

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O Teorema do equilíbrio de Nash

Ramon Gustavo de Melo

Belo Horizonte

2017

RAMON GUSTAVO DE MELO

O TEOREMA DO EQUILÍBRIO DE NASH

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientador: Rémy de Paiva Sanchis.

Belo Horizonte
2017

Agradecimentos

Se a gratidão for mesmo a memória do coração¹, a conclusão deste trabalho depositou muitas lembranças no meu.

Primeiramente, agradeço a Deus pela oportunidade de experimentar essa conquista e tudo o que ela pressupõe.

Além disso, sou grato a meus familiares, em especial a meus pais Antônio e Sônia, pelo apoio, carinho e orações.

Solidários também foram amigos e colegas, dentre os quais destaco Wenderson Ferreira. Suas palavras de coragem e incentivo foram muito importantes para mim.

Por fim, agradeço ao meu orientador Rémy, por todos os conselhos e ensinamentos oferecidos.

¹Citação atribuída a Jean Massieu (1772-1846), educador francês.

Resumo

Em 1950, o matemático americano John Forbes Nash Jr. (1928-2015) revelou que todo jogo em forma normal admite algum ponto de equilíbrio, termo que agora conhecemos como equilíbrio de Nash. Nestas páginas apresentamos uma prova dessa afirmação. Para obtê-la, recorreremos ao Lema de Sperner, ao Teorema do ponto fixo de Brouwer e a alguns resultados da topologia e da análise de funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m .

Palavras-chave: Equilíbrio de Nash, solução de um jogo.

Abstract

In 1950 the American mathematician John Forbes Nash Jr. (1928-2015) showed that every normal-form game admits at least one equilibrium point, an expression we now know as Nash equilibrium. In this paper we present a proof of that claim. To get it we appeal to Sperner's lemma, Brouwer's fixed-point theorem and some results of topology and analysis of functions from \mathbb{R}^n to \mathbb{R}^m .

Key-words: Nash equilibrium, solution of a game.

Lista de notações

$ a $	a norma do vetor a
$ A $	a cardinalidade do conjunto A
$A \simeq B$	A é homeomorfo a B
$B(a; r)$	a bola aberta de centro a e raio r
D^n	o disco unitário de \mathbb{R}^n
$\text{fr}(A)$	a fronteira do conjunto A
$\text{int}(A)$	o interior do conjunto A
$[n]$	o conjunto dos inteiros positivos inferiores ou iguais a n
\mathbb{R}^+	o conjunto dos reais não negativos
S^{n-1}	a esfera unitária de dimensão $n - 1$
$\mathbf{0}$	o vetor nulo

Sumário

Introdução	15
1 O que é um equilíbrio de Nash?	17
2 Fundamentos teóricos	21
2.1 O Lema de Sperner	21
2.2 Um resultado topológico	27
2.3 O Teorema do ponto fixo de Brouwer	30
2.4 Propriedades da função U_i	31
3 O Teorema do equilíbrio de Nash	35
3.1 O resultado	35
3.2 Calculando equilíbrios de Nash em jogos simples	36
Referências	39

Introdução

Os jogos, assim como a busca por modos mais eficientes de praticá-los, são tão antigos quanto a humanidade. Como área da matemática, no entanto, a teoria moderna dos jogos se estabeleceu apenas no século XX.

Conforme [5], é razoável considerar que o nascimento dessa teoria ocorre em 1944, com a publicação do *Theory of Games and Economic Behaviour*, dos estudiosos von Neumann² e Morgenstern³. Tão grande foi o avanço ofertado pela obra à análise de jogos estratégicos que sua influência na teoria dos jogos é comparada à de *Principia* na física, de acordo com [10]. Além disso, o trabalho impulsionou o estudo desse ramo do conhecimento ao mostrá-lo importante não apenas para economistas, expõe [1].

Um conceito importante nessa teoria é o de *solução* de um jogo. Para [8], “Uma solução é uma descrição sistemática dos resultados que podem ocorrer em uma família de jogos. A teoria dos jogos sugere soluções razoáveis para classes de jogos e examina suas propriedades”. Na obra de 1944, von Neumann e Morgenstern descrevem um tipo de solução, chamado *ponto de equilíbrio*, indica [1]. Mais ainda, provam que essa solução ocorre em todo jogo de soma zero com dois jogadores, no qual cada um dispõe de um número finito de ações, complementa [1].

Pouco tempo depois, o jovem Nash descobre um fato mais geral, que removia as restrições quanto ao número de jogadores e à estrutura dos resultados, aponta [6]. Uma demonstração concisa é revelada no seu breve artigo *Equilibrium Points in n -Person Games*, de 1950, explica [10]. No ano seguinte, Nash publica uma prova mais detalhada em *Non-Cooperative Games*, completa [10]. Sua teoria possibilitou uma melhor compreensão sobre problemas de conflito e cooperação na política, economia e ciências sociais, afirma [7]. Atualmente, um ponto de equilíbrio é conhecido como *equilíbrio de Nash*.

A matemática de Nash rendeu-lhe o Prêmio Nobel de economia em 1994, quando a teoria dos jogos já iluminava a biologia evolutiva, a psicologia e a sociologia, descreve [10]. Na mesma obra vemos que, posteriormente, outras áreas foram alcançadas, como antropologia, neurociência e física. As considerações do matemático americano sofreram modificações, generalizações e refinamentos, considera [6]. Mas, em diversas ciências, a solução de Nash tem se mostrado um bom ponto de partida para quem pretende analisar uma interação estratégica, lembra o mesmo artigo.

²John von Neumann (1903-1957), matemático, físico, inventor e cientista da computação. Nasceu no Império Austro-Húngaro e foi naturalizado norte-americano em 1937.

³Oskar Morgenstern (1902-1977), economista nascido na Alemanha e naturalizado norte-americano em 1944.

Nosso objetivo aqui é apontar uma prova do resultado de Nash. O texto está dividido em três capítulos. No primeiro, exibimos a definição de jogo em forma normal, que será ilustrada com dois exemplos. Também conheceremos o equilíbrio de Nash, depois de apresentarmos um conceito mais simples, que servirá de apoio para nossa assimilação.

O Capítulo 2 oferece um preparo teórico para a demonstração que buscamos. Nele verificaremos, entre outros resultados, o Lema de Sperner⁴ e o Teorema do ponto fixo de Brouwer⁵.

No terceiro capítulo, encerramos nosso trabalho construindo a prova procurada e calculando o equilíbrio de Nash em três jogos elementares.

⁴Emanuel Sperner (1905-1980), matemático alemão.

⁵Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), matemático holandês.

Capítulo 1

O que é um equilíbrio de Nash?

Suponha que os indivíduos C e D , suspeitos de cometerem um sério crime, foram capturados pela polícia. Sem provas suficientes para determinar o culpado, a polícia tenta persuadir algum deles a confessar o delito. Com esse propósito, eles são postos em celas separadas e interrogados. Impedidos de se comunicarem, o relato de um é desconhecido pelo outro. O interrogante permite a cada um deles duas opções: permanecer em silêncio ou acusar o outro suspeito. Nessas condições,

- se ambos permanecem em silêncio, são sentenciados a 2 anos de prisão;
- se ambos acusam o outro, recebem os dois uma pena de 4 anos;
- se apenas um deles fica em silêncio, este é obrigado a passar 10 anos preso, enquanto o outro é liberado.

Esse enunciado é uma versão do Dilema do prisioneiro e é baseado em [3]. Ele é muito empregado na literatura da teoria dos jogos para introduzir o conceito que buscamos.

Na situação descrita, cada um dos indivíduos precisa escolher uma entre duas ações disponíveis. Cada uma das quatro combinações de decisões produz alguma recompensa a cada suspeito. É impossível expressar matematicamente o que alguém sente ao ser condenado a 10 anos de prisão, ou a alegria de ser posto em liberdade. Mas é razoável presumir que o nível de satisfação dos prisioneiros perante cada desfecho dependa do tempo da pena, que é um número real. Assim, usaremos esse tempo para simplificar a tarefa de medir o “ganho” gerado por cada combinação. Dessa forma, a tabela adiante revela a recompensa obtida por C em função dos quatro possíveis resultados.

		D	
		Silêncio	Acusação
C	Silêncio	-2	-10
	Acusação	0	-4

Tabela 1.1: Recompensas para C .

Na primeira coluna e na primeira linha, representamos as opções disponíveis para C e D . O restante da tabela representa uma matriz 2×2 tal que a entrada $a_{i,j}$ revela a recompensa

(para C) quando C e D optam, respectivamente, pela alternativa da linha i e da coluna j . Indicaremos essa matriz por M_C e a chamaremos de *matriz de recompensas* de C .

Analogamente, M_D está contida na seguinte tabela:

		D	
		Silêncio	Acusação
C	Silêncio	-2	0
	Acusação	-10	-4

Tabela 1.2: Recompensas para D .

A exposição que fizemos é nosso primeiro exemplo de jogo em forma normal, que definimos adiante.

Definição 1.1 (Jogo em forma normal). *Um jogo em forma normal consiste em:*

- (i) *um conjunto $N := [n]$ de jogadores;*
 - (ii) *um conjunto finito $A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in N$, chamado de conjunto de ações de i ;*
 - (iii) *uma função $u_i : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathbb{R}$ para cada $i \in N$, denominada função recompensa de i .*
- Esse jogo é notado como (N, A, R) , sendo $A := A_1 \times \dots \times A_n$ e $R := (u_1, \dots, u_n)$. Cada elemento $a := (a_1, \dots, a_n) \in A$ é chamado de perfil de ações.*

Assim, para a ilustração anterior, podemos escrever $N = \{1, 2\}$, onde 1 e 2 representam C e D , respectivamente, e $A_1 = A_2 = \{\text{Acusação}, \text{Silêncio}\}$. Os conjuntos imagens de u_1 e u_2 são as entradas das matrizes M_C e M_D , nessa ordem.

Voltemos nossa atenção para o conjunto A desse exemplo. Vamos verificar que o perfil de ações (Acusação, Acusação) possui uma característica interessante. Suponha que um dos jogadores soubesse que a escolha do outro seria a indicada por esse perfil (na coordenada correspondente). Então, almejando o maior ganho, ele deveria escolher exatamente o que o perfil indica. Isto é, sabendo que D o acusaria, C escolheria a acusação, e vice-versa. Esse perfil é o que chamaremos de *equilíbrio puro*¹.

Definição 1.2 (Equilíbrio puro). *Seja (N, A, R) um jogo em forma normal. Dizemos que $a := (a_1, \dots, a_n) \in A$ é um equilíbrio puro se, dado qualquer $i \in N$,*

$$u_i(a) \geq u_i(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

para todo $x_i \in A_i$.

Note que (Acusação, Acusação) é o único perfil no Dilema do prisioneiro com essa propriedade. Por exemplo, se soubesse que C ficaria em silêncio, D , pensando no melhor para si, não faria o mesmo. Então, o perfil (Silêncio, Silêncio) não é um equilíbrio puro.

¹Na literatura, algumas obras, como [8], denotam esse perfil por *equilíbrio de Nash*. Julgamos conveniente adotar outra nomenclatura, segundo a qual a expressão *equilíbrio de Nash* refere-se a um *perfil de estratégias mistas*, como veremos adiante.

Mas esse tipo de perfil não existe sempre. O exemplo que segue para mostrar isso é baseado em [3]. Suponha que X e Y são duas empresas especializadas na venda de um mesmo tipo de produto. Para atrair clientes, ambas dispõem das promoções P_1 , P_2 e P_3 . A cada mês, cada uma delas escolhe secretamente algum dos bônus e ambos são lançados simultaneamente. As tabelas adiante mostram as médias de vendas mensais das empresas, em unidades, conforme cada combinação de ações.

		Y		
		P_1	P_2	P_3
X	P_1	21	30	25
	P_2	28	24	19
	P_3	22	20	31

Tabela 1.3: Médias de vendas mensais de X .

		Y		
		P_1	P_2	P_3
X	P_1	20	18	40
	P_2	18	38	34
	P_3	35	33	32

Tabela 1.4: Médias de vendas mensais de Y .

Nesse jogo em forma normal, nenhum dos 9 perfis de ações é um equilíbrio puro. Para verificar isso mais facilmente, considere a nova tabela abaixo, onde as médias foram dispostas lado a lado.

		Y		
		P_1	P_2	P_3
X	P_1	(21, 20)	(30, 18)	(25, 40)
	P_2	(28, 18)	(24, 38)	(19, 34)
	P_3	(22, 35)	(20, 33)	(31, 32)

Tabela 1.5: Pares ordenados de termos de M_X e M_Y .

Observe que, para qualquer par (a, b) , existe algum par $(A, *)$ na mesma coluna tal que $A > a$ ou existe algum $(*, B)$ na mesma linha com $B > b$.

Na verdade, o equilíbrio estabelecido pela Definição 1.2 não é o considerado por Nash em seu teorema. Sua discussão aqui tem papel didático, antecedendo um conceito mais complexo. De fato, um equilíbrio de Nash não é um perfil de ações. Antes, é uma lista de distribuições de probabilidade sobre os conjuntos A_i .

Definição 1.3 (Distribuição de probabilidade). *Uma distribuição de probabilidade sobre um conjunto finito Ω é uma função $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tal que*

$$\sum_{x \in \Omega} f(x) = 1.$$

O conjunto de todas as distribuições de probabilidade sobre Ω será notado por $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Definição 1.4 (Estratégia mista). *Considere o jogo em forma normal (N, A, R) , sendo $A := A_1 \times \dots \times A_n$. O conjunto de estratégias mistas para o jogador i é dado por $S_i := \mathfrak{D}(A_i)$. O conjunto de perfis de estratégias mistas é definido como $S := S_1 \times \dots \times S_n$.*

Definição 1.5 (Ganho esperado de uma estratégia mista). *Sejam (N, A, R) um jogo na forma normal e $i \in N$. Definimos $U_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ como*

$$U_i[(s_1, \dots, s_n)] := \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^n s_j(a_j).$$

Nesses termos, dizemos que $U_i(s)$ é o ganho esperado por i com o perfil s .

Em palavras, $U_i(s)$ é a média ponderada de todas as retribuições ao jogador i , sendo o peso de cada ganho a probabilidade do perfil associado a ele ocorrer segundo s .

Notação 1.6. Dados o perfil de estratégias mistas $s := (s_1, \dots, s_n)$ e a distribuição $t_i \in S_i$, pomos

$$s_{-i} := (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \quad \text{e} \quad (t_i, s_{-i}) := (s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_n).$$

Definição 1.7 (Resposta ótima). *Uma resposta ótima do jogador i à combinação de estratégias s_{-i} é uma estratégia mista $t_i \in S_i$ tal que $U_i(t_i, s_{-i}) \geq U_i(s_i, s_{-i})$, qualquer que seja $s_i \in S_i$.*

Fixados o jogador i e a combinação de estratégias s_{-i} , a função $g : S_i \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(s_i) := U_i(s_i, s_{-i})$ é linear². Além disso, S_i pode ser representado por um conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^{|A_i|}$, que conheceremos no próximo capítulo. Sendo assim, g deve assumir o valor mínimo e o valor máximo nesse compacto. Concluímos que, dada a combinação s_{-i} , sempre existe uma resposta ótima do jogador i em relação a ela.

Definição 1.8 (Equilíbrio de Nash). *Um perfil de estratégias mistas $s := (s_1, \dots, s_n)$ é um equilíbrio de Nash se, para cada jogador i , s_i é uma resposta ótima a s_{-i} .*

Informalmente, um equilíbrio de Nash é um conjunto de estratégias mistas, uma para cada jogador, tal que nenhum jogador aumenta seu ganho se muda unilateralmente sua estratégia.

Diferente do que acontece para o primeiro tipo de equilíbrio que analisamos, todo jogo em forma normal possui um equilíbrio de Nash. Demonstraremos esse fato no Capítulo 3, depois de conferirmos os resultados preliminares.

²A prova desse resultado é simples, mas ela não será relevante em nossas discussões. Por isso, foi omitida. A conclusão do parágrafo, no entanto, é uma observação interessante.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

2.1 O Lema de Sperner

Nesta seção, daremos o primeiro passo rumo à prova do Teorema do equilíbrio de Nash. Primeiramente, conferiremos alguns conceitos geométricos envolvidos em importantes resultados do texto.

Definição 2.1 (Combinação convexa). *Uma combinação convexa dos vetores $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ é um vetor da forma*

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i,$$

onde $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0, \forall i \in [m]$.

Exemplo 2.2. O vetor

$$w := \left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{2} \right)$$

é uma combinação convexa dos vetores $v_1 := (-1, 0, 4)$, $v_2 := (-2, 4, 6)$ e $v_3 := (1, -10, 4)$, já que

$$w = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{4}v_3.$$

Definição 2.3 (Segmento de reta). *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. O segmento de reta que une x e y é o conjunto das combinações convexas desses vetores.*

Pela Definição 2.1, o segmento de reta que une os pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$ consiste no conjunto $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Definição 2.4 (Conjunto convexo). *Um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se, para quaisquer $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$, temos $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. Em outras palavras, C é convexo se o segmento de reta que une quaisquer dois de seus elementos está contido em C .*

Exemplo 2.5. Para qualquer $n > 0$, o conjunto

$$C_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, \forall i \in [n]\}$$

é convexo. O conjunto

$$I_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in \{0, 1\} \text{ para algum } i \in [n]\}$$

não é convexo, qualquer que seja $n > 0$. De fato, fixado $n > 0$, e tomando $u := \mathbf{0}$ e $v := (1, 1, \dots, 1)$ em \mathbb{R}^n , temos que $u, v \in I_n$, mas $0,5u + 0,5v \notin I_n$.

Definição 2.6 (Conjunto afim independente). *Seja $A := \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto finito de vetores em um espaço euclidiano. Dizemos que A é afim independente se $|A| = 1$ ou se $\{v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_n - v_1\}$ é linearmente independente. Caso contrário, A é afim dependente.*

Por extensão, se A é afim independente, os vetores de A são chamados de vetores afim independentes. O mesmo ocorre quando A é afim dependente.

Exemplo 2.7. Os vetores $v_1 := (1, 0, 0)$, $v_2 := (2, 0, 0)$ e $v_3 := (1, 1, 0)$ são afim independentes.

Exemplo 2.8. Qualquer conjunto C linearmente independente é afim independente. De fato, se $|C| = 1$, o resultado é óbvio. Também, se $C := \{x_1, \dots, x_n\}$ é l.i., com $n > 1$, então

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i (x_i - x_1) = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \dots + \lambda_n x_n - \sum_{i=2}^n \lambda_i x_1 = \mathbf{0}.$$

Então, por hipótese, todos os λ_i devem ser nulos, o que garante o resultado. A recíproca não vale, como mostra o exemplo anterior.

Exemplo 2.9. Os vetores linearmente dependentes $w_1 := (-2, 0, 0, 0)$, $w_2 := (1, 0, 0, 3)$ e $w_3 := (0, 0, 0, 2)$ são afim dependentes.

Definição 2.10 (n -simplexo). *Seja $A := \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ um conjunto de vetores afim independentes. Chama-se n -simplexo determinado por A o conjunto $\langle v_1, \dots, v_{n+1} \rangle$ de todas as combinações convexas dos vetores de A , ou seja,*

$$\langle v_1, \dots, v_{n+1} \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \text{ e } \lambda_i \geq 0, \forall i \in [n+1] \right\}.$$

Nesse n -simplexo, cada vetor de A é chamado vértice e cada k -simplexo $\langle v_{i_1}, \dots, v_{i_{k+1}} \rangle$, com $i_1, \dots, i_k \in [n+1]$, é uma k -face.

Na definição de k -face apresentada acima, usamos implicitamente um fato bem simples da álgebra linear: se A é l.i., qualquer $S \subseteq A$ também é l.i..

Exemplo 2.11. Considere $u_1 := (1, 0, 1)$, $u_2 := (1, 0, 0)$ e $u_3 := (0, 2, 0)$. Nesse caso, $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ é descrito geometricamente como o triângulo de vértices u_1 , u_2 e u_3 contido no plano $\pi : y + 2x = 2$. Claramente, esse 2-simplexo possui uma única 2-face, representada por ele mesmo, e suas 0-faces são seus vértices. As 1-faces de $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ são os lados do triângulo mencionado. Adiante, o 2-simplexo é ilustrado.

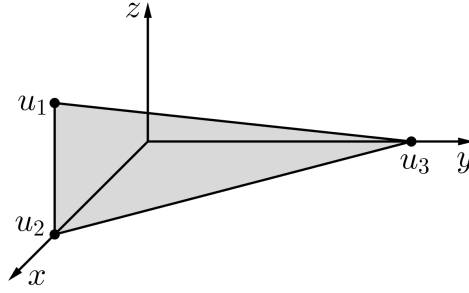


Figura 2.1: Simplexo determinado por $u_1 := (1, 0, 1)$, $u_2 := (1, 0, 0)$ e $u_3 := (0, 2, 0)$.

Definição 2.12 (n -simplexo canônico). O n -simplexo canônico Δ_n é definido como

$$\Delta_n := \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \text{ e } x_i \geq 0, \forall i \in [n+1] \right\}.$$

Em outras palavras, Δ_n é o n -simplexo determinado pelos vetores da base canônica de \mathbb{R}^{n+1} . Eles são afim independentes pela observação feita no Exemplo 2.8. Esse tipo de simplexo será muito importante em nossas discussões. Note que ele é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^{n+1} , pois é limitado e fechado.

Definição 2.13 (Divisão simplicial). Uma divisão simplicial de um n -simplexo S é um conjunto finito de n -simplexos $\{C_i : i \in [m]\}$ tal que

$$\bigcup_{i \in [m]} C_i = S$$

e, dados quaisquer $j, k \in [m]$, $C_j \cap C_k$ é igual a \emptyset ou a uma face de C_j e C_k . Nesse caso, dizemos que S está simplicialmente dividido e que cada C_i é um subsimplexo ou uma célula de S .

Exemplo 2.14. Sejam

$$s := (0, 0, 1), \quad t := (1, 0, 0), \quad u := \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad v := \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) \quad \text{e} \quad w := (0, 1, 0).$$

Pondo $C_1 := \langle s, t, u \rangle$, $C_2 := \langle s, u, v \rangle$ e $C_3 := \langle s, v, w \rangle$, vemos que $\{C_1, C_2, C_3\}$ é uma divisão simplicial de Δ_2 . Observe a figura abaixo.

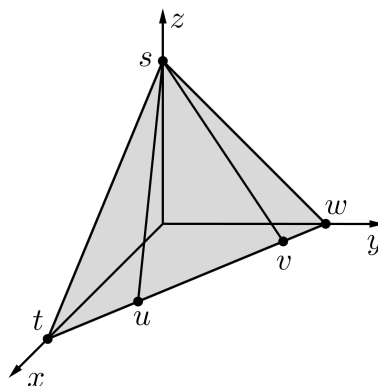


Figura 2.2: Uma divisão simplicial de Δ_2 .

Notação 2.15. Sejam $\langle v_1, \dots, v_{n+1} \rangle$ um simplexo e $y := \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i$ um de seus elementos. Notamos como $i^+(y)$ o conjunto $\{i : \lambda_i > 0\}$.

Definição 2.16 (Rotulagem própria). Sejam $S := \langle v_1, \dots, v_{n+1} \rangle$ um simplexo simplicialmente dividido e V o conjunto de todos os vértices das células que compõem a divisão. Uma função $L : V \rightarrow [n + 1]$ é uma rotulagem própria dessa divisão se $L(v) \in i^+(v)$ para todo $v \in V$. Nesse caso, $L(v)$ é o rótulo de v por L .

Exemplo 2.17. A divisão indicada no Exemplo 2.14 admite exatamente 4 rotulagens próprias, que são exibidas adiante como L_1, L_2, L_3 e L_4 .

i	$L_i(s)$	$L_i(t)$	$L_i(u)$	$L_i(v)$	$L_i(w)$
1	3	1	1	1	2
2	3	1	1	2	2
3	3	1	2	1	2
4	3	1	2	2	2

Tabela 2.1: Rotulagens próprias para a divisão do Exemplo 2.14.

Definição 2.18 (Célula completamente rotulada). Sejam L uma rotulagem própria para a divisão simplicial $\{C_i : i \in [m]\}$ de $S := \langle v_1, \dots, v_{n+1} \rangle$ e V_k o conjunto de vértices de uma célula C_k . Dizemos que C_k é completamente rotulada se $\{L(v) : v \in V_k\} = [n + 1]$.

Exemplo 2.19. Todas as células do Exemplo 2.14 são completamente rotuladas se tomamos L_3 indicada na tabela anterior. Por outro lado, apenas uma delas é completamente rotulada considerando-se L_1, L_2 ou L_4 .

Definição 2.20 (Borda). Dado um n -simplexo S , a união de todas as $(n - 1)$ -faces de S é chamada de borda de S e indicada por ∂S .

Concluídas as definições, veremos adiante que toda divisão simplicial com rotulagem própria admite alguma célula completamente rotulada. A prova desse resultado depende dos três lemas que seguem.

Lema 2.21. Sejam $S := \langle v_1, \dots, v_{n+1} \rangle$ simplicialmente dividido e L uma rotulagem própria da divisão. Além disso, sejam C uma célula e F uma $(n - 1)$ -face de C contida em ∂S . Se o conjunto de rótulos para os vértices de F é $[n]$, então $F \subseteq \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$.

Demonstração. Por hipótese, F é um $(n - 1)$ -simplexo cujos vértices possuem rótulos $1, 2, \dots, n$. O vértice de rótulo 1 é da forma

$$\lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i v_i,$$

onde $\lambda_1 > 0$. Logo, ele deve estar contido em alguma $(n - 1)$ -face de S contendo v_1 . Tomando os demais vértices e argumentando de modo semelhante, temos que $F \subseteq \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$. ■

Lema 2.22. *Sejam S um n -simplexo simplicialmente dividido e F uma $(n - 1)$ -face de uma célula C . Então, $F \subseteq \partial S$ ou $F = C \cap D$, para alguma célula $D \neq C$.*

Demonstração. Suponha que $F := \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ e considere a função $g : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := (x_1, \dots, x_n)$. Note que o ponto

$$w := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$$

está em F . Sejam S' , C' , $\partial F'$ e w' as imagens de S , C , ∂F e w por g , nessa ordem. Então, escolha $\delta > 0$ tal que $B(w'; \delta) \cap \partial F' = \emptyset$. Assim, temos dois casos para analisar. Primeiramente, se $[B(w'; \delta) \setminus C'] \cap S' = \emptyset$, devemos ter $F \subseteq \partial S$. Caso contrário, podemos tomar $\epsilon \leq \delta$ tal que $B(w'; \epsilon) \setminus C'$ pertence a $g(D)$, para alguma célula D . Desse modo, temos que $C \cap D = F$. ■

Ilustramos a argumentação acima na figura que segue. Escolhemos como exemplo uma divisão simplicial de Δ_2 . A partir dela, tomamos uma célula C , representada por um triângulo cinza. Então, consideramos dois casos. No primeiro, $F := \langle v_1, v_3 \rangle$ é uma face de C na borda do simplexo. No outro, $F := \langle v_2, v_3 \rangle$ é uma face de C e de outra célula. Nas duas situações, representamos $C' := g(C)$ e, com uma circunferência pontilhada, assinalamos $B(w'; \delta)$.

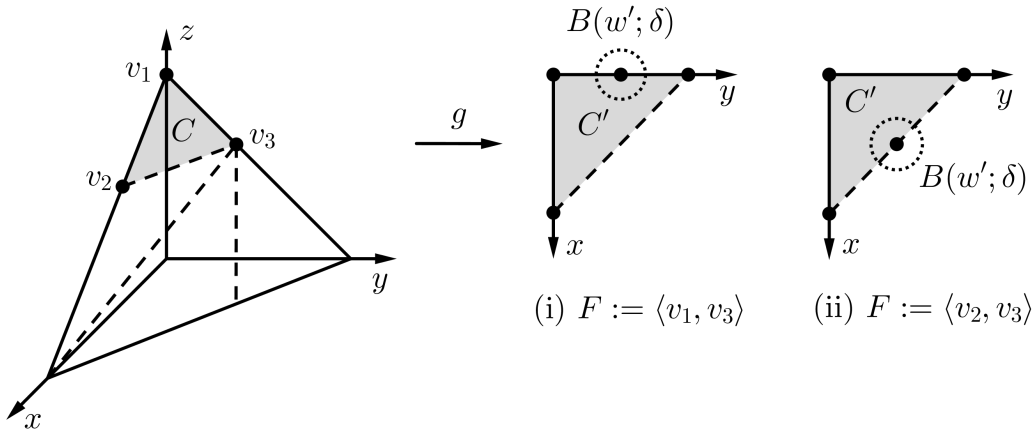


Figura 2.3: Ilustração para a demonstração do Lema 2.22.

Lema 2.23. *Sejam $S := \langle v_1, \dots, v_{n+1} \rangle$ e $\{C_i : i \in [m]\}$ uma divisão simplicial de S . Então, os elementos de $\{C_i \cap F : i \in [m]\}$ diferentes de \emptyset formam uma divisão simplicial de $F := \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.*

Demonstração. Com efeito,

$$\bigcup_{i \in [m]} (C_i \cap F) = \left(\bigcup_{i \in [m]} C_i \right) \cap F = S \cap F = F.$$

Agora, escolha duas células $C_1 := \langle a_1, \dots, a_{n+1} \rangle$ e $C_2 := \langle b_1, \dots, b_{n+1} \rangle$ da divisão de S que intersectam F . Então, $(C_1 \cap F) \cap (C_2 \cap F) = (C_1 \cap C_2) \cap F$. Logo, se C_1 e C_2 são disjuntas, o mesmo ocorre entre $(C_1 \cap F)$ e $(C_2 \cap F)$. Senão, podemos escrever $(C_1 \cap F) \cap (C_2 \cap F) := \langle c_1, \dots, c_k \rangle$, onde c_1, \dots, c_k são, ao mesmo tempo, vértices de C_1 contidos em F e vértices de C_2 contidos em F . Portanto, o simplexo determinado por eles é uma face tanto de $(C_1 \cap F)$ como de $(C_2 \cap F)$. ■

Adiante, provaremos o resultado enunciado no título da seção. O raciocínio aqui exposto é exibido em [4].

Teorema 2.24 (Lema de Sperner). *Sejam $S_n := \langle v_1, \dots, v_{n+1} \rangle$ um simplexo simplicialmente dividido e L uma rotulagem própria da divisão. Então, o número de células completamente rotuladas na divisão é ímpar.*

Demonstração. Para facilitar a compreensão da prova por indução em n , verificaremos os casos $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$ antes de analisarmos o caso geral.

(i) O caso $n = 0$ é óbvio, pois S_0 é determinado por apenas um ponto v_1 . Então, a única divisão simplicial de S_0 possível é $\{\langle v_1 \rangle\} = v_1$ e a única rotulagem própria dessa célula é $L(v_1) = 1$. Assim, obtemos uma célula completamente rotulada.

(ii) Seja $S_1 := \langle v_1, v_2 \rangle$ simplicialmente dividido. Então, S_1 é o segmento de reta que une v_1 e v_2 , e as células formam uma família de segmentos $\{C_i : i \in [m]\}$, onde C_k e C_{k+1} são adjacentes, com $k \in [m - 1]$. Nesse caso, uma rotulagem própria L é tal que $L(v_1) = 1$, $L(v_2) = 2$ e $L(x) \in \{1, 2\}$, para qualquer outro vértice x em alguma célula de S_1 . Sendo assim, indo de v_1 até v_2 , o valor de L se altera um número ímpar de vezes. Portanto, o número de células completamente rotuladas é ímpar.

(iii) Agora, considere uma divisão simplicial de $S_2 := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e uma rotulagem própria L . Sejam D o número de células cujos vértices possuem rótulos $\{1, 1, 2\}$ ou $\{1, 2, 2\}$ e C a quantidade de células completamente rotuladas. Além disso, no conjunto das 1-faces das células, tomemos aquelas cujos vértices possuem rótulos $\{1, 2\}$. Nesse subconjunto, notemos por B o número de elementos em ∂S_2 , e por I o número dos demais. Pelo Lema 2.21, os B elementos citados estão contidos, mais especificamente, em $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Contando as 1-faces com rótulos $\{1, 2\}$, vemos que a cada um dos D elementos definidos acima correspondem duas dessas faces, e a cada um dos C elementos, exatamente uma delas. Nessa contagem, cada 1-face na borda de S_2 é tomada apenas uma vez, enquanto as demais devem ser consideradas duas vezes. Concluimos que $2D + C = B + 2I$.

Conforme o Lema 2.23, as 1-faces dos subsimplexos contidas em $\langle v_1, v_2 \rangle$ formam uma divisão simplicial \mathcal{P} desse 1-simplexo. Claramente, a restrição de L aos vértices dessas 1-faces é uma rotulagem própria de \mathcal{P} . Sendo assim, de acordo com (ii), B é ímpar. Logo, pela equação acima, C é ímpar.

(iv) Finalmente, suponha que a hipótese vale para todo $k < n$ e tome $S_n := \langle v_1, \dots, v_{n+1} \rangle$ simplicialmente dividido. Seja L uma rotulagem própria dessa divisão. De modo similar ao caso anterior, seja D o número de células cujos vértices possuem rótulos $\{1, 2, \dots, i - 1, i, i, i + 1, \dots, n\}$, com $i \in [n]$. Denote por C a quantidade de células completamente rotuladas. Mais ainda, no conjunto das $(n - 1)$ -faces das células, tomemos aquelas cujos vértices possuem rótulos $\{1, 2, \dots, n\}$. Nesse subconjunto, notemos por B o número de elementos na borda de S_n e por I o número dos demais. Novamente, pelo Lema 2.21, os B elementos agora definidos estão contidos na $(n - 1)$ -face de S_n determinada por v_1, \dots, v_n .

Contando as $(n - 1)$ -faces com rótulos $\{1, \dots, n\}$, vemos que a cada um dos D elementos acima descritos correspondem duas dessas faces, e a cada um dos C elementos, exatamente uma delas. De acordo com o Lema 2.22, nessa contagem, cada $(n - 1)$ -face em ∂S_n é tomada apenas uma vez, enquanto as demais devem ser consideradas duas vezes. Concluimos que $2D + C = B + 2I$.

Então, segundo o Lema 2.23, as $(n - 1)$ -faces dos subsimplexos contidas em $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ formam uma divisão simplicial \mathcal{P} desse $(n - 1)$ -simplexo, e a restrição de L aos vértices dessas $(n - 1)$ -faces é uma rotulagem própria de \mathcal{P} . Assim, pela hipótese de indução, B é ímpar. Logo, pela relação acima, C é ímpar. ■

2.2 Um resultado topológico

Agora, verificaremos que dois conjuntos em \mathbb{R}^n compactos, convexos e de interiores não vazios são topologicamente equivalentes. Esse fato, que também se ampara em três lemas, legitima uma importante afirmação da próxima seção. As provas dos lemas e do teorema que os segue são baseadas em [2].

Lema 2.25. *Sejam K um conjunto compacto, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : K \rightarrow Y$ uma função bijetiva e contínua. Então, f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Devemos mostrar que a imagem de um conjunto aberto de K por f é um conjunto aberto de Y . De fato, seja $A \subseteq K$ aberto. Então $K \setminus A$ é fechado. Mas, sendo K compacto, $K \setminus A$ é compacto. Logo, por continuidade, $f(K \setminus A)$ é compacto. Assim, $f(K \setminus A)$ é fechado. Sendo f uma bijeção, $Y \setminus f(K \setminus A) = f(A)$. Desse modo, $f(A)$ é um aberto de Y . ■

Definição 2.26 (Semirreta ρ_x). *Dado um ponto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, a semirreta com origem em $\mathbf{0}$ e que passa por x é o conjunto $\rho_x := \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}^+\}$.*

Lema 2.27. *Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e compacto tal que $\mathbf{0} \in \text{int}(C)$. Então, qualquer semirreta com origem em $\mathbf{0}$ intercepta $\text{fr}(C)$ em exatamente um ponto.*

Demonstração. Seja ρ uma semirreta com origem em $\mathbf{0}$. Sendo C limitado, $\rho \cap \text{fr}(C)$ é não vazio. Resta-nos mostrar que essa interseção não contém dois elementos distintos. Com efeito, assumamos que $p, q \in \rho \cap \text{fr}(C)$ e suponhamos que $p \neq q$. Então, sem perda de generalidade, considere $|p| < |q|$. Uma vez que $\mathbf{0} \in \text{int}(C)$, existe $\delta > 0$ tal que $B(\mathbf{0}; \delta) \subseteq C$. Note que $p, q \in C$, já que C é fechado.

Seja U a união de todos os segmentos de reta que ligam q a um ponto de $B(\mathbf{0}; \delta)$. Então, escolhendo

$$\epsilon \leq \frac{\delta(|q| - |p|)}{|q|},$$

temos que $B(p; \epsilon) \subseteq U$, como sugere a Figura 2.4. Assim, $p \in \text{int}(U)$. Mas, sendo C convexo, $U \subseteq C$ e, por isso, $p \in \text{int}(C)$. Tal conclusão é uma contradição e, portanto, $p = q$. ■

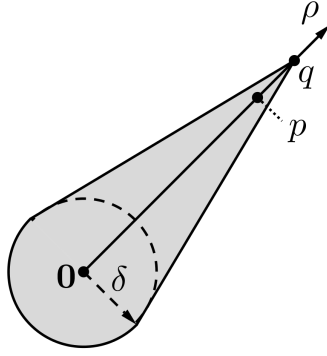


Figura 2.4: Ilustração para a prova do Lema 2.27. Por “semelhança de triângulos”, obtemos $\epsilon > 0$ tal que $B(p; \epsilon) \subseteq U$.

Lema 2.28. *Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e compacto tal que $\mathbf{0} \in \text{int}(C)$. Então, $f : \text{fr}(C) \rightarrow S^{n-1}$ dada por*

$$f(x) := \frac{x}{|x|}$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. A aplicação descrita é injetiva, pois, para quaisquer $a, b \in \text{fr}(C)$,

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{a}{|a|} = \frac{b}{|b|} \Rightarrow a, b \in \rho_a.$$

Assim, pelo lema anterior, $a = b$.

Além disso, f é sobrejetiva. Com efeito, escolha $s \in S^{n-1}$. Então, pelo Lema 2.27, $\text{fr}(C) \cap \rho_s$ consiste em um único ponto c , para o qual temos $f(c) = s$.

Também, como $\mathbf{0}$ está fora do domínio de f , a continuidade dos termos da fração garantem que f é contínua. Sendo $\text{fr}(C)$ claramente compacto, segue pelo Lema 2.25 que f é um homeomorfismo. ■

Teorema 2.29. *Todo conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, compacto e de interior não vazio é homeomorfo a D^n .*

Demonstração. Uma vez que translações são homeomorfismos, assumamos $\mathbf{0} \in \text{int}(C)$ e ponhamos, como no lema anterior, $f : \text{fr}(C) \rightarrow S^{n-1}$ tal que

$$f(x) := \frac{x}{|x|}.$$

Agora, defina $k : D^n \rightarrow C$ fazendo $k(\mathbf{0}) := \mathbf{0}$ e

$$k(x) := |x|f^{-1}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

para $x \neq \mathbf{0}$.

Em primeiro lugar, k é injetiva. Realmente, $k(x) \neq k(\mathbf{0})$ se $x \neq \mathbf{0}$ e, para dois vetores não nulos $a, b \in D^n$,

$$k(a) = k(b) \Rightarrow |a|f^{-1}\left(\frac{a}{|a|}\right) = |b|f^{-1}\left(\frac{b}{|b|}\right). \quad (2.1)$$

Mas

$$u := f^{-1} \left(\frac{a}{|a|} \right) \quad \text{e} \quad v := f^{-1} \left(\frac{b}{|b|} \right)$$

são vetores na fronteira de C tais que um é múltiplo do outro, como mostra a última igualdade em (2.1). Então, existe uma semirreta com origem em $\mathbf{0}$ passando pelos dois vetores. Como ambos estão em $\text{fr}(C)$, eles devem ser iguais, de acordo com o Lema 2.27. Sendo assim, temos que $|a| = |b|$. Agora, repare que a imagem de algum vetor w por f ou por sua inversa está em ρ_w . Portanto, $u \in \rho_a$ e $v \in \rho_b$. Mas, como $\rho_u = \rho_v$, $a, b \in \rho_u$, o que nos dá $a = b$.

Em acréscimo, verifiquemos que k é sobrejetiva. Já sabemos que $\mathbf{0} \in \text{Im}(k)$. Então, tomemos $c \in C \setminus \{\mathbf{0}\}$ arbitrariamente. Pondo $c' := c/|c|$, vemos que

$$\frac{c}{|f^{-1}(c')|} \in D^n \quad \text{e} \quad k \left(\frac{c}{|f^{-1}(c')|} \right) = \frac{|c|}{|f^{-1}(c')|} f^{-1}(c').$$

Mas $f^{-1}(c') \in \rho_c$ e, ao dividirmos um vetor não nulo nessa semirreta pela sua norma, obtemos sempre c' . Sendo assim,

$$k \left(\frac{c}{|f^{-1}(c')|} \right) = c.$$

Um exemplo para esclarecer o raciocínio acima é dado pela figura que segue. Ela ilustra um caso em que $n = 3$.

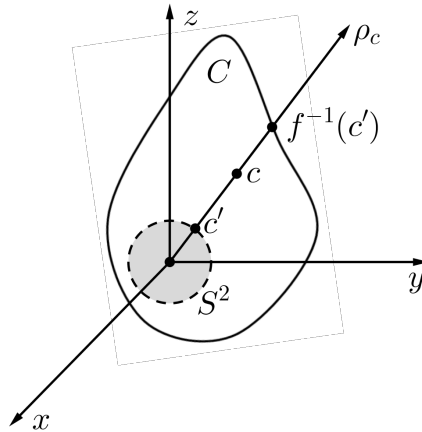


Figura 2.5: Ilustração para a prova do Teorema 2.29. A função k definida nela é sobrejetiva.

Além disso, k é uma função contínua. De fato, em $D^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, k é um produto de funções contínuas. Já em $x = \mathbf{0}$ a continuidade é garantida porque, sendo C limitado, existe um real positivo M tal que $|k(x)| \leq M|x|$, qualquer que seja $x \in D^n$. Então, dado $\epsilon > 0$, pondo $\delta := \epsilon/M$, observamos que $|x - \mathbf{0}| < \delta \Rightarrow M|x| < \epsilon \Rightarrow |k(x) - k(\mathbf{0})| < \epsilon$.

Finalmente, visto que D^n é compacto, k é um homeomorfismo consoante o Lema 2.25. ■

Terminaremos a seção conferindo uma consequência do teorema anterior.

Corolário 2.30. *Seja $P := \prod_{i=1}^n \Delta_{m_i}$. Pondo $s := \sum_{i=1}^n m_i$, então $P \simeq \Delta_s$.*

Demonstração. Basta-nos provar que $\Delta_m \times \Delta_n \simeq \Delta_{m+n}$ para quaisquer m e n inteiros positivos, já que $\Delta_0 = 1$. Com esse intento, definamos $f : \Delta_m \times \Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ pondo

$$(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \times (y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n).$$

Claramente, f é contínua¹ e injetiva. Notemos também que $\Delta_m \times \Delta_n$ é compacto, pois é o produto cartesiano de conjuntos compactos. Então, pelo Lema 2.25, $\Delta_m \times \Delta_n \simeq \text{Im}(f)$. Sendo a compacidade um invariante topológico, $\text{Im}(f)$ é compacto. Além disso, é fácil verificar que $\text{Im}(f)$ é convexo. Em acréscimo, $\text{Im}(f)$ possui interior não vazio. De fato, o ponto

$$a := \left(\frac{1}{2(m+n)}, \dots, \frac{1}{2(m+n)} \right)$$

de \mathbb{R}^{m+n} pertence a $\text{Im}(f)$ e, tomando

$$\epsilon < \frac{1}{3(m+n)},$$

teremos $B(a; \epsilon) \subseteq \text{Im}(f)$.

Agora, tomemos $g : \Delta_{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ dada por

$$(z_1, \dots, z_{m+n}, z_{m+n+1}) \mapsto (z_1, \dots, z_{m+n}).$$

Por raciocínios análogos aos considerados para f , podemos concluir que $\text{Im}(g)$ é um conjunto convexo, compacto, de interior não vazio e homeomorfo a Δ_{m+n} .

Logo, de acordo com o Teorema 2.29, $\text{Im}(f) \simeq \text{Im}(g)$. Usando novamente a transitividade da relação \simeq , concluímos que $\Delta_m \times \Delta_n \simeq \Delta_{m+n}$. ■

2.3 O Teorema do ponto fixo de Brouwer

Adiante, apresentamos outra proposição essencial para a conclusão da descoberta de Nash. Tal proposição estabelece que se A é um conjunto compacto, convexo e $\text{int}(A) \neq \emptyset$, então toda aplicação contínua $f : A \rightarrow A$ mapeia um ponto em si mesmo. As provas exibidas nesta seção são baseadas na obra [9].

Definição 2.31 (Ponto fixo). *Dada uma aplicação $f : A \rightarrow A$, dizemos que $a \in A$ é um ponto fixo de f se $f(a) = a$.*

Teorema 2.32 (Teorema do ponto fixo de Brouwer). *Seja $f : \Delta_m \rightarrow \Delta_m$ uma função contínua. Então f admite um ponto fixo.*

Demonstração. Seja (\mathcal{P}_n) uma sequência de divisões simpliciais de Δ_m tal que, em $\mathcal{P}_k \in (\mathcal{P}_n)$, a distância entre quaisquer dois pontos em uma mesma célula é inferior ou igual a $1/k$. Para o conjunto de vértices V_k das células de \mathcal{P}_k definimos $L_k : V_k \rightarrow [m+1]$ como

$$L_k(v) \in i^+(v) \cap \{i : f(v)_i \leq v_i\}.$$

Note que L_k está bem definida, pois se f aumentasse todas as coordenadas positivas de v , ela deveria diminuir alguma coordenada nula para assegurar que

¹De fato, utilizando a definição de continuidade via δ e ϵ , para toda escolha de $\epsilon > 0$, podemos tomar $\delta := \epsilon$.

$$\sum_{i=1}^{m+1} v_i = \sum_{i=1}^{m+1} f(v)_i = 1,$$

o que não pode ocorrer. Além disso, L_k é uma rotulagem própria, por construção.

Para cada inteiro positivo k , escolha uma célula C_k de \mathcal{P}_k completamente rotulada, o que é permitido pelo Lema de Sperner. Nessa célula, seja $v_{k,1}$ o vértice de rótulo 1. A sequência $(v_{n,1})$ não é necessariamente convergente. Mas, sendo Δ_m compacto, ela admite uma subsequência convergente, digamos $(x_{n,1})$, cujo limite é $y^{(1)} \in \Delta_m$. Nas células dessa subsequência, os vértices de rótulo 2 também formam uma sequência de pontos $(v_{n,2})$ que assume uma subsequência $(x_{n,2})$ convergente a $y^{(2)} \in \Delta_m$. Repare que nas células referentes a $(x_{n,2})$, a convergência da sequência de vértices de rótulo 1 está garantida, pois ela é uma subsequência de $(x_{n,1})$. Repetindo este raciocínio, obtemos uma sequência de células completamente rotuladas tal que, notando o vértice de rótulo j de seu i -ésimo elemento como $u_{i,j}$, temos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (u_{i,j}) = y^{(j)},$$

para cada $j \in [m+1]$.

As condições da construção de (\mathcal{P}_n) nos asseguram de que todos os $y^{(j)}$ são, na verdade, um mesmo ponto, digamos p . Então, tomando por exemplo o rótulo 1, temos

$$f(u_{i,1})_1 \leq (u_{i,1})_1 \quad \text{e} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (u_{i,1})_1 = p_1.$$

Pela continuidade de f , segue que $f(p)_1 \leq p_1$. Como o mesmo vale para os demais rótulos, obtemos $m+1$ desigualdades. Somando-as membro a membro, observamos que

$$1 = \sum_{j=1}^{m+1} f(p)_j \leq \sum_{j=1}^{m+1} p_j = 1.$$

Afirmamos que $f(p)_j = p_j$ para todo j . De fato, se $f(p)_j < p_j$ para algum j , não poderíamos ter as duas igualdades acima e as $m+1$ desigualdades citadas. Consequentemente, $f(p) = p$. ■

Corolário 2.33. *Sejam $P := \prod_{i=1}^n \Delta_{m_i}$ e $f : P \rightarrow P$ uma função contínua. Então, f possui algum ponto fixo.*

Demonstração. Assumindo $s := \sum_{i=1}^n m_i$, o Corolário 2.30 nos revela que existe um homeomorfismo $h : \Delta_s \rightarrow P$. Note que a função $h^{-1} \circ f \circ h : \Delta_s \rightarrow \Delta_s$ é contínua e, segundo o teorema acima, possui um ponto fixo a . Nesse caso, pondo $b := h(a)$, teremos

$$h^{-1}\{f[h(a)]\} = a \Rightarrow h^{-1}[f(b)] = h^{-1}(b) \Rightarrow f(b) = b.$$

Portanto, b é um ponto fixo de f . ■

2.4 Propriedades da função U_i

Terminaremos nossa preparação para a prova de Nash verificando algumas propriedades da função U_i , definida no capítulo anterior. Lembramos que ela é uma aplicação real cujo domínio é o conjunto de perfis de estratégias mistas S e que é expressa por

$$U_i[(s_1, \dots, s_n)] := \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^n s_j(a_j).$$

Lema 2.34. Dado um jogo em forma normal (N, A, R) , a função U_i é contínua, qualquer que seja $i \in N$.

Demonstração. De fato, pondo $m := \sum_{i=1}^n |A_i|$, temos que U_i é uma função de m variáveis definida em um subconjunto de $[0, 1]^m$. Note que, escolhido $s \in S$, $U_i(s)$ é uma soma finita na qual cada parcela é um produto composto por um coeficiente seguido de n dentre as m variáveis. Ou seja, $U_i(s)$ é um polinômio de m variáveis. Assim sendo, U_i é contínua. ■

Lema 2.35. Seja (N, A, R) um jogo em forma normal. Fixados $i \in N$ e $r_i \in S_i$, a função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(s) := U_i(r_i, s_{-i})$ é contínua.

Demonstração. Semelhante à do lema anterior. ■

Lema 2.36. Se c é combinação convexa dos reais a_1, a_2, \dots, a_n , então $c \geq a_i$ para algum $i \in [n]$.

Demonstração. Suponha que $a_i > c$ para todo $i \in [n]$. Sejam

$$c = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$$

e $m := \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Então,

$$c \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i m = m > c,$$

que é uma contradição. ■

Definição 2.37 (Suporte). O suporte de uma estratégia mista $s_i \in S_i$ é o conjunto

$$\{a_i \in A_i : s_i(a_i) > 0\}.$$

Repare que o suporte de qualquer estratégia é um conjunto não vazio.

Notação 2.38. Seja $a_i \in A_i$ uma ação disponível ao jogador i de um jogo em forma normal. Notamos por \bar{a}_i o elemento de $\mathfrak{D}(A_i)$ que associa a_i a 1.

Lema 2.39. Seja $s := (s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ um perfil de estratégias mistas de um jogo em forma normal (N, A, R) . Então, para cada jogador i , existe uma ação $a_i \in A_i$ no suporte de s_i tal que $U_i(\bar{a}_i, s_{-i}) \leq U_i(s)$.

Demonstração. Para simplificar a notação, vamos provar a afirmação para $i = 1$, pois os outros casos seguem analogamente. Considere que $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ seja o suporte de s_1 . Então,

$$\begin{aligned} U_1(s) &:= \sum_{a \in A} u_1(a) s_1(a) \prod_{j=2}^n s_j(a_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{a \in A \\ a_1 = x_i}} u_1(a) s_1(x_i) \prod_{j=2}^n s_j(a_j) \\ &= \sum_{i=1}^m s_1(x_i) \sum_{\substack{a \in A \\ a_1 = x_i}} u_1(a) \prod_{j=2}^n s_j(a_j) \end{aligned}$$

Sendo assim, o Lema 2.36 nos garante que

$$U_1(s) \geq \sum_{\substack{a \in A \\ a_1 = x_i}} u_1(a) \prod_{j=2}^n s_j(a_j) = U_1(\bar{x}_i, s_{-1})$$

para algum $i \in [m]$. ■

Lema 2.40. *Considere que $t := (t_1, \dots, t_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ seja um perfil de estratégias mistas de um jogo em forma normal (N, A, R) . Se para todo $i \in N$ e para todo $a_i \in A_i$ temos $U_i(\bar{a}_i, t_{-i}) \leq U_i(t)$, então t é um equilíbrio de Nash.*

Demonstração. Novamente fixaremos $i = 1$. Então, pondo $A_1 := \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ e escolhendo qualquer $s_1 \in S_1$, temos:

$$\begin{aligned} U_1(s_1, t_{-1}) &= \sum_{a \in A} u_1(a) s_1(a_1) \prod_{j=2}^n t_j(a_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{a \in A \\ a_1 = x_i}} u_1(a) s_1(x_i) \prod_{j=2}^n t_j(a_j) \\ &= \sum_{i=1}^m s_1(x_i) \sum_{\substack{a \in A \\ a_1 = x_i}} u_1(a) \prod_{j=2}^n t_j(a_j) \\ &= \sum_{i=1}^m s_1(x_i) U_1(\bar{x}_i, t_{-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^m s_1(x_i) U_1(t) = U_1(t). \end{aligned}$$

Dessa forma, t_1 é uma resposta ótima a t_{-1} . Uma vez que o mesmo ocorre para os demais jogadores, temos que t é um equilíbrio de Nash. ■

Capítulo 3

O Teorema do equilíbrio de Nash

3.1 O resultado

Finalmente, conheceremos a demonstração do Teorema do equilíbrio de Nash. A prova adiante fundamenta-se em [9]. Nela, empregamos uma noção muito simples: o conjunto de estratégias mistas S_i pode ser representado por Δ_k , onde $k := |A_i| - 1$.

Teorema 3.1 (Teorema do equilíbrio de Nash). *Todo jogo em forma normal (N, A, R) possui um equilíbrio de Nash.*

Demonstração. Para quaisquer $i \in N$ e $a_i \in A_i$, façamos $\varphi_{i,a_i} : S \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\varphi_{i,a_i}(s) := \max\{0, U_i(\bar{a}_i, s_{-i}) - U_i(s)\}.$$

De acordo com os lemas 2.34 e 2.35, φ_{i,a_i} é definida como o máximo de duas funções contínuas. Por isso, tal aplicação é contínua.

Em acréscimo, pomos $\psi : S \rightarrow S$ como $\psi(s) := s'$, onde

$$s'_i(a_i) := \frac{s_i(a_i) + \varphi_{i,a_i}(s)}{1 + \sum_{b \in A_i} \varphi_{i,b}(s)}, \quad i \in [n]. \quad (3.1)$$

Por também ser contínua, ψ possui algum ponto fixo, conforme o Corolário 2.33. Obteremos o resultado mostrando que t é um ponto fixo de ψ se e somente se t é um equilíbrio de Nash.

Primeiramente, suponha que $t := (t_1, t_2, \dots, t_n)$ seja um equilíbrio de Nash. Então, dado $i \in N$, t_i é uma resposta ótima a t_{-i} . Assim, temos $U_i(t_i, t_{-i}) \geq U_i(s_i, t_{-i})$, para qualquer $s_i \in S_i$. Logo, $\varphi_{i,a_i}(t) = 0$, para quaisquer $i \in N$ e $a_i \in A_i$. Portanto, $\psi(t) = t'$ é tal que $t'_i(a_i) = t_i(a_i)$. Nesse caso, $\psi(t) = t$, ou seja, t é um ponto fixo de ψ .

Agora, considere que $\psi(t) = t$, com $t := (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Segundo o Lema 2.39, para cada jogador i , existe uma ação c_i tal que $t_i(c_i) > 0$ e $U_i(\bar{c}_i, t_{-i}) \leq U_i(t)$. Portanto, $\varphi_{i,c_i}(t) = 0$. Pela hipótese do ponto fixo,

$$t_i(c_i) = t'_i(c_i) := \frac{t_i(c_i) + \varphi_{i,c_i}(t)}{1 + \sum_{b \in A_i} \varphi_{i,b}(t)}, \quad i \in [n].$$

Logo, $\sum_{b \in A_i} \varphi_{i,b}(t) = 0$. Como todos os termos desse somatório são reais não negativos, temos $\varphi_{i,b}(t) = 0$ para quaisquer $i \in N$ e $b \in A_i$. Segue que, para todo $i \in N$ e para todo $b \in A_i$ temos $U_i(\bar{b}, t_{-i}) \leq U_i(t)$. Então, pelo Lema 2.40, t é um equilíbrio de Nash. ■

3.2 Calculando equilíbrios de Nash em jogos simples

Encerraremos nosso trabalho obtendo os equilíbrios de Nash de três jogos elementares. O primeiro jogo não apresenta equilíbrio puro. Já o segundo possui um equilíbrio puro, ao qual se associa o único equilíbrio de Nash. O último jogo, por sua vez, contém dois equilíbrios puros e três equilíbrios de Nash. A chave utilizada aqui para conseguir esses perfis de estratégias especiais é a proposição adiante.

Proposição 3.2. *Seja $t := (t_1, t_2, \dots, t_n)$ um equilíbrio de Nash. Então, dado um jogador i , $U_i(\bar{x}, t_{-i}) = U_i(\bar{y}, t_{-i})$ para quaisquer x, y no suporte de t_i .*

Demonstração. Seja $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ o suporte de t_1 . Para cada $j \in [m]$, notemos $U_1(\bar{x}_j, t_{-1})$ como p_j . Desse modo,

$$U_1(t_1, t_{-1}) = \sum_{j=1}^m t_1(x_j) p_j.$$

Se tivéssemos $p_1 > p_2$, poderíamos, aumentando $t_1(x_1)$ e diminuindo $t_1(x_2)$, obter uma estratégia s_1 tal que $U_1(s_1, t_{-1}) > U_1(t_1, t_{-1})$, o que é impossível. Similarmente, não podemos ter $p_1 < p_2$. Como os elementos fixados são arbitrários, a prova está completa. ■

Exemplo 3.3. Considere um jogo em forma normal tal que $N = 2$, $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c, d\}$ e as funções u_1 e u_2 assumem os valores indicados na tabela abaixo. Assim, as primeiras coordenadas dos pares de números correspondem a M_1 , a matriz de recompensas de 1, enquanto as demais, a M_2 .

		2	
		c	d
1	a	(0, 2)	(2, 1)
	b	(3, 0)	(1, 3)

Tabela 3.1: Pares ordenados de termos de M_1 e M_2 .

Repare que esse jogo não possui nenhum equilíbrio puro. Mas, pelo Teorema 3.1, ele admite algum equilíbrio de Nash (t_1, t_2) , que será calculado agora. Notemos esse perfil como $[(p, 1 - p); (q, 1 - q)]$, onde $p := t_1(a)$ e $q := t_2(c)$. Como não há equilíbrios puros, $0 < p < 1$. Sendo assim, a e b estão no suporte de t_1 . Logo, pela proposição acima,

$$U_1(\bar{a}, t_2) = U_1(\bar{b}, t_2) \Rightarrow 2(1 - q) = 3q + 1 - q \Rightarrow q = \frac{1}{4}.$$

Uma vez que $0 < q < 1$, c e d pertencem ao suporte de t_2 . Então, novamente pela Proposição 3.2,

$$U_2(t_1, \bar{c}) = U_2(t_1, \bar{d}) \Rightarrow 2p = p + 3(1 - p) \Rightarrow p = \frac{3}{4}.$$

Portanto, o equilíbrio de Nash nesse jogo é

$$\left[\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right); \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right) \right].$$

Exemplo 3.4. Seja (t_1, t_2) um equilíbrio de Nash no Dilema do prisioneiro, jogo apresentado no Capítulo 1. Como no exemplo anterior, expressemos esse perfil como $[(p, 1 - p); (q, 1 - q)]$, onde $p := t_1(\text{Silêncio})$ e $q := t_2(\text{Silêncio})$. Lembre-se de que, em nossa versão, os jogadores são indicados por C e D e as matrizes M_C e M_D possuem os valores exibidos na tabela abaixo.

		D	
		Silêncio	Acusação
C	Silêncio	$(-2, -2)$	$(-10, 0)$
	Acusação	$(0, -10)$	$(-4, -4)$

Tabela 3.2: Pares ordenados de termos de M_C e M_D .

Afirmamos que $p = 0$. Com efeito, suponha que $0 < p < 1$. Então, observando a proposição desta seção e a tabela anterior, segue que

$$U_1(\overline{\text{Silêncio}}, t_2) = U_1(\overline{\text{Acusação}}, t_2) \Rightarrow -2q - 10(1 - q) = -4(1 - q) \Rightarrow q = \frac{3}{2},$$

que é um absurdo. Agora, suponha que $p = 1$. Nesse caso, como t_2 deve ser uma resposta ótima a t_1 , teríamos $q = 0$. Contudo, $[(1, 0); (0, 1)]$ não apresenta as características do perfil desejado. Logo, devemos ter $p = 0$. Portanto, $[(0, 1); (0, 1)]$ é o equilíbrio de Nash desse jogo. Note que ele está associado ao equilíbrio puro que havíamos encontrado no primeiro capítulo.

Exemplo 3.5. A tabela que segue revela as matrizes de recompensas M_1 e M_2 para um jogo em forma normal.

		2	
		c	d
1	a	$(4, 2)$	$(1, 1)$
	b	$(0, 0)$	$(2, 5)$

Tabela 3.3: Pares ordenados de termos de M_1 e M_2 .

Através do mesmo raciocínio empregado nos exemplos anteriores, é fácil verificar que, nessa situação, os equilíbrios de Nash são:

$$[(0, 1); (0, 1)], [(1, 0); (1, 0)] \text{ e } \left[\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right); \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right) \right].$$

Referências

- [1] ANN DIMAND, M.; WILLIAM DIMAND, R. **The History of Game Theory, vol. 1: From the Beginnings to 1945**. London: Routledge, 1996.
- [2] BREDON, G. E. **Topology and Geometry**. 1st ed. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [3] CARMICHAEL, F. **A Guide to Game Theory**. 1st ed. Harlow: Pearson Education, 2005.
- [4] FOX, J. **Sperner's lemma and Brouwer's theorem**. Spring 2009. Disponível em: <<http://math.mit.edu/~fox/MAT307-lecture03.pdf>>. Acesso em: 6 mar. 2017.
- [5] HEAP, S. P. H.; VAROUFAKIS, Y. **Game Theory: A Critical Introduction**. London: Routledge, 2003.
- [6] HOLT, C. A.; ROTH, A. E. The Nash equilibrium: A perspective. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 101, n. 12, p. 3999-4002, Mar. 2004.
- [7] MYERSON, R. B. Nash Equilibrium and the History of Economic Theory. **Journal of Economic Literature**, v. 37, n. 3, p. 1067-1082, Sept. 1999.
- [8] OSBORNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. **A Course in Game Theory**. 1st ed. Cambridge: The MIT Press, 1994.
- [9] SHOHAM, Y.; LEYTON-BROWN, K. **Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations**. 1st ed. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [10] SIEGFRIED, T. **A beautiful math: John Nash, game theory, and the modern quest for a code of nature**. 1st ed. Joseph Henry Press: Washington, 2006.