (-1,1)$ tal que $u'(\xi) = 0$, o que contradiz a condição de que $|u'(x)| = 1$ para todo $x \in (-1,1)$. No entanto, toda função $u_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 - |x| \\ u_j(x) &= \frac{1}{2^j} - \left|\frac{1}{2^j} - u_{j-1}(x)\right|, \qquad \textit{para} \qquad j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

é solução fraca de (3).

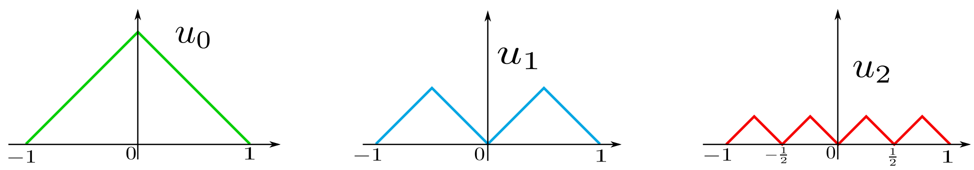


Figura 1: Soluções Lipschitz contínuas da equação eikonal 1-D.

Como já vimos no problema da equação eikonal unidimensional, é bem conhecido que o problema (2), em geral, é mal colocado. Para lidar com esse problema, no inicio dos anos 1980 Michael G. Crandall e Pierre-Louis Lions introduziram o conceito de solução de viscosidade [4] e [5].

Definição 0.3 *Seja $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua*

(1) *Diz-se que u é uma subsolução de viscosidade da equação (2) se:*

(a) *$u \leq u_0$ em $\partial\Omega$ e*

(b) *para todo $x_0 \in \Omega$ e cada $\varphi \in C^1(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tem máximo local em x_0 vale:*

$$H(x_0, \nabla\varphi(x_0), u(x_0)) \leq 0.$$

(2) *Diz-se que u é uma supersolução de viscosidade da equação (2) se:*

(a) *$u \geq u_0$ em $\partial\Omega$ e*

(b) *para todo $x_0 \in \Omega$ e cada $\varphi \in C^1(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tem mínimo local em x_0 vale:*

$$H(x_0, \nabla\varphi(x_0), u(x_0)) \geq 0.$$

(3) *Diz-se que u é uma solução de viscosidade se for ao mesmo tempo subsolução e supersolução de viscosidade.*

Equivalentemente, veja [2],

Definição 0.4 *Seja* $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua.*

(1) *Diz-se que u é uma subsolução de viscosidade da equação (2) se:*

  (a) $u \leq u_0$ *em* $\partial\Omega$ *e*

  (b) *para cada* $x \in \Omega$ *e* $p \in D^+u(x)$ *temos* $H(x, p, u(x)) \leq 0$.

(2) *Diz-se que u é uma supersolução de viscosidade da equação (2) se:*

  (a) $u \geq u_0$ *em* $\partial\Omega$ *e*

  (b) *para cada* $x \in \Omega$ *e* $p \in D^-u(x)$ *temos* $H(x, p, u(x)) \geq 0$.

(3) *Diz-se que u é uma solução de viscosidade se for ao mesmo tempo subsolução e supersolução de viscosidade,*

onde

$$D^+u(x) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \limsup_{y \to x} \frac{u(y) - u(x) - p \cdot (y - x)}{|y - x|} \leq 0 \right\}$$

e

$$D^-u(x) = \left\{ q \in \mathbb{R}^n : \liminf_{y \to x} \frac{u(y) - u(x) - q \cdot (y - x)}{|y - x|} \geq 0 \right\}.$$

Os conjuntos $D^+u(x)$ *e* $D^-u(x)$ *são chamados de superdiferencial e subdiferencial de* u *em* x*, respectivamente.*

Essas definições são consistentes com a noção de solução clássica. De fato, suponhamos que $u \in C^1(\Omega)$ é solução de (2), se $u - \varphi$ atinge um máximo ou um mínimo local em x_0, temos que $\nabla u(x_0) = \nabla\varphi(x_0)$. Isto implica que $H(x_0, \nabla u(x_0), u(x_0)) = 0$, assim u é solução de viscosidade de (2).

Exemplo 0.5 *A função $u(x) = 1 - |x|$ é solução de viscosidade da equação eikonal unidimensional (3).*

Observemos que se $u - \varphi$ atinge um máximo ou um mínimo local em $x_0 \neq 0$, então $u'(x_0) = \varphi'(x_0)$, logo $|u'(x_0)| = |\varphi'(x_0)| = 1$. Portanto só temos que verificar no ponto $x_0 = 0$ que é o único ponto onde u não é de classe C^1.

- *Seja $\varphi \in C^1(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ atinge um mínimo local em 0, isto é,*

  $$(u - \varphi)(0) \leq (u - \varphi)(x) \quad \textit{para todo } x \in B(0, \varepsilon),$$

  logo

  $$-1 = u'(0^+) \leq \varphi'(0) \leq u'(0^-) = 1,$$

  ou seja, $|\varphi'(0)| \leq 1$. Assim u é subsolução de viscosidade de (3).

- *Seja $\varphi \in C^1(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ atinge um máximo local em 0, isto é,*

  $$(u - \varphi)(x) \leq (u - \varphi)(0) \quad \textit{para todo } x \in B(0, \varepsilon),$$

  logo

  $$1 = u'(0^-) \leq \varphi'(0) \leq u'(0^+) = -1,$$

  o que é uma contradição, então não existe $\varphi \in C^1(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ atinge um máximo local em 0. Logo, não há nada que provar na definição de supersolução.

Portanto, u é solução de viscosidade de (3).

A noção de solução de viscosidade pode ser estendido ao cenário das equações de Hamilton-Jacobi estacionárias em variedades Riemannianas [1],[17]. Mais precisamente, para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} H(x, \nabla u(x), u(x)) = 0, & \text{se} \quad x \in \Omega, \\ \qquad\qquad u(x) = u_0, & \text{sobre} \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{EHJ}$$

onde Ω é um subconjunto de uma variedade Riemanniana M, $H : T^*\Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e T^*M denota o fibrado cotangente de M.

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade da solução de viscosidade da equação eikonal

$$\begin{cases} ||\nabla u(x)||_x = 1, & \text{se} \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{sobre} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{EE}$$

onde Ω é um subconjunto aberto e limitado de uma variedade Riemanniana M. Mais precisamente, provaremos que a única solução de viscosidade de (EE) é a função $d(\cdot, \partial\Omega) : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, \partial\Omega) := \inf_{y \in \partial\Omega} d_M(x, y),$$

onde d_M é a métrica intrínseca na variedade Riemanniana M.

A equação eikonal tem aplicações nas mais diversas áreas da computação gráfica e visão computacional, por exemplo na aproximação numérica de geodésicas [19] e [20].

Este trabalho está organizado em cinco capítulos.

No Capítulo 1, apresentamos as variedades Finsler no sentido de Neeb-Upmeier (uniforme e fraca uniforme) e no sentido de Palais que generalizam as variedades Riemannianas. Neste capítulo estudamos várias propriedades desta classe de variedades e algumas relações entre elas, também obtemos algumas desigualdades do valor médio e um resultado sobre a existência de cartas bi-Lipschitz. Além disso, provaremos que toda variedade Finsler no sentido de Neeb-Upmeier fraca uniforme é uniformemente bumpable. Em particular, toda variedade Riemanniana é uniformemente bumpable. Esse resultado será utilizado no capítulo 3 para provar o principio variacional suave em variedades Riemannianas.

No Capítulo 2, apresentamos os conceitos básicos da geometria Riemanniana que serão utilizados no restante do trabalho.

No Capítulo 3, apresentamos o principio variacional suave em variedades Riemannianas que é uma extensão natural do principio variacional de Deville-Godefroy-Zizler em espaços de Banach [8],[9].

Teorema 0.6 (Principio variacional suave de Deville - Godefroy - Zizler) *Seja X um espaço de Banach que admite uma função bump lipschitziana de classe C^1. Seja $f : X \longrightarrow$*

$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *uma função própria, semicontínua inferiormente e limitada inferiormente. Então, dado* $\delta > 0$*, existe uma função* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *com derivada limitada e um ponto* $x_0 \in X$ *tal que*

(1) $f - g$ *atinge um mínimo forte em* X *no ponto* x_0*;*

(2) $||g||_\infty \leq \delta$*,* $||g'||_\infty \leq \delta$*.*

No capítulo 4, apresentamos as definições de subdiferencial e superdiferencial de funções definidas sobre variedades Riemannianas, incluindo uma caracterização local da subdifenciabilidade através de cartas, bem como as propriedades elementares da subdiferencial com respeito à soma e a composição de funções. Neste capítulo apresentamos dois resultados que desempenham um papel crucial na prova do teorema de existência e unicidade da solução de viscosidade da equação eikonal:

- O principio de minimização perturbada para a diferença de funções em variedades Riemannianas completas, com raio de injetividade positivo e uniformemente localmente convexas (veja o Teorema 4.13).

- A desigualdade do valor médio de Deville para funções definidas sobre variedades Riemannianas (veja o Teorema 4.18), que é uma generalização da desigualdade do valor médio de Deville para funções definidas sobre um espaço de Banach [7].

No capítulo 5, apresentamos o conceito de solução de viscosidade da equação de Hamilton-Jacobi e provamos o teorema de existência e unicidade da solução de viscosidade da equação eikonal (EE).

Capítulo 1

Variedades de Banach e Finsler

1.1 Diferenciabilidade em Espaços de Banach

Definição 1.1 *Sejam $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ espaços normados, $f : U \subset X \longrightarrow Y$ onde U é um aberto de X e $x_0 \in X$. Dizemos que f é Fréchet diferenciável no ponto $x_0 \in X$ se existe uma aplicação linear e contínua $L : X \longrightarrow Y$ tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle L, h \rangle||_Y}{||h||_X} = 0.$$

Denotamos esta aplicação linear L por $f'(x_0)$.

Definição 1.2 *Sejam $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ espaços normados, $f : U \subset X \longrightarrow Y$ onde U é um aberto de X e $x_0 \in X$. Dizemos que f é Gâteaux diferenciável no ponto $x_0 \in X$ se existe uma aplicação linear e contínua $A : X \longrightarrow Y$ tal que para todo $h \in X$ vale*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = Ah.$$

A aplicação linear A é chamada de diferencial de Gâteaux de f em x_0 e será denotada por $f'_G(x_0)$.

Proposição 1.3 *Se $f : U \subset X \longrightarrow Y$ é Fréchet diferenciável também é Gâteaux diferenciável. Se $f : U \subset X \longrightarrow Y$ é Gâteaux diferenciável e $f'_G : U \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ é contínua em x_0, então f é Fréchet diferenciável e $f'(x_0) = f'_G(x_0)$.*

1.2 Variedades de Banach

Definição 1.4 *Sejam M um espaço topológico e X um espaço de Banach. Um atlas de classe C^k para M modelado em X é uma família de pares $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ com as seguintes propriedades:*

(1) *$\{U_\alpha\}_\alpha$ é uma cobertura aberta para M, isto é, $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$,*

(2) *φ_α é um homeomorfismo de U_α sobre um subconjunto aberto de X,*

(3) *Para todo par de índices α, β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a aplicação de transição*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é um difeomorfismo de classe C^k.

Cada aplicação φ é chamada uma carta para uma vizinhança de M.

*Um espaço topológico M com um atlas de classe C^k modelado sobre um espaço de Banach X é chamado de **variedade de Banach** de classe C^k **modelada sobre** X.*

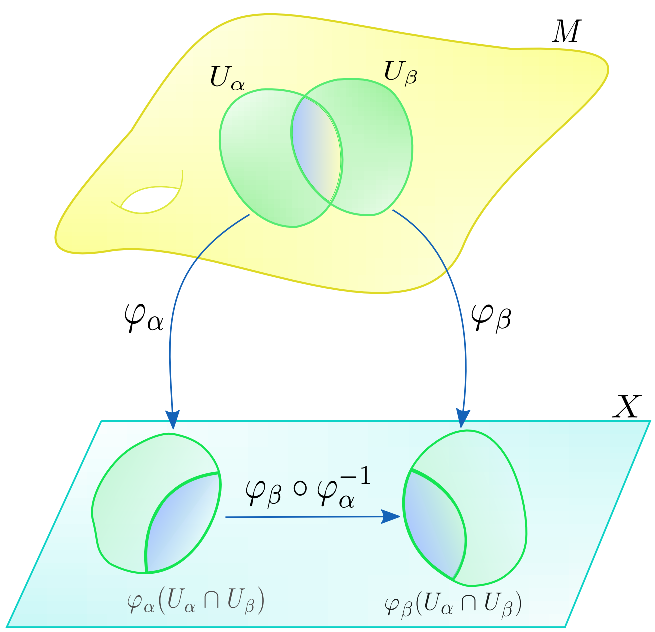


Figura 1.1: Cartas em uma variedade de Banach.

Definição 1.5 *Se $X = \mathbb{R}^n$ na definição acima. Dizemos que M é uma variedade diferenciável de dimensão n.*

Definição 1.6 *Sejam M uma variedade de Banach de classe C^l modelada sobre um espaço de Banach X. Dizemos que uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável (de classe C^k, $k \leq l$) no ponto $x \in M$ se existe uma carta (U, φ) de uma vizinhança de x tal que*

$$f \circ \varphi^{-1} : \tilde{U} = \varphi(U) \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma função diferenciável (de classe C^k).

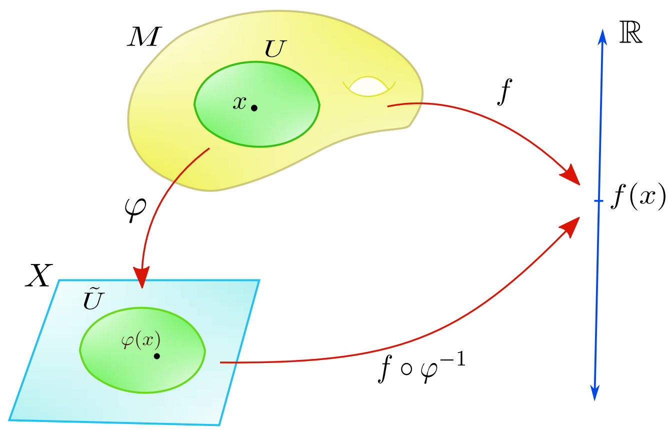


Figura 1.2: Função diferenciável.

Definição 1.7 *Sejam M e N variedades de Banach de classe C^l modeladas em X e Y, respectivamete. Dizemos que uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é diferenciável (de classe C^k, $k \leq l$) em $x \in M$ se existem cartas (U, φ) de uma vizinhança de $x \in M$ e (V, ψ) de uma vizinhança de $f(x) \in N$ com $f(U) \subset V$ tais que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset X \longrightarrow Y$$

é uma aplicação diferenciável (de classe C^k) em $\varphi(x)$.

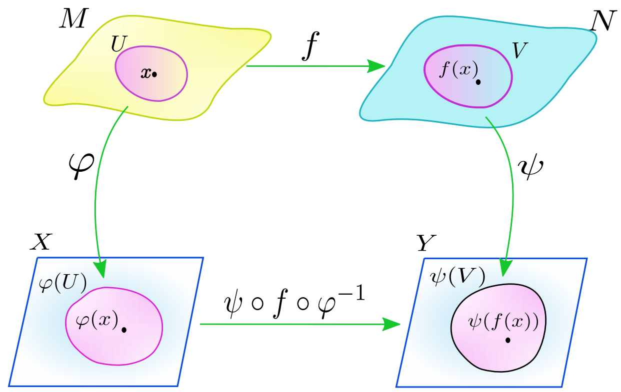


Figura 1.3: Aplicação diferenciável.

Definição 1.8 *Seja M uma variedade de Banach de classe C^l $(1 \leq l \leq +\infty)$. Uma aplicação $\gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ de classe C^r é chamada uma curva de classe C^r em M. Suponhamos que $\gamma(0) = x \in M$ e seja $C^1(M)_x$ o conjunto das funções de M que são de classe C^1 em x, isto é,*

$$C^1(M)_x = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} : f \quad \text{é de classe } C^1 \text{ em } x\}.$$

*O **vetor tangente à curva** γ em $t = 0$ é a função $\gamma'(0) : C^1(M)_x \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$\gamma'(0)(f) = (f \circ \gamma)'(0), \quad \text{para } f \in C^1(M)_x.$$

*Um **vetor tangente** em x é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ com $\gamma(0) = x$. O conjunto de todos os vetores tangentes a M em x é chamado o espaço tangente a M em x e é indicado por T_xM.*

Observação 1.9 *Sejam M uma variedade de Banach de classe C^l modeladas em X. Sejam $x \in X$ e $\varphi : U \subset M \longrightarrow X$ uma carta de classe C^l de M em x. A aplicação $\Phi(x) : T_xM \longrightarrow X$ definida por*

$$\Phi(x)(v) = (\varphi \circ \gamma)'(0),$$

onde v é o vetor tangente de uma curva $\gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ de classe C^1 com $\gamma(0) = x$, define uma bijeção de T_xM em X. Por meio desta bijeção podemos transportar a estrutura linear e topológia de X a T_xM (veja [6] para os detalhes).

Definição 1.10 *O conjunto*

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM = \{(x, v) : x \in M \text{ e } v \in T_xM\}$$

é chamado de ***fibrado tangente*** *de M.*

Definição 1.11 *O espaço dual de T_xM é o conjunto das aplicações lineares $w : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$, este espaço será denotado por T_x^*M, sendo denominado o* ***espaço cotangente*** *a M em x.*

A união

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M$$

é chamado de ***fibrado cotangente*** *de M.*

Definição 1.12 *Sejam M e N variedades de Banach de classe C^l modeladas em X e Y, respectivamente e $f : M \longrightarrow N$ uma função de classe C^1. Para cada $x \in M$ e $v \in T_xM$, escolha uma curva $\gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ com $\gamma(0) = x$ e $v \in T_xM$, então $f \circ \gamma$ é uma curva em N com $f \circ \gamma(0) = f(x)$. A aplicação $df_x : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ definida por*

$$df_x(v) = (f \circ \gamma)'(0)$$

é uma aplicação linear e não depende da escolha da curva γ. A aplicação linear df_x é chamada de diferencial de f em x.

1.3 Variedades Finsler

Definição 1.13 *Um espaço topológico X é paracompacto se é um espaço de Hausdorff e toda cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X admite um refinamento aberto localmente finito, mais precisamente, existe uma cobertura aberta $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ de X tal que:*

(i) *$\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ refina $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, no sentido de que $V_\beta \subset U_\alpha$ para algum α,*

(ii) *$\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ é localmente finita.*

No que se segue, M é um espaço topológico paracompacto.

Definição 1.14 *Seja M uma variedade de Banach de classe C^l modelada sobre um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ e seja $\|\cdot\|_M : TM \longrightarrow [0,\infty)$ uma função contínua. Dizemos que:*

$(F1)$ *$(M, \|\cdot\|_M)$ é uma **variedade Finsler** de classe C^l **no sentido de Palais** se a função $\|\cdot\|_M$ satisfaz as seguintes condições:*

$(P1)$ *Para todo $x \in M$, a restrição de $||\cdot||_M$ a T_xM, denotada por*

$$\|\cdot\|_x := \|\cdot\|_{M|_{T_xM}} : T_xM \longrightarrow [0,\infty),$$

é uma norma no espaço tangente T_xM tal que para toda carta $\varphi : U \longrightarrow X$ com $x \in U$ as normas $\|d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(\cdot)\|_x : X \longrightarrow [0,\infty)$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes em X.

$(P2)$ *Para todo $x_0 \in M$, $\varepsilon > 0$ e toda carta $\varphi : U \longrightarrow X$ com $x_0 \in U$, existe uma vizinhança aberta W de x_0 tal que*

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(v)\|_{x_0} \leq \|d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(v)\|_x \leq (1+\varepsilon)\|d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(v)\|_{x_0}$$

para todo $x \in W$ e todo $v \in X$.

$(F2)$ *$(M, \|\cdot\|_M)$ é uma **variedade Finsler** de classe C^l **no sentido de Neeb-Upmeier** se $\|\cdot\|_M$ satisfaz $(P1)$ e*

$(NU1)$ *Para todo $x_0 \in M$, existem uma carta $\varphi : U \longrightarrow X$ com $x_0 \in U$ e uma constante $K_{x_0} \geq 1$ tais que*

$$\frac{1}{K_{x_0}}\|v\|_x \leq \|d\varphi_x(v)\| \leq K_{x_0}\|v\|_x \tag{1.1}$$

para todo $x \in U$ e todo $v \in T_xM$.

*Equivalentemente, $(M, \|\cdot\|_M)$ é uma **variedade Finsler** de classe C^l **no sentido de Neeb-Upmeier** se $\|\cdot\|_M$ satisfaz $(P1)$ e*

$(NU2)$ *Para todo $x_0 \in M$, existem uma carta $\varphi : U \longrightarrow X$ com $x_0 \in U$ e uma constante $M_{x_0} \geq 1$ tais que*

$$\frac{1}{M_{x_0}}\|d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(v)\|_{x_0} \leq \|d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(v)\|_x \leq M_{x_0}\|d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(v)\|_{x_0}$$

para todo $x \in U$ *e todo* $v \in X$.

$(F3)$ $(M, \|\cdot\|_M)$ *é uma* ***variedade Finsler*** *de classe* C^l ***no sentido de Neeb-Upmeier fraca uniforme*** *se* $\|\cdot\|_M$ *satisfaz* $(P1)$ *e existe* $K \geq 1$ *tal que*

$(NU3)$ *Para todo* $x_0 \in M$, *existe uma carta* $\varphi : U \longrightarrow X$ *com* $x_0 \in U$ *satisfazendo*

$$\frac{1}{K}\|d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(v)\|_{x_0} \leq \|d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(v)\|_x \leq K\|d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(v)\|_{x_0} \tag{1.2}$$

para todo $x \in U$ *e todo* $v \in X$.

Neste caso dizemos que $(M, \|\cdot\|_M)$ *é* K-***fraca uniforme***.

$(F4)$ $(M, \|\cdot\|_M)$ *é uma* ***variedade Finsler*** *de classe* C^l ***no sentido Neeb-Upmeier uniforme*** *se* $\|\cdot\|_M$ *satisfaz* $(P1)$ *e*

$(NU4)$ *Existe* $S \geq 1$ *tal que para todo* $x_0 \in M$, *existe uma carta* $\varphi : U \longrightarrow X$ *com* $x_0 \in U$ *e*

$$\frac{1}{S}\|v\|_x \leq \|d\varphi_x(v)\| \leq S|v\|_x, \tag{1.3}$$

sempre que $x \in U$ *e* $v \in T_xM$.

Neste caso dizemos que $(M, \|\cdot\|_M)$ *é* S-***uniforme***.

Exemplo 1.15 *Todo espaço de Banach é uma variedade Finsler de classe* C^∞ *no sentido de Palais.*

Exemplo 1.16 *Toda variedade Riemanniana de classe* C^∞ *é uma variedade Finsler no sentido de Palais de classe* C^∞ *(veja [18]).*

Exemplo 1.17 *Toda variedade de Banach paracompacta,* M, *admite uma função contínua* $||\cdot||_M \longrightarrow [0,\infty)$ *tal que* $(M, ||\cdot||_M)$ *é uma variedade Finsler de classe* C^1 *no sentido de Palais (veja [18]).*

Propriedades 1.18

(1) *Se M é uma variedade Finsler no sentido de Palais, então M é uma variedade Finsler no sentido Neeb-Upmeier fraca uniforme.*

(2) *Se M é uma variedade Finsler no sentido de Neeb-Upmeier uniforme, então M e uma variedade Finsler no sentido de Neeb-Upmeier fraca uniforme.*

(3) *Se M é uma variedade Finsler no sentido de Neeb-Upmeier fraca uniforme, então M uma variedade Finsler no sentido de Neeb-Upmeier.*

Prova.

(1) Segue diretamente da definição de variedade Finsler no sentido de Palais.

(2) Seja M uma variedade Finsler S-uniforme. Dado $x_0 \in M$ existe uma carta $\varphi : U \subset M \longrightarrow X$ com $x_0 \in U$ tal que

$$\frac{1}{S}||v||_x \leq ||d\varphi_x(v)|| \leq ||v||_x \qquad \forall x \in U \quad \text{e} \quad v \in T_xM.$$

Como

$$d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(w) \in T_{x_0}M \quad \text{para todo} \quad w \in X,$$

segue que

$$\frac{1}{S}||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(w)||_{x_0} \leq ||d\varphi_x(d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(w))|| \leq S||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(w)||_{x_0},$$

ou seja,

$$\frac{1}{S}||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(w)||_{x_0} \leq ||w|| \leq S||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(w)||_{x_0}. \tag{i}$$

Por outro lado, como

$$d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(w) \in T_xM \quad \text{para todo} \quad w \in X \ \text{e} \ x \in U,$$

segue que

$$\frac{1}{S}||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(w)||_x \leq ||d\varphi_x(d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(w))|| \leq S||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(w)||_x,$$

ou seja,

$$\frac{1}{S}||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(w)||_x \leq ||w|| \leq S||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(w)||_x. \tag{ii}$$

Combinando (i) e (ii), temos que

$$\frac{1}{S^2}||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(w)||_{x_0} \leq ||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(w)||_x \leq S^2||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(w)||_{x_0}.$$

Portanto, M é uma variedade Finsler S^2-fraca uniforme.

(3) Seja M uma variedade K-fraca uniforme. Dado $x_0 \in M$ existe uma carta $\varphi : U \subset M \longrightarrow X$ com $x_0 \in U$ tal que

$$\frac{1}{K}||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(w)||_{x_0} \leq ||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(w)||_x \leq K||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(w)||_{x_0}, \quad \forall x \in U,\ w \in X.$$

Como $d\varphi_x(v) \in X$ para todo $x \in U$ e $v \in T_xM$, temos que

$$\frac{1}{K}||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(d\varphi_x(v))||_{x_0} \leq ||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(d\varphi_x(v))||_x \leq K||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(d\varphi_x(v))||_{x_0},$$

ou seja,

$$\frac{1}{K}||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(d\varphi_x(v))||_{x_0} \leq ||v||_x \leq K||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(d\varphi_x(v))||_{x_0}. \tag{iii}$$

Por outro lado, pela hipótese (P1), existe $C_{x_0} \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{C_{x_0}}||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(w)||_{x_0} \leq ||w|| \leq C_{x_0}||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(w)||_{x_0}, \qquad \forall w \in X.$$

Como $d\varphi_x(v) \in X$ para todo $x \in U$ e $v \in T_xM$, temos que

$$\frac{1}{C_{x_0}}||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(d\varphi_x(v))||_{x_0} \leq ||d\varphi_x(v)|| \leq C_{x_0}||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(d\varphi_x(v))||_{x_0}. \tag{iv}$$

Combinando (iii) e (iv), temos que

$$\frac{1}{KC_{x_0}}||v||_x \leq ||d\varphi_x(v)|| \leq KC_{x_0}||v||_x.$$

Portanto, M é uma variedade Finsler no sentido de Neeb-Upmeier,

o que encerra a prova. ■

Definição 1.19 *Seja M uma variedade Finsler de classe C^l e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $p \in M$. A norma de $df_p \in T_p^*M$ é definida por*

$$\|df_p\|_p = \sup\{|df_p(v)| : v \in T_pM, \quad \|v\|_p \leq 1\}$$

Definição 1.20 *Sejam M e N variedades Finsler de classe C^l e $f : M \longrightarrow N$ uma função diferenciável em $p \in M$. A norma da diferencial de f em p, df_p, é definida por*

$$\begin{aligned}\|df_p\|_p &= \sup\{||df_p(v)||_{f(p)} : v \in T_pM, \quad \|v\|_p \leq 1\} \\ &= \sup\{\xi(df_p(v)) : \xi \in T^*_{f(p)}N, \ v \in T_pM, \ e\ \|v\|_p = 1 = \|\xi\|^*_{f(p)}\}\end{aligned}$$

Definição 1.21 *Sejam $(M, \|\cdot\|_M)$ uma variedade Finsler de classe C^l no sentido Neeb-Upmeier e $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ uma curva de classe C^1 por partes. Definimos o comprimento da curva α por*

$$L(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)||_{\alpha(t)}\, dt.$$

.

Definição 1.22 *Seja $(M, \|\cdot\|_M)$ uma variedade Finsler de classe C^l no sentido de Neeb-Upmeier. Dados p e $q \in M$, a distância Finsler de p a q, denotada por $d_M(p, q)$, é dada por*

$$d_M(p, q) = \inf\{L(\alpha) : \alpha \text{ é uma curva de clase } C^1 \text{ por partes ligando } p \text{ e } q\}.$$

O conjunto $B_M(p, r) := \{q \in M : d_M(p, q) < r\}$ é chamado de bola métrica de centro p e raio r.

Definição 1.23 *Sejam M, N variedades Finsler e $f : M \longrightarrow N$ uma função lipschitziana. A constante $Lip(f)$ definida por*

$$Lip(f) = \sup\left\{\frac{d_N(f(x), f(y))}{d_M(x, y)} : x, y \in M, x \neq y\right\}.$$

é chamada de constante de Lipschitz de f.

Observação 1.24 *Como uma consequência imediata da desigualdade triangular, obtemos que* $|d_M(p,p_0) - d_M(q,p_0)| \leq d_M(p,q)$ *para todo* p, q *e* $p_0 \in M$. *Então, a função distância Finsler a um ponto fixo* $d_M(\cdot, p_0)$ *é* 1*-Lipschitz.*

Proposição 1.25 *Sejam* M, N *variedades Finsler de classe* C^1 *no sentido de Neeb-Upmeier e* $f : M \longrightarrow N$ *uma função de classe* C^1.

(*i*) *Se* $\sup\{\|df_x\|_x : x \in M\} < \infty$, *então* f *é lipschitziana e*

$$Lip(f) \leq \sup\{\|df_x\|_x : x \in M\}.$$

(*ii*) *Se* f *é lipschitziana e* N *é* P*-fraca uniforme, então*

$$\sup\{\|df_x\|_x : x \in M\} \leq P\, Lip(f).$$

Prova.

(*i*) Sejam $p, q \in M$ tais que $d_M(p,q) < \infty$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma curva $\gamma : [0,T] \longrightarrow M$ de classe C^1 por partes ligando p a q tal que $L(\gamma) \leq d_M(p,q) + \frac{\varepsilon}{C}$, onde $C = \sup\{\|df_x\|_x : x \in M\}$. Se definimos $\beta : [0,T] \longrightarrow N$ pondo $\beta(t) = f \circ \gamma(t)$, temos que β é uma curva de classe C^1 por partes ligando $f(a)$ a $f(b)$. Logo,

$$d_N(f(p), f(q)) \leq L(\beta) = \int_0^T \|df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\|_{\beta(t)}\, dt \leq \int_0^T \|df_{\gamma(t)}\|_{\gamma(t)} \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt$$

$$\leq C \int_0^T \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt = C\, L(\gamma) \leq C d_M(p,q) + \varepsilon.$$

Como a última desigualdade é válida para todo $\varepsilon > 0$, concluímos que

$$d_N(f(p), f(q)) \leq C d_M(p,q) \quad \text{e} \quad Lip(f) \leq C.$$

o que encerra a prova do item (*i*).

(*ii*) Vamos considerar primeiro o caso $N = \mathbb{R}$. Escolhendo $x_0 \in M$ e $v \in T_{x_0}M$ com $||v||_{x_0} = 1$. Seja $\gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ uma curva de classe C^1 tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma'(0) = v$. Então, a função $f \circ \gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1. Além disso $f \circ \gamma(0) = f(x_0)$ e

$df_{x_0}(v) = (f \circ \gamma)'(0)$. Como a aplicação $t \longmapsto ||\gamma'(t)||_{\gamma(t)}$ é contínua em $(-\delta, \delta)$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ com $r < \delta$ tal que

$$\Big| \; ||\gamma'(t)||_{\gamma(t)} - ||\gamma'(0)||_{\gamma(0)} \; \Big| < \varepsilon \quad \text{para todo} \;\; t \in [-r, r].$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|df_{x_0}(v)| = |(f \circ \gamma)'(0)| &= \left| \lim_{t \to 0} \frac{(f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(0)}{t} \right| \\
&\leq Lip(f) \limsup_{t \to 0} \frac{d_M(\gamma(t), \gamma(0))}{|t|} \leq Lip(f) Lip\big(\gamma\big|_{[-r,r]}\big) \\
&\leq Lip(f) \sup\{||\gamma'(s)||_{\gamma(s)} : s \in [-r, r]\} \leq Lip(f)\big[||\gamma'(0)||_{\gamma(0)} + \varepsilon\big] \\
&= Lip(f)\big[||v||_{x_0} + \varepsilon\big] = (1 + \varepsilon) Lip(f).
\end{aligned}$$

Portanto, da arbitrariedade de $x_0 \in M$, $v \in T_{x_0}M$ e $\varepsilon > 0$ concluímos que

$$\sup_{x \in M} ||df_x||_x \leq Lip(f).$$

Passemos agora ao caso geral, isto é, $f : M \longrightarrow N$ onde N é uma variedade Finsler P-fraca uniforme. Suponhamos por absurdo que existe $x_0 \in M$ tal que $||df_{x_0}||_{x_0} > PL$, onde $L = Lip(f)$. Logo, existem $\xi \in T^*_{f(x_0)}N$ e $v \in T_{x_0}M$ tais que

$$||v||_{x_0} = ||\xi||^*_{f(x_0)} = 1 \quad \text{e} \quad |\xi(df_{x_0}(v))| > PL.$$

Dado que N é P-fraca uniforme, então existe uma carta $\psi : V \longrightarrow Y$ com $f(x_0) \in V$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P}\big|\big|d(\psi^{-1})_{\psi(f(x_0))}(u)\big|\big|_{f(x_0)} &\leq \big|\big|d(\psi^{-1})_{\psi(x)}(u)\big|\big|_x \\
&\leq P\big|\big|d(\psi^{-1})_{\psi(f(x_0))}(u)\big|\big|_{f(x_0)},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

para todo $x \in V$ e $u \in Y$.

Escolhendo $r > 0$ tal que $f(x_0) \in B_N(f(x_0), r/4) \subset B_N(f(x_0), r) \subset V$, definamos a função $g : f^{-1}(B_N(f(x_0), r/4)) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \xi \circ d(\psi^{-1})_{\psi(f(x_0))} \circ \psi \circ f(x).$$

Afirmação 1: $||dg_{x_0}||_{x_0} > PL$.

De fato, observemos que,

$$|dg_{x_0}(v)| = |\xi \circ d(\psi^{-1})_{\psi(f(x_0))} \circ d\psi_{f(x_0)} \circ df_{x_0}(v)| = |\xi \circ df_{x_0}(v)| > PL.$$

Daí,

$$||dg_{x_0}||_{x_0} > PL \tag{1.5}$$

Afirmação 2: A aplicação $\psi : V \longrightarrow Y$ é P-Lipschitz com a norma $|||\cdot||| : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$|||w||| := ||d(\psi^{-1})_{\psi(f(x_0))}(w)||_{f(x_0)}.$$

De fato, visto que ψ satisfaz a desigualdades (1.4), segue que

$$\begin{aligned} |||d\psi_z(w)||| &= ||d(\psi^{-1})_{\psi(f(x_0))}(d\psi_z(w))||_{f(x_0)} \\ &\leq P\,||d(\psi^{-1})_{\psi(z)}(d\psi_z(w))||_z = P\,||w||_z, \end{aligned}$$

para todo $z \in V$ e $w \in T_zN$. Logo,

$$|||d\psi_z||| := \sup\{|||d\psi_z(v)||| : v \in T_zN \text{ e } ||v||_z \leq 1\} \leq P, \qquad \forall\, z \in V.$$

Assim,

$$\sup\{|||d\psi_z||| : z \in V\} \leq P.$$

Agora, verificaremos que

$$d_N(z, z') = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ é uma curva de classe } C^1 \text{ ligando } z \text{ a } z' \text{ e } \gamma \subset V\},$$

para todo $z, z' \in B_N(f(x_0), r/4)$. Com efeito, suponhamos que existen z e $z' \in B_N(f(x_0), r/4)$ tais que

$$\begin{aligned} d_N(z, z') &= \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ é uma curva de classe } C^1 \text{ ligando } z \text{ a } z'\} \\ &< \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ é uma curva de classe } C^1 \text{ ligando } z \text{ a } z' \text{ e } \gamma \subset V\}, \end{aligned}$$

então existe uma curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow N$ de classe C^1 tal que $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = z'$ e $L(\gamma) < d_N(z,z') + r/4$ e $\gamma(t) \notin V$ para algum $t \in [0,1]$. Logo,

$$d_N(f(x_0),\gamma(t)) \geq r \quad \text{e} \quad d_N(z,\gamma(t)) \leq L(\gamma) \leq d_N(z,z') + r/4.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} r &\leq d_N(f(x_0),\gamma(t)) \leq d_N(f(x_0),z) + d_N(z,\gamma(t)) \\ &\leq d_N(f(x_0),z) + d_N(z,z') + r/4 < r/4 + r/2 + r/4 = r, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Agora, fazendo argumento análogo ao utilizado para provar o item (i) deduzimos que ψ é P-Lipschitz em $B_N(f(x_0), r/4)$ com a norma $|||\cdot|||$.

Afirmação 3: A função g é PL-Lipschitz com a métrica d_M. Além disso,

$$\sup\{||dg_x||_x : x \in f^{-1}(B_N(f(x_0), r/4))\} \leq PL. \tag{1.6}$$

De fato, para todo $x, y \in f^{-1}(B_N(f(x_0), r/4))$, usando a afirmação 2, temos que

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |\xi \circ d(\psi^{-1})_{\psi(f(x_0))}\big(\psi \circ f(x) - \psi \circ f(y)\big)| \\ &\leq ||d(\psi^{-1})_{\psi(f(x_0))}\big(\psi \circ f(x) - \psi \circ f(y)\big)||_{f(x_0)} \\ &= |||\psi \circ f(x) - \psi \circ f(y)||| \leq P\, d_N(f(x), f(y)) \\ &\leq PL\, d_M(x,y). \end{aligned}$$

Assim, g é PL-Lipschitz. Usando o caso $N = \mathbb{R}$, obtemos

$$\sup\{||dg_x||_x : x \in f^{-1}(B_N(f(x_0), r/4))\} \leq PL.$$

Finalmente, das desigualdades (1.5) e (1.6), temos uma contradição. Portanto, a proposição é verdadeira. ■

Lema 1.26 *Seja M uma variedade Finsler K-fraca uniforme de classe C^l. Então para todo $x_0 \in M$ e toda carta $\varphi : U \longrightarrow X$ com $x_0 \in U$ satisfazendo a desigualdade (1.2), existe uma vizinhanaça aberta $V \subset U$ de x_0 tal que*

$$\frac{1}{K} d_M(p,q) \leq |||\varphi(p) - \varphi(q)||| \leq K d_M(p,q), \quad \textit{para todo} \;\; p,q \in V, \tag{1.7}$$

onde $||| \cdot ||| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é a norma definida por $|||x||| := ||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(x)||_{x_0}$.

Prova. Por um argumento análogo ao da demostração da proposição acima, existe $r > 0$ tal que $B_M(x_0, r/4) \subset B_M(x_0, r) \subset U \subset M$. Além disso,

$$d_M(p,q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \;\text{ é uma curva de classe } C^1 \text{ ligando } p \text{ a } q \text{ e } \; \gamma \subset U\},$$

para todo $p, q \in B_M(x_0, r/4)$.

Logo, dados $p, q \in B_M(x_0, r/4)$ e $\varepsilon > 0$ existe uma curva $\gamma : [0,T] \longrightarrow U$ de classe C^1 ligando p a q tais que

$$L(\gamma) \leq d_M(p,q) + \frac{\varepsilon}{K}.$$

Definamos $\beta : [0,T] \longrightarrow X$ por $\beta(t) = \varphi \circ \gamma(t)$. Então β liga $\varphi(p)$ a $\varphi(q)$ e da desigualdade (1.2), temos que

$$\begin{aligned}
|||\varphi(p) - \varphi(q)||| &= ||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}\big(\varphi(p) - \varphi(q)\big)||_{x_0} \leq L(\beta) \\
&= \int_0^T |||d\varphi_{\gamma(t)}(\gamma'(t))||| \, dt \\
&= \int_0^T ||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}\big(d\varphi_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\big)||_{x_0} \, dt \\
&\leq K \int_0^T ||d(\varphi^{-1})_{\varphi(\gamma(t))}\big(d\varphi_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\big)||_{\gamma(t)} \, dt \\
&= K \int_0^T ||\gamma'(t)||_{\gamma(t)} \, dt = K \, L(\gamma) \leq K \left[d_M(p,q) + \frac{\varepsilon}{K}\right] \\
&= K \, d_M(p,q) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Agora, consideremos φ^{-1} e $s > 0$ tal que $B(\varphi(x_0), s) \subset \varphi(B_M(x_0, r/4))$. Dados $x, y \in B(\varphi(x_0), s)$, definamos a curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ por

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(ty + (1-t)x) \in B_M(x_0, r/4).$$

Então,

$$\begin{aligned} d_M(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) &\leq L(\gamma) = \int_0^1 ||\gamma'(t)||_{\gamma(t)}\, dt = \int_0^1 ||d(\varphi^{-1})_{\varphi(\gamma(t))}(y-x)||_{\gamma(t)}\, dt \\ &\leq K \int_0^1 ||d(\varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(y-x)||_{x_0}\, dt \\ &= K\, |||x-y|||. \end{aligned}$$

Finalmente, definimos $V := \varphi^{-1}(B(\varphi(x_0), s))$, o que encerra a prova. ■

1.4 Aproximação Suave em Variedades Finsler

Definição 1.27 *Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dizemos que um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ satisfaz a propriedade (A^k) se existe uma constante $C_0 \geq 1$ que só depende do espaço $(X, \|\cdot\|)$ tal que para toda função lipschitziana $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma função lipschitziana $K : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tal que*

$$|f(x) - K(x)| < \varepsilon \quad \textit{para todo} \quad x \in X, \ \ \textit{e} \ \ \textit{Lip}(K) \leq C_0 \textit{Lip}(f).$$

Teorema 1.28 *Seja H um espaço de Hilbert. Então, para toda função lipschitziana $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, existe uma função lipschitziana $g : H \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \ \ \textit{para todo } x \in H, \quad \textit{e} \ \ \textit{Lip}(g) \leq \textit{Lip}(f).$$

Prova. Veja [14]. ■

Corolário 1.29 *Todo espaço de Hilbert H satisfaz a propriedade (A^1). Além disso, a constante $C_0 = 1$ não depende da norma Hilbertiana considerada em H.*

Definição 1.30 *Dado um espaço topológico M e uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$, o suporte de f é o fecho do conjunto*

$$\{p \in M : f(p) \neq 0\}.$$

Usaremos a notação $supp(f)$ para indicar o suporte de f.

Definição 1.31 *Uma família $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de subconjuntos de um espaço topológico M chama-se localmente finita quando todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de subconjuntos U_α de $\mathcal{U}$.*

Lema 1.32 *Sejam E um espaço métrico e $\mathcal{U} = \{U_r\}_{r \in \Omega}$ uma cobertura de E. Então existem refinamentos $\{V_{n,r}\}_{n \in \mathbb{N}, r \in \Omega}$ e $\{W_{n,r}\}_{n \in \mathbb{N}, r \in \Omega}$ de $\mathcal{U}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $V_{n,r} \subset W_{n,r} \subset U_r$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $r \in \Omega$,

(ii) $dist(V_{n,r}, E \backslash W_{n,r}) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $r \in \Omega$,

(iii) $dist(W_{n,r}, W_{n,r'}) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$ *para qualquer* $n \in \mathbb{N}$ *e* $r, r' \in \Omega$, $r \neq r'$,

(iv) Para todo $x \in E$ existe uma bola aberta $B(x, s_x)$ de E e um $n_x \in \mathbb{N}$ tal que:

  (a) se $i > n_x$, então $B(x, s_x) \cap W_{i,r} = \emptyset$, para qualquer $r \in \Omega$,

  (b) se $i \leq n_x$, então $B(x, s_x) \cap W_{i,r} \neq \emptyset$, para no máximo um $r \in \Omega$.

Prova. Ver [10] página 390. ■

Definição 1.33 *Sejam M uma variedade Finsler de classe C^l e $\mathcal{U} = \{U_r\}_{r \in \Omega}$ uma cobertura de M. Uma* ***partição da unidade lipschitziana*** *de classe C^k $(k \leq l)$ subordinada à cobertura $\mathcal{U} = \{U_r\}_{r \in \Omega}$ é uma família $\{\psi_i\}_{i \in I}$ de funções lipschitzianas $\psi_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tais que:*

(1) *$\psi_i(x) \geq 0$, para todo $x \in M$ e $i \in I$,*

(2) *A família $\{supp(\psi_i)\}_{i \in I}$ é localmente finita,*

(3) *Para todo* $i \in I$ *existe* $r \in \Omega$ *tal que* $supp(\psi_i) \subset U_r$.

(4) $\sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1$ *para todo* $x \in M$

Lema 1.34 *Seja* $(X, ||\cdot||)$ *um espaço de Banach que satisfaz a propriedade* (A^k) *tal que a constante* C_0 *não depende da norma (equivalente) definida em* X *e seja* M *uma variedade Finsler* K*-fraca uniforme de classe* C^l *modelada sobre* X*. Então toda cobertura aberta* $\mathcal{U} = \{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ *de* M *possui um refinamento* $\{W_{n,\gamma}\}_{n \in \mathbb{N}, \gamma \in \Gamma}$ *e existe uma partição da unidade lipschitziana* $\{\psi_{n,\gamma}\}_{n \in \mathbb{N}, \gamma \in \Gamma}$ *de classe* C^m *(*$m := \min\{l, k\}$*) subordinada à cobertura* $\mathcal{U}$ *tal que* $supp(\psi_{n,\gamma}) \subset W_{n,\gamma}$ *e*

$$||d\psi_{n,\gamma}||_p \leq 15nC_0K^2 2^{n+1}, \text{ para todo } p \in M.$$

Prova. A prova será realizada em 9 passos.

Passo 1. Seja Γ um conjunto de índices. Dado $p_\gamma \in M$, existe um aberto $B_M(p_\gamma, 3\delta_{p_\gamma})$ e uma aplicação $\varphi_{p_\gamma} : B_M(p, 3\delta_{p_\gamma}) \longrightarrow X$ de classe C^l com $\varphi_{p_\gamma}(p_\gamma) = 0$ tal que a condição (P1) da Definição 1.14 junto com as desigualdades (1.2) e (1.7) são satisfeitas para todo $q \in B_M(p_\gamma, 3\delta_{p_\gamma})$.

Afirmação 1: As aplicações φ_{p_γ} e $\varphi_{p_\gamma^{-1}}$ são lipschitzianas. Além disso,

$$Lip(\varphi_{p_\gamma}) \leq K \text{ e } Lip(\varphi_{p_\gamma}^{-1}) \leq K.$$

De fato, dado que φ_{p_γ} satisfaz a desigualdade (1.7), isto é,

$$\frac{1}{K} d_M(p,q) \leq |||\varphi_{p_\gamma}(p) - \varphi_{p_\gamma}(q)|||_\gamma \leq K d_M(p,q),$$

onde $|||\cdot|||_\gamma := ||d(\varphi_{p_\gamma}^{-1})_0(\cdot)||_{p_\gamma} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma norma em X, a afirmação é verdadeira.

Passo 2. Seja $\mathcal{U} = \{B_M(p_\gamma, 2\delta_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ uma cobertura aberta de M, onde $\delta_\gamma := \delta_{p_\gamma}$. Pelo Lema 1.32, existem refinamentos $\{V_{n,\gamma}\}_{n \in \mathbb{N}, \gamma \in \Gamma}$ e $\{W_{n,\gamma}\}_{n \in \mathbb{N}, \gamma \in \Gamma}$ de $\mathcal{U}$ tais que

(a1) $V_{n,\gamma} \subset W_{n,\gamma} \subset U_\gamma = B_M(p_\gamma, 2\delta_\gamma)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \Gamma$,

(a2) $dist_M(V_{n,\gamma}, E \backslash W_{n,\gamma}) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \Gamma$, (a3) $dist_M(W_{n,\gamma}, W_{n,\gamma'}) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, $\gamma \neq \gamma'$,

(a4) As famílias $\{W_{n,\gamma}\}_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma}$ e $\{W_{n,\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}$ são localmente finitas.

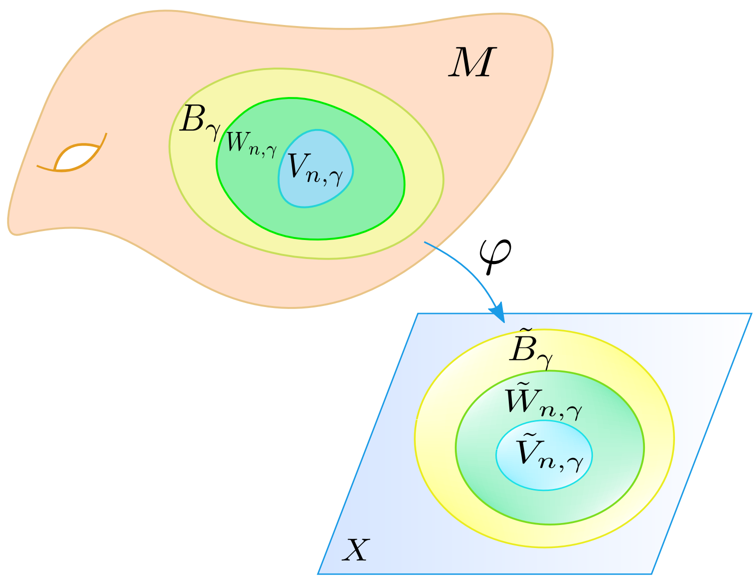
Com o intuito de não sobrecarregar as notações, fazemos as seguintes identificações:

$$\varphi_\gamma := \varphi_{p_\gamma} \quad , \qquad \tilde{B}_\gamma := \varphi_\gamma(B_M(p_\gamma, 3\delta_\gamma)),$$

$$\tilde{V}_{n,\gamma} := \varphi_\gamma(V_{n,\gamma}) \ \text{ e } \ \tilde{W}_{n,\gamma} := \varphi_\gamma(W_{n,\gamma}).$$

Segue do item (a1) que

$$\tilde{V}_{n,\gamma} \subset \tilde{W}_{n,\gamma} \subset \tilde{B}_\gamma \subset X.$$



Sejam A, B subconjuntos de X. Definamos a função $dist_\gamma : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$dist_\gamma(A, B) = \inf\{|||x - y|||_\gamma : x \in A,\ y \in B\}.$$

Afirmação 2: $dist_\gamma(\tilde{V}_{n,\gamma}, \tilde{B}_\gamma \backslash \tilde{W}_{n,\gamma}) \geq \frac{1}{K2^{n+1}}$.

De fato, para todo $x \in \tilde{V}_{n,\gamma}$ e $y \in \tilde{B}_\gamma \backslash \tilde{W}_{n,\gamma}$, existem $p \in V_{n,\gamma}$ e $q \in B_M(p_\gamma, \delta_\gamma)\backslash W_{n,\gamma}$ tais que $\varphi_\gamma(p) = x$ e $\varphi_\gamma(q) = y$. Usando o item (a2) junto com a desigualdade (1.7), segue que

$$|||x - y|||_\gamma = |||\varphi_\gamma(p) - \varphi_\gamma(q)|||_\gamma \geq \frac{1}{K} d_M(p, q) \geq \frac{1}{K2^{n+1}}.$$

Isto implica que

$$dist_\gamma(\tilde{V}_{n,\gamma}, \tilde{B}_\gamma \backslash \tilde{W}_{n,\gamma}) \geq \frac{1}{K2^{n+1}},$$

o que prova a afirmação.

Passo 3. Definamos a função $\phi_{n,\gamma} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi_{n,\gamma}(x) := dist_\gamma(x, \tilde{V}_{n,\gamma}).$$

Essa função satisfaz as seguinte propriedades:

(b1) $\phi_{n,\gamma}(\tilde{V}_{n,\gamma}) = 0$.

(b2) $\phi_{n,\gamma}(\tilde{B}_\gamma \backslash \tilde{W}_{n,\gamma}) \geq \frac{1}{K2^{n+1}}$.

De fato, dado $x \in \tilde{B}_\gamma \backslash \tilde{W}_{n,\gamma}$, da Afirmação 2, segue que

$$\phi_{n,\gamma}(x) = dist_\gamma(x, \tilde{V}_{n,\gamma}) \geq \frac{1}{K2^{n+1}}.$$

(b3) $\phi_{n,\gamma}$ é 1-Lipschitz.

De fato, sejam $x, y \in X$. Para todo $z \in \tilde{V}_{n,\gamma}$, temos que

$$dist_\gamma(x, \tilde{V}_{n,\gamma}) \leq |||x - z|||_\gamma \leq |||x - y|||_\gamma + |||y - z|||_\gamma.$$

Logo, como

$$\phi_{n,\gamma}(x) - |||x - y|||_\gamma \leq |||y - z|||_\gamma$$

vale para todo $z \in \tilde{V}_{n,\gamma}$, temos que

$$\phi_{n,\gamma}(x) - |||x - y|||_\gamma \leq \phi_{n,\gamma}(y).$$

Assim,

$$\phi_{n,\gamma}(x) - \phi_{n,\gamma}(y) \leq |||x - y|||_\gamma.$$

Por outro lado, trocando x por y, temos que

$$\phi_{n,\gamma}(y) - \phi_{n,\gamma}(x) \leq |||y - x|||_\gamma = |||x - y|||_\gamma.$$

Consequentemente

$$|\phi_{n,\gamma}(x) - \phi_{n,\gamma}(y)| \leq |||x - y|||_\gamma.$$

Afirmação 3: Existe uma função lipschitziana $\theta_n : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ tal que $\theta_n = 1$, para todo $t \in (-\infty, \frac{1}{4K2^{n+1}}]$ e $\theta_n = 0$, para todo $t \in [\frac{1}{2K2^{n+1}}, +\infty)$. Além disso, $Lip(\theta_n) \leq 5K2^{n+1}$.

De fato, consideremos a função $\theta_n : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$\theta_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t \leq \frac{1}{4K2^{n+1}}, \\ 2 - 4K2^{n+1}t & \text{se} \quad \frac{1}{4K2^{n+1}} < t < \frac{1}{2K2^{n+1}}, \\ 0 & \text{se} \quad t \geq \frac{1}{2K2^{n+1}}. \end{cases}$$

Provemos que é lipschitziana.

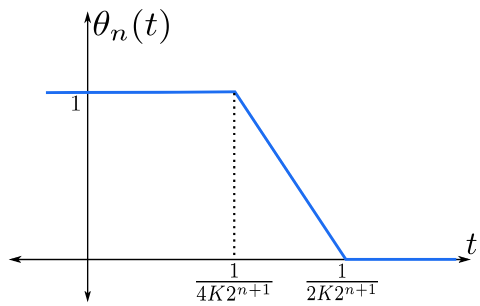


Figura 1.4: Função $\theta_n(t)$.

- Dados $t_1, t_2 \in (-\infty, \frac{1}{4K2^{n+1}}]$ ou $t_1, t_2 \in [\frac{1}{2K2^{n+1}}, +\infty)$, obtemos

$$|\theta_n(t_1) - \theta_n(t_2)| = 0 \leq 4K2^{n+1}|t_1 - t_2|.$$

- Dados $t_1, t_2 \in (\frac{1}{2K2^{n+1}}, \frac{1}{4K2^{n+1}})$, obtemos

$$|\theta_n(t_1) - \theta_n(t_2)| = |(2 - 4K2^{n+1}t_1) - (2 - 4K2^{n+1}t_2)| = 4K2^{n+1}|t_1 - t_2|.$$

- Dados $t_1 \in (-\infty, \frac{1}{4K2^{n+1}}]$ e $t_2 \in (\frac{1}{2K2^{n+1}}, \frac{1}{4K2^{n+1}})$, temos que

$$|\theta_n(t_1) - \theta_n(t_2)| = |1 - 4K2^{n+1}t_2|. \tag{1}$$

Como $1 - 4K2^{n+1}t_2 \leq 0$ e $4K2^{n+1}(t_2 - t_1) \geq 0$, segue que

$$1 - 4K2^{n+1}t_2 \leq 4K2^{n+1}(t_2 - t_1). \tag{2}$$

Por outro lado , dado que $t_1 \leq \frac{1}{4K2^{n+1}}$, segue que

$$4K2^{n+1}(t_1 - t_2) \leq 1 - 4K2^{n+1}t_2,$$

o que implica que

$$-4K2^{n+1}(t_2 - t_1) \leq 1 - 4K2^{n+1}t_2. \tag{3}$$

Assim, as desigualdades (1), (2) e (3) implicam que

$$|\theta_n(t_1) - \theta_n(t_2)| = |1 - 4K2^{n+1}t_2| \leq 4K2^{n+1}|t_2 - t_1|$$

- Dados $t_1 \in (\frac{1}{2K2^{n+1}}, \frac{1}{4K2^{n+1}})$ e $t_2 \in [\frac{1}{2K2^{n+1}}, +\infty)$, segue

$$|\theta_n(t_1) - \theta_n(t_2)| = |2 - 4K2^{n+1}t_2|. \tag{4}$$

Como $2 - 4K2^{n+1}t_1 \geq 0$ e $-4K2^{n+1}(t_2 - t_1) \leq 0$, temos que

$$-4K2^{n+1}(t_2 - t_1) \leq 2 - 4K2^{n+1}t_1. \tag{5}$$

Por outro lado, dado que $t_2 \geq \frac{1}{2K2^{n+1}}$, segue

$$2 - 4K2^{n+1}t_1 \leq 4K2^{n+1}(t_1 - t_2). \tag{6}$$

Assim, combinanado as desigualdades (4), (5) e (6), temos que

$$|\theta_n(t_1) - \theta_n(t_2)| = |2 - 4K2^{n+1}t_1| \leq 4K2^{n+1}|t_2 - t_1|.$$

Finalmente, dos items acima, concluimos que

$$|\theta_n(t_1) - \theta_n(t_2)| \leq 4K2^{n+1}|t_2 - t_1|, \quad \text{para todo } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Além disso,

$$Lip(\theta_n) \leq 5K2^{n+1},$$

o que encerra a prova da afirmação.

Passo 5. Notemos que a função $\theta_n \circ \phi_{n,\gamma} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz:

(c1) $(\theta_n \circ \phi_{n,\gamma})(\tilde{V}_{n,\gamma}) = 1$.

De fato, dado $x \in \tilde{V}_{n,\gamma}$, da definição de θ_n, segue que $(\theta_n \circ \phi_{n,\gamma})(x) = \theta_n(\phi_{n,\gamma}(x)) = \theta_n(0) = 1$.

(c2) $(\theta_n \circ \phi_{n,\gamma})(\tilde{B}_\gamma \backslash \tilde{W}_{n,\gamma}) = 0$.

De fato, dado $x \in \tilde{B}_\gamma \backslash \tilde{W}_{n,\gamma}$, temos que $(\theta_n \circ \phi_{n,\gamma})(x) = \theta_n(\phi_{n,\gamma}(x)) = 0$, pois $\phi_{n,\gamma}(x) \geq \frac{1}{K2^{n+1}}$.

(c3) $Lip(\theta_n \circ \phi_{n,\gamma}) \leq 5K2^{n+1}$, pois a função $\phi_{n,\gamma}$ é 1-Lipschitz.

Logo, dado que X satisfaz a propriedade (A^k), então existe uma função lipschitziana $\xi_{n,\gamma} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tal que

$$\sup_{x \in X}\{|\xi_{n,\gamma}(x) - (\theta_n \circ \phi_{n,\gamma})(x)|\} < \frac{1}{4}, \tag{7}$$

e

$$Lip(\xi_{n,\gamma}) \leq C_0 Lip(\theta_n \circ \phi_{n,\gamma}) \leq 5C_0K2^{n+1}, \quad \text{para todo} \ \ \gamma \in \Gamma \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

Afirmação 4: Existe uma função lipschitziana $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ de classe C^∞ tal que $\theta(t) = 0$, para todo $t \in (-\infty, \frac{1}{4}]$ e $\theta(t) = 1$, para todo $t \in [\frac{3}{4}, +\infty)$. Além disso, $Lip(\theta) \leq 3$.

De fato, seja $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{para} \quad t > 0, \\ 0 & \text{para} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

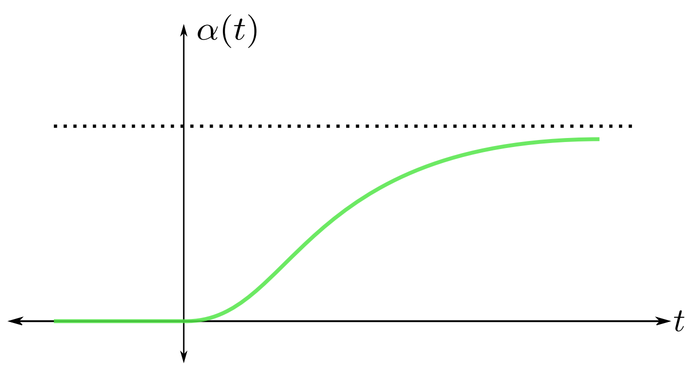


Figura 1.5: Função $\alpha(t)$.

Observemos que α é de classe C^∞ em $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ e como todas as suas derivadas tendem para 0 quando $t \to 0$, resulta que α é uma função de classe C^∞ em $\mathbb{R}$ (veja [15] para os detalhes).

Definamos agora a função $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞, por

$$\beta(t) = \alpha\big(t - 1/4\big) \cdot \alpha\big(3/4 - t\big).$$

Então

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2(t-1/4)(t-3/4)}} & \text{para} \quad \frac{1}{4} < t < \frac{3}{4}, \\ 0 & \text{para} \quad \text{outro caso.} \end{cases}$$

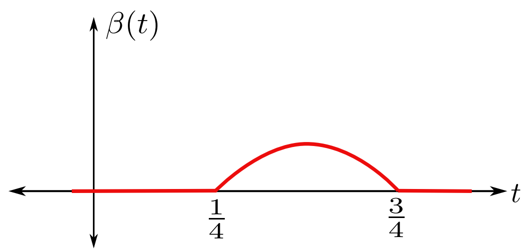


Figura 1.6: Função $\beta(t)$.

Finalmente, a função $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} \beta(s)\, ds}{\int_{-\infty}^{\infty} \beta(s)\, ds}.$$

é de classe C^∞, $0 \leq \theta(t) \leq 1$ e $\theta(t) = 1$ para $t \geq \frac{3}{4}$. Além disso, θ crece de 0 para 1 quando t varia de $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$. Por outro lado, como

$$\theta'(t) = \frac{\beta(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} \beta(s)\, ds}$$

e $\beta(t)$ atinge o máximo em $t = 0.5$, temos que a derivada da função θ é limitada. Logo a função θ é lipschitziana.

Passo 6. Definamos a função $\tilde{h}_{n,\gamma} : X \longrightarrow [0,1]$ por

$$\tilde{h}_{n,\gamma}(x) := \theta \circ \xi_{n,\gamma}(x).$$

Notemos que as seguintes propriedades sobre a função $\tilde{h}_{n,\gamma}$ ocorrem :

(d1) $\tilde{h}_{n,\gamma}$ é de classe C^k e $Lip(\tilde{h}_{n,\gamma}) \leq 15C_0K2^{n+1}$.

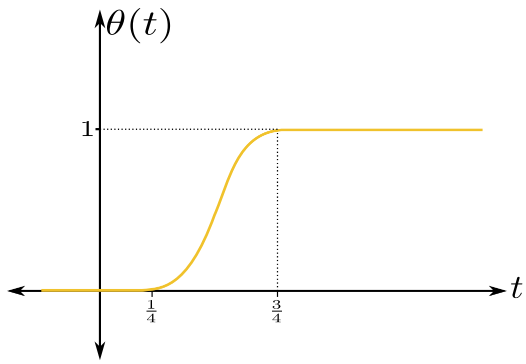


Figura 1.7: Função $\theta(t)$.

(d2) $\tilde{h}_{n,\gamma}(\tilde{V}_{n,\gamma}) = 1$.

De fato, seja $x \in \tilde{V}_{n,\gamma}$. Combinando a desigualdade (7) com o item (c1), temos que

$$\frac{1}{4} > |\xi_{n,\gamma}(x) - (\theta_n \circ \phi_{n,\gamma})(x)| = |\xi_{n,\gamma} - 1|,$$

logo

$$\frac{3}{4} < \xi_{n,\gamma}(x) < \frac{5}{4}.$$

Daí, concluímos que

$$\tilde{h}_{n,\gamma}(x) = \theta(\xi_{n,\gamma}(x)) = 1.$$

(d3) $\tilde{h}_{n,\gamma}(\tilde{B}_\gamma \backslash \tilde{W}_{n,\gamma}) = 0$.

De fato, seja $x \in \tilde{B}_\gamma \backslash \tilde{W}_{n,\gamma}$. Combinando a desigualdade (7) com o item (c2), obtemos

$$\frac{1}{4} > |\xi_{n,\gamma}(x) - (\theta_n \circ \phi_{n,\gamma})(x)| = |\xi_{n,\gamma}(x) - 0|,$$

logo

$$-\frac{1}{4} < \xi_{n,\gamma}(x) < \frac{1}{4}$$

implica que

$$\tilde{h}_{n,\gamma}(x) = \theta(\xi_{n,\gamma}(x)) = 0.$$

Passo 7. Definamos a função $h_{n,\gamma} : M \longrightarrow [0,1]$ por

$$h_{n,\gamma}(p) = \begin{cases} \tilde{h}_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p)) & \text{se} \quad p \in B_M(p_\gamma, 3\delta_\gamma), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Essa função assim definida satisfaz:

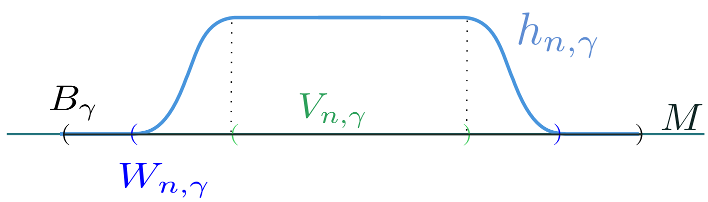


Figura 1.8: Função $h_{n,\gamma}(p)$.

(e1) $h_{n,\gamma}$ é de classe C^m, onde $m = \min\{k, l\}$.

(e2) $||d(h_{n,\gamma})_p||_p \leq 15C_0K^2 2^{n+1}$ para todo $p \in M$, e assim $Lip(h_{n,\gamma}) \leq 15C_0K^2 2^{n+1}$.

(e3) $supp(h_{n,\gamma}) \subset W_{n,\gamma} \subset B_M(p_\gamma, 2\delta_\gamma)$.

De fato, usando o item (d3), temos que $h_{n,\gamma}(p) = 0$ sempre que $\varphi_\gamma(p) \in \tilde{B}_\gamma \backslash \tilde{W}_{n,\gamma}$, ou seja, sempre que $p \in B_\gamma \backslash W_{n,\gamma}$. Portanto, $supp(h_{n,\gamma}) \subset W_{n,\gamma} \subset B_M(p_\gamma, 2\delta_\gamma)$.

(e4) A família $\{supp(h_{n,\gamma})\}_{n \in \mathbb{N}, \gamma \in \Gamma}$ é localmente finita.

Passo 8. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos a função $h_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h_n(p) = \sum_{\gamma \in \Gamma} h_{n,\gamma}(p).$$

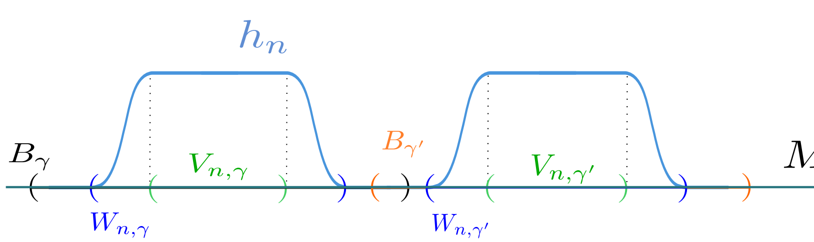


Figura 1.9: Função $h_n(p)$.

Visto que a família $\{W_{n,\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ é localmente finita e $supp(h_{n,\gamma}) \subset W_{n,\gamma}$, segue que a função h_n está bem definida. Além disso, a função h_n verifica:

(f1) h_n é de classe C^m.

De fato, dado $p \in M$, podemos encontrar um aberto U contendo p tal que $U \cap supp(h_{n,\gamma}) \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices $\gamma \in \Gamma$, digamos $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r$. Assim, a restrição de h_n a U é igual à restrição de $\sum_{j=1}^{r} h_{n,\gamma_j}$ a U que é uma função de classe C^m. Portanto, todo ponto de M possui uma vizinhança aberta tal que a restrição de h_n a tal vizinhança é de classe C^m.

(f2) $h_n(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} V_{n,\gamma}) = 1$.

De fato, dado $p \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} V_{n,\gamma}$, temos que existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $p \in V_{n,\gamma}$, logo $\varphi_\gamma(p) \in \tilde{V}_{n,\gamma}$. Do item (d2), segue que $h_n(p) = \tilde{h}_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p)) = 1$.

(f3) $h_n(M \backslash \bigcup_{\gamma\in\Gamma} W_{n,\gamma}) = 0$.

De fato, dado $p \in M\backslash \bigcup_{\gamma\in\Gamma} W_{n,\gamma}$, então $p \notin W_{n,\gamma}$ para todo $\gamma \in \Gamma$, logo $\varphi_\gamma(p) \notin \tilde{W}_{n,\gamma}$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então $\varphi_\gamma(p) \in \tilde{B}_\gamma \backslash \tilde{W}_{n,\gamma}$. Do item (d3), segue que $h_n(p) = \tilde{h}_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p)) = 0$.

(f4) Para todo $p \in M$, $||d(h_n)_p||_p \leq 15C_0K^2 2^{n+1}$, e assim $Lip(h_n) \leq 15C_0K^2 2^{n+1}$.

Passo 9. Finalmente, definamos para cada $\gamma \in \Gamma$,

$$\psi_{1,\gamma} = h_{1,\gamma} \quad \text{e} \quad \psi_{n,\gamma} = h_{n,\gamma}(1-h_1)(1-h_2)...(1-h_{n-1}) \quad \text{para cada} \quad n \geq 2.$$

As funções $\psi_{n,\gamma}$ assim definidas são de classe C^∞. Além disso,

(g1) $||d(\psi_{n,\gamma})_p||_p \leq 15nC_0K^2 2^{n+1}$ para todo $p \in M$.

(g2) $Lip(\psi_{n,\gamma}) \leq 15nC_0K^2 2^{n+1}$

(g3) $supp(\psi_{n,\gamma}) \subset supp(h_{n,\gamma})$.

De fato, se $\psi_{n,\gamma}(p) \neq 0$, então $h_{n,\gamma}(p) \neq 0$. Logo,

$$supp(\psi_{n,\gamma}) = \overline{\{p \in M : \psi_{n,\gamma}(p) \neq 0\}} \subset \overline{\{p \in M : h_{n,\gamma}(p) \neq 0\}} = supp(h_{n,\gamma}).$$

(g4) $\sum_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} \psi_{n,\gamma}(p) = 1$ para todo $p \in M$.

De fato,

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma}\psi_{n,\gamma}(p) &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\psi_{1,\gamma}(p)+\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}h_{n,\gamma}(p)\right)\prod_{i=1}^{n-1}(1-h_i(p))\\ &= h_1(p)+\sum_{n\geq 2}h_n(p)\prod_{i=1}^{n-1}(1-h_i(p))\\ &= 1-\prod_{i\geq 1}(1-h_i(p)).\end{aligned}$$

Logo para todo $p\in M$, existem $n\in\mathbb{N}$ e $\gamma\in\Gamma$ tais que $p\in V_{n,\gamma}$.

Portanto

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma}\psi_{n,\gamma}(p)=1.$$

(g5) Como $\{W_{n,\gamma}\}_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma}$ é localmente finita, temos que a família $\{supp(\psi_{n,\gamma})\}_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma}$ é localmente finita,

o que encerra a prova do lema. ■

Teorema 1.35 *Seja $(X,||\cdot||)$ um espaço de Banach com a propriedade (A^k) tal que a constante C_0 não depende da norma (equivalente) definida em X e seja M uma variedade Finsler K-fraca uniforme de classe C^l modelada sobre X. Então para toda função lipschitziana $f:M\longrightarrow\mathbb{R}$ e qualquer função continua $\varepsilon:M\longrightarrow(0,+\infty)$ existe uma função lipschitziana $g:M\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^m ($m:=\min\{l,k\}$) tal que*

$$|g(p)-f(p)|<\varepsilon(p) \quad e \quad ||dg_p||_p\leq 2C_0K^2 \quad \textit{para todo} \quad p\in M,$$

e

$$Lip(g)\leq 2C_0K^2Lip(f).$$

Prova. Podemos assumir que $L=Lip(f)>0$ (pois, se $L=0$ o resultado é verdadeiro) e $0<\varepsilon(p)<C_0K^2L$ para todo $p\in M$.

Para todo $p\in M$, pela continuidade de $\varepsilon:M\longrightarrow(0,\infty)$, existe $\delta_p>0$ tal que $\frac{\varepsilon(p)}{3}<\varepsilon(q)$ para todo $q\in B_M(p,3\delta_p)$ e existe uma aplicação $\varphi_p:B_M(p,3\delta_p)\longrightarrow X$ de classe C^l com

$\varphi_p(p) = 0$ tal que a condição (P1) da Definição 1.14 junto com as desigualdades (1.2) e (1.7) são satsfeitas para todo $q \in B_M(p, 3\delta_p)$.

Como na Afirmação 1 no lema acima

$$Lip(\varphi_{p_\gamma}) \leq K \ \text{ e } Lip(\varphi_{p_\gamma}^{-1}) \leq K$$

Seja $\mathcal{U} = \{B(p_\gamma, 2\delta_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ uma cobertura aberta de M, onde $\delta_\gamma := \delta_{p_\gamma}$ e Γ é um conjunto de índices.

Com o objetivo de simplificar as notações consideremos

$$\varphi_\gamma := \varphi_{p_\gamma},\ \varepsilon_\gamma := \varepsilon(p_\gamma) \ \text{ e } \ |||\cdot|||_\gamma := ||d(\varphi_\gamma^{-1})_0(\cdot)||_{p_\gamma}.$$

Para todo $\gamma \in \Gamma$, definamos $f_\gamma : \varphi_\gamma(B_M(p_\gamma, 3\delta_\gamma)) \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_\gamma(x) := f \circ \varphi_\gamma^{-1}(x).$$

Notemos que esta função é KL-Lipschitz com a norma $|||\cdot|||_\gamma$. De fato, sejam $x, y \in \varphi_\gamma(B_M(p_\gamma, 3\delta_\gamma))$. Visto que φ_γ^{-1} é lipschitziana, segue que

$$\begin{aligned} |f_\gamma(x) - f_\gamma(y)| &= |f(\varphi_\gamma^{-1}(x)) - f(\varphi_\gamma^{-1}(y))| \\ &\leq L\, d_M(\varphi_\gamma^{-1}(x), \varphi_\gamma^{-1}(y)) \\ &\leq KL\, |||x - y|||_\gamma. \end{aligned}$$

Por outro lado, existem refinamentos $\{V_{n,\gamma}\}_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma}$ e $\{W_{n,\gamma}\}_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma}$ de $\mathcal{U}$ satisfazendo as propriedades (i)-(iv) do Lema 1.32. Pelo lema anterior, existe uma família de funções lipschitzianas $\{\psi_{n,\gamma}\}_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma}$ de classe C^m tais que

$$supp(\psi_{n,\gamma}) \subset W_{n,\gamma} \subset B_M(p_\gamma, 2\delta_\gamma).$$

Seja $L_{n,\gamma} := \max\{1, \sup\{||d(\psi_{n,\gamma})_p||_p : p \in M\}\}$. Como X satisfaz a propriedade (A^k) e a constante C_0 não depende da norma equivalente escolhida em X, existe uma função lipschitziana $g_{n,\gamma} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tal que:

$$|g_{n,\gamma}(x) - f_\gamma(x)| \leq \frac{\varepsilon_\gamma/3}{2^{n+2}L_{n,\gamma}} \quad \text{para todo } \ x \in \varphi_\gamma(B_M(p_\gamma, 3\delta_\gamma)),$$

e

$$Lip(g_{n,\gamma}) \leq C_0 Lip(f_\gamma) \leq C_0 KL \text{ com a norma } |||\cdot|||_\gamma \text{ em } X.$$

Definamos a função $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(p) := \sum_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} \psi_{n,\gamma}(p)\, g_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p)).$$

Afirmamos que g está bem definida e é de classe C^m. De fato, como $supp(\psi_{n,\gamma}) \subset W_{n,\gamma} \subset B_M(p_\gamma, 2\delta_\gamma)$, segue que a aplicação $p \longmapsto \psi_{n,\gamma}(p)\, g_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p))$ é de classe C^m em M para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\gamma \in \Gamma$, e do fato que a família $\{supp(\psi_{n,\gamma})\}_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma}$ é localmente finita, deduzimos que g está bem definida e é de classe C^m em M.

Notemos que, se $\psi_{n,\gamma}(p) \neq 0$, segue que $p \in supp(\psi_{n,\gamma}) \subset B_M(p_\gamma, 2\delta_\gamma)$, logo $\varphi_\gamma(p) \in \varphi(B_M(p_\gamma, 3\delta_\gamma))$ e assim $f_\gamma(\varphi_\gamma(p)) = f \circ \varphi_\gamma^{-1} \circ \varphi_\gamma(p) = f(p)$. Logo,

$$\begin{aligned}
|g(p) - f(p)| &= \Big| \sum_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} \psi_{n,\gamma}(p)\, g_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p)) - f(p) \Big| \\
&= \Big| \sum_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} \psi_{n,\gamma}(p)\, g_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p)) - \sum_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} \psi_{n,\gamma}(p)\, f(p) \Big| \\
&= \Big| \sum_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} \psi_{n,\gamma}(p)[g_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p)) - f(p)] \Big| \\
&= \Big| \sum_{\{(n,\gamma):\psi_{n,\gamma}(p)\neq 0\}} \psi_{n,\gamma}(p)[g_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p)) - f_\gamma(\varphi_\gamma(p))] \Big| \\
&\leq \sum_{\{(n,\gamma):\psi_{n,\gamma}(p)\neq 0\}} \psi_{n,\gamma}(p) \big| g_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p)) - f_\gamma(\varphi_\gamma(p)) \big| \\
&\leq \sum_{\{(n,\gamma):\psi_{n,\gamma}(p)\neq 0\}} \psi_{n,\gamma}(p) \frac{\varepsilon_\gamma/3}{2^{n+2} L_{n,\gamma}} \\
&< \sum_{\{(n,\gamma):\psi_{n,\gamma}(p)\neq 0\}} \psi_{n,\gamma}(p)\varepsilon(p) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} \psi_{n,\gamma}(p)\varepsilon(p) = \varepsilon(p).
\end{aligned}$$

Agora iremos provar que g é $2C_0K^2L$-Lipschitz. Primeiramente, notemos que:

- Dado que $\sum_{\mathbb{N}\times\Gamma}\psi_{n,\gamma}(p)=1$ para todo $p\in M$, temos que $\sum_{\mathbb{N}\times\Gamma}d(\psi_{n,\gamma})_p=0$ para todo $p\in M$.

- A propriedade (iv) do refinamento $\{W_{n,\gamma}\}_{n\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma}$ implica que para todo $p\in M$ e $n\in\mathbb{N}$ existe no máximo um $\gamma\in\Gamma$, que denotaremos por $\gamma_p(n)$, tal que $p\in supp(\psi_{n,\gamma})$. Assim podemos definir o conjunto finito $F_p:=\{(n,\gamma)\in\mathbb{N}\times\Gamma : p\in supp(\psi_{n,\gamma})\}=\{(n,\gamma_p(n))\in\mathbb{N}\times\Gamma : p\in supp(\psi_{n,\gamma_p(n)})\}$.

- Se considerarmos a norma $|||\cdot|||_\gamma$ em X, então $Lip(g_{n,\gamma})\le C_0KL$. Assim,

$$|||g'_{n,\gamma}|||:=\sup\{|g'_{n,\gamma}(x)(v)| : |||v|||_\gamma\le 1\}\le C_0KL \quad \text{para todo} \quad x\in X.$$

- Se $p\in B_M(p_\gamma,3\delta_\gamma)$, então $|||d(\varphi_\gamma)_p|||:=\sup\{|||d(\varphi_\gamma)_p(v)|||_\gamma : ||v||_p\}\le K$

Portanto, obtemos que

$$||d(g_{n,\gamma}\circ\varphi_\gamma)_p||_p\le C_0K^2L, \quad \text{sempre que} \quad p\in B_M(p_\gamma,3\delta_\gamma),$$

e

$$\begin{aligned}
||dg_p||_p &= ||\sum_{(n,\gamma)\in F_p} g_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p))d(\psi_{n,\gamma})_p+\sum_{(n,\gamma)\in F_p}\psi_{n,\gamma}(p)d(g_{n,\gamma}\circ\varphi_\gamma)_p||_p\\
&= ||\sum_{(n,\gamma)\in F_p}\big(g_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p))-f(p)\big)d(\psi_{n,\gamma})_p+\sum_{(n,\gamma)\in F_p}\psi_{n,\gamma}(p)d(g_{n,\gamma}\circ\varphi_\gamma)_p||_p\\
&\le \sum_{(n,\gamma)\in F_p}\big|g_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p))-f_\gamma(\varphi_\gamma(p))\big|||d(\psi_{n,\gamma})_p||_p+\sum_{(n,\gamma)\in F_p}\psi_{n,\gamma}(p)||d(g_{n,\gamma}\circ\varphi_\gamma)_p||_p\\
&\le \sum_{(n,\gamma)\in F_p}\big|g_{n,\gamma}(\varphi_\gamma(p))-f_\gamma(\varphi_\gamma(p))\big|||d(\psi_{n,\gamma})_p||_p+\sum_{(n,\gamma)\in F_p}\psi_{n,\gamma}(p)C_0K^2L\\
&\le \sum_{\{n:(n,\gamma_p(n))\in F_p\}}\frac{\varepsilon(p)}{2^{n+1}L_{n,\gamma_p(n)}}L_{n,\gamma_p(n)}+C_0K^2L\\
&\le \frac{\varepsilon(p)}{4}+C_0K^2L\\
&\le 2\,C_0K^2L.
\end{aligned}$$

Finalmente, pela Proposição 1.25, temos que

$$Lip(g) \leq \sup\{||dg_p||_p : p \in M\} \leq 2C_0K^2L,$$

o que finaliza a prova. ■

Definição 1.36 *Seja M uma variedade Finsler de classe C^l no sentido de Neeb-Upmeier. Dizemos que M é C^k-**uniformemente bumpable** $(k < l)$ se existem constantes $R > 1$ (possivelmente grande) e $r > 0$ (pequeno) tais que para todo $p \in M$ e todo $\delta \in (0, r)$ existe uma função $b : M \longrightarrow [0, 1]$ de classe C^k satisfazendo:*

(1) $b(p) = 1$,

(2) $b(q) = 0$, *sempre que* $d_M(p, q) \geq \delta$,

(3) $\sup_{q \in M} ||db_q||_q \leq \frac{R}{\delta}$.

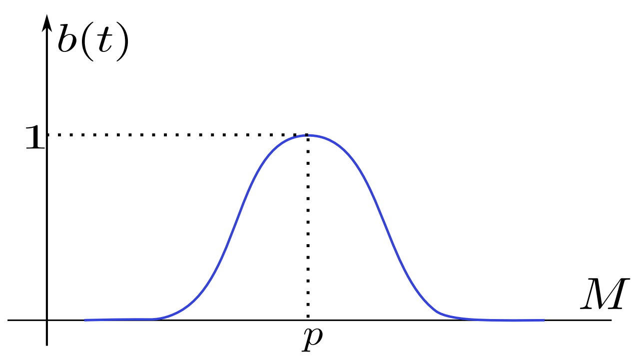


Figura 1.10: Variedade uniformemente bumpable

Corolário 1.37 *Seja $(X, ||\cdot||)$ um espaço de Banach com a propriedade (A^k) tal que a constante C_0 não depende da norma definida em X e seja M uma variedade Finsler de K-fraca uniforme de classe C^l modelada sobre X. Então M é C^m-uniformemente bumpable com $m := \min\{k, l\}$.*

Prova. Para todo $r > 0$, $\delta \in (0, r)$ e $p \in M$. Definamos a função $f : M \longrightarrow [0, 1]$ por

$$f(q) = \begin{cases} 1 - \frac{d_M(q,p)}{\delta} & \text{se} \quad d_M(q, p) \leq \delta, \\ 0 & \text{se} \quad d_M(q, p) \geq \delta, \end{cases}$$

Afirmamos que f é $\frac{1}{\delta}$-Lipschitz. De fato, sejam $q_1, q_2 \in M$.

(i) Se $d_M(q_1,p) \geq \delta$ e $d_M(q_2,p) \geq \delta$, temos que

$$0 = |f(q_1) - f(q_2)| \leq \frac{1}{\delta} d_M(q_1,q_2).$$

(ii) Se $d_M(q_1,p) \leq \delta$ e $d_M(q_2,p) \leq \delta$, temos que

$$\begin{aligned} |f(q_1) - f(q_2)| &= \left| \left(1 - \frac{d_M(q,p)}{\delta}\right) - \left(1 - \frac{d_M(q,p)}{\delta}\right) \right| \\ &= \frac{1}{\delta} \left| d_M(q,p) - d_M(q,p) \right| \\ &\leq \frac{1}{\delta} d_M(q_1,q_2). \end{aligned}$$

(iii) Se $d_M(q_1,p) \geq \delta$ e $d_M(q_2,p) \leq \delta$, temos que

$$\begin{aligned} |f(q_1) - f(q_2)| &= \left| 1 - \frac{d_M(q_2,p)}{\delta} \right| = 1 - \frac{d_M(q_2,p)}{\delta} \\ &\leq \frac{d_M(q_1,p)}{\delta} - \frac{d_M(q_2,p)}{\delta} \\ &\leq \frac{1}{\delta} d_M(q_1,q_2). \end{aligned}$$

Além disso, f satisfaz:

1) $f(p) = 1$.

2) $f(q) = 0$ se $q \notin B_M(p,\delta)$

Se consideramos a função $\varepsilon : M \longrightarrow (0,+\infty)$ definida por $\varepsilon(p) = \frac{1}{4}$ para todo $p \in M$, o Teorema 1.35 garante que existe uma função $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^m tal que

$$|f(q) - g(q)| < \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad ||dg_q||_q \leq 2C_0K^2 Lip(f) \quad \text{para todo } q \in M.$$

Além disso,

$$\sup\{||dg_p||_p : p \in M\} \leq \frac{2C_0K^2}{\delta} \quad \text{e} \quad Lip(g) \leq \frac{2C_0K^2}{\delta}$$

Finalmente, considerando a função lipschitziana $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ de classe C^∞ tal que

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \leq \frac{1}{4}, \\ 1 & \text{se} \quad t \geq \frac{3}{4}, \end{cases}$$

e $Lip(\theta) \leq 3$, definimos a função $b : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$b(q) := (\theta \circ g)(q).$$

A função b assim definida é de classe C^m. Além disso satisfaz:

i) $||db_p||_p \leq \frac{6C_0K^2}{\delta}$ para todo $p \in M$, o que implica que $\sup_{p\in M} ||db_p||_p \leq \frac{6C_0K^2}{\delta}$.

ii) $b(p) = 1$.

De fato, como $\frac{1}{4} > |g(p) - f(p)| = |g(p) - 1|$, temos que $\frac{3}{4} < g(q) < \frac{5}{4}$, logo $b(p) = \theta(g(p)) = 1$.

iii) $b(q) = 0$ para todo $q \notin B_M(p, \delta)$.

De fato, se $q \notin B_M(p, \delta)$, temos que $\frac{1}{4} > |g(p) - f(p)| = |g(p)|$ o que implica que $-\frac{1}{4} < g(q) < \frac{1}{4}$, logo $b(p) = \theta(g(p)) = 0$.

Definindo $R = 6C_0K^2$, concluimos que M é uniformemente bumpable. $\blacksquare$

Capítulo 2

Conceitos Básicos de Geometria Riemanniana

Neste capítulo vamos exibir definições e resultados da teoria básica geral da geometria Riemanniana, os quais são necessarios para o desenvolvimento do trabalho e, além disso, vamos fixar a notação a ser usada posteriormente. As demonstrações dos resultados, por se encontrarem nos livros textos básicos de Geometria Riemanniana, serão omitidas. Para mais detalhes sobre este capítulo veja [3],[13].

2.1 Métricas Riemannianas

Definição 2.1 *Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional. Uma métrica Riemanniana em M é uma aplicação que associa a cada $p \in M$ um produto interno (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida)*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R},$$

que varia diferenciavelmente com p no sentido de que se $\varphi : U \longrightarrow V$ é uma carta para uma vizinhança coordenada V de M e $\mathfrak{B}_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}(p), \frac{\partial}{\partial x^2}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x^n}(p) \right\}$ é a base coordenada de T_pM associada a esta carta para cada $p \in V$, então as funções $g_{ij} : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p) \right\rangle_p$$

são diferenciáveis.

Uma variedade diferenciável M munida de uma métrica Riemanniana é chamada de variedade Riemanniana. Podemos também dizer que o par (M, g) é uma variedade Riemanniana.

2.2 Conexões e Campos Paralelos

Definição 2.2 *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$, associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. Se a aplicação $X : M \longrightarrow TM$ é diferenciável diz-se que o campo é diferenciável.*

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos diferenciáveis de vetores em M, e $\mathcal{D}(M)$ ao anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 2.3 *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. O colchete de Lie de X, Y é o campo vetorial $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida por*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Definição 2.4 *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Uma conexão afim ∇ em M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

denotada por $(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

para todos os campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e para todas as funções $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Dizemos que $\nabla_X Y$ é a derivada covariante do campo Y na direção de X.

Sejam (φ, U) uma parametrização de M em p, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$, e $Y = \sum_{j=1}^n Y^j \partial_j$. Pela definição de conexão afim, temos que

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \Gamma_{ij}^k + X(Y^k) \right) \partial_k,$$

onde

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

As funções Γ_{ij}^k são chamadas de símbolos de Christoffel da conexão afim ∇.

Definição 2.5 *Seja M uma variedade Riemanniana. A conexão Riemanniana, também conhecida como conexão de Levi-Civita, é uma conexão afim ∇ no fibrado tangente TM tal que*

(i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *(simétrica)*

(ii) $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ *(compatibilidade com a métrica Riemanniana),*

para quaisquier $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 2.6 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $\alpha : I \longrightarrow M$ um outro campo vetorial diferenciável $\frac{DV}{dt}$ ao longo de α tal que:*

a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde V é um campo de vetores ao longo de α e f é uma função diferenciável em I.*

c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(\alpha(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} Y$.

Definição 2.7 *O campo diferenciável $\frac{DV}{dt}$ é chamado a derivada covariante de V ao longo de α.*

Em termos dos símbolos de Christoffel a derivada covariante possui a seguinte expressão

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j}^{n}\frac{dx^i}{dt}\Gamma_{ij}^{k}V^j\right\}\partial_k \tag{2.1}$$

Definição 2.8 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇. Um campo vetorial diferenciável V ao longo de uma curva $\alpha : I \longrightarrow M$ é chamado um paralelo ao longo de α se*

$$\frac{DV}{dt} \equiv 0.$$

Um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é chamado um campo paralelo se ele é paralelo ao longo de qualquer curva.

Usando a equação (2.1), a definição de campo paralelo é equivalente a um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j}^{n}\frac{dx^i}{dt}\Gamma_{ij}^{k}V^j = 0, \qquad k = 1, ..., n$$

Como o sistema de equações acima é linear, então existe uma única solução definida em todo $t \in I$ satisfazendo as condições iniciais $v^k(t_0) = v_0$. Portanto temos a seguinte proposição.

Proposição 2.9 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇. Seja $\alpha : I \longrightarrow M$ uma curva diferenciável em M com $t_0, t_1 \in I$.*

(*i*) *Para cada $V_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$ existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de α tal que $V(t_0) = V_0$. ($V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de α).*

(*ii*) *A aplicação*

$$P_{t_0,\alpha}^{t_1} : T_{\alpha(t_0)}M \longrightarrow T_{\alpha(t_1)}M$$

definida por

$$P_{t_0,\alpha}^{t_1}(V_0) = V(t_1),$$

onde V é o transporte paralelo de V_0 ao longo de α, é uma isometria linear.

Observação 2.10 (1) *A aplicação inversa de* $P^{t_1}_{t_0,\alpha}$ *é denotada por* $P^{t_0}_{t_1,\alpha} : T_{\alpha(t_1)}M \longrightarrow T_{\alpha(t_0)}M$.

(2) *No caso particular que* α *é o único segmento geodésico ligando os pontos* p *e* q *em* M*, então o transporte paralelo ao longo de* α *de* p *a* q *é denotado por* $L_{pq} : T_p \longrightarrow T_qM$.

2.3 Geodésicas e Aplicação Exponencial

Definição 2.11 *Seja* M *uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma curva diferenciável* $\gamma : I \longrightarrow M$ *é uma geodésica se*

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0$$

para todo $t \in I$.

Em outras palavras, uma geodésica é uma curva cujo campo velocidade é paralelo ao longo da curva (uma curva que transporta paralelamente o seu próprio vetor tangente).

Se $[a,b] \subset I$ e $\gamma : I \longrightarrow M$ é uma geodésica, então a restrição de γ a $[a,b]$ é chamada segmento de geodésica que liga $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Proposição 2.12 *Se* $\gamma : I \longrightarrow M$ *é uma geodésica, então*

$$||\gamma'(t)|| \equiv \textit{constante.}$$

Definição 2.13 *Uma geodésica* $\gamma : I \longrightarrow M$ *é normalizada (ou unitária) se*

$$||\gamma'(t)|| = 1.$$

Observação 2.14 *Toda geodesica que não é um ponto (ou seja,* $||\gamma'(t)|| \neq 0$*) pode ser normalizada através de uma parametrização por comprimento de arco.*

Em um sistema de coordenadas (φ, U) em torno de $\gamma(t_0)$, γ será uma geodésica se, e somente se, satisfazer o sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem não linear, chamado a equação geodésica

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt} = 0, \qquad k = 1, ..., n,$$

onde $\gamma(t) = \varphi(x^1(t), ..., x^n(t))$ na parametrização (φ, U). A existência e unicidade da solução do sistema de equações acima satisfazendo condições iniciais $x^i(t_0) = x_{i_0}$ e $\frac{dx^i}{dt}(t_0) = v_{i_0}$ nos leva ao seguinte teorema.

Teorema 2.15 (Teorema de Existência e Unicidade de Geodésicas) *Seja M uma variedade Riemanniana. Então para todo $p \in M$ e $v \in T_pM$, e para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 e uma única geodésica $\gamma : I \longrightarrow M$ tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$.*

Denotaremos a geodésica $\gamma(t)$ de M que no instante $t = 0$ passa por p com velocidade v por $\gamma(t, p, v)$.

Podemos aumentar ou disminuir a velocidade de uma geodésica alterando assim o seu intervalo de definição. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Lema 2.16 (Homogeneidade de uma geodésica) *Seja $\gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ uma geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Para qualquer $a > 0$ a curva $\beta(t) = \gamma(at)$ é uma geodésica tal que $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = av$ definida no intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$. Consequentemente,*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

No intuito de definir a aplicação exponencial, precisamos da seguinte proposição.

Proposição 2.17 *Seja M uma variedade Riemanniana. Então, para cada $p \in M$ existe uma vizinhança V de $p \in M$, $\varepsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável*

$$\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{V} \longrightarrow M, \quad \mathcal{V} = \{(q, v) : q \in V \text{ e } v \in T_qM, ||v|| < \varepsilon\}$$

tais que a curva $t \longmapsto \gamma(t, q, v)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que satisfaz as condições iniciais $\gamma(0) = q$, $\gamma'(0) = v$ para todo $q \in V$ e para todo $v \in T_qM$ tal que $||v|| < \varepsilon$.

Definição 2.18 *Seja M uma variedade Riemanniana. Dado $p \in M$ e $\mathcal{V} \subset TM$ um aberto dado pela proposição acima. Então a aplicação $exp : \mathcal{V} \longrightarrow M$ dada por*

$$exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(||v||, p, \frac{v}{||v||}\right), \qquad (q, v) \in \mathcal{V},$$

é chamada a aplicação exponencial em $\mathcal{V}$.

É usual considerar a aplicação exponencial restrita à bola aberta $B(0,\varepsilon) \subset T_qM$, ou seja definiremos

$$exp_q : B(0,\varepsilon) \subset T_qM \longrightarrow M$$

por $exp_q(v) = exp(q,v)$.

Geometricamente, se $v \neq 0$, $exp_q(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $||v||$, a partir de q, sobre a geodésica que passa por q com velocidade $\frac{v}{||v||}$. No caso em que $||v|| = 0$ temos que $exp_q(v) = q$.

Teorema 2.19 *Dado $p \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $exp_p : B(0,\varepsilon) \subset T_pM \longrightarrow M$ é um difeomorfismo de $B(0,\varepsilon)$ sobre um aberto de M.*

Definição 2.20 *Se exp_p é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem em T_pM, $exp_p(V) = U$ é chamada uma vizinhança normal de p. Se $B(0,\varepsilon)$ é tal que $\overline{B(0,\varepsilon)} \subset V$, chamamos $exp_p(B(0,\varepsilon)) = B(p,\varepsilon)$ de bola geodésica de centro p e radio ε. A fronteira $\partial B(p,\varepsilon)$ de uma bola geodésica é chamada uma esfera geodésica centrada em p.*

Teorema 2.21 *Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que se $0 < \delta < r$, temos que $exp_p : B(0,\delta) \longrightarrow B(p,\delta)$ é um difeomorfismo $(1+\varepsilon)$-bilipschitz (isto é, as aplicações $exp_p : B(0,\delta) \longrightarrow B(p,\delta)$ e $exp_p^{-1} : B(p,\delta) \longrightarrow B(0,\delta)$ são $(1+\varepsilon)$-Lipschitz).*

Lema 2.22 (Lema de Gauss) *Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $v \in T_pM$ tal que $exp_p(v)$ está definida. Então*

$$\left\langle d(exp_p)_v v, d(exp_p)_v w \right\rangle = \langle v, w \rangle$$

para todo $w \in T_pM$.

Em particular, as geodésicas radiais que partem de p são ortogonais às esferas geodésicas centradas em p.

2.4 A Distância Intrínseca

Definição 2.23 *Seja M uma variedade Riemanniana e $\gamma : I \longrightarrow M$ uma curva parametrizada. O comprimento do segmento γ definido no intervalo $[a, b] \subset I$ é definido por*

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||_{\gamma(t)}\, dt$$

Definição 2.24 *Seja M uma variedade Riemanniana conexa. Dados p e $q \in M$, a distância entre p e q é definida por*

$$d_M(p, q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ é uma curva diferenciável por partes ligando } p \text{ e } q\}.$$

Proposição 2.25 *Seja M uma variedade Riemanniana conexa. Com a função distância definida acima, M é um espaço métrico. Além disso, a topologia de M como espaço métrico coincide com a topologia inicial de M como variedade diferenciável.*

Observação 2.26 *Seja M é uma variedade Riemanniana e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Para cada $p \in M$, $df_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma funcional linear, o Teorema de representação de Riesz garante que existe um único vetor $\nabla f(p) \in T_pM$ tal que*

$$df_p(v) = \langle \nabla f(p), v\rangle_p \qquad \text{para todo } v \in T_pM,\ p \in M.$$

Além disso,

$$\|df_p\|_p = \|\nabla f(p)\|_p.$$

Definição 2.27 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o gradiente de f, denotado por ∇f, como sendo o campo vetorial em M dado por*

$$\langle \nabla f(p), v\rangle_p = df_p(v) \qquad \text{para todo } v \in T_pM,\ p \in M.$$

Lema 2.28 *Seja M uma variedade Riemanniana conexa. Dado $p \in M$, seja $B(p, \varepsilon)$ a bola geodésica centrada em p e raio ε. Considere a função $d : B(p, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$d(x) = d_M(p, x) = ||exp_p^{-1}(x)||_p.$$

Temos que:

(i) d é diferenciável em $B(p,\varepsilon)\backslash\{p\}$

(ii) $||\nabla d(x)||_x = 1$ e $\nabla d(x)$ é ortogonal às esferas geodésicas centradas em p e aponta para afora.

Prova.

(i) Dado que $d(x) = ||exp_p^{-1}(x)||_p = \sqrt{\left\langle exp_p^{-1}(x), exp_p^{-1}(x)\right\rangle_p}$ e exp_p é um difeomorfismo no dominio de d, temos que d é diferenciável em $B(p,\varepsilon)\backslash\{p\}$.

(ii) Como as esferas geodésicas são curvas de nível da função d, vale a ortogonalidade. Dado $x \in B(p,\varepsilon)$, com $d(x) = t_0$, seja $\gamma : [0,t_0] \longrightarrow M$ uma geodésica parametrizada por comprimento de arco tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(t_0) = x$. Então

$$\langle \nabla d(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0)\rangle_x = \frac{d}{dt}(d\circ\gamma)(t)\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(t)\Big|_{t=t_0} = 1.$$

Logo,

$$||\nabla d(\gamma(t_0))||_x = ||\nabla d(\gamma(t_0))||_x\,||\gamma'(t_0)||_x = |\langle \nabla d(t_0), \gamma'(t_0)\rangle_x| = 1.$$

Portanto,

$$||\nabla d(x)||_x = 1,$$

o que finaliza a prova. ■

2.5 Variedades Completas e o Teorema de Hopf-Rinow

Definição 2.29 *Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que M é geodesicamente completa se para todo $p \in M$ as geodésicas radiais $\gamma(t)$ partindo de p estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Lema 2.30 *Seja M uma variedade Riemanniana conexa. Se exp_p está definida em todo T_pM, então qualquer ponto $q \in M$ pode ser ligado a p por um segmento geodésico γ tal que $L(\gamma) = d_M(p,q)$.*

Teorema 2.31 (Hopf-Rinow) *Se M é uma variedade Riemanniana completa e conexa, então existe pelo menos uma geodésica minimal que liga dois pontos quaisquer de M.*

Definição 2.32 *Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que um subconjunto $U \subset M$ é convexo se para todos os pontos $x, y \in U$ existe uma única geodésica minimizante ligando x a y cuja imagem está inteiramente contida em U.*

Teorema 2.33 (Teorema de Whitehead) *Seja M uma variedade Riemanniana. Dado $x \in M$, existe $c > 0$ tal que para todo $r \in (0, c)$ a bola $B(x, r) = exp_x(B(0, r))$ é convexa.*

Prova. Veja [12], página 220. ■

O Teorema 2.33 motiva a seguinte definição.

Definição 2.34 *Dizemos que uma variedade Riemanniana M é **uniformemente localmente convexa** se existe $c > 0$ tal que para todo $x \in M$ e $r \in (0, c)$ a bola $B(x, r) = exp_x(B(0, r))$ é convexa.*

Definição 2.35 *Seja M uma variedade Riemanniana. Definimos o **raio de convexidade** $c(M, x)$ de $x \in M$ por*

$$c(M, x) = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} : \textit{a bola geodésica } B(x, r) \ \textit{ é convexa}\}.$$

O raio de convexidade $c(M)$ de M é definido por

$$c(M) := \inf\{c(M, x) : x \in M\}.$$

Observação 2.36 *Pelo Teorema 2.33, temos que $c(M, x) > 0$ para todo $x \in M$. Por outro lado, a função $x \longmapsto c(M, x)$ é contínua (veja [12], Corolário 1.9.11). Portanto, se M é compacta, então $c(M) > 0$, isto é, M é uniformemente localmente convexa.*

Definição 2.37 *Seja M uma variedade Riemanniana. Definimos o **raio de injetividade** $i(M, x)$ de $x \in M$ por*

$$i(M, x) := \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} : exp_x : B(0, r) \longrightarrow M \textit{ é um difeomorfismo } C^\infty\}.$$

O raio de injetividade $i(M)$ de M é definido por

$$i(M) = \inf\{i(M,x) : x \in M\}.$$

Observação 2.38 *Pelo Teorema 2.19, temos que $i(M,x) > 0$ para todo $x \in M$. Por outro lado, a função $x \longmapsto i(M,x)$ é contínua (veja [12], Proposição 2.1.10). Portanto, se M é compacta, então $i(M) > 0$.*

2.6 Desigualdades de Valor Médio

Definição 2.39 *Sejam M, N variedades Riemannianas e $K \geq 0$. Uma função $f : M \longrightarrow N$ é dita ser K-Lipschitz se*

$$d_N(f(x), f(y)) \leq K\, d_M(x,y), \text{ para todo } x \in M.$$

Teorema 2.40 (Desigualdade de valor médio) *Sejam M, N variedades Riemannianas e $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Se existe uma constante $C > 0$ tal que $||df_x||_x \leq C$ para todo $x \in M$, então f é C-Lipschitz.*

Prova. Sejam $p, q \in M$. Segue da definição de $d_M(p,q)$ que dado $\varepsilon > 0$, existe uma curva $\gamma : [0,T] \longrightarrow M$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(T) = q$ tal que

$$L(\gamma) \leq d_M(p,q) + \frac{\varepsilon}{C}.$$

consideramos a curva $\beta : [0,T] \longrightarrow N$ definida por $\beta(t) := f \circ \gamma(t)$, temos que β é de classe C^1 e liga $f(p)$ a $f(q)$ em N. Devido à definição de $d_N(f(p), f(q))$, temos que

$$\begin{aligned} d_N(f(p), f(q) \leq L(\beta) &= \int_0^T ||\beta'(t)||_{\beta(t)}\, dt = \int_0^T ||df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))||_{f(\gamma(t))}\, dt \\ &\leq C \int_0^T ||\gamma'(t)||_{\gamma(t)}\, dt = C\, L(\gamma) \\ &\leq C \left(d_M(p,q) + \frac{\varepsilon}{C} \right) = C\, d_M(p,q) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d_N(f(p), f(q) \leq C\, d_M(p,q),$$

o que conclui a prova. ■

Teorema 2.41 *Sejam M, N variedades Riemannianas e $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação K-Lipschitz, então $||df_x||_x \leq K$ para todo $x \in M$.*

Prova. Vamos considerar primeiro o caso $N = \mathbb{R}$. Suponhamos que existe $x_0 \in M$ tal que $||df_{x_0}||_{x_0} > K$, ou seja, $||df_{x_0}||_{x_0} = \sup\{df_{x_0}(v) : v \in T_{x_0}M,\ ||v||_{x_0} \leq 1\} > K$. Segue da definição de supremo que dado $\varepsilon > 0$ existe $v_0 \in T_{x_0}M$ com $||v_0||_{x_0} = 1$ tal que

$$K - \varepsilon < ||df_{x_0}||_{x_0} - \varepsilon < df_{x_0}(v_0).$$

Logo, desde que ε é arbitrário, temos que

$$df_{x_0}(v_0) > K.$$

Seja $\gamma(t) = exp_{x_0}(tv_0)$ a geodésica radial definida para $t \in [-r_0, r_0]$ com $r_0 > 0$ (suficientemente pequeno). Definamos a função $F : [-r_0, r_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(t) = (f \circ \gamma)(t).$$

Notemos que $F'(0) = df_{x_0}(v_0) > K$. Pela definição de $F'(0)$, existe $\delta_0 \in (0, r_0)$ tal que

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} > K, \quad \text{sempre que} \quad -\delta_0 \leq t \leq \delta_0.$$

Dado que $x_0 = \gamma(0)$, escolhendo $y_0 = \gamma(\delta_0)$, temos que

$$|f(x_0) - f(y_0)| \geq F(\delta_0) - F(0) > K\,\delta_0 = K\, d_M(x_0, y_0),$$

o que contradiz o fato de que f é K- Lipschitz.

Agora vejamos o caso geral, ou seja, quando N é uma variedade Riemanniana. Suponhamos que $||df_{x_0}||_{x_0} > K$ para algum $x_0 \in M$, então existem $\xi_0 \in T^*_{f(x)}N$ e $v_0 \in T_xM$ com $||v_0||_{x_0} = 1 = ||\xi_0||_{f(x_0)}$ e tais que $K < ||df_{x_0}||_{x_0} = \xi_0(df_{x_0}(v_0))$.

Escolhemos $s_0 > 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que

$$exp^{-1}_{f(x_0)} : B(f(x_0), s_0) \longrightarrow B(0, s_0)$$

é um difeomorfismo $(1+\varepsilon)$-Lipschitz e $K < (1+\varepsilon)K < ||df_{x_0}||_{x_0}$. Além disso, escolhemos $r_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que $f(B(x_0, r_0)) \subset B(f(x_0), s_0)$. Agora, considerando a função $g : B(x_0, r_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \xi_0\big(exp^{-1}_{f(x_0)}(f(x))\big).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &= |\xi_0(exp^{-1}_{f(x_0)}(f(x))) - \xi_0(exp^{-1}_{f(x_0)}(f(y)))| \\
&= |\xi_0\big(exp^{-1}_{f(x_0)}(f(x)) - exp^{-1}_{f(x_0)}(f(y))\big)| \\
&\leq ||exp^{-1}_{f(x_0)}(f(x)) - exp^{-1}_{f(x_0)}(f(y))||_{f(x_0)} \\
&\leq (1+\varepsilon)\, d_N(f(x), f(y)) \\
&\leq (1+\varepsilon)K\, d_M(x, y).
\end{aligned}$$

Por outro lado, visto que $d(exp^{-1}_{f(x_0)})_{f(x_0)}$ é a identidade, temos que

$$\begin{aligned}
dg_{x_0}(v_0) &= d(\xi_0)_{exp^{-1}_{f(x_0)}(f(x))} \circ d(exp^{-1}_{f(x_0)})_{f(x_0)} \circ df_{x_0}(v_0) \\
&= \xi_0 \circ df_{x_0}(v_0) = ||df_{x_0}||_{x_0} \\
&> (1+\varepsilon)K,
\end{aligned}$$

o que contradiz o resultado provado para o caso $N = \mathbb{R}$. ∎

Capítulo 3

O Principio Variacional Suave em Variedades Riemannianas

Definição 3.1 *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função que toma valores no conjunto dos números reais estendidos. A função f é chamada de **função própria** quando*

$$Dom(f) = \{x \in M : f(x) < \infty\} \neq \emptyset.$$

Definição 3.2 *Dizemos que a função $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é **semicontínua inferiormente** (s.c.i.) em x_0 se para todo $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $U_{x_0} \subset M$ de x_0 tal que $f(x_0) < f(x) + \varepsilon$, para todo $x \in U_{x_0}$. Dizemos que f é **semicontínua superiormente** (s.c.s.) em x_0 se $-f$ é s.c.i. em x_0.*

Proposição 3.3 *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *f é s.c.i.*

(2) *Dado $x \in M$, $\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x)$.*

(3) *Dado $x \in M$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$, $\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq f(x)$.*

Proposição 3.4 *Se f_1 e f_2 são funções s.c.i., então $f_1 + f_2$ é s.c.i.*

Definição 3.5 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $F : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função limitada inferiormente. Dizemos que F atinge um* ***mínimo forte*** *em $p \in M$ se*

(1) $F(p) = \inf\{F(x) : x \in M\}$

(2) *Dada $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $F(p_n) \to F(p)$, então $d_M(p_n, p) \to 0$.*

Definição 3.6 *Dizemos que uma variedade Riemanniana M é* ***uniformemente bumpable*** *se existem $R > 1$ (possivelmente grande) e $r > 0$ (pequeno) tais que para todo $p \in M$ e $\delta \in (0, r)$ existe uma função $b : M \longrightarrow [0, 1]$ de classe C^1 tal que:*

1. $b(p) = 1$,
2. $b(x) = 0$ *se* $d(x, p) \geq \delta$,
3. $\sup_{x\in M} ||db_x||_x \leq \frac{R}{\delta}$.

Corolário 3.7 *Toda variedade Riemanniana é uniformemente bumpable.*

Prova. Isto segue diretamente dos Corolários 1.29 e 1.37. ■

Teorema 3.8 (Principio variacional suave) *Sejam M uma variedade Riemanniana completa e $F : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria, s.c.i. e limitada inferiormente. Então para todo $\delta > 0$, existe uma função $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e limitada tal que:*

(1) *$F + \varphi$ atinge um minimo forte em M.*

(2) $||\varphi||_\infty := \sup_{p\in M} |\varphi(p)| < \delta$ *e* $||d\varphi||_\infty := \sup_{p\in M} ||d\varphi_p||_p < \delta$.

Prova. A prova segue diretamente dos Lemas 3.9, 3.10 e 3.11. ■

Lema 3.9 *Seja $(M, d(\cdot,\cdot))$ um espaço métrico completo e $(Y, ||\cdot||_Y)$ um espaço de Banach de funções reales limitadas e contínuas em M que satisfazem as seguintes condições:*

1) $||\varphi||_Y \geq ||\varphi||_\infty := \sup\{|\varphi(x)| : x \in M\}$,

2) *Existem constantes $C > 1$ e $r > 0$ tais que para todo $p \in M$, $\varepsilon > 0$ e $\delta \in (0, r)$, existe uma função $b \in Y$ tal que:*

   (i) $b(p) = \varepsilon$,

   (ii) $||b||_Y \leq C\varepsilon(1 + \frac{1}{\delta})$,

   (iii) $b(x) = 0$ *sempre que* $x \notin B(p, \delta)$.

Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria, s.c.i. e limitada inferiormente, então o conjunto

$$G = \{\varphi \in Y : f + \varphi \ \ \textit{atinge um mínimo forte em} \ \ M\}$$

contem um subconjunto G_δ denso em Y.

Prova. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq \frac{1}{r}$. Para cada $n \geq N$ consideremos o conjunto

$$U_n = \{\varphi \in Y : \text{existe } x_0 \in M \text{ tal que } (f + \varphi)(x_0) < \inf\{(f + \varphi)(x) : x \in M \backslash B(x_0, \frac{1}{n})\}$$

Afirmação 1: O conjunto U_n é aberto.

De fato, dada $\varphi \in U_n$, definamos

$$\alpha := \inf\{(f + \varphi)(x) : x \in M \backslash B(x_0, \frac{1}{n})\} > (f + \varphi)(x_0)$$

e

$$\rho := \frac{1}{3}\big(\alpha - (f + \varphi)(x_0)\big).$$

Afirmamos que $B(\varphi, \rho) \subset U_n$. De fato, dada $\varphi_0 \in B(\varphi, \rho)$, temos que

$$\begin{aligned}
\inf\{(f+\varphi_0)(x) : x \in M\backslash B(x_0,\frac{1}{n})\} &\geq \inf\{(f+\varphi)(x) : x \in M\backslash B(x_0,\frac{1}{n})\}+\\
&\quad + \inf\{(\varphi_0-\varphi)(x) : x \in M\backslash B(x_0,\frac{1}{n})\}\\
&\geq \alpha + \inf\{(\varphi_0-\varphi)(x) : x \in M\}\\
&= \alpha - \sup\{(\varphi-\varphi_0)(x) : x \in M\}\\
&= \alpha - ||\varphi_0-\varphi||_\infty \geq \alpha - ||\varphi_0-\varphi||_Y\\
&> \alpha - \frac{1}{3}\big(\alpha-(f+\varphi)(x_0)\big)\\
&= \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}(f+\varphi)(x_0)\\
&> (f+\varphi)(x_0).
\end{aligned}$$

Logo, $\varphi_0 \in U_n$. Portanto U_n é aberto.

Afirmação 2: O conjunto U_n é denso em Y.

De fato, sejam $\varphi \in Y$ e $\varepsilon > 0$. Dado que $f+\varphi$ é limitada inferiormente existe $x_0 \in M$ tal que

$$(f+\varphi)(x_0) < \inf\{(f+\varphi)(x) : x \in M\} + \varepsilon. \tag{3.1}$$

Seja $\delta = \frac{1}{n} < r$, por hipótese podemos escolher uma função $b \in Y$ tal que:

(i) $b(x_0) = \varepsilon$,

(ii) $||b||_Y \leq C\varepsilon(1+\frac{1}{\delta}) = C\varepsilon(1+n)$,

(iii) $b(x) = 0$ se $x \notin B(x_0,\delta) = B(x_0,\frac{1}{n})$.

A desigualdade (3.1) combinada com o item (i) implica que

$$(f+\varphi)(x_0) - b(x_0) < \inf\{(f+\varphi_0)(x) : x \in M\}.$$

Se definimos $h = -b$, temos que

$$(f + \varphi + h)(x_0) < \inf\{(f + \varphi)(x) : x \in M\} \leq \inf\{(f + \varphi)(x) : x \in M \backslash B(x_0, \frac{1}{n})\}.$$

Usando o item (iii), temos que

$$\inf\{(f + \varphi)(x) : x \in M \backslash B(x_0, \frac{1}{n})\} = \inf\{(f + \varphi + h)(x) : x \in M \backslash B(x_0, \frac{1}{n})\}.$$

Combinando as duas últimas desigualdades,

$$(f + \varphi + h)(x_0) < \inf\{(f + \varphi + h)(x) : x \in M \backslash B(x_0, \frac{1}{n})\}.$$

Apartir desta desigualdade podemos ver que $\varphi + h \in U_n$.

Por outro lado, temos que $||\varphi - (\varphi + h)||_Y = || - h||_Y = ||b||_Y < C\varepsilon(1 + n)$. Assim, concluímos que U_n é denso em Y.

Afirmação 3: $U = \bigcap_{n=N}^{\infty} U_n$ é um subconjunto G_δ denso em Y.

De fato, segue imediatamente do Teorema de Baire.

Afirmação 4: U está contido em G.

De fato, devemos provar que, se $\varphi \in U$, então $f + \varphi$ atinge um mínimo forte em M.

Para cada $n \geq N$, como $\varphi \in U_n$, existe $x_n \in M$ tal que

$$(f + \varphi)(x_n) < \inf\{(f + \varphi)(x) : x \in M \backslash B(x_n, \frac{1}{n})\}. \tag{3.2}$$

Notemos que: se $k \geq n$, então $x_k \in B(x_n, \frac{1}{n})$. De fato, se $x_k \notin B(x_n, \frac{1}{n})$, então

$$(f + \varphi)(x_n) < \inf\{(f + \varphi)(x) : x \in M \backslash B(x_n, \frac{1}{n})\} \leq (f + \varphi)(x_k). \tag{3.3}$$

Por outro lado, $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{k}$ implica que $x_n \notin B(x_k, \frac{1}{k})$, assim

$$(f + \varphi)(x_k) < \inf\{(f + \varphi)(x) : x \in M \backslash B(x_k, \frac{1}{k})\} \leq (f + \varphi)(x_n),$$

o que é uma contradição com (3.3). Portanto, $(x_n)_{n=N}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em M, e dado que M é completo, $(x_n)_{n=N}^{\infty}$ converge para algum $x_0 \in M$.

Definamos

$$\alpha_n := \inf\{(f + \varphi)(x) : x \in M \backslash B(x_n, \frac{1}{n})\}.$$

Dado que f é s.c.i.,

$$(f+\varphi)(x_0) \leq \liminf (f+\varphi)(x_n) \leq \liminf \alpha_n.$$

Logo, dado $y \in M$, $y \neq x_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y \notin B(x_n, \frac{1}{n})$, para todo $n \geq n_0$. Então $\alpha_n \leq (f+\varphi)(y)$, para todo $n \geq n_0$ e consequentemente,

$$(f+\varphi)(x_0) \leq \liminf \alpha_n \leq (f+\varphi)(y).$$

Assim, $f+\varphi$ atinge um mínimo global em $x_0 \in M$.

Finalmente, provaremos que $f+\varphi$ atinge um mínimo forte em $x_0 \in M$, ou seja, se $(y_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência em M tal que

$$\lim_{n\to\infty} (f+\varphi)(y_n) = (f+\varphi)(x_0),$$

implica que $y_n \to x_0$. Suponhamos que y_n não converge para x_0. Podemos supor que $d(y_n, x_0) \geq \varepsilon$ para todo $n \geq 1$. Usando a desigualdade triangular, temos que

$$d(y_n, x_k) + d(x_k, x_0) \geq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n, k \geq 1.$$

Dado que $x_k \to x_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(y_n, x_k) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq 1 \text{ e } \ k \geq N,$$

se escolhemos k suficientemente grande tal que $\frac{1}{k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e $k \geq N$, temos que

$$d(y_n, x_k) \geq \frac{1}{k} \ \text{ para todo } \ n \geq 1.$$

Visto que $(f+\varphi)$ atinge um mínimo global em x_0, temos que

$$(f+\varphi)(x_0) \leq (f+\varphi)(x_k) < \inf\{(f+\varphi)(x) : x \notin B(x_k, \frac{1}{k})\} \leq (f+\varphi)(y_n)$$

para todo $n \geq 1$. Daí,

$$(f+\varphi)(y_n) \nrightarrow (f+\varphi)(x_0).$$

Isto é uma contradição.

Portanto, G contem um subconjunto G_δ denso em Y. $\blacksquare$

Lema 3.10 *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Então, o espaço vetorial*

$$Y = \{\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ e de classe } C^1, \text{limitada e lipschitziana}\},$$

munido da norma $||\varphi||_Y = \max\{||\varphi||_\infty,\ ||d\varphi||_\infty\}$ *é um espaço de Banach.*

Prova. É claro que $(Y, ||\cdot||_Y)$ é um espaço normado. Vejamos que $(Y, ||\cdot||_Y)$ é completo. Consideremos uma sequência de Cauchy $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $(Y, ||\cdot||_Y)$. Dado que $||\varphi_n||_Y = \max\{||\varphi_n||_\infty, ||d\varphi_n||_\infty\}$, temos que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(d\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy no espaço das funções contínuas e limitadas em M e T^*M, respectivamente.

Como o espaço das funções contínuas e limitadas em M com a norma $||\cdot||_\infty$ é completo existe uma função contínua limitada $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$||\varphi_n - \varphi||_\infty \longrightarrow 0.$$

Por outro lado, desde que T_x^*M é um espaço normado e completo para todo $x \in M$, temos que a sequência $(d\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para uma aplicação $\psi : M \longrightarrow T^*M$ definida por

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} d(\varphi_n)_x, \tag{3.4}$$

onde o limite esta em T_x^*M para cada $x \in M$.

Afirmação 1: $\psi = d\varphi$.

De fato, dado $p \in M$, segue do Teorema 2.19 que existe $r > 0$ (que depende de p) tal que la aplicação exponencial $exp_p : B(0,r) \subset T_pM \longrightarrow B(p,r)$ é um difeomorfismo e pelo Teorema 2.21 as derivadas de exp_p e exp_p^{-1} são limitadas por $C > 1$ sobre $B(0,r)$ e $B(p,r)$, respectivamente.

Consideremos as funções $\tilde{\varphi} : B(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{\varphi}_n : B(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\tilde{\varphi}(z) = (\varphi \circ exp_p)(z)$ e $\tilde{\varphi}_n(z) = (\varphi_n \circ exp_p)(z)$, respectivamente.

Notemos que

$$d(\tilde{\varphi}_n)_{w_y} = d(\varphi_n)_y \circ d(exp_p)_{w_y}$$

e

$$d\tilde{\varphi}_{w_y} = d\varphi_y \circ d(exp_p)_{w_y},$$

onde $w_y = exp_p^{-1}(y)$.

Segue que

$$\begin{aligned}\sup_{w_y \in B(0,r)} ||d(\tilde{\varphi}_m)_{w_y} - d(\tilde{\varphi}_n)_{w_y}||_p &\leq C \sup_{y \in B(p,r)} ||d(\varphi_m)_y - d(\varphi_n)_y||_p \\ &\leq C\, ||d\varphi_m - d\varphi_n||_\infty \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\tilde{\varphi}(h) - \tilde{\varphi}(0) - \psi(p)(h)}{||h||_p}\right| &= \left|\frac{\tilde{\varphi}(h) - \tilde{\varphi}(0)}{||h||_p} - \psi(p)\left(\frac{h}{||h||_p}\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{\tilde{\varphi}(h) - \tilde{\varphi}(0) - (\tilde{\varphi}_n(h) - \tilde{\varphi}_n(0))}{||h||_p}\right| + \\ &\quad + \left|\frac{\tilde{\varphi}_n(h) - \tilde{\varphi}_n(0)}{||h||_p} - d(\tilde{\varphi}_n)_0\left(\frac{h}{||h||_p}\right)\right| + \\ &\quad + \left|(d(\tilde{\varphi}_n)_0 - \psi(p))\left(\frac{h}{||h||_p}\right)\right|. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Aplicando o teorema do valor médio e a desigualdade (3.5), deduz-se que

$$\begin{aligned}|\tilde{\varphi}_m(h) - \tilde{\varphi}_m(0) - (\tilde{\varphi}_n(h) - \tilde{\varphi}_n(0))| &= |(\tilde{\varphi}_m - \tilde{\varphi}_n)(h) - (\tilde{\varphi}_m - \tilde{\varphi}_n)(0)| \\ &\leq \sup_{x \in B(0,r)} ||d(\tilde{\varphi}_m - \tilde{\varphi}_n)_x||_p ||h||_p \\ &\leq C\, ||d\varphi_m - d\varphi_n||_\infty ||h||_p. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Visto que $(d\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$m, n \geq n_0 \quad \text{implica que} \quad ||d\varphi_m - d\varphi_n||_\infty < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Da desigualdade (3.7), segue que

$$|\tilde{\varphi}_m(h) - \tilde{\varphi}_m(0) - (\tilde{\varphi}_n(h) - \tilde{\varphi}_n(0))| < \frac{\varepsilon}{3}||h||_p, \quad \text{sempre que} \quad m, n \geq n_0.$$

Tomando o limite quando $m \to \infty$, obtemos

$$|\tilde{\varphi}(h) - \tilde{\varphi}(0) - (\tilde{\varphi}_n(h) - \tilde{\varphi}_n(0))| < \frac{\varepsilon}{3}||h||_p, \quad \text{sempre que} \quad n \geq n_0. \qquad (3.8)$$

Por outro lado, de (3.4), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica que

$$\left|(d(\tilde{\varphi}_n)_0 - \psi(p))\left(\frac{h}{||h||_p}\right)\right| = \left|(d(\varphi_n)_p - \psi(p))\left(\frac{h}{||h||_p}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.9}$$

Se fixamos $n = n_0$, desde que $\tilde{\varphi}_{n_0}$ é diferenciável, temos

$$\left|\frac{\tilde{\varphi}_{n_0}(h) - \tilde{\varphi}_{n_0}(0)}{||h||_p} - d(\tilde{\varphi}_{n_0})_0\left(\frac{h}{||h||_p}\right)\right| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad ||h||_p \to 0,$$

ou seja, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{\tilde{\varphi}_{n_0}(h) - \tilde{\varphi}_{n_0}(0)}{||h||_p} - d(\tilde{\varphi}_{n_0})_0\left(\frac{h}{||h||_p}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{sempre que} \quad ||h||_p < \delta. \tag{3.10}$$

Combinanado (3.6), (3.8), (3.9), (3.10) para $n = n_0$, temos que

$$\left|\frac{\tilde{\varphi}(h) - \tilde{\varphi}(0) - \psi(p)(h)}{||h||_p}\right| < \varepsilon, \quad \text{sempre que} \quad ||h||_p < \delta,$$

ou seja, $\tilde{\varphi}$ é diferenciável em 0 com $d(\tilde{\varphi})_0 = \psi(p)$. Portanto, φ é diferenciável em p com $d\varphi_p = \psi(p)$. Finalmente, como p foi tomado arbitrário, concluimos que $\psi = d\varphi$.

Afirmação 2: A função φ é lipschitziana.

De fato, visto que $(d\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \quad \text{implica que} \quad ||d\varphi_n - d\varphi_m||_\infty \leq \varepsilon.$$

Como

$$||d(\varphi_n)_y - d(\varphi_m)_y||_y \leq \sup_{x\in M} ||d(\varphi_n)_x - d(\varphi_m)_x||_x = ||d\varphi_n - d\varphi_m||_\infty,$$

temos que

$$m, n \geq n_0 \quad \text{implica que} \quad ||d(\varphi_n)_y - d(\varphi_m)_y||_y \leq \varepsilon \ \text{ para todo } \ y \in M.$$

Tomando o limite quando $m \to \infty$, temos que

$$n \geq n_0 \ \text{ implica que } \quad ||d(\varphi_n)_y - d\varphi_y||_y \leq \varepsilon \quad \text{para todo } \ y \in M.$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} ||d\varphi - d\varphi_n||_\infty = 0.$$

Usando a desigualdade triangular, temos que

$$||d\varphi||_\infty \leq ||d\varphi - d\varphi_n||_\infty + ||d\varphi_n||_\infty < \infty.$$

Finalmente, pelo Teorema 2.40, temos que φ é lipschitziana.

Afirmação 3: $\psi = d\varphi$ é contínua.

De fato, dado qualquer $p \in M$, existe $r > 0$ tal que $exp_p : B(0,r) \longrightarrow B(p,r)$ e sua inversa são difeomorfismos 2-Lipschitz.

Definimos $\tilde{\varphi} : B(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\tilde{\varphi}(y) = (\varphi \circ exp_p)(y)$. Para provar que $d\varphi$ é contínua em p é suficiente provar que $d\tilde{\varphi}$ é contínua no zero. Aplicando a desigualdade triangular e (3.7), temos

$$\begin{aligned} ||d(\tilde{\varphi})_x - d(\tilde{\varphi})_0||_p &\leq ||d(\tilde{\varphi})_x - d(\tilde{\varphi}_n)_x||_p + ||d(\tilde{\varphi}_n)_x - d(\tilde{\varphi}_n)_0||_p + ||d(\tilde{\varphi}_n)_0 - d(\tilde{\varphi})_0||_p \\ &\leq 2\,||d\varphi - d\varphi_n||_\infty + ||d(\tilde{\varphi}_n)_x - d(\tilde{\varphi}_n)_0||_p + 2\,||d\varphi - d\varphi_n||_\infty \\ &= 4\,||d\varphi - d\varphi_n||_\infty + ||d(\tilde{\varphi}_n)_x - d(\tilde{\varphi}_n)_0||_p \end{aligned} \tag{3.11}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in B(0,r) \subset T_pM$.

Como $\lim_{n\to\infty} ||d\varphi - d\varphi_n||_\infty = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \quad \text{implica que} \quad ||d\varphi - d\varphi_n||_\infty \leq \frac{\varepsilon}{8}$$

Fixando $n = n_0$, obtemos

$$||d\varphi - d\varphi_{n_0}||_\infty \leq \frac{\varepsilon}{8}. \tag{3.12}$$

De (3.10), deduzimos que $\tilde{\varphi}_{n_0}$ é contínua em 0, então existe $\delta \in (0,r)$ tal que

$$||d(\tilde{\varphi}_{n_0})_x - d(\tilde{\varphi}_{n_0})_0||_p < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{sempre que} \quad ||x||_p < \delta \tag{3.13}$$

Combinando (3.11), (3.12) e (3.13), temos que

$$||d(\tilde{\varphi})_x - d(\tilde{\varphi})_0||_p \leq \varepsilon, \qquad \text{sempre que} \quad ||x||_p < \delta.$$

Portanto, $d\tilde{\varphi}$ e contínua em 0.

Finalmente, das Afirmações 1, 2 e 3 concluímos que Y é completo. ■

Lema 3.11 *Seja M uma variedade Riemanniana, então existem números $C > 1$ e $r > 0$ tais que para todo $p \in M$, $\varepsilon > 0$ e $\delta \in (0, r)$ existe uma função $b : M \longrightarrow [0, 1]$ de classe C^1 tal que:*

(1) $b(p) = \varepsilon = ||b||_\infty := \sup_{x\in M} |b(x)|$,

(2) $||d\,b||_\infty = \sup_{x\in M} ||db_x||_x \leq \frac{C\,\varepsilon}{\delta}$

(3) $b(x) = 0$ *se* $d_M(x, p) \geq \delta$.

Em particular, $\max\{||b||_\infty, ||db||_\infty\} \leq C\,\varepsilon(1 + \frac{1}{\delta})$

Prova. Pelo Corolário 3.7, M é uniformemente bumpable, ou seja, existem constante $C > 1$ e $r > 0$ de modo que para todo $p \in M$ e $\delta \in (0, r)$ existe uma função $\tilde{b} : M \longrightarrow [0, 1]$ de classe C^1 tal que:

(i) $\tilde{b}(p) = 1$,

(ii) $\tilde{b}(x) = 0$, sempre que $d_M(x, p) \geq \delta$,

(iii) $\sup_{x\in M} ||d\,\tilde{b}_x||_x \leq \frac{C}{\delta}$.

Seja $\varepsilon > 0$, definamos a função $b : M \longrightarrow [0, \varepsilon]$ por

$$b(x) = \varepsilon\,\tilde{b}(x).$$

Notemos que esta função verifica (1), (2) e (3) no lema. ■

Observação 3.12 *Notemos que no teorema acima podemos escrever a primeira afirmação como*

(1) $F - \varphi$ *atinge um minimo forte em* M.

Basta substituir φ *por* $-\varphi$.

Capítulo 4

Noções de Cálculo Subdiferencial e Superdiferencial em Variedades Riemannianas

4.1 Definições e Propriedades Básicas

Definição 4.1 *Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável se para todo $p \in M$, existe uma carta (U, h) de uma vizinhança de p tal que*

$$f \circ h^{-1} : h(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma função diferenciável, ou seja, existe $\eta \in T_p^*M$ tal que

$$\lim_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - (f \circ h^{-1})(h(p)) - \langle \eta, v \rangle}{||v||} = 0.$$

Definição 4.2 *Seja M uma variedade Riemanniana, e $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria. Definimos a **subdiferencial** de f em $p \in Dom(f)$ por*

$$D^- f(p) = \{d\varphi_p \in T_p^*M : \varphi \in C^1(M, \mathbb{R}), f - \varphi \text{ atinge um mínimo local no ponto } p\}.$$

Se $\xi \in D^- f(p)$, dizemos que ξ é uma subdiferencial de f em p.

*Da mesma forma, definimos a **superdiferencial** de uma função própria $g : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ no ponto $p \in Dom(g)$ por*

$$D^+ g(p) = \{d\psi_p \in T_p^*M : \psi \in C^1(M, \mathbb{R}), g - \psi \text{ atinge um máximo local no ponto } p\}.$$

Se $\eta \in D^+g(p)$, dizemos que η é uma superdiferencial de g em p.

Definição 4.3 *Para qualquer $\xi \in D^-f(p) \cup D^+f(p)$, definimos*

$$||\xi||_p = \sup\{|\xi(h)| : h \in T_pM,\ ||h||_p = 1\}$$

Observação 4.4

i) *Se f é diferenciável $D^+f(p) = D^-f(p) = \{df_p\}$.*

ii) $D^+(-f)(p) = -D^-f(p)$.

Teorema 4.5 (Caracterização da subdiferenciabilidade) *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função definida em uma variedade Riemanniana M, $p \in M$ e $\eta \in T_p^*M$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *$\eta \in D^-f(p)$, isto é, existe uma função $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $f - \varphi$ atinge um mínimo local em p e $\eta = d\varphi_p$.*

(2) *Existe uma função $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciável em p tal que $f - \varphi$ atinge um mínimo local em p e $\eta = d\varphi_p$.*

(3) *Para toda carta $h : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com $p \in U$, se tomarmos $\zeta = \eta \circ d(h^{-1})_{h(p)}$, verifica-se que*
$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{||v||} \geq 0.$$

(4) *Existe uma carta $h : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com $p \in U$ e tal que, para $\zeta = \eta \circ d(h^{-1})_{h(p)}$, verifica-se que*
$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{||v||} \geq 0.$$

Condições equivalentes podem ser estabelecidas para o caso de funções superdiferenciáveis. Em particular $\zeta \in D^+f(p)$ se, e somente se, existe uma carta $h : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com $p \in U$ tal que, para $\zeta = \eta \circ d(h^{-1})_{h(p)}$,

$$\limsup_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{||v||} \leq 0.$$

Prova. É imediato verificar que (1) $\Longrightarrow$ (2) e (3) $\Longrightarrow$ (4). Mostraremos que (2) $\Longrightarrow$ (3). Definamos $g : R^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = (f - \varphi) \circ h^{-1}(x).$$

Dado que $f - \varphi$ atinge um mínimo local em p, temos que g atinge um mínimo local em $h(p)$, pois $g(h(p)) = (f - \varphi)(p)$. Logo,

$$\liminf_{v \to 0} \frac{g(h(p) + v) - g(h(p))}{||v||} \geq 0,$$

isto é,

$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1} - \varphi \circ h^{-1})(h(p) + v) - (f \circ h^{-1} - \varphi \circ h^{-1})(h(p))}{||v||} \geq 0,$$

ou seja,

$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - (\varphi \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) + \varphi(p)}{||v||} \geq 0. \tag{4.1}$$

Por outro lado, como $\varphi \circ h^{-1}$ é diferenciável e $\zeta = \eta \circ d(h^{-1})_{h(p)} = d\varphi_p \circ d(h^{-1})_{h(p)} = d(\varphi \circ h^{-1})_{h(p)}$, obtemos

$$\lim_{v \to 0} \frac{(\varphi \circ h^{-1})(h(p) + v) - (\varphi \circ h^{-1})(h(p)) - \langle \zeta, v \rangle}{||v||} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{v \to 0} \frac{(\varphi \circ h^{-1})(h(p) + v) - \varphi(p) - \langle \zeta, v \rangle}{||v||} = 0. \tag{4.2}$$

Combinando (4.1) e (4.2), deduzimos que

$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - \langle \zeta, v \rangle}{||v||} \geq 0.$$

Finalmente, para provar (4) $\Longrightarrow$ (1), precisamos dos seguintes resultados:

Lema 4.6 (Lema de Urysohn diferenciável) *Sejam U, V dois subconjuntos não vazios, fechados e disjuntos, de uma variedade M de classe C^k. Existe uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k, tal que $0 \leq f \leq 1$, $f(U) = 0$ e $f(V) = 1$.*

Prova. A prova pode ser consultada em [16] página 197.

Lema 4.7 *Seja $F : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função definida num aberto V de um espaço de Hilbet H e seja $x \in V$ tal que*

$$\liminf_{v \to 0} \frac{F(x+v) - F(x) - \langle \tau, v \rangle}{||v||} \geq 0$$

para algum $\tau \in H^*$, então existe uma função $\psi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $F - \psi$ atinge um mínimo local em x e $d\psi_x = \tau$.

Prova. A prova pode ser consultada em [9].

Teorema 4.8 (Teorema de Tietze diferenciável) *Seja U um subconjunto fechado de uma variedade diferenciável M de classe C^r. Toda aplicação $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k $(k \leq r)$, pode ser estendida a uma aplicação $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k, definida em toda a variedade.*

Prova. A prova pode ser consultada em [16] página 202.

Mostraremos agora que (4) $\Longrightarrow$ (1). Seja V uma vizinhança de p tal que $\overline{V} \subset U$. Notemos que a função $F : h(U) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por $F := f \circ h^{-1}$ satisfaz, por hipótese,

$$\liminf_{v \to 0} \frac{F(h(p)+v) - F(h(p)) - \langle \zeta, v \rangle}{||v||} \geq 0.$$

Pelo Lema 4.7, existe uma função $\psi : h(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $F - \psi$ atinge um mínimo local em $h(p)$ e $\zeta = d\psi_{h(p)}$. Definamos $\phi := \psi \circ h : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Notemos que ϕ é uma função de classe C^1. Além disso, $(F - \psi) \circ h = f - \phi$ atinge um mínimo local em p e $d\phi_p = d\psi_{h(p)} \circ dh_p = \zeta \circ dh(p) = \eta$.

Pelo Teorema de Tietze, existe uma função $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 definida por $\varphi = \theta\phi$, tal que $\varphi|_{\overline{V}} = \phi$, onde θ é uma função do tipo Urysohn de classe C^1 cujo valor é 1 em $\overline{V}$ e 0 em $M \backslash U$. Como $(f - \varphi)(x) = (f - \phi)(x)$ para todo $x \in V$, concluímos que $f - \varphi$ atinge um mínimo local em p. Além disso, $\eta = d\varphi_p$. ∎

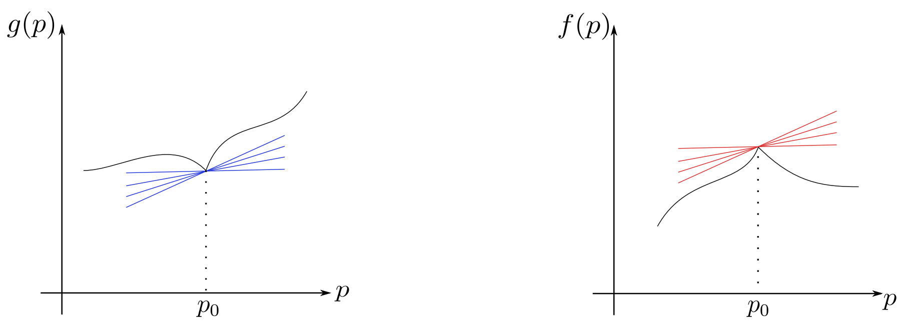
Observação 4.9 *No caso particular que $M = \mathbb{R}^n$ com a métrica usual, $\eta \in D^- f(p_0)$ se, e somente se*

$$\liminf_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - \langle \eta, p - p_0 \rangle}{\|p - p_0\|} \geq 0,$$

ou seja, $\eta \in D^- f(p_0)$ se o hiperplano $p \mapsto f(p) + \langle \eta, p - p_0 \rangle$ toca abaixo do gráfico de f no ponto p_0. Similarmente $\xi \in D^+ g(p_0)$ se, e somente se

$$\limsup_{p \to p_0} \frac{g(p) - g(p_0) - \langle \xi, p - p_0 \rangle}{\|p - p_0\|} \leq 0,$$

ou seja, $\xi \in D^+ g(p_0)$ se o hiperplano $p \mapsto g(p) + \langle \xi, p - p_0 \rangle$ toca acima do gráfico de g no ponto p_0. A Figura abaixo exibe, em uma dimensão, a interpretação geométrica da subdiferencial e superdiferencial.



(a) (b)

Figura 4.1: (a) subdiferenciais denotadas pelos segmentos de retas azuis. (b) superdiferenciais denotadas pelos segmentos de retas vermelhas.

Teorema 4.10 (Regra da cadeia) *Sejam M, N variedades Riemannianas e seja $g : M \longrightarrow N$ uma função diferenciável em p e $f : N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ subdiferenciável em $g(p)$, então a aplicação composta $f \circ g : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é subdiferenciável em p. Além disso,*

$$\{\zeta \circ dg_p : \zeta \in D^- f(g(p))\} \subseteq D^-(f \circ g)(p).$$

Prova. Dado que f é subdiferenciável em $g(p)$, temos que $D^- f(g(p)) \neq \emptyset$. Seja $\zeta \in D^- f(g(p))$. Então, pelo Teorema 4.5, existe uma função $\varphi : N \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $g(p)$ tal que $f - \varphi$ atinge um mínimo local em $g(p)$ e $\zeta = d\varphi_{g(p)}$. Em particular, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(y) - \varphi(y) \geq f(g(p)) - \varphi(g(p)), \quad \text{sempre que} \quad d_N(y, g(p)) < \varepsilon. \tag{1}$$

Definamos $\psi = \varphi \circ g$, desde que g e φ são diferenciáveis em p e $g(p)$, respectivamente, segue da regra da cadeia, que $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em p. Além disso, $d\psi_p = d\varphi_{g(p)} \circ dg_p$. Por outro lado, como g é continua em p, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_N(g(x), g(p)) < \varepsilon, \quad \text{sempre que} \quad d_M(x,p) < \delta. \tag{2}$$

Combinando (1) e (2), temos que

$$f(g(x)) - \varphi(g(x)) \geq f(g(p)) - \varphi(g(p)), \quad \text{sempre que} \quad d_M(x,p) < \delta,$$

isto é, $f \circ g - \psi$ atinge um mínimo local em p. O Teorema 4.5 [(1) $\Leftrightarrow$ (2)] garante que $f \circ g$ é subdiferenciável em p e

$$\zeta \circ dg_p = d\varphi_{g(p)} \circ dg_p = d\psi_p \in D^-(f \circ g)(p),$$

o que encerra a prova. ■

Corolário 4.11 *Sejam M, N variedades Riemannianas e $h : M \longrightarrow N$ um difeomorfismo de classe C^1. Então $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é subdiferenciável em p se, e somente se, $f \circ h^{-1}$ é subdiferenciável em $h(p)$. Além disso,*

$$D^- f(p) = \{\zeta \circ dh_p : \zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\}.$$

Prova. Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é subdiferenciável em p, então pelo Teorema 4.10, $f \circ h^{-1} : N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é subdiferenciável em $h(p) \in N$ e

$$\{\xi \circ d(h^{-1})_{h(p)} : \xi \in D^- f(h^{-1}(h(p)))\} \subseteq D^-(f \circ h^{-1})(h(p)),$$

ou seja,

$$\{\xi \circ d(h^{-1})_{h(p)} : \xi \in D^- f(p)\} \subseteq D^-(f \circ h^{-1})(h(p)).$$

Logo, se $T \in D^- f(p)$, então

$$\zeta := T \circ d(h^{-1})_{h(p)} \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p)),$$

portanto $T = \zeta \circ dh_p$, com $\zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))$. Assim

$$D^- f(p) \subset \{\zeta \circ dh_p : \zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\}.$$

Reciprocamente, se $f \circ h^{-1}$ é subdiferenciável em $h(p)$, então pelo Teorema 4.10 a função $f = (f \circ h^{-1}) \circ h$ é subdiferenciável em p, e

$$\{\xi \circ dh_p : \xi \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\} \subseteq D^-((f \circ h^{-1}) \circ h)(p),$$

ou seja,

$$\{\xi \circ dh_p : \xi \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\} \subseteq D^- f(p).$$

Logo, para qualquer $\zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))$, temos $\zeta \circ dh_p \in D^- f(p)$. Assim

$$\{\zeta \circ dh_p : \zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\} \subset D^- f(p),$$

o que finaliza a prova. ■

Teorema 4.12 (Regra da soma) *Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $f_1, f_2 : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funções subdiferenciaveis. Então,*

$$D^- f_1(p) + D^- f_2(p) \subseteq D^-(f_1 + f_2)(p).$$

Prova. Dado que f_1 e f_2 são subdiferenciáveis os conjuntos $D^- f_1(p)$ e $D^- f_1(p)$ são não vazios. Sejam $\zeta_i \in D^- f_i(p)$, $i = 1, 2$. Então, pelo Teorema 4.5, existem funções $\varphi_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que $f_i - \varphi_i$ atinge um mínimo local em p e $\zeta_i = d(\varphi_i)_p$ para $i = 1, 2$, então $(f_1 + f_2) - (\varphi_1 + \varphi_2) = (f_1 - \varphi_1) + (f_2 - \varphi_2)$ atinge um mínimo local em p. Logo, $\zeta_1 + \zeta_2 = d(\varphi_1 + \varphi_2)_p \in D^-(f_1 + f_2)$. Portanto,

$$D^- f_1(p) + D^- f_2(p) \subseteq D^-(f_1 + f_2)(p),$$

o que conclui a prova. ■

4.2 O Principio de Minimização Perturbada para a Diferença de Duas Funções Definidas sobre Variedades Riemannianas

Se assumirmos que M é uma variedade Riemanniana completa uniformente localmente convexa e com raio de injetividade $i(M) > r > 0$, então para todo $x \in M$, a função $y \longmapsto d_M(y, x)$ é de classe C^∞ em $B(x, r)\backslash\{x\}$ e, portanto, faz sentido considerar as derivadas parciais $\partial d(x_0, y_0)/\partial x$ e $\partial d(x_0, y_0)/\partial x$ da função

$$d := d_M : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Por outro lado, lembremos que a aplicação transporte paralelo $L_{x_0y_0} : T_{x_0}M \longrightarrow T_{y_0}M$ é uma isometria linear com inversa $L_{y_0x_0} : T_{y_0}M \longrightarrow T_{x_0}M$. Como temos uma isometria linear que identifica T_pM e seu dual T_p^*M pela aplicação $T_pM \ni x \mapsto f_x \in T_p^*M$, onde $f_x(y) = \langle x, y\rangle_p$ para cada $y \in T_pM$. A isometria $L_{x_0y_0}$ induz uma isometria entre os espaços cotangentes $T_{x_0}^*M$ e $T_{y_0}^*M$. Vamos denotar esta nova isometria por $L_{x_0y_0} : T_{x_0}^*M \longrightarrow T_{y_0}^*M$.

Lema 4.13 *Seja M uma variedade Riemanniana completa, uniformemente localmente convexa e com raio de injetividade $i(M) > r > 0$ e sejam $x_0, y_0 \in M$ tais que $0 < d(x_0, y_0) < r$, então*

$$L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}\right) = -\frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Prova. Seja $r_0 = d(x_0, y_0) < r$ e seja $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ dada por $\gamma(t) = exp_{x_0}(tv_0)$ a geodésica radial ligando x_0 a y_0.

Como

$$d(exp_{x_0})_{v_0}(v_0) = \frac{d}{dt}exp_{x_0}((t+1)v_0)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(1, x_0, (t+1)v_0)|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}\gamma(t+1, x_0, v_0)|_{t=0} = \gamma'(1),$$

temos que

$$L_{x_0y_0}(v_0) = \gamma'(1) = d(exp_{x_0})_{v_0}(v_0).$$

Usando o Lema 2.28, temos que

$$\left|\left|\frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}\right|\right|_{y_0} = 1.$$

Em particular,

$$\frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y} \neq 0.$$

Afirmamos que existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$\gamma'(1) = \lambda \frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}. \tag{4.3}$$

De fato, pelo Lema de Gauss, as geodésicas radiais que parten de x_0 são ortogonais às esferas geodésicas centradas em x_0, isto é, $\gamma'(1)$ é ortogonal a $exp_{x_0}(B(0, r_0))$. Por outro lado, como as esferas geodésicas são curvas de nível da função distância, temos que $\frac{\partial d(y_0,x_0)}{\partial y}$ é ortogonal a $exp_{x_0}(B(0, r_0))$, logo (4.3) é verdadeira.

Logo,

$$L_{x_0y_0}(v_0) = \gamma'(1) = \lambda \frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y} \quad \text{para algum } \lambda \neq 0.$$

Como a aplicação $t \longmapsto d(\gamma(t), x_0)$ é crescente, temos que $\lambda > 0$. Logo,

$$||L_{x_0y_0}(v_0)||_{y_0} = ||v_0||_{x_0} = ||\lambda \frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}||_{y_0} = \lambda$$

Portanto,

$$L_{x_0y_0}(v_0) = ||v_0||_{x_0} \frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y} \tag{4.4}$$

Seja $\beta : [0, 1] \longrightarrow M$ dada por $\beta(t) = exp_{y_0}(tw_0)$ a geodésica radial ligando y_0 a x_0. Pelas definições de translação paralela e geodésica, temos que

$$L_{x_0y_0}(v_0) = -w_0 \quad \text{ e } \quad ||w_0||_{y_0} = ||v_0||_{x_0}. \tag{4.5}$$

Fazendo argumento análogo ao utilizado para obter (4.4), obtemos

$$L_{y_0x_0}(w_0) = ||w_0||_{y_0} \frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial x}. \tag{4.6}$$

A Observação 2.10 junto com (4.4) implicam que

$$v_0 = L_{y_0x_0}(L_{x_0y_0}(v_0)) = L_{y_0x_0}\left(||v_0||_{x_0} \frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}\right) = ||v_0||_{x_0} L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}\right).$$

Assim,

$$\frac{v_0}{||v_0||_{x_0}} = L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}\right) \tag{4.7}$$

Por outro lado, a Observação 2.10 junto com (4.5) implicam que

$$v_0 = L_{y_0x_0}(L_{x_0y_0}(v_0)) = -L_{y_0x_0}(w_0).$$

Assim,

$$\frac{v_0}{||v_0||_{x_0}} = \frac{v_0}{||w_0||_{y_0}} = -\frac{L_{y_0x_0}(w_0)}{||w_0||_{y_0}}. \tag{4.8}$$

Da igualdade (4.6), segue que

$$\frac{L_{y_0x_0}(w_0)}{||w_0||_{y_0}} = \frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial x}. \tag{4.9}$$

Finalmente, combinando (4.7), (4.8) e (4.9), temos que

$$L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}\right) = -\frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial x},$$

o que encerra a demostração. ■

Teorema 4.14 (Principio de minimização perturbada) *Seja M uma variedade Riemanniana completa, uniformemente localmente convexa e com raio de injetividade $i(M) > r > 0$. Se $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função s.c.s. limitada e $v : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função s.c.i. limitada, então para todo $\varepsilon > 0$ existem $x_0, y_0 \in M$, $\eta \in D^+u(x_0)$ e $\xi \in D^-v(y_0)$ tais que:*

(i) $d(x_0, y_0) < \varepsilon$

(ii) $||\eta - L_{y_0x_0}(\xi)||_{x_0} < \varepsilon$

(iii) $v(z) - u(z) \geq v(y_0) - u(x_0) - \varepsilon \quad$ *para cada* $\quad z \in M$.

Onde $L_{y_0x_0} : T^*_{y_0}M \longrightarrow T^*_{x_0}M$ é a aplicação transporte paralelo.

Prova. Sejam $\varepsilon \in (0, r)$ e $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 não crescente tal que

$$b(t) = b(0) > 2(||v||_\infty + ||u||_\infty) + \varepsilon, \quad \text{sempre que} \quad t \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

e

$$b(t) = 0, \quad \text{sempre que} \;\; t \geq \varepsilon.$$

Definamos a função $w : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$w(x, y) = v(y) - u(x) - b(d(x, y)).$$

Notemos que w é s.c.i. e limitadas inferiormente. Pelo Teorema 3.8, existe uma função $g : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que:

a) $\|g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\|dg\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

b) $w - g$ atinge um minimo forte em $M \times M$. Em particular, existem $x_0, y_0 \in M$ tal que $(w - g)(x, y) \geq (w - g)(x_0, y_0)$, para todo $x, y \in M$.

Do item b), segue que

$$v(y) - u(x) - b(d(x, y)) - g(x, y) \geq v(y_0) - u(x_0) - b(d(x_0, y_0)) - g(x_0, y_0), \quad \forall x, y \in M. \tag{4.10}$$

Fazendo $x = x_0$ em (4.10), temos que

$$v(y) - b(d(x_0, y)) - g(x_0, y) \geq v(y_0) - b(d(x_0, y_0)) - g(x_0, y_0), \quad \forall y \in M.$$

Definamos $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(y) = b(d(x_0, y)) + g(x_0, y).$$

Notemos que φ é de classe C^1 e $v - \varphi$ atinge um mínimo local em y_0. Consequentemente v é subdiferenciável no ponto $y_0 \in M$ e

$$\xi := \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial (b \circ d)(x_0, y_0)}{\partial y} \in D^- v(y_0) \tag{4.11}$$

Da mesma forma, fazendo $y = y_0$ em (4.10), temos que

$$u(x) - (-b(d(x, y_0)) - g(x, y)) \leq u(x_0) - (-b(d(x_0, y_0)) - g(x_0, y_0)), \quad \forall x \in M.$$

Definamos $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(x) = -b(d(x, y_0)) + g(x, y_0).$$

Notemos que ψ é de classe C^1 e $u - \psi$ atinge um máximo local em x_0. Consequentemente u é superdiferenciável no ponto $x_0 \in M$ e

$$\eta := -\left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial (b \circ d)(x_0, y_0)}{\partial x}\right) \in D^+u(x_0) \tag{4.12}$$

Considerando o Lema 4.13 se $x_0 \neq y_0$ e a definição da função b se $x_0 = y_0$, temos que

$$\begin{aligned}
L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial (b \circ d)(x_0, y_0)}{\partial y}\right) + \frac{\partial (b \circ d)(x_0, y_0)}{\partial x} &= \\
&= L_{y_0x_0}\left(b'(d(x_0, y_0))\frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial y}\right) + b'(d(x_0, y_0))\frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial x} \\
&= b'(d(x_0, y_0))\left[L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial y}\right) + \frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial x}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|L_{y_0x_0}(\xi) - \eta\|_{x_0} &= \left\|L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial (b \circ d)(x_0, y_0)}{\partial y}\right) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial (b \circ d)(x_0, y_0)}{\partial x}\right\|_{x_0} \\
&= \left\|L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}\right) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}\right\|_{x_0} \\
&\leq \left\|L_{y_0x_0}\left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}\right)\right\|_{x_0} + \left\|\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}\right\|_{x_0} \\
&= \left\|\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}\right\|_{x_0} + \left\|\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}\right\|_{x_0} \\
&\leq \|dg\|_\infty + \|dg\|_\infty \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|L_{y_0x_0}(\xi) - \eta\|_{x_0} < \varepsilon$, e com isso provamos (ii).

Para provar (i), suponhamos que $d(x_0, y_0) \geq \varepsilon$. Então, pela definição da função $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, obtemos

$$b(d(x_0, y_0)) = 0.$$

Fazendo $x = y = z$ em (4.10), temos que

$$v(z) - u(z) - b(0) - g(z, z) \geq v(y_0) - u(x_0) - b(d(x_0, y_0)) - g(x_0, y_0),$$

ou seja,

$$b(0) \leq v(z) - u(z) - g(z, z) + g(x_0, y_0) - v(y_0) + u(x_0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} b(0) &\leq \|v\|_\infty + \|u\|_\infty + \|g\|_\infty + \|g\|_\infty + \|v\|_\infty + \|u\|_\infty \\ &< 2(\|v\|_\infty + \|u\|_\infty) + \varepsilon, \end{aligned}$$

o que contradiz a definição da função b. Portanto,

$$d(x_0, y_0) < \varepsilon.$$

Finalmente, fazendo $x = y = z$ em (4.10), temos que

$$v(z) - u(z) \geq v(y_0) - u(x_0) + b(0) - b(d(x_0, y_0)) + g(z, z) - g(x_0, y_0).$$

Dado que b é não-crescente, $d(x_0, y_0) > 0$ implica que

$$b(0) - b(d(x_0, y_0)) \geq 0.$$

Por outro lado, dado que $\|g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$, temos que $-\frac{\varepsilon}{2} < -g(z, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto,

$$v(z) - u(z) \geq v(y_0) - u(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = v(y_0) - u(x_0) - \varepsilon \quad \text{para todo } z \in M,$$

o que encerra a prova do teorema. ■

4.3 Desigualdade do Valor Médio de Deville

Definição 4.15 *Seja X um espaço de Banach. Uma função bump é uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

(*i*) $f \neq 0$,

(*ii*) *supp*$(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$ *e limitado.*

Definição 4.16 *Dizemos que o espaço de Banach X satisfaz a propriedade (P), se existe uma função bump $b : X \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana de classe C^1.*

Proposição 4.17 *Se X é um espaço de Banach de dimensão finita, então X satisfaz a propriedade (P).*

Prova. Veja [16] página 187 ou [15] página 41. ■

Teorema 4.18 *Seja $(X, ||\cdot||)$ um espaço de Banach que satisfaz a propriedade (P) e seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função s.c.i.. Se existe uma constante $K > 0$ tal que $||\eta|| \leq K$ para todo $\eta \in D^- f(x)$ e $x \in X$. Então f é Lipschitz contínua. Mais precisamente, para todo $x, y \in X$*

$$|f(x) - f(y)| \leq K||x - y||.$$

Prova. Veja [7]. ■

Teorema 4.19 (Desigualdade do valor médio de Deville) *Sejam M uma variedade Riemanniana e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função s.c.i.. Se existe uma constante $K > 0$ tal que $||\eta||_p \leq K$ para todo $\eta \in D^- f(p)$ e $p \in M$, então*

$$|f(p) - f(q)| \leq K d_M(p, q) \quad \textit{para todo} \quad p, q \in M.$$

Prova. Fixemos $p, q \in M$ e seja $\gamma : [0, T] \longrightarrow M$ uma curva de classe C^1 por partes, parametrizada por comprimento de arco tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(T) = q$. Dado $\varepsilon > 0$, pelo Teorema 2.19, para cada $x \in \gamma([0, T])$ existe $r_x > 0$ tal que

$$exp_x : B(0, 2r_x) \subset T_x M \longrightarrow B(x, 2r_x) \subset M$$

é um difeomorfismo. Além disso, as derivadas de exp_x e exp_x^{-1} estão limitadas por $1+\varepsilon$.

Como $\gamma([0,T])$ é compacto existem $p = x_1,\ x_2\ , x_3, ...,\ x_n = q \in M$ tais que

$$\gamma([0,T]) \subset \bigcup_j^n B(x_j, r_j), \quad \text{onde} \quad r_j = r_{x_j}.$$

Seja $r = \min\{r_1, r_2, ..., r_n\}$, escolhendo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $T/m < r/2$, definimos

$$t_j = j\frac{T}{m}, \quad j = 0, ..., m,$$

isto é, uma partição do intervalo $[0,T]$. Além disso, sejam

$$a_j = b_{j-1} = \gamma(t_{j-1}) \quad \text{para} \quad j = 1, ..., m$$

e

$$b_m = \gamma(t_m).$$

Para cada $j \in \{1, 2, ...m-1\}$, escolhemos $i_j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \cap B(x_{i_j}, r_{i_j}) \neq \emptyset \tag{1}$$

e sejam $i_0 = 1$, $i_m = n$ (tais que $x_{i_0} = p$, $x_{i_m} = q$).

Como γ está parametrizada por comprimento de arco, temos que

$$L(\gamma(t)|_{[t_{j-1}, t_j]}) = t_j - t_{j-1} = \frac{T}{m} < \frac{r}{2} \leq \frac{r_{i_j}}{2}. \tag{2}$$

Combinando (1) e (2), obtemos

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset B(x_{i_j}, 2r_{i_j}), \text{ para todo } j = 1, 2, ..., m.$$

Com o objetivo de simplificar as notações, consideremos

$$y_j := x_{i_j} \quad \text{e} \quad s_j := r_{i_j} \quad \text{para todo} \quad j = 0, 1, ...m.$$

Definamos a função $f_j : B(0, 2s_j) \subset T_{y_j}M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_j(v) = f \circ exp_{y_j}(v).$$

A função f_j assim definida é diferenciável. Em particular, subdiferenciável. Dado $x \in B(0, 2s_j)$, como $\exp_{y_j}$ é um difeomorfismo e f_j é diferenciável, o Corolário 4.11 implica que

$$D^- f_j(x) = \{\eta \circ d(exp_{y_j})_x : \eta \in D^-(f_j \circ exp_{y_j}^{-1})(exp_{y_j}(x))\}$$

$$= \{\eta \circ d(exp_{y_j})_x : \eta \in D^-(f)(exp_{y_j}(x))\}.$$

Como $\|\eta\|_y \leq K$ para todo $\eta \in D^- f(y)$ com $y \in M$, e $||d(exp_{y_j})_x|| \leq 1 + \varepsilon$ para todo $x \in B(0, 2r_j)$, deduzimos que

$$||\xi||_{y_j} \leq K(1 + \varepsilon), \text{ para todo } \xi \in D^- f_j(x) \text{ e todo } x \in B(0, 2s_j).$$

Como $T_{y_j}M$ é um espaço de Hilbert e f_j é s.c.i., segue do Teorema 4.18 que

$$|f(a_j) - f(b_j)| = |f_j(exp_{y_j}^{-1}(a_j)) - f_j(exp_{y_j}^{-1}(b_j))|$$

$$\leq (1 + \varepsilon)K||exp_{y_j}^{-1}(a_j) - exp_{y_j}^{-1}(b_j)||_{y_j},$$

para todo $j = 1, ..., m.$. Por outro lado, como exp^{-1} é $(1 + \varepsilon)$-Lipschitz, temos que

$$||exp_{y_j}^{-1}(a_j) - exp_{y_j}^{-1}(b_j)||_{y_j} \leq (1 + \varepsilon)d_M(a_j, b_j)$$

Combinando as duas últimas desigualdades,

$$|f(a_j) - f(b_j)| \leq (1 + \varepsilon)^2 K d_M(a_j, b_j) \leq (1 + \varepsilon)^2 K \int_{t_{j-1}}^{t_j} ||\gamma'(t)||\, dt, \quad \text{para todo} \quad j = 1, ..., m.$$

Portanto,

$$|f(p) - f(q)| = |\sum_{j=1}^{m}(f(a_j) - f(b_j))| \leq \sum_{j=1}^{m} |f(a_j) - f(b_j)|$$

$$\leq (1 + \varepsilon)^2 K \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} ||\gamma'(t)||\, dt$$

$$= (1 + \varepsilon)^2 K L(\gamma).$$

Como γ foi tomado arbitrário, temos que

$$|f(p) - f(q) \leq (1 + \varepsilon)^2 K d_M(p, q).$$

Finalmente, tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$, temos que

$$|f(p) - f(q) \leq K d_M(p,q),$$

o que finaliza a prova. ■

Corolário 4.20 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função s.c.s.. Se existe uma constante $K > 0$ tal que $||\eta||_p \leq K$ para todo $\eta \in D^+f(p)$ e $p \in M$. Então,*

$$|f(p) - f(q)| \leq K d_M(p,q) \quad \textit{para todo} \quad p, q \in M.$$

Prova. Aplicar o teorema acima a $-f$. ■

Capítulo 5

Solução de Viscosidade da Equação Eikonal

Seja M uma variedade Riemanniana, uma equação de Hamilton-Jacobi estacionaria de primeira ordem é da forma

$$\begin{cases} H(x, \nabla u(x), u(x)) = 0, & \text{em} \quad x \in \Omega, \\ u(x) = u_0(x), & \text{sobre} \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{EHJ}$$

onde Ω é um subconjunto aberto de M, $H : T^*\Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua chamada de Hamiltoniano e T^*M é o fibrado cotangente de M.

Definição 5.1 *Consideremos a função $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$.*

(1) *Diz-se que u é uma **subsolução de viscosidade** de (EHJ) se:*

- (a) *u é s.c.s.,*
- (b) *$H(x, \xi, u(x)) \leq 0$ para todo $\xi \in D^+u(x)$ com $x \in \Omega$ e*
- (c) *$u(x) \leq u_0(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$.*

(2) *Diz-se que u é uma **supersolução de viscosidade** de (EHJ) se:*

- (a) *u é s.c.i.,*
- (b) *$H(x, \eta, u(x)) \geq 0$ para todo $\eta \in D^-u(x)$ com $x \in \Omega$ e*
- (c) *$u(x) \geq u_0(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$.*

(3) *Diz-se que u é uma* ***solução de viscosidade*** *de* (EHJ) *se u for ao mesmo tempo subsolução e supersolução de viscosidade de* (EHJ), *isto é, u é contínua e verifica:*

(a) $H(x, \xi, u(x)) \leq 0$ *para todo* $\xi \in D^+u(x)$ *com* $x \in \Omega$,

(b) $H(x, \xi, u(x)) \geq 0$ *para todo* $\xi \in D^-u(x)$ *com* $x \in \Omega$,

(c) $u(x) = u_0(x)$ *para todo* $x \in \partial\Omega$.

Definição 5.2 *Sejam M uma variedade Riemanniana e Ω um subconjunto aberto limitado de M com fronteira $\partial\Omega$. Definimos a função distância $d(\cdot, \partial\Omega) : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$d(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} d_M(x, y).$$

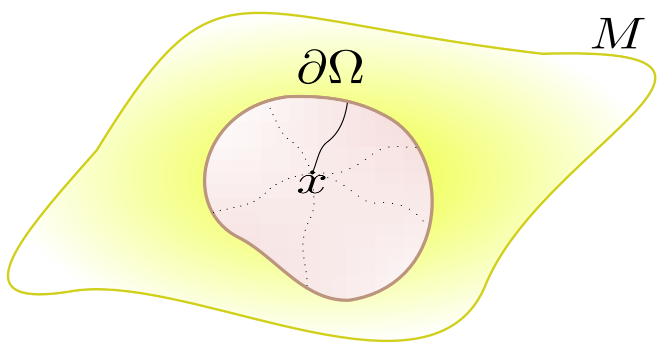


Figura 5.1: Função distância

Um caso especial da equação (EHJ) é a equação eikonal

$$\begin{cases} ||\nabla u(x)||_x = 1, & \text{em} \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{sobre} \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{EE}$$

onde $\Omega \subset M$ um subconjunto não vazio com fronteira $\partial\Omega \neq \emptyset$ e M é uma variedade Riemanniana. Provaremos que a função

$$u(x) = d(x, \partial\Omega)$$

é a única solução de viscosidade de (EE).

Lema 5.3 *$d(\cdot, \partial\Omega) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função 1-Lipschitz.*

Prova. Como $d(x, \partial\Omega) = \inf_{y\in\partial\Omega} d_M(x, y)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $z \in \partial\Omega$ tal que $d_M(x, z) \leq d(y, \partial\Omega) + \varepsilon$. Logo,

$$\begin{aligned} d(y, \partial\Omega) - d(x, \partial\Omega) &\leq d_M(y, z) - d_M(x, z) + \varepsilon \\ &\leq d_M(x, y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$, temos

$$d(y, \partial\Omega) - d(x, \partial\Omega) \leq d_M(x, y). \tag{1}$$

Trocando os papeis de x e y, temos que

$$d(x, \partial\Omega) - d(y, \partial\Omega) \leq d_M(y, x) = d_M(x, y) \tag{2}$$

Finalmente, combinando (1) e (2), temos que

$$|d(x, \partial\Omega) - d(y, \partial\Omega)| \leq d_M(x, y),$$

o que encerra a prova. ■

Teorema 5.4 *Seja M uma variedade Riemanniana completa e Ω um subconjunto aberto e limitado de M com fronteira $\partial\Omega$. Então a função $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $u(x) = d(x, \partial\Omega)$ é solução de viscosidade da equação eikonal* (EE)*. Além disso, se M é uniformemente localmente convexa e tem raio de injetividade positivo, então u é a única solução de viscosidade desta equação.*

Prova.

(**Unicidade**) Sejam $u, v : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas soluções de viscosidade do problema (EE). Como u e v são contínuas e $u = v = 0$ em $\partial\Omega$, podemos estender u e v continuamente para todo M simplemente fazendo $u = v = 0$ em $M\backslash\Omega$. Mostraremos que $u = v$. Para isso, basta provar que $u \leq v$ em Ω (pois, de modo análogo tem-se $v \leq u$ e daí $u = v$).

Tomando $\alpha \in (0,1)$, mostremos que $\alpha u(x) \leq v(x)$ para todo $x \in \Omega$. De fato, suponhamos por absurdo que

$$\inf\{v(x) - \alpha u(x) : x \in \Omega\} < 0.$$

Seja ε tal que

$$0 < 2\varepsilon < \min\{\frac{1-\alpha}{2}, -\inf\{v(x) - \alpha u(x) : x \in \Omega\}\}. \tag{5.1}$$

Desde que u e v são soluções de viscosidade de (EE), temos que

$$\|\xi\|_x \leq 1 \text{ para todo } \xi \in D^+u(x) \cup D^+v(x) \text{ com } x \in \Omega.$$

Utilizando a desigualdade do valor médio de Deville, u e v são funções 1-Lipschitz. Em particular, dado que Ω é limitado, concluímos que u e v são limitadas. Logo, pelo Teorema 4.14, dado $\varepsilon > 0$ existem $x_0, y_0 \in M$, $\eta \in D^+(\alpha u)(x_0)$ e $\xi \in D^-v(y_0)$ tais que:

(1) $d(x_0, y_0) < \varepsilon$,

(2) $||\eta - L_{y_0 x_0}(\xi)||_{x_0} < \varepsilon$,

(3) $\inf\{(v - \alpha u)(x) : x \in M\} \geq v(y_0) - \alpha u(x_0) - \varepsilon$.

Afirmamos que $x_0, y_0 \in \Omega$. De fato,

i) Suponhamos que $x_0, y_0 \notin \Omega$. Logo, $u(x_0) = v(y_0) = 0$. Segue do item (3) e (5.1),

$$2\varepsilon < -\inf\{v(x) - \alpha u(x) : x \in \Omega\} \leq \varepsilon,$$

o que é uma contradição.

ii) Suponhamos que $y_0 \notin \Omega$. Logo, $u(y_0) = v(y_0) = 0$. Visto que u é 1-Lipschitz, temos que

$$|u(x_0)| \leq d(x_0, y_0) < \varepsilon.$$

Combinando o item (3) e (5.1), obtemos

$$2\varepsilon < -\inf\{v(x) - \alpha u(x) : x \in \Omega\} \leq \alpha u(x_0) + \varepsilon < \alpha\varepsilon + \varepsilon,$$

implicando assim que $\alpha > 1$, o que é uma contradição.

iii) Suponhamos que $x_0 \notin \Omega$, então $u(x_0) = v(x_0) = 0$. Desde que v é 1-Lipschitz, temos que

$$|v(y_0)| \leq d(x_0, y_0) < \varepsilon.$$

Combinanado o item (3) com a desigualdade (5.1), obtemos

$$2\varepsilon < -\inf\{v(x) - \alpha u(x) : x \in \Omega\} \leq v(y_0) + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

o que é uma contradição.

Por outro lado, desde que u e v são soluções de viscosidade, temos que

$$\frac{1}{\alpha}\eta \in D^+u(x_0) \Longrightarrow \left|\left|\frac{1}{\alpha}\,\eta\right|\right|_{x_0} \leq 1 \Longrightarrow ||\eta||_{x_0} \leq \alpha, \quad \text{e}$$

$$\xi \in D^-v(y_0) \Longrightarrow ||\xi||_{y_0} \geq 1.$$

Usando o item (2) e lembrando que $L_{y_0x_0}$ é uma isometria linear, segue que

$$1 \leq ||\xi||_{y_0} = ||L_{y_0x_0}(\xi)||_{x_0} \leq ||L_{y_0x_0}(\xi) - \eta||_{x_0} + ||\eta||_{x_0} < \varepsilon + \alpha.$$

De (5.1) é fácil ver que $\alpha + \varepsilon < 1$. Assim,

$$1 \leq ||\xi||_{y_0} < 1,$$

o que uma contradição.

Portanto, $\alpha u \leq v$ para todo $\alpha \in (0, 1)$. Tomando o limite quando $\alpha \to 0$, concluímos que $v \leq u$.

(**Existência**) Provemos agora que $u := d(\cdot, \partial\Omega)$ é solução de viscosidade da equação (EE). A prova sera realizada em 3 passos.

Passo 1. Provaremos que u é contínua. De fato, segue do Lema 5.3.

Passo 2. Provaremos que u é subsolução de viscosidade da equação (EE). De fato, seja $\overline{x} \in \Omega$ e $\xi \in D^+u(\overline{x})$, pelo Teorema 4.5 existe uma função $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ Frechét diferenciável em $\overline{x}$ tal que $u - \varphi$ atinge um máximo local em $\overline{x}$ e $\xi = d\varphi_{\overline{x}}$. Então

$$u(\overline{x}) - \varphi(\overline{x}) \geq u(x) - \varphi(x) \qquad \text{para todo } \ x \in B(\overline{x}, \delta) \subset M.$$

Seja $\alpha : [0,1] \longrightarrow B(\overline{x}, \delta) \subset M$ de classe C^1 parametrizada por comprimento de arco tal que $\alpha(0) = \overline{x}$, logo

$$\varphi(\alpha(t)) - \varphi(\alpha(0)) \geq u(\alpha(t)) - u(\alpha(0)) \quad \text{para todo} \;\; t \in [0,1].$$

Visto que u é 1-Lipschitz e como α está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que

$$|u(\alpha(t)) - u(\alpha(0))| \leq d_M(\alpha(t), \alpha(0)) = t.$$

Segue das duas últimas desigualdades que

$$\frac{\varphi(\alpha(t)) - \varphi(\alpha(0))}{t} \geq -1 \quad \text{para todo } t \in [0,1].$$

Tomando o limite quando $t \to 0$, temos

$$d\varphi_{\overline{x}}(\alpha'(0)) \geq -1.$$

Da Observação 2.26, segue que

$$\left\langle \nabla\varphi(\overline{x}), \alpha'(0) \right\rangle_{\overline{x}} \geq -1 \qquad \text{e} \qquad \|\xi\|_{\overline{x}} = \|\nabla\varphi(\overline{x})\|_{\overline{x}}$$

Devido ao fato de que a curva α foi tomada arbitrária, podemos escolher α de tal forma que

$$\alpha'(0) = -\frac{\nabla\varphi(\overline{x})}{\|\nabla\varphi(\overline{x})\|_{\overline{x}}},$$

logo

$$-\|\nabla\varphi(\overline{x})\|_{\overline{x}} = \left\langle \nabla\varphi(\overline{x}), -\frac{\nabla\varphi(\overline{x})}{\|\nabla\varphi(\overline{x})\|_{\overline{x}}} \right\rangle_{\overline{x}} \geq -1.$$

Isto implica que

$$\|\xi\|_{\overline{x}} = \|\nabla\varphi(\overline{x})\|_{\overline{x}} \leq 1.$$

Portanto, u é subsolução de viscosidade da equação eikonal.

Passo 3. Provaremos que u é supersolução de viscosidade da equação (EE). De fato, seja $\overline{x} \in \Omega$ e $\eta \in D^- u(\overline{x})$, pelo Teorema 4.5 existe uma função $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ Fréchet diferenciável em $\overline{x}$ tal que $u - \psi$ atinge um mínimo local em $\overline{x}$ e $\eta = d\psi_{\overline{x}}$. Então,

$$u(\overline{x}) - \psi(\overline{x}) \leq u(x) - \psi(x) \qquad \text{para todo} \;\; x \in B(\overline{x}, \delta).$$

Seja $\gamma : [0, u(\overline{x})] \longrightarrow M$ a geodésica que minimiza a distância de $\overline{x}$ a $\partial\Omega$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\gamma(0) = \overline{x}$, logo como γ está parametrizada pelo comprimento de arco, temos

$$t + \psi(\gamma(t)) - \psi(\gamma(t)) \geq t + u(\gamma(t)) - u(\gamma(0)) = 0.$$

Assim

$$1 + \frac{\psi(\alpha(t)) - \psi(\alpha(0))}{t} \leq 0.$$

Tomando o limite quando $t \to 0$, temos que

$$1 + d\psi_{\overline{x}}(\gamma'(0)) \leq 0.$$

Da Observação 2.26, segue que

$$\left\langle \nabla\psi(\overline{x}), \alpha'(0) \right\rangle_{\overline{x}} + 1 \leq 0 \quad \text{ e } \quad \|\eta\|_{\overline{x}} = \|\nabla\psi(\overline{x})\|_{\overline{x}}.$$

Por outro lado, usando a desigualdade Cauchy-Schwarz,

$$-\|\nabla\psi(\overline{x})\|_{\overline{x}} \leq \left\langle \nabla\psi(\overline{x}), \gamma'(0) \right\rangle_{\overline{x}} \leq \|\nabla\psi(\overline{x})\|_{\overline{x}}$$

Combinando as duas últimas desiguldades, obtemos

$$1 - \|\nabla\psi(\overline{x})\|_{\overline{x}} \leq \left\langle \nabla\psi(\overline{x}), \gamma'(0) \right\rangle_{\overline{x}} + 1 = 0.$$

Isto implica que

$$1 \leq \|\nabla\psi(\overline{x})\|_{\overline{x}} = \|\eta\|_{\overline{x}}$$

Portanto, u é supersolução de viscosidade da equação eikonal.

Finalmente, dos passos 1, 2 e 3 concluimos que u é solução de viscosidade da equação (EE). ■

Corolário 5.5 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e Ω um subconjunto aberto e limitado de M com fronteira $\partial\Omega$. Então a função $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $u(x) = d(x, \partial\Omega)$ é a única solução de viscosidade da equação eikonal* (EE)*.*

Prova. Segue diretamente das Observações 2.36 e 2.38. ■

Referências Bibliográficas

[1] Azagra, Daniel; Ferrera, Juan; López-Mesas, Fernando. *Nonsmooth analysis and Hamilton-Jacobi equations on Riemannian manifolds.* J. Funct. Anal. 220 (2005), no. 2, 304-361.

[2] Bardi, Martino; Capuzzo-Dolcetta, Italo. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations.* Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser, Boston, reprint of the 1997 edition, 2008.

[3] Biezuner R., *Notas de aula de geometria riemanniana*, Departamento de Matemáticas, UFMG, 2016.

[4] Crandall, M. G.; Evans, L. C.; Lions, P.-L. *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations.* Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), no. 2, 487-502.

[5] Crandall, Michael G.; Lions, Pierre-Louis. *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations.* Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), no. 1, 1-42.

[6] Deimling, Klaus. *Nonlinear functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[7] Deville, Robert. *A mean value theorem for nondifferentiable mappings in Banach spaces.* Serdica Math. J. 21 (1995), no. 1, 59-66.

[8] Deville, Robert; Godefroy, Gilles; Zizler, Václav. *A smooth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions.* J. Funct. Anal. 111 (1993), no. 1, 197-212.

[9] Deville, Robert; Godefroy, Gilles; Zizler, Václav. *Smoothness and renormings in Banach spaces.* Pitman Monographies and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol 64, Pitman, London, 1993.

[10] Hájek, Petr; Johanis, Michal. *Smooth analysis in Banach spaces.* De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 19. De Gruyter, Berlin, 2014.

[11] Jiménez-Sevilla, M.; Sánchez-González, L. *On some problems on smooth approximation and smooth extension of Lipschitz functions on Banach-Finsler manifolds.* Nonlinear Anal. 74 (2011), no. 11, 3487-3500.

[12] Klingenberg, Wilhelm. *Riemannian geometry.* Walter de Gruyter Studies in Mathematics, vol 1. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1982.

[13] Lang, Serge. *Fundamentals of differential geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 191. Springer-Verlag, New York, 1999.

[14] Lasry, J.-M.; Lions, P.-L. *A remark on regularization in Hilbert spaces.* Israel J. Math. 55 (1986), no. 3, 257-266.

[15] Lee, John M. *Introduction to smooth manifolds.* Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013.

[16] Lima, Elon Lages. *Variedades diferenciáveis.*, Publicações Matemáticas, Rio de Janeiro, 2007.

[17] Mantegazza, Carlo; Mennucci, Andrea Carlo. *Hamilton-Jacobi equations and distance functions on Riemannian manifolds.* Appl. Math. Optim. 47 (2003), no. 1, 1-25.

[18] Palais, Richard S. *Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds.* Topology 5 (1966) 115-132.

[19] Peyré, G., Péchaud, M., Keriven, R., Cohen, L. D., *Geodesic methods in computer vision and graphics*, Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision, 5(3-4), pp. 197-397, 2010.

[20] Sethian, J. A. *Level set methods and fast marching methods: Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision and materials science.* Second edition. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 3. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.