

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Espaço de módulos de triplas de geodésicas complexas no espaço hiperbólico complexo de dimensão 3



Javier Ticona Yucra

Belo Horizonte - MG
25 de abril de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Javier Ticona Yucra

Orientador:

Prof. Dr. Nikolai Alexandrovitch Goussevskii

**Espaço de módulos de triplas de geodésicas
complexas no espaço hiperbólico complexo
de dimensão 3**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Matemática da Universidade Federal de Minas
Gerais, como requisito parcial para a obtenção do
grau de doutor em Matemática.

Belo Horizonte - MG

25 de abril de 2017

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Nikolai Goussevskii, pela paciência e excelente orientação.

Aos meus pais pelo carinho incondicional, incentivo, ensinamentos, apoio e por todo que sempre me deram.

Aos meus irmãos Maribel, Johnny, Jessica e a minha tia Isabel pelo apoio e bons conselhos oferecidos.

Aos meus amigos de curso.

À meus professores pelos ensinamentos que contribuíram para minha formação.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro.

À minha família.

Resumo

Neste trabalho nós estudamos o espaço \mathcal{M} de triplas ordenadas de geodésicas complexas distintas no espaço hiperbólico complexo de dimensão 3, a menos da ação do seu grupo de isometrias holomorfas. O objetivo principal é construir o espaço de módulos para \mathcal{M} . Para resolver este problema a técnica utilizada neste trabalho é o uso de conjuntos polares de geodésicas complexas e matrizes de Gram associadas com esses conjuntos.

Palavras-chave: Espaço hiperbólico complexo, Espaço de módulos, Matriz de Gram, Geodésicas complexas, Conjuntos polares.

Abstract

In this work we study the space \mathcal{M} of ordered triples of distinct complex geodesics in the complex hyperbolic space of dimension 3, up to its holomorphic isometries group. The main aim is to construct the moduli space for \mathcal{M} . To solve this problem we use the polar sets of complex geodesics and Gram matrices associated with these sets.

Keywords: Complex hyperbolic space, Moduli space, Gram matrix, Complex geodesic, Polar sets.

Conteúdo

Introdução	10
1 Elementos de Geometria Hiperbólica Complexa	11
1.1 Modelo projetivo do $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$	11
1.2 Subvariedades totalmente geodésicas	15
1.2.1 Subvariedades totalmente geodésicas holomorfas	15
1.2.2 Subvariedades totalmente geodésicas totalmente reais	15
1.3 Geodésicas complexas	16
2 Matrizes de Gram e o Teorema de Witt	19
2.1 Caracterização de matrizes de Gram associadas a m -uplas de pontos positivos	23
3 Duplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$	25
3.1 Esfera polar de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$	25
3.2 Conjunto bi-ortogonal para duplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$	31
3.3 Espaço de módulos de duplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$	38
3.3.1 Caso genérico	39
3.3.2 Caso especial	43
4 Triplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$	49
4.1 Dimensão do espaço de módulos de triplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$	51

4.1.1	Calculando a dimensão do espaço de módulos de triplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$	54
4.2	Espaço de módulos de triplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$	57
4.2.1	Espaço de módulos de triplas reais	66
4.3	Espaço de módulos de triplas especiais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$	67
4.3.1	Triplas coplanares de geodésicas complexas	68
4.3.1.1	Triplas coplanares não ortogonais	69
4.3.1.2	Triplas coplanares ortogonais	73
4.3.2	Triplas dois à dois coplanares de geodésicas complexas	79
4.3.2.1	Triplas dois à dois coplanares não ortogonais	80
4.3.2.2	Triplas dois à dois coplanares ortogonais	84
	Referências Bibliográficas	87

Introdução

Seja \mathcal{M} o espaço de configurações de triplas ordenadas de geodésicas complexas distintas no espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Construímos invariantes que descrevem unicamente a classe de congruência por $\text{PU}(3, 1)$ de triplas ordenadas de geodésicas complexas distintas no espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ e descrevemos o correspondente espaço de módulos de \mathcal{M} . Gostaríamos de mencionar que o problema análogo no caso $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ foi resolvido por Cunha-Dutenhefner-Gusevskii-Thebaldi [5].

Para descrever o espaço de módulos de \mathcal{M} , primeiramente, descrevermos o espaço de módulos das configurações de duplas de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Esta tese está assim organizada. No primeiro capítulo fazemos um resumo de fatos básicos de geometria hiperbólica complexa. No segundo capítulo obtemos uma caracterização das matrizes de Gram de m -uplas ordenadas de pontos positivos no espaço projetivo complexo de qualquer dimensão. No terceiro capítulo descrevemos o espaço de módulos para uma dupla de geodésicas complexas no espaço hiperbólico complexo de dimensão 3. Na seção 3.1 definiremos o *conjunto polar* para uma subvariedade totalmente geodésica holomorfa, veremos que o conjunto polar de uma geodésica complexa em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é uma esfera que será chamada *esfera polar*. Na seção 3.2 definiremos o *conjunto bi-ortogonal* para duplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, a partir do conjunto bi-ortogonal para uma dupla de geodésicas complexas definiremos a *distância* e *ângulo* entre geodésicas complexas. Na seção 3.3 calculamos o espaço de módulos das configurações de duplas de geodésicas

complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, para isto consideramos dois casos, o primeiro caso será considerar que a dupla de geodésicas complexas sejam reversas e no segundo caso consideramos que a dupla de geodésicas complexas sejam coplanares.

Finalmente, no quarto capítulo construímos o espaço de módulos de triplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, para isto consideramos dois casos, o primeiro caso será considerar que as subduplas obtidas da tripla de geodésicas complexas sejam reversas e o segundo caso será considerar que pelo menos uma subdupla obtida da tripla de geodésicas complexas seja coplanar. Veremos que nosso trabalho é coerente com [10, Fenchel], onde prova-se que o espaço de triplas de geodésicas riemannianas ordenadas no espaço hiperbólico real de dimensão 3 tem dimensão seis.

Capítulo 1

Elementos de Geometria Hiperbólica Complexa

Neste capítulo, apresentamos os conceitos e resultados básicos da geometria hiperbólica complexa e do seu grupo de isometrias. Também apresentaremos o modelo projetivo do espaço projetivo complexo de dimensão n . A principal referência para o material aqui apresentada pode ser encontrada em [11, Complex hyperbolic geometry], também pode-se consultar [1, Complex Kleinian Groups, Cap. 2].

1.1 Modelo projetivo do $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$

Seja \mathbb{V}^{n+1} um espaço vetorial complexo de dimensão $n + 1$ munido de uma forma Hermitiana $\langle -, - \rangle$ de assinatura $(n, 1)$, \mathbb{V}^{n+1} será denotado por $\mathbb{V}^{n,1}$. Sendo $\langle -, - \rangle$ Hermitiana temos que $\langle z, z \rangle \in \mathbb{R}$, assim $\mathbb{V}^{n,1}$ pode ser dividido em três subconjuntos que serão denotados por V_-, V_0, V_+ e definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V_- &= \{z \in \mathbb{V}^{n,1} : \langle z, z \rangle < 0\}, \\ V_0 &= \{z \in \mathbb{V}^{n,1} : \langle z, z \rangle = 0\}, \\ V_+ &= \{z \in \mathbb{V}^{n,1} : \langle z, z \rangle > 0\}. \end{aligned}$$

Os vetores de V_- são chamados de *vetores negativos*, os vetores de V_0 são chamados de *vetores nulos* ou *vetores isotrópicos* e vetores de V_+ são ditos de *vetores positivos*.

Lembremos que o *espaço projetivo complexo* $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$ é definido por:

$$\mathbb{P}\mathbb{V}^n = (\mathbb{V}^{n+1} - \{0\}) / \sim$$

onde " \sim " denota a relação de equivalência dada por $z \sim w$ se, e somente se, $z = \lambda w$ para algum escalar λ complexo diferente de zero.

Seja $\pi: \mathbb{V}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{V}^n$ a projeção natural definida acima de $\mathbb{V}^{n+1} \setminus \{0\}$ no espaço projetivo complexo $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$. A projeção de um vetor negativo (positivo, nulo ou isotrópico) é chamado *ponto negativo* (*positivo, nulo ou isotrópico*).

Definição 1.1 *O conjunto de pontos negativos em $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$ é definido como o espaço hiperbólico complexo de dimensão n e é denotado por $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Isto é, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \pi(V_-)$.*

Definição 1.2 *O conjunto de pontos nulos ou isotrópicos em $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$ é definido como a fronteira ideal do espaço hiperbólico complexo de dimensão n e é denotado por $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Isto é, $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \pi(V_0)$.*

Notação 1.1 $\overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.

Dados dois pontos $x, y \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, define-se a métrica de Bergman (ver Chen-Greenberg [4, Prop. 2.4.4] ou Goldman [11, Seção 3.1.7]) $d(x, y)$ dada por:

$$\cosh^2 \left(\frac{d(x, y)}{2} \right) = \frac{\langle v, w \rangle \langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle},$$

onde $v, w \in \mathbb{V}^{n,1}$ são dois levantamentos arbitrários de x e y respectivamente, isto é, $\pi(v) = x$ e $\pi(w) = y$.

O espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ munido da métrica de Bergman é uma variedade de Kähler com curvatura seccional holomorfa constante e igual a -1 e a curvatura seccional variando entre -1 e $-\frac{1}{4}$.

Seja $GL(n+1, \mathbb{C})$ o grupo de aplicações lineares inversíveis, o *grupo unitário* $U(n, 1)$ correspondente à forma Hermitiana $\langle -, - \rangle$ é definido por:

$$U(n, 1) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{C}) : \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle, \forall v, w \in \mathbb{V}^{n,1}\}.$$

Da definição de $U(n, 1)$ vemos que ele age em $\mathbb{V}^{n,1}$ preservando os subconjuntos V_-, V_0 e V_+ .

A projetivização de $U(n, 1)$ é chamado o *grupo unitário projetivo* e denotado por $PU(n, 1)$, este grupo projetivo é o grupo de isometrias holomorfas do espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.

Uma *conjugação complexa* é uma aplicação $\mu: \mathbb{V}^{n,1} \rightarrow \mathbb{V}^{n,1}$ tal que para $v, w \in \mathbb{V}^{n,1}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ temos que:

$$\begin{aligned} \mu(v + w) &= \mu(v) + \mu(w), \\ \mu(\alpha v) &= \bar{\alpha}\mu(v) \end{aligned}$$

μ é uma aplicação anti-linear. É fácil ver que μ age em $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$ e que preserva a forma Hermitiana $\langle -, - \rangle$, portanto a projetivização de μ é uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.

Todo o grupo de isometrias $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$ é gerado por $PU(n, 1)$ e a projetivização de uma conjugação complexa.

Para cada subespaço $W \subset \mathbb{V}^{n,1}$ podemos restringir o produto Hermitiano de $\mathbb{V}^{n,1}$ para W , assim $\langle -, - \rangle|_W$ possui sua própria assinatura, assim temos a seguinte proposição:

Proposição 1.1 *Seja W um subespaço de $\mathbb{V}^{n,1}$ de dimensão complexa $(m+1)$ com $1 \leq m \leq n$. A restrição do produto Hermitiano de $\mathbb{V}^{n,1}$ para W pode ter assinatura $(m, 1)$ ou $(m, 0)$ ou $(m+1, 0)$.*

Dependendo da assinatura de $W \subset \mathbb{V}^{n,1}$, chamaremos à W da seguinte forma:

Definição 1.3 *Seja W um subespaço de $\mathbb{V}^{n,1}$ de dimensão complexa $(m+1)$ com $1 \leq m \leq n$. Chamamos o subespaço W de hiperbólico se W tem assinatura $(m,1)$, parabólico se W tem assinatura $(m,0)$ e elíptico se W tem assinatura $(m+1,0)$.*

Definição 1.4 *Seja W um subespaço de $\mathbb{V}^{n,1}$. Dizemos que W é um subespaço degenerado se a restrição do produto Hermitiano de $\mathbb{V}^{n,1}$ à W é degenerada. Isto é, se $\exists z \in W, z \neq \vec{0}$, tal que $\langle z, w \rangle = 0$, para todo $w \in W$.*

Definição 1.5 *Seja W um subespaço de $\mathbb{V}^{n,1}$. Dizemos que W é um subespaço não-degenerado se a restrição do produto Hermitiano de $\mathbb{V}^{n,1}$ à W é não-degenerada. Isto é, se $z \in W$ é tal que $\langle z, w \rangle = 0$ para todo $w \in W$, então temos que $z = \vec{0}$.*

Proposição 1.2 *Seja W um subespaço de $\mathbb{V}^{n,1}$.*

1. W é não-degenerado se, somente se, ele é hiperbólico ou elíptico.
2. W é degenerado se, somente se, ele é parabólico.

Proposição 1.3 *Seja W um subespaço de $\mathbb{V}^{n,1}$.*

1. Se W é hiperbólico se, somente se, $\langle -, - \rangle|_W$ é indefinida.
2. Se W é elíptico se, somente se, $\langle -, - \rangle|_W$ é definida positiva.
3. Se W é parabólico se, somente se, $\langle -, - \rangle|_W$ é semi-definida positiva.

Demonstração: Segue das definições 1.3 e da Proposição 1.2. ■

Proposição 1.4 *Seja W um subespaço próprio de $\mathbb{V}^{n,1}$, então*

1. Se W é hiperbólico (indefinido) se, somente se, W^\perp é elíptico (positivo).
2. Se W é elíptico (positivo) se, somente se, W^\perp é hiperbólico (indefinido).
3. Se W é parabólico (degenerado) se, somente se, W^\perp é parabólico (degenerado).

Demonstração: Se W é não-degenerado (hiperbólico ou elíptico), então $\mathbb{V}^{n,1} = W \oplus W^\perp$. Já que a assinatura de $\langle -, - \rangle|_W$ pode ser lida a partir de esta decomposição, temos que subespaços hiperbólicos (elípticos) tem complemento ortogonal elípticos (hiperbólicos). É fácil ver que se W é parabólico então W^\perp também é parabólico. ■

1.2 Subvariedades totalmente geodésicas

Existem dois tipos de subvariedades totalmente geodésicas do espaço hiperbólico complexo, as quais serão descritas nesta seção. Uma referência para justificar os fatos a seguir é Chen-Greenberg [4].e Goldman [11]

1.2.1 Subvariedades totalmente geodésicas holomorfas

Seja W um subespaço complexo de $\mathbb{V}^{n,1}$ de dimensão complexa $(m + 1)$, $m \leq n$. Se $W \cap V_- \neq \emptyset$, isto é W indefinido, então a projetivização de W interceptada com $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$ produz uma cópia de um espaço hiperbólico complexo mergulhado em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$, nesse caso um $\mathbb{H}_\mathbb{C}^m$ que é uma subvariedade totalmente geodésica.

$$\pi(W \setminus \{0\}) \cap \mathbb{H}_\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{H}_\mathbb{C}^m$$

Tais subvariedades são denominadas *subvariedades totalmente geodésicas holomorfas* ou \mathbb{C}^m -planos.

Um \mathbb{C}^1 -plano é uma subvariedade totalmente geodésica holomorfa com curvatura seccional constante igual à -1 .

1.2.2 Subvariedades totalmente geodésicas totalmente reais

Sabe-se que $\mathbb{V}^{n,1}$ é um espaço vetorial complexo. Considerando somente a multiplicação escalar por $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, assim geramos um espaço vetorial real que denotaremos por $(\mathbb{V}^{n,1})_\mathbb{R}$ cujos pontos e operações são as mesmas que $\mathbb{V}^{n,1}$.

Seja W um subespaço real de $(\mathbb{V}^{n,1})_{\mathbb{R}}$ de dimensão real $(m+1)$. Dizemos que W é *totalmente real* se, e somente se, o produto Hermitiano $\langle z, w \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $z, w \in W$. Seja W um subespaço totalmente real tal que $W \cap V_- \neq \emptyset$, isto é W indefinido, então a projetivização de W interceptada com $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ produz uma cópia de um espaço hiperbólico real mergulhado em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, nesse caso um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^m$ que é uma subvariedade totalmente geodésica.

$$\pi(W \setminus \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^m$$

Tais subvariedades são denominadas *subvariedades totalmente geodésicas totalmente reais* ou \mathbb{R}^m -planos.

Pode-se mostrar que um subespaço totalmente real W de dimensão real $(m+1)$ satisfaz a condição $m \leq n$.

Um \mathbb{R}^2 -plano ($\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$) é uma subvariedade totalmente geodésica totalmente real com curvatura seccional constante igual à $-\frac{1}{4}$.

Os espaços $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^1$ (\mathbb{R} -planos) são as *geodésicas* do espaço hiperbólico complexo conforme Chen-Greenberg [4, Prop. 2.4.3].

1.3 Geodésicas complexas

Começamos esta seção fazendo um estudo sobre alguns subespaços do espaço projetivo $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$.

Seja C um subespaço complexo de $\mathbb{V}^{n,1}$ de dimensão complexa 2, então $\pi(C \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{P}\mathbb{V}^1$ é definida como uma *linha projetiva complexa* e a denotaremos por \hat{c} , isto é, $\hat{c} = \pi(C \setminus \{0\})$. Se C é um subespaço positivo (indefinido, degenerado) diremos que \hat{c} é uma linha projetiva complexa positiva (indefinida, degenerada).

Seja V um subespaço complexo de $\mathbb{V}^{n,1}$ de dimensão complexa 3, então $\pi(V \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{P}\mathbb{V}^2$ é definido como um *plano projetivo complexo*. Se V é um subespaço positivo (indefinido, degenerado) diremos que $\pi(V \setminus \{0\})$ é um plano projetivo

complexo positivo (indefinido, degenerado).

Dizemos que duas linhas projetivas complexas \widehat{c}_1 e \widehat{c}_2 são *coplanares* se existe um plano projetivo complexo que as contém.

Proposição 1.5 *Duas linhas projetivas complexas \widehat{c}_1 e \widehat{c}_2 são coplanares se, e somente se, \widehat{c}_1 e \widehat{c}_2 interceptam-se em um ponto de $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$.*

Definição 1.6 *Seja \widehat{c} uma linha projetiva complexa indefinida. Então, $c = \widehat{c} \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ será chamada geodésica complexa do espaço hiperbólico complexo.*

Note que a condição de que C seja indefinido equivale a dizer que tem assinatura $(1, 1)$, isto é, $C = C^{1,1}$. De aqui em adiante diremos que a geodésica complexa c está definida por uma linha projetiva complexa \widehat{c} se $c = \widehat{c} \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Então, qualquer geodésica complexa é a interseção de uma linha projetiva complexa indefinida de $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$ com $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Além disso como foi visto na seção 1.2 uma geodésica complexa c é uma subvariedade totalmente geodésica holomorfa tal que $c \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$.

Proposição 1.6 *Seja $p, q \in \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}^n$ dois pontos distintos quaisquer, então existe uma única geodésica complexa c contendo p e q .*

Demonstração: Considere $v, w \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ dois levantamentos de p e q respectivamente, isto é, $\pi(v) = p$ e $\pi(w) = q$. Definamos C o espaço vetorial complexo de dimensão 2 como:

$$C = \text{span}_{\mathbb{C}} \{v, w\}$$

Então, é fácil ver que $c = \widehat{c} \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ é a única geodésica complexa contendo p e q , onde $\widehat{c} = \pi(C \setminus \{0\})$. ■

Seja $c \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ uma geodésica complexa que está definida pela linha projetiva complexa $\widehat{c} = \pi(C \setminus \{0\})$, isto é, $c = \widehat{c} \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, pela Proposição 1.5 sabe-se que duas linhas projetivas complexas coplanares sempre se interceptam em um ponto de $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$ então temos as seguintes definições:

Definição 1.7 *Duas geodésicas complexas c_1 e c_2 são coplanares se \widehat{c}_1 e \widehat{c}_2 são coplanares.*

Definição 1.8 *Duas geodésicas complexas coplanares c_1 e c_2 são chamadas:*

1. Ultraparalelas se as linhas projetivas complexas \widehat{c}_1 e \widehat{c}_2 que definem c_1 e c_2 se interceptam em um ponto positivo.
2. Assintóticas se as linhas projetivas complexas \widehat{c}_1 e \widehat{c}_2 que definem c_1 e c_2 se interceptam em um ponto isotrópico.
3. Concorrentes se as linhas projetivas complexas \widehat{c}_1 e \widehat{c}_2 que definem c_1 e c_2 se interceptam em um ponto negativo.

Definição 1.9 *Duas geodésicas complexas não coplanares c_1 e c_2 são chamadas reversas.*

Capítulo 2

Matrizes de Gram e o Teorema de Witt

Seja $p = (p_1, \dots, p_k)$ uma k -upla ordenada de pontos distintos em $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$ de dimensão $n \geq 2$. Consideremos $v = (v_1, \dots, v_k)$, onde cada vetor $v_i \in \mathbb{V}^{n,1}$ é um levantamento de p_i , isto é $\pi(v_i) = p_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. A matriz G dada por:

$$G = G(p, v) = (g_{ij}) := (\langle v_i, v_j \rangle),$$

é chamada *matriz de Gram* associada a uma k -upla p definida por v , G é uma matriz Hermitiana e claramente ela depende dos levantamentos v_i , mas o sinal do determinante da matriz de Gram não depende dos levantamentos escolhidos. De fato, se consideramos outro levantamento de p , digamos $v' = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_k v_k)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, com $\lambda_i \neq 0$, então $G' = DG\bar{D}$, onde $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ é uma matriz diagonal, assim $\det(G') = \det |\lambda_1 \dots \lambda_k|^2 (G)$.

Definição 2.1 *Duas matrizes Hermitianas G e G' são ditas equivalentes, quando existe uma matriz diagonal $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, com $\lambda_i \neq 0$, tal que $G' = DG\bar{D}$.*

Pelo visto antes da definição, vemos que determinantes de matrizes Hermitianas

equivalentes possuem o mesmo sinal.

Dada uma k -upla $p = (p_1, \dots, p_k)$ ordenada de pontos distintos em $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$, as matrizes de Gram obtidas usando levantamentos arbitrários de p são equivalentes.

Definição 2.2 *Uma isometria de um espaço vetorial Hermitiano é uma aplicação linear injetora que preserva o produto Hermitiano.*

Teorema 2.1 (Teorema de Witt) *Seja W um subespaço de $\mathbb{V}^{n,1}$ e $f: W \rightarrow \mathbb{V}^{n,1}$ uma isometria. Então existe uma isométrica $F: \mathbb{V}^{n,1} \rightarrow \mathbb{V}^{n,1}$ tal que $F|_W = f$. F é dita uma extensão isométrica de f .*

Demonstração: Veja Scharlau [16, Teorema 9.1, página 265]. ■

Agora apresentaremos algumas aplicações do Teorema de Witt; por exemplo para responder a seguinte pergunta: Dados dois conjuntos ordenados de k vetores (v_1, \dots, v_k) e (v'_1, \dots, v'_k) em $\mathbb{V}^{n,1}$, sobre quais condições a correspondência $v_i \mapsto v'_i$ pode-se estender à uma isometria $F \in U(n, 1)$ tal que $F(v_i) = v'_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$?

Em primeiro lugar vejamos o caso mais simples em que os vetores (v_1, \dots, v_k) são linearmente independentes.

Proposição 2.1 *Sejam (v_1, \dots, v_k) e (v'_1, \dots, v'_k) em $\mathbb{V}^{n,1}$, duas k -uplas ordenadas de vetores em $\mathbb{V}^{n,1}$, tais que os vetores (v_1, \dots, v_k) e (v'_1, \dots, v'_k) são linearmente independentes. Então a correspondência $v_i \mapsto v'_i$ pode-se estender à uma isometria $F \in U(n, 1)$ tal que $F(v_i) = v'_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$.*

Demonstração: Seja $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1, \dots, v_k\}$, sendo v_1, \dots, v_k linearmente independentes é fácil provar que pode-se construir uma isometria $\sigma: W \rightarrow \mathbb{V}^{n,1}$ tal que $v_i \mapsto v'_i$. A proposição segue do Teorema de Witt. ■

Agora se os vetores (v_1, \dots, v_k) são linearmente dependentes, precisamos de outro resultado para garantir a existência da isometria $F \in U(n, 1)$ tal que $F(v_i) = v'_i$.

Primeiro observemos que se existe uma tal isometria $F \in U(n, 1)$ então $\langle v_i, v_j \rangle = \langle v'_i, v'_j \rangle, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, isto é, que a matriz de Gram G dos vetores (v_1, \dots, v_k) é igual à matriz de Gram G' dos vetores (v'_1, \dots, v'_k) . Além disso, se existir algum tipo de dependência linear entre os vetores (v_1, \dots, v_k) , então o mesmo tipo de dependência linear terá que existir entre os vetores (v'_1, \dots, v'_k) .

Vemos que as condições descritas no anterior parágrafo são necessárias para a existência da isometria $F \in U(n, 1)$ tal que $F(v_i) = v'_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$. Utilizando o Teorema de Witt, em [13] mostra-se que essas condições também são suficientes, precisamente temos o Teorema de Höfer:

Teorema 2.2 *Sejam (v_1, \dots, v_k) e (v'_1, \dots, v'_k) em $\mathbb{V}^{n,1}$, dois k -uplas ordenadas de vetores em $\mathbb{V}^{n,1}$. Existe uma isometria $F \in U(n, 1)$ tal que $F(v_i) = v'_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$. Se, e somente se, as matrizes de Gram G e G' são iguais,*

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle v'_i, v'_j \rangle, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}. \quad (2.1)$$

e

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^k \lambda_i v'_i = \vec{0}, \quad \forall \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k. \quad (2.2)$$

Demonstração: Veja [13, Teorema 1]. ■

Observe que a Proposição 2.1 é uma aplicação direta do Teorema de Höfer.

Proposição 2.2 *Sejam (v_1, \dots, v_k) e (v'_1, \dots, v'_k) em $\mathbb{V}^{n,1}$, dois k -uplas ordenadas de vetores em $\mathbb{V}^{n,1}$, tais que $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1, \dots, v_k\}$ e $W' = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v'_1, \dots, v'_k\}$ são dois subespaços não-degenerados de $\mathbb{V}^{n,1}$ e as matrizes de Gram G e G' são iguais,*

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle v'_i, v'_j \rangle, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

então, existe uma isometria $F \in U(n, 1)$ tal que $F(v_i) = v'_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.2 para provar a existência da isometria $F \in$

$U(n, 1)$ tal que $F(v_i) = v'_i$, para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, é suficiente provar a condição 2.2 do Teorema de Höfer. De fato,

Se temos que $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \vec{0}$, $\forall \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$, então,

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i, v_j \right\rangle = 0, \quad \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Escrevendo os produtos em forma matricial temos o seguinte:

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_2, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_{k-1}, v_1 \rangle & \langle v_k, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle v_{k-1}, v_2 \rangle & \langle v_k, v_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle v_1, v_{k-1} \rangle & \langle v_2, v_{k-1} \rangle & \cdots & \langle v_{k-1}, v_{k-1} \rangle & \langle v_k, v_{k-1} \rangle \\ \langle v_1, v_k \rangle & \langle v_2, v_k \rangle & \cdots & \langle v_{k-1}, v_k \rangle & \langle v_k, v_k \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{k-1} \\ \lambda_k \end{pmatrix} = 0.$$

isto é, $G^t \lambda^t = 0$, agora utilizando o fato que as matrizes de Gram são iguais, temos que $(G')^t \lambda^t = 0$, o que implica que:

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i v'_i, v'_j \right\rangle = 0, \quad \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Por hipótese W é não-degenerado (ver Definição 1.5), assim podemos concluir que $\sum_{i=1}^k \lambda_i v'_i = \vec{0}$, $\forall \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$. Analogamente utilizando o fato que W' é não-degenerado para mostrar que $\sum_{i=1}^k \lambda_i v'_i = \vec{0}$, implica que, $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = \vec{0}$, $\forall \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k$. ■

2.1 Caracterização de matrizes de Gram associadas a m -uplas de pontos positivos

Seja $p = (p_1, \dots, p_k)$ uma k -upla ordenada de pontos positivos distintos em $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$, com $k > 1$, e seja $v = (v_1, \dots, v_k)$ um levantamento de p . Denotemos por $W \subset \mathbb{V}^{n,1}$ o subespaço gerado pelos vetores v_1, \dots, v_k (isto é, $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1, \dots, v_k\}$) com $\dim W = m + 1$. Então, as seguintes situações são possíveis:

1. W é hiperbólico de assinatura $(m, 1)$, onde $1 \leq m \leq n$.
2. W é elíptico de assinatura $(m + 1, 0)$, onde $1 \leq m \leq n - 1$.
3. W é parabólico de assinatura $(m, 0)$, onde $1 \leq m \leq n - 1$.

Definição 2.3 *Seja $p = (p_1, \dots, p_k)$ uma k -upla ordenada de pontos positivos distintos em $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$. Então p é definida como hiperbólico (parabólico, elíptico) se o subespaço $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1, \dots, v_k\}$, é hiperbólico (parabólico, elíptico).*

Definição 2.4 *Uma k -upla $p = (p_1, \dots, p_k)$ ordenada de pontos positivos distintos em $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$ é dita regular se $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1, \dots, v_k\}$ é hiperbólico ou elíptico.*

Definição 2.5 *Uma k -upla $p = (p_1, \dots, p_k)$ ordenada de pontos positivos distintos em $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$ é dita degenerada se $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1, \dots, v_k\}$ parabólico.*

Para uma matriz Hermitiana H denotamos por $s(H) = (n_+, n_-, n_0)$ a assinatura (a inércia) de H , onde n_+ é o número de autovalores positivos de H , n_- é o número de autovalores negativos de H , e n_0 é o número de autovalores nulos de H .

Em seguida descrevermos as possíveis assinaturas das matrizes de Gram associadas a pontos positivos. Sejam p , $G = G(p, v)$, W^{m+1} , m como descrito acima. Então, G é uma matriz $k \times k$ Hermitiana tal que:

1. No caso hiperbólico ($m \leq n$), temos que $s(G) = (n_+, n_-, n_0)$, onde $n_+ = m$, $n_- = 1$, e $n_+ + n_0 + 1 = k$.

2. No caso elíptico ($m \leq n-1$), temos que $s(G) = (n_+, n_-, n_0)$, onde $n_+ = m+1$, $n_- = 0$, e $n_+ + n_0 = k$.
3. No caso parabólico ($m \leq n-1$), temos que $s(G) = (n_+, n_-, n_0)$, onde $n_+ = m$, $n_- = 0$, e $n_+ + n_0 = k$.

Portanto, se G é uma matriz de Gram associada a uma k -upla ordenada $p = (p_1, \dots, p_k)$ de pontos positivos distintos em $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$, então $\text{rank}(G) \leq (n+1)$, e a assinatura de G satisfaz uma das condições (1), (2) ou (3) acima. Chamaremos estas condições de *condições de assinatura*.

Proposição 2.3 *Seja $G = (g_{ij})$ uma matriz $k \times k$ Hermitiana tal que $g_{ii} = 1, \forall i = 1, \dots, k$. Então G é uma matriz de Gram associada a alguma k -upla ordenada $p = (p_1, \dots, p_k)$ de pontos positivos distintos em $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$ se, e somente se, $\text{rank}(G) \leq (n+1)$, e G é ou indefinida, ou definida positiva ou semi-definida positiva cuja assinatura satisfaz as condições de assinatura acima. Nos dois últimos casos $\text{rank}(G) \leq n$.*

Demonstração: ver Proposição 3.2 em [5]. ■

Como uma consequência, temos o seguinte teorema que é um resultado crucial para nossa construção do espaço de módulos de triplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Teorema 2.3 *Seja $G = (g_{ij})$ uma matriz $k \times k$ Hermitiana tal que $g_{ii} = 1, \forall i = 1, \dots, k$. Então G é uma matriz de Gram associada a alguma k -upla ordenada $p = (p_1, \dots, p_k)$ de pontos positivos distintos em $\mathbb{P}\mathbb{V}^3$ se, e somente se, todos os menores principais de G de ordem $l \geq 5$ se anulam, e todos os menores principais de G de ordem 4 são não positivos.*

Demonstração: Se $l \geq 5$, então quaisquer l vetores em $\mathbb{V}^{3,1}$ são linearmente dependentes, assim todos os menores principais de G de ordem $l \geq 5$ se anulam. A outra parte do teorema segue do critério de Sylvester e da Proposição 2.3. ■

Chamaremos as condições do Teorema 2.3 de *condições do determinante*.

Capítulo 3

Duplas de geodésicas complexas em

$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$

Começamos este capítulo definindo o conjunto polar de uma subvariedade totalmente geodésica holomorfa. Como foi visto na seção 1.2, se temos um subespaço complexo indefinido $W \subset \mathbb{V}^{n,1}$, tal que $\dim(W) = m + 1$. Então a sua projetivização interceptada com $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ produz uma subvariedade totalmente geodésica holomorfa c^m . Isto é:

$$\pi(W \setminus \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = c^m \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^m$$

Nestas condições, diremos que a subvariedade totalmente geodésica holomorfa c^m está definida por $W = W^{m,1}$.

Definição 3.1 *Seja c^m uma subvariedade totalmente geodésica holomorfa definida por $W = W^{m,1}$. Chamaremos à $\pi(W^\perp \setminus \{0\})$ o conjunto polar de c^m .*

Pela Proposição 1.4 temos que W^\perp é positivo e $\dim(W) + \dim(W^\perp) = n + 1$.

3.1 Esfera polar de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$

Vamos considerar $n = 3$ e estudar subespaços de $\mathbb{V}^{3,1}$ relacionados às geodésicas complexas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Seja $c \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ uma geodésica complexa, sabe-se que c é uma subvariedade totalmente geodésica holomorfa de dimensão complexa 1. Suponha que c está definida por $C = C^{1,1}$, então pela definição de conjunto polar temos que $\pi(C^{\perp} \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{P}\mathbb{V}^1$. Observe que C^{\perp} é um subespaço complexo positivo de dimensão complexa 2. Nestas condições temos a seguinte definição:

Definição 3.2 *Seja c uma geodésica complexa em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Então o conjunto polar da geodésica complexa c será chamada esfera polar. Isto é, $c^{\perp} = \pi(C^{\perp} \setminus \{0\})$ é a esfera polar da geodésica complexa c .*

Note que a esfera polar de uma geodésica complexa é uma linha projetiva complexa positiva, isto é, $c^{\perp} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{P}\mathbb{V}^3$.

Proposição 3.1 *O conjunto das geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ correspondem-se bi-jetivamente ao conjunto das linhas projetivas complexas positivas.*

Demonstração: Segue da Proposição 1.4. ■

Como foi dito ao principio deste capítulo, se temos um subespaço complexo indefinido de dimensão complexa três, $W^{2,1} \subset \mathbb{C}^{3,1}$, então a sua projetivização interceptada com $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ produz um subvariedade totalmente geodésica holomorfa de dimensão complexa 2. Isto é:

$$\pi(W \setminus \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3 \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$$

Assim, vemos que $W = W^{2,1}$ define que um plano hiperbólico complexo.

Observe que W^{\perp} é um subespaço complexo positivo de dimensão complexa 1, então o conjunto polar de planos hiperbólicos complexos em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ são pontos positivos $p \in \pi(V_+)$.

Definição 3.3 *O conjunto polar de planos hiperbólicos de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ serão chamado pontos polares.*

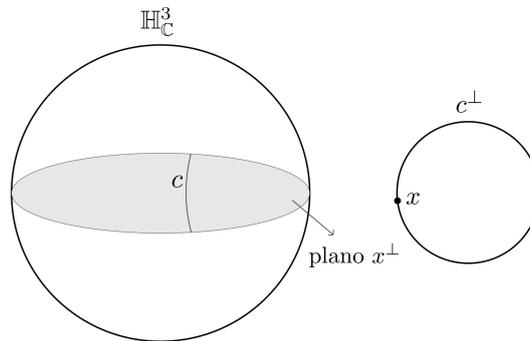
Notação 3.1

1. Chamaremos simplesmente de plano à cada plano hiperbólico complexo de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.
2. Se um plano tem ponto polar p , denotaremos tal plano por p^{\perp} .

Proposição 3.2 *O conjunto de planos hiperbólicos complexos em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ correspondem bijectivamente ao conjunto dos pontos positivos.*

Demonstração: Segue da Proposição 1.4. ■

Proposição 3.3 *Seja c uma geodésica complexa em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Então, p pertence à esfera polar c^{\perp} se, e somente se, o plano p^{\perp} contém à geodésica complexa c .*



Demonstração: Seja $p \in c^{\perp}$, então $(c^{\perp})^{\perp} \subset p^{\perp}$, pela Proposição 3.1 temos que $(c^{\perp})^{\perp} = c$, isto é $c \subset p^{\perp}$. Reciprocamente, se $c \subset p^{\perp}$, então $(p^{\perp})^{\perp} \subset c^{\perp}$, pela Proposição 3.2 temos que $(p^{\perp})^{\perp} = p$, isto é $p \in c^{\perp}$. ■

Observação 3.1 *No desenho acima, a circunferência que representa c^{\perp} denota uma reta projetiva complexa ou seja uma esfera.*

Passamos agora a descrever o ângulo e distância entre planos hiperbólicos complexos, para isso definiremos o d -invariante.

Definição 3.4 Definimos o d -invariante $d: \pi(V_+) \times \pi(V_+) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$d(x, y) = \frac{\langle v, w \rangle \langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle}$$

onde v e w são levantamentos de x e y respectivamente, isto é, $\pi(v) = x$ e $\pi(w) = y$.

Note que o d -invariante está bem definido (e não depende dos levantamentos v e w), também observe que d é invariante em relação à ação diagonal de $\text{PU}(3, 1)$.

Lema 3.1

1. Dados dois planos p^\perp e q^\perp que interceptam-se em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, então $0 \leq d(p, q) \leq 1$.
2. Dados dois planos p^\perp e q^\perp que não se interceptam em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, então $d(p, q) \geq 1$.

Demonstração: Primeiro note que por definição do d -invariante temos que $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in \pi(V_+)$. Agora, suponha que p^\perp e q^\perp são dois planos distintos que interceptam-se em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, eles interceptam-se ao longo de uma geodésica complexa c . Pela Proposição 3.3 tem-se que $p, q \in c^\perp = \pi(C^\perp \setminus \{0\})$, onde C^\perp é um subespaço elíptico. Portanto o determinante da matriz de Gram de p e q é positiva. Sejam v e w levantamentos de p e q respectivamente, isto é, $\pi(v) = p$ e $\pi(w) = q$,

$$\det \begin{bmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{bmatrix} > 0$$

é fácil ver que isto implica $0 \leq d(p, q) < 1$. Se $p^\perp = q^\perp$ obviamente $d(p, q) = 1$, isto prova a parte (1) do lema.

Para demonstrar (2) peguemos o subespaço $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v, w\}$, neste caso W somente pode ser hiperbólico ou parabólico. Assim o $\det G \leq 0$, isto implica que $d(p, q) \geq 1$. ■

Como veremos agora, a distância e ângulo entre planos pode ser obtida utilizando o d -invariante.

Dado dois planos p^\perp e q^\perp que se interceptam em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, definimos o *ângulo* ϕ entre esses dois planos por:

$$\cos^2(\phi) = d(p, q), \quad \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (3.1)$$

O ângulo ϕ está bem definido já que neste caso $d(p, q) < 1$.

Dizemos que dois planos p^\perp e q^\perp são *ortogonais* se $\phi = \pi/2$, isto é equivalente à igualdade $d(p, q) = 0$.

Se temos dois planos p^\perp e q^\perp que não se interceptam em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, definimos a *distância* ρ entre esses dois planos por:

$$\cosh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) = d(p, q), \quad \rho \in (0, +\infty). \quad (3.2)$$

A distância ϕ está bem definida já que neste caso $d(p, q) > 1$. Obviamente se os planos p^\perp e q^\perp são planos que interceptam-se ou são assintóticos, a distância entre eles é zero.

Proposição 3.4 *Seja p^\perp um plano que contém a geodésica complexa $c \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Então, existe um único plano q^\perp contendo c tal que q^\perp é ortogonal ao plano p^\perp .*

Demonstração: Seja c^\perp a esfera polar da geodésica complexa $c = \pi(C \setminus \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, onde $C = C^{1,1}$ é um subespaço complexo indefinido de dimensão complexa dois. Seja $v \in \pi^{-1}(p)$ um levantamento de p , então do fato que $c \subset p^\perp$, temos que $v \in C^\perp$, de outro lado $C^\perp \subset \mathbb{P}\mathbb{V}^3$ é um subespaço complexo positivo de dimensão dois, assim para o $v \in C^\perp$ existe um único $w \in C^\perp$ tal que $C^\perp = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v, w\}$ com $v \perp w$. Se definimos por $q = \pi(w)$, então o único plano contendo c que é ortogonal ao plano p^\perp é o plano q^\perp . ■

Proposição 3.5 *Sejam c_1 e c_2 duas geodésicas complexas não assintóticas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Então existe uma única geodésica complexa perpendicular comum à c_1 e c_2 .*

Demonstração: Por [2, Teorema 4.1] temos que para as subvariedades totalmente geodésicas c_1 e c_2 existe uma única geodésica riemanniana σ_{12} que é perpendicular comum à c_1 e c_2 . Se $p = \sigma_{12} \cap c_1$ e $q = \sigma_{12} \cap c_2$ tem-se que $T_p\sigma_{12} \perp T_p c_1$ e $T_q\sigma_{12} \perp T_q c_2$.

Seja c_{12} a única geodésica complexa que contém σ_{12} demonstraremos que $c_1 \perp c_{12}$ e analogamente mostra-se que $c_2 \perp c_{12}$.

Se $\mathbb{J}_p: T_p\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3 \rightarrow T_p\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ denota a quase estrutura complexa, como $\sigma_{12} \subset c_{12}$ os espaços tangentes satisfazem a seguinte condição:

$$T_p c_{12} = T_p \sigma_{12} \oplus \mathbb{J}_p(T_p \sigma_{12}). \quad (3.3)$$

Consideremos uma geodésica riemanniana $\sigma_1 \subset c_1$ que passa por p , então:

$$T_p c_1 = T_p \sigma_1 \oplus \mathbb{J}_p(T_p \sigma_1). \quad (3.4)$$

Como $T_p \sigma_1 \subset T_p c_1$ e $T_p \sigma_{12} \perp T_p c_1$ implica que:

$$T_p \sigma_{12} \perp T_p \sigma_1 \text{ e } \mathbb{J}_p(T_p \sigma_{12}) \perp \mathbb{J}_p(T_p \sigma_1)$$

assim só falta provar que $T_p \sigma_{12} \perp \mathbb{J}_p(T_p \sigma_1)$ e $T_p \sigma_1 \perp \mathbb{J}_p(T_p \sigma_{12})$ para concluir que $T_p c_{12} \perp T_p c_1$ e portanto $c_1 \perp c_{12}$.

Pelo Teorema 5.1.10 em [11] tem-se que $\sigma_{12}, \sigma_1 \subset \mathbb{R}^k$ -plano, então $\langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ onde $v \in T_p \sigma_{12}$ e $w \in T_p \sigma_1$.

$$(\langle v, \mathbb{J}_p(w) \rangle) = \text{Im} \langle v, w \rangle = 0$$

Assim $T_p \sigma_{12} \perp \mathbb{J}_p(T_p \sigma_1)$, da mesma forma pode-se mostrar que $T_p \sigma_1 \perp \mathbb{J}_p(T_p \sigma_{12})$.

■

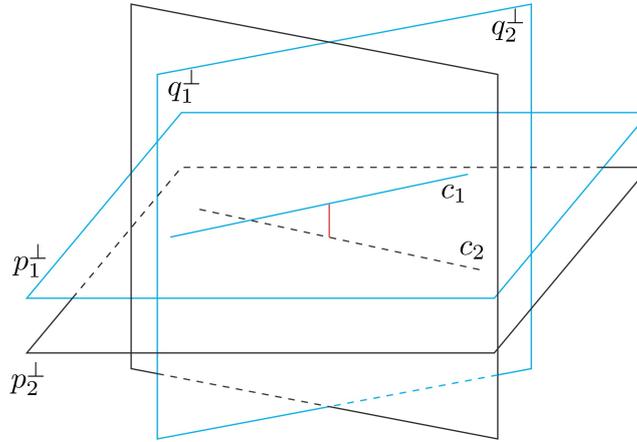
3.2 Conjunto bi-ortogonal para duplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$

Definição 3.5 *Dois pontos $x, y \in \mathbb{P}\mathbb{V}^3$ são ditos ortogonais se $\langle v, w \rangle = 0$, onde v e w são levantamentos de x e y respectivamente, isto é, $\pi(v) = x$ e $\pi(w) = y$.*

É fácil ver que a ortogonalidade de dois pontos $x, y \in \mathbb{P}\mathbb{V}^3$ não depende dos levantamentos v e w . Denotaremos por $x \perp y$ se $x, y \in \mathbb{P}\mathbb{V}^3$ são ortogonais.

Agora estamos prontos para construir o "conjunto bi-ortogonal" para uma dupla de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, tal conjunto corresponde aos pontos polares de planos especiais que contêm alguma das geodésicas complexas. Faremos a construção para cada caso em que as geodésicas complexas c_1 e c_2 são reversas, concorrentes, ultraparalelas e assintóticas. Seguiremos a notação dada em 3.1.

CASO 1: c_1 e c_2 são reversas. Se duas geodésicas complexas c_1 e c_2 são reversas, então temos que pela Proposição 3.5 existe uma única geodésica complexa c que é perpendicular comum á c_1 e c_2 . Por construção teremos que c_1 e c são concorrentes e pela Proposição 1.5 concluímos que c_1 e c são coplanares, de maneira análoga tem-se que c_2 e c são também coplanares. Assim, denotemos por q_1^\perp o plano que contêm as geodésicas complexas c_1 e c , por q_2^\perp o plano que contêm as geodésicas complexas c_2 e c . Agora consideremos o plano p_1^\perp que contêm c_1 e que é ortogonal à geodésica perpendicular comum c , de maneira análoga denotemos por p_2^\perp o plano que contêm c_2 e que é ortogonal à geodésica perpendicular comum c .



Construímos assim um conjunto de quatro planos $\{p_1^\perp, p_2^\perp, q_1^\perp, q_2^\perp\}$ (os quais têm pontos polares $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$) para uma dupla ordenada (c_1, c_2) de geodésicas complexas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. O conjunto $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ será chamado de *conjunto bi-ortogonal da dupla de geodésicas complexas reversas*.

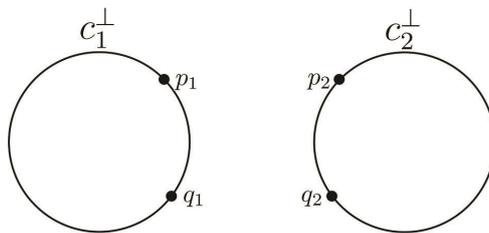
A seguinte proposição explica o porquê do nome "bi-ortogonal".

Proposição 3.6 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, consideremos seu conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{P}\mathbb{V}^3$. Então temos as seguintes condições:*

$$p_1 \perp q_1, \quad p_2 \perp q_2, \quad p_1 \perp q_2 \quad e \quad q_1 \perp p_2.$$

Demonstração: Segue da construção do conjunto bi-ortogonal associado a uma dupla de geodésicas complexas reversas. ■

Observação 3.2 *Dada uma dupla ordenada (c_1, c_2) de geodésicas complexas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Se C_i^\perp é o levantamento da esfera polar c_i^\perp , então os levantamentos v_i, w_i de p_i, q_i formam uma base ortogonal para C_i^\perp , $i = 1, 2$.*


 Figura 3.1: Conjuntos polares para (c_1, c_2) reversas

CASO 2: c_1 e c_2 são concorrentes. Se duas geodésicas complexas c_1 e c_2 são concorrentes, então temos que elas são coplanares, assim denotemos por p^\perp o plano que contém c_1 e c_2 . Pela Proposição 3.4 temos que existe um único plano q_1^\perp ortogonal ao plano p^\perp e que contém a geodésica complexa c_1 , de maneira análoga existe um único plano q_2^\perp ortogonal ao plano p^\perp e que contém a geodésica complexa c_2 .

Construímos assim um conjunto de três planos $\{p, q_1^\perp, q_2^\perp\}$ (os quais têm pontos polares $\{p, q_1, q_2\}$) para uma dupla ordenada (c_1, c_2) de geodésicas complexas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. O conjunto $\{p, q_1, q_2\}$ será chamado de *conjunto bi-ortogonal da dupla de geodésicas complexas concorrentes*.

Proposição 3.7 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, consideremos seu conjunto bi-ortogonal $\{p, q_1, q_2\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{P}\mathbb{V}^3$. Então temos as seguintes condições:*

$$p \perp q_1 \quad e \quad p \perp q_2.$$

Demonstração: Segue da construção do conjunto bi-ortogonal associado a uma dupla de geodésicas complexas concorrentes. ■

Observação 3.3 *Dada uma dupla ordenada (c_1, c_2) de geodésicas complexas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Se C_i^\perp é o levantamento da esfera polar c_i^\perp , então os levantamentos v, w_i de p, q_i formam uma base ortogonal para C_i^\perp , $i = 1, 2$.*

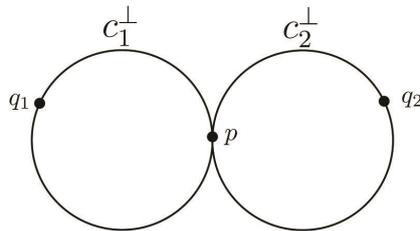


Figura 3.2: Conjuntos polares para (c_1, c_2) concorrentes

CASO 3: c_1 e c_2 são ultraparalelas. Se duas geodésicas complexas c_1 e c_2 são ultraparalelas, então temos que elas são coplanares, assim denotemos por q^\perp o plano que contém c_1 e c_2 . Pela Proposição 3.4 temos que existe um único plano p_1^\perp ortogonal ao plano q^\perp e que contém a geodésica complexa c_1 , de maneira análoga existe um único plano p_2^\perp ortogonal ao plano q^\perp e que contém a geodésica complexa c_2 .

Construímos assim um conjunto de três planos $\{p_1^\perp, p_2^\perp, q\}$ (os quais têm pontos polares $\{p_1, p_2, q\}$) para uma dupla ordenada (c_1, c_2) de geodésicas complexas ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. O conjunto $\{p_1, p_2, q\}$ será chamado de *conjunto bi-ortogonal da dupla de geodésicas complexas ultraparalelas*.

Proposição 3.8 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, consideremos seu conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{P}\mathbb{V}^3$. Então temos as seguintes condições:*

$$p_1 \perp q \quad e \quad p_2 \perp q.$$

Demonstração: Segue da construção do conjunto bi-ortogonal associado a uma dupla de geodésicas complexas ultraparalelas. ■

Observação 3.4 *Dada uma dupla ordenada (c_1, c_2) de geodésicas complexas ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Se C_i^\perp é o levantamento da esfera polar c_i^\perp , então os levantamentos v_i, w de p_i, q formam uma base ortogonal para C_i^\perp , $i = 1, 2$.*

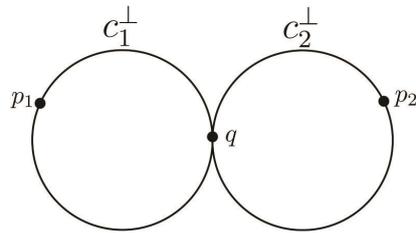


Figura 3.3: Conjuntos polares para (c_1, c_2) ultraparalelas

CASO 4: c_1 e c_2 são assintóticas. Se duas geodésicas complexas c_1 e c_2 são assintóticas, então temos que elas são coplanares, assim denotemos por p^\perp o plano que contém c_1 e c_2 . Pela Proposição 3.4 temos que existe um único plano q_1^\perp ortogonal ao plano p^\perp e que contém a geodésica complexa c_1 , de maneira análoga existe um único plano q_2^\perp ortogonal ao plano p^\perp e que contém a geodésica complexa c_2 .

Construímos assim um conjunto de três planos $\{p, q_1^\perp, q_2^\perp\}$ (os quais têm pontos polares $\{p, q_1, q_2\}$) para uma dupla ordenada (c_1, c_2) de geodésicas complexas assintóticas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. O conjunto $\{p, q_1, q_2\}$ será chamado de *conjunto bi-ortogonal da dupla de geodésicas complexas assintóticas*.

Proposição 3.9 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas assintóticas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, consideremos seu conjunto bi-ortogonal $\{p, q_1, q_2\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{P}\mathbb{V}^3$. Então temos as seguintes condições:*

$$p \perp q_1 \quad e \quad p \perp q_2.$$

Demonstração: Segue da construção do conjunto bi-ortogonal associado a uma dupla de geodésicas complexas assintóticas. ■

Observação 3.5 *Dada uma dupla ordenada (c_1, c_2) de geodésicas complexas assintóticas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Se C_i^\perp é o levantamento da esfera polar c_i^\perp , então os levantamentos v, w_i de p, q_i formam uma base ortogonal para C_i^\perp , $i = 1, 2$.*

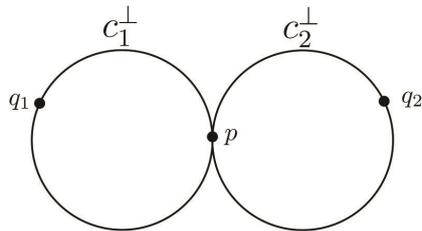


Figura 3.4: Conjuntos polares para (c_1, c_2) assintóticas

De aqui em diante para uma dupla (c_1, c_2) ordenada de geodésicas complexas, associaremos seu *conjunto bi-ortogonal* $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$, onde:

$p_1 = p_2$ se as geodésicas complexas são concorrentes ou assintóticas.

$q_1 = q_2$ se as geodésicas complexas são ultraparalelas.

Note que o conjunto bi-ortogonal para uma dupla (c_1, c_2) ordenada de geodésicas complexas é único.

Observação 3.6 Outra forma de construir o conjunto bi-ortogonal é considerar a função $d: c_1^\perp \times c_2^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$d(x, y) = \frac{\langle v, w \rangle \langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle}, \quad \pi(v) = x \quad e \quad \pi(w) = y.$$

note que d está bem definida e não depende dos levantamentos v e w . Sendo d uma função contínua e $c_1^\perp \times c_2^\perp$ compacto, d atinge o valor máximo em $d(p_1, p_2)$ e o mínimo em $d(q_1, q_2)$.

O conjunto $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ dos levantamentos do conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ será chamado de *base bi-ortogonal* da dupla ordenada (c_1, c_2) . A base bi-ortogonal satisfaz as condições de ortogonalidade dadas na Proposição 3.6, isto é:

$$v_1 \perp w_1, \quad v_2 \perp w_2, \quad v_1 \perp w_2 \quad e \quad w_1 \perp v_2.$$

Se C_i^\perp é o levantamento da esfera polar c_i^\perp , então o conjunto $\{v_i, w_i\}$ forma uma base ortogonal para C_i^\perp , $i = 1, 2$.

Também podemos supor que cada vetor da base bi-ortogonal seja unitário. Agora definiremos o ângulo e distância entre duas geodésicas complexas, para isto utilizaremos o d -invariante (ver Definição 3.4) que é uma ferramenta importante que ajudará encontrar tais distâncias e ângulos.

Definição 3.6 *Dada uma dupla de geodésicas complexas (c_1, c_2) com conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ definido anteriormente, definimos a pré-distância entre c_1 e c_2 por $d(p_1, p_2)$ e o pré-ângulo entre c_1 e c_2 por $d(q_1, q_2)$.*

É claro que a distância e o ângulo entre geodésicas complexas pode ser definida naturalmente a partir da pré-distância e o pré-ângulo da seguinte forma:

Dada uma dupla de geodésicas complexas (c_1, c_2) com conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$, definimos o ângulo ϕ entre as geodésicas complexas por:

$$\cos^2(\phi) = d(q_1, q_2), \quad \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

e definimos a distância ρ entre as geodésicas complexas por:

$$\cosh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) = d(p_1, p_2), \quad \rho \in [0, +\infty).$$

Observação 3.7 *Observe que para a distância $\rho \in [0, +\infty)$ e para o ângulo $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ temos que \cosh e \cos são injetivas, portanto podemos trabalhar com distâncias ou pré-distâncias sem diferença nenhuma, o mesmo vale para ângulos e pré-ângulos.*

Proposição 3.10 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ com conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$, então:*

1. *As geodésicas complexas (c_1, c_2) são reversas se, e somente se, $d(p_1, p_2) > 1$ e $d(q_1, q_2) < 1$.*
2. *As geodésicas complexas (c_1, c_2) são concorrentes se, e somente se, $d(p_1, p_2) = 1$ e $d(q_1, q_2) < 1$. Nesse caso a distância entre c_1 e c_2 é zero.*

3. As geodésicas complexas (c_1, c_2) são ultraparalelas se, e somente se, $d(p_1, p_2) > 1$ e $d(q_1, q_2) = 1$. Nesse caso o ângulo entre c_1 e c_2 é zero.
4. As geodésicas complexas (c_1, c_2) são assintóticas se, e somente se, $d(p_1, p_2) = 1$ e $d(q_1, q_2) = 1$.

Dizemos que duas geodésicas complexas concorrentes ou reversas (c_1, c_2) são ortogonais se $d(q_1, q_2) = 0$.

Proposição 3.11 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ com conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$, e seja $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ então:*

1. Se W é hiperbólico e $\dim(W) = 4$ se, e somente se, (c_1, c_2) são reversas.
2. Se W é elíptico e $\dim(W) = 3$ se, e somente se, (c_1, c_2) são concorrentes.
3. Se W é hiperbólico e $\dim(W) = 3$ se, e somente se, (c_1, c_2) são ultraparalelas.
4. Se W é parabólico e $\dim(W) = 3$ se, e somente se, (c_1, c_2) são assintóticas.

3.3 Espaço de módulos de duplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$

Duas duplas (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) ordenadas de geodésicas complexas distintas no espaço hiperbólico complexo de dimensão 3 são ditas *congruentes* quando existe uma isometria holomorfa $f \in \text{PU}(3, 1)$ tal que $f(c_i) = c'_i$, para $i = 1, 2$. A congruência é claramente uma relação de equivalência e o espaço das classes de equivalência munido da topologia quociente será denominado *espaço de configurações* de duplas ordenadas de geodésicas complexas distintas no espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ e será denotado por $\mathcal{M}(2)$.

Nesta seção queremos encontrar as condições que garantem a existência de tal isometria holomorfa $f \in \text{PU}(3, 1)$. Para encontrar estas condições utilizaremos as

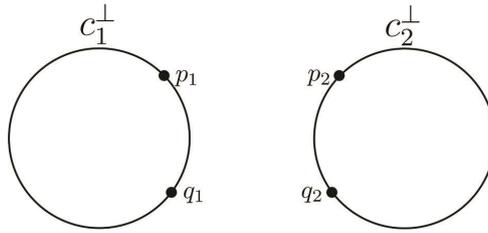
Proposições 2.1, 2.2 e 1.2. Logo, descreveremos o espaço de módulos para duplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Definição 3.7 Diremos que (c_1, c_2) é uma dupla genérica se as geodésicas complexas são reversas, caso contrario (c_1, c_2) será dita dupla especial.

Esta seção será dividida em duas partes. Na primeira parte assumiremos que a dupla (c_1, c_2) seja genérica e na segunda parte que a dupla (c_1, c_2) seja especial.

3.3.1 Caso genérico

Neste caso temos que as geodésicas complexas c_1 e c_2 são reversas, assim as esferas polares tem a seguinte configuração:



Denotemos por $d = d(p_1, p_2)$ a pre-distância entre c_1 e c_2 , e por $a = d(q_1, q_2)$ o pre-ângulo entre c_1 e c_2 .

Daqui em diante assumiremos que (c_1, c_2) são duplas ordenadas de geodésicas complexas reversas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Proposição 3.12 Seja (c_1, c_2) uma dupla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Então, existem levantamentos $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ do conjunto bi-ortogonal da dupla (c_1, c_2) , tal que a matriz de Gram associada à esses vetores é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & d & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix},$$

onde d e a são números reais tais que, $d > 1$ e $0 \leq a < 1$.

Demonstração: É fácil ver que para $i \in \{1, 2\}$ podemos escolher levantamentos \tilde{v}_i e \tilde{w}_i de p_i e q_i respectivamente, tal que $\langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_i \rangle = 1$ e $\langle \tilde{w}_i, \tilde{w}_i \rangle = 1$. Assim, pelas condições de bi-ortogonalidade (ver Proposição 3.6) a matriz de Gram para $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$ é dada por:

$$\begin{array}{c}
 \tilde{v}_1 \quad \tilde{v}_2 \quad \tilde{w}_1 \quad \tilde{w}_2 \\
 \begin{array}{c}
 \tilde{v}_1 \\
 \tilde{v}_2 \\
 \tilde{w}_1 \\
 \tilde{w}_2
 \end{array}
 \begin{array}{|cccc|}
 \hline
 1 & g_{12} & 0 & 0 \\
 \hline
 \bar{g}_{12} & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & g_{34} \\
 \hline
 0 & 0 & \bar{g}_{34} & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

é claro que $\langle \tilde{v}_2, \tilde{v}_2 \rangle = \langle \alpha \tilde{v}_2, \alpha \tilde{v}_2 \rangle$ para $|\alpha| = 1$ (o mesmo é válido para \tilde{w}_2). Assim, escolhendo números complexos unitários apropriados pode-se conseguir que $g_{12}, g_{34} \in \mathbb{R}$. Sejam $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ levantamentos para p_i e q_i tais que a matriz de Gram associada à estes novos levantamentos é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & d & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}, \quad d, a \in \mathbb{R}.$$

Uma conta fácil mostra que $\det G = (1 - d^2)(1 - a^2)$, sabe-se que por construção a pre-distância $d > 1$ e que o pre-ângulo $0 \leq a < 1$, portanto $(1 - d^2)(1 - a^2) < 0$. Isto é coerente com o fato que $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ tenha dimensão 4 e de assinatura $(3, 1)$, o implica que $\det G < 0$. ■

Definição 3.8 *Seja (c_1, c_2) uma dupla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. A matriz G dada na Proposição 3.12 será denominada matriz de Gram canônica para uma dupla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

Proposição 3.13 *Sejam (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) duas duplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Se (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) tem as mesmas distâncias e os mesmos ângulos, então existe uma isometria holomorfa $f \in \text{PU}(3, 1)$ tal que $f(c_i) = c'_i$, $i = 1, 2$.*

Demonstração: Sejam $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ e $\{p'_1, p'_2, q'_1, q'_2\}$ os conjuntos bi-ortogonais de (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) respectivamente. As matrizes de Gram canônicas $G = (g_{ij})$ e $G' = (g'_{ij})$ para (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) são dadas por:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & d & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G' = \begin{bmatrix} 1 & d' & 0 & 0 \\ d' & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a' \\ 0 & 0 & a' & 1 \end{bmatrix}$$

como (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) tem as mesmas distâncias e ângulos, pela Observação 3.7 (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) tem as mesmas pre-distâncias e os mesmos pre-ângulos, assim:

$$g_{12} = d = \sqrt{d(p_1, p_2)} = \sqrt{d(p'_1, p'_2)} = d' = g'_{12}$$

e que

$$g_{34} = a = \sqrt{d(q_1, q_2)} = \sqrt{d(q'_1, q'_2)} = a' = g'_{34}$$

Assim, $G = G'$. Como o subespaço gerado pelos levantamentos do conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ é regular o teorema segue da Proposição 2.2. ■

Teorema 3.1 *Seja (c_1, c_2) uma dupla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, com conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Então, os d -invariantes $d(p_1, p_2)$ e $d(q_1, q_2)$, definem unicamente a classe de congruência por $\text{PU}(3, 1)$ das duplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

Demonstração: Dada (c_1, c_2) uma dupla genérica de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, seja G sua matriz de Gram canônica (ver Definição 3.8). Então temos

que:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & d & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

Segue da definição do d -invariante que

$$d(p_1, p_2) = g_{12}g_{21} = d^2,$$

e que

$$d(q_1, q_2) = g_{34}g_{43} = a^2.$$

A primeira igualdade implica que $d = \sqrt{d(p_1, p_2)}$ e a segunda igualdade implica que $a = \sqrt{d(q_1, q_2)}$. Assim, todas as entradas da matriz de Gram canônica G podem-se recuperar unicamente em termos de $d(p_1, p_2)$ e $d(q_1, q_2)$. Como o espaço gerado pelos levantamentos do conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ é regular a afirmação segue da Proposição 2.2. ■

Agora estamos pronto para construir o espaço de módulos para uma dupla de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ no caso genérico.

Seja (c_1, c_2) uma dupla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e $G = (g_{ij})$ sua matriz de Gram canônica associada à (c_1, c_2) (ver Definição 3.8). Aplicando as fórmulas que aparecem no Teorema 3.1, podemos recuperar todas as entradas de G em termos dos invariantes $d(p_1, p_2)$ e $d(q_1, q_2)$. No que segue, vamos assumir que G possui as entradas expressas em termos dos d -invariantes $d(p_1, p_2)$ e $d(q_1, q_2)$.

Denotemos por $\mathcal{M}^g(2)$ o espaço de configurações de duplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e seja $[(c_1, c_2)] \in \mathcal{M}^g(2)$ o ponto representado por (c_1, c_2) . Definimos o mapa:

$$\tau: \mathcal{M}^g(2) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \tag{3.5}$$

que associa à $[(c_1, c_2)]$ os invariantes $d(p_1, p_2)$ e $d(q_1, q_2)$.

Teorema 3.2 *O espaço de configurações $\mathcal{M}^g(2)$ de duplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é homeomorfo ao conjunto $\mathbb{M}^g(2)$ de pontos em \mathbb{R}^2 definidos pelas seguintes condições:*

$$\mathbb{M}^g(2) = \{(d, a) \in \mathbb{R}^2 : d > 1 \text{ e } 0 \leq a < 1\}.$$

Demonstração: Segue da parte "se" do Teorema 2.3 (condições do determinante) e das fórmulas que aparecem na demonstração do Teorema 3.1 que o mapa τ em (3.5) define um mapa $\tau: \mathcal{M}^g(2) \rightarrow \mathbb{M}^g(2)$. Primeiramente, mostramos que o mapa $\tau: \mathcal{M}^g(2) \rightarrow \mathbb{M}^g(2)$ é sobrejetivo. Dado $(d, a) \in \mathbb{M}^g(2)$, usando as fórmulas que aparecem na demonstração do Teorema 3.1, definimos g_{12} e g_{34} em termos de d e a , também fixamos $g_{ii} = 1$. Isto define G completamente. É fácil ver que G satisfaz todas as condições da parte "somente se" do Teorema 2.3. Portanto, isto implica que G é a matriz de Gram canônica para alguma base bi-ortogonal de uma dupla de geodésicas genéricas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Isto prova que τ é sobrejetiva.

Por outro lado, segue do Teorema 3.1 que o mapa τ é injetiva. É claro que $\tau: \mathcal{M}^g(2) \rightarrow \mathbb{M}^g(2)$ é um homeomorfismo uma vez que $\mathbb{M}^g(2)$ seja munido com a topologia induzida de \mathbb{R}^2 . ■

Definição 3.9 *Chamaremos $\mathbb{M}^g(2)$ o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}^g(2)$ de duplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

3.3.2 Caso especial

Neste caso temos que c_1 e c_2 podem ser concorrentes, ultraparalelas ou assintóticas, assim as esferas polares tem a seguinte configuração:

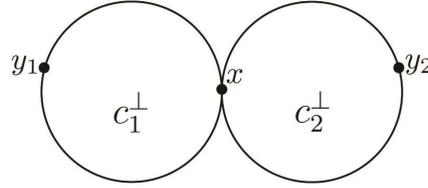


Figura 3.5:

Note que se $0 \leq d(y_1, y_2) < 1$ então as geodésicas complexas c_1 e c_2 são concorrentes, se $d(y_1, y_2) > 1$ então as geodésicas complexas c_1 e c_2 são ultraparalelas e se $d(y_1, y_2) = 1$ então as geodésicas complexas c_1 e c_2 são assintóticas.

Chamaremos o conjunto $\{x, y_1, y_2\}$ de *configuração polar* associada à dupla (c_1, c_2) . Daqui em diante assumiremos que (c_1, c_2) são duplas ordenadas de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Proposição 3.14 *Seja (c_1, c_2) uma dupla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Então, existem levantamentos $\{v, w_1, w_2\}$ da configuração polar da dupla (c_1, c_2) , tal que a matriz de Gram associada à esses vetores é dada por:*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r \\ 0 & r & 1 \end{bmatrix},$$

onde r é um número real tal que $r \geq 0$.

Demonstração: É fácil ver que para $i \in \{1, 2\}$ podemos escolher levantamentos \tilde{v} e \tilde{w}_i da configuração polar, tal que $\langle \tilde{v}, \tilde{v} \rangle = 1$ e $\langle \tilde{w}_i, \tilde{w}_i \rangle = 1$. Assim, pelas condições de bi-ortogonalidade (ver Proposição 3.6) a matriz de Gram para $\{\tilde{v}, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$ é dada por:

$$\begin{array}{c} \tilde{v} \quad \tilde{w}_1 \quad \tilde{w}_2 \\ \begin{array}{ccc} \tilde{v} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \tilde{w}_1 & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & g_{23} \\ \hline \end{array} \\ \tilde{w}_2 & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \bar{g}_{32} & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}.$$

É claro que $\langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_1 \rangle = \langle \alpha \tilde{w}_1, \alpha \tilde{w}_1 \rangle$ para $|\alpha| = 1$. Assim, escolhendo um número complexo unitário apropriado pode-se conseguir que $g_{23} \in \mathbb{R}$, $g_{23} > 0$. Sejam $\{v, w_1, w_2\}$ levantamentos de x e y_i , tais que a matriz de Gram associada à estes novos levantamentos seja:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r \\ 0 & r & 1 \end{bmatrix}, \quad r \geq 0.$$

■

Observação 3.8 *Na Proposição acima, se $0 \leq r < 1$ então as geodésicas complexas c_1 e c_2 são concorrentes, se $r > 1$ então as geodésicas complexas c_1 e c_2 são ultraparalelas e se $r = 1$ então as geodésicas complexas c_1 e c_2 são assintóticas.*

De fato, o determinante da matriz G dada na Proposição 3.14 é $\det(G) = 1 - r^2$, então

1. Se $0 \leq r < 1$, então $\det(G) > 0$, portanto o subespaço gerado pela configuração polar é elíptico, isto implica que c_1 e c_2 são concorrentes.
2. Se $r > 1$, então $\det(G) < 0$, portanto o subespaço gerado pela configuração polar é hiperbólico, isto implica que c_1 e c_2 são ultraparalelas.
3. Se $r = 1$, então $\det(G) = 0$, portanto o subespaço gerado pela configuração polar é parabólico, isto implica que c_1 e c_2 são assintóticas.

Definição 3.10 *Seja (c_1, c_2) uma dupla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. A matriz G dada na Proposição 3.14 será denominada matriz de Gram canônica para uma dupla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

É fácil ver que o conjunto dos levantamentos da configuração polar de uma dupla especial de geodésicas complexas é linearmente independente, caso contrario $c_1 = c_2$.

Teorema 3.3 *Seja (c_1, c_2) uma dupla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, com configuração polar $\{x, y_1, y_2\}$. Então, o d -invariante $d(y_1, y_2)$ define unicamente a classe de congruência por PU(3, 1) das duplas especiais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

Demonstração: Dada (c_1, c_2) uma dupla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, seja G sua matriz de Gram canônica associada (ver Proposição 3.10). Então temos que:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r \\ 0 & r & 1 \end{bmatrix}.$$

Segue da definição do d -invariante que

$$d(y_1, y_2) = g_{23}g_{32} = r^2,$$

A igualdade implica que $r = \sqrt{d(y_1, y_2)}$. Assim, todas as entradas da matriz de Gram canônica G podem-se recuperar unicamente em termos de $d(y_1, y_2)$. Como o conjunto dos levantamentos da configuração polar são linearmente independentes, a afirmação segue da Proposição 2.1. ■

Agora estamos pronto para construir o espaço de módulos para uma dupla de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ no caso especial.

Seja (c_1, c_2) uma dupla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e $G = (g_{ij})$ sua matriz de Gram canônica associada à (c_1, c_2) (ver Definição 3.10). Aplicando as fórmulas que aparecem no Teorema 3.3, podemos recuperar todas as entradas de G em termos do invariante $d(y_1, y_2)$. No que segue, vamos assumir que G possui as entradas expressas em termos do d -invariante $d(y_1, y_2)$.

Denotemos por $\mathcal{M}^s(2)$ o espaço de configurações de duplas especiais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e seja $[(c_1, c_2)] \in \mathcal{M}^s(2)$ o ponto representado por (c_1, c_2) .

Definimos o mapa:

$$\tau: \mathcal{M}^s(2) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

que associa à $[(c_1, c_2)]$ o invariante $d(y_1, y_2)$.

Teorema 3.4 *O espaço de configurações $\mathcal{M}^s(2)$ de duplas especiais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é homeomorfo ao conjunto $\mathbb{M}^s(2)$ de pontos em \mathbb{R} definidos da seguinte forma:*

$$\mathbb{M}^s(2) = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}.$$

Demonstração: Segue das fórmulas que aparecem na demonstração do Teorema 3.3 que o mapa τ em (3.6) define um mapa $\tau: \mathcal{M}^s(2) \rightarrow \mathbb{M}^s(2)$. Primeiramente, mostramos que o mapa $\tau: \mathcal{M}^s(2) \rightarrow \mathbb{M}^s(2)$ é sobrejetivo. Dado $r \in \mathbb{M}^s(2)$, usando as fórmulas que aparecem na demonstração do Teorema 3.3, definimos g_{23} em termos de r , também fixamos $g_{ii} = 1$. Isto define G completamente. Portanto, isto implica que G é a matriz de Gram canônica para a configuração polar de alguma dupla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Isto prova que τ é sobrejetiva.

Por outro lado, segue do Teorema 3.3 que o mapa τ é injetiva. É claro que $\tau: \mathcal{M}^s(2) \rightarrow \mathbb{M}^s(2)$ é um homeomorfismo uma vez que $\mathbb{M}^s(2)$ seja munido com a topologia induzida de \mathbb{R} . ■

Definição 3.11 *Chamaremos $\mathbb{M}^s(2)$ o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}^s(2)$ de duplas especiais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

Usando os Teoremas 3.2 e 3.4 tem-se o seguinte corolário.

Corolário 3.1 *Se $\mathbb{M}(2)$ denota o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}(2)$ de duplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, então*

$$\mathbb{M}(2) = [1, +\infty) \times [0, 1].$$

Demonstração: Consideremos o espaço de módulos $\mathbb{M}^s(2) = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$, pela Observação 3.8 podemos identificar $\mathbb{M}^s(2)$ como a união dos seguintes

conjuntos $\{(1, r) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r < 1\}$, $\{(r, 1) \in \mathbb{R}^2 : r > 1\}$, $\{(r, r) \in \mathbb{R} : r = 1\}$, onde o primeiro conjunto corresponde às geodésicas complexas concorrentes, o segundo conjunto corresponde às geodésicas complexas ultraparalelas e o terceiro conjunto corresponde às geodésicas complexas assintóticas.

Pelo Teorema 3.2 o espaço de módulos $\mathbb{M}^g(2) = (1, +\infty) \times [0, 1)$. A prova segue desde que $\mathbb{M}(2) = \mathbb{M}^g(2) \cup \mathbb{M}^s(2)$. ■

Capítulo 4

Triplas de geodésicas complexas em

$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$

Neste capítulo estudaremos o espaço de configurações de triplas ordenadas de geodésicas complexas distintas no espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Definição 4.1 *Duas triplas (c_1, c_2, c_3) e (c'_1, c'_2, c'_3) ordenadas de geodésicas complexas distintas no espaço hiperbólico complexo de dimensão 3 são ditas congruentes quando existe uma isometria holomorfa $f \in \text{PU}(3, 1)$ tal que $f(c_i) = c'_i$, para $i = 1, 2, 3$.*

A congruência é claramente uma relação de equivalência e o espaço das classes de equivalência munido da topologia quociente será denominado *espaço de configurações* de triplas ordenadas de geodésicas complexas distintas no espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ e será denotado por $\mathcal{M}(3)$.

Neste capítulo queremos encontrar as condições que garantem a existência de tal isometria holomorfa $f \in \text{PU}(3, 1)$. Para encontrar estas condições utilizaremos as Proposições 2.1, 2.2 e 1.2. Logo, descreveremos o espaço de módulos para triplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

No capítulo anterior vimos que dois d -invariantes (pre-distância e pre-ângulo) são necessários para definir unicamente a classe de congruência por $\text{PU}(3, 1)$ de

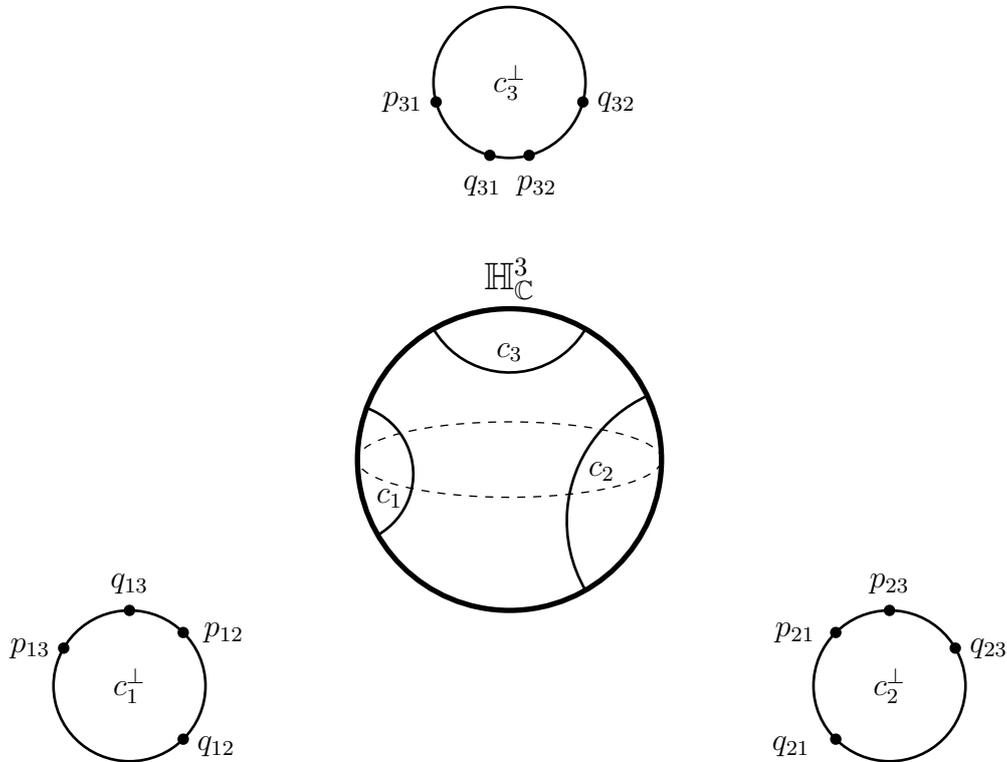
duplas ordenadas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Para tripla de geodésicas complexas veremos que precisaremos mais invariantes.

Dada uma tripla ordenada de geodésicas complexas (c_1, c_2, c_3) em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, consideremos as sub-duplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) obtidas a partir de (c_1, c_2, c_3) . Para cada sub-dupla consideremos seu respectivo conjunto bi-ortogonal:

sub-dupla	conjunto bi-ortogonal
(c_1, c_2)	$\{p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}\}$
(c_2, c_3)	$\{p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$
(c_1, c_3)	$\{p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$

(4.1)

Se c_1^\perp , c_2^\perp e c_3^\perp denotam as esferas polares das geodésicas complexas, temos que $p_{ij}, q_{ij} \in c_i^\perp$, $i \neq j$, para $i, j = 1, 2, 3$. Assim cada esfera polar tem 4 pontos positivos como mostra o seguinte desenho.



Definição 4.2 *Uma tripla ordenada (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$*

será dita tripla genérica se as sub-duplas $(c_1, c_2), (c_2, c_3), (c_1, c_3)$ são reversas. Caso contrário (c_1, c_2, c_3) será dita tripla especial.

Este capítulo será dividido em três seções, na primeira seção calcularemos a dimensão do espaço de módulos de triplas ordenadas de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, na segunda seção calcularemos o espaço de módulos para as triplas (c_1, c_2, c_3) genéricas e na terceira seção calcularemos o espaço de módulos para as triplas (c_1, c_2, c_3) especiais.

Daqui em diante assumiremos que (c_1, c_2, c_3) são triplas ordenadas de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

4.1 Dimensão do espaço de módulos de triplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$

Nesta seção encontraremos a dimensão real do espaço de módulos de triplas ordenadas de geodésicas complexas distintas no espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Em primeiro lugar apresentaremos o modelo do domínio de Siegel ou modelo do parabolóide do espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Este modelo é o análogo ao modelo do semi-espaço para geometria hiperbólica real.

Seja $\mathbb{V}^{n,1}$ um espaço vetorial complexo de dimensão $n+1$ munido de uma forma Hermitiana $\langle -, - \rangle$ de assinatura $(n, 1)$. Seja π a projeção natural de $\mathbb{V}^{n+1} \setminus \{0\}$ para o espaço projetivo complexo $\mathbb{P}\mathbb{V}^n$. Sejam $V_-, V_0, V_+ \subset \mathbb{V}^{n+1}$ os subconjuntos de vetores negativos, isotrópicos e positivos respectivamente.

Para descrever o modelo de Siegel, consideremos a base $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\} \subset \mathbb{V}^{n,1}$ tal que os vetores e_1 e e_{n+1} são isotrópicos com $\langle e_1, e_{n+1} \rangle = 1$, e os vetores e_2, \dots, e_n são positivos com $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ se $i \neq j$, e $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ para $i = 2, \dots, n$. É fácil ver que se os vetores $v = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1})$

e $w = (w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1})$ são as coordenadas em esta base, então

$$\langle v, w \rangle = v_1 \bar{w}_{n+1} + v_2 \bar{w}_2 + \dots + v_n \bar{w}_n + v_{n+1} \bar{w}_1 \quad (4.2)$$

Seja π a projeção natural para o espaço projetivo complexo, isto é $\pi: \mathbb{V}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{V}^n$. O conjunto $\mathbb{V}^{n+1} \setminus \{0\}$ pode ser coberto por $n+1$ conjuntos U_1, \dots, U_{n+1} , onde U_i é definido pela condição $z_i \neq 0$. É claro que o conjunto de vetores negativos V_- está contido em U_{n+1} . Seja $\mathbb{P}\mathbb{V}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{P}\mathbb{V}^{n-1}$. A projeção canônica de U_{n+1} para \mathbb{C}^n é dada por

$$\pi(v) = \left(\frac{v_1}{v_{n+1}}, \frac{v_2}{v_{n+1}}, \dots, \frac{v_n}{v_{n+1}} \right) = (w_1, w_2, \dots, w_n).$$

Como $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \pi(V_-)$, temos o seguinte conjunto

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \{(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : 2\operatorname{Re}(w_1) + \sum_{i=2}^n |w_i|^2 < 0\},$$

que é chamado o modelo do *domínio de Siegel* para o espaço hiperbólico complexo.

Existem dois pontos especiais em $\pi(V_0)$ que serão denotados por $o = \pi(0, 0, \dots, 0, 1)$ e $q_{\infty} = \pi(1, 0, \dots, 0, 0)$. Então podemos escrever $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ como

$$\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \setminus \{q_{\infty}\} = \{(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : 2\operatorname{Re}(w_1) + \sum_{i=2}^n |w_i|^2 = 0\}.$$

Seja $H = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ o grupo de Heisenberg, então a fronteira do espaço hiperbólico complexo pode ser identificada com a compactificação do grupo de Heisenberg.

Apresentaremos algumas propriedades que precisaremos do grupo de Heisenberg.

Se $(\zeta_1, v_1), (\zeta_2, v_2) \in H$ então a operação do grupo de Heisenberg é dada por

$$(\zeta_1, v_1) \cdot (\zeta_2, v_2) = (\zeta_1 + \zeta_2, v_1 + v_2 + 2\operatorname{Im} \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle),$$

onde $\langle\langle -, - \rangle\rangle$ denota a forma Hermitiana estândar de \mathbb{C}^{n-1} .

O grupo de Heisenberg age sobre se mesmo por *translações de Heisenberg*. Para $(\zeta_0, v_0) \in H$

$$T_{(\zeta_0, v_0)} : (\zeta, v) \mapsto (\zeta_0, v_0) \cdot (\zeta, v)$$

O centro de H consiste de *translações verticais*:

$$(\zeta, v) \mapsto (\zeta, v + u) \tag{4.3}$$

onde $u \in \mathbb{R}$.

O subconjunto $V \subset H$ definido por $\zeta = 0$ é chamado *eixo vertical* e corresponde ao centro de H .

O grupo unitário $U(n-1)$ age em H por:

$$A : (\zeta, v) \mapsto (A\zeta, v)$$

para $A \in U(n-1)$, $\zeta \in \mathbb{C}^{n-1}$, $v \in \mathbb{R}$. essas transformações são chamadas *rotações de Heisenberg sobre o eixo vertical*. Em geral, uma *rotação de Heisenberg* é qualquer transformação obtida de estes por conjugação de translações de Heisenberg.

O grupo \mathbb{R}_+ de números reais positivos age por *dilatações de Heisenberg reais sobre a origem* por:

$$\lambda : (\zeta, v) \mapsto (\lambda\zeta, \lambda^2 v).$$

Em geral, uma *dilatação de Heisenberg* é qualquer transformação conjugada a uma translação de Heisenberg da uma dilatação de Heisenberg real sobre a origem

As dilatações de Heisenberg sobre a origem e as rotações de Heisenberg sobre o eixo vertical geram o grupo

$$\mathbf{Sim}_0(H) \cong \mathbb{R}_+ \times U(n-1),$$

onde \mathbb{R}_+ é o grupo de dilatações de Heisenberg reais sobre a origem.

O grupo $\mathbf{Sim}(H)$ gerado por dilatações de Heisenberg sobre a origem, rotações de Heisenberg sobre o eixo vertical e translações de Heisenberg são chamadas *grupo de similaridade de Heisenberg*. É claro que $\mathbf{Sim}_0(H)$ é o estabilizador da origem em $\mathbf{Sim}(H)$.

Definimos a *projeção vertical* $\pi_v : H \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ dado por $\pi_v(\zeta, v) = \zeta$.

É fácil ver que o kernel do homomorfismo $\Pi : \mathbf{Sim}(H) \rightarrow \mathbf{Sim}(\mathbb{C}^{n-1})$ consiste das transformações verticais, e que a projeção vertical π_v é equivariante respeitando Π .

4.1.1 Calculando a dimensão do espaço de módulos de triplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$

Uma *cadeia* é a fronteira ideal de uma geodésica complexa ($\partial c_i \cong S^1$, ver [11]).

Inversão em uma cadeia é a reflexão na geodésica complexa que tem por fronteira à cadeia inicial, uma inversão é uma isometria de ordem 2.

A fronteira de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ pode ser identificada por $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R} \cup \{q_{\infty}\}$ (compactificação do grupo de Heisenberg).

As projeções verticais de cadeias são circunferências euclidianas em \mathbb{C}^2 (ver [11, Teorema 4.3.2]), cujo raio dessa circunferência se chama *raio de cadeia*. Então qualquer cadeia é determinada por seu centro (z_1, z_2, x) e raio r .

Consideremos o conjunto de todas as cadeias com o mesmo raio e o mesmo centro, então as projeções verticais dessas cadeias geram uma esfera de dimensão 3 em \mathbb{C}^2 . Essas projeções são disjuntas e formam o fibrado de Hopf que é dado por:

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$$

Dada (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica de geodésicas complexas, temos que as duas primeiras geodésicas complexas são definidas por dos parâmetros (d =distância e a =ângulo).

Dada a tripla genérica (c_1, c_2, c_3) , fixando as duas primeiras geodésicas complexas (as duas primeiras cadeias), a terceira geodésica complexa (a terceira cadeia)

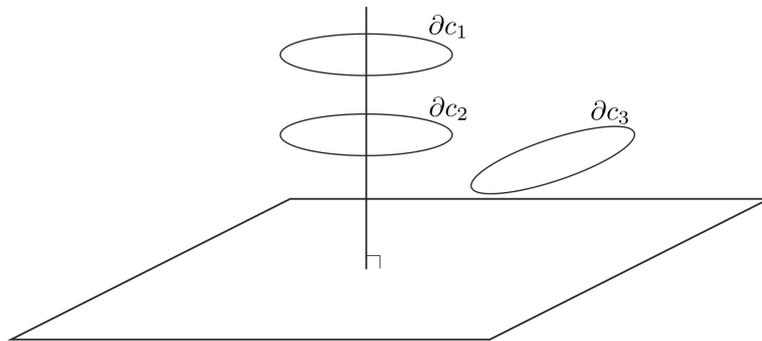
a priori pode estar em qualquer lugar. Ou seja, fixando as duas cadeias ∂c_1 e ∂c_2 temos já dois parâmetros (d e a) a terceira cadeia, que pode estar em qualquer lugar, é determinada por seu centro (z_1, z_2, x) e raio r . Projetando verticalmente ∂c_3 aparece uma fibra do fibrado de Hopf cuja base é S^2 , ou seja localmente a cadeia ∂c_3 é determinada por dois parâmetros. Então, a priori o número de parâmetros que precisamos são $2 + 5 + 1 + 2 = 10$.

Para c_1 e c_2 fixadas, consideremos o estabilizador de essas duas geodésicas complexas no grupo $\text{PU}(3, 1)$. Se o estabilizador é trivial significa que não podemos normalizar, então precisaremos dos 10 parâmetros acima descritos. Mas na seguinte proposição demonstraremos que o estabilizador de c_1 e c_2 é um grupo à 1 parâmetro. Portanto podemos usar esse grupo para fazer uma rotação e obter que $z_1 \in \mathbb{R}$, logo teremos somente 9 parâmetros para descrever uma tripla ordenada de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Proposição 4.1 *O estabilizador das geodésicas complexas c_1 e c_2 no grupo $\text{PU}(3, 1)$ é um grupo à 1 parâmetro.*

De fato, é claro que se temos uma isometria g que deixa invariante à c_1 e c_2 , ele deixa invariante à geodésica riemanniana perpendicular comum σ (com pontos finais x_1 e x_2). Então g pode ser elíptico ou loxodrômico.

Já que o grupo de isometrias age transitivamente em pares de pontos da fronteira do espaço hiperbólico complexo, podemos supor sem perda de generalidade que $x_1 = o$ e $x_2 = q_{\infty}$



Consideremos a base $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ dada em (4.2), com $\pi(e_1) = x_1$ e $\pi(e_{n+1}) = x_2$. Nessa base, identificando a fronteira do espaço hiperbólico complexo com a compactificação do grupo de Heisenberg, o elemento g que fixa σ é dado por:

$$g = \begin{bmatrix} \lambda e^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\psi} e^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\psi} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} e^{i\varphi} \end{bmatrix} \in \text{SU}(3, 1) \quad (4.4)$$

λ é parâmetro de dilatação ao longo da geodésica (se $\lambda \neq 1$, g é loxodrômico).

O estabilizador para c_1 e c_2 pode ser construído da seguinte forma; consideremos a geodésica riemanniana σ perpendicular comum entre c_1 e c_2 .

Portanto se g é um elemento do grupo de isometrias que deixa invariante c_1 e c_2 , então g deixa invariante σ . Suponhamos que tal elemento é dado por g (ver 4.4), então ele não pode ser loxodrômico já que elementos loxodrômicos muda c_1 e c_2 , assim:

$$g = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\psi} e^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\psi} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

Seja c a geodésica perpendicular comum entre c_1 e c_2 . Consideremos o conjunto bi-ortogonal $\{p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}\}$ da dupla (c_1, c_2) .

Se g move os planos $q_{12}^\perp, q_{21}^\perp$, ele move c_1 e c_2 . Por outro lado, ψ é ângulo de rotação de planos em torno da geodésica complexa c , como as geodésicas c_1 e c_2 são fixas temos que $\psi = 0$, assim:

$$g = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

Agora, qualquer plano que contem a geodésica complexa c , tem ponto polar na esfera polar c^\perp . Se a aplicação g age no conjunto polar c^\perp , g move esses planos contem a geodésica complexa c . Como

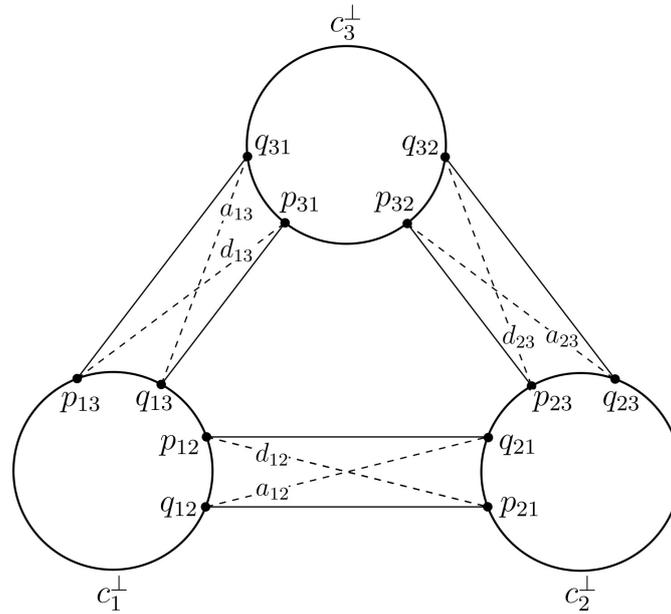
$$\begin{bmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{bmatrix} \xrightarrow{\pi} Id$$

vê-se que g age trivialmente em c^\perp . Portanto, essa aplicação não muda pontos na esfera polar c^\perp , assim o estabilizador de c_1 e c_2 é um grupo à 1 parâmetro.

Assim podemos usar um elemento desse grupo e fazer uma rotação e obter que $z_1 \in \mathbb{R}$. Isto mostra que o espaço de módulos para uma tripla de geodésicas complexas genéricas tem dimensão real 9.

4.2 Espaço de módulos de triplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$

Se (c_1, c_2, c_3) é uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, então cada sub-dupla da tripla é reversa. Consideremos os respectivos conjuntos bi-ortogonais de cada sub-dupla (ver tabela 4.1), assim as esferas polares neste caso tem a seguinte configuração:



Vê-se que para cada sub-dupla (c_i, c_j) a pre-distância e o pre-ângulo são dados por $d(p_{ij}, p_{ji})$ e $d(q_{ij}, q_{ji})$ respectivamente.

Definição 4.3 *Dada uma tripla genérica (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, o conjunto $\{p_{ij}, q_{ij}\}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$. dado acima será chamado de configuração polar associada à tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

Consideremos levantamentos $v_i, w_i \in \mathbb{P}\mathbb{V}^3$ da configuração polar associada à tripla genérica (c_1, c_2, c_3) tais que:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 v_1 & v_2 & w_1 & w_2 & v_3 & v_4 & w_3 & w_4 & v_5 & v_6 & w_5 & w_6 \\
 \downarrow & \downarrow \\
 p_{12} & p_{21} & q_{12} & q_{21} & p_{23} & p_{32} & q_{23} & q_{32} & p_{31} & p_{13} & q_{31} & q_{13}
 \end{array} \tag{4.5}$$

Pela Proposição 3.12 pode-se escolher os levantamentos $v_i, w_i \in \mathbb{P}\mathbb{V}^3$ de tal forma que as matrizes de Gram associadas à $\{p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}\}$, $\{p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e

$\{p_{31}, p_{13}, q_{31}, q_{13}\}$ sejam respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & d_{12} & 0 & 0 \\ d_{12} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{12} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & d_{23} & 0 & 0 \\ d_{23} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{23} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & d_{13} & 0 & 0 \\ d_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{13} & 1 \end{bmatrix}$$

onde $d_{12}, d_{23}, d_{13} > 1$ e $0 \leq a_{12}, a_{23}, a_{13} < 1$, já que (c_1, c_2, c_3) é uma tripla genérica.

Definição 4.4 Chamaremos à $d_{12}, d_{23}, d_{13}, a_{12}, a_{23}, a_{13}$ de parâmetros básicos da tripla (c_1, c_2, c_3) .

Sabe-se que os C_i^\perp , $i = 1, 2, 3$, são subespaços complexos positivos de dimensão complexa 2, então pela Proposição 3.6 e a Observação 3.2 temos que $\{v_1, w_1\}$ e $\{v_6, w_6\}$ formam bases ortonormais para C_1^\perp . Da mesma forma $\{v_2, w_2\}$ e $\{v_3, w_3\}$ formam bases ortonormais para C_2^\perp , $\{v_4, w_4\}$ e $\{v_5, w_5\}$ formam bases ortonormais para C_3^\perp .

Como $SU(2, C_j^\perp)$ age transitivamente em pares de bases ortonormais de C_j^\perp , consideremos as transformações $T_j \in SU(2, C_j^\perp)$, $j = 1, 2, 3$. tais que:

$$\{v_1, w_1\} \xrightarrow{T_1} \{v_6, w_6\}$$

$$\{v_2, w_2\} \xrightarrow{T_2} \{v_3, w_3\}$$

$$\{v_4, w_4\} \xrightarrow{T_3} \{v_5, w_5\}$$

Sabe-se que cada transformação acima pode-se escrever como composição de três matrizes (veja [8, Subseção 5.1.3]):

$$\begin{bmatrix} e^{i\varphi_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_j & \text{sen } \alpha_j \\ -\text{sen } \alpha_j & \cos \alpha_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\theta_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_j} \end{bmatrix}$$

vemos que os vetores das bases ortonormais $\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\}, \{v_4, w_4\}$ aplicados

na primeira matriz não muda as retas complexas geradas por esses vetores, então as projeções dos vetores das bases aplicadas na primeira matriz continuam sendo as mesmas. Portanto podemos considerar as transformações $T_j \in \text{SU}(2, C_j^\perp)$, $j = 1, 2, 3$. tal que:

$$T_j = \begin{bmatrix} e^{i\varphi_j} \cos \alpha_j & e^{i\varphi_j} \text{sen } \alpha_j \\ -e^{-i\varphi_j} \text{sen } \alpha_j & e^{-i\varphi_j} \cos \alpha_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.6)$$

Observação 4.1 *Pelo Teorema de Witt podemos estender as aplicações T_j para $\text{SU}(3, 1)$.*

Definição 4.5 *Chamaremos os α_j e φ_j ângulos de transição.*

Agora queremos calcular a matriz de Gram G para os pontos $\{p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{31}, p_{13}, q_{31}, q_{13}\}$ com seus respectivos levantamentos $\{v_1, v_2, w_1, w_2, v_3, v_4, w_3, w_4, v_5, v_6, w_5, w_6\}$, aqui os levantamentos $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}, \{v_3, v_4, w_3, w_4\}, \{v_5, v_6, w_5, w_6\}$ determinam a matriz de Gram canônica para cada subdupla $(c_1, c_2), (c_2, c_3), (c_3, c_1)$. Por exemplo calcularemos $\langle v_2, v_5 \rangle$, para isto utilizando T_2 e T_3 em (4.6) temos que

$$\begin{cases} T_3 \begin{cases} v_5 = e^{i\varphi_3} \cos \alpha_3 v_4 - e^{-i\varphi_3} \text{sen } \alpha_3 w_4 \\ w_5 = e^{i\varphi_3} \text{sen } \alpha_3 v_4 + e^{-i\varphi_3} \cos \alpha_3 w_4 \end{cases} \\ T_2^{-1} \begin{cases} v_2 = e^{-i\varphi_2} \cos \alpha_2 v_3 + e^{-i\varphi_2} \text{sen } \alpha_2 w_3 \\ w_2 = -e^{i\varphi_2} \text{sen } \alpha_2 v_3 + e^{i\varphi_2} \cos \alpha_2 w_3 \end{cases} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle v_2, v_5 \rangle &= \langle e^{-i\varphi_2} \cos \alpha_2 v_3 + e^{-i\varphi_2} \text{sen } \alpha_2 w_3, e^{i\varphi_3} \cos \alpha_3 v_4 - e^{-i\varphi_3} \text{sen } \alpha_3 w_4 \rangle \\ &= e^{-i\varphi_2} e^{-i\varphi_3} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \langle v_3, v_4 \rangle - e^{-i\varphi_2} e^{i\varphi_3} \text{sen } \alpha_2 \text{sen } \alpha_3 \langle w_3, w_4 \rangle \\ &= e^{i(-\varphi_2 - \varphi_3)} d_{23} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 - e^{i(-\varphi_2 + \varphi_3)} a_{23} \text{sen } \alpha_2 \text{sen } \alpha_3. \end{aligned}$$

onde $d_{12}, d_{23}, d_{13} > 1$ e $0 \leq a_{12}, a_{23}, a_{13} < 1$, e

$$A_1 = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi_2} d_{12} \cos \alpha_2 & e^{i(-\varphi_1+\varphi_3)} [d_{13} \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + a_{13} \text{sen } \alpha_1 \text{sen } \alpha_3] & e^{-i\varphi_2} d_{12} \text{sen } \alpha_2 & e^{i(-\varphi_1-\varphi_3)} [-d_{13} \cos \alpha_1 \text{sen } \alpha_3 + a_{13} \text{sen } \alpha_1 \cos \alpha_3] \\ e^{-i\varphi_2} \cos \alpha_2 & e^{-i\varphi_2} d_{23} \cos \alpha_2 & e^{-i\varphi_2} \text{sen } \alpha_2 & e^{-i\varphi_2} a_{23} \text{sen } \alpha_2 \\ -e^{i\varphi_2} a_{12} \text{sen } \alpha_2 & e^{i(\varphi_1+\varphi_3)} [-d_{13} \text{sen } \alpha_1 \cos \alpha_3 + a_{13} \cos \alpha_1 \text{sen } \alpha_3] & e^{i\varphi_2} a_{12} \cos \alpha_2 & e^{i(\varphi_1-\varphi_3)} [d_{13} \text{sen } \alpha_1 \text{sen } \alpha_3 + a_{13} \cos \alpha_1 \cos \alpha_3] \\ -e^{i\varphi_2} \text{sen } \alpha_2 & -e^{i\varphi_2} d_{23} \text{sen } \alpha_2 & e^{i\varphi_2} \cos \alpha_2 & e^{i\varphi_2} a_{23} \cos \alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi_1} d_{13} \cos \alpha_1 & e^{-i\varphi_1} \cos \alpha_1 & e^{-i\varphi_1} a_{13} \text{sen } \alpha_1 & e^{-i\varphi_1} \text{sen } \alpha_1 \\ e^{i(-\varphi_2-\varphi_3)} d_{23} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & e^{-i\varphi_1} d_{12} \cos \alpha_1 & e^{i(-\varphi_2-\varphi_3)} d_{23} \cos \alpha_2 \text{sen } \alpha_3 & e^{-i\varphi_1} d_{12} \text{sen } \alpha_1 \\ -e^{i(-\varphi_2+\varphi_3)} a_{23} \text{sen } \alpha_2 \text{sen } \alpha_3 & & +e^{i(-\varphi_2+\varphi_3)} a_{23} \text{sen } \alpha_2 \cos \alpha_3 & \\ -e^{i\varphi_1} d_{13} \text{sen } \alpha_1 & -e^{i\varphi_1} \text{sen } \alpha_1 & e^{i\varphi_1} a_{13} \cos \alpha_1 & e^{i\varphi_1} \cos \alpha_1 \\ -e^{i(\varphi_2-\varphi_3)} d_{23} \text{sen } \alpha_2 \cos \alpha_3 & -e^{i\varphi_1} a_{12} \text{sen } \alpha_1 & -e^{i(\varphi_2-\varphi_3)} d_{23} \text{sen } \alpha_2 \text{sen } \alpha_3 & e^{i\varphi_1} a_{12} \cos \alpha_1 \\ -e^{i(\varphi_2+\varphi_3)} a_{23} \cos \alpha_2 \text{sen } \alpha_3 & & +e^{i(\varphi_2+\varphi_3)} a_{23} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi_3} d_{23} \cos \alpha_3 & e^{(-\varphi_1+\varphi_2)} d_{12} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + e^{(\varphi_1-\varphi_2)} a_{12} \text{sen } \alpha_1 \text{sen } \alpha_2 & e^{-i\varphi_3} d_{23} \text{sen } \alpha_3 & e^{(-\varphi_1+\varphi_2)} d_{12} \text{sen } \alpha_1 \cos \alpha_2 - e^{(\varphi_1-\varphi_2)} a_{12} \cos \alpha_1 \text{sen } \alpha_2 \\ e^{-i\varphi_3} \cos \alpha_3 & e^{-i\varphi_3} d_{13} \cos \alpha_3 & e^{-i\varphi_3} \text{sen } \alpha_3 & e^{-i\varphi_3} a_{13} \text{sen } \alpha_3 \\ -e^{i\varphi_3} a_{23} \text{sen } \alpha_3 & e^{(-\varphi_1+\varphi_2)} d_{12} \cos \alpha_1 \text{sen } \alpha_2 - e^{(\varphi_1-\varphi_2)} a_{12} \text{sen } \alpha_1 \cos \alpha_2 & e^{i\varphi_3} a_{23} \cos \alpha_3 & e^{(-\varphi_1+\varphi_2)} d_{12} \text{sen } \alpha_1 \text{sen } \alpha_2 + e^{(\varphi_1-\varphi_2)} a_{12} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ -e^{i\varphi_3} \text{sen } \alpha_3 & -e^{i\varphi_3} d_{13} \text{sen } \alpha_3 & e^{i\varphi_3} \cos \alpha_3 & e^{i\varphi_3} a_{13} \cos \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Definição 4.6 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica ordenada de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. A matriz G dada no Teorema 4.1 será denominada matriz de Gram canônica para uma tripla genérica de geodésicas complexas.*

Agora, como $p_{12}, p_{13} \in c_1^\perp$ pela Proposição 3.3 temos que os planos p_{12}^\perp e p_{13}^\perp contêm a geodésica complexa c_1 , portanto o d -invariante $d(p_{12}, p_{13})$ define o ângulo

entre os planos p_{12}^{\perp} e p_{13}^{\perp} . O mesmo acontece com $p_{21}, p_{23} \in c_2^{\perp}$ e $p_{31}, p_{32} \in c_3^{\perp}$.

Assim, $d(q_{12}, q_{13})$, $d(p_{21}, p_{23})$, $d(p_{31}, p_{32})$ definem os ângulos de transição $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dados em (4.6). De fato, pela matriz de Gram dada no Teorema 4.1 tem-se que:

$$d(p_{12}, p_{13}) = \cos^2 \alpha_1$$

$$d(p_{21}, p_{23}) = \cos^2 \alpha_2$$

$$d(p_{31}, p_{32}) = \cos^2 \alpha_3$$

Observação 4.2 Neste caso o espaço gerado pelos levantamentos da configuração polar $\{p_{ij}, q_{ij}\}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$. é regular. De fato, sendo a tripla c_1, c_2, c_3 genérica temos que cada sub-dupla é não coplanar, assim cada base bi-ortogonal é uma base para $\mathbb{V}^{3,1}$.

Teorema 4.2 Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, então os seis parâmetros básicos com os seis ângulos de transição definem unicamente a classe de congruência por PU(3,1) das triplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Demonstração: Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e G sua matriz de Gram canônica (ver Definição 4.6). Pela construção da matriz G vê-se que todas as entradas dessa matriz podem-se recuperar unicamente. E a afirmação segue da Proposição 2.2. ■

Então temos 12 parâmetros que definem unicamente a classe de congruência por PU(3,1) das triplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Sabendo que a dimensão do espaço de módulos para triplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é 9, procurarmos três equações independentes que relacionam os 12 parâmetros.

Para isto, calcularemos três menores principais de ordem 5 da matriz G dada no Teorema 4.1. Os menores associados à

$\{p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{31}\}, \{p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}\}, \{p_{31}, p_{13}, q_{31}, q_{13}, p_{21}\}$ sãO:

$$\begin{aligned}
 D_1 = & 1 - d_{12}^2 - d_{13}^2 - a_{12}^2 + a_{12}^2 d_{12}^2 - a_{23}^2 \text{sen}^2 \alpha_3 - d_{23}^2 \cos^2 \alpha_3 \\
 & + d_{12}^2 d_{13}^2 \text{sen}^2 \alpha_1 + a_{12}^2 d_{13}^2 \cos^2 \alpha_1 \\
 & + a_{12}^2 a_{23}^2 \text{sen}^2 \alpha_2 \text{sen}^2 \alpha_3 + a_{12}^2 d_{23}^2 \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3 \\
 & + d_{12}^2 d_{23}^2 \text{sen}^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3 + a_{23}^2 d_{12}^2 \cos^2 \alpha_2 \text{sen}^2 \alpha_3 \\
 & + 2d_{12}^2 a_{23} d_{23} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \text{sen} \alpha_2 \text{sen} \alpha_3 \cos(2\varphi_3) \\
 & - 2a_{12}^2 a_{23} d_{23} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \text{sen} \alpha_2 \text{sen} \alpha_3 \cos(2\varphi_3) \\
 & + 2a_{12}^2 a_{23} d_{12} d_{13} \cos \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 \text{sen} \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) \\
 & - 2a_{12}^2 d_{12} d_{13} d_{23} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \\
 & - 2d_{12}^2 a_{12} a_{23} d_{13} \text{sen} \alpha_1 \cos \alpha_2 \text{sen} \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \\
 & - 2d_{12}^2 a_{12} d_{13} d_{23} \text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) \\
 & + 2a_{12} a_{23} d_{13} \text{sen} \alpha_1 \cos \alpha_2 \text{sen} \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \\
 & + 2a_{12} d_{13} d_{23} \text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) \\
 & - 2a_{23} d_{12} d_{13} \cos \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 \text{sen} \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) \\
 & + 2d_{12} d_{13} d_{23} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 = & 1 - d_{23}^2 - d_{13}^2 - a_{23}^2 + a_{23}^2 d_{23}^2 - a_{12}^2 \text{sen}^2 \alpha_1 - d_{12}^2 \cos^2 \alpha_1 \\
 & + d_{13}^2 d_{23}^2 \text{sen}^2 \alpha_3 + a_{23}^2 d_{13}^2 \cos^2 \alpha_3 \\
 & + a_{12}^2 a_{23}^2 \text{sen}^2 \alpha_1 \text{sen}^2 \alpha_2 + a_{12}^2 d_{23}^2 \text{sen}^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 \\
 & + a_{23}^2 d_{12}^2 \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 + d_{12}^2 d_{23}^2 \cos^2 \alpha_1 \text{sen}^2 \alpha_2 \\
 & + 2a_{23}^2 a_{12} d_{12} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2) \\
 & - 2d_{23}^2 a_{12} d_{12} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 \cos(2\varphi_1 - 2\varphi_2) \\
 & + 2d_{23}^2 a_{23} d_{12} d_{13} \cos \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 \text{sen} \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) \\
 & - 2a_{23}^2 d_{12} d_{13} d_{23} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \\
 & - 2d_{23}^2 a_{12} a_{23} d_{13} \text{sen} \alpha_1 \cos \alpha_2 \text{sen} \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \\
 & - 2a_{23}^2 a_{12} d_{13} d_{23} \text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) \\
 & + 2a_{12} a_{23} d_{13} \text{sen} \alpha_1 \cos \alpha_2 \text{sen} \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \\
 & + 2a_{12} d_{13} d_{23} \text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) \\
 & - 2a_{23} d_{12} d_{13} \cos \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 \text{sen} \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) \\
 & + 2d_{12} d_{13} d_{23} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_3 = & 1 - a_{13}^2 - d_{12}^2 - d_{13}^2 + a_{13}^2 d_{13}^2 - d_{23}^2 \cos^2 \alpha_2 - a_{23}^2 \sin^2 \alpha_2 \\
 & + a_{13}^2 d_{12}^2 \cos^2 \alpha_1 + d_{12}^2 d_{13}^2 \sin^2 \alpha_1 \\
 & + a_{13}^2 d_{23}^2 \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3 + a_{13}^2 a_{23}^2 \sin^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_3 \\
 & + a_{23}^2 d_{13}^2 \cos^2 \alpha_3 \sin^2 \alpha_2 + d_{13}^2 d_{23}^2 \cos^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_3 \\
 & - 2a_{13}^2 a_{23} d_{23} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos(2\varphi_3) \\
 & + 2d_{13}^2 a_{23} d_{23} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos(2\varphi_3) \\
 & + 2a_{13}^2 a_{23} d_{12} d_{13} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) \\
 & - 2a_{13}^2 d_{12} d_{13} d_{23} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \\
 & - 2d_{13}^2 a_{13} a_{23} d_{12} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) \\
 & - 2d_{13}^2 a_{13} d_{12} d_{23} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \\
 & + 2a_{13} a_{23} d_{12} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) \\
 & + 2a_{13} d_{12} d_{23} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \\
 & - 2a_{23} d_{12} d_{13} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) \\
 & + 2d_{12} d_{13} d_{23} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)
 \end{aligned}$$

Agora estamos pronto para construir o espaço de módulos para uma tripla genérica de geodésicas complexas $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e $G = (g_{ij})$ sua matriz de Gram canônica associada à tripla (c_1, c_2, c_3) . No que segue, vamos assumir que G possui as entradas expressas em termos dos 6 parâmetros básicos e os 6 ângulos de transição.

Denotemos por $\mathcal{M}^g(3)$ o espaço de configurações de triplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e seja $[(c_1, c_2, c_3)] \in \mathcal{M}^g(3)$ o ponto representado por (c_1, c_2, c_3) . Definimos o mapa:

$$\tau: \mathcal{M}^g(3) \longrightarrow \mathbb{R}^{12}, \quad (4.7)$$

que associa à $[(c_1, c_2, c_3)]$ os 6 parâmetros básicos com os 6 ângulos de transição.

Teorema 4.3 *O espaço de configurações $\mathcal{M}^g(3)$ de triplas genéricas de ge-*

odésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é homeomorfo ao conjunto $\mathbb{M}^g(3)$ de pontos em $(d_1, d_2, d_3, a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{R}^{12}$ definidos pelas seguintes condições:

$$\begin{aligned} d_i &> 1, & i &= 1, 2, 3. \\ 0 &\leq a_i < 1 & i &= 1, 2, 3. \\ 0 &\leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{2} & i &= 1, 2, 3. \\ 0 &\leq \varphi_i \leq \frac{\pi}{2} & i &= 1, 2, 3. \\ D_i &= 0 & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Demonstração: Segue da parte "se" do Teorema 2.3 (condições do determinante) e do Teorema 4.2 que o mapa τ em (4.7) define um mapa $\tau: \mathcal{M}^g(3) \rightarrow \mathbb{M}^g(3)$. Primeiramente, mostrarmos que o mapa $\tau: \mathcal{M}^g(3) \rightarrow \mathbb{M}^g(3)$ é sobrejetivo. Dado $(d_1, d_2, d_3, a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{M}^g(3)$, pelo Teorema 4.3, definimos $(G)_{ij}$ em termos de os 6 parâmetros básicos com os 6 ângulos de transição, também fixamos $g_{ii} = 1$. Isto define G completamente. É fácil ver que G satisfaz todas as condições da parte "somente se" do Teorema 2.3. Portanto, isto implica que G é a matriz de Gram canônica para alguma configuração polar de uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Isto prova que τ é sobrejetiva.

Por outro lado, segue do Teorema 4.3 que o mapa τ é injetiva. É claro que $\tau: \mathcal{M}^g(3) \rightarrow \mathbb{M}^g(3)$ é um homeomorfismo uma vez que $\mathbb{M}^g(3)$ seja munido com a topologia induzida de \mathbb{R}^{12} . ■

Definição 4.7 Chamaremos $\mathbb{M}^g(3)$ o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}^g(3)$ de triplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

4.2.1 Espaço de módulos de triplas reais

Uma tripla (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas é chamada *tripla real* se existe um subespaço totalmente geodésico real de dimensão 3, que pode ser identificado com $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, que intercepta as geodésicas complexas c_i , $i = 1, 2, 3$. Denotemos por σ_i tais

intersecções. É obvio que σ_i é uma geodésica em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Assim formamos uma tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.

É fácil ver que $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é real se, e somente se, os ângulos de transição $\varphi_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Teorema 4.3 implica o seguinte resultado.

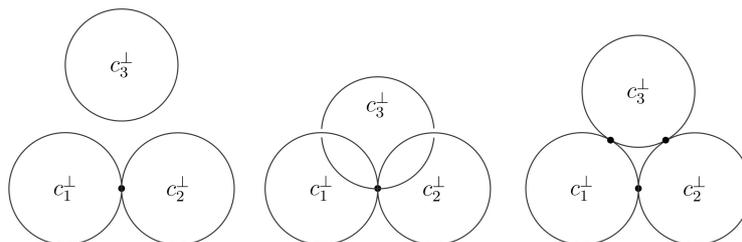
Teorema 4.4 *Seja $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla ordenada de geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Então, a classe de congruência de σ em relação ao grupo de isometrias em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ é determinado por seis parâmetros básicos (distâncias e ângulos) e três ângulos de transição $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, sujeito as relações dadas por $D_i = 0$ com $\varphi_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.*

Isto é coerente com [10, Fenchel], onde prova-se que o espaço de configurações de triplas de geodésicas reais ordenadas no espaço hiperbólico real de dimensão 3 tem dimensão seis.

Fenchel trabalha na fronteira do espaço $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ identificado com a esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ e usa razões cruzadas. O Teorema 4.4 descreve o espaço de módulos em questão usando parâmetros que são intrínsecos de geometria hiperbólica sem passar para a fronteira ideal.

4.3 Espaço de módulos de triplas especiais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$

Se (c_1, c_2, c_3) é uma tripla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, então pelo menos uma sub-dupla da tripla é coplanar. Assim as esferas polares neste caso podem ter as seguintes configurações:



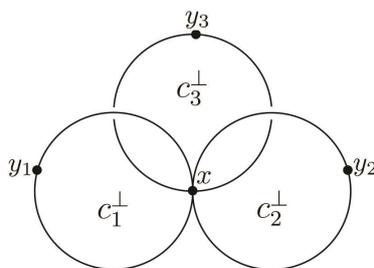
A primeira configuração corresponde ao caso em que só uma das sub-duplas da tripla (c_1, c_2, c_3) seja coplanar (*caso quase genérico*). A segunda configuração corresponde ao caso em que as três geodésicas complexas (c_1, c_2, c_3) sejam coplanares (*caso coplanar*). A terceira configuração corresponde ao caso em que as geodésicas complexas (c_1, c_2, c_3) sejam dois a dois coplanares (*caso dois à dois coplanar*).

No caso quase genérico podemos proceder do mesmo modo que foi construído o espaço de módulos para uma tripla genérica, sendo que agora temos que algum parâmetro básico é 1. Isto é, alguma distância é zero ou algum ângulo é zero.

Portanto, esta seção será dividida em duas partes, na primeira estudaremos as triplas coplanares e na segunda parte estudaremos as triplas dois à dois coplanares.

4.3.1 Triplas coplanares de geodésicas complexas

Dada uma tripla coplanar (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, consideremos as sub-duplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) obtidas a partir de (c_1, c_2, c_3) , para cada sub-dupla consideremos seu respectivo conjunto bi-ortogonal (ver tabela 4.1). As esferas polares no caso coplanar tem a seguinte configuração:



onde $x, y_1, y_2, y_3 \in \{p_{ij}, q_{ij}\}$, o ponto positivo x é o ponto polar do plano que contém as três geodésicas complexas e os pontos positivos y_i são os pontos polares dos planos ortogonais à x contendo a geodésica c_i . Assim, para cada tripla coplanar de geodésicas complexas associamos quatro pontos positivos.

Definição 4.8 Dada uma tripla coplanar (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, o conjunto $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ dado acima será chamado de configuração polar associada à tripla coplanar de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Uma tripla coplanar (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ será dita *tripla não ortogonal* se as geodésicas complexas c_i e c_j não são ortogonais, isto é $\langle w_i, w_j \rangle \neq 0$ para $i \neq j$, onde $\pi(w_i) = y_i$. Caso contrário (c_1, c_2, c_3) será chamada *tripla ortogonal*.

4.3.1.1 Triplas coplanares não ortogonais

Dada uma tripla coplanar não ortogonal (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, pode-se escolher levantamentos $v, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^{3,1}$ da configuração polar $\{x, y_1, y_2, y_3\} \in \pi(V_+)$ de tal forma que a matriz de Gram G associada à configuração polar seja:

$$\begin{array}{c}
 \\
 v \\
 w_1 \\
 w_2 \\
 w_3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 v \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3 \\
 \boxed{
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & r_{12} & r_{13} \\
 0 & r_{12} & 1 & r_{23}e^{i\theta} \\
 0 & r_{13} & r_{23}e^{-i\theta} & 1
 \end{array}
 }
 \end{array}
 \quad (4.8)$$

onde $r_{ij} > 0$ e $\theta \in (-\pi, \pi]$.

A matriz de Gram G (ver matriz 4.8) será denominada matriz de Gram *canônica* para uma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Definiremos agora outro invariante projetivo que ajudara encontrar a classe de congruência para triplas coplanares não ortogonais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Definição 4.9 *Sejam $\{y_1, y_2, y_3\}$ três pontos positivos não ortogonais dois a dois, então \mathbb{A} dado por:*

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(y_1, y_2, y_3) = \arg(\langle w_1, w_2 \rangle \langle w_2, w_3 \rangle \langle w_3, w_1 \rangle), \quad \text{onde } \pi(w_i) = y_i.$$

\mathbb{A} será chamado de invariante angular para $\{y_1, y_2, y_3\}$.

Verifica-se que \mathbb{A} está bem definido já que é independente da escolha dos le-

vantamentos Y_i , e que \mathbb{A} é invariante em relação à ação diagonal de $\text{PU}(3,1)$. Consideraremos $\mathbb{A} \in (-\pi, \pi]$.

Diremos que uma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é *regular* se a sua configuração polar $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ é regular (ver Definição 2.4).

Teorema 4.5 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar não ortogonal regular de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e seja $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ sua configuração polar associada. Os d -invariantes $d(y_1, y_2), d(y_1, y_3), d(y_2, y_3)$ e o invariante angular $\mathbb{A}(y_1, y_2, y_3)$ definem unicamente a classe de congruência por $\text{PU}(3,1)$ das triplas coplanares não ortogonais regulares de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

Demonstração: Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar não ortogonal regular de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e G sua matriz de Gram canônica (ver matriz 4.8):

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{12} & 1 & r_{23}e^{i\theta} \\ 0 & r_{13} & r_{23}e^{-i\theta} & 1 \end{bmatrix}.$$

Segue da definição do d -invariante que

$$d(y_1, y_2) = g_{23}g_{32} = r_{12}^2, \quad d(y_1, y_3) = g_{24}g_{42} = r_{13}^2, \quad d(y_2, y_3) = g_{34}g_{43} = r_{23}^2$$

e segue da definição do invariante angular que

$$\mathbb{A}(y_1, y_2, y_3) = \arg(g_{23}g_{34}g_{41}) = \arg(r_{12}r_{23}e^{i\theta}r_{13}).$$

As primeiras igualdades implicam que $r_{ij} = \sqrt{d(y_i, y_j)}$. Como (c_1, c_2, c_3) é uma tripla não ortogonal, temos que $\mathbb{A}(y_1, y_2, y_3) = \theta$. Assim, todas as entradas da matriz de Gram canônica G podem-se recuperar unicamente em termos dos d -invariantes $d(y_1, y_2), d(y_1, y_3), d(y_2, y_3)$ e o invariante angular $\mathbb{A}(y_1, y_2, y_3)$. Como a tripla é regular, a afirmação segue da Proposição 2.2. ■

Agora estamos pronto para construir o espaço de módulos para triplas coplanares não ortogonais regulares de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar não ortogonal regular de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e $G = (g_{ij})$ sua matriz de Gram canônica associada. Aplicando as fórmulas que aparecem no Teorema 4.5, podemos recuperar todas as entradas de G em termos dos d -invariantes $d(y_1, y_2)$, $d(y_1, y_3)$, $d(y_2, y_3)$ e o invariante angular $\mathbb{A}(y_1, y_2, y_3)$. No que segue, vamos assumir que G possui as entradas expressas em termos de $d(y_1, y_2)$, $d(y_1, y_3)$, $d(y_2, y_3)$ e $\mathbb{A}(y_1, y_2, y_3)$.

Denotemos por $\mathcal{M}_0(3)$ o espaço de configurações de triplas coplanares não ortogonais regulares de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e seja $[(c_1, c_2, c_3)] \in \mathcal{M}_0(3)$ o ponto representado por (c_1, c_2, c_3) . Definimos o mapa:

$$\tau: \mathcal{M}_0(3) \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad (4.9)$$

que associa à $[(c_1, c_2, c_3)]$ os invariantes $d(y_1, y_2)$, $d(y_1, y_3)$, $d(y_2, y_3)$ e $\mathbb{A}(y_1, y_2, y_3)$.

Teorema 4.6 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_0(3)$ de triplas coplanares não ortogonais regulares de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é homeomorfo ao conjunto $\mathbb{M}_0(3)$ de pontos em \mathbb{R}^4 definidos pelas seguintes condições:*

$$\mathbb{M}_0(3) = \{(r_1, r_2, r_3, \theta) \in \mathbb{R}^4 : r_i > 0, \theta \in (-\pi, \pi], 1 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + 2r_1r_2r_3 \cos \theta \leq 0\}.$$

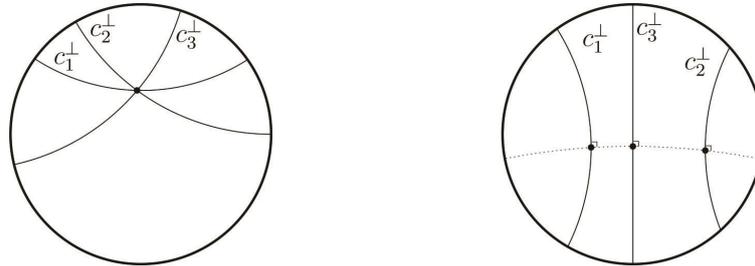
Demonstração: Segue da parte "se" do Teorema 2.3 (condições do determinante) e das fórmulas que aparecem na demonstração do Teorema 4.5 que o mapa τ em (4.9) define um mapa $\tau: \mathcal{M}_0(3) \rightarrow \mathbb{M}_0(3)$. Primeiramente, mostramos que o mapa $\tau: \mathcal{M}_0(3) \rightarrow \mathbb{M}_0(3)$ é sobrejetivo. Dado $(r_1, r_2, r_3, \theta) \in \mathbb{M}_0(3)$, usando as fórmulas que aparecem na demonstração do Teorema 4.5, definimos g_{23}, g_{24}, g_{34} em termos de (r_1, r_2, r_3, θ) , também fixamos $g_{ii} = 1$. Isto define G completamente. É fácil ver que G satisfaz todas as condições da parte "somente se" do Teorema 2.3. Portanto, isto implica que G é a matriz de Gram canônica para a configuração polar de alguma

tripla coplanar não ortogonal regular de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Isto prova que τ é sobrejetiva.

Por outro lado, segue do Teorema 4.5 que o mapa τ é injetiva. É claro que $\tau: \mathcal{M}_0(3) \rightarrow \mathbb{M}_0(3)$ é um homeomorfismo uma vez que $\mathbb{M}_0(3)$ seja munido com a topologia induzida de \mathbb{R}^4 . ■

Definição 4.10 Chamaremos $\mathbb{M}_0(3)$ o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_0(3)$ de triplas coplanares não ortogonais regulares de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Observação 4.3 A igualdade no Teorema 4.6 acontece se, e somente se, as geodésicas complexas coplanares não ortogonais (c_1, c_2, c_3) se interceptam em um ponto $p \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, ou se c_1, c_2, c_3 possuem uma perpendicular comum.



De fato, a igualdade acontece se o $\det(G) = 0$, então a configuração polar $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ da tripla de geodésicas pertence à um plano projetivo, Isto é $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v, w_1, w_2, w_3\}$ tem dimensão 3. Como a configuração polar é regular, temos dois casos:

1. Se W é elíptico, então neste caso, c_1, c_2, c_3 interceptam-se no ponto negativo $\pi(W^{\perp} \setminus \{0\})$.
2. Se W é hiperbólico, então neste caso, c_1, c_2, c_3 são ortogonais ao plano que tem como ponto polar à $\pi(W^{\perp} \setminus \{0\})$.

4.3.1.2 Triplas coplanares ortogonais

Dada uma tripla coplanar ortogonal (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, vamos ter duas possibilidades, a primeira será considerar que uma geodésica complexa da tripla (c_1, c_2, c_3) seja ortogonal a só uma das outras duas geodésicas complexas (*Caso A*). A outra, será considerar que uma geodésica complexa da tripla (c_1, c_2, c_3) seja ortogonal as outras duas geodésicas complexas (*Caso B*).

CASO A.- Suponhamos que c_1 e c_2 sejam ortogonais. Chamaremos à (c_1, c_2, c_3) de tripla coplanar ortogonal do tipo A1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Sejam $v, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^{3,1}$ levantamentos de $x, y_1, y_2, y_3 \in \pi(V_+)$, como estamos supondo que c_1 e c_2 são ortogonais então temos que $y_1 \perp y_2$. Pode-se escolher tais levantamentos de tal forma que a matriz de Gram G associada à configuração polar seja a seguinte:

$$\begin{array}{c}
 v \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3 \\
 \begin{array}{c}
 v \\
 w_1 \\
 w_2 \\
 w_3
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 1 & 0 & r_{13} \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & r_{23} \\
 \hline
 0 & r_{13} & r_{23} & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} \tag{4.10}$$

onde $r_{13}, r_{23} > 0$.

A matriz dada em (4.10) será chamada matriz de Gram *canônica* para uma tripla coplanar ortogonal do tipo A1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Neste caso não pediremos que a tripla (c_1, c_2, c_3) seja regular já que esta propriedade é satisfeita de forma automática. De fato, se (c_1, c_2, c_3) não é regular implica que sua configuração polar $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ seja degenerada (ver Definição 2.5), assim C_i^\perp esta contido em um subespaço parabólico de dimensão complexa 3. Isto é c_1, c_2, c_3 interceptam-se em um ponto isotrópico, o que contradiz o fato que $c_1 \perp c_2$.

Teorema 4.7 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar ortogonal do tipo A1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e seja $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ sua configuração polar associada. Os d -invariantes $d(y_1, y_3), d(y_2, y_3)$ definem unicamente a classe de congruência por*

PU(3, 1) das triplas coplanares ortogonais do tipo A1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Demonstração: Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar ortogonal do tipo A1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e G sua matriz de Gram canônica (ver matriz 4.10):

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & r_{13} & r_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

Segue da definição do d -invariante que

$$d(y_1, y_3) = g_{24}g_{42} = r_{13}^2, \quad d(y_2, y_3) = g_{34}g_{43} = r_{23}^2$$

As igualdades implicam que $r_{13} = \sqrt{d(y_1, y_3)}$ e $r_{23} = \sqrt{d(y_2, y_3)}$. Assim, todas as entradas da matriz de Gram canônica G podem-se recuperar unicamente em termos dos d -invariantes $d(y_1, y_3), d(y_2, y_3)$. Como $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ é regular a afirmação segue da Proposição 2.2. ■

Agora estamos pronto para construir o espaço de módulos para triplas coplanares ortogonais do tipo A1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Denotemos por $\mathcal{M}_{A1}(3)$ o espaço de configurações de triplas coplanares ortogonais do tipo A1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, seja $[(c_1, c_2, c_3)] \in \mathcal{M}_{A1}(3)$ o ponto representado por (c_1, c_2, c_3) . Definimos o mapa:

$$\tau: \mathcal{M}_{A1}(3) \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

que associa à $[(c_1, c_2, c_3)]$ os invariantes $d(y_1, y_3)$ e $d(y_2, y_3)$.

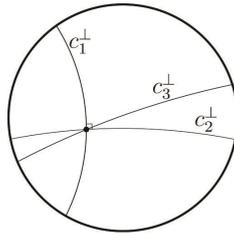
Seguindo o roteiro para a construção do espaço de módulos para o caso genérico (ver Teorema 4.6) temos o seguinte corolário:

Corolário 4.1 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_{A1}(3)$ de triplas coplanares ortogonais do tipo A1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é homeomorfo ao conjunto $\mathbb{M}_{A1}(3)$ de pontos em \mathbb{R}^2 definidos pelas seguintes condições:*

$$\mathbb{M}_{A1}(3) = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : r_i > 0, \quad 1 - r_1^2 - r_2^2 \leq 0\}.$$

Definição 4.11 *Chamaremos $\mathbb{M}_{A1}(3)$ o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_{A1}(3)$ de triplas coplanares ortogonais do tipo A1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

Observação 4.4 *No Corolário 4.1 a igualdade acontece se, e somente se, as geodésicas complexas coplanares c_1, c_2, c_3 se interceptam em um ponto $p \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*



Analogamente, supondo que c_2 e c_3 sejam ortogonais, chamaremos à (c_1, c_2, c_3) de tripla coplanar ortogonal do tipo A2 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

E supondo que c_1 e c_3 sejam ortogonais, chamaremos, chamaremos à (c_1, c_2, c_3) de tripla coplanar ortogonal do tipo A3 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

As matrizes de Gram canônicas para estes tipos de triplas de geodésicas complexas são dadas respectivamente por:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{12} & 1 & 0 \\ 0 & r_{13} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_{12} & 0 \\ 0 & r_{12} & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{23} & 1 \end{bmatrix}.$$

Denotaremos por $\mathcal{M}_{A_2}(3)$ o espaço de configurações de triplas coplanares ortogonais do tipo A2 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e por $\mathcal{M}_{A_3}(3)$ o espaço de configurações de triplas coplanares ortogonais do tipo A3 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Podemos construir o espaço de módulos $\mathbb{M}_{A_2}(3)$ e $\mathbb{M}_{A_3}(3)$ da mesma forma como foi feita a construção de $\mathbb{M}_{A_1}(3)$, e ter os seguintes corolários:

Corolário 4.2 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_{A_2}(3)$ de triplas coplanares ortogonais do tipo A2 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é homeomorfo ao conjunto $\mathbb{M}_{A_2}(3)$ de pontos em \mathbb{R}^2 definidos pelas seguintes condições:*

$$\mathbb{M}_{A_2}(3) = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : r_i > 0, \quad 1 - r_1^2 - r_2^2 \leq 0\}.$$

Corolário 4.3 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_{A_3}(3)$ de triplas coplanares ortogonais do tipo A3 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é homeomorfo ao conjunto $\mathbb{M}_{A_3}(3)$ de pontos em \mathbb{R}^2 definidos pelas seguintes condições:*

$$\mathbb{M}_{A_3}(3) = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : r_i > 0, \quad 1 - r_1^2 - r_2^2 \leq 0\}.$$

CASO B.- Suponhamos que $c_1 \perp c_2$ e $c_1 \perp c_3$. Chamaremos à (c_1, c_2, c_3) de tripla coplanar ortogonal do tipo B1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Sejam $v, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^{3,1}$ levantamentos da configuração polar $x, y_1, y_2, y_3 \in \pi(V_+)$, como estamos supondo que $c_1 \perp c_2$ e $c_1 \perp c_3$ então temos que $y_1 \perp y_2$ e $y_1 \perp y_3$. Pode-se escolher tais levantamentos de tal forma que a matriz de Gram G associada

à configuração polar da tripla seja a seguinte:

$$\begin{array}{c}
 v \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3 \\
 \begin{array}{c}
 v \\
 w_1 \\
 w_2 \\
 w_3
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & r_{23} \\
 \hline
 0 & 0 & r_{23} & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} \tag{4.11}$$

onde $r_{23} > 0$.

A matriz dada em (4.11) será chamada matriz de Gram *canônica* para uma tripla coplanar ortogonal do tipo B1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Neste caso não pediremos que a tripla de geodésicas (c_1, c_2, c_3) seja regular já que esta propriedade é satisfeita de forma automática. De fato, se (c_1, c_2, c_3) não é regular implica que sua configuração polar $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ seja degenerada (ver Definição 2.5), assim C_i^\perp está contido em um subespaço parabólico de dimensão complexa 3. Isto é c_1, c_2, c_3 interceptam-se em um ponto isotrópico, o que contradiz o fato que $c_1 \perp c_2$ ou que $c_1 \perp c_3$.

Teorema 4.8 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar ortogonal do tipo B1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e seja $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ sua configuração polar associada. O d -invariante $d(y_2, y_3)$ define unicamente a classe de congruência por PU(3, 1) das triplas coplanares ortogonais do tipo B1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

Demonstração: Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar ortogonal do tipo B1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e G sua matriz de Gram canônica (ver matriz 4.11):

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

Segue da definição do d -invariante que

$$d(y_2, y_3) = g_{34}g_{43} = r_{23}^2$$

Isto implica que $r_{23} = \sqrt{d(y_2, y_3)}$. Assim, todas as entradas da matriz de Gram canônica G podem-se recuperar unicamente a partir do d -invariante $d(y_2, y_3)$. Como $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ é regular a afirmação segue da Proposição 2.2. ■

Agora estamos pronto para construir o espaço de módulos para triplas coplanares ortogonais do tipo B1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Denotemos por $\mathcal{M}_{B1}(3)$ o espaço de configurações de triplas coplanares ortogonais do tipo B1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, seja $[(c_1, c_2, c_3)] \in \mathcal{M}_{A1}(3)$ o ponto representado por (c_1, c_2, c_3) . Definimos o mapa:

$$\tau: \mathcal{M}_{B1}(3) \longrightarrow \mathbb{R},$$

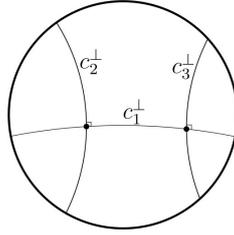
que associa à $[(c_1, c_2, c_3)]$ os invariantes $d(y_2, y_3)$.

Seguindo o roteiro para a construção do espaço de módulos para o caso genérico (ver Teorema 4.6) temos o seguinte corolário:

Corolário 4.4 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_{B1}(3)$ de triplas coplanares ortogonais do tipo B1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é homeomorfo ao conjunto $\mathbb{M}_{B1}(3)$ de pontos em \mathbb{R} definido por:*

$$\mathbb{M}_{B1}(3) = \{r \in \mathbb{R} : r > 1\}.$$

Definição 4.12 *Chamaremos $\mathbb{M}_{B1}(3)$ o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_{B1}(3)$ de triplas coplanares ortogonais do tipo B1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*



Analogamente, supondo que $c_2 \perp c_1$ e $c_2 \perp c_3$, chamaremos à (c_1, c_2, c_3) de tripla coplanar ortogonal do tipo B2 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

E supondo que $c_3 \perp c_1$ e $c_3 \perp c_2$, chamaremos à (c_1, c_2, c_3) de tripla coplanar ortogonal do tipo B3 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

As matrizes de Gram canônicas para estes tipos de triplas de geodésicas complexas são dadas respectivamente por:

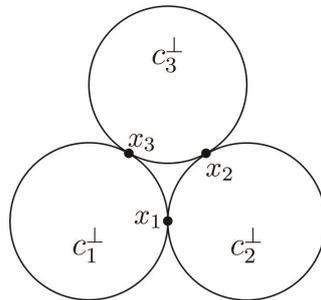
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_{13} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_{12} & 0 \\ 0 & r_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim como foi construído o espaço de módulos $\mathbb{M}_{B1}(3)$ pode-se construir da mesma forma os espaços de módulos $\mathbb{M}_{B2}(3)$ e $\mathbb{M}_{B3}(3)$ e mostrar que:

$$\mathbb{M}_{B2}(3) = \mathbb{M}_{B3}(3) = \{r \in \mathbb{R} : r > 1\}.$$

4.3.2 Triplas dois à dois coplanares de geodésicas complexas

Dada uma tripla dois à dois coplanar (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, consideremos as sub-duplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) obtidas a partir de (c_1, c_2, c_3) , para cada sub-dupla consideremos seu respectivo conjunto bi-ortogonal (ver tabela 4.1). As esferas polares no caso dois à dois coplanar tem a seguinte configuração:



Observação 4.5 *Sabe-se que dois pontos no espaço projetivo definem unicamente uma linha projetiva complexa, assim dos quatro pontos em cada esfera polar c_i^\perp só precisamos de dois pontos para recuperar c_i^\perp .*

Na figura (4.3.2) $x_1, x_2, x_3 \in \{p_{ij}, q_{ij}\}$, são pontos polares dos plano que contêm cada sub-dupla (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) , portanto cada plano x_i^\perp contém as geodésicas c_i e $c_{i+1} \pmod{3}$. Assim, pela observação dada acima temos que para cada tripla dois à dois coplanar de geodésicas complexas associamos três pontos positivos x_1, x_2, x_3 .

Definição 4.13 *Dada uma tripla dois à dois coplanar (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, o conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ dado acima será chamado de configuração polar associada à tripla dois à dois coplanar de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

Uma tripla dois à dois coplanar (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ será dita *tripla não ortogonal* se as geodésicas complexas c_i e c_j não são ortogonais, isto é $\langle v_i, v_j \rangle \neq 0$ para $i \neq j$, onde $\pi(v_i) = x_i$. Caso contrário (c_1, c_2, c_3) será chamada *tripla ortogonal*.

4.3.2.1 Triplas dois à dois coplanares não ortogonais

Dada uma tripla dois à dois coplanar não ortogonal (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, pode-se escolher levantamentos $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^{3,1}$ da configuração polar $\{x_1, x_2, x_3\} \in \pi(V_+)$ de tal forma que a matriz de Gram G associada à configuração

polar seja:

$$\begin{array}{c}
 v_1 \quad v_2 \quad v_3 \\
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 v_1 & 1 & r_{12} & r_{13} \\
 v_2 & r_{12} & 1 & r_{23}e^{i\theta} \\
 v_3 & r_{13} & r_{23}e^{-i\theta} & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} \tag{4.12}$$

onde $0 < r_{ij} < 1$ e $\theta \in (-\pi, \pi]$.

A matriz de Gram G (ver matriz 4.12) será denominada matriz de Gram *canônica* para uma tripla dois à dois coplanar não ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

É fácil ver que o conjunto dos levantamentos da configuração polar de uma tripla dois à dois coplanar não ortogonal de geodésicas complexas é linearmente independente, caso contrario $c_1 = c_2 = c_3$.

Teorema 4.9 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla dois à dois coplanar não ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e seja $\{x_1, x_2, x_3\}$ sua configuração polar associada. Os d -invariantes $d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), d(x_2, x_3)$ e o invariante angular $\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3)$ definem unicamente a classe de congruência por $\text{PU}(3, 1)$ das triplas dois á dois coplanares não ortogonais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

Demonstração: Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla dois á dois coplanar não ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e G sua matriz de Gram canônica (ver matriz 4.12):

$$G = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 1 & r_{23}e^{i\theta} \\ r_{13} & r_{23}e^{-i\theta} & 1 \end{bmatrix}.$$

Segue da definição do d -invariante que

$$d(x_1, x_2) = g_{12}g_{21} = r_{12}^2, \quad d(x_1, x_3) = g_{13}g_{31} = r_{13}^2, \quad d(x_2, x_3) = g_{23}g_{32} = r_{23}^2$$

e segue da definição do invariante angular que

$$\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3) = \arg(g_{12}g_{23}g_{31}) = \arg(r_{12}r_{23}e^{i\theta}r_{13}).$$

As primeiras igualdades implicam que $r_{ij} = \sqrt{d(x_i, x_j)}$. Como (c_1, c_2, c_3) é uma tripla não ortogonal, temos que $\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3) = \theta$. Assim, todas as entradas da matriz de Gram canônica G podem-se recuperar unicamente em termos dos d -invariantes $d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), d(x_2, x_3)$ e o invariante angular $\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3)$. Como o conjunto dos levantamentos da configuração polar são linearmente independentes a afirmação segue da Proposição 2.1. ■

Agora estamos pronto para construir o espaço de módulos para uma tripla dois à dois coplanar não ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla dois à dois coplanar não ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e $G = (g_{ij})$ sua matriz de Gram canônica associada (ver matriz 4.12). Aplicando as fórmulas que aparecem no Teorema 4.9, podemos recuperar todas as entradas de G em termos dos d -invariantes $d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), d(x_2, x_3)$ e o invariante angular $\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3)$. No que segue, vamos assumir que G possui as entradas expressas em termos de $d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), d(x_2, x_3)$ e $\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3)$.

Denotemos por $\mathcal{M}_0^{\text{cc}}(3)$ o espaço de configurações de triplas dois à dois coplanares não ortogonais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e seja $[(c_1, c_2, c_3)] \in \mathcal{M}_0^{\text{cc}}(3)$ o ponto representado por (c_1, c_2, c_3) . Definimos o mapa:

$$\tau: \mathcal{M}_0^{\text{cc}}(3) \longrightarrow \mathbb{R}^4, \tag{4.13}$$

que associa à $[(c_1, c_2, c_3)]$ os invariantes $d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), d(x_2, x_3)$ e $\mathbb{A}(x_1, x_2, x_3)$.

Teorema 4.10 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_0^{\text{cc}}(3)$ de triplas dois à dois coplanares não ortogonais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é homeomorfo ao conjunto $\mathbb{M}_0^{\text{cc}}(3)$*

de pontos em \mathbb{R}^4 definidos pelas seguintes condições:

$$\mathbb{M}_0^{\text{cc}}(3) = \{(r_1, r_2, r_3, \theta) \in \mathbb{R}^4 : 0 < r_i < 1, \theta \in (-\pi, \pi]\}.$$

Demonstração: Segue das fórmulas que aparecem na demonstração do Teorema 4.9 que o mapa τ em (4.13) define um mapa $\tau: \mathcal{M}_0^{\text{cc}}(3) \rightarrow \mathbb{M}_0^{\text{cc}}(3)$. Primeiramente, mostramos que o mapa $\tau: \mathcal{M}_0^{\text{cc}}(3) \rightarrow \mathbb{M}_0^{\text{cc}}(3)$ é sobrejetivo. Dado $(r_1, r_2, r_3, \theta) \in \mathbb{M}_0^{\text{cc}}(3)$, usando as fórmulas que aparecem na demonstração do Teorema 4.9, definimos g_{12}, g_{13}, g_{23} em termos de (r_1, r_2, r_3, θ) , também fixamos $g_{ii} = 1$. Isto define G completamente. Portanto, isto implica que G é a matriz de Gram canônica para a configuração polar de alguma tripla dois à dois coplanar não ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Isto prova que τ é sobrejetiva.

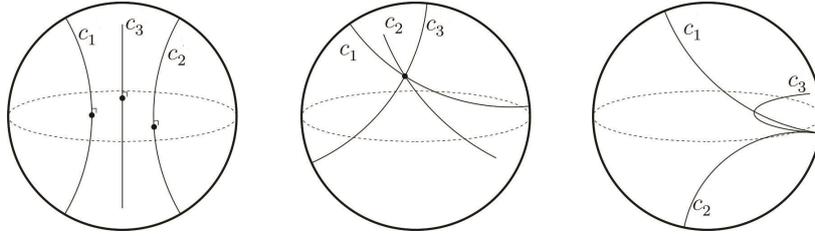
Por outro lado, segue do Teorema 4.9 que o mapa τ é injetiva. É claro que $\tau: \mathcal{M}_0^{\text{cc}}(3) \rightarrow \mathbb{M}_0^{\text{cc}}(3)$ é um homeomorfismo uma vez que $\mathbb{M}_0^{\text{cc}}(3)$ seja munido com a topologia induzida de \mathbb{R}^4 . ■

Definição 4.14 Chamaremos $\mathbb{M}_0^{\text{cc}}(3)$ o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_0^{\text{cc}}(3)$ de triplas dois à dois coplanares não ortogonais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Observação 4.6 Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla dois à dois coplanar não ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e seja $\{x_1, x_2, x_3\}$ sua configuração polar associada. Se $(r_1, r_2, r_3, \theta) \in \mathbb{M}_0^{\text{cc}}(3)$ é a representação de (c_1, c_2, c_3) no espaço de módulos, então:

1. c_1, c_2, c_3 são ultraparalelas se $1 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + 2r_1r_2r_3 \cos \theta < 0$.
2. c_1, c_2, c_3 são concorrentes se $1 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + 2r_1r_2r_3 \cos \theta > 0$.
3. c_1, c_2, c_3 são assintóticas se $1 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + 2r_1r_2r_3 \cos \theta = 0$.

De fato, o $\det(G) = 1 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + 2r_1r_2r_3 \cos \theta$ e pelas condições de assinatura de G temos que o $\det(G) < 0$ se $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1, v_2, v_3\}$ é hiperbólico, $\det(G) > 0$ se W é elíptico e $\det(G) = 0$ se W é parabólico.



4.3.2.2 Triplas dois à dois coplanares ortogonais

Dada uma tripla dois à dois coplanar ortogonal (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, pode-se escolher levantamentos $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^{3,1}$ da configuração polar $\{x_1, x_2, x_3\} \in \pi(V_+)$ de tal forma que a matriz de Gram G associada à configuração polar seja:

$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 v_1 & v_2 & v_3 \\
 \hline
 1 & r_{12} & r_{13} \\
 r_{12} & 1 & r_{23} \\
 r_{13} & r_{23} & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (4.14)$$

onde $0 \leq r_{ij} < 1$ e $\theta \in (-\pi, \pi]$, tal que pelo menos um $r_{ij} = 0$.

A matriz de Gram G (ver matriz 4.14) será denominada matriz de Gram *canônica* para uma tripla dois à dois coplanar ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Como foi visto antes, o conjunto dos levantamentos da configuração polar de uma tripla dois à dois coplanar ortogonal de geodésicas complexas é linearmente independente.

Denotemos por $\mathcal{M}_1^{\text{cc}}(3)$ o espaço de configurações de triplas dois à dois coplanares ortogonais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$

Seguindo o roteiro das demonstrações dos Teoremas 4.9 e 4.10 temos os seguintes resultados:

Teorema 4.11 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla dois à dois coplanar ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e seja $\{x_1, x_2, x_3\}$ sua configuração polar associada. Os d -invariantes $d(x_1, x_2), d(x_1, x_3), d(x_2, x_3)$ definem unicamente a classe de congruência por $\text{PU}(3, 1)$ das triplas dois á dois coplanares ortogonais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

Teorema 4.12 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_1^{\text{cc}}(3)$ de triplas dois à dois coplanares não ortogonais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é homeomorfo ao conjunto $\mathbb{M}_1^{\text{cc}}(3)$ de pontos em \mathbb{R}^3 definidos pelas seguintes condições:*

$$\mathbb{M}_1^{\text{cc}}(3) = \{(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r_i < 1, \text{ pelo menos um } r_i = 0\}.$$

Definição 4.15 *Chamaremos $\mathbb{M}_1^{\text{cc}}(3)$ o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_1^{\text{cc}}(3)$ de triplas dois à dois coplanares ortogonais de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.*

Observação 4.7 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla dois à dois coplanar ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, e seja $\{x_1, x_2, x_3\}$ sua configuração polar associada. Se $(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{M}_1^{\text{cc}}(3)$ é a representação de (c_1, c_2, c_3) no espaço de módulos, então, c_1, c_2, c_3 são concorrentes e $1 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 > 0$, onde pelo menos um $r_i = 0$.*

De fato, o $\det(G) = 1 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + 2r_1r_2r_3$, mas como pelo menos um $r_i = 0$, temos que $\det(G) = 1 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2$. Por outro lado, pelo menos duas geodésicas são ortogonais, isto implica que c_1, c_2, c_3 são concorrentes e o $\det(G) > 0$ já que $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_1, v_2, v_3\}$ é elíptico.

Referências Bibliográficas

- [1] W. Barrera, A. Cano, J. P. Navarrete, and J. Seade. Complex Kleinian groups. In *Geometry, groups and dynamics*, volume 639 of *Contemp. Math.*, pages 1-41. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [2] R. L. Bishop and B. O'Neill. Manifolds of negative curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 145:1-49, 1969.
- [3] U. Brehm and B. Et-Taoui. Congruence criteria for finite subsets of complex projective and complex hyperbolic spaces. *Manuscripta Math.*, 96(1):81-95, 1998.
- [4] S. S. Chen and L. Greenberg. Hyperbolic spaces, 49-87, 1974.
- [5] H. Cunha, F. Dutenhefner, N. Gusevskii, and R. S. Thebaldi. The moduli space of complex geodesics in the complex hyperbolic plane. *J. Geom. Anal.*, 22(2):295-319, 2012.
- [6] H. Cunha and N. Gusevskii. On the moduli space of quadruples of points in the boundary of complex hyperbolic space. *Transform. Groups*, 15(2):261-283, 2010.
- [7] H. Cunha and N. Gusevskii. The moduli space of points in the boundary of complex hyperbolic space. *J. Geom. Anal.*, 22(1):1-11, 2012.

- [8] D. D'Alessandro. *Introduction to quantum control and dynamics*. Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.
- [9] D. B. A. Epstein. Complex hyperbolic geometry. In *Analytical and geometric aspects of hyperbolic space (Coventry/Durham, 1984)*, volume 111 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 93-111. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [10] W. Fenchel. *Elementary geometry in hyperbolic space*, volume 11 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1989. With an editorial by Heinz Bauer.
- [11] W. M. Goldman. *Complex hyperbolic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999. Oxford Science Publications.
- [12] J. Hakim and H. Sandler. The moduli space of $n + 1$ points in complex hyperbolic n -space. *Geom. Dedicata*, 97:3-15, 2003. Special volume dedicated to the memory of Hanna Miriam Sandler (1960-1999).
- [13] R. Höfer. m -point invariants of real geometries. *Beiträge Algebra Geom.*, 40(1):261-266, 1999.
- [14] A. Pratoussevitch. Traces in complex hyperbolic triangle groups. *Geom. Dedicata*, 111:159-185, 2005.
- [15] J. G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [16] W. Scharlau. *Quadratic and Hermitian forms*, volume 270 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.