Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Comportamento assintótico das p-funções de torção quando p tende a 1

Shirley da Silva Macedo

Orientador: Dr. Grey Ercole

Co-orientador: Dr. Hamilton Prado Bueno

Belo Horizonte, MG

2017

Agradecimentos

"Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o próposito debaixo do céu."(Ec 3.1)

Agradeço a Deus pela oportunidade de fazer parte do projeto dele para minha vida que é estudar matemática. Dia após dia percebi e senti Deus me auxiliando na matemática, e através de suas digitais, me moldando numa medida por ele estabelecida.

Aos meus orientadores Grey Ercole e Hamilton Prado Bueno pelas orientações, pela amizade e compreensão em todas as etapas. Me sinto honrada por ter sido orientada por vocês. Expresso minha admiração pela excelência profissional que exercem e como conduziram todo esse trabalho de tese.

Agradeço aos demais professores da banca: Claudianor Alves (UFCG), Olimpio Miyagaki (UFJF), Eder Marinho Martins (UFOP), Luiz Gustavo Farah (UFMG) e Henrique Versieux (UFMG).

Aos professores, funcionários e colegas do Departamento de Matemática da UFMG pela receptividade, respeito e amizade adquirida em todos esses anos.

Aos meus colegas de doutorado: Viviane, Divane, Leandro Leme, Mário Daniel, Pedro e ao Gilberto pela amizade e sua contribuição durante todo esse trabalho de tese; o meu muito obrigada e que Deus o recompense durante toda a sua vida.

Aos meus familiares pela compreensão e incentivos direcionados. As minhas amigas que sempre estiveram a postos em orações: Sibele, Silvana, Débora, Marisa, Roseli, Rose, Santuza, Cida.

Ao meu esposo, Vinícius, companheiro amigo em todos os momentos. Nas diferentes etapas eu senti o cuidado de Deus sobre minha vida através da sua. Vencemos mais uma etapa juntos.

A todos, o meu muito obrigada.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a solução do problema de torção

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_p u &= 1, \quad \text{em } \Omega \\ \qquad u &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que Ω é um domínio N-dimensional limitado, $N \geq 2$, com fronteira de Lipschitz e $\mathcal{L}_p$ é o operador p-Laplaciano em suas duas versões: local (clássica) e não-local (fracionária). No caso fracionário, $u = 0$ em $\partial\Omega$ significa $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

A primeira abordagem (contexto clássico - Capítulo 1) teve como ponto de partida os artigos [34] e [10]. No Capítulo 1, estudamos o comportamento assintótico, quando $p \to 1^+$, das p-funções de torção u_p, definidas como as (únicas) soluções do problema de torção. Esse comportamento está relacionado com a constante de Cheeger "clássica", $h(\Omega)$.

O Capítulo 2 traz uma abordagem não-local dos problemas de torção e de Cheeger. Nele, estudamos esses problemas no contexto dos espaços de Sobolev fracionários $W_0^{s,p}(\Omega)$, $0 < s < 1$ e $1 < p < N/s$. O ponto principal do Capítulo 2 é a generalização do principal resultado do artigo [10] para o contexto de espaços fracionários. Isto é, provamos que

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_\infty^{p-1}} = h_s(\Omega) = \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_1^{p-1}},$$

em que u_p^s denota a (s,p)-função de de torção e $h_s(\Omega)$ denota s-constante de Cheeger.

Além disso, provamos alguns resultados adicionais envolvendo as funções de torção do caso local e fracionárias nos Capítulos 1 e 2, respectivamente.

Palavras-chave: Problema de Cheeger, problema de torção, comportamento assintótico.

Abstract

In this work, we study the solution of the torsion problem

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_p u = 1, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded N- dimensional domain, $N \geq 2$, with Lipschitz boundary and $\mathcal{L}_p$ is the p- Laplacian operator in its two versions: local (Classical) and non-local (fractional). In the fractional case, $u = 0$ in $\partial\Omega$ means $u = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

The first approach (classical context - Chapter 1) had as its starting point the articles [34] and [10]. In Chapter 1, we study the asymptotic behavior, when $p \to 1^+$, of the p-torsion functions u_p, defined as the (unique) solutions of the torsion problem. This behavior is related to the "classical" Cheeger constant, $h(\Omega)$.

Chapter 2 deals with a nonlocal approach to both torsion and Cheeger problems. In it, we study these problems in the context of the fractional Sobolev spaces $W_0^{s,p}(\Omega)$, $0 < s < 1$ e $1 < p < N/s$. The main point of Chapter 2 is the generalization of the main result of the article [10] for the context of fractional spaces. That is, we prove that

$$\lim_{p \to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_\infty^{p-1}} = h_s(\Omega) = \lim_{p \to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_1^{p-1}},$$

where u_p^s denotes (s, p)- torsion function and h_s denotes the s-Cheeger constant.

In addition, we prove some additional results involving the local and fractional torsion functions in Chapters 1 and 2, respectively.

Keywords: Cheeger problem, torsion problem, asymptotic behavior.

Sumário

.

Introdução

Neste trabalho, estudamos o comportamento assintótico, quando $p \to 1^+$, das soluções do problema de torção

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_p u &= 1, \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que Ω é um domínio N-dimensional limitado, $N \geq 2$, com fronteira de Lipschitz e $\mathcal{L}_p$ é o operador p-Laplaciano em suas duas versões: local (clássica) e não-local (fracionária). No caso fracionário, $u = 0$ em $\partial\Omega$ significa $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

No Capítulo 1 abordamos o caso em que $\mathcal{L}_p = \Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o p-Laplaciano local, com $1 < p < N$. Ou seja, estudamos o comportamento assintótico, quando $p \to 1^+$, das p-funções de torção u_p, definidas como as (únicas) soluções do problema

$$(PT) : \begin{cases} -\Delta_p u &= 1, \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

O problema (PT) é chamado *p-problema de torção* e o espaço de Sobolev natural para o seu estudo é $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Mostramos, ainda no Capítulo 1, que o comportamento de u_p, quando $p \to 1^+$, está relacionado com o problema de Cheeger "clássico":

$$h(\Omega) := \inf_{E \subset \overline{\Omega}} \frac{|\partial E|}{|E|}, \tag{1}$$

em que os quocientes $|\partial E|/|E|$ são avaliados entre todos os subdomínios suaves $E \subset \Omega$ tais que $\partial E \cap \partial \Omega = \emptyset$ e os números reais positivos $|\partial E|$ e $|E|$ denotam, respectivamente, o perímetro e o volume de E, ambos no sentido de Lebesgue. O valor $h(\Omega)$ é conhecido como *constante de Cheeger*.

O perímetro de E também é denotado na literatura por $P(E)$. Esta última notação também será utilizada no texto na intenção de familiarizar o leitor para a definição de perímetro fracionário que virá posteriormente. Este último, é definido em um contexto diferente do caso local, mas que, na tentativa de sermos mais didáticos, fixamos uma notação semelhante ao do caso local.

O Capítulo 2 traz uma abordagem não-local dos problemas de torção e de Cheeger. Nele, estudamos esses problemas no contexto dos espaços de Sobolev fracionários $W_0^{s,p}(\Omega)$, $0 < s < 1$ e $1 < p < N/s$. Por esta razão, alteramos ligeiramente nossa terminologia: s-constante de Cheeger e (s,p)-função de torção indicarão, respectivamente, a constante de Cheeger e a função de torção fracionárias. Mostramos que o comportamento assintótico das (s,p)-funções de torção, quando $p \to 1+$, está diretamente relacionado à s-constante de Cheeger.

A versão fracionária (ou não-local) do problema de Cheeger consiste em minimizar o quociente (1) com $P(E)$ substituído por $P_s(E)$, em que

$$P_s(E) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\chi_E(x) - \chi_E(y)|}{|x-y|^{N+s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

e χ_E denota a função característica do subconjunto suave E de Ω. Ou seja, o problema de Cheeger fracionário é o problema de minimização

$$h_s(\Omega) = \inf_{E\subset\Omega} \frac{P_s(E)}{|E|}. \tag{2}$$

Já o problema de torção fracionário corresponde ao caso em que $-\mathcal{L}_p = (-\Delta_p)^s$ é o operador (s,p)-Laplaciano fracionário definido por

$$(-\Delta_p)^s u(x) := 2 \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, \mathrm{d}y.$$

Assim, o problema de torção fracionário é o seguinte

$$(PT_f):\begin{cases} (-\Delta_p)^s u &= 1, \ \text{ em } \Omega \\ u &= 0, \ \text{ em } \mathbb{R}^N\setminus\Omega. \end{cases}$$

Nos referimos ao problema (PT_f) como (s,p)-*problema de torção*.

O objetivo do nosso estudo, no Capítulo 1, é a determinação do limite

$$L := \lim_{p\to 1+} \|u_p\|_\infty$$

em que u_p denota a p-função de torção do domínio Ω. A principal motivação para este objetivo veio de um estudo do comportamento de u_p, com respeito a p, feito por Kawohl e publicado em [34], em 1990. Nele, Kawohl calculou explicitamente o limite L para o caso em que o domínio é uma bola N-dimensional e apresentou estimativas para este limite no caso em que o domínio é um anel bidimensional. Entretanto, não relacionou o comportamento assintótico das p-funções de torção, quando p tende a 1, com a constante de Cheeger. Esse fato foi obtido mais tarde, em 2011: Bueno e Ercole em [10] mostraram que $\lim_{p\to 1+} \|u_p\|_1^{1-p} = \lim_{p\to 1+} \|u_p\|_\infty^{1-p} = h(\Omega)$.

Com base no que acontece na bola e anel N-dimensionais, conjecturamos que $L=0$ se $h(\Omega)\geq 1$ e $L=+\infty$ se $h(\Omega)<1$. A apresentação de resultados relacionados a essa conjectura é o conteúdo principal do Capítulo 1.

Levando em conta os resultados provados por Bueno e Ercole [10], observamos que a conjectura é verdadeira nos casos em que $h(\Omega) \neq 1$. Desta forma, nossas principais contribuições no Capítulo 1 dizem respeito ao caso $h(\Omega) = 1$, para o qual provamos que a conjectura é verdadeira quando o domínio é um anel radial N-dimensional. Para o caso em que o domínio limitado é arbitrário (Lipschitz) e $h(\Omega) = 1$ provamos que $L < \infty$ e ainda mostramos que $L = 0$ quando $\limsup\limits_{p \to 1^+} \|u_p\|_{0,\beta} < \infty$, para algum $0 < \beta < 1$.

Ainda no Capítulo 1, aplicamos o Princípio do Máximo de Payne e Philippin e deduzimos uma estimativa para $\|\nabla u_p\|_\infty$ no caso de domínios *convexos* Ω com fronteira de classe $C^{2,\alpha}$. Com isso, obtivemos a caracterização

$$h(\Omega) = \lim_{p \to 1^+} \|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1-p} = \lim_{p \to 1^+} \|\nabla u_p\|_\infty^{1-p},$$

a partir da qual concluímos facilmente o comportamento assintótico de $\|\nabla u_p\|_\infty$ ou $\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ nos casos $h(\Omega) \neq 1$,

No Capítulo 2, generalizamos o principal resultado do artigo [10] para o contexto de espaços fracionários. Isto é, provamos que

$$\lim_{p \to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_\infty^{p-1}} = h_s(\Omega) = \lim_{p \to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_1^{p-1}},$$

em que u_p^s denota a (s,p)-função de de torção e $h_s(\Omega)$ denota s-constante de Cheeger.

Para tanto, deduzimos cotas inferior e superior para o quociente $\|u_p^s\|_\infty / \|u_p^s\|_1$ e aplicamos a caracterização do primeiro autovalor fracionário $\lambda_{1,p}^s(\Omega)$,

$$h_s(\Omega) = \lim_{p \to 1^+} \lambda_{1,p}^s(\Omega),$$

estabelecida por Brasco, Lindgren e Parini em [6].

Os resultados desta tese foram publicados em 2016: o artigo [12] expõe os resultados do Capítulo 1, enquanto [13], apresenta aqueles do Capítulo 2.

Capítulo

1

Comportamento assintótico das p-funções de torção quando p tende a 1

Neste capítulo vamos apresentar o problema de Cheeger e analisar o comportamento das p-funções de torção quando p tende a 1.

Nosso estudo tem como ponto de partida o artigo [34], escrito em 1990. Nele, Kawohl estuda o comportamento das p-funções de torção em domínios simples, como a bola N-dimensional e o anel bidimensional.

Kawohl não relacionou o comportamento assintótico das p-funções de torção u_p, quando p tende a 1, com a constante de Cheeger $h(\Omega)$. Esse fato foi obtido mais tarde, em 2011: Bueno e Ercole em [10] mostraram que $h(\Omega) = \lim_{p \to 1+} \|u_p\|_1^{1-p}$. Com base neste resultado determinamos o limite $L := \lim_{p \to 1+} \|u_p\|_\infty$ no caso em que $h(\Omega) \neq 1$ e conjecturamos que $L = 0$ quando $h(\Omega) = 1$. A apresentação de resultados relacionados a essa conjectura é o conteúdo principal deste capítulo.

O texto é organizado da seguinte maneira. Na Seção 1.1 apresentamos o problema de Cheeger e os p-problemas de torção. Na Seção 1.2 relacionamos a constante de Cheeger com as p-funções de torção. Já na Seção 1.3 mostramos a veracidade de nossa conjectura para domínios mais gerais e na Seção 1.4 provamos que a nossa conjectura é verdadeira também quando Ω é um anel N-dimensional radial (região entre duas bolas centradas na origem). Finalizamos o capítulo com alguns resultados complementares, apresentados na Seção 1.5.

1.1 O problema de Cheeger e os p-problemas de torção locais

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira Lipschitz, o problema de Cheeger é o problema de minimização definido por

$$h(\Omega) := \inf_{E \subset \overline{\Omega}} \frac{|\partial E|}{|E|}, \tag{1.1}$$

em que os quocientes $|\partial E|/|E|$ são avaliados entre todos os subdomínios suaves $E \subset \Omega$ tais que $\partial E \cap \partial\Omega = \emptyset$, os números reais positivos $|\partial E|$ e $|E|$ sendo, respectivamente, o perímetro e o volume de $E \subset \mathbb{R}^N$, ambos no sentido de Lebesgue.

O valor $h(\Omega)$ é conhecido como *constante de Cheeger* de Ω, e os subdomínios minimizantes E são chamados *conjuntos de Cheeger* de Ω. Conjuntos de Cheeger são importantes na modelagem de desmoronamentos, fraturas mecânicas e em contextos relacionados a processamento de imagens. Veja por exemplo [32], [15] e [29] e suas respectivas referências.

É conhecido que o ínfimo em (1.1) sempre é atingido, ou seja, $h(\Omega)$ é, de fato, um mínimo. Veja o Apêndice A, resultados da Seção A.2.

Para alguns domínios, esse mínimo ocorre no próprio domínio Ω, isto é, $h(\Omega) = \dfrac{|\partial\Omega|}{|\Omega|}$. Neste caso, dizemos que Ω é *calibrável*.

A seguir, alguns exemplos de conjuntos de Cheeger, dados pela parte sombreada em cada figura.

Exemplo 1.1. O conjunto de Cheeger para um quadrado plano.

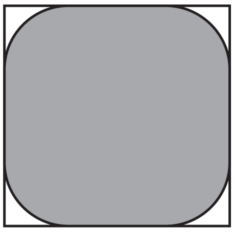

Figura 1.1: Conjunto de Cheeger de um quadrado

Podemos observar nessa figura que o quadrado plano não é calibrável. Verifique as referências [19, p. 297] e [42, p. 16]. $\lhd$

Exemplo 1.2. Um domínio simplesmente conexo que consiste em dois quadrados congruentes ligados por uma pequena faixa.

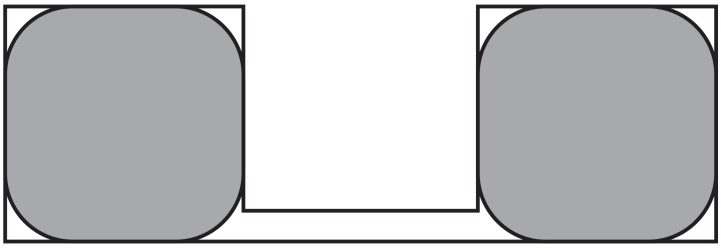

Figura 1.2: Conjunto de Cheeger de um domínio simplesmente conexo

Para mais informações sobre esse exemplo, veja [37, Example 5.5]. $\lhd$

O exemplo a seguir mostra que a constante de Cheeger é estritamente positiva, mas também nos dá um exemplo de um conjunto calibrável.

Exemplo 1.3. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, no qual atua o campo identidade $\varphi(x) = x$. Seja B_R uma bola centrada na origem e de raio R que contém Ω. Pelo Teorema da Divergência,

$$\int_{\partial\Omega} x \cdot \nu \, \mathrm{d}S = \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\Omega} N \, \mathrm{d}x,$$

em que ν é o vetor normal unitário exterior a Ω. Daí decorre que

$$N|\Omega| = \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu \,\mathrm{d}S \leq \int_{\partial\Omega} |x||\nu| \,\mathrm{d}S \leq R \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}S = R|\partial\Omega|.$$

Ou seja, obtivemos uma cota inferior para $|\partial\Omega|/|\Omega|$:

$$\frac{N}{R} \leq \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|}.$$

Uma vez que

$$\frac{N}{R} = \frac{N\omega_N R^{N-1}}{\omega_N R^N} = \frac{|\partial B_R|}{|B_R|} = h(B_R),$$

em que $\omega_N = |B_1|$ é o volume da bola unitária no $\mathbb{R}^N$, também mostramos que B_R é calibrável. $\triangleleft$

Na sequência, considerando Ω um domínio limitado com fronteira de Lipschitz, vamos definir as p-funções de torção em Ω. Elas são as únicas soluções do problema

$$(PT): \begin{cases} -\Delta_p u = 1, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),\ p > 1$. O problema (PT) é chamado *p-problema de torção*. Existência e unicidade de solução para (PT) decorrem naturalmente da convexidade do funcional energia $J_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema, definido por

$$J_p(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega u \,\mathrm{d}x,\ \forall\, u\ \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(Veja, por exemplo, Peral [44, Thm. A.0.4, Thm. A.0.6].)

Os pontos críticos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ do funcional J_p são soluções fracas de (PT), isto é, satisfazem

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}x, \ \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

e, em particular, quando $\varphi = u$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u \, \mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

No caso particular $\Omega = B_R$ (a bola definida acima), a solução explícita para o p-problema de torção, aqui denotada por U_p, foi apresentada por Sakaguchi em [45] e explorada por Kawohl em [34]:

$$U_p(r) = \left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}}(R^{p/p-1} - r^{p/p-1}) \quad 0 \le r = |x| \le R, \tag{1.3}$$

em que $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_N^2}$.

Segue-se daí que U_p é radialmente simétrica, decrescente, estritamente positiva em B_R, limitada e pertence a $C^{1,\beta}(\overline{B_R}) \cap W_0^{1,p}(B_R)$ para $\beta \in (0,1)$.

Além disso, de (1.3) decorre que

$$\|U_p\|_\infty = U_p(0) = \left(\frac{p-1}{p}\right) R \left(\frac{R}{N}\right)^{1/p-1}, \tag{1.4}$$

$$U_p'(r) = -\left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{p}{p-1}\right) r^{\frac{1}{p-1}} = -\left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{1.5}$$

e

$$\|U_p'\|_\infty = \|U_p'\|_{L^\infty(\partial B_R)} = |U_p'(R)| = \left(\frac{R}{N}\right)^{1/p-1} \tag{1.6}$$

em que $\|\cdot\|_s$ denota a norma usual de $L^s(\Omega)$, para $1 \le s \le \infty$.

Para domínios limitados Ω mais gerais, as p-funções de torção, que denotaremos por u_p, também são estritamente positivas. De fato, considerando w_p a solução de

$$(P0):\begin{cases} -\Delta_p u = 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

e u_p a solução do problema de torção

$$(PT):\begin{cases} -\Delta_p u = 1, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

o Princípio da Comparação (veja no Apêndice A, Teorema A.1) garante que $0 = w_p \leq u_p$ em Ω, mostrando que u_p não é negativa em Ω. Em seguida, fixando $x \in \Omega$, considerando $B_r(x) \subset \Omega$ e U_p a p-função de torção em $B_r(x)$ e aplicando novamente o Princípio da Comparação com as funções U_p e u_p, segue-se $0 < U_p \leq u_p$ em $B_r(x)$. Como x foi tomado arbitrariamente em Ω, tem-se $u_p > 0$ em Ω. Ou seja, as p-funções de torção são estritamente positivas em Ω.

Utilizando o Princípio da Comparação para uma bola contendo Ω, podemos concluir que u_p é limitada pela função de torção dessa bola. Ou seja, $u_p \in L^\infty(\Omega)$. Daí, os teoremas clássicos de regularidade (veja, por exemplo, [38] e [47]) garantem que $u_p \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ para $\beta \in (0,1)$.

1.2 A constante de Cheeger e as p-funções de torção

Nosso objetivo nesta seção é relacionar o comportamento de u_p (a p-função de torção) quando $p \to 1^+$ com a constante de Cheeger. Para isso, recordamos alguns resultados já provados, que fundamentam a conjectura que faremos nesta seção.

Kawohl considerou em seu trabalho [34] o anel plano

$$\Omega^2_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < a < |x| < b\},$$

domínio em que a função de torção, aqui denotada por V_p, também é radialmente simétrica. Ele mostrou que

$$\lim_{p\to 1^+} \|V_p\|_\infty = 0, \quad \text{se} \quad \frac{2b}{b^2-a^2} \geq 1 \tag{1.7}$$

e que

$$\lim_{p\to 1^+} \|V_p\|_\infty = \infty, \quad \text{se} \quad \frac{2}{b-a} < 1. \tag{1.8}$$

Além disso, *conjecturou* que a conclusão em (1.7) permaneceria verdadeira se a condição $\frac{2b}{b^2-a^2} \geq 1$ fosse substituída por $\frac{2}{b-a} \geq 1$.

Assim, de acordo com esta conjectura, o valor 1 para $\frac{2}{b-a}$ determina a troca de comportamento do limite $\lim\limits_{p\to 1^+} \|V_p\|_\infty$.

Em [34], Kawohl não relacionou o valor $\frac{2}{b-a}$ com a constante de Cheeger do anel bidimensional $\Omega^2_{a,b}$, o que faremos ainda nesta seção.

Em [10], Bueno e Ercole estudaram a relação entre o comportamento assintótico das p-funções de torção quando $p \to 1^+$ e a constante de Cheeger, em domínios mais gerais. Eles mostraram que

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p\|_\infty^{p-1}} = h(\Omega) = \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p\|_1^{p-1}}. \tag{1.9}$$

Aqui é conveniente enfatizar que $\frac{1}{\|u_p\|_1^{p-1}}$ é a melhor constante da imersão compacta $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, ou seja, o valor mínimo do quociente de Rayleigh $\|\nabla u\|_p^p / \|u\|_1^p$. Mostraremos isto na Seção 1.5.

Partindo da expressão de $\|U_p\|_\infty$ dada por (1.4) e da caracterização (1.9), temos uma outra maneira de verificar que a bola B_R é calibrável. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
h(B_R) &= \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|U_p\|_\infty^{p-1}} = \lim_{p\to 1^+} \left(\left(\frac{p-1}{p}\right) N^{-\frac{1}{p-1}} R^{\frac{p}{p-1}} \right)^{1-p} \\
&= N \lim_{p\to 1^+} \left(\frac{p-1}{p}\right)^{1-p} R^{-p} = \frac{N}{R} = \frac{N\omega_N R^{N-1}}{\omega_N R^N} = \frac{|\partial B_R|}{|B_R|},
\end{aligned}
$$

em que, como antes, $\omega_N = |B_1|$.

É conhecido também que o anel N-dimensional $\Omega_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 < a \leq |x| \leq b\}$ é calibrável. Para abordar historicamente esse assunto, consideremos o problema de autovalor

$$
(PA) : \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}
$$

em que $1 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Uma solução fraca u de (PA) é chamada de autofunção e o número real correspondente o autovalor associado. Denotaremos por $\lambda_p(\Omega)$ o primeiro autovalor do p-Laplaciano, correspondente à primeira autofunção. Existência e unicidade de solução para (PA) podem ser vistas em [40].

A primeira prova que $\Omega_{a,b}$ é calibrável decorre de resultados de Demengel [17]. Nesse artigo (veja também [18, 19]), Demengel provou que, se existe uma função $\sigma \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap BV(\Omega)$ satisfazendo $\|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, $0 \neq u \geq 0$ e

$$
(P_\sigma) : \begin{cases} -\operatorname{div} \sigma &= \lambda, & x \in \Omega \\ \sigma . \nabla u &= |\nabla u|, & x \in \Omega \\ \sigma \cdot \vec{\eta}(-u) &= u, & x \in \partial\Omega, \end{cases}
$$

para $\lambda > 0$, então $\lambda = \lambda_1(\Omega)$ (o primeiro autovalor do 1-Laplaciano), em que $\vec{\eta}$ denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

Ainda em [17], Demengel exibiu uma função σ para o caso em que $\Omega = \Omega_{a,b}$ e

$\lambda = \lambda_1(\Omega_{a,b}) = \dfrac{N(b^{N-1}+a^{N-1})}{b^N - a^N}.$

Uma vez que o primeiro autovalor do 1-Laplaciano também é a constante de Cheeger de $\Omega_{a,b}$ (veja [42]), isto implica que o anel $\Omega_{a,b}$ é calibrável, pois

$$\frac{N(b^{N-1}+a^{N-1})}{b^N - a^N} = \frac{|\partial\Omega_{a,b}|}{|\Omega_{a,b}|} = h(\Omega_{a,b}).$$

Em particular, quando $N = 2$, temos a constante de Cheeger do anel bidimensional $\Omega^2_{a,b}$:

$$h(\Omega^2_{a,b}) = \frac{2(b+a)}{b^2 - a^2} = \frac{2}{b-a}. \tag{1.10}$$

Uma segunda demonstração de que o anel N-dimensional é calibrável foi obtida por Bueno e Ercole em [11], utilizando a expressão (1.9).

Os resultados e a conjectura apresentados por Kawohl em [34] e os resultados de Bueno e Ercole em [10] nos levaram à seguinte conjectura mais geral, parte do conteúdo desta tese:

Conjectura. *Para um domínio limitado Ω com fronteira de Lipschitz temos*

$$\lim_{p\to 1^+} \|u_p\|_\infty = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad h(\Omega) > 1 \\ 0, & \text{se} \quad h(\Omega) = 1 \\ \infty, & \text{se} \quad h(\Omega) < 1. \end{cases} \tag{1.11}$$

Optamos por escrever os casos $h(\Omega) > 1$ e $h(\Omega) = 1$ separadamente para destacar o caso $h(\Omega) = 1$ que é o foco principal deste capítulo.

Exemplo 1.4. Consideremos a bola N-dimensional B_R. No caso $h(B_R) \geq 1$, temos $N \geq R$, de acordo com o Exemplo 1.3. Assim, vale

$$\lim_{p\to 1^+} \|U_p\|_\infty = \lim_{p\to 1^+} \left(\frac{p-1}{p}\right) R \left(\frac{R}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} = 0.$$

Note que, de acordo com (1.5), se $N > R$, temos

$$\lim_{p\to 1^+} \|U_p'\|_\infty = \left(\frac{R}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} = 0.$$

Por outro lado, se $h(B_R) < 1$ (isto é, $N < R$),

$$\lim_{p\to 1^+} \|U_p\|_\infty = \lim_{p\to 1^+} \left(\frac{p-1}{p}\right) R \left(\frac{R}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \infty \tag{1.12}$$

pois

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 1^+} \|U_p\|_\infty &= \lim_{p\to 1^+} \left(\frac{p-1}{p}\right) R \left(\frac{R}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \lim_{p\to 1^+} \frac{R(R/N)^{\frac{1}{p-1}}}{(p/p-1)} \\ &= \lim_{p\to 1^+} R(R/N)^{\frac{1}{p-1}} \ln(R/N) = \infty,\end{aligned}$$

pela Regra de L'Hospital.

Finalmente, para a derivada,

$$\lim_{p\to 1^+} \|U_p'\|_\infty = \left(\frac{R}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \begin{cases} \infty, & \text{se} \quad h(B_r) < 1 \\ 1, & \text{se} \quad h(B_R) = 1. \end{cases} \tag{1.13}$$

Com isso, verificamos nossa conjectura (1.11) em B_R. Ou seja,

$$\lim_{p\to 1^+} \|U_p\|_\infty = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad R < N \\ 0, & \text{se} \quad N = R \\ \infty, & \text{se} \quad R > N. \end{cases} \tag{1.14}$$

Além disso, mostramos também que

$$\lim_{p\to 1^+} \|U_p'\|_\infty = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad R < N \\ 1, & \text{se} \quad N = R \\ \infty, & \text{se} \quad R > N. \end{cases} \tag{1.15}$$

$\triangleleft$

Exemplo 1.5. Consideramos o anel bidimensional $\Omega^2_{a,b}$. Nossa conjectura coincide com os resultados de Kawohl ((1.7) e (1.8)), admitindo que $\frac{2b}{b^2 - a^2} \geq 1$ possa ser substituído por $\frac{2}{b-a} \geq 1$. $\triangleleft$

Enfatizamos que o estudo de Kawohl no caso do anel limitou-se ao caso $N = 2$. Trataremos posteriormente o caso N-dimensional.

1.3 Nossos resultados

Vimos, na seção anterior, que (1.11) foi verificada na bola N-dimensional e no anel bidimensional, caso em que Kawohl [34] fez uma conjectura que coincide com a nossa.

Começamos esta seção mostrando a veracidade de nossa conjectura para domínios mais gerais, no caso em que $h(\Omega) \neq 1$. Portanto, a nossa conjectura se reduzirá à seguinte: se $h(\Omega) = 1$, então $\lim_{p\to 1^+} \|u_p\|_\infty = 0$. Na próxima seção mostraremos que esta conjectura é verdadeira também quando Ω é um anel N-dimensional radial (região entre duas bolas centradas na origem).

Lema 1.6. *Em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira de Lipschitz vale*

$$\lim_{p\to 1^+} \|u_p\|_\infty = \lim_{p\to 1^+} \|u_p\|_1 = \begin{cases} 0, & se \quad h(\Omega) > 1 \\ \infty & se \quad h(\Omega) < 1. \end{cases} \tag{1.16}$$

Demonstração. Aplicando a definição de limite em (1.9) obtemos, para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $p > 1$ suficientemente próximo de 1,

$$[h(\Omega) - \epsilon]^{\frac{1}{p-1}} \leq \frac{1}{\|u_p\|_\infty} \leq [h(\Omega) + \epsilon]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Se $h(\Omega) > 1$, tomando ϵ suficientemente pequeno de modo que $h(\Omega) - \epsilon > 1$, concluímos que $\lim_{p\to 1^+}\|u_p\|_\infty = 0$. Analogamente, se $h(\Omega) < 1$, tomando ϵ suficientemente pequeno de modo que $h(\Omega)+\epsilon < 1$, concluímos que $\lim_{p\to 1^+}\|u_p\|_\infty = \infty$. □

Na sequência, vamos expor condições suficientes para a validade de nossa conjectura.

Para tanto, utilizaremos alguns resultados devidos a Bueno e Ercole (veja [10, Thm. 2, p. 266 e Cor. 8, p. 269]), obtidos por meio de uma combinação do Princípio de Cavalieri com a Fórmula da Coárea (veja o Apêndice A, Proposições A.6 e A.7). Optamos por apresentar as demonstrações desses resultados, pois os argumentos utilizados nelas assemelham-se a alguns que utilizaremos posteriormente. Os próximos dois lemas expostos na sequência, se referem a [10, Thm. 2, p. 266 e Cor. 8, p. 269].

Lema 1.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira de Lipschitz. Então*

$$\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x \le \frac{|\Omega|^{\frac{p}{N}}}{C_{N,p}} \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x$$

para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}$, em que $C_{N,p}$ é dada por

$$C_{N,p} = N\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} |B_1|^{\frac{p}{N}}. \tag{1.17}$$

Demonstração. Denotemos, como antes, por U_p a p-função de torção de $\Omega^* = B_R$, em que B_R é a bola com centro na origem e raio R tal que $|B_R| = |\Omega|$.

De acordo com (1.4) temos

$$\begin{aligned}\|U_p\|_\infty^{1-p} &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\frac{N}{R^p}\\ &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\frac{N\omega_N^{\frac{p}{N}}}{(\omega_N R^N)^{\frac{p}{N}}} = C_{N,p}|B_R|^{-\frac{p}{N}} = C_{N,p}|\Omega|^{-\frac{p}{N}}.\end{aligned}$$

Seja e_p a primeira autofunção positiva do p-Laplaciano em Ω, satisfazendo $\|e_p\|_\infty =$

1. Uma vez que e_p e u_p anulam-se em $\partial\Omega$ e

$$-\Delta_p e_p = \lambda_p(\Omega) e_p^{p-1} \leq \lambda_p(\Omega) = -\Delta_p \left(\lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p-1}} u_p\right),$$

decorre do Princípio da Comparação que

$$0 \leq e_p \leq \lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p-1}} u_p \quad \text{em } \Omega. \tag{1.18}$$

Tomando o máximo em (1.18), obtemos $1 = \|e_p\|_\infty \leq \lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p-1}} \|u_p\|_\infty$ e, portanto,

$$\|u_p\|_\infty^{1-p} \leq \lambda_p(\Omega),$$

desigualdade válida para qualquer domínio Ω com fronteira de Lipschitz. Assim, em particular, vale para $\Omega^* = B_R$, de modo que

$$C_{N,p}|\Omega|^{-\frac{p}{N}} = \|U_p\|_\infty^{1-p} \leq \lambda_p(\Omega^*). \tag{1.19}$$

Utilizando o resultado clássico (veja, por exemplo, [33])

$$\lambda_p(\Omega^*) \leq \lambda_p(\Omega),$$

concluímos que

$$C_{N,p}|\Omega|^{-\frac{p}{N}} \leq \lambda_p(\Omega) \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx}$$

para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, de onde decorre o lema. □

Lema 1.8. *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira de Lipschitz. Então,*

$$h(\Omega) \leq \left(\frac{|\Omega|}{\|u_p\|_1}\right)^{\frac{p-1}{p}} \tag{1.20}$$

e

$$\|u_p\|_\infty \leq \|u_p\|_1 S_{N,p}^{\frac{-N}{p+N(p-1)}} (\|u_p\|_1^{1-p})^{\frac{N}{p+N(p-1)}} \tag{1.21}$$

em que

$$S_{N,p} = N\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\left(\frac{p+N(p-1)}{p}\right)|B_1|^{\frac{p}{N}} = \left(\frac{p+N(p-1)}{p}\right)C_{N,p}. \tag{1.22}$$

Demonstração. Seja $A_t := \{x \in \Omega : u_p(x) > t\}$, o conjunto de nível t de u_p.

Pelo Princípio de Cavalieri (Apêndice A, Proposição A.6), temos

$$\int_\Omega u_p \, \mathrm{d}x = \int_0^{\|u_p\|_\infty} |A_t| \, \mathrm{d}t,$$

e, pela Fórmula da Coárea (Apêndice A, Proposição A.7)(notando que $u \in C^1(\overline{\Omega})$),

$$\int_\Omega |\nabla u_p| \, \mathrm{d}x = \int_0^{\|u_p\|_\infty} |\partial A_t| \, \mathrm{d}t.$$

Como $h(\Omega) \leq \dfrac{|\partial A_t|}{|A_t|}$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_p| \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\|u_p\|_\infty} |\partial A_t| \, \mathrm{d}t = \int_0^{\|u_p\|_\infty} |A_t| \frac{|\partial A_t|}{|A_t|} \, \mathrm{d}t \geq h(\Omega) \int_0^{\|u_p\|_\infty} |A_t| \, \mathrm{d}t \\ &= h(\Omega) \int_\Omega u_p \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder e pelo fato de u_p ser solução fraca do problema (PT) (ou seja, satisfaz (1.2)), obtemos

$$\begin{aligned} h(\Omega) &\leq \frac{\int_\Omega |\nabla u_p| \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega u_p \, \mathrm{d}x} \leq \frac{(\int_\Omega |\nabla u_p|^p \, \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{1-\frac{1}{p}}}{\int_\Omega u_p \, \mathrm{d}x} = \frac{(\int_\Omega u_p \, \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{1-\frac{1}{p}}}{\int_\Omega u_p \, \mathrm{d}x} \\ &= \left(\frac{|\Omega|}{\|u_p\|_1}\right)^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned}$$

uma vez que $u_p \geq 0$.

Logo,

$$h(\Omega) \leq \left(\frac{|\Omega}{\|u_p\|_1} \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

o que prova (1.20).

Por outro lado, para cada $0 < k < \|u_p\|_\infty$, a função

$$(u_p - k)^+ = \max\{u_p - k, 0\} = \begin{cases} u_p - k & \text{se } u_p > k, \\ 0 & \text{se } u_p \leq k \end{cases}$$

pertence a $W_0^{1,p}(\Omega)$, pois $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u_p > 0$ em Ω.

Consideramos $v = (u_p - k)^+$ na igualdade (1.2), obtemos

$$\int_{A_k} |\nabla u_p|^p \, \mathrm{d}x = \int_{A_k} (u_p - k) \, \mathrm{d}x. \tag{1.23}$$

Note que, como A_k é um conjunto aberto, temos $\nabla(u_p - k)^+ = \nabla u_p$ em A_k.

O próximo passo é estimar $\int_{A_k} |\nabla u_p|^p \, \mathrm{d}x$ por baixo. Pela desigualdade de Holder, temos

$$\left(\int_{A_k} (u_p - k) \, \mathrm{d}x \right)^p \leq |A_k|^{p-1} \int_{A_k} (u_p - k)^p \, \mathrm{d}x.$$

Adicionalmente, do Lema 1.7, conseguimos

$$\left(\int_{A_k} (u_p - k) \, \mathrm{d}x \right)^p \leq |A_k|^{p-1} \int_{A_k} (u_p - k)^p \, \mathrm{d}x \leq \frac{|A_k|^{p-1} |A_k|^{\frac{p}{N}}}{C_{N,p}} \int_{A_k} |\nabla u_p|^p \, \mathrm{d}x,$$

em que $C_{N,p}$ é a constante definida por (1.17).

Isto implica que

$$C_{N,p} |A_k|^{\frac{-p}{N}+1-p} \left(\int_{A_k} (u_p - k) \, \mathrm{d}x \right)^p \leq \int_{A_k} |\nabla u_p|^p \, \mathrm{d}x.$$

Por (1.23), obtemos

$$C_{N,p}|A_k|^{\frac{-p}{N}+1-p}\left(\int_{A_k}(u_p-k)\,\mathrm{d}x\right)^p \leq \int_{A_k}(u_p-k)\,\mathrm{d}x,$$

e, consequentemente,

$$\left(\int_{A_k}(u_p-k)\,\mathrm{d}x\right)^{p-1} \leq \frac{1}{C_{N,p}}|A_k|^{\frac{p+N(p-1)}{N}}.$$

Reescrevendo a última desigualdade temos

$$\left(\int_{A_k}(u_p-k)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N(p-1)}{p+N(p-1)}} \leq C_{N,p}^{-\frac{N}{p+N(p-1)}}|A_k|. \tag{1.24}$$

Agora, definimos

$$f(k) := \int_{A_k}(u_p-k)\,\mathrm{d}x = \int_k^\infty |A_t|\,\mathrm{d}t, \tag{1.25}$$

em que a última igualdade segue-se do Princípio de Cavalieri (veja o Apêndice A, Proposição A.6). Combinando (1.24) e (1.25), temos

$$\left(\int_k^\infty |A_t|\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{N(p-1)}{p+N(p-1)}} \leq C_{N,p}^{-\frac{N}{p+N(p-1)}}|A_k|.$$

E, como $f'(k) = -|A_k|$,

$$f(k)^{\frac{N(p-1)}{p+N(p-1)}} \leq -C_{N,p}^{\frac{-N}{p+N(p-1)}}f'(k).$$

Multiplicando por $f(k)^{\frac{-N(p-1)}{p+N(p-1)}}$, obtemos

$$1 \leq -C_{N,p}^{\frac{-N}{p+N(p-1)}}f(k)^{\frac{-N(p-1)}{p+N(p-1)}}f'(k). \tag{1.26}$$

Note que

$$\frac{d}{dk}\left(\frac{p+N(p-1)}{p}C_{N,p}^{\frac{-N}{p+N(p-1)}}[f(0)^{\frac{p}{p+N(p-1)}}-f(k)^{\frac{p}{p+N(p-1)}}]\right)=$$

$$\begin{aligned}
&=\left(\frac{p+N(p-1)}{p}\right)C_{N,s,p}^{\frac{-N}{p+N(p-1)}}[0-\frac{-p}{p+N(p-1)}f(k)^{\frac{p}{p+N(p-1)}-1}f'(k)]\\
&=-C_{N,p}^{\frac{-N}{p+N(p-1)}}f(k)^{\frac{-N(p-1)}{p+N(p-1)}}f'(k).
\end{aligned}$$

Então, integrando (1.26) com limite superior igual a k, temos

$$\begin{aligned}
k &\leq \left(\frac{p+N(p-1)}{p}\right)C_{N,p}^{\frac{-N}{p+N(p-1)}}[f(0)^{\frac{p}{p+N(p-1)}}-f(k)^{\frac{p}{p+N(p-1)}}]\\
&\leq \left(\frac{p+N(p-1)}{sp}\right)C_{N,p}^{\frac{-N}{p+N(p-1)}}\left(\int_\Omega u_p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+N(p-1)}},
\end{aligned}$$

pois $f(k)>0$ e $f(0)=\displaystyle\int_\Omega u_p\,\mathrm{d}x$.

Logo,

$$\|u_p\|_\infty \leq \left(\frac{p+N(p-1)}{p}\right)C_{N,p}^{\frac{-N}{p+N(p-1)}}\left(\int_\Omega u_p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p+N(p-1)}},$$

ou seja, organizando a potência de $\|u_p\|_1$, obtemos

$$\|u_p\|_\infty \leq \|u_p\|_1 S_{N,p}^{\frac{-N}{p+N(p-1)}}(\|u_p\|_1^{1-p})^{\frac{N}{p+N(p-1)}}, \tag{1.27}$$

em que $S_{N,p}=\left(\dfrac{p+N(p-1)}{p}\right)C_{N,p}$, provando assim (1.21). □

Quando $h(\Omega)=1$, decorre imediatamente de (1.20) a limitação

$$\|u_p\|_1 \leq |\Omega|. \tag{1.28}$$

Utilizando (1.28), a estimativa (1.21) pode ser reescrita como

$$\|u_p\|_\infty \leq |\Omega| \, S_{N,p}^{-\frac{N}{p+N(p-1)}} (\|u_p\|_1^{1-p})^{\frac{N}{p+N(p-1)}}. \tag{1.29}$$

Vamos agora provar a limitação de $\|u_p\|_1$ e $\|u_p\|_\infty$, no caso em que $h(\Omega) = 1$, utilizando (1.28) e (1.29). Mais precisamente, temos

Teorema 1.9. *Considere Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira de Lipschitz. Se $h(\Omega) = 1$, então*

$$\limsup_{p\to 1^+} \|u_p\|_1 \leq |\Omega| \quad e \quad \limsup_{p\to 1^+} \|u_p\|_\infty \leq \frac{|\Omega|}{|B_N|}. \tag{1.30}$$

Demonstração. Decorre imediatamente de (1.28) que

$$\limsup_{p\to 1^+} \|u_p\|_1 \leq |\Omega|.$$

Para provar a segunda desigualdade em (1.30), inicialmente tomamos o limite com $p \to 1^+$ em (1.22):

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 1^+} C_{N,p}^{-\frac{N}{p+N(p-1)}} &= \lim_{p\to 1^+} \left[N|B_1|^{\frac{p}{N}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{p-1} \right]^{-\frac{N}{p+N(p-1)}} \\
&= \lim_{p\to 1^+} \left[N^{-\frac{N}{p+N(p-1)}} |B_1|^{\frac{-p}{p+N(p-1)}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{(p-1)(-\frac{N}{p+N(p-1)})} \right] \\
&= N^{-N}|B_1|^{-1} = \frac{1}{|B_N|}.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Tomando o limite superior quando p tende a 1^+ em (1.29), utilizando (1.9), (1.31) e a hipótese $h(\Omega) = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{p\to 1^+} \|u_p\|_\infty &\leq |\Omega| \lim_{p\to 1^+} C_{N,p}^{-\frac{N}{p+N(p-1)}} \lim_{p\to 1^+} (\|u_p\|_1^{1-p})^{\frac{N}{p+N(p-1)}} \\
&= \frac{|\Omega|}{|B_1|N^N} h(\Omega)^N = \frac{|\Omega|}{|B_1|N^N}(1) = \frac{|\Omega|}{|B_N|},
\end{aligned}$$

provando assim o teorema. □

A seguir, mostraremos que $\lim_{p\to 1^+} \|u_p\|_\infty = 0$ quando $\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ for limitada e o domínio Ω tiver fronteira C^2. Essa regularidade da fronteira nos permitirá aplicar a Identidade de Pohozaev (veja, por exemplo, Gueda e Véron [28, Thm. 1.1]).

Proposição 1.10. *Seja Ω um domínio limitado com fronteira C^2. Existe uma constante positiva m, dependendo apenas de Ω tal que*

$$\frac{rp}{p-1}\|u_p\|_1 \leq \|\nabla u_p\|^p_{L^\infty(\partial\Omega)}. \tag{1.32}$$

Além disso, se

$$\limsup_{p\to 1^+} \|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)} < \infty \tag{1.33}$$

então

$$\lim_{p\to 1^+} \|u_p\|_\infty = 0.$$

Demonstração. Decorre da Identidade de Pohozaev que

$$\left(\frac{N(p-1)+p}{p}\right)\int_\Omega u_p \,\mathrm{d}x = \left(\frac{p-1}{p}\right)\int_{\partial\Omega} |\nabla u_p|^p x\cdot\nu \, dS_x, \tag{1.34}$$

em que ν denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

Consequentemente, como $u_p \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ (esta regularidade pode ser vista no final da Seção 1.1), obtemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{N(p-1)+p}{p-1}\right)\|u_p\|_1 &= \int_{\partial\Omega} |\nabla u_p|^p x\cdot\nu\, dS_x \leq \int_{\partial\Omega} \max_{x\in\partial\Omega} |\nabla u_p(x)|^p \max_{x\in\partial\Omega}|x| dS_x \\ &\leq \|\nabla u_p\|^p_{L^\infty(\partial\Omega)}\left(\max_{x\in\partial\Omega}|x|\right)\ |\partial\Omega|, \end{aligned} \tag{1.35}$$

ou seja,

$$\frac{pr_p}{p-1}\|u_p\|_1 \leq \|\nabla u_p\|^p_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

em que

$$r_p := \frac{N(p-1)+p}{|\partial\Omega|(\max_{x\in\partial\Omega}|x|)p}.$$

Tomando r o mínimo de r_p, que é atingido quando $p = 1$, obtemos

$$r = \frac{1}{|\partial\Omega|(\max_{x\in\partial\Omega}|x|)},$$

que depende apenas de Ω, como afirmado. Assim, (1.32) está provado.

Suponhamos então (1.33). Sejam $M > 0$ e $p_0 > 1$ tais que $\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq M$, para todo $1 < p < p_0$.

Decorre de (1.32) que

$$\limsup_{p\to 1^+}\|u_p\|_1 \leq \limsup_{p\to 1^+}\left(\frac{p-1}{rp}\right)M^p = 0. \tag{1.36}$$

Tomando o limite superior em (1.29), por (1.9), (1.21) do Lema 1.8 e (1.36), obtemos

$$\begin{aligned}\limsup_{p\to 1^+}\|u_p\|_\infty &\leq \limsup_{p\to 1^+}\|u_p\|_1 S_{N,p}^{-\frac{N}{p+N(p-1)}}\left(\|u_p\|_1^{1-p}\right)^{\frac{N}{p+N(p-1)}}\\ &= \frac{h(\Omega)^N}{|B_N|}\limsup_{p\to 1^+}\|u_p\|_1 = 0,\end{aligned}$$

provando que

$$\lim_{p\to 1^+}\|u_p\|_\infty = 0.$$

□

Mostraremos agora que a nossa conjectura se verifica sob a hipótese de limitação de $\|\nabla u_p\|_\infty$, quando p tende a 1, em um domínio com fronteira de Lipschitz. Para tanto, necessitaremos de algumas propriedades dos espaços de variação limitada $BV(\Omega)$ (veja o Apêndice A, resultados da Seção A.2).

Teorema 1.11. *Seja Ω um domínio Lipschitz tal que $h(\Omega) = 1$ e*

$$\limsup_{p\to 1^+} \|\nabla u_p\|_\infty < \infty. \tag{1.37}$$

Então

$$\lim_{p\to 1^+} \|u_p\|_\infty = 0. \tag{1.38}$$

Demonstração. Consideremos $p_n \to 1^+$ tal que

$$\|u_{p_n}\|_\infty \to S := \limsup_{p\to 1^+} \|u_p\|_\infty. \tag{1.39}$$

Do Teorema 1.9 decorre que $S \leq \dfrac{|\Omega|}{|B_N|}$. Utilizando a hipótese (1.37), o Teorema de Arzelá-Ascoli garante que, a menos de subsequência, $\{u_{p_n}\}$ converge uniformemente em $\overline{\Omega}$ para uma função $u \in C(\overline{\Omega})$ que é não negativa em Ω e nula na fronteira $\partial\Omega$.

Como $u_{p_n} \to u$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, temos $\|u_{p_n}\|_\infty \to \|u\|_\infty$ e $u_{p_n} \to u$ em $L^1(\Omega)$. Por (1.39), segue-se $\|u\|_\infty = S$.

Afirmamos que $\{u_{p_n}\}$ é limitada em $BV(\Omega)$. De fato, como cada u_{p_n} é solução de um problema de torção, temos que $\|\nabla u_{p_n}\|_{p_n}^{p_n} = \|u_{p_n}\|_1$ e, além disso, que $u_{p_n} \in C^1(\overline{\Omega})$, o que implica $|Du_{p_n}|(\Omega) = \|\nabla u_{p_n}\|_1$, em que $|Dv|(\Omega)$ representa a variação total de $v \in L^1(\Omega)$. Então, pela desigualdade de Hölder, temos

$$|Du_{p_n}|(\Omega) = \|\nabla u_{p_n}\|_1 \leq \|\nabla u_{p_n}\|_{p_n} |\Omega|^{1-\frac{1}{p_n}} = \|u_{p_n}\|_1^{\frac{1}{p_n}} |\Omega|^{1-\frac{1}{p_n}}. \tag{1.40}$$

Como

$$\|u_{p_n}\|_{BV(\Omega)} = \|u_{p_n}\|_1 + |Du_{p_n}|(\Omega)$$

e $\{u_{p_n}\}$ é limitada em $L^1(\Omega)$, concluímos que $\{u_{p_n}\}$ é limitada em $BV(\Omega)$. Isso também implica que $u \in BV(\Omega)$. Note que, como $u = u_{p_n} = 0$ em $\partial\Omega$, $|Du_{p_n}|(\Omega) = |Du_{p_n}|(\mathbb{R}^N)$ e $|Du|(\Omega) = |Du|(\mathbb{R}^N)$.

A semicontinuidade da variação total e (1.40) implicam que

$$|Du|(\Omega) \leq \liminf_{n\to\infty} |Du_{p_n}|(\Omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_{p_n}\|_1^{\frac{1}{p_n}} |\Omega|^{1-\frac{1}{p_n}} = \|u\|_1, \tag{1.41}$$

em que a última igualdade segue-se do fato que $u_{p_n} \to u$ em $L^1(\Omega)$.

Consideremos agora $A_t := \{x \in \Omega : u(x) > t\}$, o conjunto de nível t de u.

Pela definição da constante de Cheeger (veja (1.1)), temos $h(\Omega) \leq \dfrac{|\partial A_t|}{|A_t|}$, sempre que $|A_t| > 0$. Por hipótese, $h(\Omega) = 1$, de modo que

$$|\partial A_t| - |A_t| \geq 0, \text{ para todo } t > 0. \tag{1.42}$$

Assim, integrando (1.42), aplicando o Princípio de Cavalieri e a Fórmula da Coárea (veja o Apêndice A, Proposições A.6 e A.7)), obtemos

$$0 \leq \int_0^{\|u\|_\infty} (|\partial A_t| - |A_t|)\mathrm{d}t = |Du|(\Omega) - \|u\|_1 \leq 0, \tag{1.43}$$

em que a última desigualdade é consequência de (1.41).

Portanto, $|\partial A_t| - |A_t| = 0$, ou seja, $|\partial A_t| = |A_t|$ para quase todo $0 < t \leq \|u\|_\infty$. Em outras palavras, A_t é um conjunto de Cheeger para quase todo t tal que $|A_t| > 0$.

Agora, vamos supor, por contradição, que $S > 0$. Então, existe $t > 0$ tal que $|A_t| > 0$, ou seja, A_t é um conjunto de Cheeger. De acordo com [42, Prop. 3.5], a fronteira de A_t intersecta $\partial\Omega$. Fixemos, então, $x_0 \in \partial A_t \cap \partial\Omega$ e uma sequência $\{x_n\} \subset A_t$ tal que $x_n \to x_0$.

Como $u(x_n) > t$ (pois $\{x_n\} \subset A_t$), temos

$$0 = u(x_0) - \lim_{n\to\infty} u(x_n) = 0 - \lim_{n\to\infty} u(x_n) \leq -t, \tag{1.44}$$

donde concluímos que $t \leq 0$, o que é uma contradição, pois $t > 0$. Assim, devemos ter $S = 0$, finalizando a demonstração de nossa afirmação. $\square$

Observamos que se o domínio Lipschitz Ω tiver um único conjunto de Cheeger E e $\limsup_{p\to 1^+} \|\nabla u_p\|_\infty < \infty$, então $\lim_{p\to 1^+} \|u_p\|_\infty = 0$. (Essa conclusão é válida, por exemplo, quando Ω é convexo, veja [2]). De fato, é consequência de [10, Teorema 20] que, para cada sequência $p_n \to 1^+$, existe uma subsequência $\{p_{n_k}\}$ tal que

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{u_{p_{n_k}}(x)}{\|u_{p_{n_k}}\|_\infty} = \nu(x) := \begin{cases} c, & \text{se} \quad x \in E \\ 0, & \text{se} \quad x \in \overline{\Omega} \setminus E, \end{cases} \tag{1.45}$$

para quase todo ponto $x \in \Omega$, em que c é uma constante positiva.

Então, tomando $p_n \to 1^+$ tal que $\|u_{p_n}\|_\infty \to S := \limsup_{p\to 1^+} \|u_p\|_\infty$, temos

$$u_{p_{n_k}} = \|u_{p_{n_k}}\|_\infty \frac{u_{p_{n_k}}}{\|u_{p_{n_k}}\|_\infty} \to S\nu \quad \text{q.t.p em } \overline{\Omega}.$$

Da hipótese $\limsup_{p\to 1^+} \|\nabla u_p\|_\infty < \infty$ concluímos que, a menos de uma outra subsequência, $u_{p_{n_k}}$ converge uniformemente em $\overline{\Omega}$ para $S\nu$, como consequência do Teorema de Arzelá-Ascoli. Como $S\nu$ pertence a $C(\overline{\Omega})$, devemos ter $S = 0$.

Mas, em geral, para um domínio limitado Ω e $h(\Omega) = 1$, é difícil verificar que $\limsup_{p\to 1^+} \|\nabla u_p\|_\infty < \infty$. Veja, contudo, a Proposição 1.16.

Note que não conseguimos provar nossa conjectura (1.11) em sua totalidade, mas provamos que as funções de torção permanecem limitadas em domínios arbitrários. Na próxima seção mostraremos que nossa conjectura é verdadeira no caso do anel N-dimensional.

1.4 O anel N-dimensional

Nesta seção, consideramos o anel $\Omega_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^N : a < |x| < b\}$ e a p-função de torção u_p associada a esse domínio. Vamos mostrar que, no caso $h(\Omega_{a,b}) = 1$, vale

$$\lim_{p \to 1^+} \|u_p\|_\infty = 0,$$

completando a prova de nossa conjectura nesse domínio.

Para simplificar nossa notação, em alguns momentos consideraremos o anel $\Omega_{1,R}$. Denotaremos por v_p a p-função de torção em $\Omega_{1,R}$.

Notamos que,

$$\text{se} \quad R = \frac{b}{a}, \quad \text{então} \quad u_p(r) = a^{\frac{p}{p-1}}\, v_p(\frac{r}{a}), \quad \text{para} \quad a \le r = |x| \le b \tag{1.46}$$

e

$$h(\Omega_{1,\frac{b}{a}}) = a\, h(\Omega_{a,b}). \tag{1.47}$$

Veja o Apêndice A, Seção A.3 para a demontração dessas afirmativas.

Decorre de (1.46) que

$$u_p'(r) = a^{\frac{1}{p-1}}\, v_p'(\frac{r}{a}), \quad \text{para} \quad a \le r = |x| \le b.$$

Portanto,

$$\|u_p'\|_\infty = a^{\frac{1}{p-1}} \|v_p'\|_\infty. \tag{1.48}$$

A prova do próximo resultado pode ser encontrada em [11, Prop.3 e Prop.4].

Lema 1.12. *Temos*

$$\left(\frac{R^N + R^{N-1}}{R^{N-1} + 1}\right)^{\frac{1}{N}} \le m_p < \left(\frac{R^{\frac{N}{p}(p-1)+N} + R^{N-1}}{R^{N-1} + R^{\frac{N}{p}(p-1)}}\right)^{\frac{1}{N}} \tag{1.49}$$

e

$$\|v_p'\|_\infty = \max_{1\le r\le R} |v_p'(r)| = |v_p'(1)| = \left(\frac{m_p^N - 1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{1.50}$$

em que m_p é o valor máximo da função de torção no anel N-dimensional $\Omega_{1,R}$.

Na sequência, estimaremos $\|u_p'\|_\infty$ em termos $h(\Omega_{a,b})$.

Lema 1.13. *Temos*

$$\left(\frac{1}{h(\Omega_{a,b})}\right)^{\frac{1}{p-1}} \le \|u_p'\|_\infty \le a^{-\frac{N}{p}} \left(\frac{1}{h(\Omega_{a,b})}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{b^{N-1}+a^{N-1}}{b^{\frac{N}{p}-1} - a^{\frac{N}{p}-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{1.51}$$

Demonstração. Basta considerarmos o anel $\Omega_{1,R}$ (para $R > 1$) e provarmos

$$\left(\frac{1}{h(\Omega_{1,R})}\right)^{\frac{1}{p-1}} \le \|v_p'\|_\infty \le \left(\frac{1}{h(\Omega_{1,R})}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{R^{N-1}+1}{R^{\frac{N}{p}-1} - 1}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{1.52}$$

De fato, fazendo $R = \frac{b}{a}$ em (1.52) e multiplicando essa equação por $a^{\frac{1}{p-1}}$, obtemos, levando em consideração (1.48),

$$\left(\frac{a}{h(\Omega_{1,\frac{b}{a}})}\right)^{\frac{1}{p-1}} \le \|u_p'\|_\infty \le \left(\frac{a}{h(\Omega_{1,\frac{b}{a}})}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{N-1}+1}{(\frac{b}{a})^{\frac{N}{p}-1} - 1}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Agora, usando (1.47) e observando que

$$\left(\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{N-1}+1}{(\frac{b}{a})^{\frac{N}{p}-1} - 1}\right)^{\frac{1}{p-1}} = a^{-\frac{N}{p}} \left(\frac{b^{N-1}+a^{N-1}}{b^{\frac{N}{p}-1} - a^{\frac{N}{p}-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

chegamos a (1.51).

Assim, vamos provar (1.52). Decorre de (1.49) que

$$\frac{R^N + R^{N-1}}{R^{N-1}+1} - 1 \le m_p^N - 1 < \frac{R^{\frac{N}{p}(p-1)+N} + R^{N-1}}{R^{N-1} + R^{\frac{N}{p}(p-1)}} - 1.$$

Como

$$\frac{R^{\frac{N}{p}(p-1)+N}-R^{\frac{N}{p}(p-1)}}{R^{N-1}+R^{\frac{N}{p}(p-1)}}-1=\frac{R^{\frac{N}{p}(p-1)}[R^N-1]}{R^{\frac{N}{p}(p-1)}[1+R^{(N-1)-\frac{N}{p}(p-1)}]}=\frac{R^N-1}{R^{\frac{N}{p}-1}+1},$$

temos

$$\frac{R^N-1}{R^{N-1}+1}\leq m_p^N-1<\frac{R^N-1}{R^{\frac{N}{p}-1}+1}. \tag{1.53}$$

Uma vez que

$$h(\Omega_{1,R})=\frac{|\partial\Omega_{1,R}|}{|\Omega_{1,R|}}=\frac{N(R^{N-1}+1)}{(R^N-1)},$$

concluímos que o lado esquerdo de (1.53) é igual a $\dfrac{N}{h(\Omega_{1,R})}$ e o lado direito de (1.53) é igual a

$$\frac{N}{h(\Omega_{1,R})}\frac{R^{N-1}+1}{(R^{\frac{N}{p}-1}+1)}.$$

Assim, (1.53) pode ser reescrita como

$$\frac{N}{h(\Omega_{1,R})}\leq m_p^N-1<\frac{N}{h(\Omega_{1,R})}\frac{R^{N-1}+1}{R^{\frac{N}{p}-1}+1}.$$

Multiplicando a última desigualdade por $1/N$, obtemos

$$\frac{1}{h(\Omega_{1,R})}\leq\frac{m_p^N-1}{N}<\frac{1}{h(\Omega_{1,R})}\frac{R^{N-1}+1}{R^{\frac{N}{p}-1}+1}.$$

Finalmente, de (1.50) decorre que

$$\left(\frac{1}{h(\Omega_{a,b})}\right)^{\frac{1}{p-1}}\leq\|v_p'\|_\infty<\left(\frac{1}{h(\Omega_{a,b})}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{R^{N-1}+1}{R^{\frac{N}{p}-1}+1}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

e a prova está completa. $\square$

O próximo resultado descreve o comportamento assintótico quando $p\to1^+$ das p-funções de torção em $\Omega_{a,b}$ no caso em que $h(\Omega_{a,b})=1$. Para demonstrá-lo, aplicamos a Proposição 1.10, pois o gradiente de u_p atinge seu valor máximo na fronteira de $\Omega_{a,b}$.

Teorema 1.14. *Se* $h(\Omega_{a,b}) = 1$ *então*

$$1 \leq \limsup_{p\to 1^+} \|u'_p\|_\infty \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{N/(1+(b/a)^{1-N})} \qquad e \qquad \lim_{p\to 1^+} \|u_p\|_\infty = 0.$$

Demonstração. Para $h(\Omega_{a,b}) = 1$, decorre do Lema 1.13

$$1 \leq \|u'_p\|_\infty \leq a^{-\frac{N}{p}} \left(\frac{b^{N-1} + a^{N-1}}{b^{\frac{N}{p}-1} - a^{\frac{N}{p}-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{R^{N-1}+1}{R^{\frac{N}{p}-1} - 1}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{1.54}$$

para $R = \frac{b}{a} > 1$.

Agora, vamos calcular o limite

$$\lim_{p\to 1^+} \left(\frac{R^{N-1}+1}{R^{\frac{N}{p}-1}+1}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Sejam $x = \dfrac{1}{p-1}$ e $z = \left(\dfrac{R^{N-1}+1}{R^{(\frac{Nx}{x+1})-1}+1}\right)^x$. Assim,

$$\lim_{p\to 1^+} \left(\frac{R^{N-1}+1}{R^{\frac{N}{p}-1}+1}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \lim_{x\to\infty} z = \lim_{x\to\infty} e^{\ln z} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln z}$$

Basta, portanto, calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \ln z$. Note que

$$\lim_{x\to\infty} \ln z = \lim_{x\to\infty} \ln \left(\frac{R^{N-1}+1}{R^{(\frac{Nx}{x+1})-1}+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} x \ln \left(\frac{R^{N-1}+1}{R^{(\frac{Nx}{x+1})-1}+1}\right).$$

Faça $x = 1/y$. Então,

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \ln \left(\frac{R^{N-1}+1}{R^{(\frac{N}{y+1})-1}+1}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{\ln \left(\dfrac{R^{N-1}+1}{R^{(\frac{N}{y+1})-1}+1}\right)}{y}.$$

Aplicando a Regra de L'Hôspital, obtemos

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{R^{N-1}+1}{R^{(\frac{N}{y+1})-1}+1}\right)}{y}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{R^{(\frac{N}{y+1})-1}+1}{R^{N-1}+1}\right)\left(\frac{-(R^{N-1}+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(R^{(\frac{N}{y+1})-1}+1)}{(R^{(\frac{N}{y+1})-1}+1)^2}\right)$$

Observe que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(R^{(\frac{N}{y+1})-1}+1)=(R^{(\frac{N}{y+1})-1})N\ln R\left(\dfrac{-1}{(y+1)^2}\right)$. Então,

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{R^{N-1}+1}{R^{(\frac{N}{y+1})-1}+1}\right)}{y}&=\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(R^{(\frac{N}{y+1})-1}+1)}{(R^{(\frac{N}{y+1})-1}+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{(R^{(\frac{N}{y+1})-1})N\ln R}{(y+1)^2(R^{(\frac{N}{y+1})-1}+1)}\\&=R^{\frac{R^{N-1}N\ln R}{R^{N-1}+1}}=\ln R^{(\frac{R^{N-1}N}{R^{N-1}+1})}.\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 1^+}\left(\frac{R^{N-1}+1}{R^{\frac{N}{p}-1}+1}\right)^{\frac{1}{p-1}}&=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln z}=e^{\ln R\left(\dfrac{NR^{N-1}}{R^{N-1}+1}\right)}\\&=R^{\left(\dfrac{NR^{N-1}}{R^{N-1}+1}\right)}=R^{\left(\dfrac{N}{1+R^{1-N}}\right)}.\end{aligned}$$

Logo, tomando o limite superior quando p tende a 1 em (1.54), obtemos

$$1\leq\limsup_{p\to 1^+}\|u_p'\|_\infty\leq R^{\left(\dfrac{N}{1+R^{1-N}}\right)},\tag{1.55}$$

o que mostra a primeira afirmativa do teorema.

Para mostrar a segunda afirmativa, notamos que

$$\|u_p'\|_\infty=a^{\frac{1}{p-1}}\|v_p'\|_\infty=a^{\frac{1}{p-1}}v_p'(1)=u_p'(a).$$

Portanto,

$$\limsup_{p\to 1^+} \|u_p'\|_\infty = \limsup_{p\to 1^+} \|u_p'\|_{L(\partial\Omega_{a,b})} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{N/(1+(b/a)^{1-N})}$$

de modo que o Teorema 1.11 ou a Proposição 1.10 garantem que

$$\lim_{p\to 1^+} \|u_p\|_\infty = 0.$$

□

Na próxima seção, mostraremos que 1 é uma cota inferior para $\limsup\limits_{p\to 1^+} \|\nabla u_p\|_\infty$ quando $h(\Omega) = 1$.

1.5 Resultados complementares

Nesta seção provaremos alguns resultados envolvendo o gradiente das p-funções de torção.

Mais precisamente, quando o domínio tiver fronteira $C^{2,\alpha}$, estabeleceremos uma cota superior para $\|\nabla u_p\|_\infty$, aplicando o Princípio do Máximo devido a Payne e Philippin (veja [43, Corollary 1, p.200]) ao p-problema de torção ϵ-regularizado. Esse fato nos permitirá obter uma caracterização da constante de Cheeger em função do gradiente das p-funções de torção, caracterização essa que será apresentada no Teorema 1.17.

Além disso, no caso $h(\Omega) = 1$, obteremos uma cota inferior para $\|\nabla u_p\|_\infty$ (independente de p e N) e mostraremos que o mínimo do quociente de Rayleigh $\|\nabla u\|_p^p / \|u\|_1^p$ é atingido por u_p. Estabeleceremos também uma propriedade deste quociente de Rayleigh.

O resultado de Payne e Philippin [43, Corollary 1, p.200], adaptado ao p-problema de torção, estabelece que, se u for solução de

$$-\operatorname{div}(g(|\nabla u|^2)\nabla u) = 1$$

no domínio convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com bordo suave ($N \geq 2$) e $u \equiv c$ em $\partial\Omega$ (c é uma constante), qualquer que seja g de classe C^2 em seu domínio satisfazendo

$$g(s) > 0 \quad \text{e} \quad e(s) = g(s) + 2sg'(s) > 0 \quad \text{para} \quad s \in [0, \max|\nabla u|^2], \tag{1.56}$$

então

$$\Phi(x,2) = \int_0^{|\nabla u|^2} (g(\xi) + 2\xi g^{'}(\xi))\, d\xi + 2\int_0^u 1\, d\xi$$

assume seu máximo em um ponto crítico de u.

No caso do operador p-Laplaciano, consideramos

$$g(s) = s^{\frac{p-2}{2}} \quad \text{e} \quad e(s) = s^{\frac{p-2}{2}} + 2s\left(\frac{p-2}{2}\right)s^{\frac{p-4}{2}} = (p-1)s^{\frac{p-2}{2}}. \tag{1.57}$$

O operador Φ é definido por

$$\Phi(x,2) = \int_0^{|\nabla u|^2} (p-1)s^{\frac{p-2}{2}}\, \mathrm{d}s + 2\int_0^u 1\, \mathrm{d}s.$$

Ou seja,

$$\Phi(x,2) = 2\left(\frac{p-1}{p}\right)s^{\frac{p}{2}}\Big|_0^{|\nabla u|^2} + 2u = 2\left(\frac{p-1}{p}\right)|\nabla u|^p + 2u. \tag{1.58}$$

Observe que $g(s)$ e $e(s)$ não satisfazem (1.56) na origem. Assim, a aplicação direta dos resultados de [43] não é possível.

Para contornar esse fato, consideramos o problema auxiliar (o problema ϵ-regularizado) dado por

$$(PT_{reg}) : \begin{cases} -\operatorname{div}(g_\epsilon(|\nabla u_\epsilon|^2)\nabla u_\epsilon) &= 1, \quad \text{em} \quad \Omega \\ u_\epsilon &= 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

em que

$$g_\epsilon(s) = (\epsilon + s)^{\frac{p-2}{2}}.$$

Assim, $g_\epsilon \in C^2([0,\infty))$ e

$$e_\epsilon(s) = (\epsilon + s)^{\frac{p-2}{2}} + 2s\left(\frac{p-2}{2}\right)(\epsilon + s)^{\frac{p-4}{2}} = (\epsilon + s)^{\frac{p-2}{2}} + s(p-2)(\epsilon + s)^{\frac{p-4}{2}}.$$

Para o problema (PT_{reg}) e funções g_ϵ e e_ϵ temos que

$$\Phi_\epsilon(x,2) = \left[2\left(\frac{p-1}{p}\right)(\epsilon + |\nabla u_\epsilon|^2)^{\frac{p}{2}} - \epsilon^{\frac{p}{2}}\right] - 2\epsilon\left[(\epsilon + |\nabla u_\epsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}} - \epsilon^{\frac{p-2}{2}}\right] + 2u_\epsilon \quad (1.59)$$

assume seu valor máximo em um ponto crítico de u_ϵ. (Essa regularização do p-Laplaciano também pode ser vista no trabalho do Kawohl [34, p. 7].)

Lema 1.15. $\Phi(x,2)$ *assume o máximo em um ponto crítico de* u_p*.*

Demonstração. É consequência do artigo de Sakaguchi [45] que $u_\epsilon \to u_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e também que $u_\epsilon \to u_p$ uniformemente em $\overline{\Omega}$ quando $\epsilon \to 0$.

Decorre da convergência em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que

$$|\nabla u_{\epsilon_n}(x)| \to |\nabla u_p(x)|,$$

para quase todo $x \in \Omega$ e alguma sequência $\epsilon_n \to 0$. Logo, $\Phi_{\epsilon_n}(x,2) \to \Phi(x,2)$.

Por outro lado, de acordo com o resultado de Payne e Philippin, obtemos que $\Phi_{\epsilon_n}(x,2)$ assume seu valor máximo em um ponto crítico x_ϵ de u_ϵ. Então, $|\nabla u_\epsilon(x_\epsilon)| = 0$. Assim,

$$\Phi_\epsilon(x,2) \leq \Phi_\epsilon(x_\epsilon, 2) = 2u_\epsilon(x_\epsilon).$$

Como Ω é limitado, podemos concluir que x_{ϵ_n} converge para algum $x_p \in \Omega$ (passando a uma subsequência, se necessário). Daí,

$$\Phi(x,2) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{\epsilon_n}(x,2) \leq \lim_{n\to\infty} 2u_{\epsilon_n}(x_{\epsilon_n}) = 2u_p(x_p) \tag{1.60}$$

para quase todo ponto x de Ω (aplicando a convergência uniforme na segunda igualdade).

Quer dizer, da expressão de $\Phi(x,2)$ e de (1.60) concluímos que

$$\Phi(x,2) = 2\left(\frac{p-1}{p}\right)|\nabla u_p(x)|^p + 2u_p(x) \leq 2u_p(x_p) \tag{1.61}$$

para quase todo ponto x de Ω.

Como $u_p \in C^1(\overline{\Omega})$, podemos concluir que a desigualdade (1.61) vale para todo ponto $x \in \overline{\Omega}$. Em particular, para x_p.

Assim, avaliando a expressão (1.61) em x_p, temos

$$\left(\frac{p-1}{p}\right)|\nabla u_p(x_p)| \leq 0$$

o que implica que $|\nabla u_p(x_p)| = 0$, mostrando que x_p é um ponto crítico de u_p. □

Partindo dos resultados apresentados nesta seção, podemos estabelecer uma cota superior para $\|\nabla u_p\|_\infty$, no caso do domínio Ω ter fronteira $C^{2,\alpha}$.

Proposição 1.16. *Seja Ω um domínio limitado, convexo e com fronteira $C^{2,\alpha}$. Então*

$$\|\nabla u_p\|_\infty^p \leq \frac{p}{p-1}\|u_p\|_\infty. \tag{1.62}$$

Demonstração. Por (1.61), temos

$$\frac{2(p-1)}{p}|\nabla u_p(x)|^p \leq \frac{2(p-1)}{p}|\nabla u_p(x)|^p + 2u(x) \leq 2u_p(x_p) \leq 2\|u_p\|_\infty.$$

Portanto,

$$\|\nabla u_p\|_\infty^p \leq \frac{p}{p-1}\|u_p\|_\infty,$$

finalizando a demonstração. □

O próximo resultado vincula a constante de Cheeger com o comportamento assintótico do gradiente das p-funções de torção quando $p \to 1^+$.

Teorema 1.17. *Seja Ω um domínio limitado, convexo e com fronteira $C^{2,\alpha}$. Então,*

$$h(\Omega) = \lim_{p\to 1^+} \|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{1-p} = \lim_{p\to 1^+} \|\nabla u_p\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-p}. \tag{1.63}$$

Demonstração. De acordo com (1.32) e (1.62), temos

$$\frac{rp}{p-1}\|u_p\|_1 \leq \|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^p \leq \|\nabla u_p\|_\infty^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)\|u_p\|_\infty,$$

Ou seja,

$$\|u_p\|_1 \leq \frac{1}{r}\|u_p\|_\infty.$$

Decorre da última desigualdade que

$$\|u_p\|_1^{p-1} \leq \frac{1}{r^{p-1}}\|u_p\|_\infty^{p-1},$$

isto é,

$$r^{p-1}\frac{1}{\|u_p\|_\infty^{p-1}} \leq \frac{1}{\|u_p\|_1^{p-1}}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$\|u_p\|_\infty \leq C_0\|\nabla u_p\|_\infty$$

em que $C_0 = C_0(\Omega) > 0$. Logo,

$$\frac{1}{\|\nabla u_p\|_\infty^{p-1}} \leq \frac{C_0^{p-1}}{\|u_p\|_\infty^{p-1}},$$

e, de acordo com (1.9), obtemos

$$\limsup_{p\to 1^+} \frac{1}{\|\nabla u_p\|_\infty^{p-1}} \leq \limsup_{p\to 1^+} \frac{C_0^{p-1}}{\|u_p\|_\infty^{p-1}} = h(\Omega).1 = h(\Omega). \tag{1.64}$$

Agora, de acordo com Proposição 1.16,

$$\|\nabla u_p\|_\infty \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \|u_p\|_\infty^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\|\nabla u_p\|_\infty^{p-1} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} \|u_p\|_\infty^{\frac{p-1}{p}}. \tag{1.65}$$

Então, tomando o limite em (1.65), decorre de (1.9) que

$$h(\Omega) \leq \liminf_{p\to 1^+} \frac{1}{\|\nabla u_p\|_\infty^{p-1}} \leq \limsup_{p\to 1^+} \frac{1}{\|\nabla u_p\|_\infty^{p-1}}. \tag{1.66}$$

Portanto, de (1.64) e (1.66) concluímos que

$$h(\Omega) = \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|\nabla u_p\|_\infty^{p-1}}. \tag{1.67}$$

Por outro lado, observamos que

$$\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \|\nabla u_p\|_\infty.$$

Então,

$$h(\Omega) \leq \liminf_{p\to 1^+} \frac{1}{\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{p-1}} \leq \limsup_{p\to 1^+} \frac{1}{\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{p-1}}. \tag{1.68}$$

Decorre de (1.32) que

$$\left(\frac{mp}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \|u_p\|_1^{\frac{1}{p}} \leq \|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

Logo,

$$\frac{1}{\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{p-1}} \leq \left(\frac{p-1}{mp}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\frac{1}{\|u_p\|_1^{p-1}}\right)^p.$$

de onde concluímos que

$$\limsup_{p\to 1^+} \frac{1}{\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{p-1}} \leq h(\Omega). \tag{1.69}$$

Portanto, das expressões (1.68) e (1.69), temos

$$h(\Omega) = \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{p-1}} \tag{1.70}$$

Assim, de (1.67) e (1.70) provamos que

$$h(\Omega) = \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|\nabla u_p\|_\infty^{p-1}} = \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^{p-1}}, \tag{1.71}$$

finalizando a prova de nosso resultado. □

Anteriormente obtivemos uma caracterização do comportamento assintótico do gradiente das p-funções de torção vinculado à constante de Cheeger. É consequência de (1.63) que

$$\lim_{p\to 1^+} \|\nabla u_p\|_\infty = \lim_{p\to 1^+} \|\nabla u_p\|_{L^\infty(\partial\Omega)} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad h(\Omega) > 1 \\ \infty, & \text{se} \quad h(\Omega) < 1. \end{cases} \tag{1.72}$$

A verificação de (1.72) é análoga à prova do Lema 1.6.

Nosso próximo objetivo é a obtenção de uma cota inferior para $\|\nabla u_p\|_\infty$ quando $h(\Omega) = 1$. Utilizaremos a caracterização da constante de Cheeger apresentada no trabalho de Brasco, Lindgren e Parini em [6, section 8]. Mais precisamente, utilizaremos o fato que

$$\frac{1}{h(\Omega)} = \min_{V \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} \{\|V\|_{L^\infty(\Omega)} : -\operatorname{div} V = 1\}, \tag{1.73}$$

em que o divergente é dado por

$$\int_\Omega \langle \nabla\varphi, V\rangle \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Para isso, consideremos o campo $V = |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Então, $\|V\|_\infty = \|\nabla u_p\|_\infty^{p-1}$. De acordo com (1.73), obtemos

$$\frac{1}{h(\Omega)} \le \|\nabla u_p\|_\infty^{p-1} \text{ e, consequentemente, } \left(\frac{1}{h(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \le \|\nabla u_p\|_\infty.$$

Em particular, quando $h(\Omega) = 1$, temos

$$1 \le \liminf_{p\to 1^+} \|\nabla u_p\|_\infty. \tag{1.74}$$

Ressaltamos que, na bola (veja exemplo 1.4) e no anel (veja Teorema 1.14), temos o valor 1 como cota inferior para o gradiente. Isto é, na bola e anel, (1.74) está verificado.

A seguir, vamos relacionar a imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ com a p-função de torção. Mais precisamente, provamos que o mínimo do quociente de Rayleigh $\|\nabla u\|_p^p / \|u\|_1^p$ é atingido por u_p. Esse é o conteúdo do próximo resultado.

Teorema 1.18. *Temos*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|u_p\|_1^{p-1}} &= \min\{\|\nabla v\|_p^p : v \in W_0^{1,p}(\Omega) \;\; e \;\; \int_\Omega v\,\mathrm{d}x = 1\} \\ &= \min\{\|\nabla v\|_p^p : v \in W_0^{1,p}(\Omega) \;\; e \;\; \|v\|_1 = 1\} \end{aligned} \tag{1.75}$$

Demonstração. Definimos os conjuntos

$$\mathcal{M}_1 := \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \, : \, \int_\Omega v\,\mathrm{d}x = 1\} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_2 := \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \, : \, \|v\|_1 = 1\}$$

e a função

$$w_p := \frac{u_p}{||u_p||_1}.$$

Note que $w_p \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ e

$$\|\nabla w_p\|_p^p = \frac{\|\nabla u_p\|_p^p}{\|u_p\|_1^p} = \frac{1}{\|u_p\|_1^{p-1}},$$

pois u_p é positiva e solução fraca de (PT), satisfazendo, portanto, (1.2). Então, o funcional $v \mapsto \|\nabla v\|_p^p$ atinge (em w_p) o valor $\dfrac{1}{\|u_p\|^{p-1}}$ tanto em $\mathcal{M}_1$ quanto em $\mathcal{M}_2$.

Portanto, para provar a primeira igualdade em (1.75), é suficiente mostrar que

$$\frac{1}{\|u_p\|_1^{p-1}} \leq \|\nabla v\|_p^p, \quad \forall\, v \in \mathcal{M}_1.$$

Considere $v \in \mathcal{M}_1$. Como u_p é solução fraca de (PT), u_p minimiza o funcional energia

$$J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definido por

$$J(u) := \frac{\|\nabla u\|_p^p}{p} - \int_\Omega u\,\mathrm{d}x.$$

Então,

$$\left(\frac{1}{p}-1\right)\|u_p\|_1 = J(u_p) \leq J(cv) = c\left(\frac{c^{p-1}}{p}||\nabla v||_p^p - 1\right),$$

para qualquer constante positiva c. Ou seja,

$$c\left[p - c^{p-1}\|\nabla v\|_p^p\right] \leq (p-1)\|u_p\|_1. \tag{1.76}$$

Vamos escolher c tal que

$$p - c^{p-1}\|\nabla v\|_p^p = p - 1, \tag{1.77}$$

e então reescrevemos (1.76) como $c \leq \|u_p\|_1$. Assim, de (1.77) temos $c = \|\nabla v\|_p^{-\frac{p}{p-1}}$. Logo,

$$\|\nabla v\|_p^{-\frac{p}{p-1}} \leq \|u_p\|_1,$$

implicando que

$$\frac{1}{\|u_p\|_1^{p-1}} \leq \|\nabla v\|_p^p.$$

Para provar a segunda igualdade em (1.75) basta verificar que

$$\frac{1}{\|u_p\|_1^{p-1}} \leq \|\nabla v\|_p^p, \quad \forall\, v \in \mathcal{M}_2.$$

Como $|v| \in \mathcal{M}_1$ e $\|\,\nabla|v|\,\|_p^p = \|\nabla v\|_p^p$ (uma propriedade das funções em $W_0^{1,p}(\Omega)$), temos, utilizando a primeira igualdade em (1.75),

$$\frac{1}{\|u_p\|_1^{p-1}} \leq \|\,\nabla|v|\,\|_p^p \leq \|\nabla v\|_p^p,$$

de onde concluímos a prova de nosso resultado. $\square$

Observando o resultado anterior, percebemos a possibilidade de construir uma função crescente a partir de

$$\mu_p := \frac{1}{\|u_p\|_1^{p-1}}.$$

Fizemos as contas necessárias e as apresentamos na próxima proposição.

Proposição 1.19. *A função* $p \mapsto \left(\frac{\mu_p}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{p}}$ *é crescente para* $p \in (1, \infty)$.

Demonstração. Considere $p_1, p_2 \in (1, \infty)$ tais que $p_1 < p_2$. Sejam u_{p_1} e u_{p_2} as funções de torção em p_1 e p_2, respectivamente.

A definição de μ_{p_1} (veja 1.75) garante que

$$\mu_{p_1} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u_{p_2}|^{p_1}\, dx}{\left(\int_\Omega u_{p_2}\, dx\right)^{p_1}}. \tag{1.78}$$

Isso implica que $\mu_{p_1}\left(\int_\Omega u_{p_2}\, dx\right)^{p_1} \leq \int_\Omega |\nabla u_{p_2}|^{p_1}\, dx$.

Aplicando desigualdade de Hölder com o expoente conjugado $q = \dfrac{p_2}{p_1}$ em (1.78) e utilizando a definição de μ_{p_2}, obtemos

$$\begin{aligned}\mu_{p_1}\left(\int_\Omega u_{p_2}\, dx\right)^{p_1} &\leq \int_\Omega |\nabla u_{p_2}|^{p_1}\, dx \leq \left(\int_\Omega (|\nabla u_{p_2}|^{p_1})^{\frac{p_2}{p_1}}\, dx\right)^{\frac{p_1}{p_2}} |\Omega|^{1-\frac{p_1}{p_2}} \\ &= \left(\mu_{p_2}\left(\int_\Omega u_{p_2}\, dx\right)^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} |\Omega|^{1-\frac{p_1}{p_2}} = (\mu_{p_2})^{\frac{p_1}{p_2}}\left(\int_\Omega u_{p_2}\right)^{p_1} |\Omega|^{1-\frac{p_1}{p_2}},\end{aligned}$$

donde segue-se $(\mu_{p_1})^{\frac{1}{p_1}} \leq (\mu_{p_2})^{\frac{1}{p_2}} |\Omega|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}$.

Ou seja,

$$\left(\frac{\mu_{p_1}}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\frac{\mu_{p_2}}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{p_2}},$$

o que prova que a função $p \mapsto \left(\frac{\mu_p}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{p}}$ é crescente para $p \in (1, \infty)$. □

Capítulo

2

Funções de torção e o problema de Cheeger: uma abordagem fracionária

Neste capítulo, estudaremos o problema de Cheeger e a função de torção no contexto dos espaços de Sobolev fracionários $W_0^{s,p}(\Omega)$, em que $0 < s < 1$, $1 < p < N/s$ e Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) com fronteira de Lipschitz. Os espaços fracionários $W_0^{s,p}(\Omega)$ serão definidos na Seção 2.1, onde também serão apresentados alguns resultados relacionados.

Para fins de apresentação, alteraremos ligeiramente nossa terminologia: s-constante de Cheeger e (s,p)-função de torção para indicar respectivamente, a constante de Cheeger e a função de torção fracionárias.

A função de torção fracionária é a solução do problema de torção fracionário relacionado aos operadores (s,p)- Laplaciano fracionários $(-\Delta)_p^s$ que já foram definidos na introdução deste trabalho de tese e que terão uma ênfase maior na Seção 2.3.

Os operadores Laplaciano fracionários $(-\Delta)^s$ aparecem em vários campos, como a mecânica contínua, fenômenos de transição de fase, dinâmica populacional, processamento de imagens, teoria de jogos, matemática financeira e processo de Lévy. Veja [3],

[14], [4], [36], [25] e [41] e suas respectivas referências.

Nossas atenções foram centralizadas no estudo do caso p tendendo a 1. Neste sentido, nossa linha de pesquisa não abrangeu o estudo detalhado do comportamento dos operadores, espaços e soluções de problemas quando $s \to 1^-$. Alguns pesquisadores dão uma ênfase maior para o $s \to 1^-$. Por exemplo Nezza, Palatucci e Valdinoci em [20] mostraram que

$$\lim_{s \to 1^-} (-\Delta)^s u = (-\Delta)u. \tag{2.1}$$

A seminorma de Gagliardo em $\mathbb{R}^N$, (objeto que será definido na seção inicial deste capítulo) não converge, quando $s \to 1^-$ para a norma do espaço usual $W_0^{1,p}(\Omega)$. O fator $(1-s)^{1/p}$ retifica a situação, como pode ser visto em [5].

Outro elemento importante neste capítulo é o s- perímetro fracionário. Ele será definido no decorrer do texto e utilizado na definição da s- constante de Cheeger. No que tange ao comportamento limite do s- perímetro fracionário, quando $s \to 1^-$ e $s \to 0^+$, resultados de Bourgain, Brezis e Mironescu [5] mostram que para todo conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}^N$ de perímetro finito, obtem-se

$$\lim_{s \to 1^-} (1-s)P_s(E) = \alpha_N P(E), \tag{2.2}$$

em que $P(E)$ é o perímetro de E (definido no Capítulo 1) e α_N é uma constante dependendo de N.

Nosso principal objetivo neste capítulo será generalizar os resultados contidos no artigo [10] para o contexto de espaços fracionários. Para lidar com estes espaços, utilizamos como base os artigos [6] e [20]; em [6] os autores mostraram vários resultados sobre a s-constante de Cheeger, mas não a relacionaram com as (s,p)-funções de torção.

Apresentaremos, na Seção 2.2, o problema de Cheeger fracionário e, na Seção 2.3, o problema de Dirichlet fracionário e as (s,p)-funções de torção. Já na Seção 2.4 faremos a exposição de nossos principais resultados do capítulo. Outros resultados relacionados às (s,p)- funções de torção, como a versão fracionária para o mínimo do quociente de Rayleigh apresentado no Capítulo 1, estarão na Seção 2.5.

2.1 Os espaços $W_0^{s,p}(\Omega)$

Considerando um aberto limitado Ω com fronteira de Lipschitz, vamos definir os espaços de Sobolev fracionários $W^{s,p}(\Omega)$.

Consideremos $s \in (0,1)$ fixo. Para todo $p \in [1,+\infty)$, definimos

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}, \tag{2.3}$$

isto é, o espaço de Banach intermediário (no sentido das inclusões que estão registradas no Apêndice B, Seções B.1 e B.2) entre $L^p(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left([u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} + \|u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.4}$$

em que

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.5}$$

é chamado *seminorma de Gagliardo* de u. (Note que $[k]_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$ para a função constante k no domínio limitado Ω.)

Dada uma função $u \in W^{s,p}(\Omega)$, ao definirmos $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, a seminorma de Gagliardo pode ainda depender de valores em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, como mostra a identidade

$$[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.6}$$

Exemplo 2.1. Considere $E \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e χ_E a função característica de

E. Temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\chi_E(x)-\chi_E(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_E\int_E\frac{|\chi_E(x)-\chi_E(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\int_{E^c}\int_E\frac{|\chi_E(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{E^c}\int_E\frac{1}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

em que $E^c = \mathbb{R}^N \setminus E$. ◁

Se $s \geq 1$, a definição (2.3) não pode ser aplicada. De fato, para cada $s \geq 1$ e toda função mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}$, se

$$\int_\Omega\int_\Omega\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty,$$

então u é constante em cada subconjunto conexo de Ω, veja [8, Proposition 2].

Assim, no caso em que $s > 1$ não é um inteiro, escrevemos $s = m + \sigma$, em que m é um inteiro e $\sigma \in (0,1)$, e definimos

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega) \,:\, \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+\sigma}} \in L^p(\Omega\times\Omega),\ \forall\, |\alpha| = m \right\},$$

em que $D^\alpha u$ denota a derivada fraca de u relativa ao multi-índice α. $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach munido da norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{W^{\sigma,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Seja Ω um aberto limitado com fronteira de Lipschitz. Para $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$, vamos considerar o espaço $W_0^{s,p}(\Omega)$, definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma

$$\|u\| := [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_p, \tag{2.7}$$

em que

$$[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.8}$$

é finita.

Ressaltamos que, de acordo com a Proposição B.1, todas as funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ estão contidas em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Em particular, as funções de torção definidas no capítulo anterior pertencem a $W_0^{s,p}(\Omega)$.

As funções em $W_0^{s,p}(\Omega)$ possuem uma extensão natural para $\mathbb{R}^N$, ao definirmos $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Como já visto, a seminorma de Gagliardo em $\mathbb{R}^N$ pode depender de valores em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Contudo (veja [6, Proposition B.1]), se $sp \neq 1$ e $\partial\Omega$ for de Lipschitz, então o espaço $W_0^{s,p}(\Omega)$ coincide com o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ relativo à norma (2.4)

Portanto, as normas (2.7) e (2.4) são equivalentes e o espaço $W_0^{s,p}(\Omega)$ com a norma (2.7) coincide, como espaço de Banach, com $W_0^{s,p}(\Omega)$ munido da norma (2.4).

Adicionalmente, a desigualdade de Poincaré fracionária (que pode ser vista em [6, Lemma 2.4]) afirma que

$$\|u\|_p \leq C_{N,s,p,\Omega}[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.9}$$

Por um argumento de densidade, (2.9) é válida para toda função $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$.

Como consequência, $[\cdot]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$ é uma norma em $W_0^{s,p}(\Omega)$ equivalente à norma definida em (2.7), pois

$$[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_p \leq [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} + C_{N,s,p,\Omega}[u]_{s,p} = (C_{N,s,p,\Omega} + 1)[u]_{s,p}. \tag{2.10}$$

Em todo este capítulo vamos considerar $W_0^{s,p}(\Omega)$ com a norma $[\cdot]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$. Pode-se mostrar que esse espaço é uniformemente convexo e, portanto, reflexivo (veja [31]).

Resultados de imersão dos espaços de Sobolev fracionários $W^{s,p}(\Omega)$ podem ser vistos, por exemplo, em [39] e [20]. Aqui vamos expor um desses resultados, que será importante neste capítulo. Para isso, definimos o expoente crítico fracionário p_s^* por

$$p_s^* = \frac{Np}{N - sp}.$$

Ressaltamos que consideraremos apenas o caso em que o domínio Ω é limitado e possui fronteira de Lipschitz.

Nesse caso, os espaços $W^{s,p}(\Omega)$ estão continuamente imersos em $L^q(\Omega)$; com $q \in [1, p_s^*]$.

Teorema 2.2. *Seja $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$ tal que $sp < N$. Então, existe uma constante positiva $C_{N,s,p,\Omega}$ tal que, para toda $u \in W^{s,p}(\Omega)$ temos*

$$\|u\|_q \leq C_{N,s,p,\Omega} \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

para todo $q \in [1, p_s^*]$.

Pode-se também mostrar (veja [6, Corollary 2.8]) que o espaço $W_0^{s,p}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p_s^*)$.

2.2 O problema de Cheeger fracionário

Definimos o s-perímetro fracionário de um conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ e $s \in (0,1)$, por

$$P_s(E) = [\chi_E]_{s,1} = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\chi_E(x) - \chi_E(y)|}{|x-y|^{N+s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.11}$$

em que χ_E é a função característica e $|\cdot|$ a norma euclidiana do $\mathbb{R}^N$.

Motivações para se definir o s - perímetro fracionário podem ser vistas no trabalho de Cinti, Serra e Valdinoci [16].

Se o perímetro padrão do conjunto E, isto é, $P(E)$ (como definido no capítulo 1) e a medida de Lebesgue de E forem finitos, então pode-se mostrar que $P_s(E) < \infty$ (veja [6, Corollary 4.3]).

Como visto no Exemplo 2.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\chi_E(x) - \chi_E(y)|}{|x-y|^{N+s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{E^c}\int_E \frac{1}{|x-y|^{N+s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

em que $E^c = \mathbb{R}^N \setminus E$. Ou seja,

$$P_s(E) = 2\int_{E^c}\int_E \frac{1}{|x-y|^{N+s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A versão fracionária do problema de Cheeger consiste em minimizar o quociente (1.1) com $P(E)$ substituído por $P_s(E)$. Ou seja, o problema de Cheeger fracionário é o problema de minimização

$$h_s(\Omega) = \inf_{E\subset\Omega} \frac{P_s(E)}{|E|}, \tag{2.12}$$

e $h_s(\Omega)$ é chamada s-constante de Cheeger de Ω.

Podemos cotar $h_s(\Omega)$ inferiormente por uma constante positiva. Para tanto, precisamos do seguinte resultado, que pode ser encontrado em [20, Lemma 6.1] e cuja prova optamos por reproduzir.

Lema 2.3. *Fixe $x \in \mathbb{R}^N$. Seja $p \in [1, +\infty)$, $s \in (0,1)$ e $E \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável com medida finita. Então*

$$\int_{E^c} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}} \geq C|E|^{\frac{-sp}{N}},$$

em que $C = \dfrac{N\omega_N^{\frac{N+sp}{N}}}{sp} > 0.$

Demonstração. Defina $\rho = \left(\frac{|E|}{w_N}\right)^{\frac{1}{N}}$. Observe que

$$\begin{aligned}|B_\rho(x)| &= |(E^c \cup E) \cap B_\rho(x)| = |(B_\rho(x) \cap E) \cup (B_\rho(x) \cap E^c)| \\ &= |B_\rho(x) \cap E| + |B_\rho(x) \cap E^c|.\end{aligned}$$

Assim,

$$|E^c \cap B_\rho(x)| = |B_\rho(x)| - |E \cap B_\rho(x)| = |E| - |E \cap B_\rho(x)|.$$

Note que

$$\begin{aligned}|E| &= |E \cap (B_\rho(x) \cap B^c_\rho(x))| = |(E \cap B_\rho(x)) \cup (E \cap B^c_\rho(x))| \\ &= |B_\rho(x) \cap E| + |E \cap B^c_\rho(x)|.\end{aligned}$$

Daí,

$$|E \cap B^c_\rho(x))| = |E| - |B_\rho(x) \cap E| = |E^c \cap B_\rho(x)|. \tag{2.13}$$

Deste modo,

$$\int_{E^c} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}} = \int_{E^c \cap B_\rho(x)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}} + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}}$$

Se $y \in E^c \cap B_\rho(x)$, então $\dfrac{1}{|x-y|^{N+sp}} \geq \dfrac{1}{\rho^{N+sp}}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{E^c} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}} &\geq \int_{E^c \cap B_\rho(x)} \frac{\mathrm{d}y}{\rho^{N+sp}} + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}} \\
&= \frac{|E^c \cap B_\rho(x)|}{\rho^{N+sp}} + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}} \\
&= \frac{|E \cap B^c_\rho(x)|}{\rho^{N+sp}} + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}} \\
&= \frac{1}{\rho^{N+sp}} \int_{E \cap B^c_\rho(x)} \mathrm{d}y + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}} \\
&= \int_{E \cap B^c_\rho(x)} \frac{\mathrm{d}y}{\rho^{N+sp}} + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $y \in E \cap B^c_\rho(x)$, então $y \in E$ e $y \notin B_\rho(x)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{E^c} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}} &\geq \int_{E \cap B^c_\rho(x)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}} + \int_{E^c \cap B^c_\rho(x)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}} \\
&= \int_{B^c_\rho(x)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+sp}} = \int_{B^c_\rho(0)} \frac{\mathrm{d}y}{|z|^{N+sp}} \\
&= \int_\rho^{+\infty} N w_N \frac{r^{N-1}}{r^{N+sp}} dr = N w_N \int_\rho^{+\infty} r^{-(1+sp)} \mathrm{d}r \\
&= \frac{N w_N}{sp} \left(\frac{|E|}{w_N} \right)^{\frac{-sp}{N}},
\end{aligned}$$

finalizando a prova do afirmado. □

Na sequência, o resultado onde provamos que $h_s(\Omega)$ está cotado inferiormente por uma constante positiva.

Proposição 2.4. $h_s(\Omega) \geq \dfrac{2N\omega_N^{\frac{N+s}{N}}}{s} |\Omega|^{\frac{-s}{N}} > 0.$

Demonstração. Considerando $p = 1$ no Lema 2.3, temos

$$\int_{E^c} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+s}} \geq C_{N,s,p} |E|^{\frac{-s}{N}}, \tag{2.14}$$

em que $C_{N,s,p} = \dfrac{N\omega_N}{sp\omega_N^{(-s/N)}}$. Então, integrando (2.14) temos

$$2\int_E \int_{E^c} \frac{dy\, dx}{|x-y|^{N+s}} \geq 2\int_E C|E|^{\frac{-s}{N}} dx.$$

Logo,

$$\frac{P_s(E)}{|E|} \geq \frac{2N\omega_N^{\frac{N+s}{N}}}{s}|E|^{\frac{-s}{N}} \geq \frac{2N\omega_N^{\frac{N+s}{N}}}{s}|\Omega|^{\frac{-s}{N}}.$$

Portanto, temos

$$h_s(\Omega) = \inf_{E\subset\Omega} \frac{P_s(E)}{|E|} \geq \frac{2N\omega_N^{\frac{N+s}{N}}}{s}|\Omega|^{\frac{-s}{N}} > 0.$$

□

2.3 Um problema de Dirichlet fracionário e as (s,p) funções de torção

Nesta seção estudamos o problema de Dirichlet fracionário

$$(P_f) : \begin{cases} (-\Delta_p)^s u &= f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

em que

$$(-\Delta_p)^s u(x) = 2 \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, dy$$

é o operador (s,p)-Laplaciano fracionário, $p > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) um domínio limitado com fronteira de Lipschitz e $f \in L^{p'}(\Omega)$. O problema de torção fracionário é o caso particular de (P_f) quando $f = 1$.

Procuramos as soluções de (P_f) no espaço de Sobolev $W_0^{s,p}(\Omega)$, $0 < s < 1$ e $1 < p < N/s$.

Definição 2.5. *Dizemos que uma função* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *é uma solução fraca do problema de Dirichlet* (P_f) *se*

$$\langle(-\Delta_p)^s u, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega), \tag{2.15}$$

em que

$$\langle(-\Delta_p)^s u, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A motivação para esta definição pode ser encontrada em [31], onde também os autores mostram que o funcional linear

$$W_0^{s,p}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \langle(-\Delta_p)^s u, \varphi\rangle$$

é contínuo, para cada $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$.

Na sequência, vamos mostrar a existência e unicidade de soluções para (P_f). A unicidade decorre do Princípio de Comparação para o p-Laplaciano fracionário, devido a Lindgren e Lindqvist, veja [39, Lemma 9].

Lema 2.6 (Princípio da Comparação)**.** *Sejam* u *e* v *funções contínuas em* $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio. Suponha que*

(i) $v \geq u$ *em* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$

(ii) $\langle(-\Delta_p)^s v(x), \varphi\rangle \geq \langle(-\Delta_p)^s u(x), \varphi\rangle$, *para* $x \in \Omega$ *e* $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$, *com* $\varphi \geq 0$.

Então, $v \geq u$ *em* Ω, *ou seja,* $v \geq u$ *em* $\mathbb{R}^N$.

O próximo resultado garante a existência de uma única solução para (P_f).

Lema 2.7. *O problema* (P_f) *possui uma única solução* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *quando* $f \in L^{p'}(\Omega)$.

Demonstração. Considere o funcional energia $F_p^s : W_0^{s,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (P_s), definido por

$$F_p^s(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_\Omega f(x)u\mathrm{d}x,\ \forall\, u \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

O functional F_p^s é de classe C^1 e sua derivada em $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ é dada por

$$\langle (F_p^s)'(u), \varphi\rangle = \langle (-\Delta_p)^s u, \varphi\rangle - \int_\Omega f(x)\varphi\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

Portanto, as soluções fracas de (P_f) são, precisamente, os pontos críticos de F_p^s.

Mostraremos que o funcional é limitado inferiormente. Pela desigualdade de Hölder e pelo Teorema 2.2 (de imersão), obtemos

$$\left|\int_\Omega fu\mathrm{d}x\right| \le \int_\Omega |fu|\mathrm{d}x \le \|f\|_{p'}\|u\|_p \le S_{N,s,p,\Omega}\|f\|_{p'}[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}, \tag{2.16}$$

em que p' é o expoente conjugado de p e $S_{N,s,p,\Omega} > 0$ é uma constante. Portanto,

$$F_p^s(u) \ \ \ge\ \ \frac{1}{p}[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} - \left|\int_\Omega fu\mathrm{d}x\right| \ge \frac{1}{p}[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} - S_{N,s,p,\Omega}\|f\|_{p'}[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)},$$

mostrando que F_p^s é limitado inferiormente (note que a função $t \mapsto (\frac{t^p}{p} - kt)$ é limitada inferiormente por seu valor mínimo $-\frac{k^{p'}}{p'}$).

Considere $\{u_n\} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ uma sequência minimizante. Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} F_p^s(u_n) = \inf_{v \in W_0^{s,p}(\Omega)} F_p^s(v).$$

Então, $\{F_p^s(u_n)\}$ é limitada. Logo, existe $M > 0$ tal que

$$\frac{1}{p}[u_n]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} - S_{N,s,p,\Omega}\|f\|_{p'}[u_n]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \le M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

implicando que $\{u_n\}$ é limitada (note que $\lim_{|t|\to\infty}(\frac{t^p}{p} - kt) = +\infty$).

Como $W_0^{s,p}(\Omega)$ é reflexivo e $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $W_0^{s,p}(\Omega)$, podemos assumir (passando a um subsequência, se necessário) que $\{u_n\}$ converge fracamente para uma função $u \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$: $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{s,p}(\Omega)$. Além disso, como $W_0^{s,p}(\Omega)$ é uniformemente convexo, temos

$$[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{n\to\infty}[u_n]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = \lim_{n\to\infty}[u_n]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.17}$$

Uma vez que o funcional linear $u \mapsto \int_\Omega f u \mathrm{d}x$ é contínuo (uma consequência de (2.16)), temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n u_n \mathrm{d}x = \int_\Omega f u \mathrm{d}x. \tag{2.18}$$

Decorre de (2.17) e (2.18) que

$$\begin{aligned} F_p^s(u) &= \frac{1}{p}[u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} - \int_\Omega f u \mathrm{d}x \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p}[u_n]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} - \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f u_n \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} F_p^s(u_n) = \inf_{v\in W_0^{s,p}(\Omega)} F_p^s(v), \end{aligned}$$

mostrando que $F_p^s(u) = \inf_{v\in W_0^{s,p}(\Omega)} F_p^s(v)$.

Assim, u é um ponto crítico de F_p^s e, consequentemente, solução fraca de (P_f).

Agora provamos a unicidade da solução obtida. Considere u_1 e u_2 soluções para (P_f). Então,

$$\langle(-\Delta_p)^s u_1, \varphi\rangle = \int f\varphi = \langle(-\Delta_p)^s u_2, \varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega),\ \varphi \geq 0.$$

Como $u_1 = u_2 = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, decorre do Princípio da Comparação (Lema 2.6) que $u_1 \leq u_2$ e $u_2 \leq u_1$. Logo, $u_1 = u_2$ e, portanto, a solução é única. □

Observação 2.1. O Princípio de Comparação mostra que, se f for não-negativa, então a solução fraca de (P_f) também é não negativa. De fato, considerando w_p^s a solução fraca de

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u &=& 0, \quad x \in \Omega \\ u &=& 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

e u_p^s a solução do problema de (P_f), decorre do Lema 2.6 que $0 = w_p^s \leq u_p^s$ em Ω, mostrando que u_p^s não é negativa em Ω.

Passemos agora à definição das (s,p)-funções de torção em Ω. Elas são as únicas soluções do problema

$$(PT_f) : \begin{cases} (-\Delta_p)^s u &=& 1 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &=& 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

O problema (PT_f) é chamado (s,p)-*problema de torção.*

Os pontos críticos $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ do funcional F_p^s (com $f \equiv 1$), definido no Lema 2.7, são soluções fracas de (PT_f), isto é, satisfazem

$$\langle(-\Delta_p)^s u, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi \mathrm{d}x, \ \forall\ \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

Em particular, considerando $\varphi = u$, obtemos

$$[u]_{s,p}^p = \|u\|_1. \tag{2.19}$$

Além disso, é consequência do Lema 2.7 a existência e unicidade de solução para o (s,p)-problema de torção.

No decorrer deste capítulo vamos denotar por u_p^s a (s,p)-função de torção em Ω. Decorre da Observação 2.1 que $u_p^s \geq 0$ para todo x em Ω.

No caso especial $\Omega = B_R$ (a bola de centro zero e raio R), diferentemente do capítulo anterior onde temos a expressão das p-funções de torção, nos espaços de Sobolev fracionários não temos uma expressão explícita para as (s,p)-funções de torção, exceto para o caso $p = 2$ (veja [27]).

Ressaltamos também que, quando $f \in L^\infty(\Omega)$ e Ω é suficientemente suave, digamos com fronteira pelo menos de classe $C^{1,1}$, as soluções fracas de (P_f) são β-Hölder contínuas até a fronteira, para algum $\beta \in (0,1)$. (Veja [30]). Assim, essa regularidade vale para as (s, p)-funções de torção numa bola do $\mathbb{R}^N$.

No capítulo anterior destacamos a expressão da constante de Cheeger em uma bola do $\mathbb{R}^N$ com raio R e centro na origem: $h(B_R) = \frac{N}{R}$.

O caso da s-constante de Cheeger $h_s(B)$ de uma bola N-dimensional no $\mathbb{R}^N$ é mais delicado. Não sabemos seu valor numérico, mas conseguimos fornecer uma localização, utilizando o Lema 2.3 deste capítulo e também a Proposição 7.4 da referência [6], que estabelece que

$$h_s(\Omega) \leq \frac{2N\omega_N}{(1-s)s} h(\Omega)^s, \tag{2.20}$$

em que ω_N é o volume da bola unitária N-dimensional de $\mathbb{R}^N$. Veja o próximo resultado.

Lema 2.8. Considere B uma bola do $\mathbb{R}^N$. Temos

$$\frac{2N\omega_N^{\frac{N+s}{N}}}{s|B|^{\frac{s}{N}}} \leq h_s(B) \leq \frac{2N\omega_N}{(1-s)s} h(B)^s. \tag{2.21}$$

Demonstração. De acordo com (2.20) temos

$$h_s(B) \leq \frac{2N\omega_N}{(1-s)s} h(B)^s. \tag{2.22}$$

Pela Proposição 2.4, temos

$$h_s(B) \geq \frac{2N\omega_N^{\frac{N+s}{N}}}{s|B|^{\frac{s}{N}}}. \tag{2.23}$$

Daí decorre o afirmado. □

2.4 Nossos resultados em $W_0^{s,p}(\Omega)$

Nosso objetivo principal nesta seção é provar algumas estimativas para as (s,p)-funções de torção e mostrar que

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_\infty^{p-1}} = h_s(\Omega) = \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_1^{p-1}}.$$

Esta é a versão fracionária da caracterização da constante de Cheeger por meio do comportamento assintótico das p-funções de torção (quando p tende a 1), obtida originalmente por Bueno e Ercole em [10].

Para tal, consideremos o primeiro autovalor fracionário $\lambda_{1,p}^s(\Omega)$ de $(-\Delta_p)^s$, definido como o menor número λ tal que o problema

$$(PA_f): \begin{cases} (-\Delta_p)^s u &= \lambda |u|^{p-2}u \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

possui solução não trivial. Sua caracterização variacional é dada por (veja [6])

$$\lambda_{1,p}^s(\Omega) := \inf\left\{ [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}^p \,:\, u \in W_0^{s,p}(\Omega), \|u\|_p = 1 \right\} \tag{2.24}$$

As soluções (PA_f) são chamadas primeiras autofunções do p-Laplaciano fracionário. Essas pertencem a $L^\infty(\Omega)$ e são ou positivas ou negativas em quase todo ponto de Ω. Além disso, são únicas, a menos de um múltiplo escalar. (Veja [23, Teorema 3.2] e [7, Teorema 2.8].)

Denotamos por e_p^s a primeira autofunção positiva normalizada na norma L^∞, isto é, $\|e_p^s\|_\infty = 1$ e

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s e_p^s &= \lambda_{1,p}^s(\Omega)(e_p^s)^{p-1}, \quad \text{em} \quad \Omega \\ e_p^s &= 0, \qquad\qquad\qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

significando que

$$\langle(-\Delta_p)^s e_p^s, \varphi\rangle \ = \lambda_{1,p}^s(\Omega)\int_\Omega (e_p^s)^{p-1}\varphi \mathrm{d}x, \forall \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega). \tag{2.25}$$

Considerando $\varphi = e_p^s$ nesta equação, obtemos

$$\langle(-\Delta_p)^s e_p^s, e_p^s\rangle \ = [e_p^s]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = \lambda_{1,p}^s(\Omega)\|e_p^s\|_p^p. \tag{2.26}$$

Mais informações sobre o problema (PA_f) e o primeiro autovalor do p-Laplaciano fracionário podem ser encontradas, por exemplo, em [39] e [23].

Denotamos por z_p^s a solução de (P_f). Mostraremos que, para $f \in L^\infty(\Omega)\setminus\{0\}$, temos cotas superiores para u_p^s e $\lambda_{1,p}^s(\Omega)$.

Proposição 2.9. *Seja $z_p^s \in W_0^{s,p}(\Omega)$ a solução fraca de (P_f), com $f \in L^\infty(\Omega)\setminus\{0\}$. Então,*

$$\|f\|_\infty^{-\frac{1}{p-1}} z_p^s \le u_p^s \ \text{q.t.p. em } \Omega \tag{2.27}$$

e

$$\lambda_{1,p}^s(\Omega) \le \|f\|_\infty \left(\frac{|\Omega|}{\|z_p^s\|_1}\right)^{p-1}. \tag{2.28}$$

Demonstração. Como z_p^s e u_p^s são iguais a zero em $\mathbb{R}^N\setminus\Omega$ e

$$\begin{aligned}\left\langle(-\Delta_p)^s\left(\|f\|_\infty^{-\frac{1}{p-1}} z_p^s\right), \varphi\right\rangle &= \|f\|_\infty^{-1}\langle(-\Delta_p)^s z_p^s, \varphi\rangle = \|f\|_\infty^{-1}\int_\Omega f\varphi \mathrm{d}x \\ &\le \|f\|_\infty^{-1}\|f\|_\infty \int_\Omega \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi \mathrm{d}x \\ &= \langle(-\Delta)_p^s u_p^s, \varphi\rangle, \ \forall\, 0 \le \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega), \end{aligned} \tag{2.29}$$

decorre do Lema (2.6) que

$$\|f\|^{-\frac{1}{p-1}} z_p^s \le u_p^s \ \text{q.t.p. em } \Omega. \tag{2.30}$$

Pela desigualdade de Hölder e da caracterização (2.24), temos

$$\lambda_{1,p}^s(\Omega) \leq \frac{[z_p^s]_{s,p}^p}{\|z_p^s\|_p^p} = \frac{\int_\Omega f z_p^s \mathrm{d}x}{\|z_p^s\|_p^p} \leq \frac{\|f\|_\infty \|z_p^s\|_1}{\|z_p^s\|_p^p} \tag{2.31}$$

$$\leq \frac{\|f\|_\infty \|z_p^s\|_1 |\Omega|^{p-1}}{\|z_p^s\|_1^p} = \|f\|_\infty \left(\frac{|\Omega|}{\|z_p^s\|_1} \right)^{p-1}, \tag{2.32}$$

concluindo a demonstração. □

Como consequência da Proposição 2.9, estabeleceremos uma cota superior para as primeiras autofunções positivas fracionárias normalizadas na norma L^∞ e relacionaremos $\lambda_{1,p}^s(\Omega)$ com as (s,p)-funções de torção u_p^s.

Corolário 2.10. *Temos*

$$e_p{}^s \leq \lambda_{1,p}^s(\Omega)^{\frac{1}{p-1}} u_p^s \quad \textit{q.t.p. em } \Omega \tag{2.33}$$

e

$$\frac{1}{\|u_p^s\|_\infty^{p-1}} \leq \lambda_{1,p}^s(\Omega) \leq \frac{|\Omega|^{p-1}}{\|u_p^s\|_1^{p-1}}. \tag{2.34}$$

Demonstração. Considerando $z_p^s = e_p^s$ e $f = \lambda_{1,p}^s(\Omega)(e_p^s)^{p-1}$ em (2.27), obtemos

$$\|\lambda_{1,p}^s(\Omega)(e_p^s)^{p-1}\|_\infty^{-\frac{1}{p-1}} e_p^s \leq u_p^s.$$

Segue-se daí

$$\lambda_{1,p}^s(\Omega)^{-\frac{1}{p-1}} \|e_p^s\|_\infty^{-1} e_p^s \leq u_p^s.$$

Como $\|e_p^s\|_\infty = 1$, temos

$$e_p^s \leq \lambda_{1,p}^s(\Omega)^{\frac{1}{p-1}} u_p^s \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

provando (2.33).

Agora, de (2.33) decorre

$$1 = \|e_p^s\|_\infty \leq \lambda_{1,p}(\Omega)^{\frac{1}{p-1}} \|u_p^s\|_{\cdot\infty}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{\|u_p^s\|_\infty^{p-1}} \leq \lambda_{1,p}^s(\Omega),$$

que é a primeira desigualdade em (2.34). A segunda desigualdade decorre imediatamente de (2.28) ao tomarmos $f = 1$ e $z_p^s = u_p^s$. $\square$

Decorre de (2.33) que $u_p^s > 0$ q.t.p. em Ω, pois e_p^s e $\lambda_{1,p}^s(\Omega)$ são ambos estritamente maiores do que zero.

Observe que o Corolário 2.10 estabelece o vínculo entre o (s,p)-*problema de torção* e o problema de autovalor (PA_f).

Na sequência, estimaremos o quociente $\|u_p^s\|_\infty / \|u_p^s\|_1$, o que nos permitirá obter, ao aplicarmos (2.34), o resultado

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_\infty^{p-1}} = h_s(\Omega) = \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_1^{p-1}}.$$

Proposição 2.11. *Considere $z_p^s \in W^{s,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ não negativa, solução fraca de (P_f) com $f \in L^\infty(\Omega)$. Então $z_p^s \in L^\infty(\Omega)$ e*

$$\frac{\|z_p^s\|_\infty}{\|z_p^s\|_1} \leq \frac{1}{|B_1|}\left(\frac{sp + N(p-1)}{sp}\right)^{\frac{sp+N(p-1)}{sp}} \left(\frac{\|f\|_\infty}{\lambda_{1,p}^s(B_1)\|z_p^s\|_\infty^{p-1}}\right)^{\frac{N}{sp}}. \tag{2.35}$$

Demonstração. Para cada $k > 0$, considere o conjunto

$$A_k = \{x \in \Omega : z_p^s(x) > k\}.$$

Como $z_p^s \in W_0^{s,p}(\Omega)$ e $z_p^s \geq 0$ em Ω (veja a Observação 2.1), a função

$$(z_p^s - k)^+ = \max\{z_p^s - k, 0\} = \begin{cases} z_p^s - k, & \text{se } z_p^s > k \\ 0, & \text{se } z_p^s \leq k \end{cases}$$

pertence a $W_0^{s,p}(\Omega)$.

Tomando $\varphi = (z_p^s - k)^+$ em (2.15), vem

$$\left\langle (-\Delta_p)^s z_p^s, (z_p^s - k)^+ \right\rangle = \int_{A_k} f(x)(z_p^s - k)\mathrm{d}x. \tag{2.36}$$

Vamos mostrar que

$$[(z_p^s - k)^+]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \langle (-\Delta_p)^s z_p^s, (z_p^s - k)^+ \rangle.$$

De acordo com [23], temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|z_p^s(x) - z_p^s(y)|^{p-2}(z_p^s(x) - z_p^s(y))((z_p^s - k)^+(x) - (z_p^s - k)^+(y))}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \geq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|(z_p^s - k)^+(x) - (z_p^s - k)^+(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Então, de (2.36) e (2.37) decorre que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|(z_p^s - k)^+(x) - (z_p^s - k)^+(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \int_{A_k} (z_p - k) f \mathrm{d}x \leq \|f\|_\infty \int_{A_k} (z_p^s - k)\mathrm{d}x.$$

Ou seja,

$$[(z_p^s - k)^+]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \int_{A_k} (z_p^s - k) f \mathrm{d}x \leq \|f\|_\infty \int_{A_k} (z_p^s - k)\mathrm{d}x. \tag{2.38}$$

Tome então $k > 0$ tal que $|A_k| > 0$ e fixe uma bola B do $\mathbb{R}^N$. Aplicando o Lema 2.17

no domínio limitado $A_k \subset \mathbb{R}^N$, obtemos

$$|B_1|^{\frac{sp}{N}} \lambda_{1,p}^s(B_1) \leq |A_k|^{\frac{sp}{N}} \lambda_{1,p}^s(A_k). \tag{2.39}$$

Por (2.39) e (2.24), temos

$$|B_1|^{\frac{sp}{N}} |A_k|^{-\frac{sp}{N}} \lambda_{1,p}^s(B_1) \leq \lambda_{1,p}^s(A_k) \leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|(z_p^s-k)^+(x)-(z_p^s-k)^+(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_{A_k}(z_p^s-k)^p\mathrm{d}x},$$

implicando que

$$\int_{A_k}(z_p^s-k)^p\mathrm{d}x \leq \frac{|A_k|^{\frac{sp}{N}}[(z_p^s-k)^+]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}. \tag{2.40}$$

Por outro lado, da desigualdade de Hölder vem

$$\begin{aligned}\left(\int_{A_k}(z_p^s-k)\mathrm{d}x\right) &\leq \left(\int_{A_k}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{A_k}(z_p^s-k)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= |A_k|^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{A_k}(z_p^s-k)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}\tag{2.41}$$

As desigualdades (2.40) e (2.41) implicam que

$$\left(\int_{A_k}(z_p^s-k)\mathrm{d}x\right)^p \leq |A_k|^{p-1}\left(\int_{A_k}(z_p^s-k)^p\mathrm{d}x\right) \leq |A_k|^{p-1}\frac{|A_k|^{\frac{sp}{N}}[(z_p^s-k)^+]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}.$$

Consequentemente, de (2.38) decorre que

$$\begin{aligned}|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)|A_k|^{-\frac{sp+N(p-1)}{N}}\left(\int_{A_k}(z_p^s-k)\mathrm{d}x\right)^p &\leq [(z_p^s-k)^+]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq \|f\|_\infty\int_{A_k}(z_p^s-k)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\left(\int_{A_k}(z_p^s-k)\mathrm{d}x\right)^{p-1}\leq\frac{\|f\|_\infty|A_k|^{\frac{sp+N(p-1)}{N}}}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}. \tag{2.42}$$

Decorre daí que

$$\left(\int_{A_k}(z_p^s-k)\mathrm{d}x\right)^{\frac{N(p-1)}{sp+N(p-1)}}\leq\left(\frac{\|f\|_\infty}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp+N(p-1)}}|A_k|. \tag{2.43}$$

Definindo

$$g(k):=\int_{A_k}(z_p^s-k)\mathrm{d}x$$

e aplicando o Princípio de Cavalieri (veja o Apêndice A, Proposição A.6), obtemos

$$\left(\int_k^\infty|A_k|\mathrm{d}t\right)^{\frac{N(p-1)}{sp+N(p-1)}}\leq\left(\frac{\|f\|_\infty}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp+N(p-1)}}|A_k|.$$

Como $g'(k)=|A_k|$, decorre que

$$g(k)^{\frac{N(p-1)}{sp+N(p-1)}}\leq-\left(\frac{\|f\|_\infty}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp+N(p-1)}}g'(k). \tag{2.44}$$

Ao multiplicar (2.44) por $g(k)^{-\frac{N(p-1)}{sp+N(p-1)}}$ obtemos

$$1\leq-\left(\frac{\|f\|_\infty}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp+N(p-1)}}g(k)^{-\frac{N(p-1)}{sp+N(p-1)}}g'(k). \tag{2.45}$$

Uma vez que

$$\frac{d}{dk}\left\{\left(\frac{sp+N(p-1)}{sp}\right)\left(\frac{\|f\|_\infty}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp+N(p-1)}}\left[g(0)^{\frac{sp}{sp+N(p-1)}}-g(k)^{\frac{sp}{sp+N(p-1)}}\right]\right\}=$$

$$= \left(\frac{sp+N(p-1)}{sp}\right)\left(\frac{\|f\|_\infty}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp+N(p-1)}}\left[0-\left(\frac{sp}{sp+N(p-1)}\right)g(k)^{\frac{sp}{sp+N(p-1)}-1}g'(k)\right]$$
$$= -\left(\frac{\|f\|_\infty}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp+N(p-1)}}g(k)^{-\frac{-N(p-1)}{sp+N(p-1)}}g'(k), \tag{2.46}$$

integrando (2.45) de 0 até k obtemos

$$k \leq \left(\frac{sp+N(p-1)}{sp}\right)\left(\frac{\|f\|_\infty}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp+N(p-1)}}\left[g(0)^{\frac{sp}{sp+N(p-1)}}-g(k)^{\frac{sp}{sp+N(p-1)}}\right]$$
$$\leq \left(\frac{sp+N(p-1)}{sp}\right)\left(\frac{\|f\|_\infty}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp+N(p-1)}}\|z_p\|_1^{\frac{sp}{sp+N(p-1)}}, \tag{2.47}$$

pois $g(k)>0$ e $g(0)=\|z_p^s\|_1$.

Denotemos c o lado direito da desigualdade (2.47). Já provamos que $k\leq c$ sempre que $|A_k|>0$.

Como c não depende de k, temos $|A_k|=0$ para todo $k>c$, o que nos permite concluir que $z_p^s\in L^\infty(\Omega)$ e $\|z_p^s\|_\infty\leq c$.

Tomando $k=\|z_p^s\|_\infty$ vem

$$\|z_p^s\|_\infty \leq \left(\frac{sp+N(p-1)}{sp}\right)\left(\frac{\|f\|_\infty}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp+N(p-1)}}\|z_p^s\|_1^{\frac{sp}{sp+N(p-1)}}. \tag{2.48}$$

Como consequência da última desigualdade, temos

$$\|z_p^s\|_\infty^{1+\frac{N(p-1)}{sp}} \leq \left(\frac{sp+N(p-1)}{sp}\right)^{\frac{sp+N(p-1)}{sp}}\left(\frac{\|f\|_\infty}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp}}\|z_p^s\|_1,$$

ou seja,

$$\|z_p\|_\infty\|z_p^s\|_\infty^{\frac{N(p-1)}{sp}} \leq \left(\frac{sp+N(p-1)}{sp}\right)^{\frac{sp+N(p-1)}{sp}}\left(\frac{\|f\|_\infty}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp}}\|z_p^s\|_1,$$

de modo que

$$\frac{\|z_p^s\|_\infty}{\|z_p^s\|_1} \leq \frac{1}{|B_1|}\left(\frac{sp+N(p-1)}{sp}\right)^{\frac{sp+N(p-1)}{sp}}\left(\frac{\|f\|_\infty}{|B_1|^{\frac{sp}{N}}\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp}},$$

que é justamente (2.35). $\square$

Corolário 2.12. *A (s,p)-funções de torção u_p^s pertencem a $L^\infty(\Omega)$ e satisfazem*

$$\frac{1}{|\Omega|} \leq \frac{\|u_p^s\|_\infty}{\|u_p^s\|_1} \leq \frac{1}{|B_1|}\left(\frac{sp+N(p-1)}{sp}\right)^{\frac{sp+N(p-1)}{sp}}\left(\frac{\lambda_{1,p}^s(\Omega)}{\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp}} \tag{2.49}$$

Demonstração. Tomando $z_p^s = u_p^s$ e $f \equiv 1$ na Proposição 2.11, obtemos

$$\frac{\|u_p^s\|_\infty}{\|u_p^s\|_1} \leq \frac{1}{|B_1|}\left(\frac{sp+N(p-1)}{sp}\right)^{\frac{sp+N(p-1)}{sp}}\left(\frac{1}{\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp}}\left(\frac{1}{\|u_p^s\|_\infty^{p-1}}\right)^{\frac{N}{sp}} \tag{2.50}$$

Da estimativa (2.49) segue-se que

$$\left(\frac{1}{\|u_p^s\|_\infty^{(p-1)}}\right)^{\frac{N}{sp}} \leq \lambda_{1,p}^s(\Omega)^{\frac{N}{sp}}.$$

Substituindo esta última desigualdade em (2.50), obtemos

$$\frac{\|u_p^s\|_\infty}{\|u_p^s\|_1} \leq \frac{1}{|B_1|}\left(\frac{sp+N(p-1)}{sp}\right)^{\frac{sp+N(p-1)}{sp}}\left(\frac{\lambda_{1,p}^s(\Omega)}{\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N}{sp}}, \tag{2.51}$$

e então a segunda desigualdade de (2.49) está provada.

Por outro lado, de acordo (2.34), temos

$$\frac{\|u_p^s\|_1}{\|u_p^s\|_\infty} \leq \lambda_{1,p}^s(\Omega)^{\frac{1}{p-1}} \leq |\Omega|,$$

implicando que

$$\frac{1}{|\Omega|} \le \frac{\|u_p^s\|_\infty}{\|u_p^s\|_1}, \tag{2.52}$$

provando a primeira desigualdade de (2.49). A prova está completa. $\square$

Agora estamos em condições de vincular a s-constante de Cheeger ao comportamento assintótico (quando p tende a 1) da (s,p)-funções de torção. A prova deste resultado é baseada no Corolário 2.12 e na caracterização

$$h_s(\Omega) = \lim_{p\to 1^+} \lambda_{1,p}^s(\Omega), \tag{2.53}$$

estabelecida por Brasco, Lindgren e Parini em [6]. (Vale recapitular que essa última caracterização foi obtida originalmente por Kawohl e Fridman [33] para o p-problema de Cheeger.)

Teorema 2.13. *Temos*

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_\infty^{p-1}} = h_s(\Omega) = \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_1^{p-1}}. \tag{2.54}$$

Demonstração. De acordo com a caracterização (2.53), temos

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{\lambda_{1,p}^s(\Omega)}{\lambda_{1,p}^s(B_1)} = \frac{h_s(\Omega)}{h_s(B_1)} \in (0,\infty). \tag{2.55}$$

Por outro lado, decorre do Corolário (2.12), que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|\Omega|}\right)^{p-1} &\le \left(\frac{\|u_p^s\|_\infty}{\|u_p^s\|_1}\right)^{p-1} \\ &\le \frac{1}{|B_1|^{p-1}}\left[\left(\frac{sp+N(p-1)}{sp}\right)^{\frac{sp+N(p-1)}{sp}}\right]^{p-1}\left(\frac{\lambda_{1,p}^s(\Omega)}{\lambda_{1,p}^s(B_1)}\right)^{\frac{N(p-1)}{sp}}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Fazendo p tender a 1 em (2.56) e utilizando (2.55), obtemos

$$\lim_{p\to 1^+} \left(\frac{\|u_p^s\|_\infty}{\|u_p^s\|_1} \right)^{p-1} = 1. \tag{2.57}$$

Por outro lado, fazendo p convergir a 1 em (2.34) e aplicando (2.57) temos

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 1^+} \lambda_{1,p}^s(\Omega) &\leq \lim_{p\to 1^+} \frac{|\Omega|^{p-1}}{\|u_p^s\|_1^{p-1}} = \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_1^{p-1}} = \lim_{p\to 1^+} \left(\frac{\|u_p^s\|_\infty}{\|u_p^s\|_1} \right)^{p-1} \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{|u_p^s\|_\infty^{p-1}} \\ &= \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_\infty^{p-1}} \leq \lim_{p\to 1^+} \lambda_{1,p}^s(\Omega).\end{aligned}$$

Assim, de acordo com (2.53), temos

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_1^{p-1}} = h_s(\Omega) = \lim_{p\to 1^+} \frac{1}{\|u_p^s\|_\infty^{p-1}}.$$

□

Como consequência, exceto quando $h_s(\Omega) = 1$, conhecemos o comportamento assintótico das (s,p)-funções de torção quando p tende a 1:

Lema 2.14. *Para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um domínio limitado com fronteira Lipschitz temos*

$$\lim_{p\to 1^+} \|u_p^s\|_\infty = \lim_{p\to 1^+} \|u_p^s\|_1 = \begin{cases} 0, & se \quad h_s(\Omega) > 1 \\ \infty, & se \quad h_s(\Omega) < 1. \end{cases} \tag{2.58}$$

Demonstração. Aplicando a definição de limite em (2.54) obtemos

$$[h(\Omega) - \epsilon]^{\frac{1}{p-1}} \leq \frac{1}{\|u_p^s\|_\infty} \leq [h(\Omega) + \epsilon]^{\frac{1}{p-1}}.$$

Se $h_s(\Omega) > 1$, tomando ϵ suficientemente pequeno de modo que $h_s(\Omega) - \epsilon > 1$, concluímos que $\lim_{p\to 1^+} \|u_p^s\|_\infty = 0$. Analogamente, se $h_s(\Omega) < 1$, tomando ϵ suficientemente pequeno de modo que $h(\Omega)+\epsilon<1$, concluímos que $\lim\limits_{p\to 1^+}\|u_p^s\|_\infty=\infty$. $\square$

Note que o Lema 2.14 é uma versão fracionária do Lema (1.6) visto no capítulo anterior.

2.5 Outros resultados

Mostraremos nesta seção uma versão fracionária para o mínimo do quociente de Rayleigh apresentado no capítulo anterior na Seção 1.5.

Mais precisamente, provaremos que o mínimo do quociente de Rayleigh fracionário $[u]_{s,p}^p/\|u\|_1^p$ é atingido pelas (s,p)-funções de torção. Esse mínimo e a desigualdade de Poincaré para seminormas de Gagliardo ajudarão na prova de que as (s,p)-funções de torção são radiais numa bola N-dimensional de $\mathbb{R}^N$.

Teorema 2.15. *Para s e p fixos, temos*

$$\frac{1}{\|u_p^s\|_1^{p-1}}=\min\left\{[v]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}: v\in W_0^{s,p}(\Omega) e\ \|v\|_1=1\right\}. \tag{2.59}$$

Além disso, $\dfrac{u_p^s}{\|u_p^s\|_1}$ *é a única função não negativa que atinge o mínimo.*

Demonstração. Como o funcional $v\mapsto\|v\|_1$ não é diferenciável, vamos considerar o problema de minimização

$$\alpha:=\inf\left\{[v]_{s,p}^p: v\in W_0^{s,p}(\Omega)\text{ e }\int_\Omega v\mathrm{d}x=1\right\}, \tag{2.60}$$

e então mostrar que este problema é unicamente resolvido pela função positiva $\dfrac{u_p^s}{\|u_p^s\|_1}$.

Consideremos $\{w_n\}\subset W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega w_n\mathrm{d}x=1 \quad\text{e}\quad [w_n]_{s,p}^p\to\alpha. \tag{2.61}$$

A sequência $\{w_n\}$ é limitada em $L^1(\Omega)$. De fato, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega |w_n| \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |w_n|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} = |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |w_n|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ou seja,

$$\left(\int_\Omega |w_n| \mathrm{d}x \right)^p \leq |\Omega|^{p-1} \int_\Omega |w_n|^p \mathrm{d}x.$$

Aplicando então (2.9) e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|w_n\|_1^p \leq |\Omega|^{p-1} \|w_n\|_p^p \leq |\Omega|^{p-1} C_{N,s,p,\Omega} [w_n]_{s,p}^p.$$

Além disso, como Ω tem fronteira Lipschitz, $\{w_n\}$ é pré-compacta em $L^1(\Omega)$ (veja [20, Corollary 7.2]).

Assim, existe $w \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $w_n \rightharpoonup w$ em $W_0^{s,p}(\Omega)$ (pois $W_0^{s,p}(\Omega)$ é reflexivo) e $w_n \to w$ em $L^1(\Omega)$, com w satisfazendo $w(x) = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e $1 = \int_\Omega w_n \, \mathrm{d}x \to \int_\Omega w \, \mathrm{d}x$.

Pela definição de ínfimo, temos

$$\alpha \leq [w]_{s,p}^p, \tag{2.62}$$

enquanto a convergência fraca garante que

$$[w]_{s,p} \leq \liminf_{n \to \infty} [w_n]_{s,p} = \alpha^{\frac{1}{p}}. \tag{2.63}$$

Por (2.62) e (2.63), segue-se

$$[w]_{s,p}^p = \alpha, \tag{2.64}$$

e então concluímos que $\alpha = [w]_{s,p}^p$ é o ínfimo em (2.60).

Até o momento provamos a existência de um minimizador para o conjunto das funções que define α. Agora, vamos mostrar que $w = \dfrac{u_p^s}{\|u_p^s\|_1}$.

De acordo com o método de multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left\langle (-\Delta_p)^s w, \varphi \right\rangle = \lambda \int_\Omega \varphi \mathrm{d}x, \ \forall \ \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega). \tag{2.65}$$

Tomando $\varphi = w$ em (2.65), obtemos

$$[w]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = \lambda \int_\Omega w \mathrm{d}x = \lambda.$$

Ou seja, $[w]^p_{s,p} = \lambda$.

Então $\lambda = \alpha > 0$, pois $\alpha = [w]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$ e $\int_\Omega w \mathrm{d}x = 1$.

Deste fato e de (2.65), temos que w é solução fraca de

$$(P_\alpha) : \begin{cases} (-\Delta_p)^s w &= \alpha, \quad \text{em} \quad \Omega \\ w &= 0, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Além disso, pelo Lema 2.7, o problema (P_α) possui solução única dada por $w = \alpha^{\frac{1}{p-1}} w_p^s$. De fato, a homogeneidade do operador p-Laplaciano fracionário implica que

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s(\alpha^{\frac{1}{p-1}} u_p^s) &= \alpha^{\frac{p-1}{p-1}} (-\Delta_p)^s u_p^s = \alpha, \quad \text{em} \quad \Omega \\ \alpha^{\frac{1}{p-1}} w &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Como $1 = \|w\|_1 = \alpha^{\frac{1}{p-1}} \|w_p^s\|_1$, implica que $\dfrac{1}{\|u_p^s\|_1^{p-1}} = \alpha$, temos $w = \dfrac{u_p^s}{\|u_p^s\|_1}$, o que conclui a prova de (2.59).

Falta mostrar que $w = \dfrac{u_p^s}{\|u_p^s\|_1}$ é a única função não-negativa que atinge o mínimo α.

Para tanto, observe que, como $u_p^s \geq 0$ em Ω, decorre que w pertence aos conjuntos

$$\mathcal{A} := \left\{ [v]_{s,p}^p \,:\, v \in W_0^{s,p}(\Omega) \text{ e } \int_\Omega v \mathrm{d}x = 1 \right\}$$

e

$$\mathcal{B} := \left\{ [v]_{s,p}^p \,:\, v \in W_0^{s,p}(\Omega) \text{ e } \int_\Omega |v| \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Definindo

$$\alpha' := \inf \left\{ [v]_{s,p}^p : v \in W_0^{s,p}(\Omega) \text{ e } \int_\Omega |v| \mathrm{d}x = 1 \right\}, \tag{2.66}$$

temos $\alpha' \leq \left[\dfrac{u_p^s}{\|u_p^s\|_1} \right]_{s,p} = \alpha$. Assim, $\alpha' \leq \alpha$.

Como $|w|$ pertence ao conjunto $\mathcal{A}$, também temos

$$\alpha \leq [|w|]_{s,p} = \alpha',$$

pois $|w|$ é o minimizador de α'.

Daí, $\alpha = \alpha'$, provando assim a unicidade do mínimo. Uma vez que

$$\frac{1}{\|u_p^s\|_1^{p-1}} = \left[\frac{u_p^s}{\|u_p^s\|_1} \right]_{s,p} \qquad \text{e} \qquad \left\| \frac{u_p^s}{\|u_p^s\|_1} \right\|_1 = 1, \tag{2.67}$$

concluímos a prova do resultado. □

Nosso próximo objetivo é mostrar as (s,p)-funções de torção são radial quando o domínio Ω for uma bola.

Corolário 2.16. *As (s,p)-funções de torção são radiais quando Ω é uma bola.*

Demonstração. Seja $(u_p^s)^* \in W_0^{s,p}(\Omega)$ a simetrização de Schwarz de u_p^s, isto é, a função radialmente decrescente tal que

$$\left| \left\{ u_p^s > t \right\}^* \right| = \left| (u_p^s)^* > t \right|, \; \forall\, t > 0, \tag{2.68}$$

em que, para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, Ω^* representa a bola N-dimensional com o mesmo volume de Ω. (Veja o Apêndice A, Seção A.4)

Então, $(u_p^s)^* \geq 0$ e

$$\|(u_p^s)^*\|_1 = \|u_p^s\|_1. \tag{2.69}$$

Além disso,

$$[(u_p^s)^*]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq [u_p^s]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}, \tag{2.70}$$

de acordo com [46, Teorema A.1] ou [1, Seção 9]).

Afirmamos que $\dfrac{(u_p^s)^*}{\|(u_p^s)^*\|_1}$ atinge o mínimo em (2.59). De fato, como essa função pertence a $W_0^{s,p}(\Omega)$ e

$$\left\| \frac{(u_p^s)^*}{\|(u_p^s)^*\|_1} \right\|_1 = \frac{\|(u_p^s)^*\|_1}{\|(u_p^s)^*\|_1} = 1,$$

de acordo com (2.69) e (2.70) temos

$$\begin{aligned}
\left[\frac{(u_p^s)^*}{\|(u_p^s)^*\|_1} \right]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} &= \frac{1}{\|(u_p^s)^*\|_1^p} [(u_p^s)^*]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \frac{1}{\|u_p^s\|_1^p} [u_p^s]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = \left[\frac{u_p^s}{\|u_p^s\|_1} \right]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Ou seja, a função $\dfrac{(u_p^s)^*}{\|(u_p^s)^*\|_1}$ também atinge o mínimo (2.59). Entretanto, pela unicidade, temos $(u_p^s)^* = u_p^s$, e assim concluímos que u_p^s é radial quando Ω é uma bola. □

Para relacionar a s-constante de Cheeger de uma bola N-dimensional e a s-constante de Cheeger de um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aplicamos um resultado devido a Brasco, Lindgren e Parini [6, Theorem 3.5] no contexto de espaços fracionários. É a desigualdade de Faber-Krahn:

Lema 2.17. *Sejam $p > 1$ e $s \in (0,1)$. Para todo domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, temos*

$$|B_1|^{\frac{sp}{N}} \lambda_{1,p}^s(B_1) = |B|^{\frac{sp}{N}} \lambda_{1,p}^s(B) \leq |\Omega|^{\frac{sp}{N}} \lambda_{1,p}^s(\Omega) \tag{2.72}$$

em que B é qualquer bola N-dimensional e B_1 denota uma bola unitária de $\mathbb{R}^N$. Além disso, temos a igualdade em (2.72) *somente se Ω for uma bola.*

Fazendo p convergir a 1 na desigualdade de Faber-Krahn (2.72) podemos ver, como em [6, Prop. 5.5], que bolas minimizam as s-constantes de Cheeger entre os conjuntos N-dimensionais de mesma medida, pois

$$|B_1|^{\frac{s}{N}} h_s(B_1) = |B|^{\frac{s}{N}} h_s(B) \leq |\Omega|^{\frac{s}{N}} h_s(\Omega).$$

Agora, vamos deter nossa atenção na família de (s,p)-funções de torção normalizadas na norma $L^1(\Omega)$, isto é,

$$\left\{ \frac{u_p^s}{\|u_p^s\|_1} \right\}.$$

Em [6], os autores provaram que

$$h_s(\Omega) = \inf \left\{ [v]^p_{W^{s,1}(\mathbb{R}^N)} \ : \ v \in W_0^{s,1}(\Omega) \text{ e } \|v\|_1 = 1 \right\}.$$

Como $W_0^{s,1}(\Omega)$ não é reflexivo, eles mostraram que o ínfimo $h_s(\Omega)$ é atingido no espaços de Sobolev

$$\mathcal{W}_0^{s,1}(\Omega) := \left\{ v \in L^1(\Omega) \ : \ [v]^p_{W^{s,1}(\mathbb{R}^N)} < \infty \text{ e } u \equiv 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \right\}.$$

O próximo resultado é uma adaptação de [6, Theorem 7.2], considerando a família $\left\{ \frac{u_p^s}{\|u_p^s\|_1} \right\}$ ao invés da família $\left\{ \frac{e_p^s}{\|e_p^s\|_1} \right\}$.

Como a prova segue os mesmos passos de [6, Theorem 7.2], optamos por omití-la.

Teorema 2.18. *Seja $\phi_p^s = \dfrac{u_p^s}{\|u_p^s\|_1}$. Existe uma sequência $\{p_n\}$ tal que $p_n \to 1^+$ e $\phi_{p_n} \to \phi$ em $L^q(\Omega)$, para todo $q < \infty$. A função limite ϕ é solução do problema de minimização*

$$h_s(\Omega) = \min_{v \in \mathcal{W}_0^{s,1}(\Omega)} \left\{ [v]^p_{W^{s,1}(\mathbb{R}^N)} \ : \ \|v\|_1 = 1 \ e \ v \geq 0 \right\}. \tag{2.73}$$

Associado a esse resultado, provamos:

Proposição 2.19. *A solução ϕ do problema de minimização* (2.73) *satisfaz $\phi \in L^\infty(\Omega)$ e*

$$\frac{1}{|\Omega|} \leq \|\phi\|_\infty \leq \frac{1}{|B_1|}\left(\frac{h_s(\Omega)}{h_s(B_1)}\right)^{\frac{N}{s}}. \tag{2.74}$$

Enfatizamos que a cota superior de (2.74) é a mesma encontrada em [6, Theorem 2.7].

Demonstração. Decorre da desigualdade de Hölder que

$$\left(\int_\Omega |\phi_{p_n}^s|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\phi_{p_n}\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{q}}.$$

Como $\{\phi_{p_n}^s\}$ converge para ϕ em $L^q(\Omega)$, então

$$\|\phi\|_q = \lim_{n\to\infty} \|\phi_{p_n}\|_q \leq |\Omega|^{\frac{1}{q}} \lim_{n\to\infty} \|\phi_{p_n}\|_\infty.$$

Por outro lado, é consequência da definição de ϕ_p^s e de (2.49) que

$$|\Omega|^{-\frac{1}{q}}\|\phi\|_q \leq \lim_{n\to\infty} \|\phi_{p_n}^s\|_q = \lim_{n\to\infty} \left\|\frac{u_{p_n}^s}{\|u_{p_n}^s\|_1}\right\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{\|u_{p_n}^s\|_\infty}{\|u_{p_n}^s\|_1} \leq \frac{1}{|B_1|}\left(\frac{h_s(\Omega)}{h_s(B_1)}\right)^{\frac{N}{s}}.$$

Além disso,

$$\lim_{q\to\infty} |\Omega|^{-\frac{1}{q}}\|\phi\|_q = \|\phi\|_\infty.$$

Logo,

$$\|\phi\|_\infty \leq \frac{1}{|B_1|}\left(\frac{h_s(\Omega)}{h_s(B_1)}\right)^{\frac{N}{s}}, \tag{2.75}$$

que é a cota superior de (2.74).

A cota inferior em (2.74) não aparece na prova de [6, Theorem 7.2]. Para mostrá-la, consideramos $q = 1$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi_{p_n}\|_1 = \|\phi\|_1 \qquad \text{e} \qquad \|\phi\|_1 \leq \|\phi\|_\infty \|\Omega\|.$$

Ou seja,

$$1 = \lim_{n\to\infty} \|\phi_{p_n}\|_1 = \|\phi\|_1 \leq \|\phi\|_\infty |\Omega|,$$

implicando que

$$\frac{1}{|\Omega|} \leq \|\phi\|_1 \leq \|\phi\|_\infty. \tag{2.76}$$

Por (2.75) e (2.76), temos (2.74). □

2.6 Alguns comentários finais

O objetivo principal no Capítulo 1 foi o estudo do comportamento assintótico, quando $p \to 1^+$, das p-funções de torção u_p. Nossos esforços neste capítulo se concentraram a princípio, em obter uma limitação para o gradiente das u_p quando $p \to 1^+$ na tentativa de provar nossa conjectura de que $L := \lim_{p\to 1+} \|u_p\|_\infty$ seria igual a zero quando $h(\Omega) = 1$. Não obtivemos o êxito como objetivamos.

Então, provamos nossa conjectura sob a hipótese da limitação de $\|\nabla u_p\|_\infty$, quando p tende a 1 o que caracterizou um capítulo deste trabalho de tese.

Um fato importante é que as soluções de torção u_p pertencem ao espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, onde temos uma disponibilidade maior de resultados já provados na literatura para essas funções. Por exemplo, temos a expressão da função de torção na bola, o que permite obter uma cota inferior da norma sup das u_p, conforme [10, Prop. 6].

Diferentemente do caso local, para as (s, p)- funções de torção em Ω, não alcançamos uma versão integral da estimativa provada em [10, Prop. 6]. A falta da expressão da função de torção fracionária na bola dificultou a prova da versão fracionária de [10, Prop. 6]. No caso fracionário, a expressão só é conhecida para $p = 2$, o que pode ser visto por exemplo no trabalho de Greco e Servadei, [27].

No entanto, conseguimos mostrar a estimativa principal para a prova do limite (2.54) que é a estimativa (2.34).

A ausência da expressão da função de torção na bola fracionária para valores de p diferentes de 2, nos direcionou ao uso da caracterização (2.53), um recurso que não foi utilizado por Bueno e Ercole na prova de [10, Prop. 6]. Ou seja, conseguimos a prova do limite (2.54) não pelos mesmos métodos utilizados por Bueno e Ercole em [10].

Observe também que no Capítulo 2 não estudamos uma versão fracionária do limite $L := \lim_{p\to 1+} \|u_p\|_\infty$ devido a dificuldade de se obter estimativas para as normas $\|u_p^s\|_1$ e $\|u_p^s\|_\infty$ quando p tende a 1.

Essas situações exemplificam algumas das dificuldades encontradas quando estamos trabalhando com os operadores (s, p)-Laplaciano fracionário.

Uma versão fracionária de outros resultados mostrados por Bueno e Ercole em [10] exigiria uma dedicação maior à solução do operador 1- Laplaciano fracionário. Optamos por concentrar nos resultados apresentados nestes dois capítulos, deixando outros resultados que gostaríamos de provar mas que não conseguimos, para trabalhos futuros.

Apêndice

$\mathcal{A}$

Alguns resultados auxiliares

A.1 Princípio da Comparação fraco

Teorema A.1. Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave. Sejam $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo (no sentido fraco)

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 \leq \Delta_p u_2 \text{ em } \Omega \\ u_1 \leq u_2, \qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

Então,

$$u_1 \leq u_2 \text{ em } \Omega.$$

Demonstração. Veja, por exemplo, [44, Lema A.0.7]. □

A.2 Espaços de variação limitada

Relembramos neste Apêndice alguns resultados da teoria dos espaços de variação limitada. Esses resultados podem ser vistos por exemplo, em [22].

Para definirmos a variação total em Ω de uma função $u \in L^1(\Omega)$ consideraremos

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto.

Definição A.2. A variação total em Ω de uma função $u \in L^1(\Omega)$ é definida como

$$|Du|(\Omega) := \sup \left\{ \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, \mathrm{d}x \;|\varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Uma função u tal que $|Du|(\Omega) < +\infty$ é dito ser de variação limitada.

O espaço das funções de variação limitada será denotado por $BV(\Omega)$, do qual munido da norma

$$\|u\|_{BV} := \|u\|_1 + |Du|(\Omega)$$

é um espaço de Banach.

Definição A.3. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$ tem perímetro finito em Ω se sua função característica χ_E pertence a $BV(\Omega)$ e então

$$P(E; \Omega) := |D\chi_E|(\Omega) < +\infty$$

Se Ω é um aberto limitado com fronteira de Lipschitz então um conjunto E que tem perímetro finito em Ω tem também perímetro finito em $\mathbb{R}^N$ e

$$P(E; \mathbb{R}^N) = P(E; \Omega) + \mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega \cap \partial E),$$

onde o símbolo $\mathcal{H}^{N-1}$ representa a medida de Hausdorff (N-1)dimensional em $\mathbb{R}^N$. Em particular,

$$P(\Omega; \mathbb{R}^N) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega).$$

Além disso, o perímetro de E em $\mathbb{R}^N$, $P(E; \mathbb{R}^N)$, é dado por

$$P(E, \mathbb{R}^N) = P(E) := |D\chi_E|(\mathbb{R}^N).$$

Vamos adotar também a notação: $P(E, \mathbb{R}^N) = |\partial E|$.

Se porém, $u \in BV(\Omega)$ então $BV(\mathbb{R}^N)$ (estendendo $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$) e

$$|Du|(\mathbb{R}^N) = |Du|(\Omega) + \int_\Omega |u| d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{A.1}$$

Esta extensão se vincula ao fato de que para as funções BV temos a noção de traço definido de modo muito semelhante ao espaço das funções de Sobolev.

Abaixo, algumas propriedades dos espaços BV:

Proposição A.4. (Semicontinuidade inferior) Considere $\{u_k\}$ uma sequência de funções em $BV(\Omega)$ $(k = 1, ...)$ convergindo em $L^1_{loc}(\Omega)$ para a função u. Então,

$$|Du|(\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} |Du_k|(\Omega).$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$, $|\varphi| \leq 1$. Pela convergencia em $L^1(\Omega)$ temos,

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k \operatorname{div} \varphi \, dx. \tag{A.2}$$

Pela definição de variação limitada,

$$\int_\Omega u_k \operatorname{div} \varphi \, dx \leq |Du_k|(\Omega). \tag{A.3}$$

Por (A.2) e (A.3) temos

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k \operatorname{div} \varphi \, dx \leq \liminf_{k\to\infty} |Du_k|(\Omega).$$

Logo,

$$|Du|(\Omega) = \sup \left\{ \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx | \varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} \leq \liminf_{k\to\infty} |Du_k|(\Omega).$$

$\square$

Proposição A.5. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio com fronteira de Lipschitz, e seja $\{u_k\}$ uma sequência de funções em $BV(\Omega)$ tal que

$$\|u_k\|_{BV} \leq M$$

para algum $M > 0$. Então, existe uma subsequência $\{u_{k_j}\}$ e uma função $u \in BV(\Omega)$ tal que $u_{k_j} \to u$ em $L^1(\Omega)$.

Proposição A.6. (Princípio de Cavalieri) Seja $v \in L^1(\Omega)$

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |E_t| \, dt,$$

onde $E_t = \{x \in \Omega : v(x) > t\}$ é o conjunto de nível t da função v.

Proposição A.7. (Fórmula da Coárea) Seja $u \in BV(\Omega)$ e defina

$$E_t := \{x \in \Omega \mid u(x) > t\}.$$

Então,

$$|Du|(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t; \Omega) \, dt.$$

A prova das proposições acima podem ser encontradas em [22] e [26].

No que segue, considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira de Lipschitz. Definimos

$$\mu(\Omega) := \inf_{v \in BV(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|Dv|(\mathbb{R}^n)}{\|v\|_{L^1(\Omega)}}. \tag{A.4}$$

onde BV denota o espaço das funções de variação limitada em Ω.

Vamos provar que dado um domínio de $\mathbb{R}^N$ limitado com fronteira Lipschitz, então existe pelo menos um conjunto de Cheeger. O próximo lema nos ajudará na prova deste resultado.

Lema A.8. Existe uma função $v \in BV(\Omega)$, $v \neq 0$, tal que

$$\mu(\Omega) = \frac{\|Dv\|(\mathbb{R}^N)}{\|v\|_{L^1(\Omega)}}.$$

Demonstração. Com efeito, note que $\mu(\Omega) \geq 0$.

Considere $\{u_k\}$ uma sequência minimizante para (A.4).

Suponha sem perda de generalidade que $\|u_k\|_{L^1(\Omega)} = 1$. Para $k > k_0$, com k_0 suficientemente grande, temos

$$\mu(\Omega) \leq |Du_k|(\mathbb{R}^N) \leq \mu(\Omega) + 1.$$

Lembremo-nos que a definição de $|Du|(\Omega)$ vale para todo conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, em particular quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, e, se este é o caso, temos (A.1).

Pela definição de norma no espaço BV, segue que

$$\|u_k\|_{BV(\Omega)} = \|u_k\|_{L^1(\Omega)} + |Du_k|(\Omega) \leq \mu(\Omega) + 2,$$

de onde segue que $\{u_k\}$ é uma sequência limitada em $BV(\Omega)$.

Pela proposição (A.5), a sequência $\{u_k\}$ possui uma subsequência $\{u_{k_j}\}$ e uma função $u \in BV(\Omega)$ tal que

$$\lim_{j \to \infty} u_{k_j} = u \quad \text{em} \quad L^1(\Omega).$$

Denotando a subsequência por $\{u_k\}$ e fazendo uso da proposição (A.4) temos

$$\mu(\Omega) \leq |Du|(\mathbb{R}^N) \leq \liminf_{k \to \infty} |Du_k|(\mathbb{R}^N) = \lim_{k \to \infty} |Du_k|(\mathbb{R}^N) = \mu(\Omega)$$

Logo, $|Du|(\mathbb{R}^N) = \mu(\Omega)$, e como $\|u\|_{L^1(\Omega)} = 1$, concluimos a prova da afirmação A.8 $\square$

Segue o resultado sobre a existência de pelo menos um conjunto de Cheeger para um domínio limitado Ω com fronteira Lipschitz.

Proposição A.9. Para todo domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira Lipschitz, existe pelo menos um conjunto de Cheeger.

Demonstração. Vamos provar a seguinte

Afirmação 1: $\mu(\Omega) = h(\Omega)$.

Prova da Afirmação 1: Vamos justificar as desigualdades

$$\mu(\Omega) \leq h(\Omega) \text{ e } \mu(\Omega) \geq h(\Omega).$$

Provando $\mu(\Omega) \leq h(\Omega)$:

Considere $E \subset\subset \Omega$ um conjunto arbitrário tal que $P(E) := P(E;\mathbb{R}^N) < +\infty$. Uma vez que $\displaystyle\int_\Omega \frac{\chi_E}{|E|}\,dx = \int_E \frac{1}{|E|}\,dx = \frac{|E|}{|E|} = 1$, temos que $\left\|\dfrac{\chi_E}{|E|}\right\|_{L^1} = 1$.

Então, considerando $v \in BV(\Omega) \setminus \{0\}$, com $\|v\|_{L^1} = 1$,temos

$$\frac{P(E)}{|E|} = \frac{|D\chi_E|(\mathbb{R}^N)}{|E|} = \left|D\left(\frac{\chi_E}{|E|}\right)\right|(\mathbb{R}^N) \geq \frac{|D(v)|(\mathbb{R}^N)}{\|v\|_{L^1}}.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as $v \in BV(\Omega) \setminus \{0\}$, temos

$$\frac{P(E)}{|E|} = \frac{|D\chi_E|(\mathbb{R}^N)}{|E|} = \left|D\left(\frac{\chi_E}{|E|}\right)\right|(\mathbb{R}^N) \geq \inf_{v\in BV(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|D(v)|(\mathbb{R}^N)}{\|v\|_{L^1}}$$

Pelo Lema A.8 e tomando tomando o ínfimo sobre todos os conjuntos $E \subset\subset \Omega$, obtemos

$$h(\Omega) = \inf_{E\subset\subset\Omega} \frac{P(E)}{|E|} \geq \mu(\Omega).$$

Logo,

$$\mu(\Omega) \leq h(\Omega). \tag{A.5}$$

Agora vamos verificar que $\mu(\Omega) \geq h(\Omega)$.

Pela fórmula da Coárea (Proposição A.7) e Princípio de Cavallieri (Proposição A.6), obtemos

$$\mu(\Omega) = \frac{\|Dv\|(\mathbb{R}^N)}{\|v\|_{L^1(\Omega)}} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial E_t|(\mathbb{R}^N)\, dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |E_t|\, dt} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t;\mathbb{R}^N)\, dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |E_t|\, dt} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t)\, dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |E_t|\, dt}.$$

Logo

$$\mu(\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} |E_t|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t)\, dt.$$

Ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [P(E_t) - \mu(\Omega)|E_t|]\, dt = 0.$$

Como $\mu(\Omega) \leq h(\Omega)$, temos que $-\mu(\Omega) \geq -h(\Omega)$. Decorre daí e da definição de $h(\Omega)$ que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} [P(E_t) - \mu(\Omega)|E_t|]\, \mathrm{d}t \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[P(E_t) - h(\Omega)|E_t|\Big]\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{P(E_t)}{|E_t|}|E_t| - h(\Omega)|E_t|\right] dt \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[h(\Omega)|E_t| - h(\Omega)|E_t|\Big]\, dt = 0 \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(E_t) - \mu(\Omega)|E_t| = 0 \quad \Rightarrow \quad P(E_t) - \mu(\Omega)|E_t| = 0 \quad \text{q.t.p. } t \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, $\dfrac{P(E_t)}{|E_t|} = \mu(\Omega)$. Mas

$$\mu(\Omega) = \frac{P(E_t)}{|E_t|} \geq \inf_{E \subset \overline{\Omega}} \frac{P(E;\mathbb{R}^N)}{|E|} = h(\Omega). \tag{A.6}$$

De (A.5) e (A.6), segue que

$$\mu(\Omega) = h(\Omega).$$

Então, sempre existe um conjunto $E \subset \overline{\Omega}$ arbitrário que realiza o ínfimo de $h(\Omega)$ (Esses conjuntos são os conjuntos de nível da função que realiza o ínfimo de $\mu(\Omega)$). Ou seja, estamos dizendo que para um conjunto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com fronteira de Lipschitz, existe pelo menos um conjunto de Cheeger, o que prova a proposição. $\square$

Decorre da Proposição A.9 que se u é minimizador para $\mu(\Omega)$, então, quase todo conjunto de nível de u com medida de Lebesgue positiva é um conjunto de Cheeger para Ω. Por outro lado, se E é um minimizador para $h(\Omega)$ então χ_E é um minimizador para $\mu(\Omega)$.

A.3 Função de torção e constante de Cheeger em $\Omega_{a,b}$

Nosso objetivo é provar que se $v_p(r)$ a solução fraca do problema de torção em

$$\Omega_{1,b/a} = \{x \in \mathbb{R}^N : 1 < |x| < b/a\},$$

então $u_p(r) = a^{\frac{p}{p-1}} v_p\left(\frac{r}{a}\right)$ é a função de torção em $\Omega_{a,b}$.

Precisamos mostrar que

$$\int_a^b |u_p'|^p \mathrm{d}r = \int_a^b u_p \mathrm{d}r.$$

Note que $u_p'(r) = a^{\frac{1}{p-1}} v_p'\left(\frac{r}{a}\right)$ para todo $a < r = |x| < b$. Então, como v_p é solução fraca em $\Omega_{1,b/a}$, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b |u_p'(r)|^p \mathrm{d}r &= \int_a^b \left| a^{\frac{1}{p-1}} v_p'\left(\frac{r}{a}\right)\right|^p \mathrm{d}r = \int_a^b a^{\frac{p}{p-1}} \left| v_p'\left(\frac{r}{a}\right)\right|^p \mathrm{d}r \\ &= a^{\frac{p}{p-1}} a \int_1^{b/a} |v_p'(s)|^p \mathrm{d}s = a^{\frac{p}{p-1}} a \int_1^{b/a} v_p(s)\mathrm{d}s \\ &= a^{\frac{p}{p-1}} a \int_a^b v_p\left(\frac{r}{a}\right)\frac{1}{a}\mathrm{d}r = \int_a^b a^{\frac{p}{p-1}} v_p\left(\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}r = \int_a^b u_p(r)\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Quanto as condições de fronteira, temos

$$\begin{aligned} v_p(a) &= a^{\frac{p}{p-1}} u_p\left(\frac{a}{a}\right) = a^{\frac{p}{p-1}} u_p(1) = a^{\frac{p}{p-1}}(0) = 0, \\ v_p(b) &= a^{\frac{p}{p-1}} u_p\left(\frac{b}{a}\right) = a^{\frac{p}{p-1}}.0 = 0 \end{aligned}$$

Ou seja, se $u_p(r)$ é a função de torção do anel $\Omega_{1,b/a}$ então $u_p(r) = a^{\frac{p}{p-1}} v_p\left(\frac{r}{a}\right)$ é a função de torção em $\Omega_{a,b}$.

Vamos mostrar também que

$$h(\Omega_{1,b/a}) = ah(\Omega_{a,b}). \tag{A.7}$$

Como o anel N-dimensional é calibrável, temos

$$h(\Omega_{1,b/a}) = \frac{P(\Omega_{1,b/a})}{|\Omega_{1,b/a}|} = \frac{N((b/a)^{N-1} + 1^{N-1})}{((b/a)^N - 1^N)} = \frac{aN(b^{N-1} + a^{N-1})}{(b^N - a^N)} = ah(\Omega_{a,b}),$$

e isto prova (A.7).

A.4 Simetrização de Schwarz

Seja $D \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto Lebesgue-mensurável qualquer. Denotemos por D^* a bola de centro na origem que possui a mesma medida de Lebesgue de D.

Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua não-negativa no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

A simetrização de Schwarz u^* de u é a função definida em Ω^* que satisfaz

$$\{x \in \Omega : u(x) > t\} = \{x \in \Omega^* : u^*(x) > t\}$$

para todo $t > 0$.

Considere R o raio da bola Ω^*. A função u^* é radialmente simétrica e decrescente em Ω^*, ou seja, $u^*(x) = u^*(r)$ para $r = |x| \leq R$ e $u^*(r_2) \leq u^*(r_1)$ se $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq R$. Além disso, $\|u^*\|_\infty = \|u\|_\infty$. (Veja por exemplo [35]).

Apêndice

$\mathcal{B}$

Alguns resultados auxiliares fracionários

B.1 $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach

$W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach munido da norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{B.1}$$

Devemos mostrar que

1. $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial
2. $\|.\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ é uma norma em $W^{s,p}(\Omega)$
3. $W^{s,p}(\Omega)$ é completo com relação à norma $\|.\|_{W^{s,p}(\Omega)}$.

Prova de (1):

Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in W^{s,p}(\Omega)$. Então $u, v \in L^p(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty. \tag{B.2}$$

Como $L^p(\Omega)$ é espaço vetorial, decorre que $\lambda u + \mu v \in L^p(\Omega)$.

Mostremos agora que

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|(\lambda u + \mu v)(x) - (\lambda u + \mu v)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty.$$

Note que

$$\begin{aligned}
|(\lambda u + \mu v)(x) - (\lambda u + \mu v)(y)|^p &= |\lambda(u(x)-u(y)) - \mu(v(x)-v(y))|^p \\
&\leq (|\lambda(u(x)-u(y))| + |\mu(v(x)-v(y))|)^p \\
&\leq 2^p(\max\{|\lambda(u(x)-u(y))|, |\mu(v(x)-v(y))|\})^p \\
&\leq 2^p(|\lambda(u(x)-u(y))|^p + |\mu(v(x)-v(y))|^p).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_\Omega \frac{|(\lambda u + \mu v)(x) - (\lambda u + \mu v)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq 2^p|\lambda|^p \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
+ 2^p|\mu|^p \int_\Omega \int_\Omega \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

De acordo com (B.2), as integrais do lado direito da última desigualdade são finitas e então,

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|(\lambda u + \mu v)(x) - (\lambda u + \mu v)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty,$$

o que mostra que $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial.

Prova de (2):

- $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$ se, e somente se, $u \equiv 0$.

Se $u \equiv 0$ é claro que $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$. Por outro lado, se $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$, temos que $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$. Como $u \in L^p(\Omega)$ e $[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \geq 0$ decorre que $u \equiv 0$.

- $\|\lambda u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = |\lambda|\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$

Note que

$$\begin{aligned}\|\lambda u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= \|\lambda u\|^p_p + [\lambda u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \int_\Omega |\lambda u|^p \mathrm{d}x + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\lambda(u(x)-u(y))|^p}{|x-y|_{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= |\lambda|^p \int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x + |\lambda|^p \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= |\lambda|^p \|u\|^p_p + |\lambda|^p [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = |\lambda|^p (\|u\|^p_p + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)}),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\lambda u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = |\lambda|(\|u\|^p_p + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)})^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

- $\|u+v\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}$

Sejam $u, v \in W^{s,p}(\Omega)$. Sabemos que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $L^p(\Omega)$. Daí,

$$\|u+v\|^p_{L^p(\Omega)} \leq (\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)})^p.$$

Considerando $f(x,y) = \dfrac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{(N+sp)/p}}$ e $g(x,y) = \dfrac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{(N+sp)/p}}$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_\Omega \left| \frac{(u(x)-u(y)) + (v(x)-v(y))}{|x-y|^{(N+sp)/p}} \right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_\Omega \int_\Omega |f(x,y)+g(x,y)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \|f+g\|^p_{L^p(\Omega\times\Omega)} \\ &\leq (\|f\|_{L^p(\Omega\times\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega\times\Omega)})^p\end{aligned}$$

Ou seja,

$$[u+v]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \leq \left[\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= (\|u+v\|^p_{L^p(\Omega)} + [u+v]^p_{W^{s,p}(\Omega)})^{\frac{1}{p}}\\ &\leq ((\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)})^p + ([u]_{W^{s,p}(\Omega)} + [v]_{W^{s,p}(\Omega)})^p)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Considerando $a_1 = \|u\|_{L^p(\Omega)}$, $b_1 = \|v\|_{L^p(\Omega)}$, $b_1 = [u]_{W^{s,p}(\Omega)}$, $b_2 = [v]_{W^{s,p}(\Omega)}$, temos

$$\|u+v\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} \leq \left(\sum_{i=1}^{2}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e, usando a desigualdade de Minkowski, decorre que

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{W^{s,p}(\Omega)} &\leq \left(\sum_{i=1}^{2} a_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{2} b_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= (\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)})^{\frac{1}{p}} + (\|v\|^p_{L^p(\Omega)} + [v]^p_{W^{s,p}(\Omega)})^{\frac{1}{p}}\\ &= \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Prova de (3):

Seja $\{u_n\} \subset W^{s,p}(\Omega)$ uma sequência de Cauchy, isto é,

$$\|u_n - u_m\|_{W^{s,p}(\Omega)} \to 0,$$

sempre que $m, n \to \infty$. Então,

$$\|u_n - u_m\|^p_{L^p(\Omega)} \to 0 \qquad \text{e} \qquad [u_n - u_m]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \to 0,$$

sempre que $m, n \to \infty$.

Como $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach, então existe uma função $u \in L^p(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|^p_{L^p(\Omega)} \to 0$, quando $n \to \infty$. De acordo com [9, Theorem 4.9], a menos de subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ em quase todo ponto $x \in \Omega$.

Considere $v_n(x,y) = \dfrac{u_n(x) - u_n(y)}{|x-y|^{N+sp/p}}$. Por definição, v_n é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega \times \Omega)$, então existe uma função $v \in L^p(\Omega \times \Omega)$ tal que $v_n \to v$ em $L^p(\Omega \times \Omega)$.

Agora, observe que

$$
\begin{aligned}
\|v_n - v_m\|^p_{L^p(\Omega\times\Omega)} &= \int_\Omega \int_\Omega |v_n(x,y) - v_m(x,y)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_\Omega \int_\Omega \left| \frac{(u_n(x) - u_n(y)) - (u_m(x) - u_m(y))}{|x-y|^{N+sp/p}} \right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|(u_n(x) - u_m(x)) - (u_n(y) - u_m(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= [u_n - u_m]^p_{W^{s,p}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

De acordo com [9, Theorem 4.9], a menos de subsequência, $v_n(x,y) \to v(x,y)$ em quase todo ponto em $(x,y) \in \Omega \times \Omega$. Ou seja,

$$
\frac{u_n(x) - u_n(y)}{|x-y|^{(N+sp)/p}} \to \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{(N+sp)/p}} = v(x,y)
$$

quando $n \to \infty$, em quase todo ponto $(x,y) \in \Omega \times \Omega$. Então, temos

$$
\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty
$$

e portanto, $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

Tomando o limite quando $m \to \infty$ em $\|v_n - v_m\|^p_{L^p(\Omega\times\Omega)}$ temos que $u_n \to u$ em $W^{s,p}(\Omega)$.

B.2 $W^{s,p}(\Omega)$ está entre $L^p(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$.

Mostraremos as inclusões

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Da definição do espaço $W^{s,p}(\Omega)$, segue a inclusão $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Para mostrar que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$ utilizamos um resultado devido a Nezza, Palatucci, Valdinoci [20, Proposition 2.2].

Segue o resultado que estabelece a inclusão $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$.

Proposição B.1. Seja $p \in [1, +\infty)$ e $s \in (0, 1)$. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto com fronteira de Lipschitz e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

para alguma constante positiva $C := C_{N,s,p} \geq 1$. Em particular,

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Demonstração. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. De acordo com a hipótese de regularidade no domínio Ω, podemos extender u para uma função $\overline{u} : \mathbb{R}^N \to R$ tal que $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $\|\overline{u}\| \leq C_{N,s,p}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para alguma constante apropriada C. (Este fato é consequência de [24, Theorem 7.25].)

Observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = &\int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &+ \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{(B.3)}\end{aligned}$$

Vamos calcular as duas integrais de (B.3) separadamente.

Considere $z = y - x$. Então,

$$\int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \int_\Omega \int_{B_1} \frac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_\Omega \int_{B_1} \frac{|u(x)-u(z+x)|^p}{|z|^p}\frac{1}{|z|^{N+(s-1)p}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

Seja $f(t) = u(x+tz)$. Então $f(0) = u(x)$ e $f(1) = u(x+z)$. Assim,

$$|u(x+z)-u(x)| = |f(1)-f(0)| = \left|\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$= \left|\int_0^1 \nabla u(x+tz)z\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 |\nabla u(x+tz)\,|z|\mathrm{d}t.$$

Pela desigualdade de Jensen [9] temos

$$\left(\int_0^1 |\nabla u(x+tz)|\mathrm{d}t\right)^p \le \int_0^1 |\nabla u(x+tz)|^p\mathrm{d}t.$$

e então,

$$\int_\Omega \int_{B_1} \left(\int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)||z|}{|z|}\mathrm{d}t\right)^p \frac{1}{|z|^{N+(s-1)p}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x =$$
$$= \int_\Omega \int_{B_1} \left(\int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)|}{|z|^{(N+(s-1)p)/p}}\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$\le \int_\Omega \int_{B_1} \int_0^1 \frac{|\nabla u(x+tz)|^p}{|z|^{N+(s-1)p}}\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$\le \int_{B_1} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla u(x+tz)|^p}{|z|^{N+(s-1)p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}z$$
$$= \int_{B_1} \int_0^1 \frac{\|\nabla \overline{u}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|z|^{N+(s-1)p}}\mathrm{d}t\mathrm{d}z.$$

Como

$$\int_{B_1} \frac{1}{|z|^{N+(s-1)p}} \mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{1}{r^{N+(s-1)p}} N\omega_N r^{N-1} \mathrm{d}r = N\omega_N \int_0^1 r^{-1+p(1-s)} \mathrm{d}r = \frac{N\omega_N}{p(1-s)}$$

e

$$\int_0^1 \frac{N\omega_N}{p(1-s)} \mathrm{d}t = \frac{N\omega_N}{p(1-s)},$$

temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y &\le \frac{N\omega_N}{p(1-s)} \|\nabla \overline{u}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \frac{N\omega_N}{p(1-s)} \|\overline{u}\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &= \frac{N\omega_N}{p(1-s)} \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = C_1(N,s,p) \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

em que $C_1(N,s,p) := \dfrac{N\omega_N}{p(1-s)}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\ge 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y &\le 2^p \int_\Omega \int_{\Omega \cap \{|x-y|\ge 1\}} (|u(x)|^p + |u(y)|^p) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &\le 2^p \int_\Omega \int_\Omega (|u(x)|^p + |u(y)|^p) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= 2^p \left(\int_\Omega \int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \int_\Omega \int_\Omega |u(y)|^p \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right) \\ &= 2^p \left(|\Omega| \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + |\Omega| \|u\|^p_{L^p(\Omega)} \right) \\ &= 2^{p+1} |\Omega| \|u\|^p_{L^p(\Omega)} = C_2(p,\Omega) \|u\|^p_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

em que $C_2(p,\Omega) := 2^{p+1}|\Omega|$.

Então,

$$
\begin{aligned}
\|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} &= \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} \\
&\leq \|u\|^p_{L^p(\Omega)} + C_1(N,s,p)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} + C_2(p,\Omega)\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \\
&= (C_2(p,\Omega)+1)\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + C_1(N,s,p)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq (C_2(p,\Omega)+1)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} + C_1(N,s,p)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&= C(N,s,p,\Omega)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)},
\end{aligned}
$$

em que $C(N,s,p) = C_1(N,s,p) + C_2(p,\Omega)$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] F.L. Almgren, E.H. Lieb., *Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous,* J. Amer. Math. Soc. **2**, no. 4 (1989), 683-773.

[2] F. Alter, V. Caselles, *Uniqueness of the Cheeger set of a convex body,* Nonlinear Analysis **70** (2009) 32-44.

[3] D. Applebaum, *Lévy processes, from probability fo finance and quantum groups,* Notices Amer. Math. Soc. **51** (2004) 1336-1347.

[4] J. Bertoin, *Levy processes,* volume 121 of Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[5] J. Bourgain, H. Brezis, P. Mironescu, *Another look at Sobolev spaces,* in Optimal Control and Partial Differential Equations (J. L. Menaldi, E. Rofman et A. Sulem, eds.) a volume in honor of A. Bensoussans's 60th birthday, IOS Press, (2001), 439–455.

[6] L. Brasco, E. Lindgren, E. Parini, *The fractional Cheeger problem,* Hal archives-ouvertes (2013).

[7] L. Brasco, E. Parini, *The second eigenvalue of the fractional p-laplacian,* Hal archives-ouvertes (2014).

[8] H. Brezis, *How to recognize constant functions. connections with sobolev spaces,* Russian Mathematical Surveys, **57**, (2002) 693-708.

[9] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer, 2011.

[10] H. Bueno, G. Ercole, *Solutions of the Cheeger problem via torsion functions,* J. Math. Anal. **381** (2011), 263-279.

[11] H. Bueno, G. Ercole, *On the p-torsion functions of an annulus,* Asymptotic Analysis, **92**, no. 3-4,(2015) 235-247.

[12] H. Bueno, G. Ercole, S.S. Macedo, *Asymptotic behavior of the p-torsions as p goes to 1,* Archiv der Mathematik (Printed ed.), **107** (2016), 63-72.

[13] H. Bueno, G. Ercole, S.S. Macedo, G.A. Pereira *Torsion Functions and the Cheeger Problem: A Fractional Approach,* Adv. Nonlinear Anal (2016).

[14] L.A. Cafarelli, *Nonlocal equations, drifts and games,* Non. Partial Dif. Eq., Abel Symposia **7** (2012) 37-52.

[15] G. Carlier, M. Comte, *On a weighted total variation minimization problem*, Journal of Functional Analysis, **250** , (2007) 214- 226.

[16] E. Cinti, J. Serra, E. Valdinoci, *Quantitative flatness results and BV- estimates for stable nonlocal minimal surfaces,* (2016) arXiv preprint arXiv: 1602.00540.

[17] F. Demengel, *Some existence results for partial differencital equations involving the 1-Laplacian: first eigenvalue for* Δ_1, C.R. Math. Acad.Sci.Paris **334** , (2002) 1071-1076.

[18] F. Demengel, *Functions locally almost 1harmonic,* Applicable Analysis, **83**, (2004), 865-896.

[19] F. Demengel, *Some existence's results for noncoercive "1-Laplacian"operator,* Journal: Asymptotic Analysis **43**, no 4 (2005), 287-322.

[20] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci, *Hitchhikers guide to the fractional Sobolev spaces,* Bull. Sci. Math. **136** (5),(2012) 521-573.

[21] L.C. Evans, *Partial differential equations,* Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2010.

[22] L. C. Evans, R.F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC Press, 1992.

[23] G. Franzina, G. Palatucci, *Fractional p-eigenvalue,* to appear on Riv. Mat. univ. Parma (2013), available at http://cvgmt.sns.it/paper/2168/

[24] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differencial Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[25] G. Gilboa and S. Osher, *Nonlocal operators with applications to image processing,* Multiscale Model. Simul., **7** (2008), 1005-1028.

[26] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation,* Birkäuser, 1984.

[27] A. Greco, R. Servadei, *Hopf's lemma and constrained radial symmetry for the fractional Laplacian,* to appear in Math. Res. Lett.

[28] M. Guedda, L. Véron, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents,* Nonlinear Anal. TMA **13** (1989) 879-902.

[29] P. Hild, I.R. Ionescu, T. Lanchand-Robert, I. Rosca, *The blocking of an inhomogeneous Bingham fluid.Applications to landslides,* Math. Modelling and Num. Anal. v. **36**, (2002) 1013-1026.

[30] A. Iannizzotto, S. Mosconi, M. Squassina, *Global Hölder regularity for the fractional p-laplacian,* Rev. Mat. Iberoam. **32**, (2016) 1353–1392 - preprint available at http://arxiv.org/abs/1411.2956.

[31] A. Iannizzotto, M. Squassina, *Weyl-type laws for fractional p-eigenvalue problems,* Asymptotic Analysis **88** (2014) 233–245.

[32] I.R. Ionescu, T. Lanchand-Robert, *Generalized Cheeger sets related to landslides,* Calc.Var., **23**, (2005) 227-249. 2005.

[33] B. Kawohl, V. Fridman, *Isoperimetric estimates for the first eigenvalue of the p-Laplace operator and the Cheeger constant,* Comment Math.Univ.,**44** (2003), 659-667.

[34] B. Kawohl, *On a family of torsional creep problems,* J. Reine Angew. Math. **410** (1990) 1-22.

[35] S. Kesavan, *Symmetrization and Applications,* world scientific Vol. 3, India 2006.

[36] N. Laskin, *Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals,*Phys. Lett. A, **268** (2000), 298-305.

[37] G.P. Leonardi, *An overview on the Cheeger Problem,* International Series of Numerical Mathematics **166** (2015), 117-139.

[38] G.M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations,* Nonlinear Anal. **12** (1988) 1203-1219.

[39] E. Lindgren, P. Lindqvist, *Fractional Eigenvalues,* Calc. Var. Partial Differential Equations **49**, no. 1-2, (2014), 795-826.

[40] P. Lindqvist, *A nonlinear eigenvalue problem,* Topics in mathematical analysis, Ser. Anal. Appl. Comput., World Sci. Publ., Hackensack, NJ, **3** (2008), 175-203.

[41] R. Metzler, J. Klafter, *The restaurant at the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics,* J. Phys. A **37** (2004), 161-208.

[42] E. Parini, *An introduction to the Cheeger problem,* Surv. Math. Appl. **6** (2011), 9-22.

[43] L.E. Payne, G.A. Philippin, *Some maximum principles for nonlinear elliptic equations in divergence form with applications to capilarity surfaces and to surfaces of constant mean curvature,* Nonlinear Analysis **3**, no 2, (1979) 193-211.

[44] I.Peral, *Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian,* Second school of nonlinear functional analysis and applications to differential equation. Miramare-Trieste: International center for theoretical physics, 21 de abril - 9 de maio. 1997.

[45] S. Sakaguchi, *Concavity properties of solutions to some degenerated quasilinear elliptic Dirichlet problems,* Ann. Scuola Norm,Sup. Pisa Cl. Sci (4) **14** (1987), 403-421.

[46] R. L. Frank, R. Seiringer, *Non-linear ground state representations and sharp Hardy inequalities,* J. Funct.Anal. **255** (2008),3407-3430.

[47] P. Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations,* Differential Equations **51** (1984) 126-150.