

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**Thaís Couto De Oliveira**

**ÁREA DA SUPERFÍCIE E VOLUME DA IGREJA DE SÃO FRANCISCO DE  
ASSIS**

Belo Horizonte

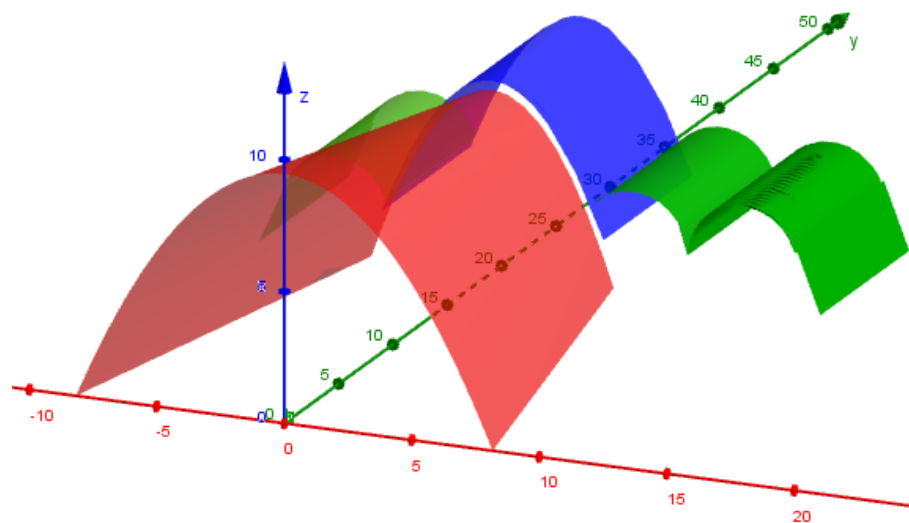
2017

Thaís Couto De Oliveira

## ÁREA DA SUPERFÍCIE E VOLUME DA IGREJA DE SÃO FRANCISCO DE ASSIS

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito para a obtenção do título de Pós Graduação em Matemática com Ênfase em Cálculo.

**Orientador:** Michel Spira



Belo Horizonte

2017

## Agradecimentos

*“Não precisa arrumar a mesa, a gente come aqui no sofá mesmo”* meus pais diziam quando iam almoçar conosco e a mesa estava tomada por livros, computador e rascunhos. A eles e ao meu marido, meu agradecimento especial, pelo apoio e incentivo incondicional desde o primeiro momento.

Ao meu irmão por acreditar no meu trabalho e pelos serviços de topografia e informática prestados.

Agradeço imensamente ao Professor Michel Spira, por me acolher em um momento delicado da minha trajetória no Programa de Pós Graduação. Por compartilhar comigo seu tempo e seu conhecimento, e por tornar o aprendizado mais divertido.

Agradeço ao Professor Marcos Montenegro, que me auxiliou na escolha do caminho e orientou meus primeiros passos nessa jornada.

Deixo também os agradecimentos aos meus familiares e amigos, especialmente ao Charles, pelas conversas que me ajudaram a entender o significado da experiência e do trabalho que estava desenvolvendo.

Agradeço a Deus por colocar cada uma dessas pessoas no meu caminho e por guiar meus estudos.

Enfim, obrigada a todos que contribuíram direta ou indiretamente para esta conquista.

*“O correr da vida embrulha tudo, a vida é assim:*

*Esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa,*

*Sossega e depois desinquieta.*

*O que ela quer da gente é coragem”.*

**João Guimarães Rosa**

## Resumo

Neste trabalho, discutimos aplicações dos conteúdos de cálculo e geometria para obter, através de modelagem com parábolas, arcos de circunferências e trapézios, a área da superfície e o volume da Igreja de São Francisco de Assis.

Durante a pesquisa bibliográfica e documental sobre a edificação escolhida, foram desenvolvidos modelos tridimensionais no software Geogebra, versão 5.0, com o objetivo de descrever e modelar a estrutura da Igrejinha. O software Maple 2015 foi utilizado para os cálculos de áreas e volumes por integrais.

**Palavras chave:** Estruturas; Parábolas; Modelagem matemática; Oscar Niemeyer; Igrejinha da Pampulha.

## SUMÁRIO

	Agradecimentos.....	3
	Resumo.....	5
1.	Introdução.....	7
2.	Um pouco da história: Vida e obra de Oscar Niemeyer.....	8
3.	Plantas da Igreja de São Francisco de Assis, os elementos matemáticos e as separações usadas neste trabalho.....	10
4.	Cálculo de comprimentos e áreas por integrais.....	14
5.	Modelagem da casca da superfície frontal da Igreja de São Francisco de Assis.....	15
5.1	As parábolas que compõem a estrutura da Igrejinha da Pampulha.....	15
5.2	Determinação de uma equação para a cúpula maior.....	17
5.3	Área da casca da superfície da cúpula maior.....	19
6.	Modelagem da superfície posterior da Igreja de São Francisco de Assis.....	20
6.1	Comprimento do arco da cúpula menor.....	21
6.2	Comprimento dos arcos de circunferências.....	22
6.3	Comprimento dos lados do trapézio.....	23
6.4	Área total da casca da superfície posterior da Igreja de São Francisco de Assis.....	24
7.	Área da parede de ladrilhos.....	25
8.	Um teorema interessante para calcular o volume.....	27
9.	Considerações finais.....	31
10.	Referências bibliográficas.....	33

## 1. Introdução

A Igreja de São Francisco de Assis, também chamada de Igrejinha da Pampulha, compôs o cenário do meu trajeto para a faculdade, durante a graduação e a pós-graduação. Sempre me chamou a atenção por suas formas curvilíneas e pela estética, avessa ao protótipo das igrejas convencionais.

A ideia de calcular a área da superfície e o volume da igrejinha partiu da curiosidade de usar o cálculo como ferramenta para solucionar um problema prático do nosso dia a dia.

Meu trabalho, a princípio, buscou discutir a relação da arquitetura da igreja com modelos matemáticos, ou seja, identificar seções cônicas que pudessem descrever os contornos da edificação. Embora tenha realizado numerosas pesquisas bibliográficas, bem como visita ao IPHAN (Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional), não foi possível determinar como foi definido o projeto original e o método construtivo desse edifício. A maioria das referências bibliográficas pesquisadas<sup>[1]</sup>, sugerem que a Igreja de São Francisco de Assis seja uma composição de arcos de circunferências e parábolas e, portanto, adotamos esse fato como verdadeiro.

Assumindo esse fato, a partir das plantas e com recursos da modelagem matemática determinamos as equações que descrevem a estrutura da Igrejinha. Isso feito, utilizamos recursos do cálculo e geometria para determinar a área e o volume da Igrejinha da Pampulha.

Para permitir aos leitores um melhor acompanhamento dos cálculos, optamos por utilizar medidas aproximadas, excluindo as casas decimais. No entanto, nos softwares usados para calcular e modelar as superfícies, consideramos duas casas decimais, de acordo com os valores exibidos nas plantas que serão apresentadas no capítulo 3. E ao final, exibimos um quadro comparativo entre os resultados obtidos com zero e com duas casas decimais para mensurar os percentuais de erro.

[1] As citações relacionadas às parábolas e arcos aparecem nas referências bibliográficas [11], [12], [13] e [14].

## 2. Um pouco da história: Vida e obra de Oscar Niemeyer

Oscar Niemeyer nasceu no Rio de Janeiro em 15 de dezembro de 1907, viveu até os 104 anos de idade e veio a falecer em 5 de dezembro de 2012 a poucos dias de completar 105 anos.

Niemeyer se destacou no cenário arquitetônico mundial pela sua criatividade e pela ousadia de desafiar os padrões e os limites da engenharia.

Entre seus trabalhos mais célebres, a Igreja de São Francisco de Assis, situada na Pampulha, em Belo Horizonte, Minas Gerais, é considerada a obra prima deste notável arquiteto. A obra alavancou a carreira do jovem arquiteto que anos mais tarde foi responsável por projetar os prédios públicos da nova capital do Brasil.

A igreja, popularmente conhecida por Igrejinha da Pampulha, é parte integrante do Conjunto Arquitetônico da Pampulha que foi projetado por Oscar Niemeyer, sob encomenda do então prefeito Juscelino Kubitschek.

Com o intuito de desenvolver uma área ao redor do lago artificial da Pampulha, Juscelino encomendou à Niemeyer um conjunto de edifícios que incluía, além da igreja, um hotel, um clube, um cassino e uma casa de baile. Os prédios ficaram conhecidos como Conjunto Arquitetônico da Pampulha, sendo inaugurados em 16 de Maio de 1943. O cassino se tornou o Museu de Arte da Pampulha em 1957.

FIGURA 2.2 – Mapa da Lagoa: contorno e principais pontos turísticos da Pampulha.



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Lagoa\\_da\\_Pampulha#/media/File:Mapa\\_lagoa\\_pampulha.jpg](https://pt.wikipedia.org/wiki/Lagoa_da_Pampulha#/media/File:Mapa_lagoa_pampulha.jpg)

FIGURA 2.1 – Oscar Niemeyer



Fonte:

<http://www.dicasfree.com/tudo-sobre-oscar-niemeyer/> acessado em outubro/2016



No projeto da capela Oscar Niemeyer fez novos experimentos em concreto armado, criando uma abóbada parabólica em concreto, até então só utilizada em hangares. Iniciou aquilo que seria a diretriz de toda a sua obra: uma arquitetura onde será preponderante a plasticidade da estrutura de concreto armado, em formas ousadas, inusitadas e marcantes.

As linhas curvas da igreja seduziram artistas e arquitetos, mas escandalizaram o acanhado ambiente cultural da cidade, de tal forma, que as autoridades eclesiásticas não permitiram, por muitos anos, a consagração da capela devido à sua forma inusitada e ao painel de Portinari onde se vê um cachorro representando um lobo junto à São Francisco de Assis. A igreja permaneceu durante quatorze anos impedida de realizar cultos.

Seu interior abriga a Via Crúcis, constituída por catorze painéis de Cândido Portinari, considerada uma de suas obras mais significativas. Os painéis externos são de Cândido Portinari - painel figurativo e de Paulo Werneck - painel abstrato. Os jardins são assinados por Burle Marx. Alfredo Ceschiatti esculpiu os baixos-relevos em bronze do batistério. Na área externa, é recoberta de pastilhas de cerâmica em tons de azul claro e branco, formando desenhos abstratos. A igreja da Pampulha é um dos mais conhecidos "cartões postais" de Belo Horizonte.

A Igreja da Pampulha é tombada pelo Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional (Iphan), pelo Instituto Estadual do Patrimônio Histórico e Artístico de Minas Gerais - Iepha/MG (em 1984) e pela Gerência do Patrimônio Municipal.

Em 2013, a prefeitura de Belo Horizonte manifestou interesse em apresentar a candidatura do Conjunto Arquitetônico da Pampulha a receber o título de Patrimônio Mundial da UNESCO. Uma representante da UNESCO visitou a região em 2015, ano em que a Pampulha era única candidata. Para garantir melhores condições do patrimônio, o Museu de Arte da Pampulha – MAP – receberá uma grande reforma durando dois anos a partir de julho de 2016, e duas praças da região terão seus projetos de paisagismo recuperados.

Em 17 de julho de 2016, o local passou a ser considerado um Patrimônio da Humanidade após reunião de membros da UNESCO em Istambul, na Turquia.<sup>[1]</sup>

[1] Texto elaborado a partir das referências bibliográficas [1], [2], [3] e [4]

### 3. Plantas da Igreja de São Francisco de Assis, os elementos matemáticos e as separações usadas neste trabalho.

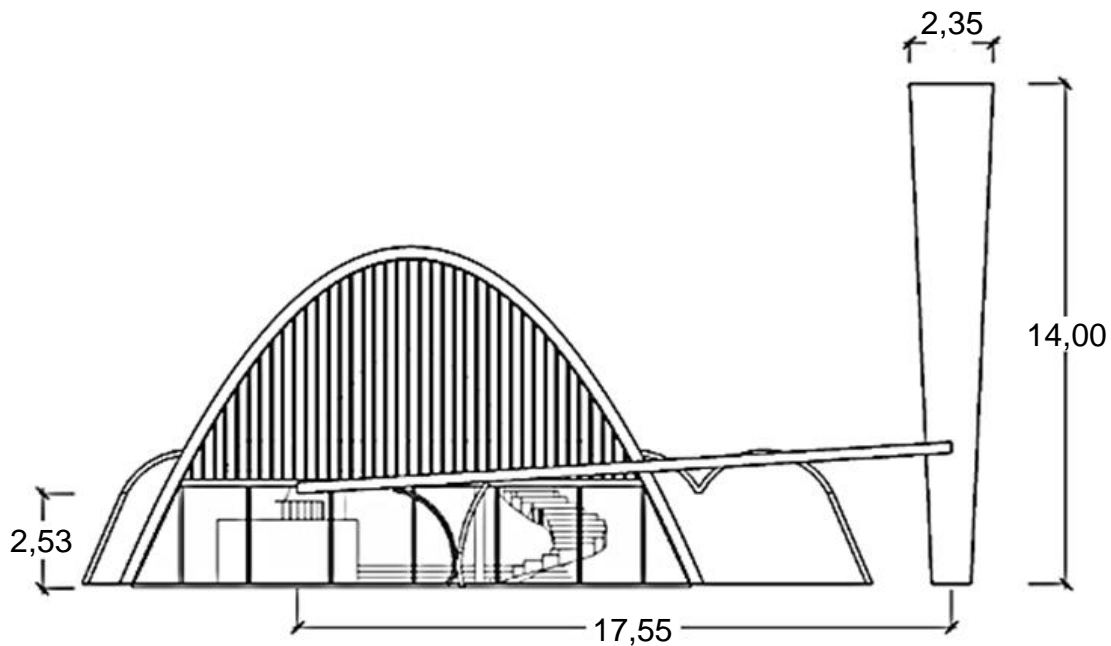
FIGURA 3.1 - Fotografia da Igreja de São Francisco de Assis



Fonte: <http://www.eduardaebreno.com/en/about> acessado em 21/10/2015.

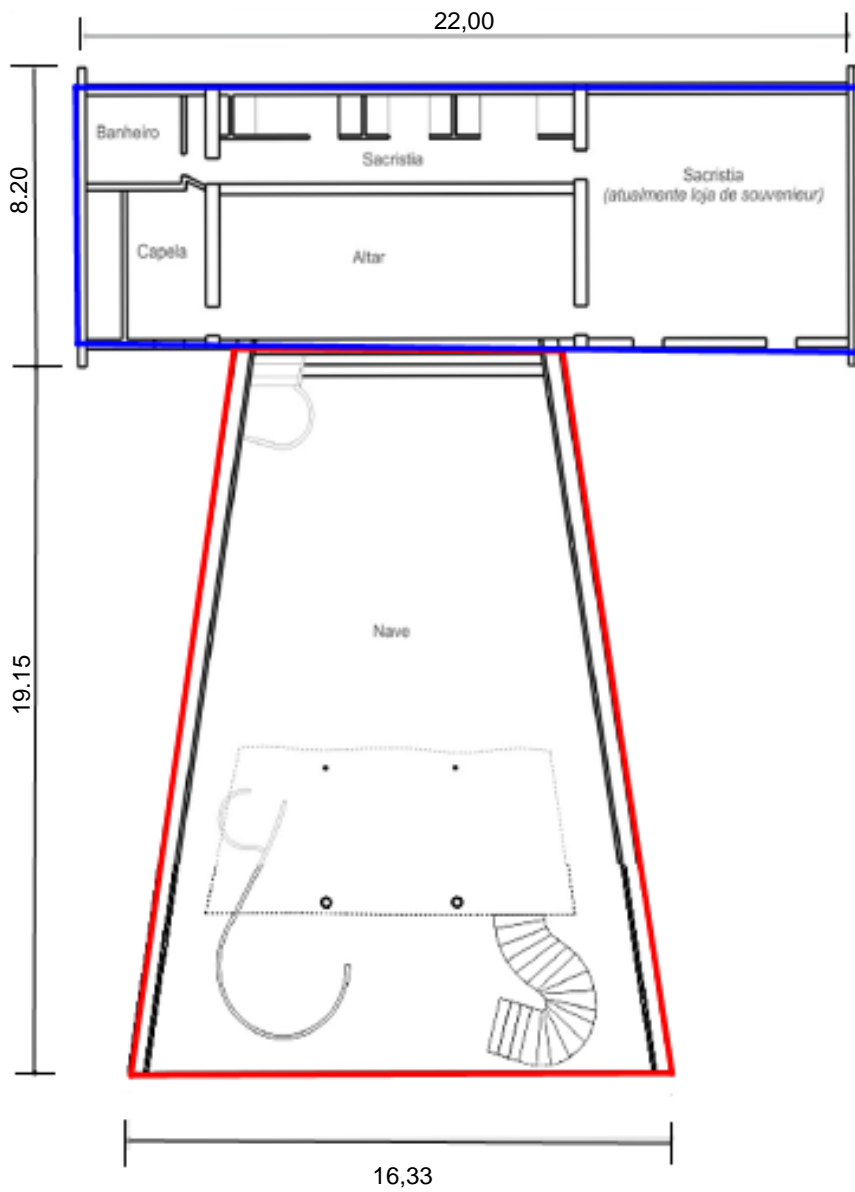
As imagens a seguir mostram as vistas com as dimensões da Igreja de São Francisco de Assis.

FIGURA 3.2 - Medidas Marquise e Torre Igreja da Pampulha



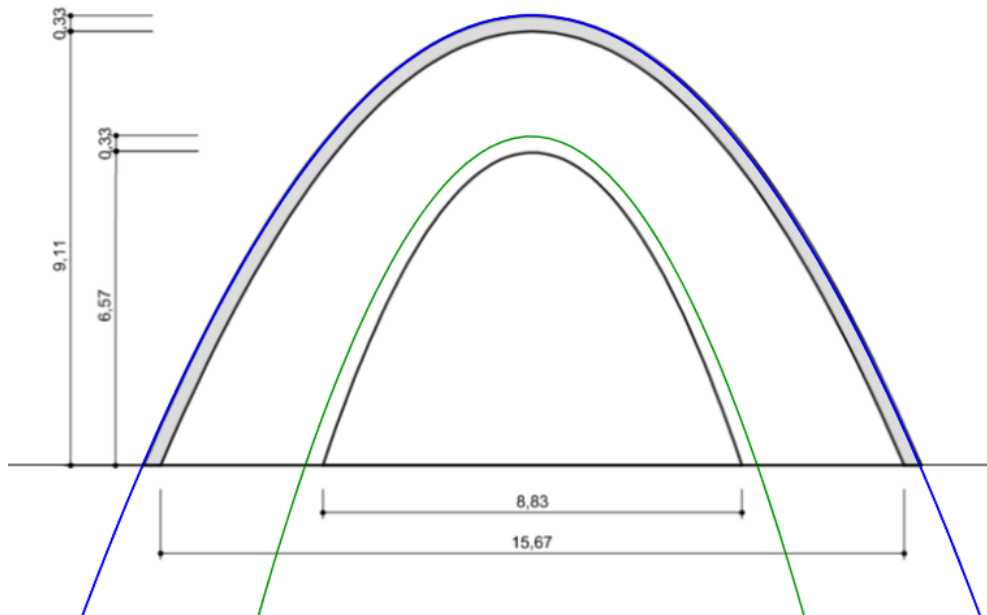
Fonte: <http://repositorio.unb.br/handle/10482/13603> acessado em 21/10/2015.

FIGURA 3.3 - Planta-Baixa Igreja da Pampulha. Sobreposição de retângulo e trapézio.



Fonte: <http://repositorio.unb.br/handle/10482/13603> acessado em 21/10/2015. Com adaptações no Geogebra.

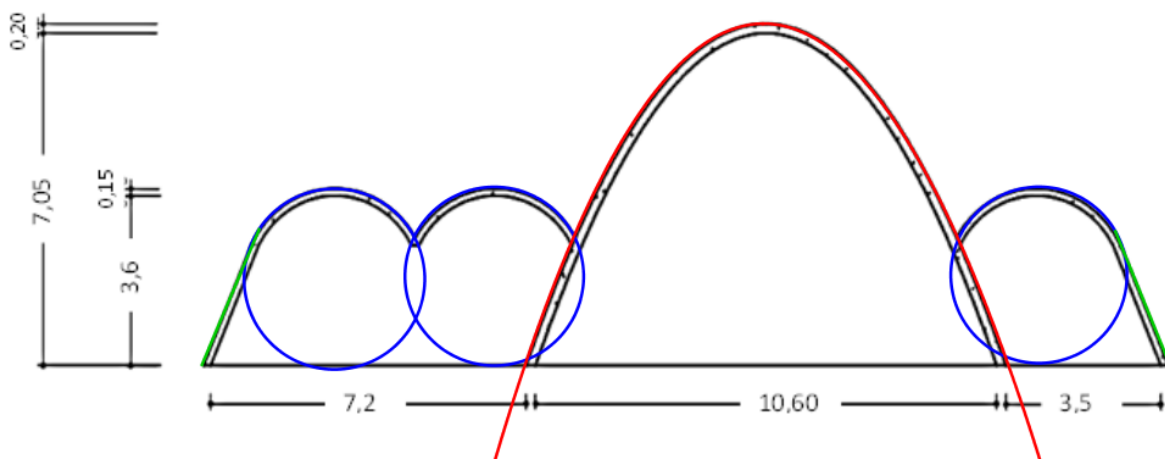
FIGURA 3.4 - Medidas da abóboda maior, com parábolas sobrepostas. Em azul, parábola inicial e em verde a parábola final.



Fonte: <http://repositorio.unb.br/handle/10482/13603> acessado em 21/10/2015. Com adaptações no Geogebra.

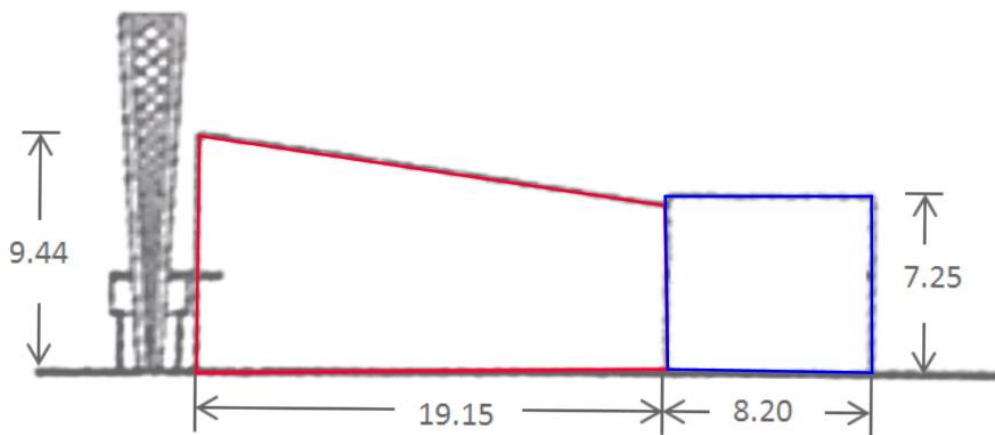
Considere que as parábolas, inicial e final, descritas na figura 3.4 se referem às parábolas que limitam o início e o fim da cúpula maior.

Fig.3.5 Medidas da face posterior, com arcos de circunferências e parábola sobrepostos.



Fonte: <http://repositorio.unb.br/handle/10482/13603> acessado em 21/10/2015. Com adaptações no Geogebra.

Figura 3.6 - Vista lateral da Igreja. Com trapézio e retângulo sobrepostos.

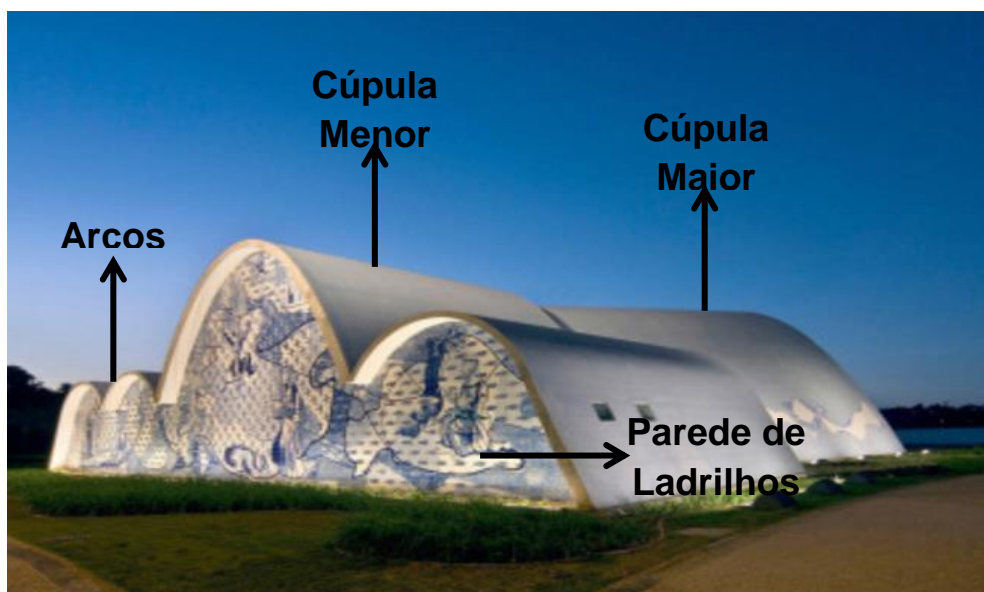


Fonte: <https://higormap.wordpress.com/2015/04/19/trabalho-sistemas-estruturais-4-projetos-com-conceitual-de-dunas-e-montanhas/> acessado em 10/07/2016. Com adaptações no Geogebra.

Definimos uma partição da igreja para facilitar a identificação e os cálculos das superfícies. A parte frontal é composta pela cúpula maior ou frontal e a parte traseira é formada pela cúpula menor, por três arcos e dois planos. A parede de ladrilhos corresponde à face posterior da Igreja. Portanto temos três partes notáveis na estrutura da igreja, a saber:

- Cúpula maior: parte frontal da igreja.
- Cúpula menor e arcos: parte posterior da igreja.
- Parede de ladrilhos.

FIGURA 3.7 – Partições da Igreja da Pampulha adotadas neste trabalho.



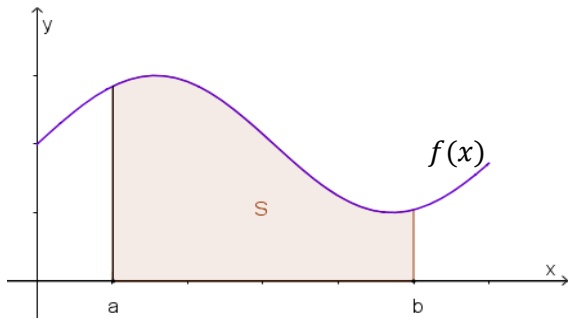
Fonte: <http://loves-architecture.tumblr.com/post/63873847853/igreja-da-pampulha-arquiteto-oscar-niemeyer> com adaptações da autora.

#### 4. Cálculos de comprimentos e áreas por integrais

Este capítulo apresenta brevemente as fórmulas para calcular a área sob uma curva e seu comprimento, que serão usadas nos próximos capítulos.

Suponha uma curva  $C$ , definida pela equação  $y = f(x)$ , conforme figura:

FIGURA 4.1 – Curva  $C$  e a área  $S$  sob a curva definida por  $f(x)$ .



Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

Sabemos, dos cursos de Cálculo, que se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então a área  $A$  da região  $S$  que está sob o gráfico de  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , é

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

E ainda, se  $f'$  for contínua em  $[a, b]$ , então o comprimento da curva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , é:

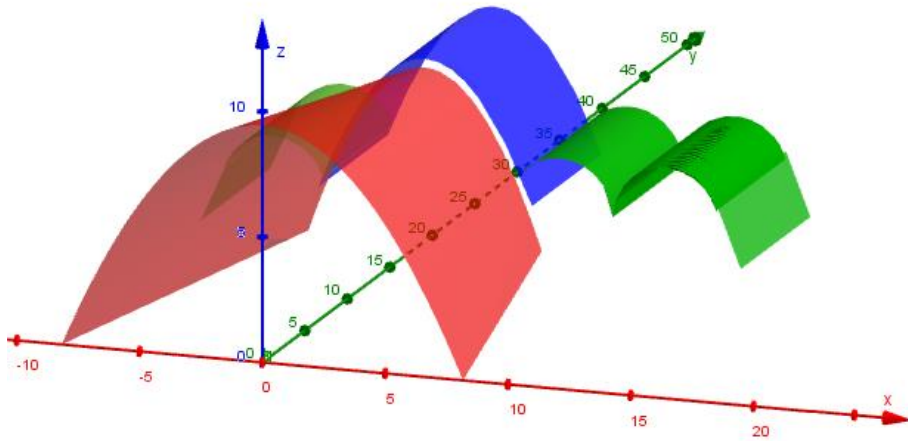
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (2)$$

Vale observar que ambas as fórmulas valem com hipóteses mais gerais sobre  $f$ , mas que não são relevantes para o caso em questão.

## 5. Modelagem da casca da superfície frontal da Igreja de São Francisco de Assis

Primeiramente vamos definir um sistema cartesiano com eixos  $xyz$  ajustados de forma a expressar as dimensões da edificação. O eixo  $x$  corresponde à transversal com  $-8 \leq x \leq 8$ , o eixo  $y$  corresponde à longitudinal com  $0 \leq y \leq 19$  e o eixo  $z$  corresponde à altura com  $0 \leq z \leq 9$ .

FIGURA 5.1 – Sistema cartesiano adotado.



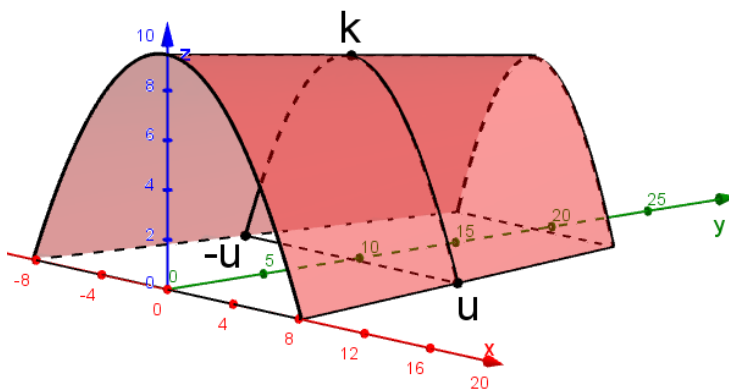
Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

### 5.1. As parábolas que compõem a estrutura da Igrejinha da Pampulha.

Considerando que as curvas da cúpula maior são parábolas e sua projeção no plano  $xy$  é um trapézio (ver figura 3.3) podemos assumir que a superfície se trata de um cone parabólico, cujas seções paralelas ao plano  $xz$  são parábolas.

Nesse capítulo apresentaremos uma equação geral para as parábolas da cúpula maior, com raízes  $-u$  e  $u$  e vértice  $(0, y, K)$ , conforme o gráfico:

FIGURA 5.1.1 – Parábolas da Cúpula Maior



Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

A equação geral dessa parábola é

$$z = a(x^2 - u^2)$$

No ponto  $(0, 0, k)$ , temos:

$$k = -au^2$$

$$a = -\frac{k}{u^2}$$

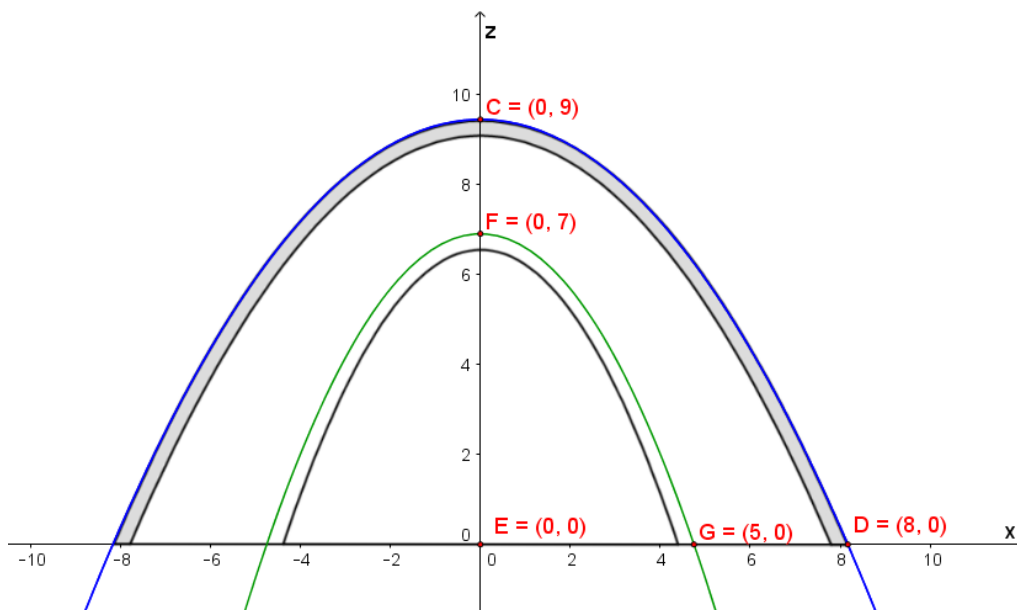
Portanto as parábolas que descrevem a cúpula maior tem equação da forma:

$$z = -\frac{k}{u^2}(x^2 - u^2) \quad (3)$$

Na seção seguinte, vamos determinar  $k$  e  $u$  em função de  $y$  para, finalmente, escrever  $z = f(x, y)$ .

Voltando à vista frontal da cúpula maior, marcamos os pontos C, D cujas coordenadas estão definidas na planta e conseqüentemente obtemos as parábolas inicial e final.

FIGURA 5.1.2 – Ajuste para as parábolas da Cúpula Maior. Em azul, a parábola inicial e em verde a parábola final.



Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

Pela equação (3), a parábola inicial ( $y = 0$ ) que passa pelos pontos C e D é:

$$z = \frac{-9}{64}(x + 8)(x - 8) = \frac{-9x^2}{64} + 9$$



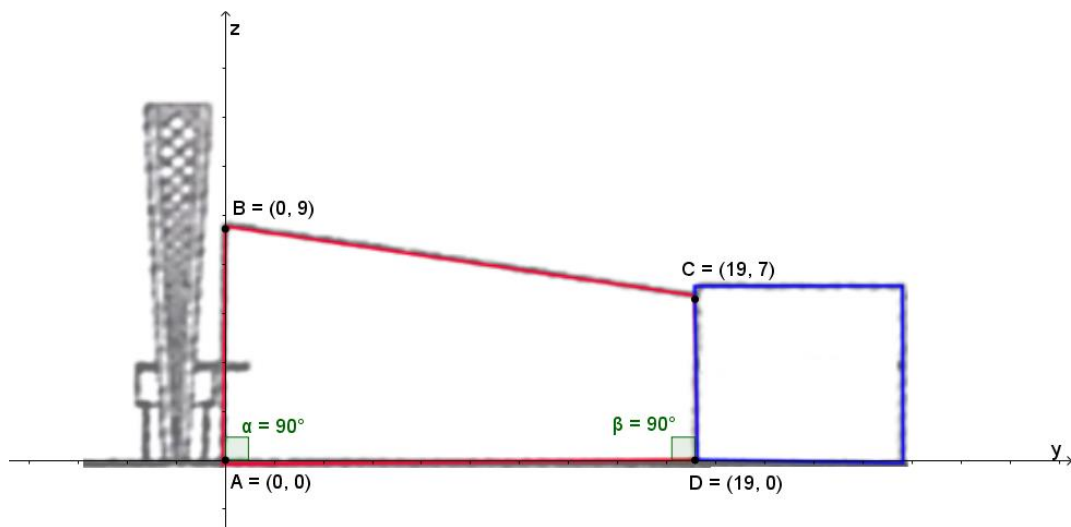
E a parábola final ( $y = 19$ ) que passa pelos pontos F e G tem equação:

$$z = \frac{-7}{25}(x + 5)(x - 5) = \frac{-7x^2}{25} + 7$$

## 5.2. Determinação de uma equação para a cúpula maior

A partir da projeção da cúpula maior no plano  $zy$ , conforme figura 3.6, observamos que a reta  $\overrightarrow{BC}$  descreve, o comportamento dos vértices  $k$  das parábolas, ao longo do eixo  $y$ .

FIGURA 5.2.1 – Vista lateral da Igreja de São Francisco de Assis



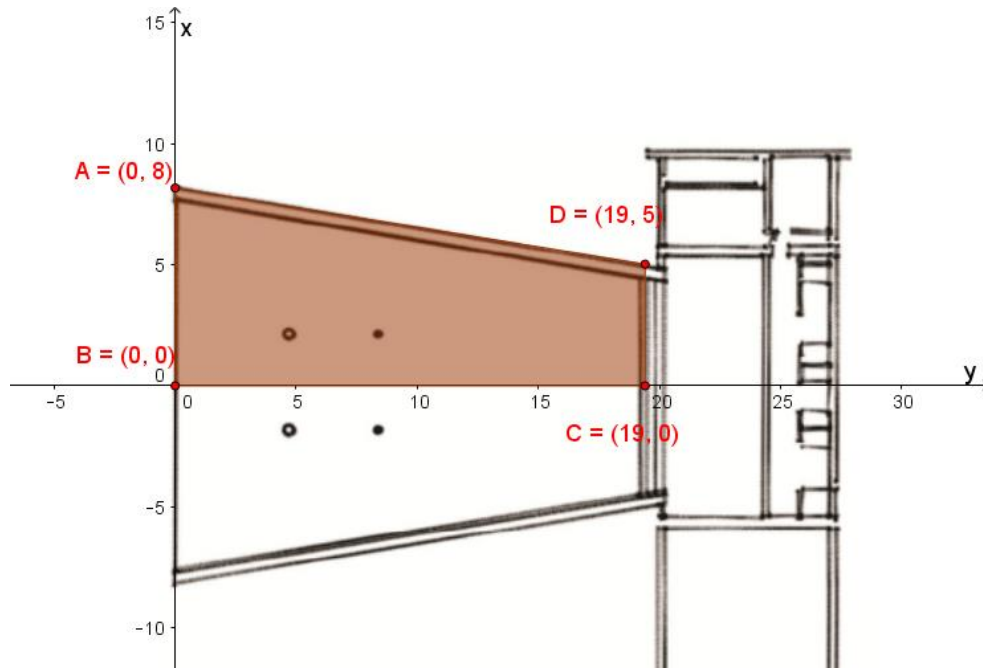
Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

A equação da reta  $\overrightarrow{BC}$ , em função de  $y$  é:

$$k(y) = 9 - \frac{2}{19}y \quad (4)$$

Analogamente a partir da projeção da cúpula maior no plano  $xy$ , conforme figura 3.3, observamos que a reta  $\overleftrightarrow{AD}$  descreve, o comportamento das raízes  $u$  e  $-u$ , ao longo do eixo  $y$ .

FIGURA 5.2.2 – Planificação da Igreja de São Francisco de Assis



Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

A equação da reta  $\overleftrightarrow{AD}$ , em função de  $y$  é:

$$u(y) = 8 - \frac{3y}{19} \quad (5)$$

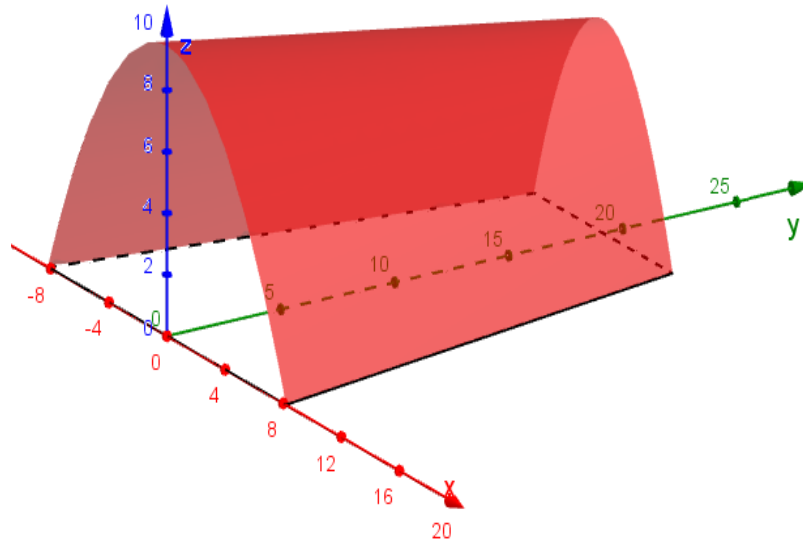
Esta equação descreve o comportamento de  $u$  e  $-u$  em função de  $y$  ao longo da edificação.

Voltando à equação (3) e substituindo as expressões de  $u(y)$  e  $k(y)$  obtidos anteriormente, temos:

$$z = -\frac{\left(9 - \frac{2}{19}y\right)}{\left(8 - \frac{3y}{19}\right)^2} \left[ x^2 - \left(8 - \frac{3y}{19}\right)^2 \right] = f(x, y) \quad (6)$$

Ao inserir o comando  $\text{Função}[f(x,y), -8.17, 8.17, 0, 19.15]$  onde  $f(x,y) = (((-9.44 - 2.54y / 19.15) (x^2 - (8.17 - 3.42y / 19.15)^2)) / (8.17 - 3.42y / 19.15)^2)^{(1/2)}$  na barra de entrada do Geogebra, obtemos a seguinte superfície:

FIGURA 5.2.3 – Modelagem da Igreja de São Francisco de Assis.



Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

### 5.3. Área da casca da superfície da cúpula maior

Sabemos do curso de cálculo que a área da casca da superfície da cúpula maior é:

$$A = \iint \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \, dx \, dy$$

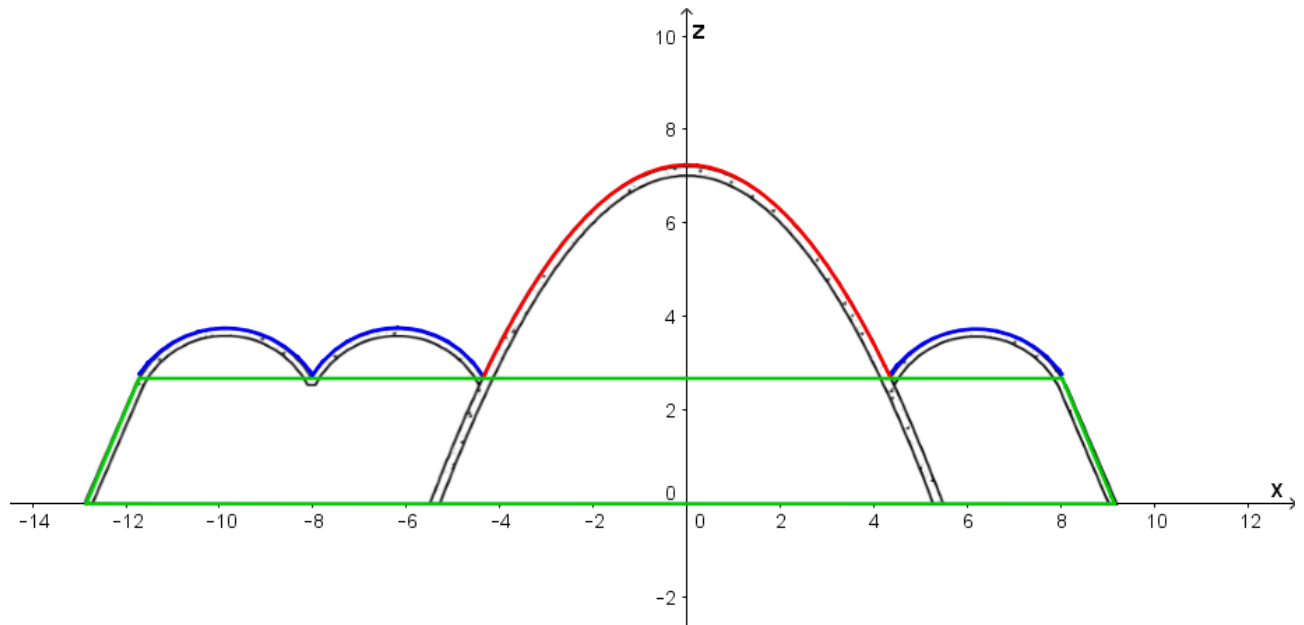
E o domínio de integração corresponde ao trapézio obtido na planificação da cúpula maior, assim:

$$A = \int_0^{19} \int_{-u(y)}^{u(y)} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \, dx \, dy = 421 \, m^2$$

## 6. Modelagem da superfície posterior da Igreja de São Francisco de Assis

Adotamos a seguinte separação para a parte posterior da Igrejinha da Pampulha:

FIGURA 6.1 - Partições da parte posterior da Igreja.



Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

As curvas em azul representam arcos de circunferências, a curva vermelha representa uma parábola e, em verde, o trapézio que completa a parte de trás do edifício. Pela planta da figura 3.3, apresentada no capítulo 3, a projeção da parte posterior da igreja é um retângulo. Logo, a casca da parte posterior é um prisma e sua superfície pode ser calculada pela fórmula habitual, ou seja,

$$\text{Área da superfície} = \text{perímetro da base} \times \text{comprimento}$$

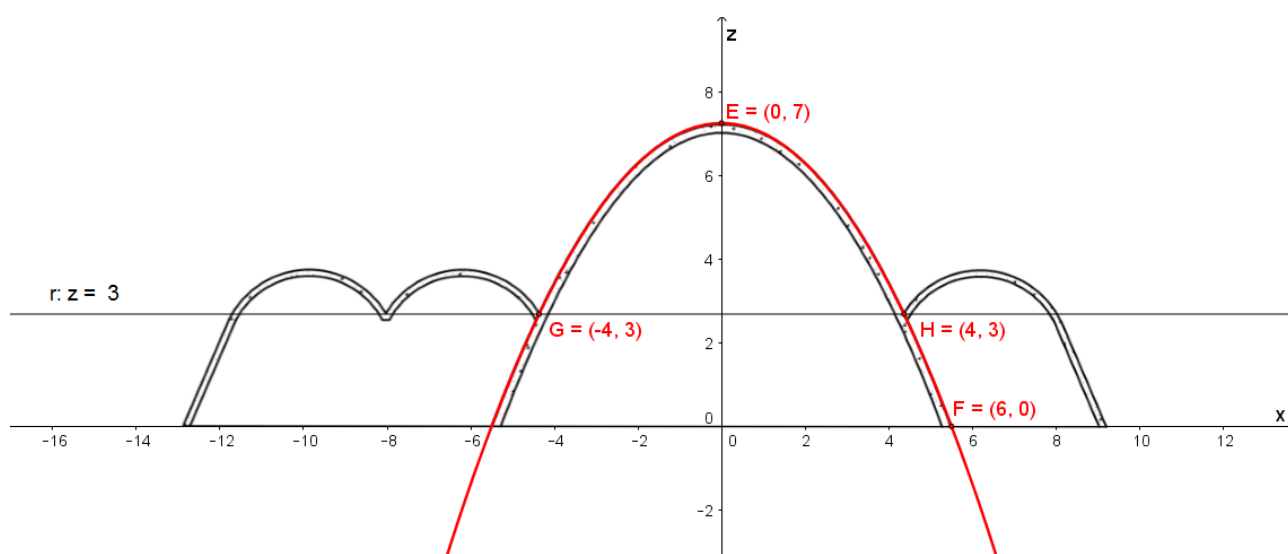
## 6.1. Comprimento do arco da cúpula menor

A partir da planta da Igrejinha marcamos os pontos E, F e analogamente ao que foi feito na seção 5.1, encontramos a equação da parábola que passa por estes dois pontos, ou seja,

$$z = \frac{-7}{6^2}(x + 6)(x - 6) = \frac{-7x^2}{36} + 7 = f(x)$$

Traçamos a reta  $r: z = 3$ ; os pontos G e H, determinados pela figura, são as interseções de  $r$  com a parábola:

FIGURA 6.1.1 - Em vermelho, ajuste para a parábola da Cúpula Menor.



Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

O comprimento do arco da parábola será calculado pela equação 2, com intervalo de integração  $[a, b]$  dado pelas coordenadas dos pontos G e H.

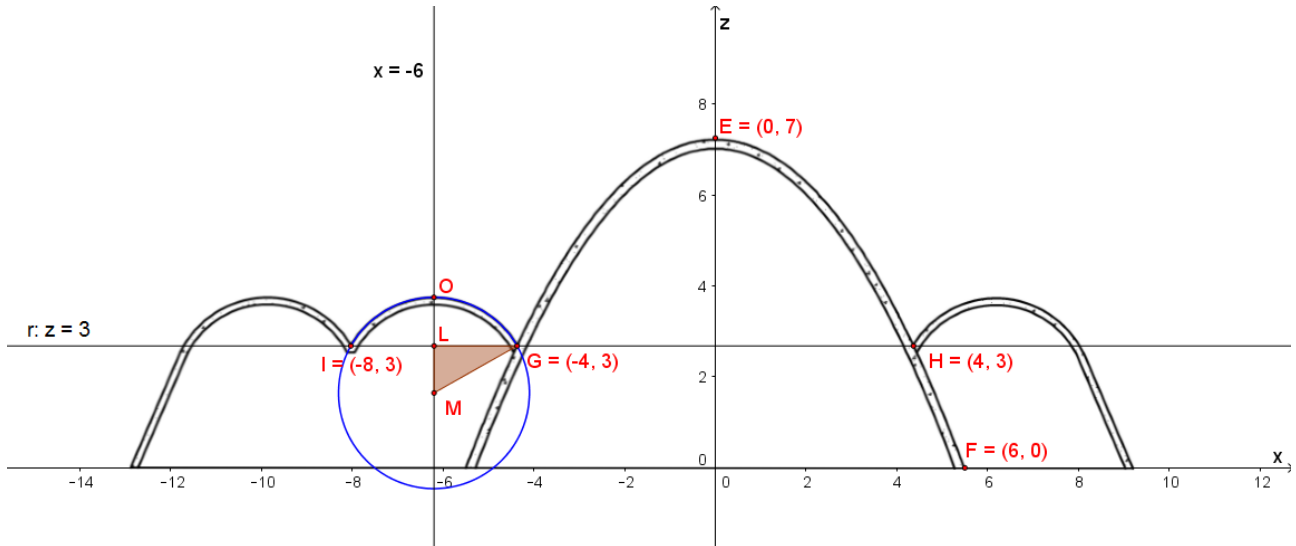
Assim:

$$C = \int_{-4}^4 \left( \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \right) dx = 11 \text{ m} \quad (7)$$

## 6.2. Comprimento dos arcos de circunferências

Inicialmente vamos encontrar a equação da circunferência que descreve os arcos. As medidas, apresentadas nas plantas do capítulo 3, nos fornecem  $\overline{IG} = 4$  e  $\overline{LO} = 1$ . Para determinar a equação desta circunferência utilizamos a seguinte construção:

FIGURA 6.2.1 - Em azul, a circunferência que descreve os arcos.



Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

Sejam  $M$  o centro da circunferência,  $L$  o ponto médio de  $\overline{IG}$ ,  $\overline{MG} = \overline{MO} = \text{raio} = r$ ,  $\overline{ML} = r - 1$  e  $\overline{LG} = 2$ .

Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo  $LMG$  temos:

$$r = \sqrt{(r - 1)^2 + 2^2} = 2.2 \text{ m}$$

A circunferência que descreve este arco é dada por:

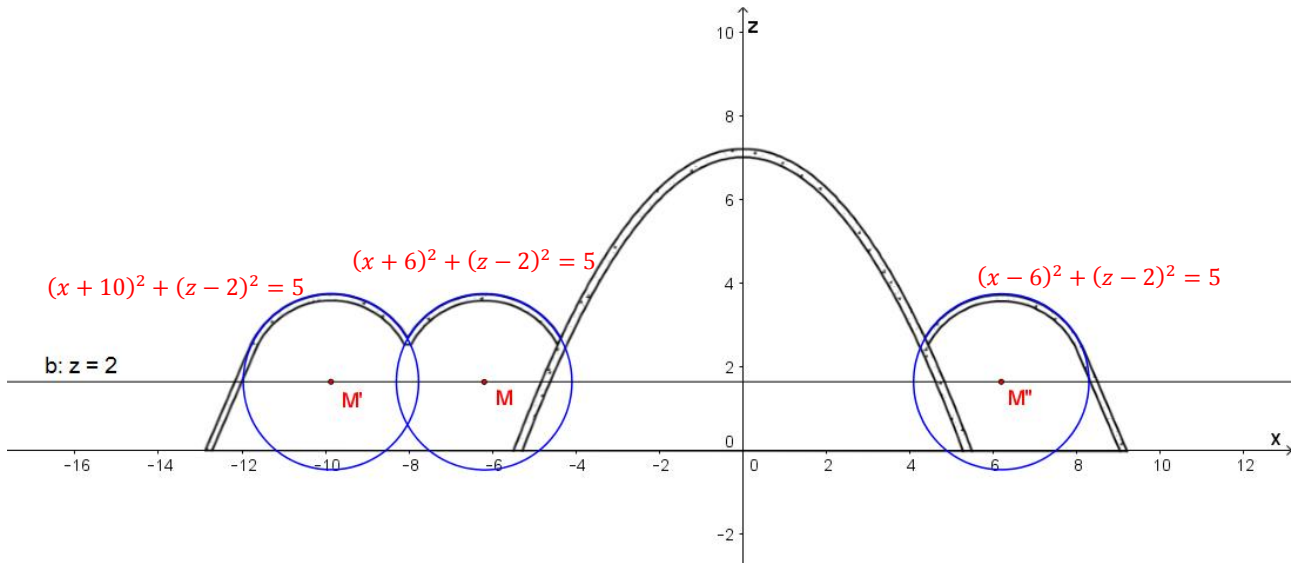
$$(x + 6)^2 + (z - 2)^2 = 5$$

Ou seja,

$$z = \sqrt{5 - (x + 6)^2} + 2 = g(x)$$

Vale observar que esta circunferência é a mesma para os demais arcos menores, conforme a figura:

FIGURA 6.2.2 – Equações das circunferências que descrevem os arcos.



Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

Os comprimentos dos arcos das circunferências serão calculados pela equação 2, com intervalo de integração  $[a, b]$  dado pelas coordenadas dos pontos  $I$  e  $G$ .

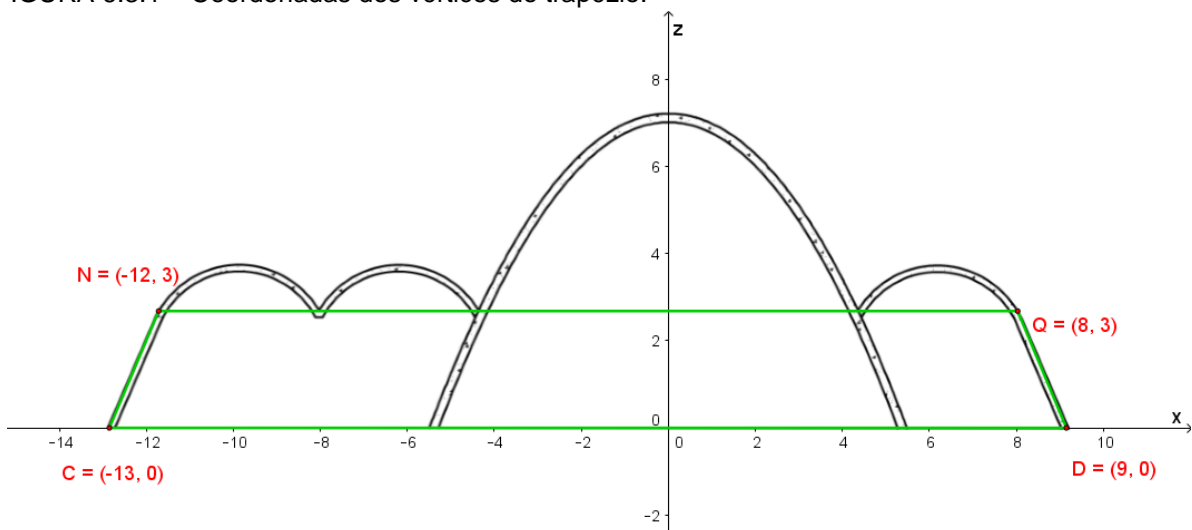
Assim:

$$C = 3 \int_{-8}^{-4} \left( \sqrt{1 + [g'(x)]^2} \right) dx = 15 \text{ m} \quad (8)$$

### 6.3. Comprimento dos lados do trapézio

A partir da planta podemos definir facilmente as coordenadas dos pontos  $C$ ,  $D$ ,  $Q$  e  $N$  e consequentemente os comprimentos dos lados deste trapézio.

FIGURA 6.3.1 – Coordenadas dos vértices do trapézio.



Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

Calculando as distâncias entre os pontos obtemos:

$$D_{N,C} = D_{Q,D} = \sqrt{(-12 + 13)^2 + (3 - 0)^2} = 3 \text{ m} \quad (9)$$

O perímetro total da borda da parte posterior da Igreja de São Francisco de Assis é a soma dos resultados obtidos em (7), (8) e (9).

$$P = 11 + 15 + 6 = 32 \text{ m}$$

#### **6.4. Área total da casca da superfície posterior da Igreja de São Francisco de Assis**

A área total da superfície será o produto do perímetro  $P = 32 \text{ m}$  pelo comprimento da parte traseira, que conforme consta na planta da Igreja (ver capítulo 3, figura 3.6), mede 8.2 metros.

Então:

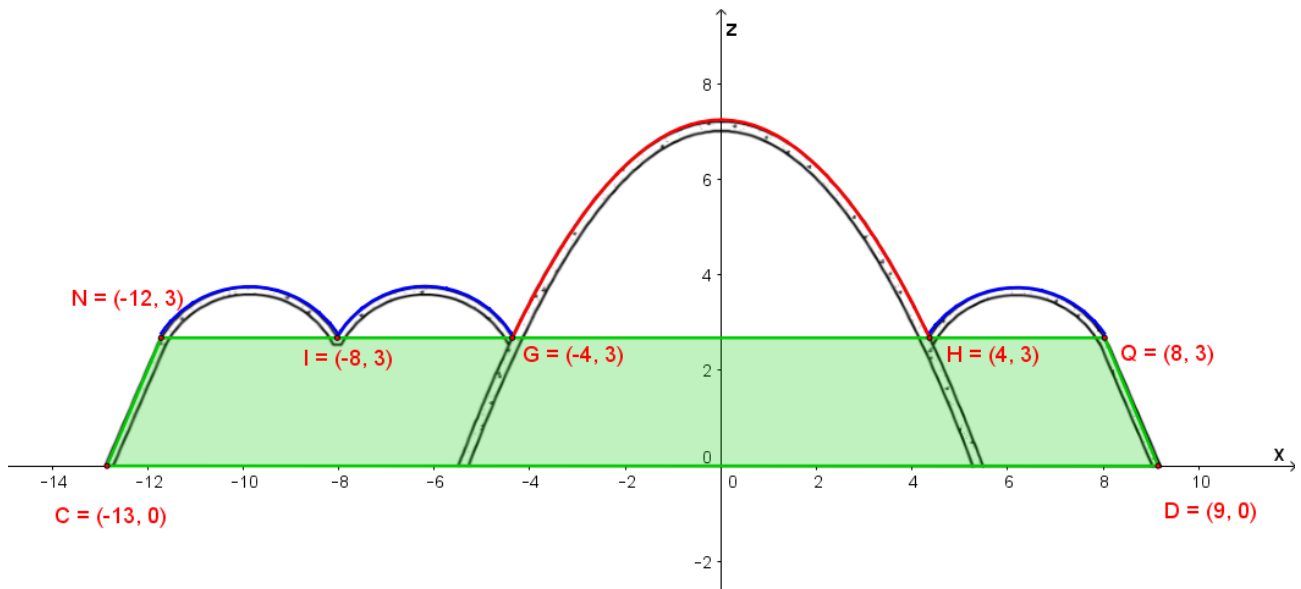
$$A = 32 \cdot 8.2 = 262 \text{ m}^2$$



## 7. Área da parede de ladrilhos

A área da parede de ladrilhos da Igreja de São Francisco de Assis é a soma das áreas abaixo das curvas (arcos e parábolas) somadas à área de um trapézio.

FIGURA 7.1 – Parábola, arcos e trapézio que compõem a parede de ladrilhos.



Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

Aplicando a equação 1 para a cúpula menor, com intervalo de integração  $[a, b]$  dado pelas coordenadas dos pontos  $G$  e  $H$ , temos:

$$A = \int_{-4}^4 \left( \frac{-7x^2}{36} + 7 \right) dx = 48 \text{ m}^2 \quad (10)$$

Para os arcos, o intervalo de integração  $[a, b]$  é dado pelas coordenadas dos pontos  $I$  e  $G$ .

$$A = 3 \int_{-8}^{-4} \left( 2 + \sqrt{5 - (x + 6)^2} \right) dx = 47 \text{ m}^2 \quad (11)$$

Para o trapézio, de acordo com a figura 7.1, temos:

*Base maior* =  $\overline{CD} = 22$  , *Base menor* =  $\overline{NQ} = 20$  e *altura* = 3.

A área do trapézio é:

$$A = \frac{(\textit{Base maior} + \textit{Base menor}) \cdot \textit{Altura}}{2}$$
$$A = \frac{(22 + 20) \cdot 3}{2} = 63 \text{ m}^2 \quad (12)$$

Portanto a área da parede de ladrilhos é a soma dos resultados obtidos em (10), (11) e (12), ou seja:

$$A = 48 + 47 + 63 = 158 \text{ m}^2$$

## 8. Um teorema interessante para calcular o volume

A proposta desta seção é apresentar a fórmula dos três níveis, que nos permite calcular o volume de certos tipos de sólidos, inclusive aqueles estudados no ensino médio.

Uma versão dessa fórmula para o cálculo do volume do tronco de pirâmide já era conhecida no Egito antigo, conforme atesta o Papiro de Moscou, datado de cerca de 1900 A. C.

Para enunciar o teorema, necessitamos de algumas definições e notações. Seja  $K$  um sólido no espaço tridimensional. Denotamos por  $S(a)$  a área da seção transversal obtida interceptando o sólido  $K$  por um plano perpendicular ao eixo  $x$  (plano esse que intercepta o próprio eixo  $x$  na posição  $x = a$ ). A fórmula dos três níveis permite calcular o volume do sólido  $K$  usando as áreas de três seções adequadamente escolhidas.<sup>[1]</sup>

**Teorema 1** (Fórmula dos três níveis) Seja  $K$  um sólido no espaço tridimensional. Se a área  $S(x)$  de qualquer seção transversal do sólido é um polinômio de grau no máximo 3, então o volume do sólido  $K$  entre os planos nas posições  $x = a$  e  $x = b$  é dado pela fórmula:

$$V_K = \frac{(b-a)}{6} \left[ S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right]$$

### Demonstração:

Seja  $S(x)$  um polinômio de grau 3 na forma  $S(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ . A área  $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b c_0 dx + \int_a^b c_1x dx + \int_a^b c_2x^2 dx + \int_a^b c_3x^3 dx$  portanto podemos tratar separadamente os casos em que  $S(x)$  é um polinômio de grau zero, de grau 1, e grau 2 e de grau 3.

1º caso: polinômio de grau zero,  $S(x) = x^0$ .

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b dx = b - a$$

$$b - a = \frac{b-a}{6} \left[ a^0 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^0 + b^0 \right]$$

$$= \frac{b-a}{6} \left[ S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right]$$

[1] <http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/r.assuncao.pdf>

2º caso: polinômio de grau 1,  $S(x) = x$ .

$$\begin{aligned}\int_a^b S(x) dx &= \int_a^b x dx = \frac{(b^2 - a^2)}{2} \\ \frac{(b^2 - a^2)}{2} &= \frac{(b - a)(b + a)}{2} = \frac{(b - a)}{2 \cdot 3} (3b + 3a) \\ &= \frac{(b - a)}{6} [a + 2(a + b) + b] = \frac{(b - a)}{6} \left[ a + 4 \left( \frac{a + b}{2} \right) + b \right] \\ &= \frac{b - a}{6} \left[ S(a) + 4S \left( \frac{a + b}{2} \right) + S(b) \right]\end{aligned}$$

3º caso: polinômio de grau 2,  $S(x) = x^2$ .

$$\begin{aligned}\int_a^b S(x) dx &= \int_a^b x^2 dx = \frac{(b^3 - a^3)}{3} \\ \frac{(b^3 - a^3)}{3} &= \frac{(b - a)}{3 \cdot 2} (2a^2 + 2ab + 2b^2) = \frac{(b - a)}{6} (a^2 + a^2 + 2ab + b^2 + b^2) \\ &= \frac{(b - a)}{6} [a^2 + (a + b)^2 + b^2] = \frac{(b - a)}{6} \left[ a^2 + 4 \left( \frac{a + b}{2} \right)^2 + b^2 \right] \\ &= \frac{b - a}{6} \left[ S(a) + 4S \left( \frac{a + b}{2} \right) + S(b) \right]\end{aligned}$$

4º caso: polinômio de grau 3,  $S(x) = x^3$ .

$$\begin{aligned}\int_a^b S(x) dx &= \int_a^b x^3 dx = \frac{(b^4 - a^4)}{4} \\ \frac{(b^4 - a^4)}{4} &= \frac{(b - a)}{4 \cdot 3} (3a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^3) \\ &= \frac{(b - a)}{12} (2a^3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 2b^3) \\ &= \frac{(b - a)}{12} \cdot 2 \left[ a^3 + \frac{(a + b)^3}{2} + b^3 \right] = \frac{(b - a)}{6} \left[ a^3 + 4 \left( \frac{a + b}{2} \right)^3 + b^3 \right] \\ &= \frac{b - a}{6} \left[ S(a) + 4S \left( \frac{a + b}{2} \right) + S(b) \right]\end{aligned}$$

Para os polinômios de grau maior que 3, podemos usar um contra exemplo para verificar que a fórmula dos três níveis não é válida.

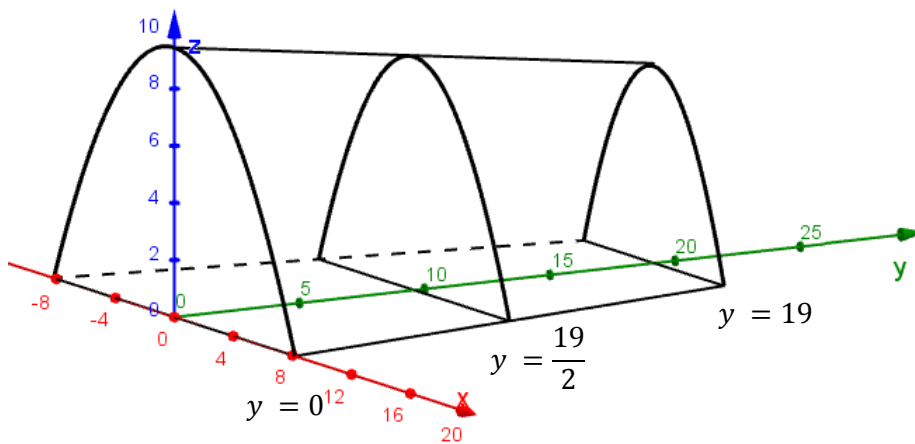
5º caso: polinômio de grau 5,  $S(x) = x^5$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b S(x)dx &= \int_a^b x^5 dx = \frac{(b^6 - a^6)}{6} \\ \frac{(b^6 - a^6)}{6} &= \frac{(b - a)}{6} (a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5) \\ &= \frac{(b - a)}{6} [S(a) + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + S(b)] \end{aligned}$$

É fácil verificar que  $a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 \neq 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$  portanto, a fórmula dos três níveis não é válida para o polinômio de grau 5.

No caso da cúpula maior, as seções  $S(x)$  são polinômios de grau 2. Aplicando o teorema à Igreja da Pampulha, escolhemos três seções transversais, obtidas pelas intercessões da cúpula maior por planos perpendiculares ao eixo  $y$ , de modo que estes planos interceptam o eixo  $y$  nas posições  $y = 0$ ,  $y = \frac{19}{2}$  e  $y = 19$ .

FIGURA 8.1 – Intercessão dos planos  $y = 0$ ,  $y = \frac{19}{2}$  e  $y = 19$  com a cúpula maior.



Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.

Pelo capítulo 5 sabemos que, para  $y = 0$  a parábola é da forma  $z = \frac{-9x^2}{64} + 9$  e para  $y = 19$  a parábola é da forma  $z = \frac{-7x^2}{25} + 7$ .

Colocando  $y = \frac{19}{2}$  na equação (6) temos  $z = \frac{-32}{169}x^2 + 8$

Em  $y = 0$  a área da seção transversal é:

$$S(0) = \int_{-8}^8 \left( \frac{-9x^2}{64} + 9 \right) dx = 96 \text{ m}^2$$

Em  $y = \frac{19}{2}$  a área da seção transversal é:

$$S\left(\frac{19}{2}\right) = \int_{-6}^6 \left(\frac{-32x^2}{169} + 8\right) dx = 69 \text{ m}^2$$

E finalmente em  $y = 19$  a área da seção transversal é:

$$S(19) = \int_{-5}^5 \left(\frac{-7x^2}{25} + 7\right) dx = 47 \text{ m}^2$$

Aplicando o teorema:

$$V_K = \frac{(19 - 0)}{6} \left[ S(0) + 4S\left(\frac{19}{2}\right) + S(19) \right] = 1\,322 \text{ m}^3 \quad (13)$$

Ao calcularmos o volume pelo método convencional, obtemos:

$$V_K = \int_0^{19} \int_{8+\frac{3y}{19}}^{8-\frac{3y}{19}} \left[ -\frac{\left(9 - \frac{2}{19}y\right)}{\left(8 - \frac{3}{19}y\right)^2} \left(x^2 - \left(8 - \frac{3}{19}y\right)^2\right) \right] dx dy = 1\,330 \text{ m}^3$$

Há um erro percentual de 0,6 m<sup>3</sup> que pode ser atribuído aos erros internos do software e aos erros nas aproximações por medidas inteiras.

Na parte posterior da Igreja da Pampulha, temos altura constante e a área de uma seção vertical é fixa em qualquer ponto.

Temos então um prisma, e seu volume  $V_P$ , pode ser calculado pela fórmula habitual.

$$V_P = \text{Área da base} \cdot \text{comprimento}$$

Note que a área da base corresponde à área da parede de ladrilhos, calculada no capítulo 7.

Portanto

$$V_P = 158 \cdot 8.2 = 1\,296 \text{ m}^3 \quad (14)$$

Então o volume total da Igreja de São Francisco de Assis é a soma dos resultados obtidos em (13) e (14):

$$V_{Total} = 1\,322 + 1\,296 = 2\,618 \text{ m}^3$$

## 9. Considerações finais

Assumimos neste trabalho, que as curvas que compõem a casca da igreja da Pampulha são parábolas, no caso das cúpulas, e arcos de circunferências, no caso dos arcos menores. No entanto, nos arquivos do IPHAN, encontramos uma planta cujas cúpulas foram desenhadas como a intercessão de arcos de circunferências, o que parece ser um indicativo do método construtivo utilizado. Até o fechamento deste trabalho, não obtivemos respostas do Instituto Niemeyer sobre a existência de arquivos referentes ao método construtivo e como foi definido o projeto original desse edifício.

Concluimos que a área total (somatório das áreas da parte frontal e traseira) da casca da Igreja de São Francisco de Assis é  $683 \text{ m}^2$  e seu volume total corresponde a  $2\,618 \text{ m}^3$ .

Todos os cálculos deste trabalho foram realizados considerando zero casas decimais, no entanto os valores obtidos com maior precisão (duas casas decimais) também foram calculados e estão apresentados na tabela a seguir:

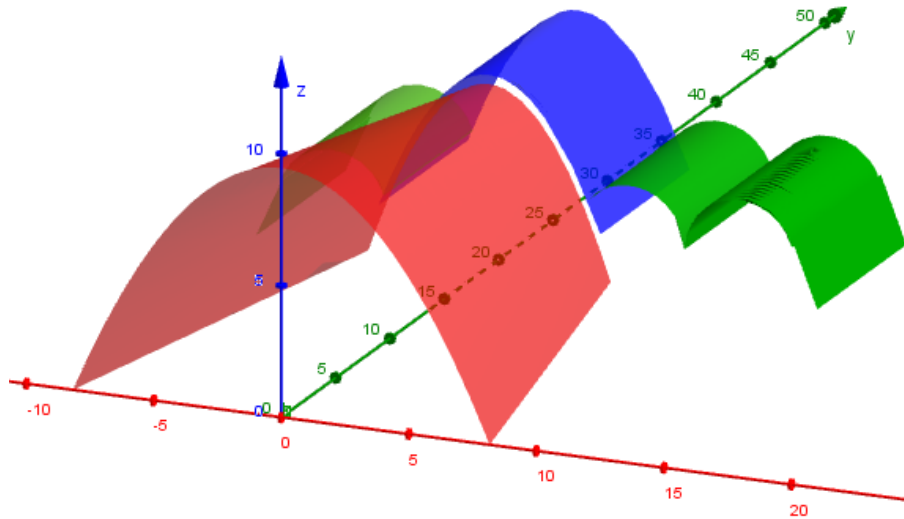
TABELA 9.1 – Comparação entre os resultados obtidos com zero e duas casas decimais.

Objeto calculado	Resultado com zero casas decimais	Resultado com duas casas decimais	Porcentagem de erro (%)
Área frontal ( $\text{m}^2$ )	421	421,91	0,22
Área posterior ( $\text{m}^2$ )	262	267,11	1,91
Área total ( $\text{m}^2$ )	683	689,02	0,87
Volume frontal ( $\text{m}^3$ )	1322	1369,04	3,44
Volume posterior ( $\text{m}^3$ )	1296	1236,56	4,81
Volume total ( $\text{m}^3$ )	2618	2605,6	0,48

Fonte: Autora

De acordo com as medidas das plantas, os estudos de modelagem e os recursos do Geogebra, foi possível plotar toda a superfície da Igreja de São Francisco de Assis.

FIGURA 9.1 – Plotagem da Igreja de São Francisco de Assis.



Fonte: Autora; Desenvolvido no Geogebra.



## 10. Referências Bibliográficas

- [1] <http://guiadoestudante.abril.com.br/aventuras-historia/vida-obra-oscar-niemeyer-757360.shtml> acessado em 22/09/2016
- [2] <http://revistaepoca.globo.com/Sociedade/noticia/2012/12/oscar-niemeyer-morre-aos-104-anos-no-rio-de-janeiro.html>
- [3] [https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto\\_Arquitet%C3%B4nico\\_da\\_Pampulha](https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_Arquitet%C3%B4nico_da_Pampulha)
- [4] [https://pt.wikipedia.org/wiki/Igreja\\_de\\_S%C3%A3o\\_Francisco\\_de\\_Assis\\_\(Belo\\_Horizonte\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Igreja_de_S%C3%A3o_Francisco_de_Assis_(Belo_Horizonte))
- [5] STEWART, James. Cálculo, volume I, 6a.edição. São Paulo: CENGAGE Learning, 2012.
- [6] STEWART, James. Cálculo, volume II, 6a.edição. São Paulo: CENGAGE Learning, 2012.
- [7] <http://www.mat.ufmg.br/~israel/Ensino/G-an/g-anVII3.pdf> acessado em 26/12/15
- [8] <https://higormap.wordpress.com/2015/04/19/trabalho-sistemas-estruturais-4-projetos-com-conceitual-de-dunas-e-montanhas/>
- [9] IPHAN - Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional - Endereço: Rua Januária, 130 - Floresta, Belo Horizonte - MG, 30110-055
- [10] <http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/r.assuncao.pdf>
- [11] <http://repositorio.unb.br/handle/10482/13603>
- [12] <http://portalpbh.pbh.gov.br/pbh/ecp/noticia.do?evento=portlet&pAc=not&idConteudo=81149&pldPlc=&app=sala>
- [13] <https://curvasearquitectura.wordpress.com/parabola/>
- [14] [http://www.seminario2016.docomomo.org.br/artigos\\_apresentacao/sessao%2013/DOCO\\_PE\\_S13\\_MACEDO\\_SILVA.pdf](http://www.seminario2016.docomomo.org.br/artigos_apresentacao/sessao%2013/DOCO_PE_S13_MACEDO_SILVA.pdf)