Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Resultados de existência e de multiplicidade para problemas elípticos envolvendo um operador degenerado com singularidades cilíndricas

por

Bruno Mendes Rodrigues

Belo Horizonte

2017

Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de matemática

Resultados de existência e de multiplicidade para problemas elípticos envolvendo um operador degenerado com singularidades cilíndricas

por

Bruno Mendes Rodrigues *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Belo Horizonte, 03 de abril de 2017

Orientador: Prof. Dr. Olímpio H. Miyagaki

Co-orientador: Prof. Dr. Ronaldo B. Assunção

*O autor foi bolsista da FAPEMIG e da CAPES durante a elaboração deste trabalho.

Agradecimentos

À Deus, por sua graça que se faz presente em todos os momentos da minha vida.

A minha família, minha mãe Maria José pelo carinho e dedicação que teve ao longo da minha vida. Ao meu irmão Diogo Mendes, pelo seu companheirismo e por sua amizade. A minha namorada Tamires pelo incentivo, pela compreensão e pelas orações.

Ao meu orientador, professor Olimpio Hiroshi Miyagaki pelos ensinamentos e por acreditar em meu trabalho.

Aos professores Fábio Rodrigues Pereira e Sandro Rodrigues Mazorche por contribuir efetivamente em minha formação.

Aos membros da banca professores Ronaldo Brasileiro, Edcarlos Domingos, Paulo Cesar Carrião, Ricardo Ruviaro e Grey Ercole pelos comentários e sugestões.

Aos meus colegas de curso e todos que participaram diretamente e indiretamente desta caminhada na UFMG.

Ao meu amigo Gilberto de Assis Pereira pela força, amizade e pelo apoio nos momentos difíceis.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFJF e da UFMG que contribuíram para minha formação acadêmica.

Ao Departamento de Matemática da UFOP pelas reduções dos encargos didáticos que possibilitou uma maior dedicação na fase final deste trabalho.

A CAPES e a FAPEMIG pelo suporte financeiro durante parte do curso.

Resumo

Neste trabalho, tratamos de resultados de existência e multiplicidade para três problemas elípticos. No primeiro capítulo, consideramos o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|y|^{ap}}\right) = \dfrac{|u|^{q-2}u}{|y|^{bq}} + f(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em um domínio cilíndrico ilimitado

$$\Omega := \left\{(y,z) \in I\!R^{m+1} \times I\!R^{N-m-1}\ ;\ 0 < A < |y| < B < \infty\right\}$$

onde $1 \leq m < N-p$, $q = q(a,b) := \dfrac{Np}{N-p(a+1-b)}$, $p > 1$ e $A, B \in I\!R_+$. Sob certas condições sobre os parâmetros a e b, usando o princípio de criticalidade simétrica e métodos variacionais provamos que esse problema tem pelo menos uma solução no caso $f \equiv 0$ e pelo menos duas soluções no caso $f \not\equiv 0$, se $p < q < p^*_{N,m} := \dfrac{p(N-m)}{N-m-p}$. Note que em sua definição, $p^*_{N,m}$ é o expoente crítico de Sobolev em dimensão $N-m$, que é maior do que o expoente crítico de Sobolev usual $p^* = \dfrac{pN}{N-p}$.

No segundo capítulo, estudamos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|y|^{ap}}\right) = \mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|y|^{p(a+1)}} + h(x)\dfrac{|u|^{q-2}u}{|y|^{bq}} + f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é o mesmo domínio cilíndrico ilimitado definido anteriormente com $A, B \in I\!R_+$, $p > 1$, $1 \leq m < N-p$, $q := \dfrac{Np}{N-p(a+1-b)}$, $0 \leq \mu < \overline{\mu} := \left(\dfrac{m+1-p(a+1)}{p}\right)^p$, $h \in L^{\frac{N}{q}}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ é uma função positiva e $f : \Omega \times I\!R \to I\!R$ é uma função de Carathéodory com crescimento no infinito. Usando o gênero de Krasnoselski e uma versão mais geral do teorema do passo da montanha de Ambrosetti-Rabinowitz provamos, sob certas hipóteses sobre f, que o problema acima possui infinitas soluções invariantes.

Finalmente, no terceiro capítulo estudamos a seguinte equação do tipo Hénon

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|x|^{ap}}\right) = |x|^{\beta} f(u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega := \left\{x \in I\!R^N \ ; \ |x| < 1\right\}$ é a bola unitária centrada na origem, $0 \leq a < \dfrac{N-p}{p}$, $N \geq 3$, $\beta > 0$, $2 \leq p < \dfrac{Np + p\beta}{N - p(a+1)}$ e a não-linearidade f é não homogênea.
Usando minimização sobre variedades de Nehari, mostramos que, para valores suficientemente grandes do parâmetro β, existe uma quebra de simetria, surgindo pelo menos uma solução não radial.

Palavras-chave: Solução positiva, supercrítico, operador degenerado, método variacional, desigualdade de Maz'ja, desigualdade de Hardy-Sobolev, problemas de minimização, variedades de Nehari, multiplicidade de soluções, singularidades cilíndricas.

Abstract

In this work, we deal with results of existence and multiplicity for three elliptical problems. In the first chapter, we consider the following elliptical problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|y|^{ap}}\right) = \dfrac{|u|^{q-2}u}{|y|^{bq}} + f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

in an unbounded cylindrical domain

$$\Omega := \left\{(y,z) \in I\!R^{m+1} \times I\!R^{N-m-1}\ ;\ 0 < A < |y| < B < \infty\right\}$$

where $1 \leq m < N-p$, $q = q(a,b) := \dfrac{Np}{N-p(a+1-b)}$, $p > 1$ and $A, B \in I\!R_+$. Under certain conditions on the parameters a and b, using the principle of symmetric criticality and variational methods we prove that the problem has at least one solution in the case $f \equiv 0$ and at least two solutions in the case $f \not\equiv 0$, if $p < q < p^*_{N,m} := \dfrac{p(N-m)}{N-m-p}$. Note that in its definition, $p^*_{N,m}$ is the critical Sobolev exponent in dimension $N-m$, which is greater than the usual critical Sobolev exponent $p^* = \dfrac{pN}{N-p}$.

In the second chapter, we study the following problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|y|^{ap}}\right) = \mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|y|^{p(a+1)}} + h(x)\dfrac{|u|^{q-2}u}{|y|^{bq}} + f(x,u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is the same unbounded cylindrical domain defined before, with $A, B \in I\!R_+$, $p > 1$, $1 \leq m < N-p$, $q := \dfrac{Np}{N-p(a+1-b)}$, $0 \leq \mu < \overline{\mu} := \left(\dfrac{m+1-p(a+1)}{p}\right)^p$, $h \in L^{\frac{N}{q}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ is a positive function and $f : \Omega \times I\!R \to I\!R$ is a Carathéodory function with growth at infinity. Using the Krasnoselski's genus and a more general version of the Ambrosetti-Rabinowitz mountain pass theorem, we prove, under certain assumptions about f, that the above problem has infinite invariant solutions.

Finally, in the third chapter, we study the following Hénon-type equation

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u}{|x|^{ap}}\right) = |x|^{\beta}\, f(u) & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega := \left\{x \in I\!R^N \ ; \ |x| < 1\right\}$ is a ball centered at the origin, $0 \leq a < \dfrac{N-p}{p}$, $N \geq 3$, $\beta > 0$, $2 \leq p < \dfrac{Np + p\beta}{N - p(a+1)}$ and the nonlinearity f is non-homogeneous. By minimization on the Nehari manifolds, we prove that for large values of the parameter β there is a symmetry breaking and non radial solutions appear.

Keywords: positive solution, supercritical, degenerated operator, variational methods, Maz'ja's inequality, Hardy-Sobolev's inequality, minimization problems, Nehari manifolds, multiplicity of solutions, cylindrical singularities.

Notações

Neste trabalho usamos as seguintes notações:

- $I\!R^N$: Espaço Euclidiano N-dimensional munido da norma $|x| = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $x \in I\!R^N$.

- $\nabla u(x)$: Gradiente da função u, isto é, $\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$.

- $\mathrm{div}(u_1(x), u_2(x), ..., u_N(x)) \equiv \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial u_N(x)}{\partial x_N}$: Divergente do campo $(u_1(x), u_2(x), ..., u_N(x))$.

- $\equiv$: Igualdade por definição.

- $\Delta u(x) \equiv \mathrm{div}\,(\nabla u(x)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$: Operador Laplaciano.

- $\Delta_p u(x) \equiv \mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\, \nabla u \right)$: Operador p-Laplaciano.

- $p' = \frac{p}{p-1}$: Expoente conjugado de p.

- $p^* = \frac{pN}{N-p}$: Expoente crítico usual de Sobolev em dimensão N.

- $p^*_{N,m} = \frac{p(N-m)}{N-m-p}$: Expoente crítico de Sobolev em dimensão $N-m$.

- $O(N)$: Grupo de isometrias lineares de $I\!R^N$.

- $\mathrm{Fix}(G) \equiv \{u \in X; gu = u,\ \forall g \in G\}$: Espaço dos pontos invariantes, onde X é um espaço normado e G é um subgrupo fechado de $O(N)$.

- $\mathrm{supp}\, u$: Suporte da função u.

- q.t.p.: Quase todo ponto, isto é, a menos de um conjunto de medida nula.

- $C(\Omega)$: Espaço das funções contínuas definidas em Ω.

- $C^k(\Omega)$: Espaço das funções definidas em Ω que possuem todas as derivadas de ordem menor do que ou igual a k contínuas.

- $C_0^\infty(\Omega)$: Conjunto de todas as funções $C^\infty(\Omega)$ tais que $\operatorname{supp} u$ está contido compactamente em Ω.

- $C_{0,r}^\infty(\Omega)$: Conjunto de todas as funções $u \in C_0^\infty(\Omega)$ tais que u é radial.

- $L^p(\Omega)$: Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to I\!R$ tais que $\displaystyle\int_\Omega |u|^p\,dx < +\infty$, onde $1 \leq p < +\infty$.

- $L^\infty(\Omega)$: Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to I\!R$ tais que existe uma constante $c > 0$ satisfazendo $|u(x)| \leq c$, q.t.p. em Ω.

- $W^{k,p}(\Omega)$: Espaço de Sobolev das funções em $L^p(\Omega)$ que possuem derivadas fracas de ordem menor do que ou igual a k pertencentes a $L^p(\Omega)$.

- $W_0^{k,p}(\Omega)$: Fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

- $W_0^{-k,p}(\Omega)$ ou $\left(W_0^{k,p}(\Omega)\right)'$: Espaço dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$.

- $S \equiv (A,B) \times I\!R^{N-m-1}$: Subconjunto de $I\!R \times I\!R^{N-m-1}$, onde A e B são constantes reais positivas.

- $\partial S \equiv \{A,B\} \times I\!R^{N-m-1}$: Fronteira de S.

- $W_0^{1,p}(S)$: Subespaço das funções axialmente simétricas de $W_0^{1,p}(\Omega)$ com a norma definida por $\|v\| = \left(\displaystyle\int_S |\nabla v|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

- $W_{0,G}^{1,p}(S) \equiv \left\{v \in W_0^{1,p}(S) : v(r,gz) = v(r,z)\ \forall g \in G\right\}$: Subespaço das funções invariantes, onde $G = O(N-m-1)$.

- $L^q(S)^G \equiv \{v \in L^q(S) : v(r,gz) = v(r,z)\ \forall g \in G\}$: Subespaço das funções invariantes, onde $G = O(N-m-1)$.

- $\|v\|_{m,a,p} = \left(\displaystyle\int_S r^{m-ap}\,|\nabla v|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$: Norma de $W_{0,G}^{1,p}(S)$.

- $|v|_{m,b,q} = \left(\displaystyle\int_S r^{m-bq}\,|v|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$: Norma de $L^q(S)^G$.

- $\|v\|_\mu = \left(\displaystyle\int_S r^{m-ap}\,|\nabla v|^p - \mu \int_S r^{m-p(a+1)|v|^p}\right)^{\frac{1}{p}}$: Norma de $W_0^{1,p}(S)$ equivalente a norma $\|\cdot\|_{m,a,p}$ de $W_{0,G}^{1,p}(S)$, se $0 \leq \mu < \overline{\mu}$.

- $\overline{\mu} = \left(\dfrac{m+1-p(a+1)}{p}\right)^p$: Constante ótima da desigualdade de Hardy-Sobolev.

- $X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$: Espaço das funções radiais absolutamente contínuas $u : [0,1] \to I\!R$ tais que $u(1) = u'(0) = 0$ com a norma definida por $\|u(r)\|_{X^{1,p}_{N-1-ap}} = \left(\int_0^1 r^{N-1-ap} |u'(r)|^p \, dr\right)^{\frac{1}{p}}$.

- $L^q_{\beta+N-1}(0,1)$: Espaço das funções Lebesgue mensuráveis $u : [0,1] \to I\!R$ com a norma definida por $|u(r)|_{L^q_{\beta+N-1}} = \left(\int_0^1 r^{\beta+N-1} |u(r)|^q \, dr\right)^{\frac{1}{q}}$.

- $X^{1,p}_{N-1-ap}\left(I\!R^N, |x|^\xi\right)$: O completamento do espaço $C^\infty_{0,r}(I\!R^N)$ com a norma definida por $\|u\|_{r,\xi} = \left(\int_{I\!R^N} |x|^\xi |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

- $D^{1,p}_a(\Omega)$: Completamento do espaço $C^\infty_0(\Omega)$, com a respectiva norma $\|u\|^p := \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u|^p \, dx$.

- $D^{1,p}_{a,l}(\Omega) := \left\{u \in D^{1,p}_a(\Omega) : u(y,z) = u(|y|, |z|), (y,z) = x \in I\!R^l \times I\!R^{N-l}\right\}$: Subespaço de $D^{1,p}_a(\Omega)$.

- ω_N: Medida da superfície da bola unitária.

- $X \hookrightarrow Y$: Imersão de Sobolev de X em Y.

- $\to, \rightharpoonup$: Convergência forte e convergência fraca, respectivamente.

- $\operatorname{dist}(a,b)$: Distância entre os pontos a e b.

- B_ρ : Bola aberta de centro na origem e raio ρ.

- $c_i, i \in \mathbb{N}$: Constantes reais positivas.

- $[x]$: Maior inteiro, menor ou igual a x; isto é, $[x] = n$ se $n \leq x < n+1$, onde n é um inteiro.

- $f = o(g)$: Notação de "o pequeno"; isto é, nós escrevemos $f = o(g)$ quando $x \to x_0$, desde que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, tratamos de resultados de existência e multiplicidade de solução para três problemas elípticos.

No Capítulo 1, estudamos uma variante da seguinte classe de equações diferenciais elípticas quase linares em $I\!R^N$

$$-\operatorname{div}\left[A(x,\nabla u)\nabla u\right] = g(x,u) \qquad \forall x \in I\!R^N, \tag{1}$$

onde A é uma função ilimitada, não negativa e que se anula em alguns pontos de $I\!R^N$. Equações deste tipo surgem em problemas de existência de soluções estacionárias anisotrópicas para a equação de Schrödinger [69], em teoria de fluidos não newtonianos [22], em problemas de fluxo através de meios porosos [19], no estudo de fluidos pseudoplásticos [24], em modelos dinâmicos para galáxias com simetria cilindrica [9], e em vários outros modelos. Mais especificamente, no primeiro capítulo estudamos resultados de existência e de multiplicidade no caso supercrítico para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u}{|y|^{ap}}\right) = \dfrac{|u|^{q-2}\,u}{|y|^{bq}} + f(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

em um domínio cilíndrico ilimitado

$$\Omega := \left\{(y,z) \in I\!R^{m+1} \times I\!R^{N-m-1} \ ; \ 0 < A < |y| < B < \infty\right\},$$

onde $p > 1$, $1 \leq m < N-p$, $q = q(a,b) := \dfrac{Np}{N-p(a+1-b)}$, $a - \dfrac{m}{N-m} < b < a+1$, $a < \dfrac{(m+1)-p}{p}$, e $A, B \in I\!R_+$. Neste problema, como o domínio é ilimitado, a perda de compacidade da imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\left(p \leq q < p^* := \dfrac{pN}{N-p}\right)$ torna as técnicas variacionais usuais mais delicadas, pois os resultados conhecidos de imersão não podem ser usados diretamente.

De um modo geral, alguns tipos de propriedades geométricas e topológicas do domínio nos ajudam a mostrar resultados de existência de solução para problemas elípticos. Por exemplo, a simetria do domínio pode ser usada para provar a imersão de Sobolev; no entanto, como consideramos domínios ilimitados, a perda de compacidade da imersão de Sobolev não segue imediatamente das técnicas variacionais usuais. Isto é uma das muitas dificuldades que tratamos neste capítulo.

Os principais resultados do Capítulo 1 são os seguintes teoremas.

Teorema 0.1. *Se $1 \leq m < N-p$, $f = 0$ e $p < q < p^*_{N,m}$, então o problema (2) possui pelo menos uma solução invariante; onde $p^*_{N,m} = \dfrac{p(N-m)}{N-m-p}$ é o expoente crítico de Sobolev em $\mathbb{R}^{N-m}$.*

Teorema 0.2. *Se $1 \leq m < N-p$ e $p < q < p^*_{N,m}$, então existe uma constante $\overline{\varepsilon} > 0$, tal que para toda $f \in W_0^{-1,p}(\Omega)$ com $0 < \|f\|_{-1} < \overline{\varepsilon}$, o problema (2) possui pelo menos duas soluções invariantes.*

Para provarmos esses resultados, estudamos um problema auxiliar e mostramos que suas soluções são axialmente simétricas e pertencem ao espaço $W_0^{1,p}(S) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $S := (A,B)\times\mathbb{R}^{N-m-1}$. Como de costume, isso é feito definindo um funcional energia $I\colon W_0^{1,p}(S) \to \mathbb{R}$ e mostrando a existência de pontos críticos para I no espaço $W_0^{1,p}(S)$. Esses pontos críticos são soluções fracas do problema auxiliar e, por nossa configuração, eles também resolvem o problema (2).

Como S é um domínio ilimitado, a dificuldade de provarmos os Teoremas 0.1 e 0.2 reside no fato de que $W_0^{1,p}(S)$ não pode ser imerso compactamente em $L^q(S)$ para todo $q \in (p, p^*_{N,m})$. A fim de resolvermos a falta de compacidade, construímos um subespaço de funções invariantes $W_{0,G}^{1,p}(S) \subset W_0^{1,p}(S)$ com imersão compacta $W_{0,G}^{1,p}(S) \hookrightarrow L^q(S)$ para todo $q \in (p, p^*_{N,m})$; (ver [26, 52]).

Usando o princípio de criticalidade simétrica [55], podemos olhar para pontos críticos do funcional I restrito a $W_{0,G}^{1,p}(S)$. Dessa forma, obtemos uma solução fraca em $W_{0,G}^{1,p}(S)$ para o nosso problema, usando o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [56]. Finalmente, para mostrarmos a existência da segunda solução usamos o Princípio Variacional de Ekeland [25].

No Capítulo 2, estudamos uma variante da seguinte classe de equações elípticas quasilineares com singularidades cilíndricas

$$\left\{ -\operatorname{div}\left(\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|y|^{ap}}\right) - \mu\frac{u^{p-1}}{|y|^{p(a+1)}} = h\frac{u^{p^*(a,b)-1}}{|y|^{bp^*(a,b)}} + \lambda g\frac{u^{q-1}}{|y|^{cp^*(a,c)}}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^{N-k}\times\mathbb{R}^k. \right. \tag{3}$$

Esta classe de equações encontra-se presente, por exemplo, no estudo da dinâmica de algumas galáxias [9], nos modelos de soluções estacionárias para a concentração de alguma substância em fluído [22, 32] e nos modelos de vários fenômenos físicos para o equilíbrio da temperatura ambiente em um meio anisotrópico. As motivações matemáticas para estudar esse tipo de classe de equações surgem do fato de que esse problema generaliza alguns tipos de equações quasilineares com o operador p-Laplaciano e também por apresentar múltiplas não-linearidades críticas com pesos, trazendo várias dificuldades analíticas em relações às demonstrações de resultados de existência e de multiplicidade. Para essa classe de equações envolvendo o operador Laplaciano em domínios limitados citamos [3, 13, 42, 66] e para o operador p-Laplaciano citamos [34, 39, 40, 68]. Hsu e Lin [43] introduziram uma singularidade sobre o operador fazendo $a \neq 0$. Entre outros autores que também têm estudado essa classe de problema em domínios limitados e demonstrado resultados de existência e de multiplicidade citamos [16, 18, 27, 33, 41, 45]. No caso de domínios ilimitados citamos Ghergu e Rădulescu [31], que estudaram o problema (3) para o operador Laplaciano com pesos esféricos, isto é, $k = N$, $p = 2$ e $a \neq 0$. Todos os artigos mencionados acima, envolvem somente singularidades esféricas, isso é, $k = N$. Para um exemplo de resultado de multiplicidade para o problema (3) com singularidades cilíndricas citamos Bouchekif e El Mokhtar [12], que estudaram o problema (3) no caso em que $3 \leq k \leq N$, $p = 2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$, $\mu \neq 0$, $q = 1$ e as funções g e h não necessariamente constantes.

Mais recentemente, Assunção, Dos Santos e Miyagaki [5] estudaram uma variação do problema (3) para o operador degenerado $\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|y|^{ap}}\right)$ em $\mathbb{R}^N$, com singularidades cilíndricas envolvendo expoentes críticos múltiplos, isto é, com $N \geq 3$, $\lambda > 0$, $p < k \leq N$, $1 < p < N$, $0 \leq \mu < \overline{\mu} := \{[k - p(a+1)]/p\}^p$, $0 \leq a < (k-p)/p$, $a \leq b < a+1$, $a < c < a+1$, $1 \leq q < p$, $p^*(a,b) = Np/[N - p(a+1-b)]$, $p^*(a,c) = Np/[N - p(a+1-c)]$, $h \in L^\infty(\mathbb{R}^k)$ e $g \in L^r_\alpha(\mathbb{R}^N)$, tal que $\alpha = c(p^*(a,c) - q)$ e $r = p^*(a,c)/[p^*(a,c) - q]$. Motivados por Gazzini e Musina [30] e por Bhakta [11] quanto à natureza das singularidades cilíndricas e por Fillippucci, Pucci e Robert [28], Xuan e Wang [71] e Sun [65] quanto à presença de múltiplas não linearidades críticas, os autores provaram a existência de solução fraca e positiva.

Motivado pelo recente resultado sobre o efeito da topologia do domínio em [20] e também por [5], no Capítulo 2, estudamos o caso supercrítico do seguinte problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|y|^{ap}}\right) = \mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|y|^{p(a+1)}} + h(x)\dfrac{|u|^{q-2}u}{|y|^{bq}} + f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

em um cilindro simétrico ilimitado

$$\Omega := \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{N-m-1} \ ; \ 0 < A < |y| < B < \infty\right\},$$

onde $A, B \in \mathbb{R}_+$, $p > 1$, $1 \leq m < N - p$, $q := \dfrac{Np}{N - p(a+1-b)}$, $a - \dfrac{m}{N-m} < b < a+1$,

$a < \dfrac{(m+1)-p}{p}$, $0 \le \mu < \overline{\mu} := \left(\dfrac{m+1-p(a+1)}{p}\right)^p$, $h \in L^{\frac{N}{q}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é uma função positiva e $f : \Omega \times I\!R \to I\!R$ é uma função de Carathéodory, com $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(f_0) $c_0 g_0(x) |u|^\eta \le F(x,u) \le c_1 g_1(x) |u|^\eta$, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $x \in \Omega$, e $g_0, g_1 \in W^{-1,\left(\frac{q}{\eta}\right)'}(\Omega)$ com $g_0 \ge 0$, onde $1 < \eta < p < q < p^*_{N,m}$;

(f_1) $|f(x,u)| \le c_2 |u|^{p-1} + c_3 |u|^{\eta-1}$, onde $p < \eta < p^*_{N,m}$, $u \in I\!R$ e para todo $x \in \Omega$;

(f_2) $|f(x,u)| \le c_4 |u|^{p-1} + c_5 k(x) |u|^{\eta-1}$, onde $1 < \eta < p$, $u \in I\!R$, $k \in W^{-1,\left(\frac{p}{\eta}\right)'}(\Omega)$ e para todo $x \in \Omega$;

(f_3) $f(x, z_1, u) = f(x, z_2, u)$ para todo $z_1, z_2 \in I\!R^{N-m-1}$, $|z_1| = |z_2|$, isto é, $f(x, \cdot, u)$ é simétrica esfericamente sobre $I\!R^{N-m-1}$;

(f_4) $f(x,u) = o\left(|u|^{p-1}\right)$ quando $|u| \to 0$, uniformemente para $x \in \Omega$;

(f_5) $f(x,u) = o\left(k(x) |u|^{\eta-1}\right)$ quando $|u| \to 0$, uniformemente para $x \in \Omega$ e $1 < \eta < p$;

(f_6) Existe $\theta > p$ tal que $f(x,u)u \ge \theta F(x,u) \ge 0$ para $x \in \Omega$;

(f_7) $f(x,u) = -f(x,-u)$, para $u \in I\!R$ e para todo $x \in \Omega$.

Os principais resultados do Capítulo 2 são os seguintes teoremas.

Teorema 0.3. *Sejam $1 < \eta < p$ e $0 < \mu < \overline{\mu}$. Suponhamos que as propriedades (f_0), (f_2), (f_3), (f_5), (f_6) e (f_7) se verificam e que o conjunto $\omega := \{x \in \Omega;\ g_0(x) > 0\}$ tem medida de Lebesgue positiva. Então o problema (4) possui infinitas soluções invariantes.*

Teorema 0.4. *Se $p < \eta < p^*_{N,m}$, $0 < \mu < \overline{\mu}$ e (f_1), (f_3), (f_4), (f_6) e (f_7) se verificam, então o problema (4) possui infinitas soluções invariantes.*

Assim como fizemos no Capítulo 1, para demonstrar os resultados do Capítulo 2, definimos um problema auxiliar cujas soluções são axialmente simétricas e pertencem ao espaço $W_0^{1,p}(S)$. Em seguida, nós definimos em $W_0^{1,p}(S)$ um funcional energia I associado ao problema auxiliar e mostramos que pontos críticos para este funcional resolvem o problema (4).

Novamente, como S é um domínio ilimitado, a dificuldade para provar os Teoremas 0.3 e 0.4 consiste no fato de que $W_0^{1,p}(S)$ não pode ser imerso de maneira compacta dentro de $L^q(S)$ para todo $q \in (p, p^*_{N,m})$. Para solucionar esta perda de compacidade (ver [26, 52]), construímos um subespaço das funções invariantes $W_{0,G}^{1,p}(S) \subset W_0^{1,p}(S)$ com a imersão compacta $W_{0,G}^{1,p}(S) \hookrightarrow$

$L^q(S)$ para $q \in (p, p^*_{N,m})$. Usando o princípio de criticalidade simétrica [55], podemos olhar para pontos críticos do funcional I restrito a $W^{1,p}_{0,G}(S)$.

Para resolver o Teorema 0.3, seguimos as linhas gerais de Garcia e Peral [29] e construímos um funcional truncado $\widetilde{I}$, de modo que valores críticos negativos deste funcional coincidem com valores críticos do funcional I. Usando a Teoria do Gênero de Krasnoselski, conseguimos construir uma sequência infinita do tipo “minimax” de valores críticos negativos para o funcional truncado $\widetilde{I}$ e, assim, obtermos infinitas soluções invariantes. Já a demonstração do Teorema 0.4 é obtida via uma versão mais geral do Teorema do Passo da Montanha de Rabinowitz (ver [56, Teorema 9.12]).

Note que, $q \in (p, p^*_{N,m})$ e $p^*_{N,m} > p^*$; então os problemas estudados nos Capítulos 1 e 2 contém os casos subcrítico, crítico e supercrítico.

No Capítulo 3, estudamos uma variante do seguinte problema

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u = |x|^\alpha f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é a bola unitária de $I\!R^n$ e $n \geq 4$.

Em 1973, no caso em que $f(t)$ é uma potência pura do tipo $f(t) = |t|^{p-2}\, t$, o problema (P) foi introduzido por Hénon [37] como um modelo para estudar esféricamente conjuntos simétricos de estrelas. A equação deste problema ficou conhecida como a equação de Hénon.

Em 1982, Ni em [54], supondo hipóteses adequadas sobre f, provou que o problema (P) tem pelo menos uma solução radial.

Posteriormente, Smests, Su e Willem [62] mostraram que para α suficientemente grande, existe uma quebra de simetria e uma nova solução não radial aparece. Muitos trabalhos têm sido feitos para estudar a multiplicidade de soluções não radiais [7, 38, 60].

Em [48, 50], encontramos resultados sobre o operador p-Laplaciano e, em [67], para o estudo do sistema de tipo Hénon.

Em 2009, Carrião, de Figueiredo e Miyagaki em [17] estudaram o seguinte problema elíptico quase-linear do tipo Henón

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left[|x|^{-ap} |\nabla u|^{p-2} \nabla u\right] = |x|^\beta |u|^{q-2} u & \text{em } B \\ u > 0 & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases}$$

onde $B := \left\{x \in I\!R^N \ ; \ |x| < 1\right\}$ é a bola unitária centrada na origem, $-\infty < a < \dfrac{N-p}{p}$, $N \geq 3$,

$\beta > 0$ e $2 \leq p < q < \dfrac{Np + p\beta}{N - p(a+1)}$.

Eles demonstraram resultados de existência e de multiplicidade de soluções não radiais para o problema acima quando $q \in (p, q^*)$, de modo que

$$q^*(N) = \begin{cases} \dfrac{(N+2)p}{N-2p+2}, & \text{se } N \text{ for par;} \\ \dfrac{([N/2]+2)\,p}{[N/2]-p+2}, & \text{se } N \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Mais recentemente, Badiale e Cappa [6] estudaram a seguinte equação do tipo Hénon

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^{\alpha} f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é a bola unitária de $I\!R^n$ e $n \geq 4$. Inspirados em algumas idéias e resultados usados em [7], os autores provaram um resultado de existência de uma solução não radial para α suficientemente grande, no caso em que a não-linearidade f não é uma potência pura. Além disso, após estimarem o nível crítico radial, eles também estimaram outros níveis críticos mostrando que para α suficientemente grande estes níveis são distintos.

Motivado pelo recente resultado em [6] e pelo fato de que a maioria dos artigos que conhecemos trata sobre soluções não radiais da equação de Hénon no caso em que f é uma potência, estudamos a seguinte equação do tipo Hénon no caso em que a não-linearidade não é uma potência pura,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|x|^{ap}}\right) = |x|^{\beta} f(u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde $\Omega := \left\{x \in I\!R^N \ ; \ |x| < 1\right\}$ é a bola unitária centrada na origem, $0 \leq a < \dfrac{N-p}{p}$, $N \geq 3$, $\beta > 0$ e $2 \leq p < \dfrac{Np + p\beta}{N - p(a+1)}$.

Observe que ao tomarmos $a = 0$ e $p = 2$, o problema (5) se reduz ao problema estudado por Badiale e Cappa em [6]. Portanto, neste capítulo estamos generalizando o operador Laplaciano estudado por Badiale e Cappa. Para provar nossos resultados, nos inspiramos em alguns argumentos e resultados usados em [6, 17, 64].

Para escrever nossos resultados, primeiro definimos $2 \leq p \leq N - l \leq l$, $N \geq \max\{2p, p(a+1)\}$ e

$$p^*(N) = \begin{cases} \dfrac{(N+2)p}{N-2p+2}, & \text{se } N \text{ for par;} \\ \dfrac{([N/2]+2)\,p}{[N/2]-p+2}, & \text{se } N \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Iremos mostrar que o problema (5) admite pelo menos uma solução radial e pelo menos uma solução não radial sob a seguintes hipóteses sobre a não-linearidade f:

(f_1) f é uma função localmente Hölder contínua, $f(z) \geq 0$ para todo $z > 0$, $f(z) = 0$ para todo $z < 0$, $f(z) = o(z^{p-1})$ para $z \to 0$ e, além disso, $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^{p-1}} = \infty$;

(f_2) $|f(z)| \leq c(1+|z|)^{q-1}$ $\forall z$, onde $p < q < \min\left\{p^*(N), \frac{p^2 N}{(N-p)(p-1)}\right\}$;

(f_3) existe $\tau > p$, tal que, $tf(t) \geq \tau F(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $F(t) := \int_0^t f(s)ds$;

(f_4) existem $\mu_1, \mu_2 > p$, tais que, $\forall t \in [0,1]$ e $v \geq 0$ temos $f(tv) \geq t^{\mu_1 - 1} f(v)$ e $\forall t \geq 1$ e $v \geq 0$ temos $f(tv) \geq t^{\mu_2 - 1} g(v)$, onde $g(\cdot)$ é uma função contínua não negativa sobre $\mathbb{R}$, tal que $g(0) = 0$. Além disso, temos a seguinte desigualdade

$$p^2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{(\mu_1 - p)(\mu_2 - p)} < N - l. \tag{6}$$

Os principais resultados do Capítulo 3 são os seguintes teoremas.

Teorema 0.5. *Sob as hipóteses $(f_1)-(f_4)$, para* $\frac{Np + p\beta}{N - p(a+1)} \geq \max\left\{p^*(N), \frac{p^2 N}{(N-p)(p-1)}\right\}$ *existe pelo menos uma solução radial não negativa para o problema (5).*

Teorema 0.6. *Sob as hipóteses $(f_1) - (f_4)$, o problema (5) possui pelo menos uma solução não radial não negativa para β suficientemente grande. Além disso, se $m_{a,\beta,r}$ e $m^l_{a,}$ são, respectivamente, os níveis críticos radial e não radial do funcional associado ao problema (5), então*

$$m^l_{a,\beta} < m_{a,\beta,r}, \text{ quando } \beta \to +\infty.$$

Para demonstrar o primeiro resultado, estudamos um problema auxiliar cuja soluções são radialmente simétricas e pertencentes ao espaço $X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$. Em seguida, definimos um funcional energia $I : X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1) \to \mathbb{R}$ de modo que pontos críticos para este funcional são soluções fracas do problema auxiliar e, por nossa configuração, eles também resolvem o problema (5). Usando um importante resultado de compacidade ([17, Proposição 1.1]), que mostra que o espaço $X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$ está imerso compactamente em $L^q_{\beta+N-1}$, se $q < \frac{Np + p\beta}{N - p(a+1)}$, demonstramos o Teorema 0.5 aplicando o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [56].

Para provar o Teorma 0.6, usamos minimização sobre variedades de Nehari e, mostramos que, para valores suficientemente grandes do parâmetro β, existe uma quebra de simetria, surgindo pelo menos uma solução não radial.

Para a facilidade de leitura deste trabalho, repetimos em seus respectivos capítulos os enunciados dos teoremas desta introdução, bem como os artigos da bibliografia os quais complementamos. Além disso, enunciamos no Apêndice A os resultados usados nesta tese, indicando as referências bibliográficas onde as demonstrações podem ser encontradas.

Capítulo 1

Existência e multiplicidade de solução para um problema elíptico em um cilindro ilimitado

1.1 Preliminares

Considere a classe de equações diferenciais elípticas quase lineares degeneradas em $I\!R^N$ da forma

$$-\operatorname{div}\left[A(x,\nabla u)\nabla u\right] = g(x,u) \qquad \forall x \in I\!R^N, \tag{1.1}$$

onde A é uma função ilimitada, não negativa e que se anula em alguns pontos de $I\!R^N$. Mais especificamente, considere algumas variantes dessa classe de equações do tipo

$$-\operatorname{div}\left[\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|x|^{ap}}\right] + \lambda\frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{(a+1)p}} \;=\; \alpha\frac{|u|^{q-2}u}{|x|^{bq}} + \beta K(x)\frac{|u|^{r-2}u}{|x|^{dr}} + f(x), \tag{1.2}$$

onde $x \in I\!R^N$, $1 \leq p < N-1$, $q := q(a,b) = \dfrac{Np}{N-p(a+1-b)}$, α, β e λ são parâmetros, $0 < a < \dfrac{N-p}{p}$, $a \leq b \leq a+1$, $d, r \in I\!R$, $K \in L^{\frac{q}{q-r}}_{r(d-b)}(I\!R^N)$ e f é uma função que pertence ao espaço dual de

$$L^a_b(I\!R^N) = \left\{u : I\!R^N \to I\!R\ ;\ \int_{I\!R^N} |x|^{-bq}\,|u|^q < \infty\right\}.$$

Equações deste tipo surgem em problemas de existência de soluções estacionárias anisotrópicas para a equação de Schrödinger [69], em teoria de fluidos não newtonianos [22], em problemas de fluxo através de meios porosos [19], no estudo de fluidos pseudoplásticos [24], em modelos dinâmicos para galáxias com simetria cilindrica [9], e em vários outros modelos. Variantes do problema (1.2) na forma radial foram tratados inicialmente por Clément, de Figueiredo e Mitidieri [21], que provaram, por exemplo, o resultado de Brézis e Nirenberg [15] para este operador na forma radial. Nos últimos anos, vários outros pesquisadores têm estudado variantes do problema (1.2) na forma radial; veja referências [1, 4, 23, 35].

Schindler [58] estudou variantes desta classe de equações sobre cilindros ilimitados. Sob certas condições sobre a função f, ele mostrou que o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}\, u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

possui uma solução fraca em $W_0^{1,p}(\Omega)$, onde Ω é um domínio cilíndrico ilimitado em $I\!R^N$, $N \geq 3$ e $2 \leq p < N$. A falta de compacidade das imersões de Sobolev sobre domínios ilimitados tornam as técnicas variacionais usuais mais delicadas. Para contornar a falta de compacidade, o autor introduziu um princípio de concentração de compacidade modificado, por meio do qual, uma versão lema do passo da montanha [57] pode ser aplicado.

Posteriormente, Hashimotto, Ishiwata e Ôtani [36] estudaram o seguinte problema envolvendo o operador p-Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-2}\, u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

em um domínio na forma de um tubo infinito $\Omega := \Omega_d \times I\!R^{N-d}$, onde Ω_d são anéis d-dimensionais com $N \geq 3$. Usando o princípio de concentração-compacidade no infinito para funções parcialmente simétricas e o método variacional devido a Ishiwata e Ôtani [44], eles provaram a existência de pelo menos uma solução positiva u para o problema (1.4) pertencente a $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, para $2 \leq d \leq N-1$ e $p < q < p_d^\dagger$, onde

$$p_d^\dagger := \begin{cases} \dfrac{(N-d+1)p}{N-d+1-p}, & \text{para } \; p < N-d+1; \\ \infty, & \text{para } \; p \geq N-d+1. \end{cases}$$

Mais recentemente, Clapp e Szulkin [20] estudaram o caso supercrítico para o seguinte problema envolvendo o operador Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

em um domínio cilíndrico ilimitado

$$\Omega := \left\{ x = (y,z) \in I\!R^{m+1} \times I\!R^{N-m-1} \; ; \; 0 < a < |y| < b < \infty \right\}$$

onde $1 \leq m < N-2$. Os autores mostraram que, se $2 < q < 2^*_{N,m} := \dfrac{2(N-m)}{N-m-2}$, então o problema (1.5) possui infinitas soluções invariantes e que uma dessas soluções é positiva. Note que $2^*_{N,m}$ é o expoente crítico de Sobolev em dimensão $N-m$, o qual é maior do que o expoente crítico de Sobolev usual $2^* := \dfrac{2N}{N-2}$. Esse resultado de existência foi demonstrado usando a teoria de Índice (ver [63, Teorema II.5.7]), e o argumento usado para provar a positividade de solução foi o princípio do máximo.

Motivado pelo recente resultado em [20], neste trabalho estudamos o efeito da topologia do domínio sobre resultados de existência e de multiplicidade no caso supercrítico para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|y|^{ap}}\right) = \dfrac{|u|^{q-2}u}{|y|^{bq}} + f(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

em um domínio cilíndrico ilimitado

$$\Omega := \left\{(y,z) \in I\!R^{m+1} \times I\!R^{N-m-1}\ ;\ 0 < A < |y| < B < \infty\right\},$$

onde $p > 1$, $1 \leq m < N-p$, $q = q(a,b) := \dfrac{Np}{N-p(a+1-b)}$, $a - \dfrac{m}{N-m} < b < a+1$, $a < \dfrac{(m+1)-p}{p}$, e $A, B \in I\!R_+$.

Neste presente capítulo, como o domínio é ilimitado, a perda de compacidade da imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\left(p \leq q < p^* := \dfrac{pN}{N-p}\right)$ torna as técnicas variacionais usuais mais delicadas pois os resultados de imersões compactas não podem ser usadas diretamente.

De um modo geral, alguns tipos de propriedades geométricas e topológicas do domínio nos ajudam a mostrar resultados de existência de solução para problemas elípticos. Por exemplo, a simetria do domínio pode ser usada para provar a imersão de Sobolev; no entanto, como consideramos domínios ilimitados, a perda de compacidade da imersão de Sobolev não segue imediatamente das técnicas variacionais usuais. Isto é uma das muitas dificuldades que tratamos neste capítulo.

Primeiro, consideramos o problema (1.6) no caso onde $f \equiv 0$ e conseguimos nosso primeiro resultado. Note que em sua definição, $p^*_{N,m}$ é o expoente crítico de Sobolev em dimensão $N-m$, que é maior do que o expoente crítico de Sobolev usual $p^* = \dfrac{pN}{N-p}$.

Teorema 1.1. *Se $1 \leq m < N-p$, $f = 0$ e $p < q < p^*_{N,m}$, então o problema (1.6) possui pelo menos uma solução invariante.*

Uma pergunta natural é verificar o que ocorre quando o problema acima é afetado por uma certa pertubação. Para esta finalidade, iremos considerar o problema perturbado por uma função

f pertencente ao espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, denotado por $W_0^{-1,p}(\Omega)$, obtendo o seguinte resultado de multiplicidade.

Teorema 1.2. *Se $1 \leq m < N - p$ e $p < q < p^*_{N,m}$, então existe uma constante $\overline{\varepsilon} > 0$, tal que para toda $f \in W_0^{-1,p}(\Omega)$ com $0 < \|f\|_{-1} < \overline{\varepsilon}$, o problema (1.6) possui pelo menos duas soluções invariantes.*

Para provarmos esses resultados, estudamos um problema auxiliar e mostramos que suas soluções são axialmente simétricas e pertencem ao espaço $W_0^{1,p}(S) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $S := (A, B) \times I\!R^{N-m-1}$. Como de costume, isso é feito definindo um funcional energia $I\colon W_0^{1,p}(S) \to I\!R$ e mostrando a existência de pontos críticos para I no espaço $W_0^{1,p}(S)$. Esses pontos críticos são soluções fracas do problema auxiliar e, por nossa configuração, eles também resolvem o problema (1.6).

Como S é um domínio ilimitado, a dificuldade de provarmos os Teoremas 1.1 e 1.2 reside no fato de que $W_0^{1,p}(S)$ não pode ser imerso compactamente em $L^q(S)$ para todo $q \in (p, p^*_{N,m})$. A fim de resolvermos a falta de compacidade, construímos um subespaço de funções invariantes $W_{0,G}^{1,p}(S) \subset W_0^{1,p}(S)$ com imersão compacta $W_{0,G}^{1,p}(S) \hookrightarrow L^q(S)$ para todo $q \in (p, p^*_{N,m})$; (ver [26, 52]).

Usando o Princípio de Criticalidade Simétrica [55], podemos olhar para pontos críticos do funcional I restrito a $W_{0,G}^{1,p}(S)$. Dessa forma, obtemos uma solução fraca em $W_{0,G}^{1,p}(S)$ para o nosso problema, usando o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [56]. Finalmente, para mostrarmos a existência da segunda solução usamos o Princípio Variacional de Ekeland [25].

Dado que, $q \in (p, p^*_{N,m})$ e $p^*_{N,m} > p^*$, no problema (1.6) consideramos não apenas os casos subcrítico e crítico mas também o caso supercrítico.

Note que o operador p-Laplaciano $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$ é um caso particular do operador $\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2} \nabla u}{|y|^{ap}}\right)$; portanto, os Teoremas 1.1 e 1.2 complementam os resultados de Hashimotto, Ishiwata e Ôtani [36].

Este Capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 1.2 introduzimos alguns resultados bem conhecidos tais como o Princípio de Criticalidade Simétrica e o Teorema do Passo da Montanha; na seção 1.3 introduzimos o problema auxiliar, cujas soluções são também soluções para o problema (1.6); e para asseguramos a existência de soluções para o problema auxilar, usamos os resultados da seção anterior bem como o Principio Variacional de Ekeland.

1.2 Resultados Gerais

Nesta seção, enunciamos alguns resultados que serão usados nas demonstrações dos nossos principais teoremas.

Primeiro, denotamos por $O(N)$ o grupo de isometrias lineares de $I\!R^N$. Recordamos que se G é um subgrupo fechado de $O(N)$, então um subconjunto aberto Ω de $I\!R^N$ é dito G-invariante, se $g\Omega = \Omega$ para toda $g \in G$. Além disso, uma função $u : \Omega \to I\!R$ é chamada G-invariante, se $u(gx) = u(x)$ para toda $g \in G$ e todo $x \in \Omega$.

Definição 1.3. *A ação de um grupo topológico G sobre um espaço normado X é uma função contínua $G \times X \to X : [g, u] \to gu$, tal que $1 \cdot u = u$, $(g_1 g_2)u = g_1(g_2 u)$ e $u \mapsto gu$ é linear. A ação é isométrica se $\|gu\| = \|u\|$. O espaço dos pontos invariantes é definido por*

$$\mathrm{Fix}(G) = \{u \in X; gu = u;\ \forall g \in G\}.$$

Uma função $\varphi : X \to I\!R$ é invariante, se $\varphi \circ g = \varphi$ para toda $g \in G$.

Agora, podemos enunciar o seguinte resultado de Palais [55].

Lema 1.4. *(Princípio de Criticalidade Simétrica) Suponhamos que a ação do grupo topológico G sobre o espaço de Banach X é isométrica. Se $\varphi \in C^1(X, I\!R)$ é invariante e se u é um ponto crítico de φ sobre* $\mathrm{Fix}(G)$, *então u é um ponto crítico de φ.*

Um critério de compacidade usado com frequência é a condição de Palais-Smale.

Definição 1.5. *(Condição Palais-Smale) Se X é um espaço de Banach e $\Phi \in \mathcal{C}^1(X, I\!R)$, então o funcional Φ satisfaz a condição Palais-Smale se toda sequência $\{u_n\} \subset X$ satisfazendo*

$$|\Phi(u_n)| \leq \textit{constante, e } \Phi'(u_n) \to 0 \textit{ em } X'$$

possui uma subsequência convergente. Denotamos essa condição por PS e no caso particular em que $\Phi(u_n) \to c$, escrevemos $(PS)_c$.

Terminamos essa seção enunciando um resultado bem conhecido de Ambrosetti e Rabinowitz [56].

Lema 1.6. *(Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz) Se X é um espaço de Banach, $\Phi \in \mathcal{C}^1(X, I\!R)$ satisfaz a condição (PS), $\Phi(0) = 0$ e*

i) *existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$;*

ii) *existe* $e \in X \setminus \overline{B_\rho}$ *tal que* $\Phi(e) < 0$,

então Φ *possui um valor crítico* $\bar{c} \geq \alpha$, *com*

$$\bar{c} = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} \Phi(u),$$

onde $\Gamma = \{g \in \mathcal{C}([0,1]\ X);\ g(0) = 0\ e\ g(1) = e\}$.

1.3 Demonstração dos principais resultados

Em nossos argumentos, a demonstração do Teorema 1.2 contém o resultado de existência, o qual é obtido como no Teorema 1.1. Portanto, por razões de brevidade trataremos em detalhes apenas do problema (1.6) no caso em que f não é necessariamente uma função identicamente nula.

Uma função axialmente simétrica $u(y,z) = v(|y|, z)$ resolve o problema (1.6) se, e somente se, a função $v := v(r,z)$ em que $r = |y|$ resolver o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(r^{m-ap}\,|\nabla v|^{p-2}\,\nabla v\right) = r^{m-bq}\,|v|^{q-2}\,v + r^m f & \text{em } S \\ v = 0 & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \tag{1.7}$$

onde $S := (A,B) \times I\!R^{N-m-1}$ e $\partial S := \{A,B\} \times I\!R^{N-m-1}$.

Denotamos por $W_0^{1,p}(S)$ o subespaço das funções axialmente simétricas de $W_0^{1,p}(\Omega)$ com a norma definida por $\|v\| = \left(\int_S |\nabla v|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$. Esta norma $\|\cdot\|$ é equivalente à norma padrão em $W_0^{1,p}(S)$; (ver [2, pp. 158–159]).

Se $G := O(N-m-1)$ é o grupo de isometrias de $I\!R^{N-m-1}$, então

$$\mathrm{Fix}(G) = W_{0,G}^{1,p}(S) = \left\{v \in W_0^{1,p}(S) : v(r,gz) = v(r,z)\ \forall g \in G\right\}$$

e

$$L^q(S)^G = \{v \in L^q(S) : v(r,gz) = v(r,z)\ \forall g \in G\}$$

são os subespaços das funções invariantes.

Dado que $A < r < B$, então as normas sobre $W_{0,G}^{1,p}(S)$ e $L^q(S)^G$ definidas por

$$\|v\|_{m,a,p} := \left(\int_S r^{m-ap}\,|\nabla v|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad |v|_{m,b,q} := \left(\int_S r^{m-bq}\,|v|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.8}$$

são equivalentes às normas usuais de $W_0^{1,p}(S)$ e $L^q(S)$, respectivamente.

Denotemos $X := W_0^{1,p}(S)$ e $E := W_{0,G}^{1,p}(S)$. Seja $I : X \to I\!R$ o funcional associado ao problema (1.7) definido por

$$I(v) = \frac{1}{p}\int_S r^{m-ap}|\nabla v|^p\,dx - \frac{1}{q}\int_S r^{m-bq}|v|^q\,dx - \int_S r^m f v dx.$$

Dessa forma,

$$I'(v)(\varphi) = \int_S r^{m-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi dx - \int_S r^{m-bq}|v|^{q-2}v\varphi dx - \int_S r^m f\varphi dx,\ \forall\varphi\in X.$$

Aplicando o Princípio de Criticalidade Simétrica (Lema 1.4), podemos olhar para pontos críticos de I restrito a E, que são soluções fracas para o problema (1.7).

Usando a desigualdade de Maz'ja [53] para os parâmetros no problema (1.7), para $N - m > p \geq 1$, $q := \dfrac{Np}{N - p(a+1-b)}$, $a - \dfrac{m}{N-m} \leq b \leq a+1$ e $a < \dfrac{(m+1)-p}{p}$, temos a existência de uma constante positiva C tal que

$$\left(\int_S r^{m-bq}|v|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_S r^{m-ap}|\nabla v|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall v\in X.$$

Portanto, o funcional I está bem definido para os parâmetros e funções nos intervalos e espaços mencionados acima.

Em [26, 52], temos um importante resultado de compacidade que garante que a imersão $W_{0,G}^{1,p}(S) \hookrightarrow L^q(S)$ é compacta, se $1 \leq m < N-p$ e $q \in (p, p^*_{N,m})$, onde $p^*_{N,m} := \dfrac{(N-m)p}{N-m-p}$. Portanto, $W_{0,G}^{1,p}(S)$ pode ser imerso compactamente em $L^q(S)^G$ para as normas definidas em (1.8).

Note que, quando $b = a+1$ e $b = a - \dfrac{m}{N-m}$ temos $q = p$ e $q = p^*_{N,m}$, respectivamente; portanto, iremos considerar $a - \dfrac{m}{N-m} < b < a+1$ para que o resultado de compacidade e a desigualdade de Maz'ja sejam ambos satisfeitos.

No lema seguinte, mostraremos que o funcional $I|_E$ satisfaz a geometria do teorema do Passo da Montanha.

Lema 1.7. *Seja $I|_E$ o funcional associado ao problema (1.7) definido anteriormente, então*

i) *existem constantes positivas $\overline{\varepsilon}, \rho$ e α tais que $I\Big|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$, desde que, $0 < \|f\|_{E^{-1}} < \overline{\varepsilon}$;*

ii) *existe um elemento $e \in E \setminus \overline{B_\rho}$, tal que $I(e) < 0$.*

Demonstração. **i)** Dado $\varepsilon > 0$, usando a desigualdade de Young, deduzimos que

$$\begin{aligned}\left|\int_S r^m f v dx\right| &\leq C_1\left|\int_S f v dx\right| \leq \left(\varepsilon^{\frac{1}{p}}\|v\|_{m,a,p}\right)\cdot\left(\frac{C_1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}\|f\|_{E^{-1}}\right)\\ &\leq \frac{\varepsilon}{p}\|v\|^p_{m,a,p} + \frac{C_2}{p'\varepsilon^{\frac{p'}{p}}}\|f\|^{p'}_{E^{-1}}\end{aligned}$$

para todo $v \in E$, onde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. Portanto,

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{p}\|v\|^p_{m,a,p}-\frac{1}{q}|v|^q_{m,b,q}-\int_S r^m f v dx \\ &\geq \frac{1}{p}\|v\|^p_{m,a,p}-\frac{1}{qS_q^q}\|v\|^q_{m,a,p}-\frac{\varepsilon}{p}\|v\|^p_{m,a,p}-\frac{C_2}{p'\varepsilon^{\frac{p'}{p}}}\|f\|^{p'}_{E^{-1}} \\ &= \left(\frac{1-\varepsilon}{p}-\frac{1}{qS_q^q}\|v\|^{q-p}_{m,a,p}\right)\|v\|^p_{m,a,p}-\frac{C_2}{p'\varepsilon^{\frac{p'}{p}}}\|f\|^{p'}_{E^{-1}}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

onde S_q é a melhor constante de Sobolev na imersão $W^{1,p}_{0,G}(S) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(S)^G$.

Fixando $\varepsilon \in (0,1)$, podemos encontrar $\rho > 0$, $\overline{\varepsilon} > 0$ e $\alpha > 0$, tais que a conclusão do lema se verifica. Por exemplo, podemos considerar

$$\rho = \left(MqS_q^q\right)^{\frac{1}{q-p}}, \quad \overline{\varepsilon} = \frac{C_2^{\frac{-1}{p'}}\, {p'}^{\frac{1}{p'}}\,\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} M^{\frac{q}{p'(q-p)}}\left(qS_q^q\right)^{\frac{p}{p'(q-p)}}, \quad \alpha = \frac{1}{2}M^{\frac{q}{q-p}}\left(qS_q^q\right)^{\frac{p}{q-p}},$$

onde $M = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\varepsilon}{p}\right) > 0$.

ii) Seja $v \in E$, tal que $\|v\|_{a,m,p} = 1$. Então para todo $t > 1$, temos que

$$I(tv) = \frac{1}{p}t^p - \frac{1}{q}|v|^q_{m,b,q}t^q - t\int_S r^m f v dx.$$

Dado $q > p > 1$, então temos que $\lim\limits_{t\to\infty} I(tv) = -\infty$. Portanto, é possível obtermos um elemento $e \in E \setminus \overline{B_\rho}$, tal que $I(e) < 0$. ∎

Lema 1.8. *O funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale em E.*

Demonstração. Seja $\{v_n\}$ uma sequência Palais-Smale para o funcional I em E, isto é,

1. $|I(v_n)| \leq M$, para algum $M > 0$ e

2. $I'(v_n) \to 0$ em E^{-1}, onde E^{-1} é o espaço dual de E.

Primeiro, mostraremos que a sequência $\{v_n\}$ é limitada em E. Argumentamos por contradição e supomos que

$$\|v_n\|_{m,a,p} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.10}$$

Dado $\varepsilon > 0$, pelos ítens 1 e 2, deduzimos que

$$\left|I(v_n) - \frac{1}{q}I'(v_n)v_n\right| \leq M + \frac{\varepsilon}{q}\|v_n\|_{m,a,p}, \tag{1.11}$$

para n suficientemente grande.

Além disso, temos que

$$\left|I(v_n) - \frac{1}{q}I'(v_n)v_n\right| \geq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\|v_n\|^p_{m,a,p} - C_1\left(1-\frac{1}{q}\right)\|f\|_{E^{-1}}\|v_n\|_{m,a,p}, \tag{1.12}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, para n suficientemente grande temos que

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\|v_n\|_{m,a,p}^p \leq M+\left(\frac{\varepsilon}{q}+C_1\left(1-\frac{1}{q}\right)\|f\|_{E^{-1}}\right)\|v_n\|_{m,a,p}.$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos uma contradição, pois $1<p<q$. Isso implica que $\{v_n\}$ é uma sequência limitada em E.

Agora, mostraremos que $\{v_n\}$ é uma sequência de Cauchy em E. Em [49], é provada a seguinte desigualdade

$$|\xi-\eta|^p \leq \begin{cases} \left(|\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta\right)(\xi-\eta), & \text{se } p\geq 2; \\ \left(|\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta\right)(\xi-\eta)^{\frac{p}{2}}\left(|\xi|^p+|\eta|^p\right)^{\frac{2-p}{2}}, & \text{se } 1<p<2, \end{cases} \tag{1.13}$$

para todo $\xi,\eta \in I\!\!R^N$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_S r^{m-ap}|\nabla v_i-\nabla v_j|^p\,dx &\leq \int_S r^{m-ap}\left(|\nabla v_i|^{p-2}\nabla v_i-|\nabla v_j|^{p-2}\nabla v_j\right)(\nabla v_i-\nabla v_j)\,dx \\ &\leq |I'(v_i)(v_i-v_j)|+|I'(v_j)(v_i-v_j)| \\ &\quad +\left|\int_S r^{m-bq}\left(|v_i|^{q-2}v_i-|v_j|^{q-2}v_j\right)(v_i-v_j)\,dx\right| \\ &= I_1+I_2+I_3. \end{aligned}$$

Como v_n é uma sequência de Palais-Smale, segue que $I_1=o\left(\|v_n\|_{m,a,p}\right)$ e $I_2=o\left(\|v_n\|_{m,a,p}\right)$.

Usando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \left|\int_S r^{m-bq}\left(|v_i|^{q-2}v_i-|v_j|^{q-2}v_j\right)(v_i-v_j)\,dx\right| &\leq \int_S r^{m-bq}\left(|v_i|^{q-1}+|v_j|^{q-1}\right)|v_i-v_j|\,dx \\ &= \int_S\left(r^{\frac{m-bq}{q}}|v_i|\right)^{q-1}r^{\frac{m-bq}{q}}|v_i-v_j|\,dx \\ &\quad +\int_S\left(r^{\frac{m-bq}{q}}|v_j|\right)^{q-1}r^{\frac{m-bq}{q}}|v_i-v_j|\,dx \\ &\leq \left(|v_i|_{m,b,q}^{q-1}+|v_j|_{m,b,q}^{q-1}\right)|v_i-v_j|_{m,b,q}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade acima e pela imersão compacta $W_{0,G}^{1,p}(S) \hookrightarrow L^q(S)^G$ podemos concluir que $I_3=o\left(\|v_n\|_{a,m,p}\right)$. Portanto, $\{v_n\}$ é uma sequência de Cauchy e o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale. ■

Lema 1.9. *O funcional I é fracamente semi-contínuo inferiormente em E, isto é, se $\{v_n\}$ converge fracamente para $v \in E$, então temos $I(v) \leq \liminf I(v_n)$.*

Demonstração. Seja uma sequência $\{v_n\} \subset E$ que converge fracamente para v em E. Como a norma $\|\cdot\|_{m,a,p}$ é uma função fracamente semi-contínua inferiormente em E, segue que

$$\frac{1}{p}\int_S r^{m-ap}|\nabla v|^p\,dx \leq \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\int_S r^{m-ap}|\nabla v_n|^p\,dx\right). \tag{1.14}$$

Podemos concluir da imersão compacta $W^{1,p}_{0,G}(S) \hookrightarrow L^q(S)^G$ que $\{v_n\}$ converge fortemente para v em $L^q(S)^G$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q}\int_S r^{m-bq}\,|v_n|^q\,dx \;=\; \frac{1}{q}\int_S r^{m-bq}\,|v|^p\,dx. \tag{1.15}$$

Por hipótese, a sequência $\{v_n\}$ converge fracamente para v em E e $f \in W_0^{-1,p}(\Omega) \subset E^{-1}$; portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_S r^m f v_n dx \;=\; \int_S r^m f v dx. \tag{1.16}$$

Finalmente, combinando as relações (1.14), (1.15) e (1.16) deduzimos que

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} I(v_n)\\
&= \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{p}\int_S r^{m-ap}\,|\nabla v_n|^p\,dx - \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q}\int_S r^{m-bq}\,|\nabla v_n|^q\,dx + \lim_{n\to\infty}\int_S r^m f v_n dx\right)\right]\\
&\geq I(v);
\end{aligned}$$

portanto, o funcional I é fracamente semi-contínuo inferiormente em E. ∎

Demonstração do Teorema 1.2. Pelos Lemas 1.7 e 1.8, todas as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha em [56] são satisfeitas. Portanto, deduzimos a existência de $v_1^* \in W^{1,p}_{0,G}(S)$ que é uma solução fraca para o problema (1.7) e $I(v_1^*) = \overline{c} > 0$.

Agora, provaremos que existe uma segunda solução fraca $v_2^* \in W^{1,p}_{0,G}(S)$ tal que $v_1^* \neq v_2^*$. Para $\rho > 0$ dado pelo Lema 1.7, definimos o número real $\underline{c}$ por

$$\underline{c} := \inf_{\left\{v\in E:\|v\|_{m,a,p}\leq\rho\right\}} I(v).$$

É claro que $\underline{c} \leq I(0) = 0$. Se $\underline{c} = I(0)$, então 0 é um valor de mínimo para I; logo,

$$0 = I'(0)(\varphi) = -\int_S r^m f\varphi dx, \text{ para toda } \varphi \in E,$$

que contradiz o fato de que $f \neq 0$. Portanto, $\underline{c} < I(0) = 0$.

Denotamos por $\overline{B}_\rho$ a bola fechada de raio ρ centrada na origem em E, isto é,

$$\overline{B}_\rho = \left\{v \in E : \|v\|_{m,a,p} \leq \rho\right\}.$$

Segue que o conjunto $\overline{B}_\rho$ é um espaço métrico completo com respeito à distancia definida por $d(u,v) := \|u - v\|_{m,a,p}$ para todo $u, v \in \overline{B}_\rho$.

Pelo Lema 1.9, o funcional I é fracamente semi-contínuo inferiormente e limitado por baixo pela relação (1.9).

Seja ε tal que $0 < \varepsilon < \inf\limits_{\partial B_\rho} I - \inf\limits_{B_\rho} I$. Usando o Princípio Variacional de Ekeland [25] para o funcional $I : \overline{B}_\rho \to I\!R$, existe uma função $v_\varepsilon \in \overline{B}_\rho$, tal que

$$I(v_\varepsilon) < \inf_{\overline{B}_\rho} I + \varepsilon, \quad I(v_\varepsilon) < I(v) + \varepsilon\,\|v - v_\varepsilon\|_{m,a,p}\,, \quad v \neq v_\varepsilon.$$

Como

$$I(v_\varepsilon) \leq \inf_{\overline{B_\rho}} I + \varepsilon \leq \inf_{B_\rho} I + \varepsilon < \inf_{\partial B_\rho} I$$

segue que $v_\epsilon \in B_\rho$.

Agora, definimos o funcional $K : \overline{B_\rho} \to I\!R$ por $K(v) = I(v) + \varepsilon \|v - v_\varepsilon\|_{m,a,p}$. É imediato que v_ε é ponto de mínimo de K e, portanto,

$$\frac{K(v_\varepsilon + t\varphi) - K(v_\varepsilon)}{t} \geq 0, \tag{1.17}$$

para $t > 0$ suficientemente pequeno e $\varphi \in B_\rho$. Pela desigualdade (1.17) deduzimos que

$$\frac{I(v_\varepsilon + t\varphi) - I(v_\varepsilon)}{t} + \varepsilon \|\varphi\|_{m,a,p} \geq 0. \tag{1.18}$$

Segue de (1.18) que $I'(v_\varepsilon) + \varepsilon \|\varphi\|_{m,a,p} \geq 0$ para $t \to 0^+$. Note que $-\varphi$ também pertence a B_ρ; portanto, trocando φ por $-\varphi$, temos que

$$I'(v_\varepsilon)(-\varphi) + \varepsilon \|-\varphi\|_{m,a,p} \geq 0$$

ou, simplesmente, $I'(v_\varepsilon)(\varphi) \leq \varepsilon \|\varphi\|_{m,a,p}$. Assim, podemos deduzir que $\|I'(v_\epsilon)\|_{E^{-1}} \leq \varepsilon$.

Portanto, das informações obtidas acima, podemos concluir que existe uma sequência $\{v_k\} \subset B_\rho$, tal que

$$I(v_k) \to \underline{c} \ \text{ e } \ I'(v_k) \to 0 \text{ em } \ E^{-1}, \text{ quando } \ k \to \infty.$$

Usando o Lema 1.8, podemos mostrar que a menos de subsequência, $\{v_k\}$ converge fortemente para alguma função $v_2^* \in E$. Assim, v_2^* é uma solução fraca de (1.7) e v_2^* é uma solução não trivial pois $I(v_2^*) = \underline{c} < 0$. Finalmente, como $I(v_1^*) = \overline{c} > 0 > \underline{c} = I(v_2^*)$, então $v_2^* \neq v_1^*$. ■

Capítulo 2

Resultados de existência e de multiplicidade para um problema elíptico sobre um domínio cilíndrico ilimitado e com um termo não homogêneo μ

2.1 Preliminares

Neste capítulo, estudamos uma variante da seguinte classe de equações elípticas quasilineares com singularidades cilíndricas

$$\left\{ -\operatorname{div}\left(\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|y|^{ap}}\right) - \mu\frac{u^{p-1}}{|y|^{p(a+1)}} = h\frac{u^{p^*(a,b)-1}}{|y|^{bp^*(a,b)}} + \lambda g\frac{u^{q-1}}{|y|^{cp^*(a,c)}}, \qquad (x,y) \in I\!R^{N-k} \times I\!R^k. \right. \tag{2.1}$$

Problemas desse tipo surgem no estudo da dinâmica de algumas galáxias [9]. Nesse caso, a simetria cilíndrica dos pesos no operador diferencial e sobre as não-linearidades são motivados pelo fato de que algumas galáxias são axialmente simétricas. Além disso, esse tipo de problema aparece nos modelos de vários fenômenos físicos para o equilíbrio da temperatura ambiente em um meio anisotrópico que é um "isolador perfeito" em alguns pontos e um "condutor perfeito" em outros pontos. Essa classe de equações também modela as soluções estacionárias para a concentração de alguma substância em fluido [22, 32]. As motivações matemáticas para estudar esse tipo de classe de equações surgem do fato de que esse problema generaliza alguns tipos de equações quasilineares com o operador p-Laplaciano e também por apresentar múltiplas não-linearidades críticas com pesos, trazendo várias dificuldades analíticas em relações às demonstrações de resultados de existência e de multiplicidade. Para essa classe de equações envolvendo o operador Laplaciano em domínios limitados citamos [3, 13, 42, 66] e para o operador p-Laplaciano citamos [34, 39, 40, 68]. Hsu e Lin [43] introduziram uma singularidade sobre o operador fazendo $a \neq 0$. Entre outros autores que também têm estudado essa classe de problema em domínios limitados e demonstrado resultados de existência e de multiplicidade citamos [16, 18, 27, 33, 41, 45]. No caso de domínios ilimitados citamos Ghergu e Rădulescu [31], que estudaram o problema (2.1) para o operador Laplaciano com pesos esféricos, isto é, $k = N$, $p = 2$ e $a \neq 0$. Todos os artigos mencionados acima envolvem somente singularidades esféricas, isso é, $k = N$. Para um exemplo de resultado de multiplicidade para o problema (2.1) com singularidades cilíndricas citamos Bouchekif e El Mokhtar [12], que estudaram o problema (2.1) no caso em que $3 \leq k \leq N$, $p = 2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$, $\mu \neq 0$, $q = 1$ e as funções g e h não necessariamente constantes.

Mais recentemente, Assunção, Dos Santos e Miyagaki [5] estudaram uma variação do problema (2.1) para o operador degenerado div $\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|y|^{ap}}\right)$ em $I\!R^N$, com singularidades cilíndricas envolvendo expoentes críticos múltiplos, isto é, com $N \geq 3$, $\lambda > 0$, $p < k \leq N$, $1 < p < N$, $0 \leq \mu < \overline{\mu} := \{[k - p(a+1)]/p\}^p$, $0 \leq a < (k-p)/p$, $a \leq b < a+1$, $a < c < a+1$, $1 \leq q < p$, $p^*(a,b) = Np/[N - p(a+1-b)]$, $p^*(a,c) = Np/[N - p(a+1-c)]$, $h \in L^\infty(I\!R^k)$ e $g \in L^r_\alpha(I\!R^N)$, tal que $\alpha = c(p^*(a,c) - q)$ e $r = p^*(a,c)/[p^*(a,c) - q]$. Motivados por Gazzini e Musina [30] e por Bhakta [11] quanto à natureza das singularidades cilíndricas e por Fillippucci, Pucci e Robert [28], Xuan e Wang [71] e Sun [65] quanto à presença de múltiplas não linearidades críticas, os autores provaram a existência de solução fraca e positiva.

Motivado pelo recente resultado sobre o efeito da topologia do domínio de Clapp e Szulkin [20] e também por [5], neste capítulo estudamos resultados de existência e de multiplicidade de soluções no caso supercrítico do seguinte problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|y|^{ap}}\right) = \mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|y|^{p(a+1)}} + h(x)\dfrac{|u|^{q-2}u}{|y|^{bq}} + f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

em um cilindro simétrico ilimitado

$$\Omega := \left\{(y,z) \in I\!R^{m+1} \times I\!R^{N-m-1} \;;\; 0 < A < |y| < B < \infty\right\},$$

onde $A, B \in I\!R_+$, $p > 1$, $1 \leq m < N - p$, $q := \dfrac{Np}{N - p(a+1-b)}$, $a - \dfrac{m}{N-m} < b < a+1$,

$a < \dfrac{(m+1)-p}{p}$, $0 \leq \mu < \overline{\mu} := \left(\dfrac{m+1-p(a+1)}{p}\right)^p$, $h \in L^{\frac{N}{q}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é uma função positiva e $f : \Omega \times I\!R \to I\!R$ é uma função de Carathéodory, com $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(f_0) $c_0 g_0(x) |u|^\eta \leq F(x,u) \leq c_1 g_1(x) |u|^\eta$, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $x \in \Omega$, e $g_0, g_1 \in W^{-1,\left(\frac{q}{\eta}\right)'}(\Omega)$ com $g_0 \geq 0$, onde $1 < \eta < p < q < p^*_{N,m}$;

(f_1) $|f(x,u)| \leq c_2 |u|^{p-1} + c_3 |u|^{\eta-1}$, onde $p < \eta < p^*_{N,m}$, $u \in I\!R$ e para todo $x \in \Omega$;

(f_2) $|f(x,u)| \leq c_4 |u|^{p-1} + c_5 k(x) |u|^{\eta-1}$, onde $1 < \eta < p$, $u \in I\!R$, $k \in W^{-1,\left(\frac{p}{\eta}\right)'}(\Omega)$ e para todo $x \in \Omega$;

(f_3) $f(x, z_1, u) = f(x, z_2, u)$ para todo $z_1, z_2 \in I\!R^{N-m-1}$, $|z_1| = |z_2|$, isto é, $f(x, \cdot, u)$ é simétrica esfericamente sobre $I\!R^{N-m-1}$;

(f_4) $f(x,u) = o\left(|u|^{p-1}\right)$ quando $|u| \to 0$, uniformemente para $x \in \Omega$;

(f_5) $f(x,u) = o\left(k(x) |u|^{\eta-1}\right)$ quando $|u| \to 0$, uniformemente para $x \in \Omega$ e $1 < \eta < p$;

(f_6) Existe $\theta > p$ tal que $f(x,u)u \geq \theta F(x,u) \geq 0$ para $x \in \Omega$;

(f_7) $f(x,u) = -f(x,-u)$, para $u \in I\!R$ e para todo $x \in \Omega$.

Nossos principais resultados são os seguintes teoremas.

Teorema 2.1. *Sejam $1 < \eta < p$ e $0 < \mu < \overline{\mu}$. Suponhamos que as propriedades (f_0), (f_2), (f_3), (f_5), (f_6) e (f_7) se verificam e que o conjunto $\omega := \{x \in \Omega \mid g_0(x) > 0\}$ tem medida de Lebesgue positiva. Então o problema (2.2) possui infinitas soluções invariantes.*

Teorema 2.2. *Se $p < \eta < p^*_{N,m}$, $0 < \mu < \overline{\mu}$ e (f_1), (f_3), (f_4), (f_6) e (f_7) se verificam, então o problema (2.2) possui infinitas soluções invariantes.*

No presente trabalho, como consideramos domínios é ilimitados, a perda de compacidade da imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\left(p \leq q < p^* := \dfrac{pN}{N-p}\right)$, deixa as técnicas variacionais usuais mais delicadas. Para provarmos os resultados acima, estudamos um problema auxiliar e mostramos que suas soluções pertencem ao espaço $W_0^{1,p}(S) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ e são axialmente simétricas, onde $S := (A,B) \times I\!R^{N-m-1}$. Como de costume, isso é feito definindo um funcional energia $I \colon W_0^{1,p}(S) \to I\!R$ e mostrando a existência de pontos críticos para I no espaço $W_0^{1,p}(S)$. Esses pontos críticos são soluções fracas do problema auxiliar e, por nossa configuração, eles também resolvem o problema (2.2).

Como S é um domínio ilimitado, a dificuldade para demonstrar os Teoremas 2.1 e 2.2 consiste no fato de que $W_0^{1,p}(S)$ não pode ser imerso de maneira compacta dentro de $L^q(S)$ para todo $q \in (p, p^*_{N,m})$. Para solucionar esta perda de compacidade (ver [26, 52]), nós construímos um subespaço das funções invariantes $W_{0,G}^{1,p}(S) \subset W_0^{1,p}(S)$ com a imersão compacta $W_{0,G}^{1,p}(S) \hookrightarrow L^q(S)$ para $q \in (p, p^*_{N,m})$. Usando o princípio de criticalidade simétrica [55], podemos considerar os pontos críticos do funcional I restrito a $W_{0,G}^{1,p}(S)$.

Para demonstrar o Teorema 2.1, nós seguimos as linhas gerais de Garcia e Peral [29] e construímos um funcional truncado $\widetilde{I}$ de modo que valores críticos negativos deste funcional coincidem com valores críticos do funcional I. E usando a Teoria do Gênero de Krasnoselski, conseguimos construir uma sequência infinita do tipo "minimax" de valores críticos negativos para o funcional truncado $\widetilde{I}$, e assim obtermos infinitas soluções invariantes. Já a demonstração do Teorema 2.2 é obtida através de uma versão mais geral do Teorema do Passo da Montanha de Rabinowitz (ver [56, Teorema 9.12]).

Note que, como $q \in (p, p^*_{N,m})$ e $p^*_{N,m} > p^*$, então o problema (2.2) contempla os casos subcrítico, crítico e supercrítico.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 2.2, introduzimos o problema auxiliar, de modo que suas soluções também são soluções para o problema (2.2); e provamos alguns lemas auxiliares importantes, que irão nos ajudar a provar os principais resultados desse capítulo; na seção 2.3, demonstramos nossos principais resultados; para isso dividimos essa seção em duas subseções; na subseção 2.3.1 definimos o gênero de Krasnoselski e listamos algumas de suas propriedades e usando os métodos "minimax" provamos o Teorema 2.1; na subseção 2.3.2, concluímos a prova do Teorema 2.2 usando alguns resultados provados na seção 2.2 e provando um resultado de Rabinowitz ([56, Teorema 9.12]).

2.2 Resultados gerais

Uma função axialmente simétrica $u(y,z) = v(|y|, z)$ é solução para o problema (2.2) se, e somente se, a função $v := v(r,z)$ em que $r = |y|$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(r^{m-ap}\,|\nabla v|^{p-2}\,\nabla v\right) = \mu r^{m-p(a+1)}\,|v|^{p-2}\,v + r^{m-bq}h(\overline{x})\,|v|^{q-2}\,v + r^m f(\overline{x}, v) & \text{em } S \\ v = 0 & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $S := \left\{\overline{x} = (r,z) \in (A,B) \times I\!R^{N-m-1}\right\}$ e $\partial S := \{A,B\} \times I\!R^{N-m-1}$.

Denotamos por $W_0^{1,p}(S)$ o subespaço das funções axialmente simétricas em $W_0^{1,p}(\Omega)$ com a norma definida por $\|v\| = \left(\int_S |\nabla v|^p \, d\overline{x}\right)^{\frac{1}{p}}$. Esta norma $\|\cdot\|$ é equivalente a norma usual sobre $W_0^{1,p}(S)$ (ver [2, pp. 158–159]).

Se $G := O(N-m-1)$ é o grupo de isometria de $I\!R^{N-m-1}$, então

$$\operatorname{Fix}(G) := W_{0,G}^{1,p}(S) = \left\{v \in W_0^{1,p}(S) : v(r,gz) = v(r,z),\ \forall g \in G\right\}$$

e

$$L^q(S)^G = \{v \in L^q(S) : v(r,gz) = v(r,z),\ \forall g \in G\}$$

são os subespaços das funções invariantes.

Dado que $A < r < B$, então as normas sobre $W_{0,G}^{1,p}(S)$ e $L^q(S)^G$ dadas por

$$\|v\|_{m,a,p} := \left(\int_S r^{m-ap} |\nabla v|^p \, d\overline{x}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad |v|_{m,b,q} := \left(\int_S r^{m-bq} |v|^q \, d\overline{x}\right)^{\frac{1}{q}}$$

são equivalentes às normas usuais de $W_0^{1,p}(S)$ e $L^q(S)$, respectivamente.

Denote $X := W_0^{1,p}(S)$ e $E := W_{0,G}^{1,p}(S)$. Se $0 < \mu < \overline{\mu}$, $1 < p < \infty$ e $a < \dfrac{(m+1)-p}{p}$ então pela desigualdade de Hardy-Sobolev [59] temos que

$$\int_S r^{m-p(a+1)} |v|^p \, d\overline{x} \leq \frac{1}{\mu} \int_S r^{m-ap} |\nabla v|^p \, d\overline{x}.$$

Assim, podemos definir uma norma $\|\cdot\|_\mu$ em X equivalente a norma $\|\cdot\|_{m,a,p}$ em E, definida por

$$\|v\|_\mu := \left(\int_S r^{m-ap} |\nabla v|^p \, d\overline{x} - \mu \int_S r^{m-p(a+1)} |v|^p \, d\overline{x}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Seja $I : X \to I\!R$ o funcional associado ao problema (2.3) definido por

$$I(v) = \frac{1}{p} \|v\|_\mu^p - \frac{1}{q} \int_S r^{m-bq} h(\overline{x}) |v|^q \, d\overline{x} - \int_S r^m F(\overline{x}, v) d\overline{x}. \tag{2.4}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} I'(v)(\varphi) \;\; = \;\; & \int_S r^{m-ap} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \varphi d\overline{x} - \mu \int_S r^{m-p(a+1)} |v|^{p-2} v \varphi d\overline{x} \\ & - \int_S r^{m-bq} h(\overline{x}) |v|^{q-2} v \varphi d\overline{x} - \int_S r^m f(\overline{x}, v) \varphi d\overline{x} \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in X$. Aplicando o Princípio de Criticalidade Simétrica [55], podemos considerar os pontos críticos de I restrito em E, os quais são soluções fracas do problema (2.3).

Em [26, 52], temos um importante resultado de compacidade que garante a compacidade da imersão $W_{0,G}^{1,p}(S) \hookrightarrow L^q(S)$ para $1 \leq m < N-p$ e $q \in (p, p_{N,m}^*)$. Portanto, $W_{0,G}^{1,p}(S)$ pode ser imerso compactamente em $L^q(S)^G$ para as normas definidas anteriormente.

Lema 2.3. *Seja $J : E \to I\!R$ o funcional definido por*

$$J(v) := \int_S r^m F(\overline{x}, v) d\overline{x}$$

onde $F(\overline{x}, s) = \int_0^s f(\overline{x}, t)dt$. Então J é continuamente diferenciável e sua derivada é

$$J'(v)(\varphi) = \int_S r^m f(\overline{x}, v)\varphi d\overline{x}, \quad \forall \varphi \in E.$$

Além disso, se $v_n \rightharpoonup v$ em E então $\lim\limits_{n\to\infty} J'(v_n)(\varphi) = J'(v)(\varphi)$.

Demonstração. Vamos provar que esse lema se verifica para dois casos.

Caso1): Considere $1 < \eta < p$. Para demonstrar que $J \in C^1(E, I\!R)$, mostraremos que J tem derivada contínua de Gâteaux em E. Para isso, usaremos a seguinte desigualdade elementar [8]

$$\forall\ q > 0, \exists\ C_q > 0 \text{ tal que } |x + y|^q \leq C_q \left(|x|^q + |y|^q\right), \forall x, y \in I\!R. \tag{2.5}$$

Além disso, das propriedades (f_2) e (f_5) segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x, u)| \leq C_\varepsilon |u|^{p-1} + \varepsilon |k(x)| |u|^{\eta-1}. \tag{2.6}$$

Como F é a primitiva de f em relação à segunda variável, então para $v, \varphi \in E$ temos a seguinte convergência q.t.p em S

$$\lim_{t\to 0} \left[r^m \left(\frac{F(\overline{x}, v + t\varphi) - F(\overline{x}, v)}{t} \right) \right] = r^m f(\overline{x}, v)\varphi.$$

Sejam $v, \varphi \in E$ e seja $0 < |t| < 1$. Pelo Teorema de Lagrange existe $0 < |\theta| < |t|$ tal que

$$\frac{F(\overline{x}, v + t\varphi) - F(\overline{x}, v)}{t} = f(\overline{x}, v + \theta\varphi)\varphi.$$

Dado que $0 < A < r < B < \infty$, então temos

$$\left| r^m \left(\frac{F(\overline{x}, v + t\varphi) - F(\overline{x}, v)}{t} \right) \right| \leq C_1 |f(\overline{x}, v + \theta\varphi)| |\varphi|. \tag{2.7}$$

Tomando $\varepsilon = 1$ e $u = v + \theta\varphi$ em (2.6) e usando a desigualdade (2.5) obtemos uma constante positiva C tal que

$$C_1 |f(\overline{x}, v + \theta\varphi)| |\varphi| \leq C \left(|v|^{p-1} |\varphi| + |\varphi|^p + |k| |\varphi| |v|^{\eta-1} + |k| |\varphi|^\eta \right).$$

Como a função $|v|^{p-1} |\varphi| + |\varphi|^p + |k| |\varphi| |v|^{\eta-1} + |k| |\varphi|^\eta$ está em $L^1(S)$ então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [10] concluímos que J é Gâteaux diferenciável e que

$$J'(v)(\varphi) = \int_S r^m f(\overline{x}, v)\varphi d\overline{x}.$$

Agora vamos mostrar que J' é contínuo. Para isso, seja $\{v_n\} \subset E$ uma sequência tal que $v_n \to v$ em E. Então a menos de uma subsequência podemos supor que

i) $v_n \to v$ em $L^p(S)$;

ii) $v_n(\overline{x}) \to v(\overline{x})$ q.t.p. em S;

iii) e existe uma função $w \in L^p(S)$ tal que $|v_n(\overline{x})| \leq w(\overline{x})$ q.t.p. em S para todo $n \in \mathbb{N}$.

Temos que

$$\left|\left(J'(v_n) - J(v)\right)(\varphi)\right| \leq C_1 \int_S |f(\overline{x}, v_n) - f(\overline{x}, v)| \, |\varphi(\overline{x})| \, d\overline{x}.$$

Como f é uma função de Carathéodory então

$$\lim_{n\to\infty} (|f(\overline{x}, v_n) - f(\overline{x}, v)| \, |\varphi(\overline{x})|) = 0 \quad q.t.p \ em \ S.$$

Além disso, das relações (2.5) e (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} |f(\overline{x}, v_n) - f(\overline{x}, v)| \, |\varphi(\overline{x})| &\leq C \left(|v_n|^{p-1} |\varphi| + |v|^{p-1} |\varphi| + |k| \, |v_n|^{\eta-1} |\varphi| + |k| \, |v|^{\eta-1} |\varphi|\right) \\ &\leq C \left(|w|^{p-1} |\varphi| + |v|^{p-1} |\varphi| + |k| \, |w|^{\eta-1} |\varphi| + |k| \, |v|^{\eta-1} |\varphi|\right). \end{aligned}$$

Como a função $|w|^{p-1} |\varphi| + |v|^{p-1} |\varphi| + |k| \, |w|^{\eta-1} |\varphi| + |k| \, |v|^{\eta-1} |\varphi| \in L^1(S)$ então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [10] temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_S |f(\overline{x}, v_n) - f(\overline{x}, v)| \, |\varphi(\overline{x})| \, d\overline{x} = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \|J'(v_n) - J'(v)\|_{E^{-1}} &:= \sup \left\{ |(J'(v_n) - J'(v))(\varphi)| \, ; \ \varphi \in E, \|\varphi\|_{m,a,p} = 1 \right\} \\ &\leq C_1 \int_S |f(\overline{x}, v_n) - f(\overline{x}, v)| \, |\varphi(\overline{x})| \to 0 \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$ então, $J \in C^1(E, I\!R)$. Sendo J' contínuo e claramente linear na variável φ, então temos que $J' \in E^{-1}$. Logo, se $\{v_n\}$ for uma sequência em E de modo que v_n converge fracamente para v em E, então $J'(v_n)(\varphi) \to J'(v)(\varphi)$ quando $n \to \infty$.

Caso 2): A prova desse lema no caso em que $p \leq \eta < p^*_{N,m}$ é análogo a prova do primeiro caso substituindo as propriedades (f_2) e (f_5) pelas propriedades (f_1) e (f_4) e usando a continuidade da imersão $W^{1,p}_{0,G}(S) \hookrightarrow L^q(S)$ para $p \leq q \leq p^*_{N,m}$. ■

Lema 2.4. *Seja $1 < p < q < p^*_{N,m}$, e seja $\{v_n\} \subset E$ uma sequência de Palais-Smale para o funcional I no nível $c \in I\!R$, isto é, uma sequência tal que*

$$\lim_{n\to\infty} I(v_n) = c \quad e \quad I'(v_n) \to 0 \quad em \quad E^{-1}.$$

Então $\{v_n\}$ é uma sequência limitada em E.

Demonstração. Seja $\{v_n\}$ uma sequência $(PS)_c$. Pela propriedade (f_6) temos

$$F(\overline{x}, v) \geq \frac{1}{\theta} |v|^{\theta} \quad \text{para todo } \overline{x} \in S.$$

Vamos dividir a demonstração em dois casos.

Caso 1): Considere $q \leq \theta < p^*_{N,m}$. Sendo $\{v_n\}$ uma sequência $(PS)_c$ então, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande temos

$$\left| I(v_n) - \frac{1}{q} I'(v_n)(v_n) \right| \leq c_1 + \frac{\varepsilon}{q} \|v_n\|_{m,a,p} . \tag{2.8}$$

Por outro lado, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande temos

$$\begin{aligned} \left| I(v_n) - \frac{1}{q} I'(v_n)(v_n) \right| &\geq c_2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|^p_{m,a,p} + \frac{1}{q} \int_S r^m f(\overline{x}, v_n) v_n d\overline{x} - \int_S r^m F(\overline{x}, v_n) d\overline{x} \\ &\geq c_2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|^p_{m,a,p} + \left(\frac{\theta}{q} - 1 \right) \int_S r^m F(\overline{x}, v_n) d\overline{x} \\ &\geq c_2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|^p_{m,a,p} + \left(\frac{\theta}{q} - 1 \right) \frac{1}{\theta} \int_S r^m |v_n|^{\theta} d\overline{x} \\ &\geq c_2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|^p_{m,a,p} . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pelas relações (2.8) e (2.9) obtemos

$$c_1 \geq c_2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|v_n\|^p_{m,a,p} - \frac{\varepsilon}{q} \|v_n\|_{m,a,p} . \tag{2.10}$$

Caso 2): Considere $p < \theta < q$. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande temos

$$\begin{aligned} c + 1 &\geq I(v_n) = I(v_n) - \frac{1}{\theta} I'(v_n) + \frac{1}{\theta} I'(v_n)(v_n) \\ &\geq c_2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta} \right) \|v_n\|^p_{m,a,p} + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q} \right) \int_S r^{m-bq} h(\overline{x}) |v_n|^q d\overline{x} + \frac{1}{\theta} I'(v_n)(v_n) \\ &\geq c_2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta} \right) \|v_n\|^p_{m,a,p} - \frac{\varepsilon}{\theta} \|v_n\|_{m,a,p} \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas.

Desde que $1 < p$, as relações (2.10) e (2.11) implicam que $\{v_n\}$ é limitada em E para $p < \theta < p^*_{N,m}$. ■

Lema 2.5. *Seja $\{v_n\} \subset E$ uma sequência de Palais-Smale para o funcional I no nível $c \in I\!R$. Então a sequência $\{v_n\}$ possui uma subsequência convergente em E.*

Demonstração. Seja $\{v_n\} \subset E$ uma sequência tal que

i) $\lim_{n \to \infty} I(v_n) = c$;

ii) $I'(v_n) \to 0$ em E^{-1}.

Pelo Lema 2.4 sabemos que $\{v_n\} \subset E$ é limitada. Passando a uma subsequência ainda denotada da mesma forma, podemos supor que $v_n \rightharpoonup v$ em E. Usando a definição da derivada do funcional I podemos escrever

$$\begin{aligned}\left(I'(v_n)-I'(v)\right)(v_n-v) \;=\; & \int_S r^{m-ap}\left|\nabla v_n\right|^p d\overline{x}+\int_S r^{m-ap}\left|\nabla v\right|^p d\overline{x}\\ & -\int_S r^{m-ap}\left|\nabla v_n\right|^{p-2}\nabla v_n\nabla v d\overline{x}-\int_S r^{m-ap}\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla v\nabla v_n d\overline{x}\\ & -\int_S r^{m-bq}h\left(\left|v_n\right|^{q-2}v_n-\left|v\right|^{q-2}v\right)(v_n-v)d\overline{x}\\ & -\int_S r^{m}\left(f(\overline{x},v_n)-f(\overline{x},v)\right)(v_n-v)d\overline{x}\\ & -\mu\int_S r^{m-p(a+1)}\left(\left|v_n\right|^{p-2}v_n-\left|v\right|^{p-2}v\right)(v_n-v)d\overline{x}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Agora, usando o produto vetorial escalar do $I\!R^N$ (denotado por $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$), reescrevemos

$$\begin{aligned}&\int_S \langle r^{m-ap}\left(\left|\nabla v_n\right|^{p-2}\nabla v_n-\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla v\right),\nabla v_n-\nabla v\rangle_e d\overline{x}\\ &\quad=\left(I'(v_n)-I'(v)\right)(v_n-v)\\ &\qquad+\mu\int_S r^{m-p(a+1)}\left(\left|v_n\right|^{p-2}v_n-\left|v\right|^{p-2}v\right)(v_n-v)d\overline{x}\\ &\qquad+\int_S r^{m-bq}h\left(\left|v_n\right|^{q-2}v_n-\left|v\right|^{q-2}v\right)(v_n-v)d\overline{x}\\ &\qquad+\int_S r^{m}\left(f(\overline{x},v_n)-f(\overline{x},v)\right)(v_n-v)d\overline{x}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Em ([61, Lema 2.1]), foi provada a seguinte desigualdade

$$\langle|x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y,x-y\rangle_e \;\geq \begin{cases} C\dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & \text{se} \quad 1<p<2\\ C\,|x-y|^p & \text{se} \quad p\geq 2\end{cases}$$

onde $x,y\in I\!R^N$ e $C:=C(p)$ é uma constante. Aplicando a desigualdade acima em (2.13), para $p\geq 2$, obtemos

$$\begin{aligned}&C\int_S r^{m-ap}\left|\nabla v_n-\nabla v\right|^p d\overline{x}\\ &\quad\leq\int_S r^{m-ap}\langle\left|\nabla v_n\right|^{p-2}\nabla v_n-\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla v,\nabla v_n-\nabla v\rangle_e d\overline{x}\\ &\quad=\left(I'(v_n)-I'(v)\right)(v_n-v)\\ &\qquad+\mu\int_S r^{m-p(a+1)}\left(\left|v_n\right|^{p-2}v_n-\left|v\right|^{p-2}v\right)(v_n-v)d\overline{x}\\ &\qquad+\int_S r^{m-bq}h\left(\left|v_n\right|^{q-2}v_n-\left|v\right|^{q-2}v\right)(v_n-v)d\overline{x}\\ &\qquad+\int_S r^{m}\left(f(\overline{x},v_n)-f(\overline{x},v)\right)(v_n-v)d\overline{x}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Quanto à primeira parcela da desigualdade (2.14) temos

$$\big(I'(v_n)-I'(v)\big)(v_n-v)=I'(v_n)(v_n-v)-I'(v)(v_n-v).$$

Afirmamos que o lado direito da expressão acima tende a zero quando $n \to \infty$. De fato,

$$\lim_{n\to\infty} I'(v_n)(v_n - v) = 0$$

pois $I'(v_n) \to 0$ em E^{-1} e a sequência $\{v_n - v\} \subset E$ é limitada. Além disso, como $v_n \rightharpoonup v$ em E então pela definição de convergência fraca temos

$$\lim_{n\to\infty} I'(v)(v_n - v) = 0.$$

Isto demonstra a afirmação.

Quanto à segunda parcela da desigualdade (2.14), como $v_n \rightharpoonup v$ em E então pela definição de convergência fraca temos que

$$\mu \int_S r^{m-p(a+1)} |v_n|^{p-2} v_n \varphi d\overline{x} \to \mu \int_S r^{m-p(a+1)} |v|^{p-2} v \varphi d\overline{x}$$

quando $n \to \infty$ para toda função $\varphi \in E$. Portanto,

$$\mu \int_S r^{m-p(a+1)} \left(|v_n|^{p-2} v_n - |v|^{p-2} \right) (v_n - v)\, d\overline{x} \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Agora vamos estudar a terceira parcela da desigualdade (2.14). Como $v_n \rightharpoonup v$ em $E = W^{1,p}_{0,G}(S)$ que está imerso compactamente em $L^q(S)$ $(p < q < p^*_{N,m})$ então

$$\lim_{n\to\infty} \int_S r^{m-bq} |v_n|^q\, d\overline{x} = \int_S r^{m-bq} |v|^q\, d\overline{x}. \tag{2.15}$$

Da limitação de $\{v_n\}$ em E podemos passar a uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, tal que

$$v_n(\overline{x}) \to v(\overline{x}) \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em} \quad S.$$

Além disso, segue da imersão $W^{1,p}_{0,G}(S) \hookrightarrow L^q(S)$ que $\{v_n\}$ é limitada em $L^q(S)$. Logo, pelo Lema de Brézis-Lieb [70] temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_S r^{m-bq} |v_n|^q\, d\overline{x} - \int_S r^{m-bq} |v_n - v|^q\, d\overline{x} \right) = \int_S r^{m-bq} |v|^q\, d\overline{x}. \tag{2.16}$$

Portanto, das relações (2.15) e (2.16) concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_S r^{m-bq} |v_n - v|^q\, d\overline{x} = 0. \tag{2.17}$$

Como $h \in L^\infty$, então podemos escrever a terceira parcela da desigualdade (2.14) da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\int_S r^{m-bq} h \left(|v_n|^{q-2} v_n - |v|^{q-2} v \right) (v_n - v) d\overline{x} \\ &\leq C_1 \left(\int_S r^{m-bq} |v_n|^{q-1} |v_n - v|\, d\overline{x} + \int_S r^{m-bq} |v|^{q-1} |v_n - v|\, d\overline{x} \right) \\ &:= C_1 (A_1 + A_2)\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Considerando o termo A_1, temos pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_S r^{m-bq} |v_n|^{q-1} |v_n - v| \, d\overline{x} \\ &\leq \left(\int_S r^{m-bq} |v_n|^q \, d\overline{x} \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_S r^{m-bq} |v_n - v|^q \, d\overline{x} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Usando a limitação da sequência $\{v_n\} \subset E$, a imersão $W^{1,p}_{0,G}(S) \hookrightarrow L^q(S)$ e o limite da relação (2.17) temos que

$$\lim_{n\to\infty} A_1 = 0.$$

Analogamente, considerando o termo A_2, novamente pela desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_S r^{m-bq} |v|^{q-1} |v_n - v| \, d\overline{x} \\ &\leq \left(\int_S r^{m-bq} |v|^q \, d\overline{x} \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_S r^{m-bq} |v_n - v|^q \, d\overline{x} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{2.20}$$

e usando (2.17) temos que

$$\lim_{n\to\infty} A_2 = 0.$$

Quanto a quarta parcela da desigualdade (2.14), o Lema 2.3 garante que se $v_n \rightharpoonup v$ em E então $J'(v_n) \to J'(v)$ em E^{-1}. E como a sequência $\{v_n - v\}$ é limitada em E então temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_S r^m \left(f(\overline{x}, v_n) - f(\overline{x}, v) \right) (v_n - v) d\overline{x} \right| &= \left| \left(J'(v_n) - J'(v) \right) (v_n - v) \right| \\ &\leq \left\| J'(v_n) - J'(v) \right\|_{E^{-1}} \left\| v_n - v \right\|_{m,a,p} \to 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

quando $n \to \infty$. Resumindo, $\{v_n\}$ converge forte para v em E e isso conclui a prova do lema. ∎

2.3 Demonstração dos principais resultados

2.3.1 Multiplicidade de soluções: caso $1 < \eta < p$

Nesta subseção usamos métodos de "minimax" para demonstrar o Teorema 2.1, isto é, para mostrarmos a existência de infinitas soluções invariantes para o problema (2.2). A definição de gênero e algumas de suas propriedades, fundamentais para a demonstração, são apresentadas a seguir.

Definição 2.6. *Seja X um espaço de Banach e Σ a coleção de subconjuntos $A \subset X \setminus \{0\}$, fechados em X e simétricos em relação à origem, ou seja, se $x \in A$, então $-x \in A$. Dizemos que $A \in \Sigma$ têm gênero n, o qual é denotado por $\gamma(A) = n$, se existe uma aplicação contínua e ímpar $\phi : A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que n é o menor número natural com esta propriedade, isto é,*

$$\gamma(A) := \inf \left\{ n \in \mathbb{N} | \; \exists \; \phi \in C(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}); \phi(-x) = -\phi(x) \; \forall x \in A \right\}.$$

Se não existe um tal mínimo n , definimos $\gamma(A) = \infty$. Por convenção, $\gamma(\emptyset) = 0$.

A demonstração do resultado a seguir encontra-se em Rabinowitz [56];

Lema 2.7. *Sejam $A, B \in \Sigma \subset X$. Então*

1) $\gamma(A) = 0$ se, e somente se, $A = \emptyset$;

2) Se K é um subconjunto compacto de X tal que $K \cap (-K) = \emptyset$, então $\gamma(K) = 1$;

3) Se existe uma aplicação ímpar $\xi \in C(A, B)$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;

4) Se $A \subset B$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;

5) $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$;

6) $\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$;

7) Se A é compacto, então $\gamma(A) < \infty$ e existe $\delta > 0$ tal que a vizinhança tubular $N_\delta(A) \in \Sigma$ e $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$ onde $N_\delta(A) \equiv \{x \in X \mid \ \|x - A\| \leq \delta\}$;

8) Se $\mathbb{S}^{n-1}$ é a esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^n$, então $\gamma(\mathbb{S}^{n-1}) = n$.

Pela propriedade (f_0) e pela desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned} \int_S r^m F(\overline{x}, v) d\overline{x} &\leq c_1 \int_S r^m g_1 |v|^\eta \, d\overline{x} \leq c_2 \int_S g_1 |v|^\eta \, d\overline{x} \\ &\leq c_3 \left(\int_S |g_1|^{\frac{\eta}{\eta - q}} \, d\overline{x} \right)^{\frac{\eta - q}{\eta}} \cdot \left(\int_S |v|^q \, d\overline{x} \right)^{\frac{\eta}{q}} \\ &\leq c_4 |v|_q^\eta \leq c_5 |v|_{m,b,q}^\eta . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Usando a equivalência das normas $\|\cdot\|_\mu$ e $\|\cdot\|_{m,a,p}$, a imersão $W^{1,p}_{0,G}(S) \hookrightarrow L^q(S)^G$ $(q \in (p, p^*_{N,m}))$, a hipótese de que $h \in L^\infty$ e a desigualdade (2.22) obtemos

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{p} \|v\|_\mu^p - \frac{1}{q} \int_S r^{m-bq} h(\overline{x}) \, |v|^q \, d\overline{x} - \int_S r^m F(\overline{x}, v) d\overline{x} \\ &\geq \frac{c_1}{p} \|v\|_{m,a,p}^p - \frac{c_2}{q} \|v\|_{m,a,p}^q - c_3 \|v\|_{m,a,p}^\eta , \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde c_1, c_2 e c_3 são constantes positivas.

Seguindo argumentos análogos aos de Garcia e Peral em [29], definindo

$$Q(t) = \frac{c_1}{p} t^p - \frac{c_2}{q} t^q - c_3 t^\eta,$$

resulta que

$$I(v) \geq Q\left(\|v\|_{m,a,p}\right). \tag{2.24}$$

Portanto, existe um número real positivo $\overline{c_3}$ tal que se $0 < c_3 < \overline{c_3}$, então Q atinge um valor máximo positivo. (ver Figura I).

Supondo que $0 < c_3 < \overline{c_3}$, podemos encontrar R_0 e R_1 como na figura I, e truncarmos o funcional I.

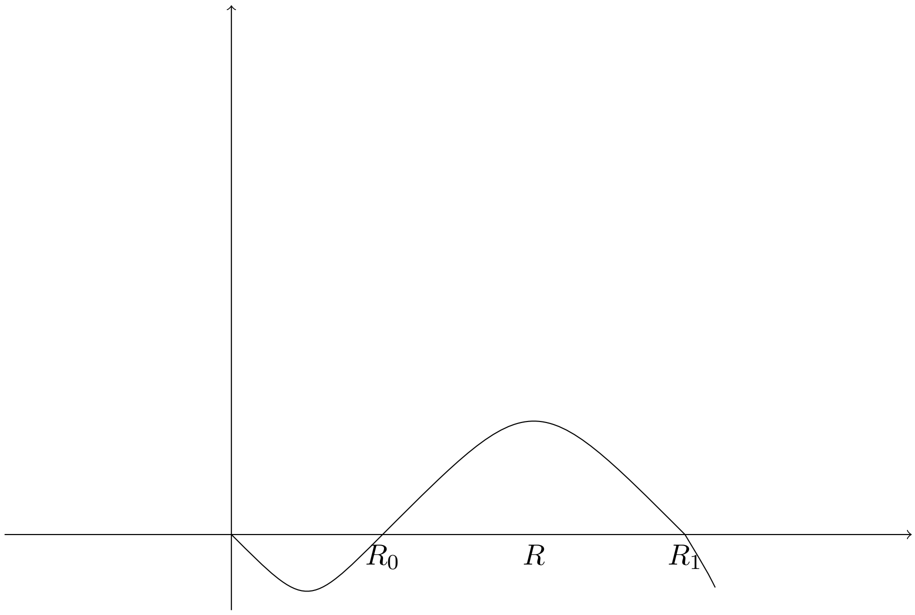

Figura I

Defina $\tau : I\!R \to [0,1]$, não crescente e C^∞, tal que

$$\begin{aligned} \tau(t) &= 1; \qquad \text{se } t \leq R_0, \\ \tau(t) &= 0; \qquad \text{se } t \geq R_1. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Seja $\psi(v) = \tau\left(\|v\|_{m,a,p}\right)$. Considere o funcional truncado

$$\widetilde{I}(v) = \frac{1}{p}\|v\|_\mu^p - \frac{1}{q}\psi(v)\int_S r^m h(\overline{x})\,|v|^q\,d\overline{x} - \int_S r^m F(\overline{x}, v)d\overline{x}. \tag{2.26}$$

Como em (2.24), obtemos $\widetilde{I}(v) \geq \widetilde{Q}\left(\|v\|_{m,a,p}\right)$ (ver Figura II), onde

$$\widetilde{Q}(t) = \frac{c_1}{p}t^p - \frac{c_2}{q}t^q\tau(t) - c_3 t^\eta. \tag{2.27}$$

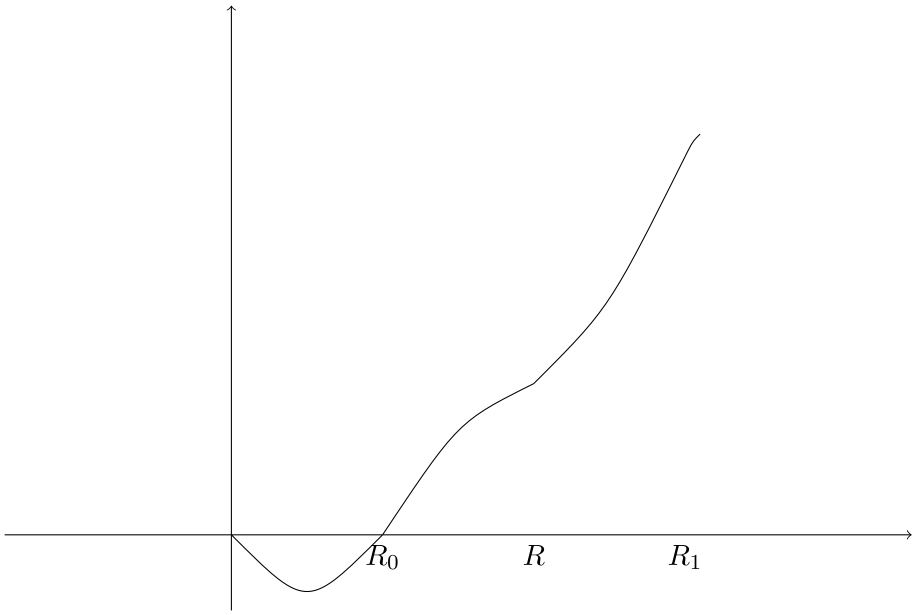

Figura II

Observe que para $\|v\|_{m,a,p} \leq R_0$ temos $\widetilde{Q} = Q$, e para $\|v\|_{m,a,p} \geq R_1$, temos

$$\widetilde{Q}(t) = \frac{c_1}{p}t^p - c_3 t^\eta.$$

Pela definição da função ψ podemos concluir que $\widetilde{I} \in C^1(E, I\!R)$ e que $\widetilde{I}$ é limitado inferiormente, desde que $1 < \eta < p$. Além disso, vale o seguinte resultado.

Lema 2.8. *Seja $\widetilde{I}$ o funcional truncado definido em (2.26) e sejam $0 < R_0 < R_1$ os números reais acima descritos. Então vale as seguintes propriedades:*

(1) Se $\widetilde{I}(v) < 0$, então $\|v\|_{m,a,p} < R_0$ e $\widetilde{I}(v) = I(v)$;

(2) O funcional truncado $\widetilde{I}$ satisfaz a condição de Palais-Smale para o nível $c < 0$.

Demonstração. Se $R_0 \leq \|v\|_{m,a,p} \leq R_1$, então $\widetilde{I}(v) \geq \widetilde{Q}\left(\|v\|_{m,a,p}\right) \geq 0$, por definição de R_0 e de R_1. Se $\|v\|_{m,a,p} > R_1$, então $\psi(v) = \tau\left(\|v\|_{m,a,p}\right)$=0. Como $1 < \eta < p$, a potência p domina a potência η e, portanto, $\widetilde{I}(v) > 0$. Assim, só nos resta a possibilidade $\|v\|_{m,a,p} < R_0$, o que implica a igualdade $\widetilde{I}(v) = I(v)$, pois $\psi(v) = \tau\left(\|v\|_{m,a,p}\right) = 1$. Isto demonstra a propriedade 1.

Para demonstrar a afirmativa 2, basta usar o Lema 2.5. ■

Agora, construiremos uma sequência do tipo "minimax" apropriada de valores críticos negativos para o funcional truncado $\widetilde{I}$. Assim, pela afirmativa 1 do Lema 2.8 teremos também um valor crítico para o funcional I. Sejam

$$K_c := \left\{v \in E \mid \widetilde{I}(v) = c \text{ e } \widetilde{I}'(v) = 0\right\}$$

e

$$\widetilde{I}^c := \left\{ v \in E \mid \widetilde{I}(v) \le c \right\}.$$

Proposição 2.9. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um número real $\varepsilon_n < 0$ tal que $\gamma(\widetilde{I}^{\varepsilon_n}) \ge n$.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado e seja $E_n \subset E = W^{1,p}_{0,G}(S)$ um subespaço vetorial tal que $\dim E_n = n$. Para cada função $v \in E_n \setminus \{0\}$ tomemos $w = \dfrac{v}{\|v\|_{m,a,p}} \in E_n$ tal que $\|w\|_{m,a,p} = 1$. Pela hipótese do Teorema 2.1, o conjunto

$$\omega \equiv \{\overline{x} \in S;\ g_0(\overline{x}) > 0\}$$

tem medida de Lebesgue positiva; logo, para cada função $w \in E_n$ tal que $\|w\|_{m,a,p} = 1$, existe um número real positivo d_n tal que

$$\int_S r^m g_0 \left|w\right|^\eta d\overline{x} \ge d_n. \tag{2.28}$$

De fato, suponha por absurdo que

$$\inf \left\{ \int_S r^m g_0 \left|w\right|^\eta d\overline{x};\ w \in E_n \text{ e } \|w\|_{m,a,p} = 1 \right\} = 0.$$

Logo, existe uma sequência $\{w_k\} \subset E_n$ com $\|w_k\|_{m,a,p} = 1$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} \int_S r^m g_0 \left|w_k\right|^\eta d\overline{x} = 0. \tag{2.29}$$

Como a sequência $\{w_k\}$ é limitada em E, então a menos de uma subsequência obtemos as seguintes convergências

i) $r^m \left|w_k\right|^\eta \rightharpoonup r^m \left|w\right|^\eta \in L^{\frac{q}{\eta}}$;

ii) $r^m \left|w_k(\overline{x})\right|^\eta \to r^m \left|w(\overline{x})\right|^\eta$ *q.t.p.* em S,

com $\|w\|_{m,a,p} = 1$. Como $g_0 \in L^{\frac{q}{q-\eta}}$, pela propriedade (f_0) e $\dfrac{1}{\frac{q}{\eta}} + \dfrac{1}{\frac{q}{q-\eta}} = 1$, então

$$\lim_{k\to\infty} \int_S r^m g_0 \left|w_k\right|^\eta d\overline{x} = \int_S r^m g_0 \left|w\right|^\eta d\overline{x}. \tag{2.30}$$

Combinando as relações (2.29) e (2.30) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty} \int_S r^m g_0 \left|w_k\right|^\eta d\overline{x} \\ &\ge \lim_{k\to\infty} \int_\omega r^m g_0 \left|w_k\right|^\eta d\overline{x} = \lim_{k\to\infty} \int_\omega r^m g_0 \left|w\right|^\eta d\overline{x} \ge 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

implicando em $w = 0$, o que é uma contradição, pois $\|w\|_{m,a,p} = 1$. Logo, a desigualdade presente na relação (2.28) é satisfeita.

Portanto, pela propriedade (f_0) e pela relação (2.28), para $0 < \rho < R_0$ e $w \in E_n$ com $\|w\|_{m,a,p} = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}(\rho w) &= I(\rho w) \\
&= \frac{\rho^p}{p} \|w\|_{\mu}^p - \frac{\rho^q}{q} \int_S r^{m-bq} h \, |w|^q \, d\overline{x} - \int_S r^m F(\overline{x}, \rho w) d\overline{x} \\
&\leq \frac{c_1}{p} \rho^p \|w\|_{m,a,p}^p + \frac{c_2}{q} \rho^q \|w\|_{m,a,p}^q - c_3 \rho^\eta \int_S r^m g_0 \, |w|^\eta \, d\overline{x} \\
&\leq \frac{c_1}{p} \rho^p + \frac{c_2}{q} \rho^q - c_3 d_n \rho^\eta = \varepsilon_n.
\end{aligned}$$

Dado que $1 < \eta < p < q < p^*_{N,m}$, então podemos escolher $\varepsilon_n < 0$ e $\rho_n \in (0, R_0)$ de modo que $\widetilde{I}(\rho_n w) \leq \varepsilon_n < 0$. Definindo o conjunto

$$S_{\rho_n} := \left\{ v \in E; \ \|v\|_{m,a,p} = \rho_n \right\}$$

temos que $S_{\rho_n} \cap E_n \subset \widetilde{I}^{\varepsilon_n}$ e pelos ítens 4 e 8 do Lema 2.7 resulta que

$$\gamma(\widetilde{I}^{\varepsilon_n}) \geq \gamma(S_{\rho_n} \cap E_n) = n.$$

■

A Proposição 2.9 nos permite demonstrar a existência de pontos críticos para o funcional truncado I. Para isso, definimos

$$\Gamma_n := \{ A \in \Sigma \mid \gamma(A) \geq n \},$$

e para cada $n \in \mathbb{N}$

$$c_n := \inf_{A \in \Gamma_n} \sup_{v \in A} \widetilde{I}(v). \tag{2.32}$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$-\infty < c_n \leq \varepsilon_n < 0, \tag{2.33}$$

pois o funcional truncado $\widetilde{I}$ é limitado inferiormente e $\widetilde{I}^{\varepsilon_n} \in \Gamma_n$ pela Proposição 2.9.

Proposição 2.10. *Todo número c_n definido pela relação (2.32) é valor crítico do funcional truncado $\widetilde{I}$. Além disso,*

$$\lim_{n \to \infty} c_n = 0.$$

Demonstração. Observe que $\Gamma_{n+1} \subset \Gamma_n$ logo, $c_n \leq c_{n+1}$. Além disso, pela relação (2.33), temos $c_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \overline{c} \leq 0.$$

E como para todo $n \in \mathbb{N}$ a condição de Palais-Smale $(PS)_{c_n}$ é satisfeita para o funcional par $\widetilde{I}$, então todos os níveis c_n representam valores críticos para o funcional truncado $\widetilde{I}$ ([46, Teorema 9.1]). Suponha por absurdo que $\overline{c} < 0$. Então, pela condição $(PS)_{\overline{c}}$ temos que

$$K_{\overline{c}} := \left\{ v \in E \mid \ \widetilde{I}(v) = \overline{c} \text{ e } \widetilde{I}'(v) = 0 \right\}$$

é um conjunto compacto. Além disso, $K_{\overline{c}} \in \Sigma$. Logo, pelo item (7) do Lema 2.7 temos que $\gamma(K_{\overline{c}}) = n_0 < \infty$ e que existe um número real $\delta > 0$ tal que

$$\gamma(K_{\overline{c}}) = \gamma(N_\delta(K_{\overline{c}})) = n_0$$

onde

$$N_\delta(K_{\overline{c}}) := \left\{ v \in E \mid \ \|v - K_{\overline{c}}\|_{m,a,p} \leq \delta \right\}.$$

Aplicando o Lema de Deformação [56] existem $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{c} + \varepsilon < 0$ e um homeomorfismo $\zeta : E \to E$ tal que

$$\zeta(\widetilde{I}^{\overline{c}+\varepsilon} \setminus N_\delta(K_{\overline{c}})) \subset \widetilde{I}^{\overline{c}-\varepsilon}. \tag{2.34}$$

Sendo $\{c_n\} \subset I\!R$ uma sequência não decrescente que converge para $\overline{c}$, então existe um número $n \in \mathbb{N}$ tal que $c_n > \overline{c} - \varepsilon$ e $c_{n_0+n} \leq \overline{c}$. Assim,

$$\inf_{A \in \Gamma_{n_0+n}} \sup_{v \in A} \widetilde{I}(v) := c_{n_0+n} < \overline{c} + \varepsilon$$

e, portanto, existe um subconjunto $A \subset \Gamma_{n_0+n}$ tal que $\sup\limits_{v \in A} \widetilde{I}(v) < \overline{c} + \varepsilon$, isto é,

$$A \subset \widetilde{I}^{\overline{c}+\varepsilon}. \tag{2.35}$$

Aplicando o item 6 do Lema 2.7 obtemos

$$\begin{aligned} \gamma(\overline{A \backslash N_\delta(K_{\overline{c}})}) &\geq \gamma(A) - \gamma(N_\delta(K_{\overline{c}})) \\ &\geq (n + n_0) - n_0 = n. \end{aligned}$$

Como $\widetilde{I}$ é um funcional par então novamente pelo Lema de Deformação temos que ζ é um homeomorfismo ímpar. E como o gênero é invariante por homeomorfismos ímpares (ver [47, Teorema 2.5.1]), então

$$\gamma(\zeta(\overline{A \backslash N_\delta(K_{\overline{c}})})) = \gamma(\overline{A \backslash N_\delta(K_{\overline{c}})}) \geq n$$

implicando em $\zeta(\overline{A \backslash N_\delta(K_{\overline{c}})}) \in \Gamma_n$. Consequentemente,

$$\sup_{v \in \zeta(\overline{A \backslash N_\delta(K_{\overline{c}})})} \widetilde{I}(v) \geq c_n > \overline{c} - \varepsilon. \tag{2.36}$$

Por outro lado, usando as relações (2.34) e (2.35) obtemos que $A\backslash N_\delta(K_{\overline{c}}) \subset \widetilde{I}^{\overline{c}+\varepsilon}\backslash N_\delta(K_{\overline{c}})$ e que

$$\zeta(A\backslash N_\delta(K_{\overline{c}})) \subset \zeta(\widetilde{I}^{\overline{c}+\varepsilon}\backslash N_\delta(K_{\overline{c}})) \subset \widetilde{I}^{\overline{c}-\varepsilon}.$$

Assim,

$$\sup_{v\in\zeta(\overline{A\backslash N_\delta(K_{\overline{c}})})} \widetilde{I}(v) \leq \overline{c} - \varepsilon,$$

o que contradiz a relação (2.36). Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. ∎

Demonstração do Teorema 2.1 A demonstração do Teorema 2.1 segue diretamente da combinação do Lema 2.8 e das Proposições 2.9 e 2.10. De fato, como $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ é uma sequência não decrescente de valores críticos negativos para o funcional $\widetilde{I}$, podemos passar a uma subsequência estritamente crescente, pois $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Assim, obtemos pontos críticos não nulos $v_n \in E = W^{1,p}_{0,G}(S)$ tais que $I(v_n) = c_n$ e, portanto, as funções v_n são distintas. ∎

2.3.2 Multiplicidade de soluções: caso $p < \eta < p^*_{N,m}$

Nessa seção vamos provar o Teorema 2.2, isto é, vamos mostrar que existem infinitas soluções invariantes para o problema (2.2) no caso em que $p < \eta < p^*_{N,m}$. Já mostramos no Lema 2.5 que o funcional I associado ao problema (2.3) definido em (2.4) satisfaz a condição $(PS)_c$ em $E = W^{1,p}_{0,G}(S)$. Para demonstrarmos a existência de infinitas soluções para o problema (2.2) usaremos o seguinte resultado (ver [56, Teorema 9.12]).

Lema 2.11. *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita tal que $E = Y \oplus Z$, onde Y tem dimensão finita. Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional par, satisfazendo a condição de Palais-Smale $(PS)_c$ tal que $I(0) = 0$. Suponhamos também*

1. *Existem constantes $\rho > 0$ e $\delta > 0$ tais que*

$$\inf_{E\cap\partial B_\rho} I = \inf_{S_\rho(Z)} I \geq \delta.$$

2. *Para cada subespaço $\widetilde{Y} \subset E$ de dimensão finita existe $R = R(\widetilde{Y})$ tal que $I(v) \leq 0$ para todo $v \in \widetilde{Y}\backslash B_R(\widetilde{Y})$, onde $B_R(\widetilde{Y}) = \Big\{v \in \widetilde{Y} |\ \|v\|_{m,a,p} \leq R\Big\}$.*

Então o funcional I possui uma sequência ilimitada de valores críticos.

Demonstração do Teorema 2.2 Observe que o funcional I associado ao problema (2.3) e definido em (2.4) é de classe C^1, satisfaz a condição $(PS)_c$, é par e além disso, temos que $I(0) = 0$. Portanto, para provar o Teorema 2.2 é suficiente mostrar que o funcional I satisfaz as afirmativas 1. e 2. do Lema 2.11.

Seja $Z \subset E := W^{1,p}_{0,G}(S)$ um subespaço tal que $E = Y_m \oplus Z$. Pela equivalência das normas $\|\cdot\|_\mu$ e $\|\cdot\|_{m,a,p}$ e como $h \in L^\infty$ e $W^{1,p}_{0,G}(S) \hookrightarrow L^q(S)$ $(q \in (p, p^*_{N,m}))$, então para todo $v \in Z\backslash\{0\}$ temos

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{p}\|v\|^p_\mu - \frac{1}{q}\int_S r^{m-bq}h(\overline{x})|v|^q\,d\overline{x} - \int_S r^m F(\overline{x}, v)d\overline{x} \\ &\geq \frac{c_1}{p}\|v\|^p_{m,a,p} - \frac{c_2}{qS^q_q}\|v\|^q_{m,a,p} - \int_S r^m F(\overline{x}, v)d\overline{x}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Segue das propriedades (f_1) e (f_4) que

$$\int_S r^m F(\overline{x}, v)d\overline{x} = o(\|v\|^p_{m,a,p}), \quad \text{quando } \|v\|_{m,a,p} \to 0 \text{ em } E. \tag{2.38}$$

Portanto, desde que $p < q$ e combinando as relações (2.37) e (2.38) obtemos constantes positivas ρ e δ que satisfazem a afirmativa 1 do Lema 2.11.

Finalmente, iremos provar a afirmativa 2 do Lema 2.11. Para isso, considere $\widetilde{Y} \subset E$ um subespaço de dimensão finita. Pelas propriedades (f_1) e (f_6), é possível obtermos constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1|v|^\eta - c_2|v|^p \leq F(\overline{x}, v). \tag{2.39}$$

Seja $v \in \widetilde{Y}$ tal que $\|v\|_{m,a,p} = 1$. Como a função h é não negativa, então para todo $t > 0$ temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} I(tv) &= \frac{1}{p}\|tv\|^p_\mu - \frac{1}{q}\int_S r^{m-bq}h(\overline{x})|tv|^q\,d\overline{x} - \int_S r^m F(\overline{x}, tv)d\overline{x} \\ &\leq \frac{1}{p}\|tv\|^p_\mu - \int_S r^m F(\overline{x}, tv)d\overline{x}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Aplicando a relação (2.39) na desigualdade acima, obtemos

$$I(tv) \leq \frac{1}{p}t^p\|v\|^p_\mu + c_2 t^p\int_S r^m|v|^p\,d\overline{x} - c_1 t^\eta\int_S r^m|v|^\eta\,d\overline{x}. \tag{2.41}$$

Pela equivalência das normas sobre $\widetilde{Y}$ e pela hipótese $p < \eta$, temos que

$$I(tv) \to -\infty, \text{ quando } t \to +\infty.$$

Logo, podemos escolher $R(\widetilde{Y}) > 0$ suficientemente grande, de modo que a afirmativa 2 do Lema 2.11 seja válida. Portanto, satisfeitas as afirmativas 1 e 2, podemos concluir pelo Lema 2.11, que existe uma sequência ilimitada de valores críticos para o funcional I, finalizando assim a demonstração do Teorema 2.2. ∎

Capítulo 3

Quebra de simetria e existência de solução não radial para uma equação não homogênea do tipo Hénon

3.1 Preliminares

Neste capítulo, vamos estudar uma variante do seguinte problema

$$\textbf{(P)} \quad \begin{cases} -\Delta u = |x|^{\alpha} f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é a bola unitária de $\mathbb{R}^n$ e $n \geq 4$.

Em 1973, no caso em que $f(t)$ é uma potência pura do tipo $f(t) = |t|^{p-2}\, t$, o problema (P) foi introduzido por Hénon [37] como um modelo para estudar esfericamente conjuntos simétricos de estrelas. A equação deste problema ficou conhecida como a equação de Hénon.

Em 1982, Ni em [54], assumindo hipóteses adequadas sobre f, provou que o problema (P) tem pelo menos uma solução radial. Posteriormente, Smests, Su e Willem [62] mostraram que para α suficientemente grande, ocorre uma quebra de simetria e uma nova solução não radial aparece. Muitos trabalhos têm sido feitos para estudar a multiplicidade de soluções não radiais [7, 38, 60].

Em [48, 50], encontramos resultados sobre o operador p-Laplaciano e, em [67], para o estudo do sistema de tipo Hénon.

Em 2009, Carrião, de Figueiredo e Miyagaki em [17] estudaram o seguinte problema elíptico quase-linear do tipo Henón

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|x|^{ap}}\right) = |x|^{\beta}|u|^{q-2}u & \text{em } B \\ u > 0 & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases}$$

onde $B := \{x \in I\!\!R^N \ ; \ |x| < 1\}$ é a bola unitária centrada na origem, $-\infty < a < \dfrac{N-p}{p}$, $N \geq 3$, $\beta > 0$ e $2 \leq p < q < \dfrac{Np + p\beta}{N - p(a+1)}$.
Eles provaram resultados de existência e de multiplicidade de soluções não radiais para o problema acima, quando $q \in (p, q^*)$, de modo que

$$q^*(N) = \begin{cases} \dfrac{(N+2)p}{N-2p+2}, & \text{se } N \text{ for par;} \\ \dfrac{([N/2]+2)\,p}{[N/2]-p+2}, & \text{se } N \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Mais recentemente, Badiale e Cappa [6] estudaram a seguinte equação do tipo Hénon

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^{\alpha} f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é a bola unitária de $I\!\!R^n$ e $n \geq 4$. Inspirados em algumas ideias e resultados usados em [7], os autores demonstraram um resultado de existência de uma solução não radial para α suficientemente grande, no caso em que a não-linearidade f não é uma potência pura. Além disso, após estimarem o nível crítico radial, eles também estimaram outros níveis críticos mostrando que para α suficientemente grande estes níveis são distintos.

Motivado pelo recente resultado em [6] e pelo fato de que a maioria dos artigos que conhecemos trata sobre soluções não radiais da equação de Hénon no caso em que f é uma potência, estudamos a seguinte equação do tipo Hénon no caso em que a não-linearidade não é uma potência pura

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{|x|^{ap}}\right) = |x|^{\beta} f(u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega := \{x \in I\!\!R^N \ ; \ |x| < 1\}$ é a bola unitária centrada na origem, $0 \leq a < \dfrac{N-p}{p}$, $N \geq 3$, $\beta > 0$ e $2 \leq p < \dfrac{Np + p\beta}{N - p(a+1)}$.
Observe que ao tomarmos $a = 0$ e $p = 2$, o problema (3.1) se reduz ao problema estudado por Badiale e Cappa em [6]. Portanto, neste capítulo generalizamos o operador Laplaciano estudado

por Badiale e Cappa. Para provar nossos resultados, nos inspiramos em alguns argumentos e resultados usados em [6, 17, 64].

Para escrever nossos resultados, primeiro definimos $2 \leq p \leq N-l \leq l$, $N \geq \max\{2p, p(a+1)\}$ e

$$p^*(N) = \begin{cases} \dfrac{(N+2)p}{N-2p+2}, & \text{se } N \text{ for par;} \\ \dfrac{([N/2]+2)\,p}{[N/2]-p+2}, & \text{se } N \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Iremos mostrar que o problema (3.1) admite pelo menos uma solução radial e pelo menos uma solução não radial sob a seguintes hipóteses sobre a não-linearidade f:

(f_1) f é uma função localmente Hölder contínua, $f(z) \geq 0$ para todo $z > 0$, $f(z) = 0$ para todo $z < 0$, $f(z) = o(z^{p-1})$ para $z \to 0$ e, além disso, $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^{p-1}} = \infty$;

(f_2) $|f(z)| \leq c(1+|z|)^{q-1}$ $\forall z$, onde $p < q < \min\left\{p^*(N), \dfrac{p^2 N}{(N-p)(p-1)}\right\}$;

(f_3) existe $\tau > p$, tal que, $tf(t) \geq \tau F(t)$ para todo $t \in I\!R$, onde $F(t) := \displaystyle\int_0^t f(s)ds$;

(f_4) existem $\mu_1, \mu_2 > p$, tais que, $\forall t \in [0,1]$ e $v \geq 0$ temos $f(tv) \geq t^{\mu_1 - 1} f(v)$ e $\forall t \geq 1$ e $v \geq 0$ temos $f(tv) \geq t^{\mu_2-1} g(v)$, onde $g(\cdot)$ é uma função contínua não negativa sobre $I\!R$, tal que $g(0) = 0$. Além disso, temos a seguinte desigualdade

$$p^2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{(\mu_1 - p)(\mu_2 - p)} < N - l. \tag{3.2}$$

Nossos principais resultados são os seguintes teoremas.

Teorema 3.1. *Sob as hipóteses* $(f_1)-(f_4)$, *para* $\dfrac{Np + p\beta}{N - p(a+1)} \geq \max\left\{p^*(N), \dfrac{p^2 N}{(N-p)(p-1)}\right\}$ *existe pelo menos uma solução radial não negativa para o problema (3.1).*

Teorema 3.2. *Sob as hipóteses* $(f_1) - (f_4)$, *o problema (3.1) possui pelo menos uma solução não radial não negativa para* β *suficientemente grande. Além disso, se* $m_{a,\beta,r}$ *e* $m^l_{a,\beta}$ *são, respectivamente, os níveis críticos radial e não radial do funcional associado ao problema (3.1) então*

$$m^l_{a,\beta} < m_{a,\beta,r}, \textit{ quando } \beta \to +\infty.$$

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 3.2, introduzimos um problema auxiliar, de modo que soluções radiais desse problema também são soluções do problema (3.1); e, na seção 3.3, estimamos $m_{a,\beta,r}$ e $m^l_{a,\beta}$ os níveis críticos "radial" e "não radial", respectivamente, e mostramos que eles são distintos.

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Uma função positiva radialmente simétrica $u(x) = u(|x|)$ é uma solução para o problema (3.1) se, e somente se, $u(r)$ com $r := |x|$ for solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -\left(r^{N-1-ap}\,|u'(r)|^{p-2}\,u'(r)\right)' = r^{\beta+N-1}f(u(r)) & \text{em } (0,1) \\ u(r) > 0 & \text{em } (0,1) \\ u(1) = u'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Considere $X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$ o espaço de Banach das funções radiais absolutamente contínuas $u : [0,1] \to I\!R$, tais que, $u(1) = u'(0) = 0$ e cuja norma $\|\cdot\|_{X^{1,p}_{N-1-ap}}$ é definida por

$$\|u(r)\|_{X^{1,p}_{N-1-ap}} := \left(\int_0^1 r^{N-1-ap}\left|u'(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Seja $L^q_{\beta+N-1}$ o espaço de Banach das funções Lebesgue mensuráveis $u : [0,1] \to I\!R$ cuja norma $|\cdot|_{L^q_{\beta+N-1}}$ é dada por

$$|u(r)|_{L^q_{\beta+N-1}} := \left(\int_0^1 r^{\beta+N-1}\,|u(r)|^q\,dr\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Defina $I : X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1) \to I\!R$ o funcional associado ao problema (3.3), sendo

$$I(u) := \omega_N\left(\frac{1}{p}\int_0^1 r^{N-1-ap}\left|u'(r)\right|^p dr - \int_0^1 r^{\beta+N-1}F(u(r))dr\right),$$

cuja derivada é dada por

$$I'(u)(v) = \omega_N\left(\int_0^1 r^{N-1-ap}\left|u'(r)\right|^{p-2}u'(r)v'(r)dr - \int_0^1 r^{\beta+N-1}f(u(r))v(r)dr\right)$$

para toda $v \in X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$, onde ω_N é a medida da superfície da bola unitária. Portanto, encontrar pontos críticos para o funcional I significa encontrar soluções fracas para o problema (3.3).

Em ([17, Proposição 1.1]), temos um importante resultado de compacidade, que prova que o espaço $X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$ está imerso compactamente em $L^q_{\beta+N-1}$, se $q < \dfrac{Np+p\beta}{N-p(a+1)}$. Os próximos dois lemas nos garantem que o funcional I satisfaz as condições da geometria e a condição de compacidade do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [56].

Lema 3.3. *O funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale em $X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$ no nível $c \in I\!R$.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_c$ em $X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$, isto é, $\{u_n\}$ satisfaz os seguintes itens

i) $I(u_n) \to c$;

ii) $I'(u_n) \to 0$ em $\left(X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)\right)'$.

Dividimos a demonstração deste lema em duas etapas. Primeiro, mostramos que a sequência $\{u_n\}$ é limitada e, em seguida, provamos que ela é de Cauchy em $X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$.

Etapa 1. Como $\{u_n\}$ é uma sequência $(PS)_c$, então pela propriedade (f_3) temos que

$$\begin{aligned}
c+1 &\geq I(u_n) = I(u_n) - \frac{1}{\tau}I'(u_n)(u_n) + \frac{1}{\tau}I'(u_n)(u_n) \\
&= \omega_N\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\tau}\right)\|u_n\|^p_{N-1-p} - \omega_N\int_0^1 r^{\beta+N-1}F(u_n)dr \\
&\quad +\frac{\omega_N}{\tau}\int_0^1 r^{\beta+N-1}f(u_n)u_n dr + \frac{1}{\tau}I'(u_n)(u_n) \\
&\geq \omega_N\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\tau}\right)\|u_n\|^p_{N-1-p} + \frac{1}{\tau}I'(u_n)(u_n),
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Desde que $\tau > p$, a desigualdade acima implica que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$.

Etapa 2. Segue das propriedades (f_1) e (f_2) que, dado $\varepsilon > 0$, existe $c_\varepsilon > 0$, tal que

$$f(u(r)) \leq \varepsilon\,|u(r)|^{p-1} + c_\varepsilon\,|u(r)|^{q-1}. \tag{3.4}$$

Além disso, em [49] é provada a seguinte desigualdade

$$|\xi-\eta|^p \leq \begin{cases} \left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right)(\xi-\eta), & \text{se } p \geq 2 \\ \left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right)(\xi-\eta)^{\frac{p}{2}}\left(|\xi|^p+|\eta|^p\right)^{\frac{2-p}{2}}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases} \tag{3.5}$$

para todo $\xi, \eta \in I\!R^N$. Portanto, usando a relação (3.5) para o caso $p \geq 2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\omega_N\|u_i-u_j\|^p_{X^{1,p}_{N-1-ap}} &= \omega_N\int_0^1 r^{N-1-ap}\left|u_i'-u_j'\right|^p dr \\
&\leq \omega_N\int_0^1 r^{N-1-ap}\left(\left|u_i'\right|^{p-2}u_i' - \left|u_j'\right|^{p-2}u_j'\right)\left(u_i'-u_j'\right)dr \\
&\leq |I'(u_i)(u_i-u_j)| + |I'(u_j)(u_i-u_j)| \\
&\quad +\omega_N\left|\int_0^1 r^{\beta+N-1}\left(f(u_i)-f(u_j)\right)(u_i-u_j)dr\right| \\
&:= I_1+I_2+I_3.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Observe que $I_1 = o\left(\|u_n\|_{X_{N-1-ap}}\right)$ e $I_2 = o\left(\|u_n\|_{X_{N-1-ap}}\right)$, pois a sequência $\{u_n\}$ é $(PS)_c$. Da imersão compacta $X^{1,p}_{N-1-ap} \hookrightarrow L^q_{\beta+N-1}$ $\left(q < \dfrac{Np+p\beta}{N-p(a+1)}\right)$ e da relação (3.4) segue que $I_3 = o\left(\|u_n\|_{X_{N-1-ap}}\right)$. Portanto, $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach $X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$ e, consequentemente, o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale. ■

Lema 3.4. *Seja I o funcional associado ao problema (3.3) definido anteriormente, então*

i) *existem constantes positivas ρ e α tais que $I\Big|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;*

ii) *existe $e \in X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1) \setminus \overline{B_\rho}$ tal que $I(e) < 0$.*

Demonstração. i) Seja $\varepsilon > 0$. Então, pela relação (3.4), pela propriedade (f_3) e pela imersão $X^{1,p}_{N-1-ap} \hookrightarrow L^q_{\beta+N-1}$ $(q < p^*(N))$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_N}I(u) &= \frac{1}{p}\int_0^1 r^{N-1-ap}\left|u'\right|^p dr - \int_0^1 r^{\beta+N-1}F(u)dr \\ &\geq \frac{1}{p}\int_0^1 r^{N-1-ap}\left|u'\right|^p dr - \frac{1}{\tau}\int_0^1 r^{\beta+N-1}f(u)udr \\ &\geq \frac{1}{p}\int_0^1 r^{N-1-ap}\left|u'\right|^p dr - \frac{\varepsilon}{\tau}\int_0^1 r^{\beta+N-1}\left|u\right|^p dr - \frac{c_\varepsilon}{\tau}\int_0^1 r^{\beta+N-1}\left|u\right|^q dr \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \varepsilon\frac{c_1}{\tau}\right)\|u\|^p_{X_{N-1-ap}} - \frac{c_\varepsilon c_2}{\tau}\|u\|^q_{X_{N-1-ap}}.\end{aligned}$$

Portanto, fixando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno na desigualdade acima, podemos encontrar $\rho > 0$, com $\|u\|_{X_{N-1-ap}} = \rho$, e $\alpha > 0$, tais que a conclusão do lema se verifica para $p < q$.

ii) Pelas propriedades (f_2) e (f_3) é possível encontrarmos constantes $c_1, c_2 > 0$, tais que

$$c_1\left|u\right|^q - c_2\left|u\right|^p \leq F(u).$$

Seja $u \in X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$, tal que $\|u\|_{N-1-ap} = 1$. Então, para todo $t > 1$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_N}I(tu) &= \frac{1}{p}t^p - \int_0^1 r^{\beta+N-1}F(tu)dr \\ &\leq \frac{1}{p}t^p + c_2t^p\int_0^1 r^{\beta+N-1}\left|u\right|^p dr - c_1t^q\int_0^1 r^{\beta+N-1}\left|u\right|^q dr.\end{aligned}$$

Como $p < q$, então pela desigualdade acima, podemos concluir que $I(tu) \to -\infty$ para $t \to +\infty$. Portanto, existe $e \in X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1) \setminus \overline{B_\rho}$, tal que $I(e) < 0$. ∎

Demonstração do Teorema 3.1. Pelos Lemas 3.3 e 3.4, todas as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha [56] são satisfeitas. Portanto, podemos deduzir a existência de uma função radial $u^* \in X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$, que é uma solução fraca para o problema (3.3), tal que $I(u^*) \geq \alpha > 0$.

∎

3.3 Demonstração do Teorema 3.2

3.3.1 "Nível crítico radial" e sua estimativa

Para iniciarmos a prova do Teorema 3.2, definimos o funcional $I_{a,\beta}$ sobre o espaço de Banach $X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$, associado ao problema (3.1), dado por

$$I_{a,\beta}(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |x|^{-ap}\left|\nabla u\right|^p dx - \int_\Omega |x|^\beta F(u)dx$$

e introduzimos a seguinte variedade de Nehari

$$N_{a,\beta,r} := \left\{ u \in X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1) \setminus \{0\} : \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u|^p \, dx = \int_\Omega |x|^\beta f(u) u dx \right\}.$$

Se definirmos

$$m_{a,\beta,r} := \inf_{u \in N_{a,\beta,r}} I_{a,\beta}(u)$$

para ser o "nível crítico radial" do funcional $I_{a,\beta}$, então $m_{a,\beta,r}$ é atingido pelo Teorema 3.1. Os próximos resultados irão nos ajudar a obter uma cota inferior para $m_{a,\beta,r}$.

Defina $\alpha \equiv \frac{1}{p}(N-p)$ e seja $u \in X^{1,p}_{N-1-ap}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla u|^p \, dx < +\infty.$$

Observe que se $b < \alpha$ então $|x|^{-b} < |x|^{-\alpha}$, pois $|x| < 1$ em Ω. Portanto,

$$\int_\Omega |x|^{-b} |\nabla u|^p \, dx \leq \int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla u|^p \, dx < +\infty.$$

Estendendo a função u fazendo $u = 0$ sobre $I\!R^N \setminus \Omega$, temos que $u \in X^{1,p}_{N-1-ap}(I\!R^N)$ e

$$\int_{I\!R^N} |x|^{-b} |\nabla u|^p \, dx \leq \int_{I\!R^N} |x|^{-\alpha} |\nabla u|^p \, dx < +\infty.$$

Agora, precisaremos do seguinte resultado provado por Su e Wang ([64, Lema 2.1]).

Lema 3.5 (Versão ponderada do lema radial)**.** *Seja $\xi \in I\!R$, tal que $1 < p < N + \xi$. Seja $X = X^{1,p}_{N-1-ap}\left(I\!R^N, |x|^\xi \, dx\right)$ o complemento de $C^\infty_{0,r}(I\!R)$ com a seguinte norma*

$$\|u\|_{r,\xi} := \left(\int_{I\!R^N} |x|^\xi |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Então, existe uma constante $c > 0$, tal que para toda $u \in X$ temos

$$|u(x)| \leq c \, |x|^{-\frac{N+\xi-p}{p}} \|u\|_{r,\xi}.$$

Definidos α e b anteriormente, vamos aplicar o Lema 3.5 para $\xi = -b$ e $u \in X^{1,p}_{N-1-ap}(\Omega)$, fazendo $u = 0$ em $I\!R^N \setminus \Omega$. Portanto, existe uma constante $c = c_b > 0$ tal que para quase todo $x \in I\!R^N$ temos

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq c \, |x|^{-\frac{N-b-p}{p}} \left(\int_{I\!R^N} |x|^{-b} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= c \, |x|^{-\frac{N-b-p}{p}} \left(\int_\Omega |x|^{-b} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c \, |x|^{-\frac{N-b-p}{p}} \left(\int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Agora, vamos provar o seguinte lema.

Lema 3.6. *Seja $u \in X^{1,p}_{N-1-ap}(\Omega)$, tal que $\int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla u|^p \, dx < +\infty$ e $p < q < \dfrac{p^2 N}{(N-p)(p-1)}$. Se $b = N - p - \dfrac{pN}{q}$ então existe uma constante $c = c_b > 0$, tal que*

$$\left(\int_\Omega |u|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}} \leq c_b \int_\Omega |x|^{-b} |\nabla u|^p \, dx.$$

Em particular, quando $b < \alpha$ temos

$$\left(\int_\Omega |u|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Primeiro, observe que $b < \alpha = \dfrac{N-p}{p}$, pois $q < \dfrac{p^2 N}{(N-p)(p-1)}$. Além disso, como $b = N - p - \dfrac{Np}{q}$ então $q = \dfrac{Np}{N-b-p}$.
Dado que $u(1) = 0$, por integração por partes e pela desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^q \, dx &= \omega_N \int_0^1 r^{N-1} |u(r)|^q \, dr \\
&= \omega_N \frac{1}{N} r^N |u(r)|^q \Big|_{r=0}^{r=1} - \frac{q\omega_N}{N} \int_0^1 r^N |u(r)|^{q-2} u(r) u'(r) dr \\
&\leq \frac{q\omega_N}{N} \int_0^1 r^N |u(r)|^{q-1} \left|u'(r)\right| dr \\
&= \frac{q\omega_N}{N} \int_0^1 r^{N - \frac{N-b-1}{p}} |u(r)|^{q-1} \left|u'(r)\right| r^{\frac{N-b-1}{p}} dr \\
&\leq \frac{q\omega_N}{N} \left[\int_0^1 \left(\left|u'(r)\right| r^{\frac{N-b-1}{p}}\right)^p dr\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left(r^{N - \frac{N-b-1}{p}} |u(r)|^{q-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} dr\right]^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \frac{p\omega_N}{N-b-p} \left[\int_0^1 r^{-b} \left|u'(r)\right|^p r^{N-1} dr\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 r^{N + \frac{b+1}{p-1}} |u(r)|^{p\frac{q-1}{p-1}} dr\right]^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 3.5 temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^{N + \frac{b+1}{p-1}} |u(r)|^{p\frac{q-1}{p-1}} dr &= \int_0^1 r^{N-1} |u(r)|^q r^{\frac{b+p}{p-1}} |u(r)|^{\frac{q-p}{p-1}} dr \\
&\leq c_1^{\frac{q-p}{p-1}} \int_0^1 r^{N-1} |u(r)|^q r^{\frac{b+p}{p-1}} r^{-\frac{N-b-p}{p}\frac{q-p}{p-1}} \left(\int_0^1 r^{N-1-b} \left|u'(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}\frac{q-p}{p-1}} dr \\
&= c_2 \left(\int_\Omega |x|^{-b} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}\frac{q-p}{p-1}} \int_0^1 r^{N-1} |u(r)|^q \, dr,
\end{aligned}$$

pois $\dfrac{b+p}{p-1} - \dfrac{N-b-p}{p}\dfrac{q-p}{p-1} = 0$.
Portanto, pelas duas desigualdades acima deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^q \, dx &\leq c_3 \left(\int_\Omega |x|^{-b} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \left[\left(\int_\Omega |x|^{-b} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}\frac{q-p}{p-1}} \int_\Omega |u|^q \, dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \\
&= c_3 \left(\int_\Omega |x|^{-b} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |x|^{-b} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{q-p}{p^2}} \left(\int_\Omega |u|^q \, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= c_3 \left(\int_\Omega |x|^{-b} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{q}{p^2}} \left(\int_\Omega |u|^q \, dx\right)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{1-\frac{p-1}{p}}\\ &\leq c_3\left(\int_\Omega |x|^{-b}\,|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{q}{p^2}}.\end{aligned}$$

Segue da desigualdade acima que

$$\left(\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}} \leq c_4\int_\Omega |x|^{-b}\,|\nabla u|^p\,dx.$$

∎

Agora, vamos introduzir alguns objetos que precisaremos para trabalhar em uma variedade de Nehari apropriada. Para isso, suponhamos $\beta > N$ e tomando $\alpha = \dfrac{N-p}{p}$ como acima, definimos

$$H := \left\{v \in X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1) : \int_\Omega |x|^{-\alpha}\,|\nabla v|^p\,dx < +\infty\right\},$$

$$J : H \to I\!R, J(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |x|^{-\alpha}\,|\nabla v|^p\,dx - \int_\Omega F(v)dx,$$

$$M := \left\{v \in X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)\setminus\{0\} : \int_\Omega |x|^{-\alpha}\,|\nabla v|^p\,dx = \int_\Omega f(v)vdx\right\}$$

e

$$m' := \inf\{J(v) : v \in M\}.$$

Lema 3.7. *$M \neq \emptyset$.*

Demonstração. Seja $v \in C_0^\infty(\Omega\setminus\{0\})$ diferente de zero, tal que $\int_\Omega |x|^{-\alpha}\,|\nabla v|^p\,dx < +\infty$. Definindo a função contínua $\psi : (0,+\infty) \to I\!R$, dada por

$$\psi(t) := t^p\int_\Omega |x|^{-\alpha}\,|\nabla v|^p\,dx - \int_\Omega f(tv)tvdx,$$

iremos estudar seu comportamento quando $t \to 0^+$ e $t \to +\infty$. Novamente, pelas propriedades (f_1) e (f_2), dado $\varepsilon > 0$, encontramos uma constante $c_\varepsilon > 0$, tal que

$$\left|\int_\Omega f(tv)tvdx\right| \leq \varepsilon t^p\int_\Omega |v|^p\,dx + c_\varepsilon t^q\int_\Omega |v|^q\,dx. \tag{3.7}$$

Sendo $q > p$, então pela relação (3.7), podemos concluir que

$$\int_\Omega f(tv)tvdx = o(t^p),\ t \to 0^+.$$

Deste modo, temos que

$$\psi(t) = t^p\int_\Omega |x|^{-\alpha}\,|\nabla v|^p\,dx + o(t^p) \text{ para } t \to 0^+$$

e, portanto, $\psi(t) > 0$ para $t \to 0^+$. Por outro lado, pela propriedade (f_3) existe uma constante $c > 0$, tal que $f(t)t \geq ct^\tau$ para todo $t \geq 1$. Logo,

$$\psi(t) \leq t^p \int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p \, dx - ct^\tau \int_\Omega |v|^\tau \, dx. \tag{3.8}$$

Portanto, pela relação (3.8), concluímos que $\psi(t) \to -\infty$ para $t \to +\infty$, pois $\tau > p$. Como ψ é uma função contínua, então existe $t_0 \in (0, +\infty)$, tal que $\psi(t_0) = 0$, isto é, $t_0 v \in M$. ■

O próximo resultado nos garante que m' é positivo.

Lema 3.8. $m' > 0$.

Demonstração. Primeiro, iremos mostrar que $m' \geq 0$. De fato, pela propriedade (f_3) temos que, se $v \in M$, então

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p \, dx - \int_\Omega F(v) dx \\ &\geq \frac{1}{p}\int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p \, dx - \frac{1}{\tau}\int_\Omega f(v) v dx \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\tau}\right) \int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p \, dx \geq 0. \end{aligned}$$

Agora, vamos provar que $m' > 0$. Tomando $v \in M$ e observando que $1 < p < q < \dfrac{p^2 N}{(N-p)(p-1)}$, então pelo Lema 3.6, temos a seguinte desigualdade

$$\left(\int_\Omega |v|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ao contrário do operador de Laplace, o espectro do operador p-Laplaciano não foi provado ser discreto. Em [51], o primeiro e o segundo autovalores do operador p-Laplaciano são descritos. Seja λ_1 o primeiro autovalor do operador $-\Delta_p$ e usando as propriedades (f_1) e (f_2), podemos escolher uma constante $c_1 > 0$, tal que

$$|f(t)t| \leq \frac{1}{p}\lambda_1 |t|^p + c_1 |t|^q, \forall t \in I\!R.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p \, dx &= \int_\Omega f(v) v dx \leq \int_\Omega |f(v) v| \, dx \\ &\leq \frac{\lambda_1}{p} \int_\Omega |v|^p \, dx + c_1 \int_\Omega |v|^q \, dx \\ &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx + c_1 c^q \left(\int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p\right)^{\frac{q}{p}} dx \\ &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p \, dx + c_1 c^q \left(\int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p\right)^{\frac{q}{p}} dx, \end{aligned}$$

então

$$\int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p \, dx \geq \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{c_1 c^q}\right]^{\frac{p}{q-p}} > 0$$

para todo $v \in M$. Como $J(v) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\tau}\right) \int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p \, dx$ para todo $v \in M$, então $m' > 0$. ■

Seja $u_\beta \in X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1)$ uma solução do problema (3.1), tal que $u_\beta \in N_{a,\beta,r}$ e

$$I_{a,\beta}(u_\beta) = m_{a,\beta,r} = \inf_{u \in N_{a,\beta,r}} I_{a,\beta}(u).$$

Como em [62], definimos $v_\beta(x) = v_\beta(\rho) = u_\beta(\rho^s)$, onde $\rho = |x|$ e $s = \dfrac{N}{\beta+N}$, tal que $s \to 0$ quando $\beta \to \infty$. Portanto, fazendo a mudança de variável $r = \rho^s$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^\beta f(u_\beta) u_\beta dx &= \omega_N \int_0^1 r^{\beta+N-1} f(u_\beta(r)) u_\beta(r) dr \\
&= s\omega_N \int_0^1 \rho^{s-1} \rho^{s(\beta+N-1)} f(v_\beta(\rho)) v_\beta(\rho) d\rho \\
&= s\omega_N \int_0^1 \rho^{N-1} f(v_\beta(\rho)) v_\beta(\rho) d\rho \\
&= s \int_\Omega f(v_\beta(x)) v_\beta(x) dx
\end{aligned} \tag{3.9}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_\beta|^p \, dx &= \omega_N \int_0^1 r^{-ap} r^{N-1} \left|u'_\beta(r)\right|^p dr \\
&= \frac{1}{s^{p-1}} \omega_N \int_0^1 \rho^{-aps} \rho^{s(N-1)} \rho^{-(s-1)(p-1)} \left|v'_\beta(\rho)\right|^p d\rho \\
&= \frac{1}{s^{p-1}} \omega_N \int_0^1 \rho^{-\gamma} \rho^{N-1} \left|v'_\beta(\rho)\right|^p d\rho \\
&= \frac{1}{s^{p-1}} \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v_\beta(x)|^p \, dx,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $\gamma := aps + (N-p)(1-s) > 0$. Observe que, repetindo os cálculos realizados em (3.9) para $F(u_\beta)$, também podemos obter a seguinte relação

$$\int_\Omega |x|^\beta F(u_\beta) dx = s \int_\Omega F(v_\beta(x)) dx. \tag{3.11}$$

Note que, fixados N e $\beta > \dfrac{N}{p-1}$, temos $s < \dfrac{p-1}{p}$, de modo que $\gamma > \dfrac{N-p}{p} = \alpha$. Portanto, para $|x| < 1$, temos que $|x|^{-\gamma} > |x|^{-\alpha}$ e, consequentemente,

$$\int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v_\beta|^p \, dx \leq \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v_\beta|^p \, dx < +\infty.$$

Agora, definimos

$$H_s := \left\{ v \in X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1) : \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v|^p \, dx < +\infty \right\},$$

$$J_s : H_s \to \mathbb{R}, J_s(v) = \frac{1}{p} \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v|^p \, dx - \int_\Omega F(v) dx,$$

$$M_s := \left\{ v \in X^{1,p}_{N-1-ap}(0,1) \setminus \{0\} : \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v|^p \, dx = \int_\Omega f(v) v dx \right\}$$

e

$$m_s := \inf \{ J_s(v) : v \in M_s \} .$$

Lema 3.9. *Se $\beta > N$ e $s = \dfrac{N}{\beta + N}$, então existe $\tau > p$, tal que $m_s \geq \dfrac{\tau - p}{\tau} m'$.*

Demonstração. Seja $v \in M_s$, então $\int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v|^p < +\infty$ e

$$\int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p \, dx \leq \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v|^p \, dx = \int_\Omega f(v) v dx. \tag{3.12}$$

Definindo

$$\psi(t) := t^p \int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p \, dx - \int_\Omega f(tv) tv dx,$$

então pela relação (3.12) temos que $\psi(1) \leq 0$ e, pelos mesmos argumentos usados na prova do Lema 3.7, temos que $\psi(t) > 0$ para $t \to 0^+$. Logo, pela continuidade da função ψ, existe $t_s \in (0, 1]$, tal que $\psi(t_s v) = 0$, isto é, $t_s v \in M$. Portanto, pela propriedade (f_3) existe $\tau > p$, tal que

$$\begin{aligned}
m' &\leq J(t_s v) = \frac{1}{p} \int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla (t_s v)|^p \, dx - \int_\Omega F(t_s v) dx \\
&\leq \frac{t_s^p}{p} \int_\Omega |x|^{-\alpha} |\nabla v|^p \, dx \leq \frac{1}{p} \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v|^p \, dx \\
&= \frac{\tau}{\tau - p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\tau} \right) \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v|^p \, dx \\
&\leq \frac{\tau}{\tau - p} \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\tau} \right) \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v|^p \, dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{\tau} f(v) v - F(v) \right) dx \right] \\
&= \frac{\tau}{\tau - p} \left[\frac{1}{p} \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v|^p \, dx - \int_\Omega F(v) dx \right] \\
&= \frac{\tau}{\tau - p} J_s(v),
\end{aligned}$$

isto é, $\dfrac{\tau - p}{\tau} m' \leq J_s(v)$ para todo $v \in M_s$. Portanto, temos que $m_s \geq \dfrac{\tau - p}{\tau} m'$. ■

Proposição 3.10. *Existe uma constante $c > 0$, tal que*

$$m_{a,\beta,r} \geq c \beta^{\frac{\mu_1 (p-1) + p}{\mu_1 - p}}, \text{ quando } \beta \to +\infty.$$

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que existe $t_\beta > 0$, tal que $t_\beta v_\beta \in M_\beta$, isto é,

$$t_\beta^p \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v_\beta|^p \, dx = \int_\Omega f(t_\beta v_\beta) t_\beta v_\beta dx.$$

Definimos $\varphi : (0, +\infty) \to I\!R$ por

$$\varphi(t) := t^p \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v_\beta|^p \, dx - \int_\Omega f(t v_\beta) t v_\beta dx.$$

Então, pelas relações (3.9) e (3.10), temos que

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v_\beta|^p \, dx - \int_\Omega f(v_\beta) v_\beta dx \\ &= s^{p-1} \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_\beta|^p - \frac{1}{s} \int_\Omega |x|^\beta f(u_\beta) u_\beta dx \\ &= \frac{1}{s} \left[s^p \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_\beta|^p - \int_\Omega |x|^\beta f(u_\beta) u_\beta dx \right] \\ &= \frac{1}{s} \left[s^p \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_\beta|^p - \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_\beta|^p \, dx \right] \\ &= \frac{1}{s} (s^p - 1) \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_\beta|^p \, dx < 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, usando os mesmos argumentos presentes na prova do Lema 3.7, podemos mostrar que

$$\varphi(t) = t^p \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v_\beta|^p \, dx + o(t^p) \text{ quando } t \to 0^+$$

e, portanto, $\varphi(t) \geq 0$, quando $t \to 0^+$. Então, pela continuidade da função φ existe $t_\beta \in (0,1)$, tal que $\varphi(t_\beta) = 0$, ou seja, $t_\beta v_\beta \in M_s$.

Pela propriedade (f_4), temos que

$$t_\beta^p \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v_\beta|^p \, dx = \int_\Omega f(t_\beta v_\beta) t_\beta v_\beta dx \geq t_\beta^\mu \int_\Omega f(v_\beta) v_\beta dx. \tag{3.13}$$

Novamente usando as relações (3.9) e (3.10), mais a relação (3.12), temos que

$$t_\beta^{\mu_1 - p} \leq \frac{\int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v_\beta|^p \, dx}{\int_\Omega f(v_\beta) v_\beta dx} = \frac{s^{p-1} \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_\beta|^p \, dx}{\frac{1}{s} \int_\Omega |x|^\beta f(u_\beta) v_\beta dx} = s^p,$$

pois $u_\beta \in M_{a,\beta,r}$. Assim, podemos escrever

$$t_\beta \leq s^{\frac{p}{\mu_1 - p}}. \tag{3.14}$$

Portanto, pelo Lema 3.9, pela propriedade (f_3) e pelas relações (3.9), (3.10), (3.11) e (3.14), temos

$$\begin{aligned}\frac{\tau - p}{\tau} m' &\leq m_s \leq J_s(t_\beta v_\beta) = \frac{t_\beta^p}{p} \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v_\beta|^p \, dx - \int_\Omega F(t_\beta v_\beta) dx \\ &\leq \frac{t_\beta^p}{p} \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v_\beta|^p \, dx \\ &= \frac{\tau}{\tau - p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\tau} \right) t_\beta^p \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v_\beta|^p \, dx \\ &\leq \frac{\tau}{\tau - p} \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\tau} \right) t_\beta^p \int_\Omega |x|^{-\gamma} |\nabla v_\beta|^p \, dx + t_\beta^{\mu_1} \int_\Omega \left(\frac{1}{\tau} f(v_\beta) v_\beta - F(v_\beta) \right) dx \right] \\ &\leq \frac{\tau}{\tau - p} s^{\frac{\mu_1(p-1)+p}{\mu_1 - p}} \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\tau} \right) \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_\beta|^p \, dx + \int_\Omega |x|^\beta \left(\frac{1}{\tau} f(u_\beta) u_\beta - F(u_\beta) \right) dx \right] \\ &= \frac{\tau}{\tau - p} s^{\frac{\mu_1(p-1)+p}{\mu_1 - p}} \left[\frac{1}{p} \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u_\beta|^p \, dx - \int_\Omega |x|^\beta F(u_\beta) dx \right] \\ &= \frac{\tau}{\tau - p} s^{\frac{\mu_1(p-1)+p}{\mu_1 - p}} m_{a,\beta,r}.\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
m_{a,\beta,r} &\geq m'\left(\frac{\tau-p}{\tau}\right)^2\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{\mu_1(p-1)+p}{\mu_1-p}}\\
&= m'\left(\frac{\tau-p}{\tau}\right)^2\left(\frac{N+\beta}{N}\right)^{\frac{\mu_1(p-1)+p}{\mu_1-p}}\\
&\geq c\beta^{\frac{\mu_1(p-1)+p}{\mu_1-p}}.
\end{aligned}
$$

■

3.3.2 "Nível crítico não radial" e sua estimativa

A existência de uma solução não radial para o problema (3.1) é obtida seguindo as ideias em [17]. Primeiro definimos o espaço de Banach $D_a^{1,p}(\Omega)$ para ser o completamento do espaço $C_0^\infty(\Omega)$, com a respectiva norma dada por $\|u\|^p := \int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p\,dx$. Em seguida, introduzimos um subespaço de $D_a^{1,p}(\Omega)$, definido por

$$
D_{a,l}^{1,p}(\Omega) := \left\{u \in D_a^{1,p}(\Omega) : u(y,z) = u(|y|,|z|), (y,z) = x \in I\!R^l \times I\!R^{N-l}\right\},
$$

onde $2 \leq p \leq N-l \leq l$ e $N \geq \max\{2p, p(a+1)\}$. Carrião, De Figueiredo e Miyagaki ([17, Teorema 2.1]), provaram um importante resultado de compacidade. Eles mostraram que, se $p_l := \dfrac{(l+1)p}{l+1-p}$ e $q_l := \dfrac{Np+(l-1)(l+1-p)}{l+1}$, então a imersão $D_{a,l}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_\beta^q(\Omega)$ é contínua, se $q \leq p_l$ e $\beta \geq \beta_0 := \dfrac{p_l q_l}{p}$, e compacta para todo $q < p_l$ e $\beta \geq \beta_0$, onde

$$
L_\beta^p(\Omega) := \left\{u : \int_\Omega |x|^\beta |u|^p\,dx < \infty\right\}.
$$

De maneira análoga ao que fizemos na demonstração do Teorema 3.1, usando o resultado de compacidade obtido em [17] mais o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [56], podemos provar a primeira parte do Teorema 3.2, ou seja, garantir a existência de pelo menos uma solução não radial para o problema (3.1).

Agora, iremos provar a segunda parte do Teorema 3.2, isto é, mostraremos que os níveis críticos radial e não radial são distintos. Para isso, considerando $\dfrac{p}{2} \leq l \leq N-p$ e $x = (y,z) \in I\!R^l \times I\!R^{N-l}$, introduzimos a seguinte variedade de Nehari

$$
N_{a,\beta}^l := \left\{u \in D_{a,l}^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\} : I'_{a,\beta}(u)u = 0\right\}.
$$

Definindo

$$
m_{a,\beta}^l := \inf_{u \in N_{a,\beta}^l} I_{a,\beta}(u)
$$

para ser o "nível crítico não radial" do funcional $I_{a,\beta}$, vamos obter uma estimava de $m^l_{a,\beta}$ por cima.

Primeiro, iremos provar que $m^l_{a,\beta}$ é positivo.

Proposição 3.11. $m^l_{a,\beta} > 0$

Demonstração. Seja $v \in N^l_{a,\beta}$; logo,

$$\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla v|^p \, dx = \int_\Omega |x|^\beta f(v) v dx.$$

Pelas propriedades (f_1) e (f_2), dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $c_\varepsilon > 0$, tal que

$$|f(z)z| \leq \varepsilon z^p + c_\varepsilon z^q, \;\; \forall z \in I\!R.$$

Em ([17, Teorema 2.2]), foi provada a seguinte desigualdade

$$\left(\int_\Omega |x|^\beta |v|^q \, dx \right)^{\frac{p}{q}} \leq c \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla v|^p \, dx$$

para alguma constante $c > 0$. Portanto, usando as estimativas acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla v|^p \, dx &\leq \varepsilon \int_\Omega |x|^\beta |v|^p \, dx + c_\epsilon \int_\Omega |x|^\beta |v|^q \, dx \\ &\leq c_1 \varepsilon \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla v|^p \, dx + c_2 c_\varepsilon \left(\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla v|^p \, dx \right)^{\frac{q}{p}}, \end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas que não dependem de ε. Como $\|v\|^p = \displaystyle\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla v|^p \, dx$, então podemos escrever

$$\|v\|^p \leq c_1 \varepsilon \|v\|^p + c_2 c_\varepsilon \|v\|^q .$$

Assim, escolhendo $\varepsilon > 0$, tal que $1 - c_1 \varepsilon > 0$, temos que

$$\|v\| \geq \left(\frac{1 - c_1 \varepsilon}{c_2 c_\varepsilon} \right)^{\frac{1}{q-p}} > 0.$$

Pela propriedade (f_3) existe $\tau > p$, tal que para todo $v \in N^l_{a,\beta}$, temos

$$\begin{aligned} I_{a,\beta}(v) &= \frac{1}{p} \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla|^p \, dx - \int_\Omega |x|^\beta F(v) dx \\ &\geq \frac{1}{p} \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla|^p \, dx - \frac{1}{\tau} \int_\Omega |x|^\beta f(v) v dx \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\tau} \right) \|v\|^p \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\tau} \right) \left(\frac{1 - c_1 \varepsilon}{c_2 c_\varepsilon} \right)^{\frac{p}{q-p}} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que $m^l_{a,\beta} > 0$. ■

Agora, vamos provar a seguinte resultado.

Proposição 3.12. *Existe uma constante $c > 0$, tal que*

$$m^l_{a,\beta} \leq c\beta^{\frac{\mu_2(p-1)+p}{\mu_2 - p} - N + l}, \text{ quando } \beta \to +\infty.$$

Demonstração. Considere o seguinte conjunto

$$D := \left\{(\lambda, t) \in I\!R^2 : \lambda, t \geq 0 \text{ e } 0 \leq \lambda^2 + t^2 < 1\right\}.$$

Para toda $u \in D^{1,p}_{a,l}(\Omega)$, definimos $u(x) = u(|y|, |z|) = u(\lambda, t)$, onde $x = (y, z) \in I\!R^l \times I\!R^{N-l}$, tal que $\lambda = |y|$ e $t = |z|$. Portanto, realizando essa mudança de varáveis, temos que

$$\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u|^p \, dx = c \int_D \left(\lambda^2 + t^2\right)^{\frac{-ap}{2}} |\nabla u(\lambda, t)|^p \lambda^{l-1} t^{N-l-1} d\lambda dt \tag{3.15}$$

e

$$\int_\Omega |x|^\beta F(u) dx = c \int_D \left(\lambda^2 + t^2\right)^{\frac{\beta}{2}} F(u(\lambda, t)) \lambda^{l-1} t^{N-l-1} d\lambda dt. \tag{3.16}$$

Considere o funcional $I_{a,\beta}$ sobre $D^{1,p}_{a,l}$, usando a mudança de coordenada polar em $I\!R^2 : \lambda = \rho \cos \theta$ e $t = \rho \sin \theta$. Então, o conjunto D é igual ao conjunto

$$A = \left\{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho < 1, \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Definindo $v(\rho, \theta) := u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, temos que

$$u_\lambda = v_\rho \cos \theta - \frac{1}{\rho} \sin \theta v_\theta$$

$$u_t = v_\rho \cos \theta - \frac{1}{\rho} \cos \theta v_\theta$$

e, então $|\nabla u|^2 = u^2_\lambda + u^2_t = v^2_\rho + \dfrac{1}{\rho^2} v^2_\theta$.

Portanto,

$$\int_D \left(\lambda^2 + t^2\right)^{\frac{-ap}{2}} |\nabla u(\lambda, t)|^p \lambda^{l-1} t^{N-l-1} d\lambda dt = \int_\Omega \left(v^2_\rho + \frac{1}{\rho^2} v^2_\theta\right)^{\frac{p}{2}} \rho^{N-1-ap} H(\theta) d\rho d\theta \tag{3.17}$$

e

$$\int_D \left(\lambda^2 + t^2\right)^{\frac{\beta}{2}} F(u(\lambda, t)) \lambda^{l-1} t^{N-l-1} d\lambda dt = \int_A F(v(\rho, \theta)) \rho^{\beta+N-1} H(\theta) d\rho d\theta, \tag{3.18}$$

onde $H(\theta) := (\cos(\theta))^{l-1} (\sin(\theta))^{N-l-1}$.

Agora, vamos introduzir um retângulo $\widetilde{A} \subset A$, dado por

$$\widetilde{A} := \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \times (\theta_1, \theta_2),$$

com $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dfrac{\pi}{2}$. Tomando uma função não negativa $\psi \in C_o^\infty(\widetilde{A}) \setminus \{0\}$, então para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\widetilde{A}_\varepsilon := \left\{(\rho, \theta) \in I\!R^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^\varepsilon \leq \rho \leq \left(\frac{3}{4}\right)^\varepsilon, \varepsilon\theta_1 \leq \theta \leq \varepsilon\theta_2\right\}$$

e uma função $v^\varepsilon \in C_0^\infty(\widetilde{A}_\varepsilon)$, dada por

$$v^\varepsilon(\rho, \theta) := \psi\left(\rho^{\frac{1}{\varepsilon}}, \frac{\theta}{\varepsilon}\right).$$

Vamos calcular $I_{a,\beta}$ sobre a função u^ε, definida por

$$u^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(|y|, |z|) = u^\varepsilon(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = v^\varepsilon(\rho, \theta),$$

de modo que, $u^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega) \cup D_{a,l}^{1,p}(\Omega)$.

Agora, definimos

$$\varepsilon := \frac{N}{\beta + N},$$

de maneira que, $\varepsilon \to 0$ quando $\beta \to +\infty$.

Introduzindo as mudanças de variáveis $r = \rho^{\frac{1}{\varepsilon}}$ e $\varphi = \dfrac{\theta}{\varepsilon}$ e observando que

$$v_\rho^\varepsilon(\rho, \theta) = \frac{1}{\varepsilon}\rho^{\frac{1}{\varepsilon}}\psi_1\left(\rho^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\theta}{\varepsilon}\right) \quad \text{e} \quad v_\theta^\varepsilon(\rho, \theta) = \frac{1}{\varepsilon}\rho^{\frac{1}{\varepsilon}}\psi_2\left(\rho^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\theta}{\varepsilon}\right),$$

onde $\psi_i := \dfrac{\partial \psi}{\partial s_i}$, usando a notação $\psi = \psi(s_1, s_2)$, temos que

$$\int_\Omega |x|^\beta F(u^\varepsilon)dx = c\varepsilon^2 \int_{\widetilde{A}} F(\psi)r^{N-1}H(\varepsilon\varphi)drd\varphi, \tag{3.19}$$

$$\int_\Omega |x|^\beta f(u^\varepsilon)u^\varepsilon dx = c\varepsilon^2 \int_{\widetilde{A}} f(\psi)\psi r^{N-1}H(\varepsilon\varphi)drd\varphi \tag{3.20}$$

e

$$\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u^\varepsilon|^p dx = \varepsilon^{2-p} \int_{\widetilde{A}} \left(\psi_1^2 + \frac{1}{r^2}\psi_2^2\right)^{\frac{p}{2}} r^{-ap} r^{(\varepsilon-1)(N-p(a+1))} H(\varepsilon\varphi) r^{N-1} drd\varphi, \tag{3.21}$$

com $(\varepsilon - 1)(N - p(a+1)) < 0$.

Vamos provar agora que se $\varepsilon \to 0$, então existe $t_\varepsilon > 1$, tal que $t_\varepsilon u^\varepsilon \in N_{a,\beta}^l$.

De fato, defina uma função contínua $h : (0, +\infty) \to I\!R$, dada por

$$h(t) := t^p \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u^\varepsilon|^p dx - \int_\Omega |x|^\beta f(tu^\varepsilon)tu^\varepsilon dx.$$

Reescrevendo a função h da forma

$$h(t) = t^p \left[\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u^\varepsilon|^p dx - \int_\Omega |x|^\beta \frac{f(tu^\varepsilon)}{(tu^\varepsilon)^{p-1}} (u^\varepsilon)^p dx\right]$$

e aplicando a propriedade (f_1), podemos concluir que $h(t) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$.

Observe que, para ε suficientemente pequeno, existem constantes positivas c_1 e c_2, tais que

$$c_1 \varepsilon^{N-l-1} \leq H(\varepsilon\varphi) \leq c_2 \varepsilon^{N-l-1}. \tag{3.22}$$

Portanto, usando as relações (3.20), (3.21) e (3.22), temos que

$$\begin{aligned}
h(1) &= \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u^\varepsilon|^p \, dx - \int_\Omega |x|^\beta f(u^\varepsilon) u^\varepsilon dx \\
&= \varepsilon^{2-p} \int_{\widetilde{A}} \left(\psi_1^2 + \frac{1}{r^2}\psi_2^2\right)^{\frac{p}{2}} r^{-ap} r^{(\varepsilon-1)(N-p(a+1))} H(\varepsilon\varphi) r^{N-1} dr d\varphi \\
&\quad -c\varepsilon^2 \int_{\widetilde{A}} f(\psi)\psi r^{N-1} H(\varepsilon\varphi) dr d\varphi \\
&\geq c_3 \varepsilon^{N-l-1} \left[\varepsilon^{2-p} \int_{\widetilde{A}} \left(\psi_1^2 + \frac{1}{r^2}\psi_2^2\right)^{\frac{p}{2}} r^{-ap} r^{N-1} dr d\varphi - c\varepsilon^2 \int_{\widetilde{A}} f(\psi)\psi r^{N-1} dr d\varphi\right] > 0,
\end{aligned}$$

se ε for suficientemente pequeno; então pela continuidade de h existe $t_\varepsilon > 1$, tal que $h(t_\varepsilon) = 0$, isto é, $t_\varepsilon u^\varepsilon \in N^l_{a,\beta}$.

Portanto, pela propriedade (f_4) existe $\mu_2 > p$, tal que

$$\begin{aligned}
t_\varepsilon^p \int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u^\varepsilon|^p \, dx &= \textstyle\int_\Omega |x|^\beta f(t_\varepsilon u^\varepsilon) t_\varepsilon u^\varepsilon \\
&\geq t_\varepsilon^{\mu_2} \int_\Omega |x|^\beta g(u^\varepsilon) u^\varepsilon dx \\
&= c t_\varepsilon^{\mu_2} \varepsilon^2 \int_{\widetilde{A}} g(\psi)\psi r^{N-1} H(\varepsilon\varphi) dr d\varphi,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
t_\varepsilon^{\mu_2 - p} &\leq \frac{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-ap} |\nabla u^\varepsilon|^p \, dx}{c\varepsilon^2 \displaystyle\int_{\widetilde{A}} g(\psi)\psi r^{N-1} H(\varepsilon\varphi) dr d\varphi} \\
&= \frac{\varepsilon^{2-p} \displaystyle\int_{\widetilde{A}} \left(\psi_1^2 + \frac{1}{r^2}\psi_2^2\right)^{\frac{p}{2}} r^{-ap} r^{(\varepsilon-1)(N-p(a+1))} H(\varepsilon\varphi) r^{N-1} dr d\varphi}{c\varepsilon^2 \displaystyle\int_{\widetilde{A}} g(\psi)\psi r^{N-1} H(\varepsilon\varphi) dr d\varphi} \\
&\leq \frac{c_1 \varepsilon^{2-p} \varepsilon^{N-l-1} \displaystyle\int_{\widetilde{A}} \left(\psi_1^2 + \frac{1}{r^2}\psi_2^2\right)^{\frac{p}{2}} r^{-ap} r^{N-1} dr d\varphi}{\varepsilon^2 \varepsilon^{N-l-1} \displaystyle\int_{\widetilde{A}} g(\psi)\psi r^{N-1} dr d\varphi} \\
&\leq c_2 \varepsilon^{-p}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Além disso, pela propriedade (f_4) obtemos a seguinte relação

$$\forall t > 1 \text{ e } v > 0 \;\Rightarrow\; F(tv) \geq t^{\mu_2} G(v) \tag{3.24}$$

onde $G(v) := \displaystyle\int_0^v g(t)dt$. Portanto, usando as relações (3.23) e (3.24), temos que

$$
\begin{aligned}
m^l_{a,\beta} &\le I_{a,\beta}(t_\varepsilon u^\varepsilon) = \frac{t^p_\varepsilon}{p}\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u^\varepsilon|^p\,dx - \int_\Omega |x|^\beta F(t_\varepsilon u^\varepsilon)dx \\
&\le \frac{t^p_\varepsilon}{p}\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u^\varepsilon|^p\,dx - t^{\mu_2}_\varepsilon \int_\Omega |x|^\beta G(u^\varepsilon)dx \\
&\le c_1\varepsilon^{\frac{-p^2}{\mu_2-p}}\varepsilon^{2-p}\int_{\widetilde{A}}\left(\psi_1^2+\frac{1}{r^2}\psi_2^2\right)^{\frac{p}{2}} r^{-ap}r^{(\varepsilon-1)(N-p(a+1))}H(\varepsilon\varphi)r^{N-1}drd\varphi \\
&\quad -c_2\varepsilon^{\frac{-p\mu_2}{\mu_2-p}}\varepsilon^2\int_{\widetilde{A}} G(\psi)r^{N-1}H(\varepsilon\varphi)drd\varphi \\
&\le c_3\varepsilon^{\frac{-p^2}{\mu_2-p}}\varepsilon^{2-p}\varepsilon^{N-l-1} + c_4\varepsilon^{\frac{-p\mu_2}{\mu_2-p}}\varepsilon^2\varepsilon^{N-l-1} \\
&= c_5\varepsilon^{-\frac{\mu_2(p-1)+p}{\mu_2-p}+N-l} = c_5\left(\frac{N}{\beta+N}\right)^{-\frac{\mu_2(p-1)+p}{\mu_2-p}+N-l} \le c_6\beta^{\frac{\mu_2(p-1)+p}{\mu_2-p}-N+l}.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

■

Finalmente, completaremos a demonstração do Teorema 3.2 provando que $m^l_{a,\beta} \neq m_{a,\beta,r}$.

Completando a demonstração do Teorema 3.2. Aplicando a relação (3.2) presente na propriedade (f_4), obtemos que

$$
\beta^{\frac{\mu_2(p-1)+p}{\mu_2-p}-N+l} < \beta^{\frac{\mu_1(p-1)+p}{\mu_1-p}}
$$

para β suficientemente grande. Portanto, usando as proposições 3.10 e 3.12, podemos concluir que

$$
m^l_{a,\beta} < m_{a,\beta,r}, \text{ quando } \beta \to +\infty.
$$

■

Apêndice A

Resultados Gerais

A.1 Desigualdades

Proposição A.1 (Desigualdade de Young). *Seja $1 < p < +\infty$ e seja p' o expoente conjugado de p; isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Então, se a e b são números reais não negativos, temos que*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

REFERÊNCIA. Brézis [14].

Teorema A.2 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ com $1 < p \leq \infty$, tal que, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Então $fg \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \, \|g\|_{p'} \, .$$

REFERÊNCIA. Brézis [14].

Proposição A.3. *Para todo $\xi, \eta \in I\!R^N$ vale a seguinte desigualdade*

$$|\xi - \eta|^p \leq \begin{cases} \left(|\xi|^{p-2}\,\xi - |\eta|^{p-2}\,\eta\right)(\xi - \eta)\,, & se\ p \geq 2; \\ \left(|\xi|^{p-2}\,\xi - |\eta|^{p-2}\,\eta\right)(\xi - \eta)^{\frac{p}{2}}\left(|\xi|^p + |\eta|^p\right)^{\frac{2-p}{2}}\,, & se\ 1 < p < 2. \end{cases}$$

REFERÊNCIA. Lao [49].

A.2 Desigualdade de Maz'ja

Definição A.4. *Seja Ω um subconjunto aberto de $I\!R^n$. Denotamos por $\mathfrak{D}(\Omega)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$, o espaço das funções em $C^\infty(I\!R^n)$ com suporte compacto em Ω.*

Teorema A.5. *Seja* $n+m > p \geq 1$, $p \leq q \leq \dfrac{p(n+m)}{n+m-p}$, $\beta = \alpha - 1 + (n+m)\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right) > -\dfrac{m}{q}$. *Então*

$$\left\| |y|^{\beta} u(z) \right\|_{L_q(I\!R^{n+m})} \leq c \left\| |y|^{\alpha} \nabla u(z) \right\|_{L_p(I\!R^{n+m})}$$

para todo $u \in \mathfrak{D}(I\!R^{n+m})$ *e* $z = (x,y) \in I\!R^{n+m}$.

REFERÊNCIA. Maz'ja [53].

A.3 Desigualdade de Hardy-Sobolev

Teorema A.6. *Se* $1 \leq k \leq N$, *então escreveremos um ponto genérico* $x \in I\!R^N$ *como* $x = (y,z) \in I\!R^k \times I\!R^{N-k}$. *Seja* $1 < p < +\infty$ *e* $\alpha + k > 0$. *Então, para cada* $u \in \mathfrak{D}(I\!R^N)$ *a seguinte desigualdade se verifica:*

$$\int_{I\!R^N} |y|^{\alpha} |u(x)|^p \, dx \leq \frac{p^p}{(\alpha+k)^p} \int_{I\!R^N} |y|^{\alpha+p} |\nabla u(x)|^p \, dx.$$

Além disso, a constante $\dfrac{p^p}{(\alpha+k)^p}$ *é ótima.*

REFERÊNCIA. Secchi [59].

A.4 Resultados de Convergência

Teorema A.7 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p. para uma função mensurável* f. *Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g \ \forall n$, *então* f *é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

REFERÊNCIA. Bartle [10].

Lema A.8 (Lema de Brezis-Lieb)**.** *Seja* Ω *um subconjunto aberto de* $I\!R^N$ *e seja* $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. *Se*

(a) $\{u_n\}$ *é limitada em* $L^p(\Omega)$,

(b) $u_n \to u$ *q.t.p. sobre* Ω, *então*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p \right) = \|u\|_p^p \, .$$

REFERÊNCIA. Willem [70].

A.5 Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais

Definição A.9. *A ação de um grupo topológico G sobre um espaço normado X é uma função contínua $G \times X \to X : [g, u] \to gu$, tal que $1 \cdot u = u$, $(g_1 g_2)u = g_1(g_2 u)$ e $u \mapsto gu$ é linear. A ação é isométrica se $\|gu\| = \|u\|$. O espaço dos pontos invariantes é definido por*

$$\operatorname{Fix}(G) = \{u \in X; gu = u;\ \forall g \in G\}.$$

Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é invariante, se $\varphi \circ g = \varphi$ para toda $g \in G$.

Lema A.10. *Assumamos que a ação do grupo topológico G sobre o espaço de Banach X é isométrica. Se $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é invariante e se u é um ponto crítico de φ sobre* $\operatorname{Fix}(G)$, *então u é um ponto crítico de φ.*

REFERÊNCIA. Palais [55].

A.6 Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz

Definição A.11 (Condição Palais-Smale-(PS))**.** *Se X é um espaço de Banach e $\Phi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, então o funcional Φ satisfaz a condição Palais Smale, se toda sequência $\{u_n\} \subset X$ satisfazendo*

$$|\Phi(u_n)| \leq \textit{constante, e } \Phi'(u_n) \to 0 \textit{ em } X',$$

possui uma subsequência convergente.

Lema A.12 (Lema de deformação)**.** *Seja E um espaço de Banach. Suponha que um funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaça a condição Palais-Smale. Para $s, c \in \mathbb{R}$, definimos os conjuntos $K_c \equiv \{u \in E; I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0\}$ e $A_s = \{u \in E; I(u) \leq s\}$. Se c não é um valor crítico de I, dado qualquer $\overline{\varepsilon} > 0$, existem $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tais que:*

(i) $\eta(1, u) = u$ *se* $I(u) \notin [c - \overline{\varepsilon}, c + \overline{\varepsilon}]$,

(ii) $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$.

REFERÊNCIA. Rabinowitz [56].

Teorema A.13 (Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz)**.** *Se X é um espaço de Banach, $\Phi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição (PS), $\Phi(0) = 0$ e*

i) *existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que* $\Phi\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$,

ii) *existe* $e \in X \setminus \overline{B_\rho}$ *tal que* $\Phi(e) < 0$,

então Φ *possui um valor crítico* $\overline{c} \geq \alpha$, *com*

$$\overline{c} = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} \Phi(u),$$

onde $\Gamma = \{g \in \mathcal{C}([0,1]\ X);\ g(0) = 0 \ e\ g(1) = e\}$.

REFERÊNCIA. Rabinowitz [56].

A.7 Versão mais geral do Teorema do Passo da Montanha

Teorema A.14. *Seja* E *um espaço de Banach de dimensão infinita tal que* $E = Y \oplus Z$, *onde* Y *tem dimensão finita. Seja* $I \in C^1(E, I\!R)$ *um funcional par, satisfazendo a condição de Palais-Smale* $(PS)_c$ *tal que* $I(0) = 0$. *Suponhamos também*

1. *Existem constantes* $\rho > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que*

$$\inf_{E \cap \partial B_\rho} I = \inf_{S_\rho(Z)} I \geq \delta.$$

2. *Para cada subespaço* $\widetilde{Y} \subset E$ *de dimensão finita existe* $R = R(\widetilde{Y})$ *tal que* $I(v) \leq 0$ *para todo* $v \in \widetilde{Y} \backslash B_R(\widetilde{Y})$, *onde* $B_R(\widetilde{Y}) = \left\{ v \in \widetilde{Y} |\ \ \|v\|_{m,a,p} \leq R \right\}$.

Então o funcional I *possui uma sequência ilimitada de valores críticos.*

REFERÊNCIA. Rabinowitz [56].

A.8 Gênero de Krasnoselski

Definição A.15. *Seja* X *um espaço de Banach e* Σ *a coleção de subconjuntos* $A \subset X \setminus \{0\}$, *fechados em* X *e simétricos em relação à origem, ou seja, se* $x \in A$, *então* $-x \in A$. *Dizemos que* $A \in \Sigma$ *têm gênero* n, *o qual é denotado por* $\gamma(A) = n$, *se existe uma aplicação contínua e ímpar* $\phi : A \to I\!R^n \setminus \{0\}$ *tal que* n *é o menor número natural com esta propriedade, isto é,*

$$\gamma(A) := \inf \{n \in \mathbb{N} |\ \exists\ \phi \in C(A, I\!R^n \setminus \{0\}); \phi(-x) = -\phi(x)\ \forall x \in A\}.$$

Se não existe um tal mínimo n , *definimos* $\gamma(A) = \infty$. *Por convenção,* $\gamma(\emptyset) = 0$.

Teorema A.16. *Sejam* $A, B \in \Sigma \subset X$. *Então*

1) $\gamma(A) = 0$ *se, e somente se,* $A = \emptyset$;

2) Se K é um subconjunto compacto de X tal que $K \cap (-K) = \emptyset$, então $\gamma(K) = 1$;

3) Se existe uma aplicação ímpar $\xi \in C(A, B)$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;

4) Se $A \subset B$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;

5) $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$;

6) $\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$;

7) Se A é compacto, então $\gamma(A) < \infty$ e existe $\delta > 0$ tal que a vizinhança tabular $N_\delta(A) \in \Sigma$ e $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$ onde $N_\delta(A) \equiv \{x \in X \mid \; \|x - A\| \leq \delta\}$;

8) Se $\mathbb{S}^{n-1}$ é a esfera unitária centrada na origem de $I\!R^n$, então $\gamma(\mathbb{S}^{n-1}) = n$.

REFERÊNCIA. Rabinowitz [56].

Teorema A.17. *Seja E Banach e sejam $A, B \in \Sigma \subset E$. Se $h : A \to B$ é um homeomorfismo ímpar, então $\gamma(A) = \gamma(B)$.*

REFERÊNCIA. Kesavan [47].

A.9 Princípio Variacional de Ekeland

Definição A.18. *Seja E um espaço de Banach. Dizemos que um funcional $I : E \to I\!R$ é fracamente semi-contínuo inferiormente se, toda sequência $\{v_n\}$ que converge fracamente para $v \in E$ implicar em $I(v) \leq \liminf I(v_n)$.*

Teorema A.19. *Seja V um espaço métrico completo, e $F : V \to I\!R \cup \{+\infty\}$ uma função fracamente semi-contínua inferiormente, $\not\equiv +\infty$, e limitada por baixo. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $u \in V$ satisfazendo*

$$\inf F \leq F(u) \leq \inf F + \varepsilon$$

e para cada $\lambda > 0$, existe algum ponto $v \in V$ tal que

$$F(v) \leq F(u), \tag{A.1}$$

$$\operatorname{dist}(u, v) \leq \lambda, \tag{A.2}$$

$$\forall w \neq v, F(w) > F(v) - \frac{\varepsilon}{\lambda} \operatorname{dist}(v, w). \tag{A.3}$$

REFERÊNCIA. Ekeland [25].

Referências Bibliográficas

[1] Abreu, EAM, Miyagaki, OH: A Robin problem for a class of quasilinear operators and a related minimizing problem. Nonlinear Analysis. 59, 21-34 (2004)

[2] Adams, AR: "Sobolev Spaces". Academic Press, New York. (1975)

[3] Ambrosetti, A, Brézis, H, Cerami, G: Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. J. Funct. Anal. 2, 519-543 (1994)

[4] Assunção, RB, Carrião, PC, Miyagaki, OH: Multiplicity results for a degenerate quasilinear elliptic equation in half-space. Differential Integral Equations. 22, 753-770 (2009)

[5] Assunção, RB, dos Santos, WW, Miyagaki, OH: Existence and multiplicity results on a class of quasilinear elliptic problems with cylindrical singularities involving multiple critical exponents. arXive: 1506-09162v1 [math.AP] (2015)

[6] Badiale, M, Cappa, G: Non radial solutions for a non homogeneous Hénon equation. Nonlinear Analysis. 109, 45-55 (2014)

[7] Badiale, M, Serra, E: Multiplicity results for the supercritical Hénon equation. Adv. Nonlinear Stud. 4, 467-543 (2004)

[8] Badiale, M, Serra, E: Semilinear Elliptic Equations for Beginners, Existence Results via the Variational Approach. Springer, London. (2011)

[9] Badiale, M, Tarantello, G: A Sobolev-Hardy inequality whith applications to a nonlinear elliptic equation arising in astrophysics. Arch. Ration. Mech. Anal. 163, 259-293 (2002)

[10] Bartle, R: The Elements of Integration and Lebesgue Measure. Wiley-Interscience. (1995)

[11] Bhakta, M: On the existence and breaking symmetry of the ground state solution of Hardy Sobolev type equations with weighted p-Laplacian. Adv. Nonlinear Stud. 3, 555-568 (2012)

[12] Bouchekif, M, El Mokhtar, MEMO: Nonhomogeneous elliptic equations with decaying cylindrical potential and critical exponent. Electron. J. Differential Equations. 54, 1-10 (2011)

[13] Bouchekif, M, Matallah, A: Multiple positive solutions for elliptic equations involving a concave term and critical Sobolev-Hardy exponent. Appl. Math. Lett. 22, 268-275 (2009)

[14] Brézis, H: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, New York. (2010)

[15] Brézis, H, Nirenberg, L: Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents. Commun. Pure Appl. Math. 36, 437-477 (1983)

[16] Cao, D, Han, P: Solutions for semilinear elliptic equations with critical exponents and Hardy potential. J. Differential Equations. 2, 521-537 (2004)

[17] Carrião, PC, de Figueiredo, DG, Miyagaki, OH: Quasilinear elliptic equations of the Henon-type: existence of non-radial solutions. World Scientific Publishing Company. 5, 783-798 (2009)

[18] Chen, J: Multiple positive solutions for a class of nonlinear elliptic equations. J. Math. Anal. Appl. 2, 341-354 (2004)

[19] Cîrstea, F, Motreanu, D, Rădulescu, V: Weak solutions of quasilinear problems with nonlinear boundary condition. Nonlinear Analysis. 43, 623-636 (2001)

[20] Clapp, M, Szulkin, A: A supercritical elliptic problem in a cylindrical shell. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. 85, 233-242 (2014)

[21] Clément, P, de Figueiredo, DG, Mitidieri, E: Quasilinear elliptic equations with critical expoents. Nonlinear Analysis. 7, 133-170 (1996)

[22] Dautray, R, Lions, JL: "Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology I: Physical Origins and Classical Methods". Springer, Berlin. (1985)

[23] de Figueiredo, DG, Gonçalves, JV, Miyagaki, OH: On a class of quasilinear elliptic problems involving critical exponents. Commun. Contemp. Math. 2, 47-59 (2000)

[24] di Benedetto, E: $C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. Nonlinear Analysis. 7, 827-850 (1983)

[25] Ekeland, I: On the variational principle. J. Math. Anal. Appl. 47, 324-353 (1974)

[26] Fan, XL, Zhao, YZ: Linking and multiplicity results for the p-Laplacian on unbounded cylinders. J. Math. Anal. Appl. 260, 479-489 (2001)

[27] Ferrero, A, Gazzola, F: Existence of solutions for singular critical growth semilinear elliptic equations. J. Differential Equations. 2, 494-522 (2001)

[28] Filippucci, R, Pucci, P, Robert, F: On a p-Laplace equation with multiple critical nonlinearities. J. Math. Pures Appl. 156-177 (2009)

[29] García, A, Peral, A: Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term. Trans. Amer. Math. Soc. 2, 877-895 (1991)

[30] Gazzini, M, Musina, R: On a Sobolev-type inequality related to the weighted p- Laplace operator. J. Math. Anal. Appl. 1, 99-111 (2009)

[31] Ghergu, M, Rădulescu, V: Singular elliptic problems with lack of compactness. Ann. Mat. Pura Appl. 4, 63-79 (2006)

[32] Ghergu, M, Rădulescu, V: Nonlinear PDEs, Mathematical models in biology, chemistry and population genetics. Springer, Berlin. (2012)

[33] Ghoussoub, N, Robert, F: Concentration estimates for Emden-Fowler equations with boundary singularities and critical growth. Int. Math. Res. Pap. 1-85 (2006)

[34] Ghoussoub, N, Yuan, C: Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents. Trans. Amer. Math. Soc. 12, 5703-5743 (2000)

[35] Gonçalves, JV, Melo, AL: Multiple sign changing solutions in a class of quasilinear equations. Differential Integral Equations. 15, 147-165 (2002)

[36] Hashimoto, T, Ishiwata, M, Ôtani, M: Quasilinear elliptic equations in infinite tube-shaped domains. Advances in Mathematical Sciences and Applications Gakkotosho. 2, 483-503 (2001)

[37] Hénon, M: Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems. Astronom. Astrophys. 24, 229-238 (1973)

[38] Hirano, N: Existence of positive solutions for the Hénon equation involving critical Sobolev terms. J. Differential Equations. 247, 1311-1333 (2009)

[39] Hsu, TS: Multiplicity results for p -Laplacian with critical nonlinearity of concave-convex type and sign-changing weight functions. Abstr. Appl. Anal. 1-24 (2009)

[40] Hsu, TS: Multiple positive solutions for a quasilinear elliptic problem involving critical Sobolev-Hardy exponents and concave-convex nonlinearities. Nonlinear Analysis. 12, 3934-3944 (2011)

[41] Hsu, TS, Lin, HL: Multiple positive solutions for singular elliptic equations with concave-convex nonlinearities and sign-changing weights. Bound. Value Probl. 1-17 (2009)

[42] Hsu, TS, Lin, HL: Multiple positive solutions for singular elliptic equations with weighted Hardy terms and critical Sobolev-Hardy exponents. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 3, 617-633 (2010)

[43] Hsu, TS, Lin, HL: Multiplicity of positive solutions for weighted quasilinear elliptic equations involving critical Hardy-Sobolev exponents and concave-convex nonlinearities. Abstr. Appl. Anal. 119 (2012)

[44] Ishiwata, M, Ôtani, M: Concentration compactness principle at infinity with partial symmetry and its application. Nonlinear Analysis. 51, 391-407 (2002)

[45] Kang, D, Peng, S: Solutions for semilinear elliptic problems with critical Sobolev-Hardy exponents and Hardy potential. Appl. Math. Lett. 10, 1094-1100 (2005)

[46] Kavian, O: Introduction à la théorie des points critiques. Springer-Verlag, Paris. (1993)

[47] Kesavan, S: Nonlinear Functional Analysis, A First Course. Hindustan Book Agency. (2004)

[48] Kolonitskii, SB, Nazarov, AI: Multiplicity of solutions to the Dirichlet problem for generalized Hénon equationg. J. Math. Sci. 144, 4624-4644 (2007)

[49] Lao, YS: Nonlinear p-Laplacian problems on unbounded domains. Proc. Amer. Math. Soc. 115, 1037-1045 (1992)

[50] Li, Z, Yang, Z: Bifurcation method for solving multiple positive solutions to boundary value problem of p-Hénon equation on the unit disk. Appl. Math. Mech. Engl. 31, 511-520 (2010)

[51] Lindqvist, P: On a nonlinear eigenvalue problem. Berichte Univ. Jyvaskyla Math. Inst. 68, 3354 (1995)

[52] Lions, LP: Symmétrie et compacité dans les espaces sobolev. J. Funct. Anal. 49, 315-334 (1982)

[53] Maz'ja, GV: "Sobolev Spaces", Springer, Berlin. (1980)

[54] Ni, WM: A nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its applications. Indiana Univ. Math. J. 31, 801-807 (1982)

[55] Palais, SR: The principle of symmetric criticality. Commun. Math. Phys. 69, 19-30 (1979)

[56] Rabinowtitz, PH: "Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations". Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island. (1986)

[57] Schechter, M: A variation of the mountain pass lemma and applications. J. London Math. Soc. 44, 491-502 (1991)

[58] Schindler, I: Quasilinear elliptic boundary-value problems on unbounded cylinders and a related mountain-pass lemma. Arch. Rational Mech. Anal. 120, 363-374 (1992)

[59] Secchi, S, Smets, D, Willem, M: Remarks on a Hardy-Sobolev inequality. C. R. Math. Acad. Sci. 10, 811-815 (2003)

[60] Serra, E: Non radial positive solutions for the Hénon equation with critical growth. Calc. Var. Partial Differential Equations. 23, 301-326 (2005)

[61] Simon, J: Régularité de la Solution d'une Équation non Linéaire dans RN. Springer, Berlin. (1978)

[62] Smets, D, Su, J, Willem, M: Non radial ground state solution fore the Hénon equation. Comm. Contemp. Math. 4, 467-480 (2002)

[63] Struwe, M: "Variational Methods". Springer, Berlin. (1990)

[64] Su, J, Wang, Z: Sobolev type embedding and quasilinear elliptic equations with radial potentials. J. Differential Equations. 250, 223-243 (2011)

[65] Sun, X: p-Laplace equations with multiple critical exponents and singular cylindrical potential. Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 4, 1099-1112 (2013)

[66] Tarantello, G: On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 3, 281-304 (1992)

[67] Wang, Y, Yang, J: Asymptotic behavior of ground state solution for Hénon type system. Electron. J. Differential Equations. 116, 1-14 (2010)

[68] Wang, L, Wei, Q, Kang, D: Multiple positive solutions for p-Laplace elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and a Hardy-type term. Nonlinear Analysis. 2, 626-638 (2011)

[69] Wang, ZQ, Willem, M: Singular minimization problems. J. Differential Equations. 161, 307-320 (2000)

[70] Willem, M: Minimax Theorems, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Birkhäuser, Boston. (1996)

[71] Xuan, B, Wang, J: Existence of a nontrivial weak solution to quasilinear elliptic equations with singular weights and multiple critical exponents. Nonlinear Analysis. 3649-3658 (2010)