UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMATICA

Métodos Topológicos e Variacionais para Problemas de Dirichlet com $p-$Laplaciano

Segundo Manuel Argomedo Salirrosas

Belo Horizonte - MG
10 de agosto de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Segundo Manuel Argomedo Salirrosas

Orientador: Hamilton Prado Bueno

Métodos Topológicos e Variacionais para Problemas de Dirichlet com $p-$Laplaciano

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEX) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
10 de agosto de 2017

Agradecementos

Aos meus pais, Rosa e Segundo, agradeço pelo amor incondicional, por me terem dado educação. Agradeço pela esperança que sempre me deram, confiança que em mim depositaram e certeza de que eu poderia chegar até aqui.

Ao meu orientador Hamilton Prado Bueno, exemplo a ser seguido como docente, pela sua competência, caráter, paciência, simplicidade e seriedade com que se dedica às suas atividades, e acima de tudo pelo exemplo de ser humano. Agradeço não só pela orientação deste trabalho, mas pela confiança em mim depositada e pelas palavras de conforto nos momentos de apreensão vividos ao longo do mestrado, e por mostrar-se sempre amigo e disponível em todos os momentos.

Aos professores da UFMG, tão importantes em minha formação, agradeço o quanto ensinaram e ajudaram a realizar.

A todos meus amigos, peruanos e brasileiros, que compartilharam comigo tempo de estudo, conversas e brincadeiras, tornando estes anos de estudos mais leves.

Às secretárias do programa de pós graduação em Matemática da UFMG, Andrea e Kelly, pelo auxílio que prestaram e ainda prestam a mim, com total profissionalismo, dedicação e carisma.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Finalmente, agradeço a todos que direta ou indiretamente me ajuda-ram a terminar essa dissertação.

“Saber encontrar a alegria na alegria dos outros, é o segredo da felicidade.”

Georges Bernanos

Abstract

In this paper we study the p-Laplacian problem

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) & = & f(x,u) & \text{in } \Omega, \\ u & = & 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

where $1 < p < \infty$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain. By applying variational and topological methods, we prove existence and multiplicity of solutions under various hypotheses.

key words: p-Laplacian, Duality mapping, degree theory of Leray-Schauder, variational methods, Mountain Pass theorem.

Nomenclatura

$\Delta_p u = \mathrm{div}(\lvert\nabla u\rvert^{p-2}\nabla u)$	Operador p-Laplaciano
$\hookrightarrow$	Imersão de espaços
$\mathrm{sign}(x)$	Sinal de x
$\partial\psi$	Subdiferencial de ψ
$\rightarrow$	Convergência forte
$\rightharpoonup$	Convergência fraca
$\lVert\cdot\rVert$	Norma em X
$\lVert\cdot\rVert_{0,p}$	Norma em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$
$\lVert\cdot\rVert_{1,p}$	Norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$
p^*	Expoente conjugado de Sobolev de p
$u_+ = \max\{u, 0\}$	Parte positiva da função $u : \Omega \to \mathbb{R}$
$u_- = \max\{-u, 0\}$	Parte negativa da função $u : \Omega \to \mathbb{R}$
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$
$W^{1,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é obter resultados de existência para problemas de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Aqui $\Delta_p u = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$, $1 < p < \infty$ é o p-Laplaciano, Ω um aberto em $\mathbb{R}^N$ e $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory que satisfaz algumas condições de crescimento.

Nossa abordagem apresenta o operador $-\Delta_p$ como uma aplicação dual entre $W_0^{1,p}(\Omega)$ e seu dual $W^{-1,p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, correspondente à função de normalização $\varphi(t) = t^{p-1}$. Esta ideia vêm do livro de Lions [19] e tem-se mostrado muito frutífera.

Assim, a primeira seção do Capítulo 1 deste trabalho apresenta resultados abstratos sobre a aplicação dual, enunciando e aplicando um resultado fundamental devido a F. Browder; em seguida, sua segunda seção apresenta resultados básicos sobre os espaços $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Muitos desses resultados estão relacionados com propriedades que serão revisados no Apêndice dessa dissertação: a teoria básica de funcionais diferenciáveis, da Análise Funcional e de espaços de Sobolev, o grau de Leray-Schauder, a subdiferencial e o operador de Nemytskii.

As propriedades do operador de Nemytskii $(N_f u)(x) = f(x, u(x))$, gerado pela função de Carathéodory f serão fundamentais no desenvolvimento do Capítulo 2 desta dissertação.

Nele apresentaremos métodos fundamentais da teoria de equações diferenciais parciais elípticas não-lineares, sempre adequando as hipóteses assumidas no problema (1) à aplicabilidade da técnica apresentada: A) o método topológico de Leray-Schauder (sob a forma de estimativa a priori, uniformemente em relação a $\lambda \in [0,1]$, do conjunto de soluções da equação $u = \lambda(-\Delta_p)^{-1}N_f u$ com $(-\Delta_p)^{-1}N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ compacto); B) Em seguida, ilustraremos o método de minimização direta; C) Esse será seguido pela apresentação do conhecido Teorema do passo da montanha, de Ambrosetti e Rabinowitz. Mostraremos, por meio de um exemplo, a necessidade da condição de Palais-Smale na formulação deste resultado e, utilizando a caracterização variacional do primeiro autovalor de $-\Delta_p$ sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$, mostraremos a existência de duas soluções (uma positiva, outra negativa) para o problema (1) sob hipóteses adequadas; D) Finalmente, utilizaremos uma versão do Teorema do passo da montanha para obter múltiplas soluções do problema (1).

Em resumo, essa dissertação apresenta uma variedade de técnicas importantes no estudo de problemas envolvendo o operador p-Laplaciano. Sua principal referência é o artigo de G. Dinca, P. Jebelean e J. Mawhin [12]. Completamos a apresentação deste artigo utilizando uma série de referências auxiliares que fornecem, sejam pré-requisitos para a leitura de [12], sejam resultados complementares.

Capítulo 1

O p-Laplaciano como aplicação dual

Neste capítulo interpretaremos o operador $-\Delta_p$, $1 < p < \infty$, como uma aplicação dual, isto é, o veremos como uma aplicação $J_\varphi : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, correspondente à função de normalização $\varphi(t) = t^{p-1}$.

Esta interpretação, originada no conhecido livro de Lions [19], tem a vantagem de permitir aplicar os resultados gerais válidos para a aplicação dual no caso particular do p-Laplaciano. Por exemplo, a sobrejetividade da aplicação dual (que é consequência de um resultado bem conhecido de Browder - veja, por exemplo [7]), garante a existência de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $-\Delta_p u = f$, se $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Em outras palavras, se $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ for dado, estamos definindo a solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no sentido de $W^{-1,p'}(\Omega)$ do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

A maioria dos conceitos usados neste trabalho podem ser encontrados no apêndice.

Para a conveniência do leitor, apresentaremos resultados e definições básicas relativas à aplicação dual. Algumas das demonstrações serão omitidas, mas aquelas mais diretamente relacionadas com o nosso trabalho serão apresentadas.

1.1 Resultados abstratos sobre a aplicação dual

Na sequência, X sempre denotará um espaço de Banach *real*, X^* representa seu dual e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a aplicação de dualidade entre X^* e X. A norma nos espaços X e X^* será representada pelo mesmo símbolo $\| \cdot \|$. Denotaremos por $\mathcal{P}(Y)$ o conjunto das partes do conjunto Y.

Consideremos uma aplicação $A \colon X \to \mathcal{P}(X^*)$ que associa a cada elemento $x \in X$ um subconjunto $Ax \in \mathcal{P}(X^*)$. Definimos o *domínio* $\mathcal{D}(A)$ de A por

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X \,:\, Ax \neq \emptyset\}$$

e a *imagem* de A, $\mathcal{R}(A)$ por

$$\mathcal{R}(A) = \bigcup_{x \in \mathcal{D}(A)} Ax.$$

Definição 1.1. *A aplicação $A \colon \mathcal{D}(A) \to \mathcal{R}(A)$ é **monótona** se*

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A),\ x_1^* \in Ax_1,\ x_2^* \in Ax_2.$$

Exemplo 1.2. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $(\cdot,\cdot)$ o produto interno em $\mathcal{H}$. Então, identificando $\mathcal{H}$ com seu dual por meio do Teorema de Representação de Riesz, ao considerarmos $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ definida por $A(x)(\cdot) = (x,\cdot)$, isto é, $A(x)(y) = (x,y)$, temos que A é uma aplicação monótona.*

De fato, dados $x,y \in \mathcal{H}$, então $A(y-x)(\cdot) = \langle y-x,\cdot\rangle$, de modo que

$$A(y-x)(y-x) = \langle y-x, y-x\rangle = \|y-x\|^2 \geq 0. \qquad \triangleleft$$

Exemplo 1.3. *Sejam X um espaço de Banach e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função convexa e Gâteaux diferenciável (ver Apêndice A.1). Então a aplicação $x \mapsto f'_G(x)$ é monótona. De fato, se $0 < t < 1$, então*

$$\frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t} \leq \frac{(1-t)f(x) + tf(y) - f(x)}{t} = f(y) - f(x).$$

Daí decorre que $\langle f'_G(x), y-x\rangle \leq f(y) - f(x)$ para quaisquer $x,y \in X$. Assim, se $x^* = f'_G(x)$ e $y^* = f'_G(y)$, então

$$\langle x^*, y-x\rangle \leq f(y) - f(x) \quad e \quad -\langle y^*, y-x\rangle = \langle y^*, x-y\rangle \leq f(x) - f(y).$$

Somando essas duas desigualdades, obtemos $\langle x^* - y^*, y-x\rangle \leq 0$ e, portanto, $\langle x^* - y^*, x-y\rangle \geq 0$. $\triangleleft$

Definição 1.4. *Uma função contínua $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma **função de normalização**, se φ for estritamente crescente, $\varphi(0) = 0$ e $\lim\limits_{r\to\infty} \varphi(r) = \infty$.*

Definição 1.5. *Uma **aplicação de dualidade** correspondente à função de normalização φ é a aplicação $J_\varphi\colon X \to \mathcal{P}(X^*)$ definida por*

$$J_\varphi x = \{x^* \in X^* \,:\, \langle x^*, x\rangle = \varphi(\|x\|)\|x\|,\ \|x^*\| = \varphi(\|x\|)\}.$$

Lema 1.6. *$D(J_\varphi) = X$.*

Demonstração. Vamos mostrar que para cada $x \in X$, $J_\varphi x \neq \emptyset$.

Se $x = 0$, então para todo $x^* \in J_\varphi 0$ temos $\|x^*\| = \varphi(\|x\|) = \varphi(0) = 0$. Assim $x^* = 0$ é o único elemento de $J_\varphi 0$.

Para $x \neq 0$ fixo, consideremos o subespaço de X gerado por x

$$\mathbb{R}x = \{y \in X \,:\, y = \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

e o funcional $f : \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(\lambda x) = \lambda\varphi(\|x\|)\|x\|.$$

Claramente f é linear. Como

$$\|f\| = \sup_{\|\lambda x\|=1} |f(\lambda x)| = \sup_{\|\lambda x\|=1} \big|\lambda\varphi(\|x\|)\|x\|\big| = \sup_{\|\lambda x\|=1} \big|\varphi(\|x\|)\|\lambda x\|\big| = \varphi(\|x\|),$$

concluímos que $\|f\| = \varphi(\|x\|)$, mostrando a continuidade de f.

Aplicando o Teorema de Hahn-Banach, existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*\big|_{\mathbb{R}x} = f$ e $\|x^*\| = \|f\| = \varphi(\|x\|)$. Assim $x^* \in J_\varphi x$ e portanto $J_\varphi x \neq \emptyset$. ∎

Note que, para cada $x \in X$, não podemos garantir *unicidade* de $x^* \in J_\varphi x$. (O Teorema de Hahn-Banach não garante unicidade.)

Algumas das principais propriedades da aplicação dual estão expressas no próximo resultado.

Teorema 1.7. *Se φ for uma função de normalização então:*

(i) *para cada $x \in X$, $J_\varphi x$ é um subconjunto limitado, fechado e convexo em X^*;*

(ii) *J_φ é monótona, isto é,*

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \geq \Big(\varphi(\|x_1\|) - \varphi(\|x_2\|)\Big)\Big(\|x_1\| - \|x_2\|\Big) \geq 0 \tag{1.1}$$

para cada $x_1, x_2 \in X$ e $x_1^* \in J_\varphi x_1$, $x_2^* \in J_\varphi x_2$;

(iii) *para cada $x \in X$, seja $\psi(x) = \int_0^{\|x\|} \varphi(t)\mathrm{d}t$. Então $J_\varphi x = \partial\psi(x)$, em que $\partial\psi : X \to \mathcal{P}(X^*)$ é a subdiferencial de ψ:*

$$\partial\psi(x) = \Big\{x^* \in X^* : \psi(y) - \psi(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle \text{ para todo } y \in X\Big\}.$$

Demonstração. Claramente $J_\varphi x$ é limitado pois, se $x^* \in J_\varphi x$, então $\|x^*\| = \varphi(\|x\|)$. Suponhamos que, para $(x_n^*) \subset J_\varphi x$, tenhamos $x_n^* \to y^*$ em X^*. Como $\|x_n^*\| = \varphi(\|x\|)$ para todo n, temos

$$\langle y^*, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n^*, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \varphi(\|x\|)\|x\| = \varphi(\|x\|)\|x\|.$$

A continuidade da norma garante que

$$\|y^*\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n^*\| = \varphi(\|x\|),$$

o que mostra que $y^* \in J_\varphi x$. Sejam $x_1^*, x_2^* \in J_\varphi x$ e $\lambda \in [0,1]$. Então

$$\begin{aligned}
\langle \lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*, x\rangle &= \langle \lambda x_1^*, x\rangle + \langle (1-\lambda)x_2^*, x\rangle \\
&= \lambda \langle x_1^*, x\rangle + (1-\lambda)\langle x_2^*, x\rangle \\
&= \lambda\varphi(\|x\|)\|x\| + (1-\lambda)\varphi(\|x\|)\|x\| \\
&= \varphi(\|x\|)\|x\|.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi(\|x\|) &= \left\langle \lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \leq \sup_{\|y\|=1} \langle \lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*, y\rangle \\
&= \|\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*\| \\
&\leq \|\lambda x_1^*\| + \|(1-\lambda)x_2^*\| = \lambda\varphi(\|x\|) + (1-\lambda)\varphi(\|x\|) \\
&= \varphi(\|x\|)
\end{aligned}$$

Portanto $\|\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*\| = \varphi(\|x\|)$ e assim $\lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^* \in J_\varphi x$ para todo $\lambda \in [0,1]$. A prova de (i) está completa.

Para mostrar (ii), considere $x_1, x_2 \in X$ e $x_1^* \in J_\varphi x_1$, $x_2^* \in J_\varphi x_2$. Então

$$\begin{aligned}\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle &= \langle x_1^*, x_1\rangle - \langle x_1^*, x_2\rangle - \langle x_2^*, x_1\rangle + \langle x_2^*, x_2\rangle \\ &= \varphi(\|x_1\|)\|x_1\| - \langle x_1^*, x_2\rangle - \langle x_2^*, x_1\rangle + \varphi(\|x_2\|)\|x_2\|.\end{aligned}$$

Para $i \neq j$, $|\left\langle x_i^*, x_j\right\rangle| \leq \|x_i^*\|\,\|x_j\|$, de modo que $-\left\langle x_i^*, x_j\right\rangle \geq -\|x_i^*\|\,\|x_j\|$ e assim

$$\begin{aligned}\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle &\geq \varphi(\|x_1\|)\|x_1\| - \|x_1^*\|\,\|x_2\| - \|x_2^*\|\,\|x_1\| + \varphi(\|x_2\|)\|x_2\| \\ &= \varphi(\|x_1\|)\|x_1\| - \varphi(\|x_1\|)\|x_2\| - \varphi(\|x_2\|)\|x_1\| + \varphi(\|x_2\|)\|x_2\| \\ &= \varphi(\|x_1\|)\big(\|x_1\| - \|x_2\|\big) - \varphi(\|x_2\|)\big(\|x_1\| - \|x_2\|\big) \\ &= \big(\varphi(\|x_1\|) - \varphi(\|x_2\|)\big)\big(\|x_1\| - \|x_2\|\big).\end{aligned}$$

Se $\|x_1\| = \|x_2\|$ então $\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle \geq 0$. Se $\|x_1\| \neq \|x_2\|$, então $\|x_1\| > \|x_2\|$ ou $\|x_1\| < \|x_2\|$. Em qualquer dos casos, ambos os parênteses têm o mesmo sinal (pois φ é estritamente crescente). Assim,

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle \geq 0,$$

provando (ii).

Agora mostraremos que todo $x^* \in J_\varphi x$ está em $\partial\psi(x)$. Suponhamos inicialmente que $\|x\| < \|y\|$.

Seja $F : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida por $F(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$. Então $\psi(x) = F(\|x\|)$. Decorre da aplicação do Teorema do Valor Médio que

$$\psi(y) - \psi(x) = F(\|y\|) - F(\|x\|) = F'(\xi)\big(\|y\| - \|x\|\big) = \varphi(\xi)\big(\|y\| - \|x\|\big), \tag{1.2}$$

em que $\xi \in (\|x\|, \|y\|)$. Como φ é estritamente crescente,

$$\begin{aligned}\psi(y) - \psi(x) &\geq \varphi(\|x\|)\big(\|y\| - \|x\|\big) = \|x^*\|\|y\| - \|x^*\|\|x\| \\ &= \|x^*\|\|y\| - \langle x^*, x\rangle \\ &\geq \langle x^*, y\rangle - \langle x^*, x\rangle = \langle x^*, y - x\rangle\end{aligned}$$

mostrando que $\psi(y) - \psi(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle$. Se tivermos $\|x\| = \|y\|$, aplicando (1.2) a $y = (1+\epsilon)x$ e tomando o limite quando $\epsilon \to 0^+$, também temos o resultado. O caso $\|y\| < \|x\|$ é semelhante.[1] Portanto, provamos que $J_\varphi x \subset \partial\psi(x)$.

Para mostrar a inclusão contrária, consideremos $x^* \in \partial\psi(x)$. Primeiro mostraremos que $\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|$; depois mostraremos que $\varphi(\|x\|) = \|x^*\|$.

Uma vez que $|\langle x^*, x\rangle| \leq \|x^*\|\|x\|$, para concluirmos que $\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|$, basta mostrarmos que $\|x^*\|\|x\| \leq \langle x^*, x\rangle$. Se tivermos $\|x\| = \|y\|$, como

$$0 = F(\|y\|) - F(\|x\|) = \psi(y) - \psi(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle = \langle x^*, y\rangle - \langle x^*, x\rangle,$$

concluímos que

$$\langle x^*, y\rangle \leq \langle x^*, x\rangle, \qquad (\|x\| = \|y\|). \tag{1.3}$$

[1] $\psi(x) - \psi(y) = \varphi(\xi)(\|x\| - \|y\|) \leq \varphi(\|x\|)(\|x\| - \|y\|) = \langle x^*, x\rangle - \|x^*\|\|y\| \leq \langle x^*, x\rangle - \langle x^*, y\rangle = \langle x^*, x - y\rangle$. O resultado é obtido ao se multiplicar a desigualdade por -1.

Daí decorre que[2]

$$\|x^*\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x^*, y\rangle| \leq \sup_{\|y\|=1} |\langle x^*, x\rangle| = \langle x^*, x\rangle. \tag{1.4}$$

Agora vamos mostrar que $\varphi(\|x\|) = \|x^*\|$.

Para isso, consideremos inicialmente o caso $x = 0$. Para $y \in X$ considere $t > 0$. Então

$$\langle x^*, ty\rangle = \langle x^*, ty - 0\rangle \leq \psi(ty) - \psi(0) = F(0 + t\|y\|) - F(0).$$

Trocando y por $-y$, concluímos que $|\langle x^*, ty\rangle| \leq F(0 + t\|y\|) - F(0)$. Assim,

$$\|x^*\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x^*, y\rangle| \leq \frac{F(0+t) - F(0)}{t}.$$

Portanto

$$\|x^*\| \leq \lim_{t\to 0} \frac{F(0+t) - F(0)}{t} = F'(0) = \varphi(0) = 0$$

e nossa afirmação está provado no caso $x = 0$.

Se $x \neq 0$, considere $y = \frac{tx}{\|x\|}$ com $t > 0$. Então, decorre de (1.4) que

$$\begin{aligned} F(t) - F(\|x\|) &= \psi(y) - \psi(x) \\ &\geq \langle x^*, y - x\rangle = \left\langle x^*, (t - \|x\|)\frac{x}{\|x\|} \right\rangle \\ &= (t - \|x\|)\left\langle x^*, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle, \\ &= (t - \|x\|)\|x^*\|. \end{aligned}$$

Considerando os casos $t > \|x\|$ e $t < \|x\|$, concluímos que temos

$$\|x^*\| \leq \frac{F(t) - F(\|x\|)}{t - \|x\|} \leq \|x^*\|.$$

O resultado decorre ao tomarmos o limite com t tendendo a $\|x\|$, pois $F'(\|x\|) = \varphi(\|x\|)$. Mostramos assim que $\varphi(\|x\|) = \|x^*\|$ e concluímos a demonstração de (iii). ■

Teorema 1.8. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função convexa, Gâteaux diferenciável em $x \in X$. Então $\partial f(x)$ tem um só elemento, a saber, $x^* = f'(x)$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ e $t \in (0, 1]$. Como f é convexa temos que

$$f(x + t(y - x)) = f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x) = t\,(f(y) - f(x)) + f(x).$$

Logo,

$$\frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x).$$

Como f é Gâteaux diferenciável, decorre que

$$\left\langle f'(x), y - x \right\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x),$$

[2]Note que $\langle x^*, x\rangle \geq 0$ como consequência da definição da subdiferencial, ao tomarmos $y = 0$.

mostrando que $f'(x) \in \partial f(x)$.

Agora seja $x^* \in \partial f(x)$. Então para cada $y \in X$ e $t > 0$,

$$f(x+ty) - f(x) \geq \langle x^*, x+ty-x \rangle = \langle x^*, ty \rangle = t \langle x^*, y \rangle,$$

de modo que

$$\left\langle f'(x), y \right\rangle = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} \geq \langle x^*, y \rangle,$$

de onde decorre que $\langle f'(x) - x^*, y \rangle \geq 0$.

Analogamente, se $t < 0$, obtemos $\langle f'(x) - x^*, y \rangle \leq 0$.

Concluímos que

$$\left\langle f'(x) - x^*, y \right\rangle = 0, \quad \text{para todo } y \in X,$$

o que mostra que $f'(x) = x^*$. ■

O Teorema 1.8 será repetidamente utilizado na sequência deste trabalho.

A geometria do espaço X (ou X^*) fornece novas propriedades da aplicação dual. É por isso que relembramos as seguintes definições: (ver por exemplo Diestel [11])

Definição 1.9. *O espaço normado X é*

(a) ***uniformemente convexo*** *se, para cada $\varepsilon \in (0,2]$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \varepsilon$ então $\|x+y\| \leq 2(1-\delta(\varepsilon))$;*

(b) ***localmente uniformemente convexo*** *se, de $\|x\| = \|x_n\| = 1$ e $\|x_n + x\| \to 2$ quando $n \to \infty$, resulta que $x_n \to x$ (fortemente em X);*

(c) ***estritamente convexo*** *se, para cada $x, y \in X$ com $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$ e $\lambda \in (0,1)$, temos $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$.*

Exemplo 1.10. *Seja H um espaço com produto interno $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$. É fácil ver que vale a identidade do paralelogramo*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|v\|^2, \quad \forall\, u, v \in H.$$

Decorre da identidade do paralelogramo que H é uniformemente convexo. De fato, se $\|u\| = \|v\| = 1$, $\varepsilon > 0$ e $\|u - v\| \geq \varepsilon$, então

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 = 1 - \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

e portanto

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\| \leq 1 - \delta, \quad \text{em que} \quad \delta = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad \triangleleft$$

Teorema 1.11. *Seja X um espaço de Banach. As seguintes implicações são válidas:*

X uniformemente convexo $\Rightarrow$ X localmente uniformemente convexo $\Rightarrow$ X estritamente convexo.

Para a demonstração deste resultado, veja Diestel [11].

O próximo resultado é muito importante. Sua demonstração pode ser encontrado, por exemplo, em Botelho, Pellegrino e Teixeira [5].

Teorema 1.12 (Pettis-Milman). *Se o espaço de Banach X for uniformemente convexo então X é reflexivo.*

De agora em diante, φ será uma função de normalização.

Lema 1.13. *Se o espaço de Banach X for estritamente convexo então, para cada $x^* \in X^* \setminus \{0\}$, existe no máximo um elemento $x \in X$, com $\|x\| = 1$, tal que $\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|$.*

Demonstração. Suponhamos que existam dois pontos distintos, x_1 e x_2. Uma vez que X é estritamente convexo, se $0 < \lambda < 1$, então

$$\begin{aligned}\|x^*\| &= \lambda \langle x^*, x_1\rangle + (1-\lambda)\langle x^*, x_2\rangle = \langle x^*, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\rangle \\ &\leq \|x^*\| \cdot \|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\| < \|x^*\|,\end{aligned}$$

o que é uma contradição. ∎

Proposição 1.14.

(i) *Se o espaço de Banach X for estritamente convexo, então J_φ é estritamente monótona:*

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle > 0$$

para todos $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ e $x_1^* \in J_\varphi x_1$, $x_2^* \in J_\varphi x_2$.

Em particular, $J_\varphi x_1 \cap J_\varphi x_2 = \emptyset$ se $x_1 \neq x_2$.

(ii) *Se X^* for estritamente convexo, então $\operatorname{card}(J_\varphi x) = 1$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Suponhamos que existam $x_1, x_2 \in X$ e $x_1^* \in J_\varphi x_1$, $x_2^* \in J_\varphi x_2$, com $x_1 \neq x_2$, satisfazendo

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle = 0. \tag{1.5}$$

Como

$$0 = \langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle \geq \Big(\varphi(\|x_1\|) - \varphi(\|x_2\|)\Big)\Big(\|x_1\| - \|x_2\|\Big) \geq 0,$$

concluímos que $\|x_1\| = \|x_2\|$. Como $x_1 \neq x_2$ e $\|x_1\| = \|x_2\|$, concluímos que $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$.

Logo, dividindo a equação (1.5) por $\|x_1\| = \|x_2\|$, obtemos

$$\begin{aligned}0 &= \left\langle x_1^* - x_2^*, \frac{x_1}{\|x_1\|} - \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\rangle \\ &= \left[\varphi(\|x_1\|) - \left\langle x_1^*, \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\rangle\right] + \left[\varphi(\|x_2\|) - \left\langle x_2^*, \frac{x_1}{\|x_1\|}\right\rangle\right]\end{aligned}$$

e, como decorre da desigualdade (1.3) que ambos os colchetes não são negativos,[3] temos

$$\|x_1^*\| = \varphi(\|x_1\|) = \left\langle x_1^*, \frac{x_2}{\|x_2\|}\right\rangle$$

[3]Alternativamente, temos $-\|x_1^*\| \leq -\langle x_1^*, x_2/\|x_2\|\rangle$ pela definição de $\|x_1^*\|$.

o que, juntamente com

$$\|x_1^*\| = \left\langle x_1^*, \frac{x_1}{\|x_1\|} \right\rangle,$$

produz

$$\left\langle x_1^*, \frac{x_2}{\|x_2\|} \right\rangle = \|x_1^*\| = \left\langle x_1^*, \frac{x_1}{\|x_1\|} \right\rangle.$$

Do Lema 1.13 decorre que $x_1 = x_2$, o que é uma contradição e prova (i).

Seja $x^* \in J_\varphi x$. Então $\langle x^*, x\rangle = \varphi(\|x\|)\|x\|$, com $\|x^*\| = \varphi(\|x\|)$. Vamos supor que exista outro $y^* \in J_\varphi x$, isto é $\langle y^*, x\rangle = \varphi(\|x\|)\|x\|$, com $\|y^*\| = \varphi(\|x\|)$.

Como antes, temos $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Então, se $0 < \lambda < 1$

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \lambda \left\langle \frac{x^*}{\varphi(\|x\|)}, x \right\rangle + (1-\lambda) \left\langle \frac{y^*}{\varphi(\|x\|)}, x \right\rangle = \left\langle \lambda \frac{x^*}{\varphi(\|x\|)} + (1-\lambda)\frac{y^*}{\varphi(\|x\|)}, x \right\rangle \\
&\leq \left\| \lambda \frac{x^*}{\varphi(\|x\|)} + (1-\lambda)\frac{y^*}{\varphi(\|x\|)} \right\| \cdot \|x\|, \\
&< \|x\|
\end{aligned}$$

pois estamos supondo que X^* seja estritamente convexo. Com essa contradição mostramos que $\operatorname{card}(J_\varphi x) = 1$. ■

Proposição 1.15. *Se X for localmente uniformemente convexo e J_φ for unívoca*[4]*, então J_φ satisfaz a condição*

$$\mathcal{S}_+ : \ x_n \rightharpoonup x \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} \left\langle J_\varphi x_n, x_n - x \right\rangle \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_n \to x.$$

Demonstração. Como $x_n \rightharpoonup x$, temos $\left\langle J_\varphi x, x_n \right\rangle \to \left\langle J_\varphi x, x \right\rangle$, isto é, $\left\langle J_\varphi x, x_n - x \right\rangle \to 0$. Uma vez que $\limsup\limits_{n\to\infty} \left\langle J_\varphi x_n, x_n - x \right\rangle \leq 0$, resulta

$$\limsup_{n\to\infty} \left\langle J_\varphi x_n - J_\varphi x, x_n - x \right\rangle \leq 0.$$

Já que J_φ é monótona (veja a desigualdade (1.1)), para todo n vale

$$0 \leq \big(\varphi(\|x_n\|) - \varphi(\|x\|)\big)\big(\|x_n\| - \|x\|\big) \leq \left\langle J_\varphi x_n - J_\varphi x, x_n - x \right\rangle,$$

o que implica que

$$\big(\varphi(\|x_n\|) - \varphi(\|x\|)\big)\big(\|x_n\| - \|x\|\big) \to 0$$

quando $n \to \infty$. Concluímos que $\|x_n\| \to \|x\|$, pois φ é contínua e monótona.

Decorre da Proposição A.16 que $x_n \to x$. ■

Definição 1.16. *Uma aplicação $G\colon X \to X^*$ é **demicontínua** se $x_n \to x$ implicar $Gx_n \rightharpoonup Gx$ em X^*.*

Proposição 1.17. *Se X for um espaço de Banach reflexivo e J_φ for unívoca (isto é, $J_\varphi : X \to X^*$) então J_φ é demicontínua.*

[4]Isso quer dizer que $J_\varphi : X \to X^*$

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em X com $x_n \to x$. Como (x_n) é limitada e $\|J_\varphi x_n\| = \varphi(\|x_n\|)$, temos que $(J_\varphi x_n)$ é limitada.

Como X é reflexivo, também temos que X^* é reflexivo. Pelo Teorema A.15 temos que existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) e x^* tal que $J_\varphi x_{n_k} \rightharpoonup x^*$. A fim de mostrar que $J_\varphi x_n \rightharpoonup J_\varphi x$ é suficiente mostrar que todas as subsequências fracamente convergentes de $(J_\varphi x_{n_k})$ possuem o mesmo limite, que é igual $J_\varphi x$ (veja a Proposição A.16 item (v)).

Suponhamos que, para uma subsequência qualquer de $(J_\varphi x_{n_k})$ (que denotaremos simplesmente por $J_\varphi x_n$), tenhamos $J_\varphi x_n \rightharpoonup x^*$. Vamos provar que $x^* = J_\varphi x$.

Pela semicontinuidade inferior fraca da norma (veja a Proposição A.16), temos

$$\|x^*\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|J_\varphi x_n\| = \liminf_{n\to\infty} \varphi(\|x_n\|) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\|x_n\|) = \varphi(\|x\|). \tag{1.6}$$

Como

$$\begin{aligned} |\left\langle J_\varphi x_n, x_n \right\rangle - \langle x^*, x\rangle | &= |\left\langle J_\varphi x_n, x_n - x\right\rangle + \left\langle J_\varphi x_n - x^*, x\right\rangle | \\ &\leq |\left\langle J_\varphi x_n, x_n - x\right\rangle | + |\left\langle J_\varphi x_n - x^*, x\right\rangle | \\ &\leq \|J_\varphi x_n\|\|x_n - x\| + |\left\langle J_\varphi x_n - x^*, x\right\rangle |, \end{aligned}$$

o fato de termos $x_n \to x$ e $J_\varphi x_n \rightharpoonup x^*$ garante que

$$\left\langle J_\varphi x_n, x_n\right\rangle \to \langle x^*, x\rangle .$$

Mas

$$\left\langle J_\varphi x_n, x_n\right\rangle = \varphi(\|x_n\|)\|x_n\| \to \varphi(\|x\|)\|x\|.$$

Daí decorre que $\langle x^*, x\rangle = \varphi(\|x\|)\|x\|$, de onde concluímos que $\varphi(\|x\|) \leq \|x^*\|$. Decorre então de (1.6) que $\varphi(\|x\|) = \|x^*\|$. Finalmente,

$$\langle x^*, x\rangle = \varphi(\|x\|)\|x\| \quad \text{e} \quad \varphi(\|x\|) = \|x^*\|$$

significa que $x^* = J_\varphi x$. ∎

Definição 1.18. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Um operador $T\colon X \to X^*$ é **hemicontínuo** se*

$$\lim_{t\to 0}\langle T(x+ty), u\rangle = \langle Tx, u\rangle$$

para quaisquer $x, y, u \in X$.

O próximo resultado é fundamental. Sua demonstração pode ser encontrada em Browder [7].

Teorema 1.19 (Browder)**.** *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $T\colon X \to X^*$ um operador monótono, hemicontínuo e coercivo. Então T é sobrejetor.*

Teorema 1.20. *Se X for um espaço de Banach reflexivo e a aplicação dual J_φ for unívoca (isto é, $J_\varphi : X \to X^*$). Então $\mathcal{R}(J_\varphi) = X^*$.*

Demonstração. De acordo com o Teorema de Browder, basta verificar que J_φ é monótona, hemicontínua e coerciva. A monotonicidade decorre imediatamente do Teorema 1.7 (ii). A hemicontinuidade de J_φ resulta da demicontinuidade (Proposição 1.17). Como φ é função de normalização, então

$$\frac{\left\langle J_\varphi u, u\right\rangle}{\|u\|} = \varphi(\|u\|) \to \infty \quad \text{quando} \quad \|u\| \to \infty,$$

temos que J_φ é coerciva. Assim o teorema está demonstrado. ∎

Teorema 1.21. *Seja X um espaço de Banach reflexivo, localmente uniformemente convexo e J_φ unívoca (isto é, $J_\varphi : X \to X^*$).*

Então J_φ é bijetora e sua inversa J_φ^{-1} é limitada, contínua e monótona. Além disso, ela satisfaz

$$J_\varphi^{-1} = \chi^{-1} J^*_{\varphi^{-1}},$$

em que $\chi : X \to X^{**}$ é o isomorfismo canônico entre X e X^{**} e $J^*_{\varphi^{-1}} : X^* \to X^{**}$ é a aplicação dual em X^* correspondente à função de normalização φ^{-1}.

Demonstração. Pelo Teorema 1.20, J_φ é sobrejetora. Como o espaço X é localmente uniformemente convexo, ele é estritamente convexo, pelo Teorema 1.11. Decorre então da Proposição 1.14 (i) que J_φ é injetora. Portanto, J_φ é bijetora.

Denotemos por χ o isomorfismo canônico entre X e X^{**}, isto é, $\langle \chi(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$. Seja $J^*_{\varphi^{-1}} : X^* \to X^{**}$ a aplicação dual correspondente à função de normalização φ^{-1}.[5] Tendo em conta que X é reflexivo e localmente uniformemente convexo, X^{**} também é localmente uniformemente convexo e, de acordo com o Teorema 1.11, estritamente convexo. Consequentemente, a Proposição 1.14 (ii) garante que $J^*_{\varphi^{-1}} : X^* \to X^{**}$ é unívoca.

Afirmamos que

$$J_\varphi^{-1} = \chi^{-1} J^*_{\varphi^{-1}} \tag{1.7}$$

De fato, temos

$$\begin{array}{rcccccl} \chi : X & \to & X^{**} & & & & \\ x & \mapsto & \chi(x) & : & X^* & \to & \mathbb{R} \\ & & & & x^* & \mapsto & \langle \chi(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle . \end{array}$$

com $\|x\| = \|\chi(x)\|$.

Seja $x^* \in X^*$ e $x^* = J_\varphi x$ (isto é, $x = J_\varphi^{-1} x^*$). Então $\langle x^*, x \rangle = \|x^*\| \|x\|$ e $\varphi(\|x\|) = \|x^*\|$ é equivalente a

$$\langle \chi(x), x^* \rangle = \|\chi(x)\| \|x^*\|, \quad \text{com} \quad \varphi(\|\chi(x)\|) = \|x^*\|.$$

Assim,

$$\langle \chi(x), x^* \rangle = \|\chi(x)\| \|x^*\|, \quad \text{com} \quad \|\chi(x)\| = \varphi^{-1}(\|x^*\|).$$

Mas $J^*_{\varphi^{-1}}$ é a aplicação dual correspondente à função de normalização φ^{-1}, então $J^*_{\varphi^{-1}} x^* = \chi(x)$ ou $x = \chi^{-1} J^*_{\varphi^{-1}} x^*$. Portanto $J_\varphi^{-1} = \chi^{-1} J^*_{\varphi^{-1}}$, concluindo a prova de nossa afirmação.

Pelo Teorema 1.7 (i), $J^*_{\varphi^{-1}}$ é limitada e já que χ é um isomorfismo isométrico, decorre de (1.7) que J_φ^{-1} é limitada.

Para ver que J_φ^{-1} é contínua, suponha que $x_n^* \to x^*$ em X^*. Como X^* é reflexivo, aplicando a Proposição 1.17 a $J^*_{\varphi^{-1}}$ obtemos,

$$J^*_{\varphi^{-1}} x_n^* \rightharpoonup J^*_{\varphi^{-1}} x^*.$$

Uma vez que χ^{-1} é isomorfismo isométrico, temos

$$\chi^{-1} J^*_{\varphi^{-1}} x_n^* \rightharpoonup \chi^{-1} J^*_{\varphi^{-1}} x^*.$$

[5] Observe que φ^{-1} é estritamente crescente, $\varphi^{-1}(0) = 0$ e $\lim_{r \to \infty} \varphi^{-1}(r) = \infty$.

Assim, decorre de (1.7) que

$$J_\varphi^{-1}x_n^* \rightharpoonup J_\varphi^{-1}x^*.$$

Seja $x_n = J_\varphi^{-1}x_n^*$ e $x = J_\varphi^{-1}x^*$. Então $x_n^* = J_\varphi x_n$, $x^* = J_\varphi x$ e, pela definição da aplicação dual J_φ, temos

$$\|x_n^*\| = \varphi(\|x_n\|) \quad \text{com} \quad \|x^*\| = \varphi(\|x\|).$$

Ou equivalentemente,

$$\|x_n\| = \varphi^{-1}(\|x_n^*\|) \quad \text{com} \quad \|x\| = \varphi^{-1}(\|x^*\|).$$

Como $\|x_n^*\| \to \|x^*\|$, temos $\|J_\varphi^{-1}x_n^*\| \to \|J_\varphi^{-1}x^*\|$.

Uma vez que X é localmente uniformemente convexo, de $J_\varphi^{-1}x_n^* \rightharpoonup J_\varphi^{-1}x^*$ e $\|J_\varphi x_n^*\| \to \|J_\varphi^{-1}x^*\|$ concluímos que $J_\varphi^{-1}x_n^* \to J_\varphi^{-1}x^*$ ao aplicar a Proposição A.16 (iv).

Já que o espaço X pode ser identificado com X^{**} por meio do isomorfismo canônico χ, para $x_1^*, x_2^* \in X^*$, temos

$$\left\langle \chi(J_\varphi^{-1}x_1^*) - \chi(J_\varphi^{-1}x_2^*), x_1^* - x_2^* \right\rangle = \left\langle J_{\varphi^{-1}}^* x_1^* - J_{\varphi^{-1}} x_2^*, x_1^* - x_2^* \right\rangle.$$

Aplicando o Teorema 1.7 (ii) com φ^{-1} em lugar de φ e X^* em lugar de X, concluímos a monotonicidade de J_φ^{-1}. ■

1.2 Os espaços de funções

De aqui em diante, Ω será sempre um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fonteira Lipschitz contínua e limitada.

Apresentaremos aqui alguns resultados e definições à respeito do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, definido por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),\ i = 1, \ldots, N \right\}$$

e (denotando por $\|\cdot\|_{0,p}$ a norma usual de $L^p(\Omega)$) considerado com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{0,p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,p}.$$

Enunciaremos agora um resultado que fornece as principais propriedades deste espaço. (Veja Adams [1, Theorem 3.5] para a demonstração.)

Teorema 1.22. *O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável, se $1 \leq p \leq \infty$, e reflexivo e uniformemente convexo, se $1 < p < \infty$.*

Definição 1.23. *O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma de $W^{1,p}(\Omega)$.*

As funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ são, grosso modo, as funções $u \in W^{1,p}(\Omega)$ que se anulam na fronteira $\partial\Omega$, isto é

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

É necessário dar um sentido preciso a esta noção, já que as funções em $W^{1,p}(\Omega)$ são definidas a menos de conjuntos de medida nula e a fronteira $\partial\Omega$ é um conjunto de medida nula.

A demonstração do seguinte resultado pode ser encontrada em Evans [13].

Teorema 1.24 (Traço)**.** *Suponha que Ω seja um aberto limitado e $1 \leq p < \infty$. Então existe um operador linear limitado*

$$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que

(i) *$\gamma u = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;*

(ii) *existe $C = C(p, \Omega) > 0$ tal que, para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$, vale*

$$\|\gamma u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

O operador γ é chamado **operador traço**. Conforme dito anteriormente, ele nos permite identificar γu como sendo os valores na fronteira de uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$. É importante ressaltar que a existência desse operador está ligada ao fato das funções de $W^{1,p}(\Omega)$ possuírem derivada fraca, pois não existe um operador linear limitado

$$\gamma : L^p(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que $\gamma u = u|_{\partial\Omega}$ sempre que $u \in L^p(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, veja Evans [13].

Assim, não existe uma maneira de falar dos valores de fronteira de uma função $u \in L^p(\Omega)$.

Suponhamos que $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ satisfaça $u_m \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Como o operador traço é contínuo temos que

$$\gamma u = \lim_{m\to\infty} \gamma u_m = 0.$$

Desse modo, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \ker \gamma$. Um argumento mais sofisticado mostra que a recíproca é verdadeira. Assim, as funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ valem zero na fronteira $\partial\Omega$.

Teorema 1.25. *Seja Ω um aberto de classe C^1. Se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se e somente se $u = 0$ em $\partial\Omega$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Brezis [6, Théo. IX.17].

Dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, definimos

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right), \quad |\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lema 1.26. *Temos*

(i) *$|\nabla u| \in L^p(\Omega)$;*

(ii) *$|\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p'}(\Omega)$, em que $(1/p) + (1/p') = 1$.*

Demonstração. Pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, temos que

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq N^{1/2} \max_{1\leq i\leq N}\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|, \dots, \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|\right\}.$$

Supondo que esse máximo seja $\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|$, $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq N^{p/2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^p.$$

Daí,

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x \leq N^{p/2}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^p \mathrm{d}x < \infty$$

pois $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Isto mostra que $|\nabla u| \in L^p(\Omega)$ e conclui a prova de (i).

Para $i \in \{1, \dots, N\}$ temos

$$\int_\Omega \left||\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p'} \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^{(p-2)p'}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p'} \mathrm{d}x$$

Fazendo uso da desigualdade de Hölder com $p-1$ e $\dfrac{p-1}{p-2}$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{(p-2)p'}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p'} \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega \left||\nabla u|^{(p-2)p'}\right|^{\frac{p-1}{p-2}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p'(p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

como $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $p'(p-1) = p$

$$\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p-1}} < \infty$$

pois $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $|\nabla u| \in L^p(\Omega)$ (pelo item (i)). E a prova de (ii) está completa ■

Teorema 1.27 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja limitado e tenhamos $1 \leq p < N$. Então existe $C = C(N, p, \Omega) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{0,p} \leq C\||\nabla u|\|_{0,p}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Uma consequência importante da Desigualdade de Poincaré é que

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \||\nabla u|\|_{0,p} \tag{1.8}$$

define em $W_0^{1,p}(\Omega)$ a norma que é equivalente (em $W_0^{1,p}(\Omega)$) à norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. De fato, de acordo com a Desigualdade de Poincaré temos

$$\begin{aligned}\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{0,p} + \||\nabla u|\|_{0,p} \\ &\leq C\||\nabla u|\|_{0,p} + \|\nabla u\|_{0,p} = (C+1)\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Vamos denotar esta norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ por $\|u\|_{1,p} = \||\nabla u|\|_{0,p}$.

Note que (1.8) não define uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$. De fato, sendo Ω limitado, a função não nula $u \equiv 1$ está em $W^{1,p}(\Omega)$, mas $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0$.

Definição 1.28. *Denotaremos o dual do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ por $W^{-1,p'}(\Omega)$, em que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Os elementos de $W^{-1,p'}(\Omega)$ são caracterizados pelo seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em Brezis [6, Prop. IX.20].

Proposição 1.29. *Seja $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$, então existem $f_1, \ldots, f_N$ em $L^{p'}(\Omega)$ tais que*

$$\langle F, v\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

e

$$\max_{1\leq i\leq N} \|f_i\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|F\|.$$

Assim o operador $-\Delta_p$ pode ser visto agindo de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$, definido por

$$\langle -\Delta u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \quad \text{para } u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

No próximo resultado, cuja prova pode ser encontrada em Adams [1, p.25], ressaltamos que $\|\cdot\|_{0,p}$ não é uma norma, se $0 < p < 1$.

Lema 1.30. *Suponhamos que $0 < p < 1$. Se $u, v \in L^p(\Omega)$ então vale*

$$\|\,|u| + |v|\,\|_{0,p} \geq \|u\|_{0,p} + \|v\|_{0,p}.$$

Lema 1.31. *Para quaisquer $z, w \in \mathbb{R}^N$ vale:*

(i) *se $p \in [2, \infty)$,*

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^p + \left|\frac{z-w}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(|z|^p + |w|^p\right); \tag{1.9}$$

(ii) *se $1 < p < 2$,*

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{z-w}{2}\right|^{p'} \leq \frac{1}{2}\left(|z|^p + |w|^p\right)^{1/(p-1)}. \tag{1.10}$$

A afirmações (i) e (ii) estão provadas em Adams [1, p. 36].

Como as propriedades geométricas de um espaço normado não são automaticamente mantidas ao se passar para uma norma equivalente, damos uma prova direta do próximo resultado:

Teorema 1.32. *O espaço* $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ *é uniformemente convexo.*

Demonstração. Consideremos inicialmente $p \in [2, \infty)$. Sejam $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo $\|u\|_{1,p} = \|v\|_{1,p} = 1$ e $\|u - v\|_{1,p} \geq \varepsilon \in (0, 2]$. Decorre do Lema 1.31 (i) que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p}^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{1,p}^p &= \left\|\left|\frac{\nabla u + \nabla v}{2}\right|\right\|_{0,p}^p + \left\|\left|\frac{\nabla u - \nabla v}{2}\right|\right\|_{0,p}^p \\
&= \int_\Omega \left(\left|\frac{\nabla u + \nabla v}{2}\right|^p + \left|\frac{\nabla u - \nabla v}{2}\right|^p\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,p}^p\right) = 1
\end{aligned}$$

o que produz

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p}^p \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \tag{1.11}$$

Suponhamos agora que $p \in (1, 2)$. Afirmamos que, se $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então $|\nabla v|^{p'} \in L^{p-1}(\Omega)$ e $\|\,|\nabla v|^{p'}\|_{0,p-1} = \|v\|_{1,p}^{p'}$.

De fato, temos

$$\int_\Omega \left||\nabla v|^{p'}\right|^{p-1} = \int_\Omega |\nabla v|^{p'(p-1)} = \int_\Omega |\nabla v|^p < \infty,$$

pois $|\nabla v| \in L^p(\Omega)$. Além disso,

$$\|v\|_{1,p} = \left(\int_\Omega \left(|\nabla v|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |\nabla v|^{p'(p-1)}\right)^{\frac{1}{p'(p-1)}} = \left[\left(\int_\Omega \left||\nabla v|^{p'}\right|^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{\frac{1}{p'}},$$

completando a prova de nossa afirmação.

Sejam $v_1, v_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então $|\nabla v_1|^{p'}, |\nabla v_2|^{p'} \in L^{p-1}(\Omega)$, com $0 < p - 1 < 1$ e, de acordo com o Lema 1.30 e o Lema 1.31 (ii), temos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{v_1+v_2}{2}\right\|_{1,p}^{p'}+\left\|\frac{v_1-v_2}{2}\right\|_{1,p}^{p'} &= \left\|\left|\nabla\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)\right|^{p'}\right\|_{0,p-1}+\left\|\left|\nabla\left(\frac{v_1-v_2}{2}\right)\right|^{p'}\right\|_{0,p-1}\\
&\leq \left\|\left|\nabla\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)\right|^{p'}+\left|\nabla\left(\frac{v_1-v_2}{2}\right)\right|^{p'}\right\|_{0,p-1}\\
&= \left[\int\limits_\Omega\left(\left|\frac{\nabla v_1+\nabla v_2}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{\nabla v_1-\nabla v_2}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p-1}}\\
&\leq \left[\frac{1}{2}\int\limits_\Omega\left(|\nabla v_1|^p+|\nabla v_2|^p\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}\\
&= \left[\frac{1}{2}\|v_1\|_{1,p}^p+\frac{1}{2}\|v_2\|_{1,p}^p\right]^{\frac{1}{p-1}}
\end{aligned}$$

Para $u,v\in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\|_{1,p}=\|v\|_{1,p}=1$ e $\|u-v\|_{1,p}\geq\varepsilon\in(0,2]$, obtemos

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p}^{p'}\leq 1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'}. \tag{1.12}$$

De (1.11) e (1.12) concluímos que sempre existe $\delta(\varepsilon)>0$ tal que

$$\|u+v\|_{1,p}\leq 2(1-\delta(\varepsilon)).$$ ■

Teorema 1.33. *O operador $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega)\to W^{-1,p'}(\Omega)$ é potencial. Mais precisamente, seu potencial é o funcional $\psi : W_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}$, dado por*

$$\psi(u)=\frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p$$

e

$$\psi'=-\Delta_p=J_\varphi,$$

em que $J_\varphi : W_0^{1,p}(\Omega)\to W^{-1,p'}(\Omega)$ é a aplicação dual correspondente à função de normalização $\varphi(t)=t^{p-1}$.

Demonstração. Seja $F(t)=\int\limits_0^t\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$, isto é, $\psi(u)=F(\|u\|_{1,p})$.

Mostraremos que ψ é convexa, o que é equivalente a provar que F é convexa. Para $0\leq s<t$, seja $\mu=\lambda s+(1-\lambda)t$, com $\lambda\in[0,1]$. Então

$$F(t)-F(\mu)=\int\limits_\mu^t\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\geq\int\limits_\mu^t\varphi(\mu)\mathrm{d}\tau=(t-\mu)\varphi(\mu),$$

$$F(\mu)-F(s)=\int\limits_s^\mu\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\leq\int\limits_s^\mu\varphi(\mu)\mathrm{d}\tau\leq(\mu-s)\varphi(\mu)$$

Daí temos que

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\big(F(t)-F(\mu)\big) &\geq (1-\lambda)(t-\mu)\varphi(\mu)\\ -\lambda\big(F(\mu)-F(s)\big) &\geq -\lambda(\mu-s)\varphi(\mu).\end{aligned}$$

Somando estas desigualdades, obtemos

$$\lambda F(s)+(1-\lambda)F(t)-F(\mu)\geq 0,$$

isto é

$$F(\lambda s+(1-\lambda)t)\leq \lambda F(s)+(1-\lambda)F(t),$$

o que prova que F (e portanto ψ) é convexa.

Agora vamos mostrar que ψ é Gâteaux diferenciável.

Se $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ for tal que $|\nabla u| = 0_{L^p(\Omega)}$ (isto implica que $\|u\|_{1,p}=0$), então temos $\langle\psi'(u),h\rangle = 0$ para todo $h\in W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato:

$$\begin{aligned}\big\langle\psi'(u),h\big\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{\psi(u+th)-\psi(u)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\psi(th)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{p}\|th\|_{1,p}^p}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{p}t^{p-1}\|h\|_{1,p}^p, \quad p>1\\ &= 0, \quad \forall\, h\in W_0^{1,p}(\Omega).\end{aligned}$$

Portanto, podemos supor que $|\nabla u|\neq 0_{L^p(\Omega)}$.

É óbvio que ψ pode ser escrito como um produto $\psi = QP$, onde $Q: L^p(\Omega)\to\mathbb{R}$ é dado por $Q(v)=\frac{1}{p}\|v\|_{0,p}^p$ e $P: W_0^{1,p}(\Omega)\to L^p(\Omega)$ é dado por $P(v)=|\nabla v|$.

Afirmamos que o funcional Q é Gâteaux diferenciável e

$$\big\langle Q'(v),h\big\rangle = \Big\langle |v|^{p-1}\text{sign}\, v,h\Big\rangle \tag{1.13}$$

para todo $v,h\in L^p(\Omega)$.

De fato:

$$\begin{aligned}\big\langle Q'(v),h\big\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{Q(v+th)-Q(v)}{t}, \qquad v,h\in L^p(\Omega)\\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{1}{tp}\Big(|v(x)+th(x)|^p-|v(x)|^p\Big)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Para $t\in(0,1)$ definimos a função $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por

$$g(s)=\big|s(v(x)+th(x))+(1-s)v(x)\big|^p.$$

Lembrando que $|y| = y\cdot\text{sign}\, y$ obtemos

$$g'(s)=p\big|s(v(x)+th(x))+(1-s)v(x)\big|^{p-1}\text{sign}\,(s(v(x)+th(x))+(1-s)v(x))th(x)$$

e, portanto,

$$\frac{1}{tp}g(s)\Big|_0^1$$
$$=\int_0^1 \left|s(v(x)+th(x))+(1-s)v(x)\right|^{p-1}\text{sign }(s(v(x)+th(x))+(1-s)v(x))h(x)\text{d}s.$$

Assim,

$$\frac{g(1)-g(0)}{tp}=\int_0^1 \left|v(x)+sth(x)\right|^{p-1}\text{sign }(v(x)+sth(x))\text{d}s,$$

ou seja,

$$\frac{|v(x)+th(x)|^p-|v(x)|^p}{tp}=\int_0^1 \left|v(x)+sth(x)\right|^{p-1}\text{sign }(v(x)+sth(x))\text{d}s.$$

Logo, pelo Teorema do valor Médio,

$$\left|\frac{|v(x)+th(x)|^p-|v(x)|^p}{tp}\right|\leq \Big||v(x)|+|h(x)|\Big|^{p-1}|h(x)|$$

e, da desigualdade de Hölder, decorre que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big(|v(x)|+|h(x)|\Big)^{p-1}|h(x)|\text{d}x &\leq \left(\int_\Omega \Big(|v(x)|+|h(x)|\Big)^{(p-1)p'}\text{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |h(x)|^p\text{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=\left(\int_\Omega \Big(|v(x)|+|h(x)|\Big)^{p}\text{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |h(x)|^p\text{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema A.26, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big(|v(x)|+|h(x)|\Big)^{p-1}|h(x)|\text{d}x &\leq \left(\int_\Omega 2^{p-1}\left(|v(x)|^p+|h(x)|^p\right)\text{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |h(x)|^p\text{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=2^{\frac{p-1}{p'}}\left(\|v\|_{0,p}^p+\|h\|_{0,p}^p\right)^{\frac{1}{p'}}\|h\|_{0,p}<\infty\end{aligned}$$

Assim, a função $\big|(|v(\cdot)|+|h(\cdot)|)\big|^{p-1}|h(\cdot)|$ está em $L^1(\Omega)$. Portanto, pelo Teorema da

Convergência Dominada, temos

$$\begin{aligned}
\langle Q'(v), h\rangle &= \int\limits_{\Omega} \lim_{t\to 0} \frac{|v(x)+th(x)|^p - |v(x)|}{tp} \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\Omega} \lim_{t\to 0} \int\limits_0^1 \left|v(x)+sth(x)\right|^{p-1} \text{sign } (v(x)+sth(x)) \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\Omega} |v(x)|^{p-1} (\text{sign } v(x)) h(x) \mathrm{d}x \\
&= \left\langle |v|^{p-1} \text{sign } v, h \right\rangle .
\end{aligned}$$

Agora mostraremos que o operador P é Gâteaux diferenciável em u e

$$P'(u)\cdot v = \frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|} \tag{1.14}$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, temos

$$\begin{aligned}
P'(u)\cdot v &= \lim_{t\to 0} \frac{P(u+tv)-P(v)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|\nabla(u+tv)| - |\nabla u|}{t} \\
&= \frac{d}{\mathrm{d}t} |\nabla (u+tv)| \Big|_{t=0} = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial(u+tv)}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial(u+tv)}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{N} 2 \frac{\partial(u+tv)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \Bigg|_{t=0} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} = |\nabla u|^{-1} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|}
\end{aligned}$$

Combinando (1.13) com (1.14), obtemos que ψ é Gâteaux diferenciável em u e

$$\begin{aligned}
\langle \psi'(u), v\rangle &= \langle Q'(P(u)), P'(u)\cdot v\rangle \\
&= \left\langle |\nabla u|^{p-1}, \frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|} \right\rangle \\
&= \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v = \langle -\Delta_p u, v\rangle
\end{aligned}$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Uma vez que ψ é convexa e Gâteaux diferenciável, aplicando o Teorema 1.8 no espaço $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, concluímos que $\partial\psi(u) = \psi'(u)$. E pelo Teorema 1.7 (iii) temos que $J_\varphi u = \partial\psi(u)$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, de modo que

$$J_\varphi = \psi' = -\Delta_p.$$

Isto conclui a demonstração. ■

Observação 1.34. *Seja $\|\cdot\|_*$ a norma dual de $\|\cdot\|_{1,p}$. Então, temos*

$$\|-\Delta_p u\|_* = \|J_\varphi u\|_* = \varphi(\|u\|_{1,p}) = \|u\|_{1,p}^{p-1}. \qquad \lhd$$

Teorema 1.35. *O operador $-\Delta_p$ define uma correspondência injetora entre $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W^{-1,p'}(\Omega)$, com inversa $(-\Delta_p)^{-1}$ monótona, limitada e contínua.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.33 temos que $J_\varphi = -\Delta_p$. Como, em virtude do Teorema 1.32, temos que $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ é uniformemente convexo, decorre do Teorema 1.12 que $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ é reflexivo. Além disso, pelo Teorema 1.11, $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$, é localmente uniformemente convexo. Assim, aplicando o Teorema 1.21, nossa demonstração está completa. ∎

Observação 1.36. *O Teorema 1.35 de acima afirma que para cada $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, a equação $-\Delta_p u = f$ tem uma única solução em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Já que os elementos de $W_0^{1,p}(\Omega)$ se anulam na fronteira $\partial\Omega$ no sentido do traço, é natural que a única solução em $W_0^{1,p}(\Omega)$ da equação $-\Delta_p u = f$ será chamada de solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f\,, \\ u|_{\partial\Omega} = 0\,. \end{cases} \qquad \lhd$$

O Teorema 1.33 garante que o funcional $\psi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p$ é Gâteaux diferenciável em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Podemos afirmar mais:

O próximo resultado será útil na sequência (ver Glowinski e Marrocco [15]).

Lema 1.37.

(i) *Se $p \in [2,\infty)$ então ele satisfaz*

$$\Big||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y\Big| \leq \beta|z-y|\Big(|z|+|y|\Big)^{p-2} \quad \text{para todo } y, z \in \mathbb{R}^N$$

com β independente de y e z;

(ii) *Se $p \in (1,2]$, então ele satisfaz*

$$\Big||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y\Big| \leq \beta|z-y|^{p-1} \quad \text{para todo } y, z \in \mathbb{R}^N$$

com β independente de y e z.

Demonstração. Para $z, y \in \mathbb{R}^N$, seja $f(t) = |y+t(z-y)|^{p-2}\big(y+t(z-y)\big)$, $t > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) &= (p-2)\big(y+t(z-y)\big)|y+t(z-y)|^{p-4}\big(y+t(z-y)\big)\cdot(z-y) \\ &\quad + (z-y)|y+t(z-y)|^{p-2}. \end{aligned}$$

Daí, integrando de 0 a 1 e tomando o modulo, obtemos

$$
\begin{aligned}
|f(1)-f(0)| &= \left| \int_0^1 \Big[(p-2)\big(y+t(z-y)\big)|y+t(z-y)|^{p-4}\big(y+t(z-y)\big)\cdot(z-y) \right. \\
&\quad \left. +(z-y)|y+t(z-y)|^{p-2}\Big]\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^1 \Big[(p-2)|y+t(z-y)||y+t(z-y)|^{p-4}|y+t(z-y)||z-y| \\
&\quad +|z-y||y+t(z-y)|^{p-2}\Big]\mathrm{d}t \\
&= (p-1)|z-y| \int_0^1 |y+t(z-y)|^{p-2}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Mas, para $t \in [0,1]$ temos que,

$$|y+t(z-y)| \leq |y|+t|z-y| \leq |y|+|z-y| \leq |y|+|z|+|y| \leq 2(|z|+|y|)$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\left||z|^{p-2}z-|y|^{p-2}y\right| &= |f(1)-f(0)| \\
&\leq (p-1)|z-y| \int_0^1 \Big[2(|z|+|y|)\Big]^{p-2}\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{2^{p-2}(p-1)}_{\beta}|z-y|(|z|+|y|)^{p-2}.
\end{aligned}
$$

A prova de (i) está completa.

Para mostrar (ii), vamos precisar de alguns resultados.

- Para $a,b>0$, temos que:
  Se $r \geq 1$ então $(a+b)^r \leq 2^{r-1}(a^r+b^r)$.
  Se $0<r\leq 1$ então $(a+b)^r \leq a^r+b^r$.

  Então para $z,y \in \mathbb{R}^N$ e $0<r\leq 1$, temos que

  $$|z|^r = |z-y+y|^r \leq (|z-y|+|y|)^r \leq |z-y|^r+|y|^r \Rightarrow |z|^r-|y|^r \leq |z-y|^r$$

  $$|y|^r = |y-z+z|^r \leq (|y-z|+|z|)^r \leq |y-z|^r+|z|^r \Rightarrow -|z-y|^r \leq |z|^r-|y|^r$$

  isto implica que,

  $$\left||z|^r-|y|^r\right| \leq |z-y|^r.$$

- De $0 \leq (|z|-|y|)^2$ obtemos que $|z||y| \leq \dfrac{|z|^2+|y|^2}{2}$ e como

  $$|z-y|^2 = |z|^2+|y|^2-2(z\cdot y)$$

  então

  $$|z||y|-z\cdot y \leq \frac{|z-y|^2}{2}.$$

- De $|z\cdot y| \leq |z||y|$ temos que $-1 \leq \dfrac{z\cdot y}{|z||y|} \leq 1$ ou $0 \leq 1 - \dfrac{z\cdot y}{|z||y|} \leq 2$.

Assim temos que,

$$
\begin{aligned}
\left||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y\right|^2 &= \left(|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y\right)\cdot\left(|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y\right)\\
&= |z|^{2(p-1)} - 2|z|^{p-2}|y|^{p-2}(z\cdot y) + |y|^{2(p-1)}\\
&= \left(|z|^{p-1} - |y|^{p-1}\right)^2 + 2|z|^{p-2}|y|^{p-2}(|z||y| - z\cdot y)\\
&\leq |z-y|^{2(p-1)} + 2|z|^{p-1}|y|^{p-1}\left(1 - \frac{z\cdot y}{|z||y|}\right)\\
&= |z-y|^{2(p-1)} + 2|z|^{p-1}|y|^{p-1}\left(1 - \frac{z\cdot y}{|z||y|}\right)^{p-1}\left(1 - \frac{z\cdot y}{|z||y|}\right)^{2-p}\\
&\leq |z-y|^{2(p-1)} + 2(|z||y| - z\cdot y)^{p-1}2^{2-p}\\
&\leq |z-y|^{2(p-1)} + 2\left(\frac{|z-y|^2}{2}\right)^{p-1}2^{2-p}\\
&= |z-y|^{2(p-1)} + 2^{2(2-p)}|z-y|^{2(p-1)}\\
&= \underbrace{(1 + 2^{2(2-p)})}_{\beta^2}|z-y|^{2(p-1)}
\end{aligned}
$$

isto implica que

$$\left||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y\right| \leq \beta|z-y|^{p-1}$$

e concluímos a demonstração de (*ii*). ■

Teorema 1.38. *O funcional ψ é continuamente Fréchet diferenciável (ver Apêndice A.1) em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Considere o espaço produto $\mathcal{X} = \prod_{i=1}^{N} L^{p'}(\Omega)$ munido com a norma

$$[h]_{0,p'} = \left(\sum_{i=1}^{N} \|h_i\|_{0,p'}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

para $h = (h_1, \ldots, h_N) \in \mathcal{X}$.

Definimos $g = (g_1, \ldots, g_N) : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{X}$ por

$$g(u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u,$$

para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Vamos provar que g é contínua.

Pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$[h]_{0,p'}^{p'} \leq C_1 \int_\Omega |h|^{p'},$$

para todo $h \in \mathcal{X}$.

Sejam $p \in (2,\infty)$ e $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, de acordo com o Lema 1.37 (i)

$$\begin{aligned}
\Big[g(u) - g(v)\Big]_{0,p'}^{p'} &\leq C_1 \int_\Omega \Big|g(u) - g(v)\Big|^{p'} \\
&= C_1 \int_\Omega \Big||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\Big|^{p'}, \\
&\leq C_1 \int_\Omega \Big(\beta|\nabla u - \nabla v|\big(|\nabla u| + |\nabla v|\big)^{p-2}\Big)^{p'} \\
&= C_2 \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p'}\Big(|\nabla u| + |\nabla v|\Big)^{p'(p-2)}, \quad \left(\text{Hölder com } p-1 \text{ e } \frac{p-1}{p-2}\right) \\
&\leq C_2 \left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p'(p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_\Omega \Big||\nabla u| + |\nabla v|\Big|^{p'(p-2)\frac{p-1}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \\
&= C_2 \left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_\Omega \Big||\nabla u| + |\nabla v|\Big|^{p}\right)^{\frac{p-2}{p-1}} \\
&= C_2 \left[\left(\int_\Omega |\nabla(u-v)|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{p}{p-1}} \left[\left(\int_\Omega \Big||\nabla u| + |\nabla v|\Big|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{(p-2)p}{p-1}} \\
&= C_2 \|u-v\|_{1,p}^{p'} \Big\||\nabla u| + |\nabla v|\Big\|_{0,p}^{p'(p-2)}.
\end{aligned}$$

Agora, fazendo uso da desigualdade de Minkowski

$$\begin{aligned}
\Big\||\nabla u| + |\nabla v|\Big\|_{0,p} &= \left(\int_\Omega \Big||\nabla u| + |\nabla v|\Big|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \Big(|\nabla u|\Big)^{P}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega \Big(|\nabla v|\Big)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,p}
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\Big[g(u) - g(v)\Big]_{0,p'} \leq C\|u-v\|_{1,p}\Big(\|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,p}\Big)^{p-2} \tag{1.15}$$

em que a constante $C > 0$ independe de u e v.

Se $(1,2]$ e $u,v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$
\begin{aligned}
\Big[g(u)-g(v)\Big]_{0,p'}^{p'} &\leq C_2 \int\limits_{\Omega} |g(u)-g(v)|^{p'} \\
&= C_2 \int\limits_{\Omega} \Big| |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v \Big|^{p'}, \quad \text{pelo Lema 1.37 (ii)} \\
&\leq C_2 \int\limits_{\Omega} \Big(\beta |\nabla u - \nabla v|^{p-1}\Big)^{p'} \\
&\leq C_2' \int\limits_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^{p'(p-1)} = C_2' \int\limits_{\Omega} |\nabla (u-v)|^{p} = C_2' \|u-v\|_{1,p}^{p}
\end{aligned}
$$

Então

$$
\Big[g(u)-g(v)\Big]_{0,p'} \leq C' \|u-v\|_{1,p}^{p-1} \tag{1.16}
$$

com $C' > 0$ constante independente de u e v. De (1.15) e (1.16) decorre imediatamente a continuidade de g.

Por outro lado,

$$
\Big\|\psi'(u)-\psi'(v)\Big\|_{*} \leq K\Big[g(u)-g(v)\Big]_{0,p'} \tag{1.17}
$$

com $K > 0$ constante independente de $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, pela desigualdade de Hölder e pela equivalência das normas no $\mathbb{R}^N$, temos:

$$
\begin{aligned}
\Big| \langle \psi'(u)-\psi'(v), w \rangle \Big| &= \Big| \langle \psi'(u), w \rangle - \langle \psi'(v), w \rangle \Big| \\
&= \left| \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w - \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla w \right| \\
&= \left| \int\limits_{\Omega} \Big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v \Big) \nabla w \right| \\
&= \left| \int\limits_{\Omega} (g(u)-g(v)) \nabla w \right| \\
&\leq \int\limits_{\Omega} \Big| g(u)-g(v) \Big| |\nabla w|, \quad \text{desig. de Hölder} \\
&\leq \left(\int\limits_{\Omega} \Big| g(u)-g(v) \Big|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla w|^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K \left(\sum_{i=1}^{N} \Big\| g_i(u)-g_i(v) \Big\|_{0,p'}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \|w\|_{1,p} \\
&= K \Big[g(u)-g(v) \Big]_{0,p'} \|w\|_{1,p}
\end{aligned}
$$

para $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Então

$$\sup_{w \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{|\langle \psi'(u) - \psi'(v), w\rangle|}{\|w\|_{1,p}} \leq K\Big[g(u) - g(v)\Big]_{0,p'}$$

prova (1.17).

Agora, pela continuidade de g e (1.17), a conclusão do teorema é obtida de maneira standard: um funcional é continuamente Fréchet diferenciável se, e somente se, for continuamente Gâteaux diferenciável (ver Apêndice A.1). ■

Observação 1.39. *Naturalmente, o diferencial de Fréchet de ψ em $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ será denotado por $\psi'(u)$.* ◁

Vamos mostrar que $\langle \psi'(u), v\rangle = \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x$. Para isso, definimos

$$\begin{aligned}
\delta(v) &= \psi(u+v) - \psi(u) - \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{p}\|u+v\|_{1,p}^p - \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |\nabla u + \nabla v|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x - \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{p}\int\limits_\Omega \Big(|\nabla u + \nabla v|^p - |\nabla u|^p - p|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\Big)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{p}\int\limits_\Omega \left[\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|\nabla u + t\nabla v\Big|^p \mathrm{d}t - \int\limits_0^1 p|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{p}\int\limits_\Omega \left[\int\limits_0^1 \left(\frac{d}{\mathrm{d}t}\Big|\nabla u + t\nabla v\Big|^p - p|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\right) \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Fubini A.12, obtemos

$$
\begin{aligned}
\delta(v) &= \frac{1}{p}\int_0^1\int_\Omega \left(\frac{d}{\mathrm{d}t}|\nabla u + t\nabla v|^p - p|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{p}\int_0^1\int_\Omega \left(p|\nabla u + t\nabla v|^{p-1}\text{sign }(\nabla u + t\nabla v)\nabla v - p|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\int_\Omega \left(|\nabla u + t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + t\nabla v)\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\int_\Omega \left(|\nabla u + t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + t\nabla v) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\int_\Omega \big(g(u+tv) - g(u)\big)\nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
|\delta(v)| \leq \int_0^1\int_\Omega |g(u+tv) - g(u)||\nabla v|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t
$$

de modo que a desigualdade de Hölder e a equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$ implica em

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |g(u+tv) - g(u)||\nabla v|\mathrm{d}x &\leq \left(\int_\Omega |g(u+tv) - g(u)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq K\Big[g(u+tv) - g(u)\Big]_{0,p'}\|v\|_{1,p}.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
|\delta(v)| \leq \int_0^1 K\Big[g(u+tv) - g(u)\Big]_{0,p'}\|v\|_{1,p}\mathrm{d}t,
$$

ou seja,

$$
\frac{|\delta(v)|}{\|v\|_{1,p}} \leq K\int_0^1 \Big[g(u+tv) - g(u)\Big]_{0,p'}\mathrm{d}t.
$$

Daí, se $v \to 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$
0 \leq \lim_{v\to 0}\frac{|\delta(v)|}{\|v\|_{1,p}} \leq \lim_{v\to 0} K\int_0^1 \Big[g(u+tv) - g(u)\Big]_{0,p'}\mathrm{d}t
$$

e, como g é contínua e limitada, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$
0 \leq \lim_{v\to 0}\frac{|\delta(v)|}{\|v\|_{1,p}} \leq K\int_0^1 \lim_{v\to 0}\Big[g(u+tv) - g(u)\Big]_{0,p'}\mathrm{d}t = 0.
$$

Assim, $\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{|\delta(v)|}{\|v\|_{1,p}}=0$, isto é, ψ é Fréchet diferenciável com derivada

$$\left\langle \psi'(u),v\right\rangle=\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\mathrm{d}x=\left\langle -\Delta_p u,v\right\rangle,\quad \forall\, v\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Portanto $\psi'(u)=-\Delta_p u$, concluindo a prova de nossa afirmação.

Teorema 1.40. *O operador $-\Delta_p$ satisfaz a condição $(\mathcal{S}_+)$: se $u_n\rightharpoonup u$ (fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$) e $\limsup\limits_{n\to\infty}\left\langle -\Delta_p u_n,u_n-u\right\rangle\le 0$, então $u_n\to u$ (fortemente em $W_0^{1,p}(\Omega)$).*

Demonstração. Do Teorema 1.33 temos que $J_\varphi=-\Delta_p$. Pelo Teorema 1.32, $(W_0^{1,p}(\Omega),\|\cdot\|_{1,p})$ é uniformemente convexo e daí pelo Teorema 1.11, $(W_0^{1,p}(\Omega),\|\cdot\|_{1,p})$ é localmente uniformemente convexo. Logo pela Proposição 1.15 a prova esta completa. ∎

Capítulo 2

O problema $-\Delta_p u = f(x,u)$, $u|_{\partial\Omega} = 0$

Neste capítulo vamos apresentar condições sobre f que garantem a existência de algum $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $-\Delta_p u = f(x,u)$ seja satisfeita no sentido de $W^{-1,p'}(\Omega)$. Esse u será chamado *solução* do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{em } \Omega\,, \\ u|_{\partial\Omega} = 0\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1 Ponto Fixo

Nesta seção vamos formular um problema equivalente ao problema (2.1).

Com esse objetivo, utilizaremos o operador de Nemytskii N_f definido por f (ver Apêndice A.6) e as condições sobre essa f para que $N_f \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

Um elemento $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução do problema (2.1) se

$$-\Delta_p u = N_f u \tag{2.2}$$

no sentido de $W^{-1,p'}(\Omega)$, i.e.

$$\left\langle -\Delta_p u, v \right\rangle = \left\langle N_f u, v \right\rangle \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou, mais explicitamente,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v = \int_\Omega f(x,u) v \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.3}$$

Do Teorema 1.35 temos que o operador $(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitado e contínuo. Então a equação (2.2) é equivalente a

$$u = (-\Delta_p)^{-1} N_f u, \tag{2.4}$$

em que $(-\Delta_p)^{-1} N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ é um operador compacto (pois é a composta de um operador limitado e contínuo $(-\Delta_p)^{-1}$ com um operador compacto N_f, veja a Observação A.60). Assim o problema (2.1) reduz-se a um problema de ponto fixo de um operador compacto.

No próximo resultado vamos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Schaefer, obtido por meio da teoria do grau de Leray-Schauder (veja o Apêndice A.4). Em geral, a grande dificuldade na aplicação de teoremas de ponto fixo consiste em verificar que o ponto fixo obtido não é a solução trivial: no nosso caso, quando (2.4) é satisfeita por $u = 0$. Uma solução engenhosa para isso foi apresentada por Bueno, Ercole, Zumpano e Ferreira [8].

Teorema 2.1. *Se a função de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfizer* (A.1) *com $q \in (1, p)$, então o operador $(-\Delta_p)^{-1}N_f$ tem pontos fixos em $W_0^{1,p}(\Omega)$; ou, de forma equivalente, o problema* (2.1) *tem soluções. Além disso, o conjunto de todas as soluções do problema* (2.1) *é limitado no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Do Teorema A.51 temos que, para garantir a existência dos pontos fixos do operador compacto $T = (-\Delta_p)^{-1}N_f$, é suficiente provar que o conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \ u = \alpha T u \text{ para algum } \alpha \in [0,1] \right\}$$

é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ arbitrário e da condição de crescimento (A.1) temos que

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_{1,p}^p &= \int_\Omega |\nabla(Tu)|^p = \int_\Omega |\nabla(Tu)|^{p-2}|\nabla(Tu)|^2 \\
&= \int_\Omega |\nabla(Tu)|^{p-2}\nabla(Tu)\ \nabla(Tu) \\
&= \Big\langle (-\Delta_p)Tu, Tu \Big\rangle = \langle N_f u, Tu \rangle = \int_\Omega f(x,u)Tu \\
&\leq \int_\Omega \Big(C|u|^{q-1} + b(x) \Big)|Tu|.
\end{aligned}$$

Além disso, se $u = \alpha T u$ para algum $\alpha \in [0,1]$, temos

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_{1,p}^p &\leq \int_\Omega \Big(C|\alpha Tu|^{q-1} + b(x) \Big)|Tu| \\
&= C\alpha^{q-1}\int_\Omega |Tu|^q + \int_\Omega b(x)|Tu|, \qquad \text{(desig. de Hölder)} \\
&\leq C\alpha^{q-1}\int_\Omega |Tu|^q + \left(\int_\Omega |b|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_\Omega |Tu|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C\alpha^{q-1}\|Tu\|_{0,q}^q + \|b\|_{0,q'}\|Tu\|_{0,q} \\
&\leq C\alpha^{q-1}C_1^q\|Tu\|_{1,p}^q + \|b\|_{0,q'}C_1\|Tu\|_{1,p} \\
&\leq \underbrace{CC_1^q}_{K_1}\|Tu\|_{1,p}^q + \underbrace{\|b\|_{0,q'}C_1}_{K_2}\|Tu\|_{1,p}
\end{aligned}$$

com a constante C_1 sendo dada pela imersão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ ($\|Tu\|_{0,q} \leq C_1\|Tu\|_{1,p}$).

Consequentemente, para cada $u \in \mathcal{S}$, temos

$$\|Tu\|_{1,p}^p - K_1\|Tu\|_{1,p}^q - K_2\|Tu\|_{1,p} \leq 0 \tag{2.5}$$

com $K_1, K_2 \geq 0$ constantes.

A restrição $q \in (1, p)$ garante que $\mathcal{S}$ é limitado. De fato, seja (u_n) uma sequência em $\mathcal{S}$ tal que $\|Tu_n\|_{1,p} \to \infty$. De (2.5) teríamos que

$$\|Tu_n\|_{1,p}^p - K_1\|Tu_n\|_{1,p}^q - K_2\|Tu_n\|_{1,p} \leq 0.$$

Mas, como $q < p$, a passagem ao limite na desigualdade acima deixa de valer. Então $(\|Tu_n\|_{1,p})$ é limitada. Assim, temos que existe uma constante $a \geq 0$ tal que $\|Tu\|_{1,p} \leq a$. Consequentemente, se $u \in \mathcal{S}$, temos

$$\|u\|_{1,p} = \alpha\|Tu\|_{1,p} \leq a,$$

mostrando que $\mathcal{S}$ é limitado. ■

Observação 2.2. *Veremos que se* (A.1) *for válida com $b \in L^\infty(\Omega)$, então a abordagem variacional permite enfraquecer as hipóteses do Teorema 2.1 e o problema* (2.1) *ainda tem solução, mas a limitação do conjunto de todas as soluções não está assegurada (ver Teorema 2.24).* ◁

Observação 2.3. *A condição $q \in (1, p)$ no Teorema 2.1 aparece como uma condição técnica, necessária para obter a limitação de $\mathcal{S}$.*

Na verdade, se $q = p$ e $1 - K_1 > 0$, o conjunto $\mathcal{S}$ ainda permanece limitado. De fato, substituindo $q = p$ na desigualdade (2.5) *obtemos*

$$\|Tu\|_{1,p}^p(1 - K_1) - K_2\|Tu\|_{1,p} \leq 0.$$

Tendo em conta que $p > 1$, a prova continua da mesma maneira como feita no Teorema 2.1.

Isto significa que estamos interessados em trabalhar com "as melhores constantes" C e C_1 tais que $1 - CC_1^p > 0$. Mas há situações em que $1 - CC_1^p \leq 0$; neste caso, nada podemos afirmar sobre a limitação de $\mathcal{S}$. O seguinte exemplo mostra que se $1 - CC_1^p \leq 0$, então $\mathcal{S}$ pode ser ilimitado.

Seja λ um autovalor de $-\Delta_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e u o autovetor correspondente, ou seja:

$$-\Delta_p u = \lambda|u|^{p-2}u.$$

Temos

$$\|u\|_{1,p}^p = \langle -\Delta_p u, u \rangle = \left\langle \lambda|u|^{p-2}u, u \right\rangle = \int_\Omega \lambda|u|^{p-2}u^2 = \lambda \int_\Omega |u|^p = \lambda\|u\|_{0,p}^p.$$

Isto é,

$$\lambda = \frac{\|u\|_{1,p}^p}{\|u\|_{0,p}^p}. \tag{2.6}$$

Já que $\|v\|_{0,p} \leq C_1\|v\|_{1,p}$ para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ (pois a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é contínua), de (2.6) *decorre que $1 - \lambda C_1^p \leq 0$.*

Considere a função de Carathéodory $f(x,s) = \lambda|s|^{p-2}s$. Temos que f satisfaz a condição de crescimento A.1 com $q = p$, $b \equiv 0$ e $C = \lambda$. Consequentemente, (2.5) *torna-se*

$$(1 - \lambda C_1^p)\|Tu\|_{1,p}^p \leq 0$$

para todo $u \in \mathcal{S}$ e não podemos garantir a limitação de $\mathcal{S}$.

Na verdade, S é ilimitado. De fato, $-\Delta_p(tu) = \lambda|tu|^{p-2}tu = N_f(tu)$, isto é, $tu = (-\Delta_p)^{-1}N_f(tu)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Tomando $\alpha = 1$, decorre que $\{tu | t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{S}$ e, assim, $\mathcal{S}$ é ilimitado. $\triangleleft$

Observação 2.4. *No caso $f(x,s) = g(s) + h(x)$ com $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $h \in L^\infty(\Omega)$, a invariância por homotopia do grau de Leray-Schauder é usado por Hachimi e Gossez [16] para provar o seguinte resultado (veja [16, Teorema 1.1]):*

Se

$$\text{(i)} \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{g(s)}{|s|^{p-2}s} \leq \lambda_1 \qquad e \qquad \text{(ii)} \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{pG(s)}{|s|^p} < \lambda_1,$$

em que $G(s) = \int\limits_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau$ e λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então o problema

$$-\Delta_p u = g(u) + h(x) \quad em\ \Omega, \quad u = 0\ em\ \partial\Omega$$

tem uma solução em $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. $\triangleleft$

2.2 Resultados da existência por minimização direta

Uma outra abordagem do problema (2.1) é a formulação variacional.

Do Teorema 1.38 sabemos que o funcional $\psi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p$ é continuamente Fréchet diferenciável em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e da Observação 1.39 temos $\psi'(u) = -\Delta_p u$.

No Apêndice A.6 definimos o funcional $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ como sendo, $\Phi(u) = \int\limits_\Omega F(x,u)$ onde $F(x,s) = \int\limits_0^s f(x,\tau)\mathrm{d}\tau$ e f é a função de Carathéodory que satisfaz a condição de crescimento (A.1).

Do Lema A.61 decorre que Φ é continuamente Fréchet diferenciável em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\Phi'(u) = N_f u$. Destas duas observações concluímos que o funcional $\mathcal{F} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\mathcal{F}(u) = \psi(u) - \Phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int\limits_\Omega F(x,u) \tag{2.7}$$

é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. Além disso

$$\mathcal{F}'(u) = (-\Delta_p)u - N_f u.$$

Assim, a busca de soluções do problema (2.1) reduz-se à busca de pontos críticos de $\mathcal{F}$, ou seja, de pontos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que $\mathcal{F}'(u) = 0$.

Para tal objetivo vamos fazer uso do Teorema A.23, isto é, vamos mostrar que o funcional $\mathcal{F}$ é fracamente semicontínuo inferiormente e coercivo em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.5. *O funcional $\mathcal{F}$, definido por* (2.7), *é fracamente semicontínuo inferiormente em* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. A imersão compacta $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ implica que $\mathcal{F}$ é fracamente semicontínua inferiormente em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, seja $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, como a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta, decorre do Teorema A.17 que $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$. Agora, tendo em conta que $N_F u = F(x,u)$ (ver Apêndice A.6). Temos pela Observação A.59 que N_F é limitado e contínuo,

$$N_F u_n \to N_F u \quad \text{em } L^1(\Omega),$$

ou seja

$$\int_\Omega F(x, u_n(x)) \to \int_\Omega F(x, u(x)).$$

Sabemos também que a norma é fracamente semicontínua inferiormente, isto é,

$$\|u\|_{1,p} \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{1,p}.$$

Logo,

$$\|u\|_{1,p}^p \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{1,p}^p$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \mathcal{F}(u_n) &= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x,u_n) \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p \right) - \int_\Omega F(x,u) \\
&\ge \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x,u) \\
&= \mathcal{F}(u),
\end{aligned}$$

mostrando que $\mathcal{F}$ é fracamente semicontínua inferiormente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Teorema 2.6. *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory satisfazendo a condição de crescimento* (A.1). *Suponha que exista $\alpha(x) \in L^\infty(\Omega)$ com $\alpha(x) < \lambda_1$ em um conjunto de medida positiva tal que*

$$\limsup_{s\to\pm\infty} \frac{pF(x,s)}{|s|^p} \le \alpha(x) \le \lambda_1 \quad \textit{uniformemente em } \Omega. \tag{2.8}$$

Então $\mathcal{F}$ é coerciva.

Demonstração. Defina $\mathcal{N} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{N}(v) = \|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega \alpha(x)|v|^p.$$

Vamos provar que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{N}(v) \geq \varepsilon_0 \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ com } \|v\|_{1,p} = 1. \tag{2.9}$$

De fato, lembremos que (ver por exemplo Anane [4]),

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\|v\|_{1,p}^p}{\|v\|_{0,p}^p} : v \in W_0^{1,p}(\Omega) \backslash \{0\} \right\} \tag{2.10}$$

em que o ínfimo é atingido exatamente quando v for múltiplo de alguma função $u_1 > 0$.

De (2.8) e de (2.10) temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(v) &\geq \|v\|_{1,p}^p - \lambda_1 \int_\Omega |v|^p \\
&= \|v\|_{1,p}^p - \lambda_1 \|v\|_{0,p}^p \qquad (\lambda_1 \|v\|_{0,p}^p \leq \|v\|_{1,p}^p) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

isto é, $\mathcal{N}(v) \geq 0$ para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Para mostrar (2.9), suponhamos que exista uma sequência $(v_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, com $\|v_n\|_{1,p} = 1$ e $\mathcal{N}(v_n) \to 0$. Do Teorema A.15 sabemos que é possível extrair uma subsequência de (v_n), que denotaremos ainda por (v_n), tal que $v_n \rightharpoonup v_0$ (fracamente) em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Já que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta (veja o Teorema A.39), decorre do Teorema A.17 que $v_n \to v_0$ (fortemente) em $L^p(\Omega)$.

O funcional $g : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$g(v) = \int_\Omega \alpha(x)|v|^p$$

é contínuo em $L^p(\Omega)$ e fracamente contínuo em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, se $v_n \rightharpoonup v$ (fracamente) em $W_0^{1,p}(\Omega)$ então $v_n \to v$ (fortemente) em $L^p(\Omega)$, isto é $\|v_n - v\|_{0,p} \to 0$. Logo $|v_n - v| \to 0$ e, como $\Big| |v_n| - |v| \Big| \leq |v_n - v|$, temos que $|v_n| \to |v|$ e, portanto, $|v_n|^p \to |v|^p$.

Assim, se $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$g(v_n) - g(v) = \int_\Omega \alpha(x)\Big(|v_n|^p - |v|^p\Big) \to 0.$$

Isto mostra que g é contínua em $L^p(\Omega)$ e fracamente contínua em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Como a norma é fracamente semicontínua inferiormente, temos que $\mathcal{N}$ é fracamente semicontínua inferiormente em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo,

$$0 \leq \mathcal{N}(v_0) = \|v_0\|_{1,p}^p - \int_\Omega \alpha(x)|v_0|^p \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{N}(v_n) = 0$$

e assim, $\|v_0\|_{1,p}^p = \int\limits_\Omega \alpha(x)|v_0|^p$. Mas $\mathcal{N}(v_n) \to 1 - \int\limits_\Omega \alpha(x)|v_0|^p$. Portanto, da unicidade do limite, temos

$$\|v_0\|_{1,p}^p = \int\limits_\Omega \alpha(x)|v_0|^p = 1.$$

Isto mostra que $v_0 \neq 0$.

Então, de (2.10) e (2.8) decorre que

$$\lambda_1\|v_0\|_{0,p}^p \leq \|v_0\|_{1,p}^p = \int\limits_\Omega \alpha(x)|v_0|^p \leq \lambda_1 \int\limits_\Omega |v_0|^p = \lambda_1\|v_0\|_{0,p}^p \tag{2.11}$$

implicando que $\lambda_1 = \dfrac{\|v_0\|_{1,p}^p}{\|v_0\|_{0,p}^p}$, ou seja, o ínfimo é atingido. Daí, v_0 é um múltiplo não nulo de u_1. Consequentemente, $|v_0(x)| > 0$ q.t.p. em Ω.

Seja $\Omega_1 := \{x \in \Omega : \alpha(x) < \lambda_1\}$. Por hipótese temos que medida$(\Omega_1) > 0$, logo

$$\int\limits_\Omega \alpha(x)|v_0|^p = \int\limits_{\Omega_1} \alpha(x)|v_0|^p + \int\limits_{\Omega\backslash\Omega_1} \alpha(x)|v_0|^p < \lambda_1\|v_0\|_{0,p}^p$$

contradizendo (2.11). Assim, (2.9) está provada.

Agora seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e defina $u = \dfrac{v}{\|v\|_{1,p}}$. Logo, por (2.9), temos

$$\|u\|_{1,p}^p - \int\limits_\Omega \alpha(x)|u|^p \geq \varepsilon_0,$$

ou seja,

$$1 - \frac{1}{\|v\|_{1,p}^p}\int\limits_\Omega \alpha(x)|v|^p \geq \varepsilon_0.$$

Assim,

$$\mathcal{N}(v) = \|v\|_{1,p}^p - \int\limits_\Omega \alpha(x)|v|^p \geq \varepsilon_0\|v\|_{1,p}^p \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.12}$$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \lambda_1\varepsilon_0$. De (2.8) decorre que existem $\varepsilon > 0$ e $R = R(\varepsilon)$ tais que, para $|s| \geq R$,

$$\frac{pF(x,s)}{|s|^p} \leq \alpha(x) + \varepsilon, \quad \forall\, x \in \Omega,$$

isto é,

$$F(x,s) \leq \frac{\alpha(x)+\varepsilon}{p}|s|^p.$$

Como a Proposição A.58 (i) estabelece que $|F(x,s)| \leq C_1|s|^p + c(x)$ para $x \in \Omega$ e $s \in \mathbb{R}$, concluímos que, para $|s| \leq R$, temos

$$F(x,s) \leq C_1R^p + c(x) = k(\varepsilon) + c(x).$$

Destas duas desigualdades, com $k = k(\varepsilon)$, decorre que

$$F(x,s) \leq \frac{\alpha(x)+\varepsilon}{p}|s|^p + k + c(x) \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

De (2.13) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(x,v) &\leq \int_\Omega \left[\left(\frac{\alpha(x)+\varepsilon}{p}|v|^p + k(\varepsilon) + c(x)\right)\right] \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega \alpha(x)|v|^p + \frac{\varepsilon}{p}\int_\Omega |v|^p + \underbrace{\int_\Omega k(\varepsilon) + \int_\Omega c(x)}_{k_1} \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega \alpha(x)|v|^p + \frac{\varepsilon}{p}\|v\|_{0,p}^p + k_1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v) = \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x,v) &\geq \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \frac{1}{p}\int_\Omega \alpha(x)|v|^p - \frac{\varepsilon}{p}\|v\|_{0,p}^p - k_1 \\
&= \frac{1}{p}\left(\|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega \alpha(x)|v|^p - \varepsilon\|v\|_{0,p}^p\right) - k_1
\end{aligned}$$

e, aplicando (2.12), obtemos

$$\mathcal{F}(v) \geq \frac{1}{p}\left(\varepsilon_0\|v\|_{1,p}^p - \varepsilon\|v\|_{0,p}^p\right) - k_1.$$

Como $\lambda_1\|v\|_{0,p}^p \leq \|v\|_{1,p}^p$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v) &\geq \frac{1}{p}\left(\varepsilon_0\|v\|_{1,p}^p - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\|v\|_{1,p}^p\right) - k_1 \\
&= \frac{\lambda_1\varepsilon_0 - \varepsilon}{\lambda_1 p}\|v\|_{1,p}^p - k_1.
\end{aligned}$$

Já que $\varepsilon < \lambda_1\varepsilon_0$, temos $\mathcal{F}(v) \to \infty$ quando $\|v\|_{1,p} \to \infty$. Portanto $\mathcal{F}$ é coercivo. ∎

Mostramos assim que o funcional $\mathcal{F}$ satisfaz as condições do Teorema A.23 e além disso pelo que foi feito no inicio desta seção temos que $\mathcal{F}$ é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. Portanto, existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\mathcal{F}'(u_0) = 0$. Consequentemente, o problema (2.1) tem solução.

Observação 2.7.

(i) *Se, em* (A.1)*, a função b está em $L^\infty(\Omega)$, então é fácil verificar que, se $q \in (1,p)$, então* (2.8) *é satisfeita com $\alpha \equiv 0$. Logo, o problema* (2.1) *tem solução. Mas, como já mencionamos (veja a Observação 2.2), se $b \in L^\infty(\Omega)$ e somente* (2.8) *for exigida, então a limitação do conjunto das soluções (como no Teorema 2.1) não é estabelecida.*

(ii) *A ideia da demonstração do Teorema 2.6 acima é adequada para comprovar a existência de soluções para a variância multivariada do problema* (2.1) *(veja a Proposição 4.1 em Jebelean [17]).*

◁

2.3 Aplicando o Teorema do Passo da Montanha

Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de I se existe $u \in X$ com $I'(u) = 0$ e $I(u) = c$.

Um exemplo de construção de um valor crítico por um procedimento de minimax é o Teorema do passo da montanha. Esse nome exprime bem a geometria do resultado: se alguém se encontra no ponto A a uma altura h_0, rodeado por uma cadeia de montanhas de alturas superiores ou iguais a h_0, e se deseja atingir o ponto B situado fora da cadeia de montanhas a uma altura $h_1 < h_0$, então parece existir um "melhor caminho" passando pela cadeia de montanha e conduzindo de A até B. Um procedimento para determiná-lo é considerar, entre todos os caminhos unindo os pontos A e B, aquele que sobe à mínima altura. Mais especificamente, avaliamos a máxima altura de cada caminho unindo os pontos A e B; em seguida, avaliamos o mínimo entre esses valores máximos: esse é o valor de minimax.

Veremos, em seguida, que é fundamental considerar alguma hipótese de compacidade sobre essa classe de caminhos, pois como sugere a figura da direita em Figura 2.1, o melhor caminho pode escapar para o infinito e o valor de minimax pode não ser atingido.

Definição 2.8. *Uma sequência (u_n) em X é uma* ***sequência de Palais-Smale*** *- ou sequência (PS) - do funcional I, se $(I(u_n))$ for limitada e $I'(u_n) \to 0$ em X^*. Diremos ainda que I satisfaz a* ***condição de Palais-Smale*** *- ou condição (PS) - se toda sequência (PS) possuir uma subsequência convergente em X.*

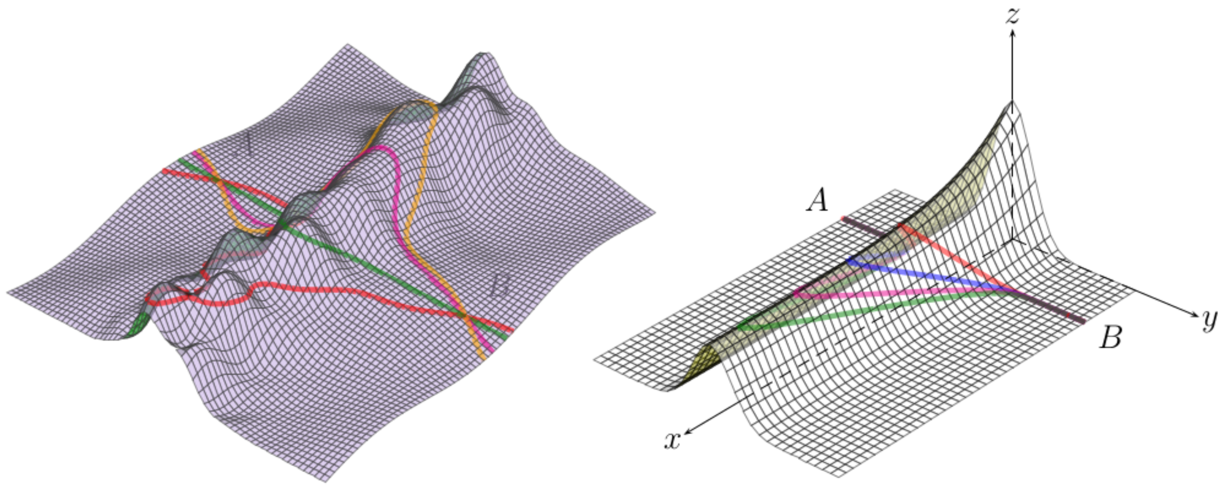


Figura 2.1: A geometria do passo da montanha. Observe, na figura da direita, que o ponto de minimax pode não ser atingido. Figuras obtidas por Dias em [10].

Teorema 2.9 (Teorema do passo da montanha)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional continuamente diferenciável, satisfazendo a condição de Palais-Smale (PS). Suponhamos que $I(0) = 0$ e que sejam válidas as condições seguintes:*

(I_1) *Existem números $\rho, \alpha > 0$ tais que na esfera $\|u\| = \rho$ vale a desigualdade $I(u) \geq \alpha$;*

(I_2) *Existe $u_0 \in X$ tal que $\|u_0\| > \rho$ e $I(u_0) \leq 0$.*

Então o funcional I possui um valor crítico $c \geq \alpha$ e caracterizado por

$$c \equiv \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

em que

$$\Gamma \equiv \Big\{\gamma : [0,1] \to X | \gamma \in C^1([0,1], X),\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = u_0\Big\}.$$

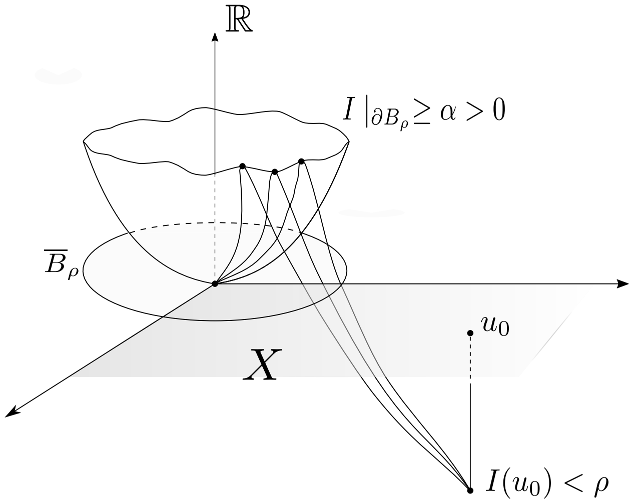


Figura 2.2: Uma segunda ilustração da geometria do passo da montanha.

O seguinte exemplo mostra que a condição de Palais-Smale não pode ser retirada das hipóteses do Teorema do passo da montanha pois, em geral, o nível c de minimax não é um valor crítico.

Exemplo 2.10. *A função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = x^2 + (1-x)^3 y^2$ verifica a geometria do Teorema do Passo da Montanha mas não verifica a condição de Palais-Smale (PS).*

De fato, $h(0,0) = 0$ e, se $u_0 = (2,2)$, então $h(u_0) = 0$. Além disso, se $\|(x,y)\| = \rho = 1/2$, então vale a desigualdade $h(x,y) > \alpha = 1/32$.

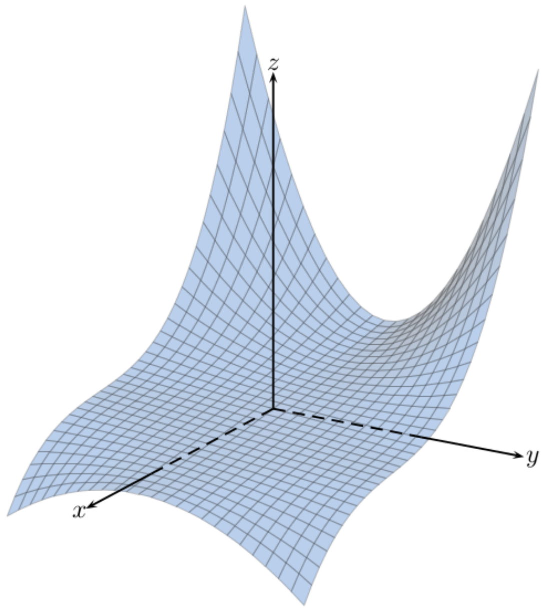
Suponhamos agora que a função h verifique a condição (PS) para algum número $c \in \mathbb{R}^+$ definido por $c \equiv \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} h(\gamma(t))$. Obteremos uma contradição. De fato, seja $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ uma sequência tal que

(i) $\lim_{n \to +\infty} h(x_n, y_n) = \lim_{n \to +\infty} [x_n^2 + (1-x_n)^3 y_n^2] = c > 0.$

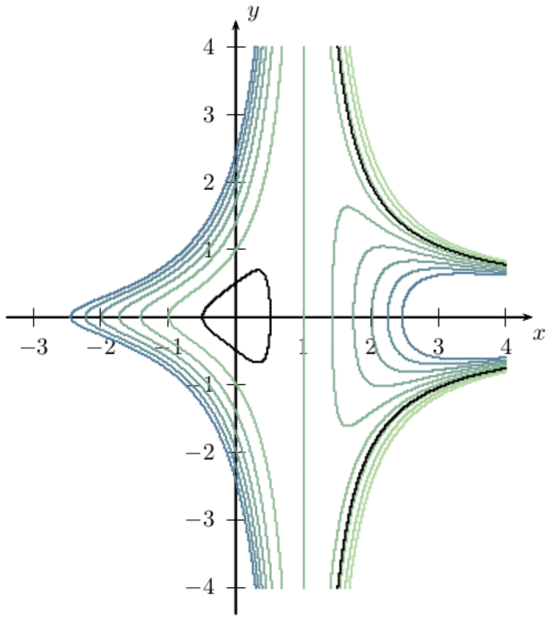
(ii) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x_n, y_n) = \lim_{n \to +\infty} [2x_n - 3(1-x_n)^2 y_n^2] = 0.$

(iii) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\partial h}{\partial y}(x_n, y_n) = \lim_{n \to +\infty} [2(1-x_n)^3 y_n] = 0.$

Se a sequência $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ for convergente, isto é, se $\lim_{n \to +\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$, então, passando ao limite em (i) e aplicando (ii) e (iii), resulta que $(x_0, y_0) = (0,0)$. Com isso, $0 = h(x_0, y_0) = \lim_{n \to +\infty} h(x_n, y_n) = c > 0$, o que é uma contradição. Concluímos que o único ponto crítico da função h é o ponto $O = (0,0)$, que é um ponto de mínimo local. Veja a Figura 2.3. $\lhd$



(a) Gráfico da função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = x^2 + (1-x)^3y^2$.



(b) Curvas de nível da função h. A origem é o único ponto crítico (mínimo local), mas não é um mínimo global.

Figura 2.3: Exemplo de Brézis e Nirenberg de uma função que verifica a geometria do Teorema do Passo da Montanha, mas não verifica a condição de Palais-Smale. Figuras obtidas por Dias em [10].

É óbvio que cada ponto crítico u no nível c ($I'(u) = 0,\ I(u) = c$) não é trivial. Consequentemente, se as hipóteses do Teorema 2.9 for satisfeitas com $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ e $I = \mathcal{F}$, então a existência de soluções não triviais para o problema (2.1) está assegurada.

Primeiro vamos lidar com a condição de (PS) para $\mathcal{F}$.

Lema 2.11. *Se $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ for limitada e $\mathcal{F}'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, então (u_n) tem uma subsequência convergente.*

Demonstração. Já que $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma sequência limitada, pelo Teorema A.15 pode-se extrair uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n), fracamente convergente para algum $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, isto é $u_{n_k} \rightharpoonup u$. Como $\mathcal{F}'(u_{n_k}) \to 0$, inferimos

$$\left\langle \mathcal{F}'(u_{n_k}), u_{n_k} - u \right\rangle = \left\langle -\Delta_p u_{n_k} - N_f u_{n_k}, u_{n_k} - u \right\rangle \to 0. \tag{2.14}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\Big|\left\langle N_f u_{n_k}, u_{n_k} - u \right\rangle\Big| &= \left| \int\limits_\Omega N_f u_{n_k} \cdot (u_{n_k} - u) \right| \\
&\leq \int\limits_\Omega |N_f u_{n_k}|\ |u_{n_k} - u|, \qquad \text{(desig. de Hölder)} \\
&\leq \left(\int\limits_\Omega |N_f u_{n_k}|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int\limits_\Omega |u_{n_k} - u|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|N_f u_{n_k}\|_{0,q'}\ \|u_{n_k} - u\|_{0,q}.
\end{aligned}$$

Como a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta e $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pelo Teorema A.17 temos $u_{n_k} \to u$ fortemente em $L^q(\Omega)$. Além disso, pela Observação A.59, $N_f(L^q(\Omega)) \subset L^{q'}(\Omega)$, isto é, $(N_f u_{n_k})$ é limitada em $L^{q'}(\Omega)$. Então

$$\left\langle N_f u_{n_k}, u_{n_k} - u \right\rangle \to 0.$$

De (2.14) obtemos

$$\left\langle -\Delta_p u_{n_k}, u_{n_k} - u \right\rangle \to 0$$

e, pelo Teorema 1.40, conclui-se que $u_{n_k} \to u$ (fortemente) em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Teorema 2.12. *Se existirem $\theta > p$ e $s_0 > 0$ tais que*

$$\theta F(x,s) \leq s f(x,s) \quad \text{para } x \in \Omega,\ |s| \geq s_0, \tag{2.15}$$

então $\mathcal{F}$ satisfaz a condição (PS).

Observação 2.13. *Cabe observar que* (2.15) *estende a bem conhecida condição*

$$\text{existem} \quad \theta > 2 \quad \text{e} \quad s_0 > 0 \quad \text{tais que}$$

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s) \quad \text{para } x \in \Omega,\ |s| \geq s_0$$

que foi inicialmente apresentada por Ambrosetti e Rabinowitz em [3] como uma condição suficiente para garantir que $\mathcal{F}$ satisfaz (PS) no caso particular $p = 2$. ◁

Demonstração do Teorema 2.12. Basta mostrar que qualquer sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, com $(\mathcal{F}(u_n))$ limitada e $\mathcal{F}'(u_n) \to 0$, é limitada para então podermos aplicar o Lema 2.11.

Seja $d \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{F}(u_n) \leq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos

$$\Omega_n = \Big\{ x \in \Omega : |u_n(x)| \geq s_0 \Big\}, \quad \Omega_n' = \Omega \backslash \Omega_n.$$

Temos que

$$\frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \left(\int\limits_{\Omega_n} F(x,u_n) + \int\limits_{\Omega_n'} F(x,u_n) \right) \leq d. \tag{2.16}$$

Agora vamos obter estimativas independentes de n para as integrais em (2.16). Seja $n \in \mathbb{N}$ escolhido arbitrariamente.

Se $x \in \Omega_n'$, então $|u_n(x)| < s_0$ e pela Proposição A.58 (i), segue-se

$$F(x,u_n) \leq C_1|u_n(x)|^q + c(x) \leq C_1 s_0^q + c(x)$$

e, portanto,

$$\int\limits_{\Omega_n'} F(x,u_n) \leq C_1 s_0^q \cdot \text{medida}(\Omega) + \int\limits_{\Omega} c(x) = K_1. \tag{2.17}$$

Se $x \in \Omega_n$, então $|u_n(x)| \geq s_0$. Por (2.15) temos

$$F(x,u_n) \leq \frac{1}{\theta} f(x,u_n(x))u_n(x),$$

o que nos dá

$$\int\limits_{\Omega_n} F(x,u_n) \leq \int\limits_{\Omega_n} \frac{1}{\theta} f(x,u_n)u_n = \frac{1}{\theta}\Bigg(\int\limits_{\Omega} f(x,u_n)u_n - \int\limits_{\Omega_n'} f(x,u_n)u_n \Bigg). \tag{2.18}$$

Da condição de crescimento (A.1), deduzimos

$$\begin{aligned}
\Bigg| \int\limits_{\Omega_n'} f(x,u_n)u_n \Bigg| \leq \int\limits_{\Omega_n'} |f(x,u_n)|\,|u_n| &\leq \int\limits_{\Omega_n'} \Big(C|u_n|^{q-1} + b(x)\Big)|u_n| \\
&\leq \int\limits_{\Omega_n'} \Big(C|u_n|^{q} + b(x)|u_n|\Big) \\
&\leq \int\limits_{\Omega_n'} \Big(C s_0^{q} + b(x)s_0\Big) \\
&\leq C s_0^q \cdot \text{medida}(\Omega) + s_0 \int\limits_{\Omega} b(x) = K_2
\end{aligned}$$

isto é, $-K_2 \leq \int\limits_{\Omega_n'} f(x,u_n)u_n \leq K_2$, mostrando que

$$-\frac{1}{\theta}\int\limits_{\Omega_n'} f(x,u_n)u_n \leq \frac{K_2}{\theta}. \tag{2.19}$$

De (2.18) e (2.19), decorre que

$$-\frac{K_2}{\theta} - \frac{1}{\theta}\int\limits_{\Omega} f(x,u_n)u_n \leq -\int\limits_{\Omega_n} F(x,u_n)$$

e, como $-K_1 \leq -\int\limits_{\Omega_n'} F(x,u_n)$ (por (2.17)), obtemos de (2.16) que

$$\frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\theta}\int\limits_{\Omega} f(x,u_n)u_n - \frac{K_2}{\theta} - K_1 \leq d,$$

isto é,

$$\frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\theta}\int\limits_{\Omega} f(x,u_n)u_n \leq d + K_1 + \frac{K_2}{\theta} = K,$$

ou seja,

$$\frac{1}{p}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\theta}\left\langle N_f u_n, u_n\right\rangle \leq K. \tag{2.20}$$

Por outro lado, já que $\mathcal{F}'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\mathcal{F}'(u_n)\|_* \leq 1$ para todo $n \geq n_0$. Daí, $|\langle \mathcal{F}'(u_n), u_n\rangle| \leq \|u_n\|_{1,p}$ para $n \geq n_0$. Como $\mathcal{F}'(u_n) = -\Delta_p u_n - N_f u_n$, para todo $n \geq n_0$ obtemos

$$\left|\left\langle -\Delta_p u_n, u_n\right\rangle - \left\langle N_f u_n, u_n\right\rangle\right| \leq \|u_n\|_{1,p}.$$

Ou seja,

$$\left|\|u_n\|_{1,p}^p - \left\langle N_f u_n, u_n\right\rangle\right| \leq \|u_n\|_{1,p},$$

isto é, $-\|u_n\|_{1,p} \leq \|u_n\|_{1,p}^p - \left\langle N_f u_n, u_n\right\rangle \leq \|u_n\|_{1,p}$. Portanto,

$$-\frac{1}{\theta}\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\theta}\|u_n\|_{1,p} \leq -\frac{1}{\theta}\left\langle N_f u_n, u_n\right\rangle. \tag{2.21}$$

Agora, de (2.20) e (2.21) resulta

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_{1,p}^p - \frac{1}{\theta}\|u_n\|_{1,p} \leq K$$

e, tendo em conta que $\theta > p$, concluímos que (u_n) é limitada: pois, se (u_n) for ilimitada (isto é, $\|u_n\|_{1,p} \to \infty$ quando $n \to \infty$), a desigualdade anterior deixa de ser válida. ■

Com relação à condição (I_2) no Teorema 2.9, vamos obter as condições suficientes para que $\mathcal{F}$ seja ilimitada inferiormente em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lema 2.14. *O funcional $\mathcal{F}$ tem as propriedades:*

(i) *$\mathcal{F}(0) = 0$;*

(ii) *$\mathcal{F}$ aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados.*

Demonstração. A afirmação (i) é imediata.

Como

$$\mathcal{F}'(u) = -\Delta_p u - N_f u$$

então

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}'(u)\|_* &\leq \|-\Delta_p u\|_* + \|N_f u\|_* \\ &= \|u\|_{1,p}^{p-1} + \|N_f u\|_*.\end{aligned}$$

Uma vez que

$$
\begin{aligned}
|\langle N_f u, v\rangle| = \left|\int_\Omega N_f u \cdot v\right| &\leq \int_\Omega |N_f u \cdot v|\,, \quad \text{desig. de Hölder}\\
&\leq \left(\int_\Omega |N_f u|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_\Omega |v|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \|N_f u\|_{0,q'} \|v\|_{0,q}
\end{aligned}
$$

e lembrando que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua, concluímos que $\|v\|_{0,q} \leq K\|v\|_{1,p}$. Então

$$
|\langle N_f u, v\rangle| \leq \|N_f u\|_{0,q'} K \|v\|_{1,p},
$$

ou seja,

$$
\frac{|\langle N_f u, v\rangle|}{\|v\|_{1,p}} \leq K\|N_f u\|_{0,q'}.
$$

Daí decorre que

$$
\|N_f u\|_* = \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{|\langle N_f u, v\rangle|}{\|v\|_{1,p}} \leq K\|N_f u\|_{0,q'}.
$$

Portanto,

$$
\|\mathcal{F}'(u)\|_* \leq \|u\|_{1,p}^{p-1} + K\|N_f u\|_{0,q'}
$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Além disso, pela imersão (compacta) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ e em virtude do fato que N_f aplica conjuntos limitados em $L^q(\Omega)$ em conjuntos limitados em $L^{q'}(\Omega)$, concluímos que $\mathcal{F}'$ aplica conjuntos limitados em $W_0^{1,p}(\Omega)$ em conjuntos limitados em $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Sendo $\mathcal{F}$ de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, existe $\varepsilon \in (0,1)$ tal que

$$
\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(0) = \langle \mathcal{F}'(\varepsilon v), v\rangle.
$$

De fato, sejam $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definido por

$$
h(\tau) = \mathcal{F}(\tau v + (1-\tau)u),
$$

temos

$$
h(0) = \mathcal{F}(u) \qquad \text{e} \qquad h(1) = \mathcal{F}(v).
$$

Para $0 < \tau < 1$ e $t \neq 0$ satisfazendo $\tau + t \in [0,1]$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{h(\tau+t) - h(\tau)}{t} &= \frac{\mathcal{F}((\tau+t)v + (1-\tau-t)u) - \mathcal{F}(\tau v + (1-\tau)u)}{t}\\
&= \frac{\mathcal{F}(\tau v + (1-\tau)u + (v-u)t) - \mathcal{F}(\tau v + (1-\tau)u)}{t}.
\end{aligned}
$$

Já que $\mathcal{F}$ é Fréchet diferenciável em $\tau v + (1-\tau)u$,

$$
\lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{F}(\tau v + (1-\tau)u + t(v-u)) - \mathcal{F}(\tau v + (1-\tau)u)}{t} = \langle \mathcal{F}'(\tau v + (1-\tau)u), v - u\rangle.
$$

Assim,
$$\lim_{t\to 0}\frac{h(\tau+t)-h(\tau)}{t}=\left\langle \mathcal{F}'(\tau v+(1-\tau)u),v-u\right\rangle,$$
mostrando que h é diferenciável em τ e
$$h'(\tau)=\left\langle \mathcal{F}'(\tau v+(1-\tau)u),v-u\right\rangle.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, existe $0<\varepsilon<1$ tal que
$$h'(\varepsilon)=h(1)-h(0),$$
isto é,
$$\left\langle \mathcal{F}'(\varepsilon v+(1-\varepsilon)u),v-u\right\rangle=\mathcal{F}(v)-\mathcal{F}(u).$$
Portanto, para $u=0$, temos
$$\mathcal{F}(v)-\mathcal{F}(0)=\left\langle \mathcal{F}'(\varepsilon v),v\right\rangle\ ,\quad \varepsilon\in(0,1).$$

Finalmente, com v escolhido arbitrariamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos:
$$|\mathcal{F}(v)|=|\mathcal{F}(v)-\mathcal{F}(0)|=|\left\langle \mathcal{F}'(\xi v),v\right\rangle|\leq\|\mathcal{F}'(\xi v)\|_*\|v\|_{1,p}$$
com $\xi\in(0,1)$. Então (ii) decorre da conclusão anterior sobre $\mathcal{F}'$. ■

Observação 2.15. *Na verdade,* (ii) *do Lema 2.14 é consequência da condição de crescimento* (A.1) *e de termos* $\|-\Delta_p u\|_*=\|u\|_{1,p}^{p-1}$. ◁

Observação 2.16. *Se $\mathcal{F}$ for ilimitada inferiormente, então, para qualquer $\rho>0$, existe um elemento $e\in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|e\|_{1,p}\geq\rho$, tal que $\mathcal{F}(e)\leq 0$.*

De fato, por contradição suponha que exista algum $\rho>0$ tal que, para todo $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\|\geq\rho$, se tenha $\mathcal{F}(u)\geq 0$. Então, pelo Lema 2.14 (ii)*, o conjunto $\{\mathcal{F}(u):\|u\|_{1,p}<\rho\}$ seria limitado. Resulta que $\mathcal{F}$ é limitado inferiormente, o que é uma contradição.* ◁

O seguinte resultado vai estabelecer condições para que $\mathcal{F}$ seja ilimitado inferiormente.

Teorema 2.17. *Se*

(i) *existem números $\theta>p$ e $s_1>0$ tais que*
$$0<\theta F(x,s)\leq sf(x,s)\quad \text{para } x\in\Omega,\ s\geq s_1, \tag{2.22}$$
ou se

(ii) *existem números $\theta>p$ e $s_1<0$ tais que*
$$0<\theta F(x,s)\leq sf(x,s)\quad \text{para } x\in\Omega,\ s\leq s_1, \tag{2.23}$$
então $\mathcal{F}$ é ilimitado inferiormente.

Demonstração. Vamos provar a condição suficiente (i); argumento semelhante mostra o caso (ii).

Mostraremos que, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $u > 0$ for tal que medida$(M_1(u)) > 0$ em que

$$M_1(u) = \Big\{x \in \Omega : u(x) \geq s_1\Big\},$$

então $\mathcal{F}(\lambda u) \to -\infty$ quando $\lambda \to \infty$.

Para $\lambda \geq 1$, vamos denotar

$$M_\lambda(u) = \Big\{x \in \Omega : \lambda u(x) \geq s_1\Big\}.$$

Observemos que $M_1(u) \subset M_\lambda(u)$ e, portanto, medida$(M_\lambda(u)) > 0$.

Por outro lado, existe uma função $\gamma \in L^1(\Omega)$, $\gamma > 0$ tal que

$$F(x,s) \geq \gamma(x)s^\theta \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \geq s_1. \tag{2.24}$$

De fato, para $x \in \Omega$ e $\tau \geq s_1$, de (2.22) decorre que

$$\frac{\theta}{\tau} \leq \frac{f(x,\tau)}{F(x,\tau)}.$$

Da definição de F segue-se que $F'_\tau(x,\tau) = f(x,\tau)$. Assim,

$$\frac{\theta}{\tau} \leq \frac{f(x,\tau)}{F(x,\tau)} = \frac{F'_\tau(x,\tau)}{F(x,\tau)}$$

e, integrando de s_1 a s, obtemos

$$\int_{s_1}^{s} \frac{\theta}{\tau} \mathrm{d}\tau \leq \int_{s_1}^{s} \frac{F'_\tau(x,\tau)}{F(x,\tau)} \mathrm{d}\tau \quad \Rightarrow \quad \theta(\ln s - \ln s_1) \leq \ln F(x,s) - \ln F(x,s_1).$$

Logo,

$$\ln\left(\frac{s}{s_1}\right)^\theta \leq \ln F(x,s) - \ln F(x,s_1).$$

Daí

$$\ln \frac{s^\theta F(x,s_1)}{s_1^\theta} \leq \ln F(x,s) \quad \Rightarrow \quad s^\theta \frac{F(x,s_1)}{s_1^\theta} \leq F(x,s),$$

o que implica (2.24) com $\gamma(x) = \dfrac{F(x,s_1)}{s_1^\theta} > 0$.

Logo, pela Proposição A.58 (i), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\gamma(x)| \mathrm{d}x &= \frac{1}{s_1^\theta} \int_\Omega |F(x,s_1)| \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{s_1^\theta} \int_\Omega \Big(C_1 |s_1|^q + c(x)\Big) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{s_1^\theta} \left(C_1 |s_1|^q \cdot \text{medida}(\Omega) + \int_\Omega c(x) \mathrm{d}x\right) < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\gamma \in L^1(\Omega)$.

Agora, como $\lambda \geq 1$,

$$\mathcal{F}(\lambda u) = \frac{\lambda^p}{p}\|u\|_{1,p}^p - \Bigg(\int\limits_{M_\lambda(u)} F(x,\lambda u) + \int\limits_{\Omega \backslash M_\lambda(u)} F(x,\lambda u) \Bigg). \tag{2.25}$$

Se $x \in M_\lambda(u)$, então $\lambda u(x) \geq s_1$, e por (2.24)

$$F(x,\lambda u(x)) \geq \gamma(x)\,(\lambda u(x))^\theta$$

isto é,

$$F(x,\lambda u) \geq \gamma(x)\lambda^\theta u^\theta.$$

Portanto,

$$\int\limits_{M_\lambda(u)} F(x,\lambda u) \geq \lambda^\theta \int\limits_{M_\lambda(u)} \gamma(x)u^\theta \geq \lambda^\theta \int\limits_{M_1(u)} \gamma(x)u^\theta = \lambda^\theta K_1(u), \tag{2.26}$$

com $K_1(u) > 0$.

Se $x \in \Omega \backslash M_\lambda(u)$, então $\lambda u(x) < s_1$ e, em virtude da Proposição A.58 (i), obtemos

$$|F(x,\lambda u(x))| \leq C_1\lambda^q u^q + c(x) \leq C_1 s_1^q + c(x).$$

Logo,

$$\Bigg| \int\limits_{\Omega \backslash M_\lambda(u)} F(x,\lambda u) \Bigg| \leq \int\limits_{\Omega \backslash M_\lambda(u)} |F(x,\lambda u)| \leq \int\limits_{\Omega \backslash M_\lambda(u)} \Big(C_1 s_1^q + c(x)\Big) \leq \int\limits_{\Omega} \Big(C_1 s_1^q + c(x)\Big).$$

Assim,

$$\Bigg| \int\limits_{\Omega \backslash M_\lambda(u)} F(x,\lambda u) \Bigg| \leq C_1 s_1^q \cdot \text{medida}(\Omega) + \int\limits_{\Omega} c(x) = K_2. \tag{2.27}$$

De (2.25), (2.26) e (2.27) resulta que

$$\mathcal{F}(\lambda u) \leq \frac{\lambda^p}{p}\|u\|_{1,p}^p - \lambda^\theta K_1(u) + K_2 \to -\infty \quad \text{quando } \lambda \to \infty$$

e a prova está completa. ■

Em relação à condição (I_1) no Teorema 2.9, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.18. *Suponha que a função de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça*

(i) *existe $q \in (1, p^*)$ tal que*

$$|f(x,s)| \leq C(|s|^{q-1} + 1) \quad \textit{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},$$

com $C \geq 0$ constante;

(ii)

$$\limsup_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} < \lambda_1 \quad \textit{uniformemente com } x \in \Omega,$$

em que λ_1 *é o primeiro autovalor de* $-\Delta_p$ *em* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Então existem constantes $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $\mathcal{F}|_{\|u\|_{1,p}=\rho} \geq \alpha$.

Demonstração. Definimos $h : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \limsup_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}.$$

De (ii) podemos encontrar $\mu \in (0, \lambda_1)$ tal que $h(x) < \mu$ uniformemente com $x \in \Omega$. Portanto, existe algum $\delta_\mu > 0$ tal que

$$\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} \leq \mu \quad \text{para } x \in \Omega,\ 0 < |s| < \delta_\mu,$$

ou seja,

$$f(x,s) \leq \mu s^{p-1} \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \in (0, \delta_\mu), \tag{2.28}$$

e

$$-\mu|s|^{p-1} \leq f(x,s) \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \in (-\delta_\mu, 0). \tag{2.29}$$

Observe que a função de Carathéodory f satisfaz $f(x,0) = 0$ para $x \in \Omega$. Decorre então de (2.28) que

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)\mathrm{d}\tau \leq \int_0^s \mu\tau^{p-1}\mathrm{d}\tau = \frac{\mu}{p}s^p$$

e de (2.29) obtemos

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)\mathrm{d}\tau = -\int_s^0 f(x,\tau)\mathrm{d}\tau \leq \int_s^0 \mu|\tau|^{p-1}\mathrm{d}\tau = \mu \frac{|\tau|^{p-1}\tau}{p}\bigg|_s^0 = \frac{\mu}{p}|s|^p.$$

Portanto,

$$F(x,s) \leq \frac{\mu}{p}|s|^p \quad \text{para } x \in \Omega,\ |s| < \delta_\mu. \tag{2.30}$$

Tendo em conta (i), temos que F satisfaz

$$|F(x,s)| \leq C_1(|s|^q + 1) \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R} \tag{2.31}$$

com $C_1 \geq 0$ constante. De fato,

$$
\begin{aligned}
|F(x,s)| = \left| \int_0^s f(x,\tau) \mathrm{d}\tau \right| &\leq \int_0^{|s|} |f(x,\tau)| \mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_0^{|s|} C\Big(|\tau|^{q-1} + 1\Big) \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{C}{q}|s|^q + |s|C\,, \quad \text{desigualdade de Young, } \tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{q'} = 1 \\
&\leq \frac{C}{q}|s|^q + \frac{|s|^q}{q} + \frac{C^{q'}}{q'} \\
&= \frac{C+1}{q}|s|^q + \frac{C^{q'}}{q'} \\
&\leq C_1(|s|^q + 1),
\end{aligned}
$$

em que $C_1 = \max\left\{ \dfrac{C+1}{q}, \dfrac{C^{q'}}{q'} \right\}$.

Escolha $q_1 \in (\max\{p,q\}, p^*)$. Então, de acordo com (2.31), existe uma constante $C_2 \geq 0$ tal que

$$
|F(x,s)| \leq C_2|s|^{q_1} \quad \text{para } x \in \Omega,\ |s| \geq \delta_\mu. \tag{2.32}
$$

De fato, se $|s| \geq \delta_\mu$, $|s|^{q_1} \geq \delta_\mu^{q_1}$, então

$$
\begin{aligned}
|F(x,s)| \leq C_1(|s|^q + 1) &\leq C_1 \left(|s|^q + \frac{|s|^{q_1}}{\delta_\mu^{q_1}} \right) \\
&= C_1 \left(\delta_\mu^q \left(\frac{|s|}{\delta_\mu} \right)^q + \frac{|s|^{q_1}}{\delta_\mu^{q_1}} \right) \\
&\leq C_1 \left(\delta_\mu^q \left(\frac{|s|}{\delta_\mu} \right)^{q_1} + \frac{|s|^{q_1}}{\delta_\mu^{q_1}} \right) \\
&= C_1 \left(\frac{\delta_\mu^q + 1}{\delta_\mu^{q_1}} \right) |s|^{q_1} = C_2|s|^{q_1} \qquad \text{para } x \in \Omega.
\end{aligned}
$$

Assim, de (2.30) e (2.32) resulta

$$
F(x,s) \leq \frac{\mu}{p}|s|^p + C_2|s|^{q_1} \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R} \tag{2.33}
$$

e então, de (2.33) decorre que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(u) &= \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^{p} - \int\limits_{\Omega} F(x,u) \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^{p} - \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\mu}{p}|u|^{p} + C_2|u|^{q_1}\right) \\
&= \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^{p} - \frac{\mu}{p}\int\limits_{\Omega} |u|^{p} - C_2\int\limits_{\Omega} |u|^{q_1} \\
&= \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^{p} - \frac{\mu}{p}\|u\|_{0,p}^{p} - C_2\|u\|_{0,q_1}^{q_1}
\end{aligned}
$$

e, já que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega)$ é contínua, $\|u\|_{0,q_1} \leq K\|u\|_{1,p}$. Então

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^{p} - \frac{\mu}{p}\|u\|_{0,p}^{p} - C_2K^{q_1}\|u\|_{1,p}^{q_1} \\
&= \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^{p} - \frac{\mu}{p}\|u\|_{0,p}^{p} - C_3\|u\|_{1,p}^{q_1} \\
&= \|u\|_{1,p}^{p}\left[\frac{1}{p}\left(1 - \mu\frac{\|u\|_{0,p}^{p}}{\|u\|_{1,p}^{p}}\right) - C_3\|u\|_{1,p}^{q_1-p}\right]
\end{aligned}
$$

e, pela caracterização variacional do primeiro autovalor λ_1 (veja a (2.10)), obtemos

$$
\mathcal{F}(u) \geq \|u\|_{1,p}^{p}\left[\frac{1}{p}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right) - C_3\|u\|_{1,p}^{q_1-p}\right] \geq \alpha > 0
$$

quando $\|u\|_{1,p} = \rho$ é suficientemente pequeno. ■

Resumindo, temos as condições para poder aplicar o Teorema 2.9: com o Teorema 2.12 $\mathcal{F}$ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), com o Teorema 2.18 existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\mathcal{F}|_{\|u\|_{1,p}=\rho} \geq \alpha$ (condição (I_1)), com o Teorema 2.17 e Observação 2.16 existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u_0\|_{1,p} \geq \rho$, tal que $\mathcal{F}(u_0) \leq 0$ (condição (I_2)).

O próximo resultado será necessário na sequência.

Lema 2.19.

(i) *Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução do problema* (2.1) *com $f(x,s) \geq 0$ para $x \in \Omega$ e $s \leq 0$, então $u \geq 0$.*

(ii) *Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução do problema* (2.1) *com $f(x,s) \leq 0$ para $x \in \Omega$ e $s \geq 0$, então $u \leq 0$.*

Demonstração. Vamos provar (i) (mesmo argumento para (ii)).

Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução do problema (2.1) e vamos denotar $\Omega_- = \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$. Definamos $u_- = \max\{-u, 0\}$. Pelo Teorema A.1 em Kinderlehrer e Stampacchia [18], temos que $u_- \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$
\nabla u_- = \begin{cases} -\nabla u & \text{em } \Omega_-, \\ 0 & \text{em } \Omega\backslash\Omega_-. \end{cases}
$$

De (2.3) com $v = u_-$ temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_- = \int_\Omega f(x,u)u_-$$

Então

$$\int_{\Omega_-} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_- + \int_{\Omega\setminus\Omega_-} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_- = \int_{\Omega_-} f(x,u)u_- + \int_{\Omega\setminus\Omega_-} f(x,u)u_-.$$

Isto implica que

$$-\int_{\Omega_-} |\nabla u|^p = -\int_{\Omega_-} f(x,u)u \geq 0.$$

Assim, $\nabla u = 0$ q.t.p. em Ω_-, consequentemente $\nabla u_- = 0$ q.t.p. em Ω. Portanto, $\|u_-\|_{1,p} = 0$, isto é, $u_- = 0$ q.t.p. em Ω.

Daí, temos que medida$(\Omega_-) = 0$, i.e. $u \geq 0$ q.t.p. em Ω. ■

Agora estamos em condições de provar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.20. *Suponha que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função de Carathéodory satisfazendo*

(i) *existe $q \in (1, p^*)$ tal que*

$$|f(x,s)| \leq C(|s|^{q-1} + 1) \quad \textit{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},$$

com $C \geq 0$ constante;

(ii)

$$\limsup_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} < \lambda_1 \quad \textit{uniformemente com } x \in \Omega,$$

em que λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

(iii) *existem constantes $\theta > p$ e $s_0 > 0$ tal que*

$$0 < \theta F(x,s) \leq sf(x,s) \quad \textit{para } x \in \Omega,\ |s| \geq s_0.$$

Então o problema (2.1) *admite soluções não triviais $u_- \leq 0 \leq u_+$.*

Demonstração. Provaremos que (2.1) tem uma solução não trivial $u_+ \geq 0$ (argumento semelhante para a existência de u_-).

Definimos $f_+ : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_+(x,s) = f\left(x, \frac{s+|s|}{2}\right)$, ou seja,

$$f_+(x,s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq 0, \\ f(x,s) & \text{se } s > 0. \end{cases}$$

Seja $F_+ : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_+(x,s) = \int_0^s f_+(x,\tau)d\tau.$$

Afirmamos que:

(i)$_+$ a função f_+ é de Carathéodory e satisfaz

$$|f_+(x,s)| \leq C(|s|^{q-1}+1) \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R};$$

(ii)$_+$ $\limsup\limits_{s\to 0} \dfrac{f_+(x,s)}{|s|^{p-2}s} < \lambda_1$ uniformemente com $x \in \Omega$;

(iii)$_+$ $\theta F_+(x,s) \leq s f_+(x,s)$ para $x \in \Omega$, $|s| \geq s_0$;

(iv)$_+$ $0 < \theta F_+(x,s) \leq s f_+(x,s)$ para $x \in \Omega$, $s \geq s_0$.

De fato, como f é de Carathéodory, então f_+ é de Carathéodory. Se $s \leq 0$, então $|f_+(x,s)| = 0 \leq C(|s|^{q-1}+1)$. Por outro lado, se $s > 0$, decorre de (i) que $|f_+(x,s)| = |f(x,s)| \leq C(|s|^{q-1}+1)$.

Portanto,

$$|f_+(x,s)| \leq C(|s|^{q-1}+1) \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},$$

mostrando (i)$_+$.

Uma vez que

$$\begin{aligned}\limsup_{s\to 0} \frac{f_+(x,s)}{|s|^{p-2}s} &= \max\left\{\limsup_{s\nearrow 0} \frac{f_+(x,s)}{|s|^{p-2}s}, \limsup_{s\searrow 0} \frac{f_+(x,s)}{|s|^{p-2}s}\right\} \\ &= \max\left\{0, \limsup_{s\searrow 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}\right\} < \lambda_1 \quad \text{uniformemente com } x \in \Omega,\end{aligned}$$

concluímos a validade de (ii)$_+$.

Como

$$F_+(x,s) = \int_0^s f_+(x,\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leq 0, \\ \int_0^s f(x,\tau)\mathrm{d}\tau, & \text{se } s > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leq 0 \\ F(x,s), & \text{se } s > 0, \end{cases}$$

temos

$$\theta F_+(x,s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leq 0 \\ \theta F(x,s), & \text{se } s > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \leq s f_+(x,s), & \text{se } s \leq 0 \\ \theta F(x,s) \leq s f(x,s) = s f_+(x,s), & \text{se } s > 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$\theta F_+(x,s) \leq s f_+(x,s) \quad \text{para } x \in \Omega,\ |s| \geq s_0,$$

concluindo a verificação de (iii)$_+$.

Se $s \geq s_0 > 0$, então $f_+(x,s) = f(x,s)$. Daí $F_+(x,s) = F(x,s)$. De (iii)$_+$ decorre que $\theta F_+(x,s) \leq s f_+(x,s)$. Logo, tendo em vista (iii), obtemos

$$0 < \theta F_+(x,s) \leq s f_+(x,s) \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \geq s_0,$$

o que mostra (iv)$_+$.

De (i)$_+$ - (iv)$_+$ inferimos que o funcional $\mathcal{F}_+ : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{F}_+(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_\Omega F_+(x,u)$$

é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e tem um ponto crítico não trivial $u_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, vamos aplicar o Teorema 2.9 com $I = \mathcal{F}_+$. Para este fim, em primeiro lugar, observemos que decorre de (i)$_+$ que os resultados relativos a $\mathcal{F}$ permanecem válidos para $\mathcal{F}_+$, com f_+ em vez de f. Claramente, $\mathcal{F}_+(0) = 0$. Por (i)$_+$, (ii)$_+$ e pelo Teorema 2.18, existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $\mathcal{F}_+|_{\|u\|_{1,p}=\rho} \geq \alpha$. Além disso, por (iv)$_+$, pelo Teorema 2.17 (i) e pelo Lema 2.14 (ii) (veja também a Observação 2.16), existe um elemento $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|e\|_{1,p} \geq \rho$, tal que $\mathcal{F}_+(e) \leq 0$. Finalmente, por (iii)$_+$ e pelo Teorema 2.12, $\mathcal{F}_+$ satisfaz a condição (PS).

O ponto crítico não trivial $u_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$ cuja existência é assegurada pelo Teorema 2.9, satisfaz

$$\int_\Omega |\nabla u_+|^{p-2} \nabla u_+ \nabla v = \int_\Omega f_+(x, u_+) v \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.34}$$

Como $f_+(x,s) = 0$ para $x \in \Omega$, $s \leq 0$, o Lema 2.19 (i) mostra que $u_+ \geq 0$.

Agora, pela definição de f_+, (2.34) torna-se

$$\int_\Omega |\nabla u_+|^{p-2} \nabla u_+ \nabla v = \int_\Omega f(x, u_+) v \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

isto finaliza a prova. ■

Observação 2.21. *O Teorema 2.20 foi originalmente provado por Ambrosetti e Rabinowitz no caso $p = 2$ (veja o Corolário 3.11 em Ambrosetti-Rabinowitz [3]). Depois, seu resultado foi frequentemente citado como um resultado de existência típico para problemas de Dirichlet não-lineares com o lado direito tendo crescimento superlinear (ver por exemplo Corolário 2.23 em Rabinowitz [20], Teorema 6.9 em de Figueiredo [14], Teorema 6.2 em Struwe [21], entre outros).*

Neste contexto, o Teorema 2.20 pode ser visto como um modelo de resultado de existência para problemas de Dirichlet para o p-Laplaciano tendo no lado direito uma função com crescimento "super polinomial $p-1$", já que a condição (iii) nos dá

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} = +\infty \tag{2.35}$$

Além disso, (2.35) *mostra que a generalidade do Teorema 2.20 não é perdida se, em (i), q é requerida estar em (p, p^*) em vez de $(1, p^*)$.*

Por outro lado, um raciocínio semelhante ao da demonstração do Teorema 2.17 mostra que as condições (iii) e (i) no Teorema 2.20 dão a existência de algum $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, $\gamma > 0$, tal que $F(x,s) \geq \gamma(x)|s|^\theta$ para $x \in \Omega$, e $|s| \geq s_0$ (veja também a prova da Proposição 2.23 abaixo). Isso mostra que o potencial F cresce mais rápido do que $|s|^p$ com $|s| \to \infty$. Para um resultado de existência que permite que F cresça mais rápido do que $|s|^p$ ou mais lento que $|s|^p$ citamos Costa e Magalhães [9]. ◁

2.4 Múltiplas Soluções

Nesta seção, vamos obter uma infinidade de soluções não triviais para o problema (2.1). Para tanto utilizaremos a seguinte versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha, cuja prova pode ser encontrada em Rabinowitz [20, Teorema 9.12]:

Teorema 2.22. *Seja X um espaço de Banach real de dimensão infinita e seja $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ par, satisfaz a condição (PS) e $I(0) = 0$. Se:*

(I$_1$) *existem constantes ρ, $\alpha > 0$ tal que $I|_{\|x\|=\rho} \geq \alpha$;*

(I$_2$) *para cada subespaço X_1 finito dimensional de X o conjunto $\{x \in X_1 : I(x) \geq 0\}$ é limitado,*

então I possui uma sequência ilimitada de valores críticos.

Assim estamos interessados em estabelecer as condições para poder aplicar o teorema acima garantir a existência de uma sequência de soluções não limitada para o problema (2.1).

Vamos precisar do seguinte resultado:

Proposição 2.23. *Suponhamos que a função de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça*

(i) *existe $q \in (1, p^*)$ tal que*

$$|f(x,s)| \leq C(|s|^{q-1} + 1) \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}$$

com $C \geq 0$ constante;

(ii) *existem números $\theta > p$ e $s_0 > 0$ tal que*

$$0 < \theta F(x,s) \leq sf(x,s) \quad \text{para } x \in \Omega,\ |s| \geq s_0.$$

Então, se X_1 for um subespaço de dimensão finita de $W_0^{1,p}(\Omega)$, o conjunto $S = \{v \in X_1 : \mathcal{F}(v) \geq 0\}$ é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. De (i), F satisfaz (veja demonstração do Teorema 2.18)

$$|F(x,s)| \leq C_1(|s|^q + 1) \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}, \tag{2.36}$$

com $C_1 \geq 0$ constante.

Afirmamos que existe $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, com $\gamma > 0$ em Ω, tal que

$$F(x,s) \geq \gamma(x)|s|^\theta \quad \text{para } x \in \Omega,\ |s| \geq s_0. \tag{2.37}$$

De fato, como na demonstração do Teorema 2.17, obtemos

$$F(x,s) \geq \gamma_1(x)s^\theta \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \geq s_0, \tag{2.38}$$

em que $\gamma_1(x) = \dfrac{F(x,s_0)}{s_0^\theta}$. Além disso, de (2.36) decorre que $\gamma_1 \in L^\infty(\Omega)$, e de (ii) obtemos $\gamma_1 > 0$ em Ω.

Um raciocínio semelhante mostra que

$$F(x,s) \geq \gamma_2(x)|s|^\theta \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \leq -s_0, \tag{2.39}$$

em que $\gamma_2(x) = \dfrac{F(x, -s_0)}{s_0^\theta}$. Novamente temos $\gamma_2 \in L^\infty(\Omega)$ e $\gamma_2 > 0$ em Ω.

De fato, para $x \in \Omega$ e $\tau \leq -s_0$, de (ii) decorre que

$$\theta F(x,\tau) \leq \tau f(x,\tau) \quad \Rightarrow \quad -\tau f(x,\tau) \leq -\theta F(x,\tau) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x,\tau)}{F(x,\tau)} \leq \frac{\theta}{\tau}.$$

Pela definição de F, $F'_\tau(x,\tau) = f(x,\tau)$, de modo que

$$\frac{F'_\tau(x,\tau)}{F(x,\tau)} \leq \frac{\theta}{\tau}.$$

Daí, integrando de s a $-s_0$ obtemos

$$\int_s^{-s_0} \frac{F'_\tau(x,\tau)}{F(x,\tau)} \mathrm{d}\tau \leq \int_s^{-s_0} \frac{\theta}{\tau} \mathrm{d}\tau \quad \Rightarrow \quad \ln F(x,\tau)\Big|_s^{-s_0} \leq \theta \ln|\tau|\Big|_s^{-s_0}.$$

Logo,

$$\ln F(x,-s_0) - \ln F(x,s) \leq \theta(\ln s_0 - \ln|s|) \quad \Rightarrow \quad \ln F(x,-s_0) - \ln F(x,s) \leq \ln\left(\frac{s_0}{|s|}\right)^\theta.$$

Portanto,

$$\ln \frac{F(x,-s_0)}{s_0^\theta}|s|^\theta \leq \ln F(x,s) \quad \Rightarrow \quad \gamma_2(x)|s|^\theta \leq F(x,s),$$

donde, pelo item (ii), temos que $\gamma_2(x) = \dfrac{F(x,-s_0)}{s_0^\theta} > 0$.

Logo, de acordo com (2.36),

$$|\gamma_2(x)| = \left|\frac{F(x,-s_0)}{s_0^\theta}\right| \leq \frac{C_1(|-s_0|^q + 1)}{s_0^\theta} = M,$$

mostrando que $\gamma_2 \in L^\infty(\Omega)$.

Portanto, (2.37) é satisfeita com $\gamma(x) = \min\{\gamma_1(x), \gamma_2(x)\}$ para $x \in \Omega$, como afirmamos.

Vamos provar que $\mathcal{F}$ satisfaz a desigualdade

$$\mathcal{F}(v) \leq \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \int_\Omega \gamma(x)|v|^\theta - K \quad \text{para } v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{2.40}$$

com $K \geq 0$ constante.

Seja v escolhido arbitrariamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e denotemos

$$\Omega_< = \{x \in \Omega : |v(x)| < s_0\}.$$

De (2.36) obtemos

$$\int_{\Omega_<} F(x,v) \geq -C_1 \int_{\Omega_<} (|v|^q + 1) \geq -C_1 \int_\Omega (s_0^q + 1) = -C_1(s_0^q + 1) \cdot \text{medida}(\Omega) = K_1.$$

Se $x \in \Omega \backslash \Omega_<$, $|v(x)| \geq s_0$. Decorre de (2.37) que

$$\int_{\Omega \backslash \Omega_<} F(x,v) \geq \int_{\Omega \backslash \Omega_<} \gamma(x)|v|^\theta.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v) &= \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \left(\int_{\Omega_<} F(x,v) + \int_{\Omega \backslash \Omega_<} F(x,v) \right) \\
&\leq \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \int_{\Omega \backslash \Omega_<} \gamma(x)|v|^\theta - K_1 \\
&= \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \int_{\Omega} \gamma(x)|v|^\theta + \int_{\Omega_<} \gamma(x)|v|^\theta - K_1.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\int_{\Omega_<} \gamma(x)|v|^\theta \leq \int_{\Omega_<} \gamma(x)s_0^\theta \leq s_0^\theta \int_{\Omega} \gamma(x) \leq \|\gamma\|_{0,\infty} s_0^\theta \cdot \text{medida}(\Omega).$$

Portanto,

$$\mathcal{F}(v) \leq \frac{1}{p}\|v\|_{1,p}^p - \int_{\Omega} \gamma(x)|v|^\theta + K,$$

em que $K = \|\gamma\|_{0,\infty} s_0^q \cdot \text{medida}(\Omega) - K_1$, e (2.40) está provada.

O funcional $\|\cdot\|_\gamma : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\|v\|_\gamma = \left(\int_{\Omega} \gamma(x)|v|^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

No subespaço de dimensão finita X_1, como as normas $\|\cdot\|_{1,p}$ e $\|\cdot\|_\gamma$ são equivalentes, existe uma constante $\widetilde{K} = \widetilde{K}(X_1) > 0$ tal que

$$\|v\|_{1,p} \leq \widetilde{K} \left(\int_{\Omega} \gamma(x)|v|^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad \text{para todo } v \in X_1.$$

Consequentemente, por (2.40), em X_1 temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(v) &\leq \frac{1}{p} \left[\widetilde{K} \left(\int_{\Omega} \gamma(x)|v|^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right]^p - \int_{\Omega} \gamma(x)|v|^\theta - K \\
&= \frac{1}{p}\widetilde{K}^p \left(\int_{\Omega} \gamma(x)|v|^\theta \right)^{\frac{p}{\theta}} - \int_{\Omega} \gamma(x)|v|^\theta - K \\
&= \frac{1}{p}\widetilde{K}^p \|v\|_\gamma^p - \|v\|_\gamma^\theta - K.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{p}\widetilde{K}^p\|v\|_\gamma^p - \|v\|_\gamma^\theta - K \geq 0 \quad \text{para todo } v \in S$$

e tendo em conta que $\theta > p$, concluímos que S é limitado. ∎

Agora, podemos afirmar

Teorema 2.24. *Suponha que a função de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar no segundo argumento: $f(x,s) = -f(x,-s)$. Se as condições (i), (ii), (iii) do Teorema 2.20 forem satisfeitas, isto é:*

(i) *existe $q \in (1, p^*)$ tal que*

$$|f(x,s)| \leq C(|s|^{q-1} + 1) \quad \textit{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},$$

com $C \geq 0$ constante;

(ii)

$$\limsup_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} < \lambda_1 \quad \textit{uniformemente com } x \in \Omega$$

em que λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$;

(iii) *existem constantes $\theta > p$ e $s_0 > 0$ tal que*

$$0 < \theta F(x,s) \leq sf(x,s) \quad \textit{para } x \in \Omega,\ |s| \geq s_0.$$

então o problema (2.1) *tem uma sequência ilimitada de soluções.*

Demonstração. A função f sendo ímpar, o funcional $\mathcal{F}$ é par. De fato, decorre da definição de F que

$$\begin{aligned} F(x,-s) &= \int_0^{-s} f(x,\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad (\zeta = -\tau) \\ &= \int_0^{s} -f(x,-\zeta)d\zeta, \qquad (f \text{ impar}) \\ &= \int_0^{s} f(x,\zeta)d\zeta = F(x,s). \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{F}(-u) = \frac{1}{p}\|-u\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x,-u) = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x,u) = \mathcal{F}(u).$$

É óbvio que $\mathcal{F}(0) = 0$. De (iii) decorre que, de acordo com o Teorema 2.12, $\mathcal{F}$ satisfaz a condição (PS). Por (i), (ii) e pelo Teorema 2.18, existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $\mathcal{F}|_{\|u\|_{1,p}=\rho} \geq \alpha$. De (i) e (iii), pela Proposição 2.23, temos que o conjunto $\{v \in X_1 : \mathcal{F}(u) \geq 0\}$ é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$, sempre que X_1 for um subespaço finito dimensional de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Assim o Teorema 2.22 se aplica com $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ e $I = \mathcal{F}$. ∎

Observação 2.25. *Na Proposição 2.23, de acordo com a condição (ii), o expoente q na condição de crescimento (i) é forçado a estar no intervalo (p, p^*) (veja a Observação 2.21). Portanto, como no caso do Teorema 2.20, a generalidade do Teorema 2.24 não é perdida se q em (i) é requerido estar no intervalo (p, p^*) em vez de $(1, p^*)$.* $\lhd$

Observação 2.26. *No caso particular $p = 2$, a suposição de simetria em f permite remover a condição (ii) no Teorema 2.24 (veja, por exemplo, o Teorema 9.38 em Rabinowitz [20] e o Teorema 6.6 em Struwe [21]).* $\lhd$

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Neste capítulo recordaremos resultados básicos que serão utilizados livremente ao longo deste trabalho.

A.1 Funcionais Diferenciáveis

Começamos relembrando algumas noções básicas sobre a diferenciabilidade de funções.

Definição A.1. *Sejam U um aberto de um espaço de Banach X e $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ um funcional*[1]

(i) *O funcional φ é Gâteaux diferenciável em $u \in X$ se existir $f \in X^*$ tal que, para todo $h \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u + th) - \varphi(u)}{t} = \langle f, h \rangle .$$

Se esse limite existir, ele é único e denotaremos $\varphi'_G(u) = f$, que chamaremos de derivada de Gâteaux de φ;

(ii) *o funcional φ tem derivada de Fréchet $f \in X^*$ em u se*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{||h||} \Big[\varphi(u + h) - \varphi(u) - \langle f, h \rangle \Big] = 0, \ \ \forall\, h \in X.$$

Nesse caso, denotaremos $\varphi' = f$, que chamaremos de derivada de Fréchet de φ (ou simplesmente derivada de φ);

(iii) *O funcional φ pertence a $C^1(U, \mathbb{R})$ se φ possuir derivada de Fréchet φ' em U e esta for contínua em U.*

Observação A.2. *Um funcional Fréchet diferenciável é Gâteaux diferenciável. Um funcional Fréchet diferenciável em u sempre é contínuo em u, mas um funcional Gâteaux diferenciável em u pode não ser contínuo em u.*[2] $\lhd$

[1] Não necessariamente linear.

[2] Por exemplo, o funcional $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $g(x, y) = x^2 y/(x^4 + y^2)$ para $y \neq 0$) e $g(x, 0) = 0$ não é contínuo na origem, o que se verifica tomando $y = x^2$. Por outro lado, $\varphi'_G(0, 0) = 0$.

Lema A.3. *Suponha que $\varphi : U \to \mathbb{R}$ seja contínua no segmento de reta $[a,b] \subset U$, Gâteaux diferenciável e contínua em $(a,b) \subset U$. Então*

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_0^1 \left\langle \varphi'_G(a + t(b-a)), b - a \right\rangle \mathrm{d}t.$$

Em particular, vale a Desigualdade do Valor Médio:

$$\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} \|\varphi'_G(a + t(b-a))\| \, \|b - a\|.$$

Demonstração. Considere a função real $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \varphi(a + t(b-a))$. Então podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo à função $g'(t)$. Assim

$$\varphi(b) - \varphi(a) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left\langle \varphi'_G(a + t(b-a)), b - a \right\rangle \mathrm{d}t. \qquad \blacksquare$$

Proposição A.4. *Se φ for Gâteaux diferenciável em U e φ'_G for contínua em $u_0 \in U$, então φ é Fréchet diferenciável em u_0 e $\varphi'(u_0) = \varphi'_G(u_0)$.*

Demonstração. Defina $f(t) = \varphi(u_0 + th) - \varphi(u_0) - t\langle \varphi'_G(u_0), h\rangle$. Então $f(0) = 0$ e $f'(t) = \left\langle \varphi'_G(u_0 + th) - \varphi'_G(u_0), h \right\rangle$. Aplicando a Desigualdade do Valor Médio, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u_0 + h) - \varphi(u_0) - \langle \varphi'_G(u_0), h\rangle\| &= \|f(1) - f(0)\| \\
&\leq \|h\| \sup_{t\in[0,1]} \|\varphi'_G(u_0 + th) - \varphi'_G(u_0)\|.
\end{aligned}$$

A continuidade de φ'_G em u_0 garante então que φ é Fréchet diferenciável em u_0 e $\varphi'(u_0) = \varphi'_G(u_0)$. $\blacksquare$

Suponhamos que $\mathcal{H}$ seja um espaço de Hilbert e que $\varphi : U \subset \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ seja (Fréchet) diferenciável. Então $\varphi'(u) \in \mathcal{H}^*$ para todo $u \in U$. Decorre do Teorema de Representação de Riesz que $\varphi'(u) \in \mathcal{H}^*$ pode ser identificado com um elemento de $\mathcal{H}$.

Definição A.5. *Seja $\varphi : U \subset \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ um funcional diferenciável. O gradiente de φ em u, denotado por $\nabla\varphi(u)$, é o elemento de $\mathcal{H}$ definido por*

$$(\nabla\varphi(u), h) = \langle \varphi'(u), h\rangle.$$

Um operador $F\colon U \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador potencial se existir um funcional $\varphi : U \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla\varphi$.

A.2 Alguns resultados da Análise Funcional

Agora recordamos resultados básicos da Análise Funcional e da teoria de integração.

Denotaremos por $\mathrm{d}x$ a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}$). Os subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ nos quais $\mathrm{d}x$ está bem definida são denominados conjuntos mensuráveis. As funções f tais que, para cada $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) > a\}$ é um conjunto mensurável, são denominados funções mensuráveis. A integral de Lebesgue, por sua vez, é definida para funções mensuráveis.

Denotaremos por $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio (aberto) limitado do $\mathbb{R}^N$.

Definição A.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dizemos que duas funções são equivalentes em Ω com respeito à medida de Lebesgue, se elas forem iguais em quase toda parte (q.t.p.). Isto é, $v \equiv u$, se v e u são diferentes apenas em um subconjunto de Ω com medida nula.*

A classe de equivalência determinada por v consiste de todas as funções w que são equivalentes a v. Com base nas classes de equivalência, definimos os espaços L^p.

Definição A.7. *Seja $1 \leq p < \infty$. Se define o espaço $L^p(\Omega)$ por*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \;:\; f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

em que representamos simplesmente por f a classe de equivalência determinada por f.

A função $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma no espaço $L^p(\Omega)$.

Definição A.8. *Se define*

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{ f\colon \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e existe uma constante } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega \Big\}$$

e se denota a norma nesse espaço por

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \Big\{ C : |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega \Big\}.$$

Pode-se mostrar que os espaços $L^p(\Omega)$ são espaços de Banach com as normas definidas acima.

Algumas vezes vamos escrever L^p em vez de $L^p(\Omega)$ e $\int_\Omega f$ em vez de $\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x$.

Teorema A.9 (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio qualquer e $1 \leq p, p' \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Suponhamos que $f \in L^p(\Omega)$ e que $g \in L^{p'}(\Omega)$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} \mathrm{d}x \right)^{1/p'}.$$

Teorema A.10. *Sejam (f_n) um sequência em L^p e $f \in L^p$ tais que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Então existe uma subsequência (f_{n_k}) tal que*

(i) *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω.*

(ii) *$|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ q.t.p. em Ω para todo k, em que $h \in L^p$.*

Proposição A.11 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ uma sequência tal que $f_n \to f$ em quase todo ponto de Ω quando $n \to +\infty$. Suponhamos que existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale a desigualdade $|f_n(x)| \leq g(x)$ em quase todo ponto de Ω. Então $f \in L^1(\Omega)$ e também*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0 \quad e \quad \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\mathrm{d}x$$

Teorema A.12 (Teorema de Fubini). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^M$ e $B \subset \mathbb{R}^P$, com $M + P = N$ e $I = A \times B \subseteq \mathbb{R}^N$. Denotemos um ponto $(x, y) \in I$ de tal forma que $x \in A$ e $y \in B$.*
Consideremos uma função $f : A \times B \to \mathbb{R}$ integrável em $I = A \times B$, então temos que

$$\int_{I=A\times B} f\mathrm{d}x = \int_A \left(\int_B f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_B \left(\int_A f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Proposição A.13 (Desigualdade de Young). *Dados os números $a, b \in \mathbb{R}+$ e dado $p, p' \in \mathbb{R}$ com $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, vale a desigualdade*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Além disso, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-p'/p}/p'$ tal que

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^{p'}.$$

Definição A.14 (Convergência fraca). *Sejam X um espaço de Banach, X^* denotando o seu dual, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x \in X$ no sentido fraco quando $n \to \infty$, se*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \quad \forall\, f \in X^*.$$

Denotamos a convergência fraca por $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema A.15. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X. Então, é possível extrair de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsequência $(x_{n_n})_{k\in\mathbb{N}}$ a qual converge fraco em X.*

Proposição A.16 (Propriedades da Convergência Fraca). *Seja (u_n) uma sequência no espaço de Banach X sobre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Então:*

(i) *A convergência forte $u_n \to u$ implica a convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$.*

(ii) *Se $\dim(X) < \infty$, então a convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ implica que $u_n \to u$ forte.*

(iii) *Se $u_n \rightharpoonup u$, então $\|u_n\|$ é limitada e*

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$$

(iv) *Seja X localmente uniformemente convexo. Se $u_n \rightharpoonup u$ e $\|u_n\| \to \|u\|$, então $u_n \to u$.*

(v) *Se cada subsequência de (u_n) que converge fraco tem o mesmo limite u, então $u_n \rightharpoonup u$.*

Teorema A.17 (Convergência fraca). *Seja X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear compacto. Suponhamos que a sequência (x_n) em X seja fracamente convergente, digamos $x_n \rightharpoonup x$. Então (Tx_n) é fortemente convergente em Y e tem limite $y = Tx$.*

Definição A.18. *Seja X um espaço topológico. Diz-se que uma função $\phi : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente (s.c.i.) se $\phi^{-1}((a, +\infty))$ for aberto em X, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. (Se X for um espaço métrico, então $\phi : X \to \mathbb{R}$ é s.c.i. se, e somente se, $\phi(u) \leq \liminf \phi(u_n)$ para qualquer $u \in X$ e $(u_n) \subset X$ tal que $u_n \to u$).*

Teorema A.19. *Seja X um espaço topológico compacto e seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional s.c.i. Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que*

$$\phi(u_0) = \inf_{u \in X} \phi(u).$$

Definição A.20. *Seja X um espaço topológico. Diz-se que $\phi : X \to \mathbb{R}$ é fracamente semicontínua inferiormente (fracamente s.c.i.), se ϕ for s.c.i. considerando X com sua topologia fraca.*

Observação A.21. *Sendo X um espaço normado, podemos definir uma injeção canônica J dada da seguinte forma*

$$\begin{array}{rcccccc} J : X & \to & X^{**} & & & & \\ x & \mapsto & Jx & : & X^{*} & \to & \mathbb{R} \\ & & & & f & \mapsto & \langle Jx, f \rangle = \langle f, x \rangle . \end{array}$$

onde X^{**} é o bidual, isto é, o dual de X^*. Então J assim definida é linear e também é uma simetria; isto é $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$. $\lhd$

Se a injeção canônica é sobrejetiva, então X é chamado espaço reflexivo.

Definição A.22. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Dizemos que o funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$ é coercivo se $\phi(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$.*

Teorema A.23. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Suponhamos que $\phi : X \to \mathbb{R}$ satisfaça:*

(i) *ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente,*

(ii) *ϕ é coercivo.*

Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que $\phi(u_0) = \inf\limits_{u \in X} \phi(u)$.

Se o funcional ϕ também for diferenciável, então qualquer ponto de mínimo u_0 é um ponto crítico de ϕ, ou seja, $\phi'(u_0) = 0 \in X^*$.

Lema A.24. *Se $\phi : X \to \mathbb{R}$ for um funcional convexo semicontínuo inferiormente no espaço de Banach reflexivo X, então ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente.*

Teorema A.25. *Sejam X um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em X. Se $x_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca de X, então $\|x_n\|$ é limitada e*

$$\|x\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|.$$

O seguinte resultado será usado em algumas desigualdades.

Lema A.26. *Se $1 \leq r < \infty$ e $a \geq 0, b \geq 0$, então*

$$(a + b)^r \leq 2^{r-1}(a^r + b^r)$$

Demonstração. Considere $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por $\phi(t) = t^r$.
Temos que $\phi''(t) = r(r-1)t^{r-2} \geq 0$ para $t \geq 0$, o que garante que ϕ é convexa. Consequentemente,

$$\phi(at + (1-t)b) \leq t\phi(a) + (1-t)\phi(b), \quad a, b \in \mathbb{R}, \ \forall \ t \in [0,1].$$

Como $\phi(a+b) = \phi\left(\frac{1}{2}(2a) + \frac{1}{2}(2b)\right)$ decorre da convexidade de ϕ que

$$\phi(a+b) \leq \frac{1}{2}\phi(2a) + \frac{1}{2}\phi(2b).$$

de todo isto temos que

$$(a+b)^r \leq \frac{1}{2}(2a)^r + \frac{1}{2}(2b)^r = 2^{r-1}\left(a^r + b^r\right).$$

$\blacksquare$

A.3 Espaços de Sobolev

Apresentamos aqui as principais definições e conceitos relacionados com derivada fraca, e espaços de Sobolev e algumas de suas propriedades.

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto não-vazio e $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Definição A.27. *Dizemos que um conjunto A está compactamente contido em Ω, o que será denotado por $A \subset\subset \Omega$, se $A \subset \bar{A} \subset \Omega$, sendo $\bar{A}$ um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^N$.*

Definição A.28. *O conjunto $\overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ é chamado suporte da função f. Denotamos este conjunto por* $\operatorname{supp} f$.

Definição A.29. *$C_0^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, cujas derivadas parciais para todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto contido em Ω*

Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto não vazio. Definimos a função

$$1_K(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \in K \\ 0\,, & \text{se } x \notin K, \end{cases}$$

chamada função característica de K.

Definição A.30. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Uma função $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $f|_K \in L^p(\Omega)$, para todo compacto $K \subset \Omega$; isto é, se $f \in L^p(K)$, para todo compacto $K \subset \Omega$.*

Seja o vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$, onde α_i é um inteiro não negativo. Então α é um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$. Dado um multi-índice α, definimos

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Definição A.31. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, α um multi-índice e $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que g é a α-ésima derivada fraca de f em Ω e escrevemos $D^\alpha f = g$ se*

$$\int_\Omega f(x)\, D^\alpha \phi(x) \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x)\, \phi(x) \mathrm{d}x, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definição A.32. *Seja k um inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como o espaço de (classes de equivalências de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que qualquer derivada fraca de u, até a ordem k, é uma função do $L^p(\Omega)$. Isto é,*

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ com } |\alpha| \leq k \right\}.$$

Denotaremos $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Uma observação importante é que valem as seguintes inclusões

$$C_0^\infty(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega).$$

Além disso, para $1 \leq p \leq \infty$, $W^{k_2,p}(\Omega) \subset W^{k_1,p}(\Omega)$, quando $k_1 \leq k_2$.

Para $1 \leq p < \infty$, $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com respeito à norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Por outro lado, $W^{k,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach com respeito à norma

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Definição A.33. *Denotaremos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ e por $W^{-k,p'}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$, em que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Portanto, uma função $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existir uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Uma função $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ satisfaz

$$D^\alpha u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \text{ para todo } |\alpha| \leq k-1$$

Notamos que, para cada k não negativo, $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma induzida de $W^{k,p}(\Omega)$. Uma norma para $W_0^{k,p}(\Omega)$ equivalente à norma definida em $W^{k,p}(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| = k} |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Passaremos agora a considerar alguns teoremas de imersão. Sejam U e V espaços vetoriais normados.

Definição A.34 (Imersão Contínua ($U \hookrightarrow V$)). *Dizemos que a inclusão $U \subset V$ é uma imersão contínua se a aplicação inclusão $I : U \to V$ for contínua, ou seja, U está imerso continuamente em V se existir uma constante C tal que*

$$\|u\|_V \leq C\|u\|_U \quad \forall\, u \in U.$$

Definição A.35 (Imersão compacta ($U \overset{cpt.}{\hookrightarrow} V$)). *Se a aplicação inclusão, além de contínua, for compacta, dizemos que a imersão $U \hookrightarrow V$ é compacta. Em outras palavras, sequências limitadas em U possuem subsequências convergentes em V.*

Teorema A.36. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto de classe $C^1(\Omega)$ com fronteira limitada e $1 \leq p \leq \infty$. Então são contínuas as seguintes imersões:*

(i) *se $1 \leq p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, em que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$;*

(ii) *se $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [p, +\infty)$;*

(iii) *se $p > N$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

Observação A.37. *Das partes (i) e (ii) do Teorema A.36 decorre que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega),$$

em que $q = \dfrac{Np}{N-p}$, se $N > p$, e $q \in [p, +\infty)$, se $N = p$.
Em particular, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

e, pela equivalência das normas anteriormente informada, temos

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

$\triangleleft$

Teorema A.38 (Rellich-Kondrachov). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto limitado de classe $C^1(\Omega)$ e $N \geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) *se $p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{cpt.}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \forall\, q \in [1, p^*)$, onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$;*

(ii) *se $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{cpt.}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \forall\, q \in [1, +\infty)$;*

(iii) *se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{cpt.}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.*

Corolário A.39 (Teorema de Rellich-Kondrachov). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Para $p \geq 1$ vale*

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{cpt.}{\hookrightarrow} L^p(\Omega).$$

A.4 O Grau de Leray-Schauder

Primeiramente vamos dar a definição do grau topológico em dimensão finita, conhecida como teoria do grau topológico de Brouwer.[3]

Definição A.40. *Seja $D \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado. Se $\phi \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e $y \in \mathbb{R}^N \backslash \phi(\partial D)$, então (ϕ, D, y) é uma **terna admissível** para o grau topológico de Brouwer.*

[3] Nossa principal referência nessa seção foi Afonso e de Souza [2].

Agora, vamos à definição do grau no caso específico em que ϕ é de classe C^1 e y é valor regular de ϕ.

Definição A.41. *Seja (ϕ, D, y) uma terna admissível tal que $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ e y é um valor regular de ϕ. Definimos o grau de Brouwer da terna (ϕ, D, y) por*

$$\deg(\phi, D, y) := \sum_{x \in \phi^{-1}(y) \cap D} \operatorname{sgn}(J_\phi[x]),$$

em que $\operatorname{sgn}(J_\varphi[x])$ é o sinal do determinante da matriz jacobiana de ϕ no ponto x. Se $\phi^{-1}(y) \cap D = \emptyset$, definimos $\deg(\phi, D, y) = 0$.

Veremos, agora, a teoria do grau topológico em dimensão infinita, mais conhecida como teoria do grau de Leray-Schauder.

Na sequência, E denota um espaço de Banach munido com a norma $\|\cdot\|$.

Definição A.42. *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de E. Diremos que uma aplicação $\phi = I - T : \overline{\Omega} \to E$ é uma **perturbação de dimensão finita da identidade**, em que $I : E \to E$ é a aplicação identidade e $T \in C(\overline{\Omega}, E)$, se $T(\overline{\Omega})$ estiver contido em um subespaço de dimensão finita de E.*

Definição A.43. *Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado de E e $\phi = I - T : \overline{\Omega} \to E$ uma perturbação de dimensão finita da identidade. Se $b \notin \phi(\partial\Omega)$ e F for um subespaço de dimensão finita de E contendo $b \in T(\overline{\Omega})$, definiremos o grau de Leray-Schauder de ϕ em Ω com relação a b por:*

$$\deg(\phi, \Omega, b) := \deg(\phi|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Definição A.44. *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de E. Um operador $T : \overline{\Omega} \to E$ é **compacto** se for contínuo e $T(\overline{\Omega})$ for relativamente compacto (ou seja, o conjunto $\overline{T(\overline{\Omega})}$ for compacto).*

Denotaremos o conjunto de todos os operadores compactos $T : \overline{\Omega} \to E$ por $K(\overline{\Omega}, E)$. Não é difícil verificar que $K(\overline{\Omega}, E)$ munido da norma

$$\|T\|_K = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|T(x)\|, \quad T \in K(\overline{\Omega}, E).$$

é um espaço de Banach.

Definição A.45. *Se $T : \overline{\Omega} \to E$ for um operador compacto, diremos que a aplicação $\phi = I - T$ é uma **perturbação compacta da identidade**.*

Lema A.46. *Seja ϕ uma perturbação compacta da identidade, com $\phi : I - T$, $T : \overline{\Omega} \to E$ e $T \in K(\overline{\Omega}, E)$. Então:*

(i) *ϕ é um operador fechado (isto é, a imagem por ϕ de um conjunto fechado é um conjunto fechado);*

(ii) *ϕ é própria (isto é, a imagem inversa por ϕ de um conjunto compacto é um conjunto compacto).*

Definição A.47. *Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado de E e $\phi = I - T : \overline{\Omega} \to E$ uma perturbação compacta da identidade. Se $b \notin \phi(\partial\Omega)$, definimos o grau de Leray-Schauder de ϕ em Ω com relação a b por*

$$\deg(\phi, \Omega, b) = \deg(\phi_r, \Omega, b),$$

em que $\phi_r = I - T_r$ é uma perturbação de dimensão finita da identidade que satisfaz

$$\|\phi - \phi_r\| < \frac{r}{2},$$

sendo $r = \operatorname{dist}(b, \phi(\partial\Omega))$.

Dentre as propriedades do grau de Leray-Schauder, destacamos as seguintes:

Proposição A.48. *Se Ω é um subconjunto aberto e limitado de E e $I : E \to E$ é a aplicação identidade, então:*

$$\deg(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & b \in \Omega \\ 0, & b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Proposição A.49. *Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado de E e $\phi = I - T : \overline{\Omega} \to E$ uma aplicação, onde $T : \overline{\Omega} \to E$ é um operador compacto. Se $b \notin \phi(\overline{\Omega})$, então $\deg(\phi, \Omega, b) = 0$. Em particular, temos que se $b \notin \phi(\partial\Omega)$ e $\deg(\phi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $u_0 \in \Omega$ tal que $\phi(u_0) = b$.*

Proposição A.50. *Seja H uma aplicação em $C(\overline{\Omega} \times [0,1], E)$ definida por $H(x,t) = x - S(x,t)$, para $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,1]$, onde $S : \overline{\Omega} \times [0,1] \to E$ é um operador compacto. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$, então $\deg(H(\cdot,t), \Omega, b)$ é constante em $[0,1]$.*

Como consequência destas três propriedades listadas acima, obtemos o seguinte resultado.

Teorema A.51 (Teorema do Ponto Fixo de Schaefer). *Seja $T : E \to E$ um operador compacto. Se existir $r > 0$ tal que*

$$\sigma T(u) = u \Longleftrightarrow \|u\| < r,$$

para $u \in E$ e $\sigma \in [0,1]$, então T admitirá um ponto fixo em E.

Demonstração. Seja $\overline{B}_r(0) = \{x \in E : \|x\| \le r\}$ e defina $H : \overline{B}_r(0) \times [0,1] \to E$ por $H(u,\sigma) = u - \sigma T(u)$, para $(u,\sigma) \in \overline{B}_r(0) \times [0,1]$.

Pela Proposição A.50, temos

$$\deg(H(\cdot,0), B_r(0), 0) = \deg(H(\cdot,1), B_r(0), 0) \Longrightarrow \deg(I, B_r(0), 0) = \deg(I - T, B_r(0), 0).$$

Então, pela Proposição A.48, $\deg(I - T, B_r(0), 0) = 1 \neq 0$ e, pela Proposição A.49, existe $u \in B_r(0)$ tal que $(I - T) = 0$, isto é, $u = T(u)$. ■

A.5 A subdiferencial

Em áreas aplicadas, frequentemente surgem problemas de otimização cuja função objetivo não é diferenciável, mas tem a propriedade de ser convexa (por exemplo, a função objetivo pode ser uma combinação de funções lineares). Isto inviabiliza a aplicação de uma ampla classe de algoritmos. Contudo, para muitas funções, o subdiferencial está definido em pontos onde a derivada não existe. Esta característica e o fato de poder ser definido em espaços de dimensão infinita fazem do subdiferencial uma ferramenta fundamental em otimização convexa.

Definição A.52. *Se $x \in \mathrm{dom}(f)$, definimos a subdiferencial de f em x como o subconjunto de X^**

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle \,,\ \forall\, y \in X\}$$

e dizemos que f é subdiferenciável em x se $\partial f(x) \neq 0$.
Se $x \notin \mathrm{dom}(f)$, então $\partial f(x) = \emptyset$. Neste caso dizemos que f é não subdiferenciável em x. Qualquer $x^* \in \partial f(x)$ é denominado subgradiente de f em x.

A interpretação geométrica do subgradiente de f em x é dada na Figura A.1: a função $y \longmapsto f(x) + \langle x^*, y - x \rangle$ determina um hiperplano não vertical que suporta o gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

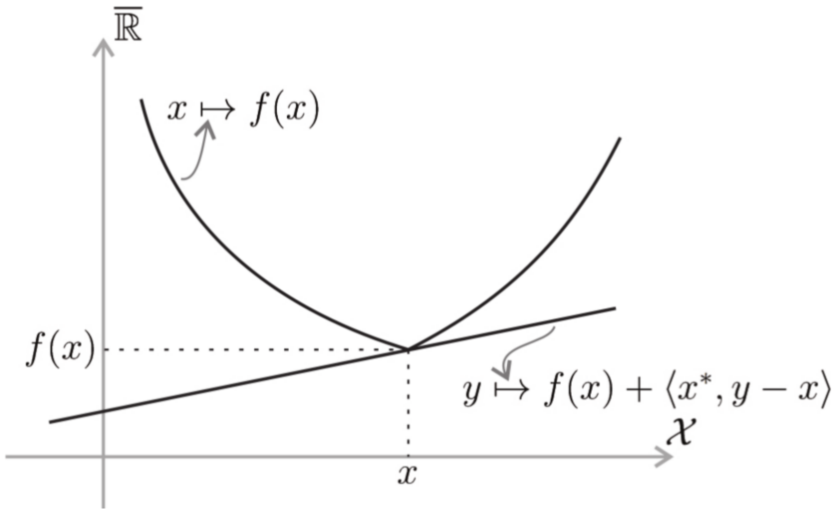


Figura A.1: Interpretação geométrica do subgradiente.

Exemplo A.53. *O subdiferencial da função norma no ponto zero coincide com a bola unitária de X^*.*

De fato,

$$x^* \in \partial \| \cdot \|(0) \iff \langle x^*, y \rangle \leq \|y\| \iff x^* \in B[0,1]$$

$\triangleleft$

Exemplo A.54. *Consideremos a função $f = |\cdot|$ definida em $\mathbb{R}$. Para $x \neq 0$ temos que f é diferenciável, de modo que $\partial f(x) = \{-1\}$, se $x < 0$, e $\partial f(x) = \{1\}$, se $x > 0$. Para $x = 0$ temos $\partial f(0) = [-1, 1]$.* $\triangleleft$

A.6 O operador de Nemytskii

Esta seção é dedicado ao estudo das funções de Carathéodory e ao operador de Nemytskii. Para as aplicações que apresentaremos neste trabalho, será preciso estudar a continuidade do operador de Nemytskii, também chamado de operador de superposição.

Definição A.55. *Dizemos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory se satisfaz:*

(i) *para cada $s \in \mathbb{R}$, a função $x \mapsto f(x, s)$ é Lebesgue mensurável em Ω;*

(ii) *para quase todo $x \in \Omega$, a função $s \mapsto f(x, s)$ é contínua em $\mathbb{R}$.*

Convencionaremos que, no caso de uma função de Carathéodory, a afirmação "$x \in \Omega$" deve ser entendida como válida para quase todo ponto $x \in \Omega$.

Denotando por $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$,temos o seguinte resultado.

Proposição A.56. *Se $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função de Carathéodory, então, para toda $u \in \mathcal{M}$, a função $x \mapsto f(x, u(x))$ é mensurável.*

Demonstração. Mostraremos que se $u \in \mathcal{M}$, então $f(\cdot, u(\cdot)) \in \mathcal{M}$. Notemos que se v é uma função simples, então $f(\cdot, v(\cdot))$ é mensurável.

De fato, sendo v uma função simples, podemos escrevê-la da forma: $v = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}$ com $a_i \in \mathbb{R}$ e χ_{E_i} a função característica de E_i, onde a família $\{E_i : 1 \leq i \leq m\}$ forma uma partição mensurável de Ω. Daí,

$$f(x, v(x)) = f\left(x, \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}(x)\right) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{E_i}(x) f(x, a_i).$$

Assim, sendo $x \mapsto f(x, a_i)$ mensurável, por hipótese, temos que $f(\cdot, v(\cdot)) \in \mathcal{M}$.

Consideremos agora uma sequência de funções simples (u_n) em $\mathcal{M}$ tal que $u_n \to u$ q.t.p. em Ω. Acabamos de mostrar que $f(\cdot, u_n(\cdot))$ é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f(\cdot, u_n(\cdot)) \to f(\cdot, u(\cdot))$ q.t.p. em Ω, segue que $f(\cdot, u(\cdot)) \in \mathcal{M}$, pois é limite q.t.p. de uma sequência de funções mensuráveis em Ω. ∎

Como consequência deste resultado temos que, para cada função de Carathéodory, podemos definir o operador

$$\begin{array}{rcccccccl} N_f & : & \mathcal{M} & \to & \mathcal{M} & & & & \\ & & u & \mapsto & N_f u & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & & & & & x & \mapsto & (N_f u)(x) = f(x, (u(x))), \end{array}$$

chamado **operador de Nemytskii**. Na verdade, estamos interessados em saber quando o operador N_f define uma aplicação de um espaço $L^{p_1}(\Omega)$ em outro espaço $L^{p_2}(\Omega)$ e, principalmente, quando este é contínuo. O próximo resultado responderá a esta questão.

Proposição A.57. *Suponha que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função de Carathéodory e que a seguinte condição de crescimento seja satisfeita:*

$$|f(x, s)| \leq C|s|^r + b(x) \quad \textit{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},$$

em que $C \geq 0$ é constante, $r > 0$ e $b \in L^{q_1}(\Omega)$, para $1 \leq q_1 < \infty$.

Então $N_f(L^{q_1 r}(\Omega)) \subset L^{q_1}(\Omega)$. Além disso, N_f é contínua de $L^{q_1 r}(\Omega)$ em $L^{q_1}(\Omega)$ e aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Demonstração. Como $N_f : L^{q_1 r}(\Omega) \to L^{q_1}(\Omega)$ vamos mostrar que $N_f u \in L^{q_1}(\Omega)$ para

$u \in L^{q_1 r}(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |(N_f u)(x)|^{q_1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_1}} &= \left(\int_\Omega |f(x,u(x))|^{q_1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \Big(C|u(x)|^r + b(x)\Big)^{q_1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_1}}, \quad \text{(desig. de Minkowski)} \\
&\leq \left(\int_\Omega \Big(C|u(x)|^r\Big)^{q_1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_1}} + \left(\int_\Omega |b(x)|^{q_1} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_1}} < \infty.
\end{aligned}
$$

Assim, temos $N_f u \in L^{q_1}(\Omega)$. Além disso, $\|N_f u\|_{0,q_1} \leq C\|u\|^r_{0,q_1 r} + \|b\|_{0,p_1}$ implica que N_f é limitado, pois aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Para mostrar a continuidade de N_f vamos mostrar que toda sequência $(u_n) \subset L^{q_1 r}(\Omega)$ com $u_n \to u$ em $L^{q_1 r}(\Omega)$ tem uma subsequência (u_{n_k}) tal que $N_f u_{n_k} \to N_f u$ em $L^{q_1}(\Omega)$. De fato, pelo Teorema A.10 temos que dada $(u_n) \subset L^{q_1 r}(\Omega)$ com $u_n \to u$ existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ para q.t.p. $x \in \Omega$ e existe $h \in L^{q_1 r}(\Omega)$ tal que $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para q.t.p. $x \in \Omega$.
Como a sequência $(f(x, u_{n_k}(x)))$ é tal que $(f(x, u_{n_k}(x))) \to f(x, u(x))$ para q.t.p. $x \in \Omega$ ou $N_f u_{n_k}(x) \to N_f u(x)$ para q.t.p. $x \in \Omega$. Assim temos que

$$
|f(x, u_{n_k}(x))| \leq C|u_{n_k}(x)|^r + b(x) \leq C|h(x)|^r + b(x) \quad \text{para q.t.p. } x \in \Omega
$$

e

$$
|N_f u(x)| = \lim_{k \to \infty} |N_f u_{n_k}(x)| \leq C|h(x)|^r + b(x), \quad \text{para q.t.p. } x \in \Omega.
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\Big|N_f u_{n_k}(x) - N_f u(x)\Big|^{q_1} &\leq \Big(|N_f u_{n_k}(x)| + |N_f u(x)|\Big)^{q_1} \\
&\leq \Big(2\big(C|h(x)|^r + b(x)\big)\Big)^{q_1} \\
&\leq 2^{q_1} 2^{q_1 - 1}\Big(C^{q_1}|h(x)|^{q_1 r} + |b(x)|^{q_1}\Big) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Daí pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que

$$
\Big\|N_f u_{n_k} - N_f u\Big\|^{q_1}_{0,q_1} = \int_\Omega \Big|N_f u_{n_k}(x) - N_f u(x)\Big|^{q_1} \mathrm{d}x \longrightarrow 0 \quad \text{quando } k \to \infty
$$

isto é $N_f u_{n_k} \to N_f u$, portanto N_f é contínua. ■

Com relação ao potencial do operador de Nemytskii temos o seguinte resultado

Proposição A.58. *Suponha que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de Carathéodory e satisfaz a seguinte condição de crescimento:*

$$
|f(x,s)| \leq C|s|^{q-1} + b(x) \quad \textit{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},
$$

onde $C \geq 0$ é constante, $q > 1$, $b \in L^{q'}(\Omega)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Seja $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)\mathrm{d}\tau$.

Então:

(i) *F é uma função de Carathéodory e existe $C_1 \geq 0$ constante e $c \in L^1(\Omega)$ tal que*

$$|F(x,s)| \leq C_1|s|^q + c(x) \quad \textit{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R};$$

(ii) *O funcional $\Phi : L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $\Phi(u) := \int\limits_\Omega N_F u = \int\limits_\Omega F(x,u)$ é continuamente Fréchet diferenciável e $\Phi'(u) = N_f u$ para todo $u \in L^q(\Omega)$.*

Demonstração. Como f é uma função de Carathéodory temos pela definição de F que a F também é de Carathéodory.
Logo

$$\begin{aligned}
|F(x,s)| = \left|\int\limits_0^s f(x,\tau)\mathrm{d}\tau\right| &\leq \int\limits_0^{|s|} \Big(C|\tau|^{q-1} + b(x)\Big)\mathrm{d}\tau \\
&= \left(\frac{C}{q}\tau^q + b(x)\tau\right)\Bigg|_0^{|s|} \\
&= \frac{C}{q}|s|^q + |s|b(x), \quad \text{desig. de Young, } \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \\
&\leq \frac{C}{q}|s|^q + \frac{|s|^q}{q} + \frac{(b(x))^{q'}}{q'} \\
&= \frac{C+1}{q}|s|^q + \frac{1}{q'}(b(x))^{q'}
\end{aligned}$$

então

$$|F(x,s)| \leq C_1|s|^q + c(x), \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}$$

onde $C_1 = \frac{C+1}{q}$ e $\frac{1}{q'}(b(x))^{q'} = c(x) \in L^1(\Omega)$ pois $b \in L^{q'}(\Omega)$. Isso mostra (i).

A continuidade de N_F implica que Φ é contínua. Agora seja $u \in L^q(\Omega)$ fixo, defina

$$\begin{aligned}
\delta(h) &= \Phi(u+h) - \Phi(u) - \int\limits_\Omega f(x,u)h\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_\Omega \Big[F(x,u+h) - F(x,u)\Big]\mathrm{d}x - \int\limits_\Omega f(x,u)h\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\begin{aligned}
\delta(h) &= \int\limits_\Omega \left[\int\limits_0^1 \frac{d}{\mathrm{d}t}\Big(F(x,u+th)\Big)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x - \int\limits_\Omega \left[\int\limits_0^1 f(x,u)h\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_\Omega \left[\int\limits_0^1 \Big(f(x,u+th)h\Big)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x - \int\limits_\Omega \left[\int\limits_0^1 f(x,u)h\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_\Omega \left[\int\limits_0^1 \Big(f(x,u+th) - f(x,u)\Big)h\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

utilizando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\delta(h) = \int_0^1 \int_\Omega \Big(f(x,u+th) - f(x,u)\Big) h \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

Tomando o módulo em ambos dos lados, temos

$$|\delta(h)| \leq \int_0^1 \left| \int_\Omega \Big(N_f(u+th) - N_f u\Big) h \, \mathrm{d}x \right| \mathrm{d}t$$

Pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
|\delta(h)| &\leq \int_0^1 \left(\int_\Omega |N_f(u+th) - N_f u|^{q'} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_\Omega |h|^q \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \|N_f(u+th) - N_f u\|_{0,q'} \|h\|_{0,q} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \|N_f(u+th) - N_f u\|_{0,q'} \mathrm{d}t \; \|h\|_{0,q}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{|\delta(h)|}{\|h\|_{0,q}} \leq \int_0^1 \|N_f(u+th) - N_f u\|_{0,q'} \mathrm{d}t.$$

Daí, se $h \to 0$ em $L^q(\Omega)$,

$$0 \leq \lim_{h \to 0} \frac{|\delta(h)|}{\|h\|_{0,q}} \leq \lim_{h \to 0} \int_0^1 \|N_f(u+th) - N_f u\|_{0,q'} \mathrm{d}t$$

e, como o operador de Nemytskii N_f é limitado e contínuo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$0 \leq \lim_{h \to 0} \frac{|\delta(h)|}{\|h\|_{0,q}} \leq \int_0^1 \lim_{h \to 0} \|N_f(u+th) - N_f u\|_{0,q'} \mathrm{d}t = 0.$$

Assim, $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{|\delta(h)|}{\|h\|_{0,q}} = 0$, isto é Φ é Fréchet diferenciável e

$$\Big\langle \Phi'(u), h \Big\rangle = \int_\Omega f(x,u) h \, \mathrm{d}x, \quad \forall \, h \in L^q(\Omega),$$

isto é, $\Phi'(u) = f(x,u) = N_f u$.
A continuidade de Φ' está garantida pois, N_f é contínua. Portanto $\Phi \in C^1(L^q(\Omega), \mathbb{R})$. ■

Observação A.59. *Com as condições da Proposição A.58 temos que*

$$N_f(L^q(\Omega)) \subset L^{q'}(\Omega), \qquad N_F(L^q(\Omega)) \subset L^1(\Omega)$$

em que os operadores de Nemytskii N_f e N_F são contínuos e limitados.

De fato, seja $r = q-1$ e $q_1 = q'$, então pela Proposição A.57 temos que $N_f(L^{q'(q-1)}(\Omega) \subset L^{q'}(\Omega)$. Mas como $q = q'(q-1)$ então $N_f(L^q(\Omega) \subset L^{q'}(\Omega)$ e pela mesma proposição N_f é limitada e contínua. Da mesma forma, as afirmações sobre N_F são verdadeiras ao considerar $r = q$ e $q_1 = 1$. $\triangleleft$

Deve-se notar também que, para cada $u \in L^q(\Omega)$ fixo, $N_f u = \Phi'(u) \in L^{q'}(\Omega)$.

Agora, vamos a estabelecer condições que vão nos permitir obter a solução do problema (2.1).

Vamos denotar por p^* o expoente conjugado de Sobolev de p que é definido por

$$p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p} & \text{se } p < N, \\ \infty & \text{se } p \geq N. \end{cases}$$

A partir de agora assumimos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo a condição de crescimento

$$|f(x,s)| \leq C|s|^{q-1} + b(x) \quad \text{para } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}, \tag{A.1}$$

onde $C \geq 0$ é constante, $q \in (1, p^*)$, $b \in L^{q'}(\Omega)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Observação A.60. *Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov A.38 temos que a restrição $q \in (1, p^*)$ garante que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é uma imersão compacta. Assim, o diagrama*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \overset{I_d}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \overset{N_f}{\to} L^{q'}(\Omega) \overset{I_d^*}{\hookrightarrow} W^{-1,p'}(\Omega)$$

mostra que N_f é um operador compacto (contínuo e aplica conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos) de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$. $\triangleleft$

Lema A.61. *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory que satisfaça a condição de crescimento* (A.1). *Então o funcional $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$\Phi(u) = \int_\Omega F(x,u)$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)\mathrm{d}\tau$, é continuamente Fréchet diferenciável em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\langle \Phi'(u), h \rangle = \int_\Omega f(x,u)h \,\mathrm{d}x, \quad \forall\, h \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Demonstração. Para a prova primeiro mostraremos a existência da derivada de Gâteaux e depois que esta é contínua para logo aplicar a Proposição A.4.

Sejam $t \in (0,1)$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(s) = F(x, u + sth)$. Desde que g é contínua em $[0,1]$ e derivável em $(0,1)$, pelo Teorema de Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que $|g(1) - g(0)| = |g'(\theta)|$, ou seja,

$$|F(x, u + th) - F(x, u)| = |f(x, u + \theta th)th| \tag{A.2}$$

Da condição de crescimento (A.1) temos que

$$\begin{aligned} |f(x, u + \theta th)||h| &\leq \Big(C|u + \theta th|^{q-1} + b(x)\Big)|h| \\ &\leq \Big(C_1(|u|^{q-1} + |h|^{q-1}) + b(x)\Big)|h| \end{aligned}$$

Daí, pela desigualdade de Hölder e o fato que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua

$$\int_\Omega |u|^{q-1}|h| \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega |h|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

$$\int_\Omega |b(x)||h| \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |b|^{q'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_\Omega |h|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

Logo $\Big(C_1(|u|^{q-1} + |h|^{q-1}) + b(x)\Big)|h| \in L^1(\Omega)$, para $q \in (1, p^*)$.

Uma vez que $u(x) + t\theta h(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω, quando $t \to 0$, e f é contínua na segunda variável, então $f(x, u(x) + t\theta h(x))h(x) \to f(x, u(x))h(x)$ q.t.p. em Ω, quando $t \to 0$.

Assim, usando (A.2) e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\frac{1}{t} \int_\Omega (F(x, u + th) - F(x, u)) \mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x, u)h \, \mathrm{d}x$$

quando $t \to 0$. Portanto,

$$\langle \Phi'(u), h \rangle = \int_\Omega f(x, u)h \, \mathrm{d}x$$

Para mostrar que $\Phi' : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ é contínua, suponha que que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua, temos que $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$. Já que $|f(x,s)| \leq C|s|^{q-1} + b(x)$, podemos usar a continuidade do operador de Nemytskii para obter

$$f(x, u_n) \to f(x, u) \quad \text{em } L^{q'}(\Omega) \tag{A.3}$$

onde $q' = \frac{q}{q-1}$. Usando a desigualdade de Hölder e de novo o fato que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua temos

$$\begin{aligned} |\langle \Phi'(u_n) - \Phi'(u), h \rangle| &\leq \int_\Omega |f(x, u_n) - f(x, u)||h| \mathrm{d}x \\ &\leq \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{0,q'} \|h\|_{0,q} \\ &\leq k\|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{0,q'} \|h\|_{1,q} \end{aligned}$$

Então

$$
\begin{aligned}
\|\Phi'(u_n) - \Phi'(u)\| &= \sup_{0 \neq h \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{|\langle \Phi'(u_n) - \Phi'(u), h \rangle|}{\|h\|_{1,p}} \\
&\leq k \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{0,q'}
\end{aligned}
$$

Daí, segue de (A.3) que, $\Phi'(u_n) \to \Phi(u)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$.
Portanto temos que $\Phi \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. ■

Todo isto vai nos permitir estabelecer problemas equivalentes ao problema (2.1), que são estudados no Capítulo 2.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

[2] AFONSO, S., AND DE SOUZA, C. S. *Sobre a Teoria do Grau de Brouwer e a Teoria do Grau de Leray-Schauder*. Matemática e Estatística em Foco, v. 4, p. 1-9, 2016.

[3] AMBROSETTI, A., AND RABINOWITZ, P. H. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis 14* (1973), 349–381.

[4] ANANE, A. Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-laplacien avec poids. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 305*, 16 (1987), 725–728.

[5] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., AND TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. SBM, Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro, 2012.

[6] BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[7] BROWDER, F. Problèmes non-linéaires. Séminaire de mathématique supérieures- été 1965. Montréal: Les Presses de l'université de Montréal. 153 p. (1966)., 1966.

[8] BUENO, H., ERCOLE, G., ZUMPANO, A., AND FERREIRA, W. M. Positive solutions for the p -laplacian with dependence on the gradient. *Nonlinearity 25*, 4 (2012), 1211.

[9] COSTA, D. G., AND MAGALHÃES, C. A. Existence results for perturbations of the p-Laplacian. *Nonlinear Anal. 24*, 3 (1995), 409–418.

[10] DIAS, S. C. *Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de equações elípticas quase lineares*. Dissertação de Mestrado em Matemática, UFMG, 2011.

[11] DIESTEL, J. *Geometry of Banach spaces—selected topics*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 485. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[12] DINCA, G., JEBELEAN, P., AND MAWHIN, J. A result of Ambrosetti-Rabinowitz type for p-Laplacian. In *Qualitative problems for differential equations and control theory*. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995, pp. 231–242.

[13] EVANS, L. C. *Partial differential equations*, vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[14] FIGUEIREDO, D. G. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, vol. 81 of *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[15] GLOWINSKI, R., AND MARROCCO, A. Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge Anal. Numér. 9*, R-2 (1975), 41–76.

[16] HACHIMI, A., AND GOSSEZ, J.-P. On a nonresonance condition near the first eigenvalue for a quasilinear elliptic problem. In *Partial differential equations (Han-sur-Lesse, 1993)*, vol. 82 of *Math. Res.* Akademie-Verlag, Berlin, 1994, pp. 144–151.

[17] JEBELEAN, P. Finite-dimensional approximation in a multivalued problem with p-Laplacian. *East-West J. Numer. Math. 5*, 2 (1997), 99–111.

[18] KINDERLEHRER, D., AND STAMPACCHIA, G. *An introduction to variational inequalities and their applications*, vol. 88 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980.

[19] LIONS, J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[20] RABINOWITZ, P. H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, vol. 65 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[21] STRUWE, M. *Variational methods*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.