David Teixeira Martins

Fibrados Vetoriais sobre Curvas e o Teorema de Birkhoff–Grothendieck

Belo Horizonte

Julho de 2017

David Teixeira Martins

Fibrados Vetoriais sobre Curvas e o Teorema de Birkhoff–Grothendieck

Dissertação de mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luís Contiero

Universidade Federal de Minas Gerais

Departamento de Matemática

Programa de Pós Graduação

Belo Horizonte

Julho de 2017

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me possibilitado chegar até aqui. Aproveito esta oportunidade para agradecer ao meu orientador, professor André Luis Contiero, pelo suporte, companheirismo e a sua agradável forma de motivar a todos aqueles que compartilham o interesse por esta fascinante área do conhecimento. Agradeço também aos demais membros da banca, professores Renato Vidal e Marco Boggi e ao professor Israel Vainsencher pelas valiosas sugestões e correções a esta dissertação. Agradeço a Andréa e a Kelli por auxiliar-me com as questões burocráticas do dia-a-dia e aos demais funcionários do programa de pós-graduação em matemática.

Agradeço de modo muito especial a todos os colegas que tive a oportunidade de conhecer no decorrer desses últimos anos e que, sem dúvida, foram de fundamental importância em mais esta etapa da minha formação, dentre os quais gostaria de citar: Joilson Porto, Jonas Reis, Cláudia Rabelo, Gabriel Fagundes, Eduardo Cárdenas e Leonardo Abath.

Agradeço a minha família, que sempre me apoiou e incentivou neste caminho que escolhi trilhar, em especial, aos meus pais: Daniel e Elza e irmãos: Dany, Daniel Jr., Danilo e Denis.

Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.
Ludwig Wittgenstein

Sumário

1 Introdução

O principal objetivo desta dissertação é o célebre teorema de Birkhoff–Grothendieck. Teorema que classifica todos os fibrados vetoriais sobre a reta projetiva $\mathbb{P}^1$ definida sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbf{k}$, especificamente, assegura que um fibrado de posto m sobre $\mathbb{P}^1$ se escreve como soma direta de fibrados em retas bem conhecidos, os famosos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$. Na literatura este teorema é usualmente atribuído somente a A. Grothendieck, cuja prova foi pubicada em 1957 em [Gro]. Contudo, o teorema de fatorização de Birkhoff [Bir], que foi publicado no ano de 1909, predizia a existência de um tal resultado.

Não seguiremos a prova de A. Grothendieck, apesar de muito elegante e possibilitar generalizações, como por exemplo o teorema no caso de $\mathbb{P}^n$, veja [OkSchSpin]. Ao invés, ficaremos mais próximo do teorema de fatorização de Birkhoff sobre matrizes invertíveis cujas entradas são polinômios de Laurent em uma indeterminada, isto ficará claro na Proposição 4.1.1 desta dissertação. A prova aqui apresentada foi feita por Hazenwinkel–Martin [HaMa] no ano de 1982, prova muito simples e que nos parece que foi inspirada no supracitado teorema de Birkhoff.

Outra característica desta dissertação foi a preocupação em se fazer pontes entre curvas algébricas definida classicamente como fechados de espaços projetivos, como no livro do Fulton [Ful], as curvas definidas de maneira inteiramente local, como definidas por Stoehr [St], e finalmente as curvas definidas como esquemas projetivos mergulhados. Traduziremos os conceitos de divisores de Weil, Feixes invertíveis e Fibrados sobre estas três linguagens da Geometria Algébrica. Passemos agora a descrever brevemente os capítulos que compõem esta dissertação.

O capítulo 2 é dedicado ao estudo de valorizações e corpos de funções em uma variável. São apresentadas as definições básicas e os principais teoremas. Assumiremos conhecida a teoria de curvas apresentadas em [Ful]. É estudado o grupo de Picard de uma curva definida como o conjunto de anéis de valorização, como em [St] ou em [BoPe].

No capítulo 3 são apresentadas as definições básicas de fibrados vetoriais, feixes e esquemas. O ponto forte deste capítulo é a conexão entre as definições de curvas apresentadas aqui, a conexão entre divisores de Weil e feixes invertíveis e por fim a conexão entre fibrados vetoriais de feixes localmente livres. Destacamos que não faremos teoria geral de feixes e esquemas, muito embora aproveitamos as definições gerais, nosso principal foco são as curvas. Finalmente no capítulo 4 é detalhada a prova do Teorema de Birkhoff–Grothendieck seguindo [HaMa].

2 Preliminares

Em todo o texto, $\mathbf{k}$ denota um corpo algebricamente fechado. Nesta seção as noções de espaços afins e projetivos são as usuais, a saber:

$$\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} := \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in \mathbf{k}\}$$

enquanto que

$$\mathbb{P}^n := \{(a_0 : \ldots : a_n) \,|\, a_i \in \mathbf{k}\} = \mathbb{A}^{n+1}/\sim$$

em que $(a_0, \ldots, a_n) \sim (b_0, \ldots, b_n) \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbf{k}^*;\, b_i = \lambda a_i \,\forall\, i$. E em cada um desses espaços consideraremos a topologia de Zariski. Os pré-requisitos em curvas algébricas podem ser encontrados no livro de W. Fulton [Ful], enquanto que o conteúdo aqui apresentado sobre valorizações foi completamente inspirado em [BoPe].

2.1 Valorizações e Curvas Algébricas

Definição 2.1.1. *Seja K um corpo. Uma* valorização *de K é um mapa $v : K^* \to \mathbb{Z}$ que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $v : K^* \to \mathbb{Z}$ *é um homomorfismo sobrejetivo não-nulo,*

(ii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ *para todos* $x, y \in K^*$.

Algumas vezes será conveniente estender v a K. Faremos isso definindo

(iii) $v(0) := \infty$.

Convencionando-se que $\infty + \infty = \infty + n = \infty$ e $\infty > n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, teremos $v(x\,y) = v(x) + v(y)$ e *(ii)* para quaisquer $x, y \in K$.

Quando temos uma extensão de corpos $K|F$, dizemos que a valorização v de K é *não-arquimediana sobre* F, ou simplesmente *sobre* F, se $v(x) = 0$ para todo $x \in F^*$.

Definição 2.1.2. *Seja R um domínio que não é um corpo. Dizemos que R é um* anel de valorização discreta *(abreviadamente DVR) se ele satisfaz qualquer das seguintes definições equivalentes:*

(i) R é Noetheriano e local, e o seu único maximal é principal.

(ii) Existe um elemento irredutível $\mathfrak{t} \in R$ *tal que todo* $z \in R \setminus \{0\}$ *se escreve de modo único como* $z = u\mathfrak{t}^n$*,* u *unidade e* $n \in \mathbb{N}$*.*

Para uma prova da equivalência veja [Ful, prop 4, pg. 22].

Exemplo 2.1.3. Dada uma valorização $v : K \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, podemos verificar facilmente que $\mathcal{O}_v := \{z \in K \mid v(z) \geq 0\}$ é um DVR. Reciprocamente, dado R um DVR com corpo de frações K, temos a valorização em K definida por $v(u\mathfrak{t}^n) = n \in \mathbb{Z}$ e $v(0) = \infty$. Além disso, $\mathfrak{m}_v := \{z \in K \mid v(z) > 0\}$ é o ideal maximal de $\mathcal{O}_v$ e o corpo quociente $k_v := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$ é denominado o *corpo residual* de v.

Exemplo 2.1.4. Seja $K = \mathbf{k}(X)$ o corpo de funções racionais na indeterminada X. Definimos a valorização v_0 de K sobre $\mathbf{k}$ do seguinte modo: Para $g \in \mathbf{k}[X] \setminus \{0\}$, $v_0(g)$ é o grau do monômio inicial de g, e para um elemento genérico $f = g/h \in \mathbf{k}(X)$ com $g, h \in \mathbf{k}[X] \setminus \{0\}$ polinômios coprimos, definimos

$$v_0(f) := v_0(g) - v_0(h).$$

Com isso, temos uma valorização de K, como se pode verificar facilmente.

Exemplo 2.1.5. Novamente, vamos considerar $K = \mathbf{k}(X)$ e definir valorizações de K sobre $\mathbf{k}$. Todo $f \in K^*$ pode ser escrito como um produto finito $f = \alpha \prod (X - p_i)^{n_i}$ com $p_i \in \mathbf{k}$, $n_i \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in \mathbf{k}^*$. Para cada $p \in \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ temos uma valorização v_p de K definida por

$$v_p(f) = \begin{cases} n_i, & \text{se } p = p_i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos verificar que isso de fato define uma valorização de K. A condição (i) é trivialmente satisfeita, ademais, é claro que v_p é sobre $\mathbf{k}$. A fim de comprovar (ii) consideremos $f = (X - p)^n f_1$ e $g = (X - p)^m g_1$ onde $f_1(p), g_1(p) \in \mathbf{k}^*$ (isso significa que nenhuma potência não nula de $X - p$ aparece em f_1 e nem em g_1). Temos dois casos a considerar: $n > m$ ou $n = m$. No primeiro caso, temos

$$\begin{aligned} v_p(f + g) &= v_p((X - p)^m (f_1\,(X - p)^{n-m} + g_1)) \\ &= v_p((X - p)^m) + v_p(f_1\,(X - p)^{n-m} + g_1)) \\ &= m. \end{aligned}$$

E no segundo,

$$\begin{aligned} v_p(f + g) &= v_p((X - p)^n (f_1 + g_1)) \\ &= v_p((X - p)^n) + v_p(f_1 + g_1) \\ &= n. \end{aligned}$$

Em ambos, a última igualdade segue do fato de $((X-p)^{m-n}+g_1)(p)$ e $(f_1+g_1)(p)$ pertencerem a $\mathbf{k}^*$.

Note que a valorização v_0 definida aqui é a mesma do Exemplo 2.1.5. Temos também a valorização v_∞, definida em K^* por

$$v_\infty(P/Q) := \deg(Q) - \deg(P).$$

O Exemplo 2.1.5 mostra que podemos associar a cada ponto de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ uma valorização de $K = \mathbf{k}(X)$. O teorema a seguir diz que, reciprocamente, a cada valorização de $\mathbf{k}(X)$ está associado um ponto de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$. Ou seja, temos uma correspondência biunívoca entre pontos de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ e valorizações de $\mathbf{k}(X)$.

Teorema 2.1.6. *A toda valorização de $\mathbf{k}(X)$ corresponde um ponto $p \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$.*

Demonstração. Seja v uma valorização de $\mathbf{k}(X)$. Temos que

$$v(\alpha \prod (X-p_i)^{n_i}) = \sum n_i v(X-p_i).$$

Portanto, v é determinada pelos seus valores nos polinômios $X-a$ com $a \in \mathbf{k}$. Temos dois casos a analisar.

1) Suponha que exista $a \in \mathbf{k}$ tal que $v(X-a) < 0$. Esse caso corresponderá ao ponto no infinito e à valorização v_∞ definida acima. Para um tal a e qualquer $b \in \mathbf{k} \setminus \{a\}$, temos

$$\begin{aligned} 0 > v(X-a) &= v(X-b+(b-a)) \\ &\geq \min\{v(X-b), v(b-a)\} \\ &= \min\{v(X-b), 0\} \\ &= v(X-b), \end{aligned}$$

a última igualdade pelo fato de $\min\{v(X-b),0\} = 0$ implicar $v(X-a) \geq 0$. Invertendo-se os papéis de a e b no cálculo acima, obteremos $v(X-b) \geq v(X-a)$. Assim, $v(X-b) = v(X-a) < 0$ para todo $b \in \mathbf{k}$. Como v é sobrejetiva, devemos ter $v(X-a) = -1$, pois do contrário, a imagem de v seria o subgrupo próprio $-v(X-a)\,\mathbb{Z}$. Com isso,

$$\begin{aligned} v(\lambda \prod (X-a_i)^{n_i} \, (\prod (X-b_i)^{m_i})^{-1}) &= (\sum n_i)(-1) - (\sum m_i)(-1) \\ &= \sum m_i - \sum n_i, \end{aligned}$$

mostrando que $v = v_\infty$. Esta valorização corresponde ao ponto no infinito $(1:0) \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$.

2) Agora suponha que $v(X-b) \geq 0$ para todo $b \in \mathbf{k}$. Assumindo que v é não trivial, deve existir um a tal que $v(X-a) > 0$. Para todo $b \in \mathbf{k} \setminus \{a\}$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= v(a-b) \\ &= v((X-b)+(a-X)) \\ &\geq \min\{v(X-a), v(X-b)\}, \end{aligned}$$

o que implica necessariamente $v(X - b) = 0$. Novamente, pela sobrejetividade de v, devemos ter $v(X - a) = 1$. Agora, é fácil verificar que v coincide com a valorização v_a do Exemplo 2.1.5 e esta corresponderá ao ponto $(a : 1) \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$. □

Lema 2.1.7. *Sejam $v : K^* \to \mathbb{Z}$ uma valorização de K e $f_1, \ldots, f_n \in K^*$ $(n \geq 2)$. Temos que*

(i) $v(f_1 + \cdots + f_n) \geq \min\{v(f_1), \ldots, v(f_n)\}$,

(ii) Se o mínimo for atingido por um único f_i, então teremos igualdade na relação acima,

(iii) Se $f_1 + \cdots + f_n = 0$, então o mínimo será atingido pelo menos duas vezes.

Demonstração. O item (i) segue diretamente da definição por indução em n. A fim de verificar (ii) suponha que $v(f_1) < v(f_i)$ para todo $i \geq 2$. Se tivéssemos $v(f_1 + \cdots + f_n) > v(f_1)$, então

$$\begin{aligned} v(f_1) &= v(f_1 + \cdots + f_n - f_2 - \cdots - f_n) \\ &\geq \min\{v(f_1 + \cdots + f_n), v(f_2), \ldots, v(f_n)\} \\ &> v(f_1), \end{aligned}$$

absurdo. Portanto $v(f_1 + \cdots + f_n) \leq v(f_1)$, e de $v(f_1) = \min\{v(f_1), \ldots, v(f_n)\}$ e (i) segue o afirmado em (ii). Para (iii), suponha que o mínimo fosse atingido apenas por f_1. Assim,

$$v(f_1) = v(-f_1) = v(f_2 + \cdots + f_n) \geq \min\{v(f_2), \ldots, v(f_n)\} > v(f_1),$$

o que é um absurdo. Portanto, deve existir outro f_i no qual o mínimo $v(f_1)$ é atingido. □

Proposição 2.1.8. *Se a extensão $L|K$ for algébrica, então não existe $v : L^* \to \mathbb{Z}$ tal que $v|_{K^*} = 0$.*

Demonstração. Suponha que existisse uma tal v. Pela sobrejetividade de v e pelo fato de $v(K^*) = \{0\}$, existe $y \in L \setminus K$ tal que $v(y) < 0$. Como y é algébrico sobre K, temos uma equação

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad \text{com } a_i \in K.$$

Mas isso é impossível, pelo item (iii) do lema anterior, desde que $v(y^n) < v(y^i) = v(a_i y^i)$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. □

Segue da proposição acima que se v é uma valorização de L, $v(K^*)$ é um subgrupo $e\,\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ para algum $e \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, denominado o *índice de ramificação* de v sobre K. Note que esse é o único inteiro positivo tal que $(1/e)\, v|_K$ é uma valorização de K.

Definição 2.1.9. *Seja $K|\mathbf{k}$ uma extensão de corpos, com $\mathbf{k}$ algebricamente fechado. Dizemos que K é um* corpo de funções em uma indeterminada sobre $\mathbf{k}$ *ou um* corpo unidimensional sobre $\mathbf{k}$ *se existe $x \in K \setminus \mathbf{k}$ de modo que K seja uma extensão finita de $\mathbf{k}(x)$.*

Definição 2.1.10. *Sejam $L|K$ uma extensão de corpos e v uma valorização de K. Dizemos que uma valorização $w : L \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ é um* prolongamento *de v quando existe um inteiro positivo n tal que $w|_K = n\,v$, i.e., $w(x) = n\,v(x), \forall x \in K$. Este inteiro n é o* índice de ramificação *de w sobre K (ou sobre v) e será denotado por $e_{w/v}$.*

Observação 2.1.11. *É fácil ver que quando w estende v, temos que $\mathcal{O}_v \subseteq \mathcal{O}_w$ e $\mathfrak{m}_v = \mathcal{O}_v \cap \mathfrak{m}_w$, assim, o mapa $x + \mathfrak{m}_v \mapsto x + \mathfrak{m}_w$ nos dá uma imersão de corpos $k_v \hookrightarrow k_w$. O grau $[k_w : k_v] =: f_{w/v}$ é chamado o* índice de inércia *de w sobre v (ou sobre K).*

Lema 2.1.12. *Considere $K|\mathbf{k}$ corpo unidimensional, $x \in K \setminus \mathbf{k}$ e v uma valorização de $\mathbf{k}(x)$. Então existe apenas um número finito de prolongamentos $v_1, \ldots, v_r$ $(r \geq 1)$ de v a K e vale a* igualdade fundamental

$$\sum_{i=1}^{r} e_{v_i/v} = [K : \mathbf{k}(x)].$$

Para uma prova deste resultado veja [Lang], corolário do [Lang, thm 1.4] e comentário após a [Lang, prop. 2.1].

Sejam $K|\mathbf{k}$ uma extensão transcendente e v uma valorização de K sobre $\mathbf{k}$. Dado $x \in K$, vamos denotar por $x(v)$ o único $c \in \mathbf{k}$ tal que $v(x - c) > 0$, se tal c existe.

Observação 2.1.13. *Uma condição necessária para a existência de $x(v)$ é que $v(x) \geq 0$. De fato, se $v(x) < 0$ então $v(x - c) = \min\{v(x), 0\} < 0$ para todo $c \in \mathbf{k}^*$. Quanto a unicidade, note que $v(c_1 - c_2) \geq \min\{v(x - c_1), v(x - c_2)\} > 0$ é contraditório se $c_1 \neq c_2$.*

A proposição a seguir resume algumas propriedades dessa "função".

Proposição 2.1.14. *Para todos $x, y \in K$ tais que existem $x(v)$ e $y(v)$, e todo $\lambda \in \mathbf{k}$, temos que*

(i) $(x + y)(v) = x(v) + y(v)$,

(ii) $(x\,y)(v) = x(v)\,y(v)$,

(iii) $(\lambda\,x)(v) = \lambda\,x(v)$,

(iv) $\lambda(v) = \lambda$.

Em particular, se $f, g \in \mathbf{k}[X]$ então $(f(x)\,g(y))(v) = f(x(v))\,g(y(v))$.

Demonstração. Sejam $a = x(v)$ e $b = x(v)$, temos que

$$v((x+y)-(a+b)) \geq \min\{v(x-a), v(y-b)\} > 0$$

e

$$v(x\,y - a\,b) = v((x-a)\,y + a(y-b)) \geq \min\{v(x-a)+v(y), v(y-b)\} > 0,$$

pois $v(x-a) > 0$ e $v(y-b) > 0$, isso prova os itens (i) e (ii). Para ver (iii) note que $v(\lambda\,x - \lambda\,x(v)) = v(x - x(v)) > 0$. Finalmente, como $\lambda - \lambda(v) \in k$, vamos ter $v(\lambda - \lambda(v)) > 0$ se, e somente se, $\lambda - \lambda(v) = 0$, o que prova (iv). $\square$

Proposição 2.1.15. *Se v é uma valorização de $\mathbf{k}(z)$ sobre $\mathbf{k}$, com z transcendente sobre $\mathbf{k}$ e $v(z) \geq 0$, então existe $z(v)$.*

Demonstração. Temos que $v(z^n) = n\,v(z) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim, v é não negativa em $\mathbf{k}[z]$. Pela sobrejetividade de v, existe um polinômio mônico $p(z) \in \mathbf{k}[z]$ tal que $v(p(z)) > 0$. Podemos escrever $p = (z-c_1)^{r_1}\dots(z-c_n)^{r_n}$ para certos $c_i \in k$ distintos e $r_i > 0$. Como $v(p) = \sum_{i=1}^{n} r_i\,v(z-c_i) > 0$, temos que $v(z-c_j) > 0$ para um único $j \in \{0,\dots,n\}$. $\square$

Para um corpo de funções em uma indeterminada $K|\mathbf{k}$ vamos denotar por C_K o conjunto das valorizações de K sobre $\mathbf{k}$.

Agora, considere K corpo de funções em uma indeterminada sobre $\mathbf{k}$, $v \in C_K$ e $x \in K \setminus \mathbf{k}$ tal que $v(x) \geq 0$. Como $K|\mathbf{k}(x)$ é algébrica, $v(\mathbf{k}(x)) \neq \{0\}$ e temos a valorização $w_x := \frac{1}{e_x}\,v$ de $\mathbf{k}(x)$ (onde e_x é o índice de ramificação de v sobre $\mathbf{k}(x)$). Pela proposição anterior, existe $x(w_x) \in \mathbf{k}$ tal que $\frac{1}{e_x}\,v(x - x(w_x)) > 0$, multiplicando por $e_x > 0$ vemos que $x(v)$ existe e coincide com $x(w_x)$. Portanto, $x(v)$ existe para todo $x \in K$ tal que $v(x) \geq 0$. Note que se $x \in K$ é tal que $v(x) < 0$, então $v(x^{-1}) > 0$, ou seja, $x^{-1}(v) = 0$. Neste caso definimos $x(v) = \infty$. Sendo assim, cada $x \in K$ define uma função $x : C_K \to \mathbf{k} \cup \{\infty\}$.

Observação 2.1.16. *Para cada $v \in C_K$ temos um homomorfismo de anéis $\mathcal{O}_v \twoheadrightarrow \mathbf{k}$ dado por $x \mapsto x(v)$. Como o núcleo deste homomorfismo é $\mathfrak{m}_v$ temos que $k_v \cong \mathbf{k}$. Em particular, $[k_w : k_v] = 1$ para todo prolongamento $w \in C_L$ de v, com $L|K$ extensão finita.*

Mais geralmente, fixados $x_0,\dots,x_n \in K$ tais que $v(x_i) < 0$ para certos valores de i, escolhemos um i de modo que $v(x_i) \leq v(x_j)$ para todo $j \neq i$. Com isso, $v(\frac{x_j}{x_i}) \geq 0$ para todo j e assim fica bem definida a aplicação de C_K em $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbf{k}}$ dada por $v \mapsto \Big(\dfrac{x_0}{x_i}(v),\dots,\dfrac{x_n}{x_i}(v)\Big)$. Ademais, para toda valorização v em C_K temos a aplicação

$$(x_0 : \dots : x_n) : C_K \to \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$$

definida por:

(i) $(x_0 : \ldots : x_n)(v) := (x_0(v) : \ldots : x_n(v))$ se $v(x_i) \geq 0$ para todo i,

(ii) se $v(x_i) < 0$ para certos i's, tomamos $z \in K$ tal que $v(z\, x_j) \geq 0$ para todo j, e então definimos $(x_0 : \ldots : x_n)(v) := (z\, x_0(v) : \ldots : z\, x_n(v))$.

Assim, os espaços projetivos são um ambiente natural para mergulhar nossa curva abstrata C_K.

Fixados $x_1, \ldots, x_n \in K \setminus \mathbf{k}$ tais que $K = \mathbf{k}(x_1, \ldots, x_n)$, vamos denotar por C_K^0 o conjunto $\{v \in C_K \mid v(x_i) \geq 0,\ \forall\, i\}$.

Teorema 2.1.17. *A imagem de C_K^0 por $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma curva algébrica afim em $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, cuja álgebra de funções regulares é $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ e cujo corpo de funções é K.*

Demonstração. Tome $\mathcal{I} := \{f \in \mathbf{k}[T_1, \ldots, T_n] \mid f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$. Claramente, para cada $v \in C_K^0$ vale que $f(x_1(v), \ldots, x_n(v)) = 0$, para todo $f \in \mathcal{I}$. Assim, a imagem de C_K^0 por $(x_1, \ldots, x_n)$ está contida em $V(\mathcal{I}) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert,

$$\sqrt{\mathcal{I}} = I(V(\mathcal{I})) = \{f \in \mathbf{k}[T_1, \ldots, T_n] \mid f(p) = 0, \forall p \in V(\mathcal{I})\}.$$

Note que, $f^k \in \mathcal{I}$ para algum $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ se, e somente se, $f^k(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)^k = 0$, ou equivalentemente, $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Com isso,

$$f(p) = 0, \forall p \in V(\mathcal{I}) \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Portanto, $\mathbf{k}[V(\mathcal{I})] = \mathbf{k}[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{I} \cong \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, por $\overline{F} \mapsto F(x_1, \ldots, x_n)$, consequentemente, $\mathbf{k}(V(\mathcal{I})) \cong K$. Como $K|\mathbf{k}$ é um corpo de funções em uma indeterminda, temos que $C := V(\mathcal{I})$ é uma curva algébrica irredutível em $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$. Dado $P \in C$ considere o anel local $\mathcal{O}_{C,P}$ de C em P, definido como

$$\mathcal{O}_P := \mathcal{O}_{C,P} := \left\{\frac{g}{h} \mid g, h \in \mathbf{k}[C], h(P) \neq 0\right\}$$

e $\mathfrak{m}_P := \{f \in \mathcal{O}_P \mid f(P) = 0\}$ o ideal maximal de C em P. Sabemos que existe uma valorização $v \in C_K$ tal que $\mathcal{O}_v \supset \mathcal{O}_P$ e, nesse caso, $\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}_v \cap \mathcal{O}_P$ (i.e. $\mathcal{O}_v$ *domina* $\mathcal{O}_P$). Escrevendo $P = (c_1, \ldots, c_n) \in C$, vemos que $x_i - c_i \in \mathfrak{m}_P \subseteq \mathfrak{m}_v$, ou seja, $v(x_i - c_i) > 0$, o que implica $x_i(v) = c_i$. Concluímos que $v \in C_K^0$ e $P = (x_1(v), \ldots, x_n(v))$. Com isso, temos que a imagem de C_K^0 por $(x_1, \ldots, x_n)$ é exatamente a curva C. $\square$

Teorema 2.1.18. *Seja C a curva definida no teorema acima. Dado $P \in C$, temos que $P = (x_1(v), \ldots, x_n(v))$ com $v \in C_K^0$ se, e somente se, $\mathcal{O}_v$ domina $\mathcal{O}_P$.*

Teorema 2.1.19. *A imagem de C_K por $(1 : x_1 : \ldots : x_n)$ é uma curva algébrica projetiva em $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$.*

A seguinte definição de curva, dada de maneira completamente local, pode ser encontrada em [St].

Definição 2.1.20. *Seja K um corpo de funções em uma indeterminda sobre $\mathbf{k}$. Uma* curva algébrica completa *sobre $\mathbf{k}$, com corpo de funções K, consiste dos seguintes dados:*

(i) Um par $(C, \{\mathcal{O}_P\})$, onde C é um conjunto e para cada $P \in C$, $\mathcal{O}_P$ é um domínio Noetheriano local tal que $\mathbf{k} \subsetneq \mathcal{O}_P \subsetneq K$ e com corpo de frações K,

(ii) Para quase todo $P \in C$ (exceto uma quantidade finita) temos que $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_v$ para alguma valorização $v \in C_K$,

(iii) Para toda valorização $v \in C_K$ existe um único $P \in C$ tal que $\mathcal{O}_P \subseteq \mathcal{O}_v$.

Observação 2.1.21. *Toda curva algébrica projetiva em $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ é uma curva algébrica completa no sentido da definição acima. Note ainda que essa definição é puramente intrínseca.*

Exemplo 2.1.22. *Seja $K = \mathbf{k}(t)$ com t transcendente sobre $\mathbf{k}$. Considere o par $(C, \mathcal{O}_v)$, com $C = C_K$. Temos que*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : C & \to & \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}} \\ v & \mapsto & (1 : t)(v) \end{array}$$

é um homeomorfismo, onde tomamos a topologia de Zariski em $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ e a do complemento finito em C. Além disso, φ preserva aplicações regulares, isto é, se $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}},P}$ então $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_{C,Q}$, com $Q = \varphi^{-1}(P)$.

De fato, sabemos que $C_K = \{v_a \mid a \in \mathbf{k}\} \cup \{v_\infty\}$. Desse modo,

$$\varphi(v_a) = (1 : t(v_a)) = (1 : a) \text{ e } \varphi(v_\infty) = (t^{-1}(v_\infty) : 1) = (0 : 1),$$

ou seja, φ é uma bijeção.

2.2 Divisores e Grupo de Picard

Nesta seção vamos considerar um corpo de funções K sobre o corpo algebricamente fechado $\mathbf{k}$ e a curva projetiva suave C_K a ele associada.

Definição 2.2.1. *Um* divisor *em C_K é uma soma formal finita*

$$D = \sum_{p \in C_K} n_p \cdot p,$$

onde $n_p \in \mathbb{Z}$ para todo $p \in C_K$.

Com essa definição o conjunto de todos tais divisores é simplesmente o grupo abeliano livre gerado pelos pontos da curva C_K. Esse grupo será chamado *grupo dos divisores* de C_K e denotado $\mathrm{Div}(C_K)$.

Definição 2.2.2. *O número* $\deg(D) := \sum n_i$ *é chamado o* grau *do divisor* $D = \sum n_i \cdot p_i$.

Temos assim um epimorfismo $\deg : \mathrm{Div}(C_K) \to \mathbb{Z}$ dado pelo grau definido acima. Definimos $\mathrm{Div}_0(C_K)$ como sendo o núcleo desse homomorfismo, isto é, o conjunto de todos os divisores de grau 0.

Definição 2.2.3. *Para todo elemento $f \in K^*$ definimos o* divisor de f*, denotado por D_f, como*

$$D_f := \sum_{p \in C_K} v_p(f) \cdot p.$$

Observação 2.2.4. *Que D_f é de fato um divisor, ou seja, que* supp D_f *é um conjunto finito para todo $f \in K^*$, será garantido pelo Teorema 2.2.5 a seguir.*

Divisores dessa forma serão chamados *divisores principais*. Note que, pelo fato de cada v_p ser homomorfismo, temos $D_f + D_g = D_{fg}$. Além disso, o divisor nulo pode ser escrito na forma $0 = D_\lambda$ para qualquer $\lambda \in \mathbf{k}^*$ e, dado D_f principal, temos que $-D_f = D_{f^{-1}}$. Ou seja, o conjunto dos divisores pincipais formam um subgrupo de $\mathrm{Div}(C_K)$, denominado *grupo dos divisores principais*, o qual denotaremos por $\mathrm{PDiv}(C_K)$. Temos ainda o homomorfismo $\mathrm{div} : K^* \to \mathrm{Div}(C_K)$ dado por $f \mapsto D_f$.

Teorema 2.2.5. *Para todo $f \in K \setminus \mathbf{k}$ temos que $1 \leq \sharp(\mathrm{supp}\ D_f) \leq 2\,[K : \mathbf{k}(f)]$.*

Demonstração. Dado $f \in K \setminus \mathbf{k}$ sabemos que as únicas valorizações de $\mathbf{k}(f)$ sobre $\mathbf{k}$ que não se anulam em f são v_0 e v_∞ (cf. Teorema 2.1.6), nesse caso, $v_0(f) = 1$ e $v_\infty(f) = -1$. Sejam $w_1, \ldots, w_r$ e $u_1, \ldots, u_s$ os prolongamentos de v_0 e v_∞ a K, respectivamente. Lembremos que $w_i|_{\mathbf{k}(f)} = n_i\, v_0$ e $u_j|_{\mathbf{k}(f)} = m_j\, v_\infty$ para certos $n_i, m_j > 0$. Com isso, $w_i(f) = n_i > 0$ e $u_j(f) = -m_j < 0$. Agora, considere v uma valorização de K distinta dessas que acabamos de construir. Desse modo, $w := \frac{1}{e_v}\, v|_{\mathbf{k}(f)}$ é uma valorização de $\mathbf{k}(f)$ distinta de v_0 e de v_∞, consequentemente, $v(f) = e_v\, w(f) = 0$. Com isso, supp D_f consiste dos $r + s$ pontos correspondentes aos prolongamentos de v_0 e v_∞. □

Corolário 2.2.6. *O mapa* div *é um isomorfismo entre o grupo quociente $K^*/\mathbf{k}^*$ e o subgrupo* $\mathrm{PDiv}(C_K)$*.*

Demonstração. De fato, como a imagem de div é $\mathrm{PDiv}(C_K)$, basta mostrar que seu núcleo é $\mathbf{k}^*$. Como todas as valorizações são sobre $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}^* \subseteq \mathrm{Ker\ div}$. Pelo teorema anterior, para todo $f \in K \setminus \mathbf{k}$ temos que $D_f \neq 0$ e, assim, $\mathrm{Ker\ div} = \mathbf{k}^*$. □

Corolário 2.2.7. *O grau de todo divisor principal é zero. Portanto,* $\mathrm{PDiv}(C_K)$ *será sempre um subgrupo de* $\mathrm{Div}_0(C_K)$*.*

Demonstração. Do Teorema 2.2.5 segue que, dado $f \in K \setminus \mathbf{k}$, $\deg(D_f) = \sum_i n_i - \sum_j m_j$ (com a mesma notação do referido teorema). Pelo Lema 2.1.12 temos que $\sum_i n_i = \sum_j m_j = [K : \mathbf{k}(f)]$, mostrando que $\deg(D_f) = 0$. □

Definição 2.2.8. *O grupo quociente*

$$\mathrm{Pic}(C_K) := \mathrm{Div}(C_K)/\mathrm{PDiv}(C_K)$$

é chamado o grupo de Picard *da curva algébrica suave* C_K*.*

Segue do Corolário 2.2.7 que todos os divisores em uma mesma classe de $\mathrm{Pic}(C_K)$ possuem o mesmo grau e, desse modo, podemos definir o seguinte homomorfismo sobrejetivo

$$\begin{array}{rccl} \deg : & \mathrm{Pic}(C_K) & \to & \mathbb{Z} \\ & \overline{D} & \mapsto & \deg(D). \end{array}$$

Denotaremos por $\mathrm{Pic}_0(C_K)$ o núcleo desse homomorfismo.

No caso em que $K = \mathbf{k}(X)$ sabemos que $C_K = \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$. Como um exemplo vamos calcular $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}})$ no teorema a seguir.

Teorema 2.2.9. *Temos que* $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}) \cong \mathbb{Z}$ *e o isomorfismo se exprime em função do grau.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\overline{D} \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}})$ é 0 se, e somente se, $\deg(D) = 0$. Dado $F \in \mathbf{k}[X]$ escrevemos $F = a_0 \prod (X - p_i)^{n_i}$. Logo,

$$\begin{aligned} D_F &= \sum_{p \neq \infty} v_p(F) \cdot p + v_\infty(F) \cdot \infty \\ &= \sum n_i \cdot p_i - \deg(F) \cdot \infty, \end{aligned}$$

e assim, $\deg(D_F) = \sum n_i - \deg(F) = 0$. Para $f = G/H \in \mathbf{k}(X)^*$ temos que

$$\begin{aligned} \deg(D_f) &= \deg(D_{GH^{-1}}) \\ &= \deg(D_G + D_{H^{-1}}) \\ &= \deg(D_G) + \deg(D_{H^{-1}}) \\ &= \deg(D_G) - \deg(D_H) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Com isso, mostramos que se $D \in \mathrm{PDiv}(\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}})$ então $\deg(D) = 0$. Reciprocamente, seja D um divisor de grau 0. Podemos escrever $D = D' - D''$ onde $D' = \sum n_p \cdot p$ e $D'' = \sum m_p \cdot p$ são tais que $n_p, m_p > 0$ e $\sum n_p = \sum m_p$. Agora, escolha funções $g, h \in \mathbf{k}(X)$ tais que $D_g = D'$ e $D_h = D''$, uma tal função pode ser construída tomando-se o produto dos termos $(X - p_i)^{n_i}$ e $(1/X)^n$, conforme $(p_i : 1)$ apareça no divisor com coeficiente n_i e $(1 : 0)$ com coeficiente n, respectivamente. Agora, basta notar que $D_{gh^{-1}} = D$, ou seja, $D \in \mathrm{PDiv}(\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}})$.

Portanto, todos os divisores em uma mesma classe $\overline{D} \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}})$ têm o mesmo grau, além disso, é fácil verificar que $\deg : \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}) \to \mathbb{Z}$ dado por $\overline{D} \mapsto \deg(D)$ é de fato um isomorfismo. $\square$

Teorema 2.2.10. *Seja K um corpo de funções sobre* $\mathbf{k}$. *Suponha que existam p e s, pontos distintos de C_K, tais que o divisor $D = p - s$ seja um elemento trivial em* $\mathrm{Pic}(C_K)$*, isto é, que D seja um divisor principal. Então $K = \mathbf{k}(t)$ para algum $t \in K$.*

Demonstração. Considere $f_p^s \in K$ tal que $D_{f_p^s} = p - s$. Para cada $q \in C_K \setminus \{p, s\}$, definimos

$$f_q^s := f_p^s - f_p^s(q),$$

onde $f_p^s(q)$ denota $f_p^s(v_q)$. Vamos mostrar que $D_{f_q^s} = q - s$. Para toda valorização v, temos

$$v(f_p^s - f_p^s(q)) \geq \min\{v(f_p^s), v(f_p^s(q))\} = \begin{cases} \min\{0,0\} = 0, & \text{se } v \neq v_s \text{ e } v \neq v_p \\ \min\{1,0\} = 0, & \text{se } v = v_p \\ \min\{-1,0\} = -1, & \text{se } v = v_s, \end{cases}$$

ou seja, $v(f_q^s) \geq -1$. Como $v(f_q^s) \notin \mathbf{k}^*$ temos, pelo Corolário 2.2.6, que $D_{f_q^s} \neq 0$. Podemos escrever

$$D_{f_q^s} = \sum_{x \neq s} v_x(f_q^s) \cdot x + v_s(f_q^s) \cdot s,$$

e pelo fato de $\deg(D_{f_q^s}) = 0$ (cf. Corolário 2.2.7) vamos ter coeficientes negativos e positivos nesse divisor. Mas pelo que vimos anteriormente, a única possibilidade de termos coeficiente negativo é que $v_s(f_q^s) = -1$. Consequentemente, $v_{q'}(f_q^s) = 1$ para um único $q' \in C_K$ e nos demais pontos temos $v_x(f_q^s) = 0$, ou seja, $D_{f_q^s} = q' - s$. Observe que

$$\begin{aligned} f_q^s(q) &= (f_p^s - f_p^s(q))(q) \\ &= f_p^s(q) - f_p^s(q)(q) \\ &= f_p^s(q) - f_p^s(q) \\ &= 0, \end{aligned}$$

assim, de $v_q(f_q^s - f_q^s(q)) > 0$ seguirá que $v_q(f_q^s) > 0$ e, por conseguinte, $D_{f_q^s} = q - s$.

Agora, considere $f \in K \setminus \mathbf{k}$. Escrevemos o divisor de f na forma

$$D_f = \sum m_i \cdot p_i + \sum -n_j \cdot q_j,$$

onde $m_i, n_j > 0$ para todos i, j. Definimos

$$g := \prod (f_{q_j}^s)^{n_j} \prod (f_{p_i}^s)^{-m_i} f,$$

e se para algum j tivermos $q_j = s$ vamos definir $f_{q_j}^s = 1$. Desse modo,

$$\begin{aligned} D_g &= \sum n_j \cdot (q_j - s) + \sum -m_i \cdot (p_i - s) + D_f \\ &= \sum n_j \cdot q_j + \sum -m_i \cdot p_i + D_f + (\sum m_i - \sum n_j) \cdot s \\ &= 0, \end{aligned}$$

portanto $g \in \mathbf{k}^*$. Se denotarmos f_p^s por t, então cada f_q^s se escreve $t - a$ para algum $a \in \mathbf{k}$.

Com isso, vemos que $f \in \mathbf{k}(t)$ e como este f foi escolhido arbitrariamente em K temos que $K = \mathbf{k}(t)$. $\square$

Corolário 2.2.11. *Sejam K um corpo de funções sobre $\mathbf{k}$ e C_K a curva projetiva suave a ele associada. Então $C_K \cong \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ se, e somente se, existe um divisor da forma $p - s \in \mathrm{Div}(C_K)$ que é principal, ou seja, $p - s = D_f$ para algum $f \in K$.*

Corolário 2.2.12. *Se $\mathrm{Pic}(C_K) \cong \mathbb{Z}$, então $K = \mathbf{k}(t)$ para algum $t \in K$.*

Demonstração. Temos o homomorfismo sobrejetivo

$$\deg : \mathrm{Pic}(C_K) \to \mathbb{Z}.$$

Para que o mesmo seja injetivo, seu núcleo $\mathrm{Pic}_0(C_K)$ deve ser trivial, isto é, $\mathrm{Pic}_0(C_K) = \mathrm{PDiv}(C_K)$, ou equivalentemente, $\mathrm{Div}_0(C_K) = \mathrm{PDiv}(C_K)$. Desse modo, todo divisor da forma $D = p - s$ é divisor de uma função e assim $K = \mathbf{k}(t)$ pelo Teorema 2.2.10. $\square$

2.3 Divisores Efetivos

Definição 2.3.1. *Um divisor $D = \sum n_i \cdot p_i$ é dito* efetivo *se $n_i \geq 0$ para todo $p_i \in C_K$. Nesse caso, escrevemos $D \geq 0$ e, mais geralmente, $D \geq D'$ se $D - D'$ é efetivo.*

Diremos que dois divisores D e D' são equivalentes quando determinarem a mesma classe em $\mathrm{Pic}(C_K)$, isto é, $D - D' = D_f$ para algum $f \in \mathbf{k}^*$. Claramente isto é uma relação de equivalência.

Definição 2.3.2. *Uma classe de divisores $\overline{D} \in \mathrm{Pic}(C_K)$ é dita* efetiva *se existe $D' \in \overline{D}$ efetivo.*

Temos agora duas questões que surgem naturalmente.

Questão 2.3.3. *(Qualitativa) Quais classes de $\mathrm{Pic}(C_K)$ são efetivas?*

Questão 2.3.4. *(Quantitativa) Quantos divisores são efetivos em uma dada classe?*

Lema 2.3.5. *Se o grau de $\overline{D} \in \mathrm{Pic}(C_K)$ é negativo, então $\overline{D}$ é não-efetiva.*

Demonstração. De fato, se $\overline{D}$ fosse efetiva, existiria $D' \in \overline{D}$ efetivo, o que é uma contradição, uma vez que teríamos $\deg(\overline{D}) = \deg(D) \geq 0$. $\square$

Proposição 2.3.6. *Se $D + D_{f_1}$ e $D + D_{f_2}$ são efetivos então $D + D_{f_1+f_2}$ também é efetivo.*

Demonstração. Escrevendo $D = \sum n_p \cdot p$, temos que $D + D_{f_1} = \sum(n_p + v_p(f_1)) \cdot p$ e $D + D_{f_2} = \sum(n_p + v_p(f_2)) \cdot p$. Para todo $p \in C_K$

$$\begin{aligned} n_p + v_P(f_1 + f_2) &\geq n_p + \min\{v_p(f_1), v_p(f_2)\} \\ &\geq \min\{n_p + v_p(f_1), n_p + v_p(f_2)\} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

mostrando que $D + D_{f_1+f_2}$ é efetivo. $\square$

Observação 2.3.7. *Note que, como $D_{\lambda f} = D_f$ para todo $\lambda \in \mathbf{k}^*$, vamos ter $D + D_{f_1+\lambda f_2}$ efetivo sempre que $D + D_{f_1}$ e $D + D_{f_2}$ forem efetivos.*

Com isso, podemos definir o seguinte subespaço de K (com a estrutura de $\mathbf{k}$-espaço vetorial canônica).

$$\mathcal{L}_D := \{f \in K^* \mid D + D_f \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Desse modo, $D' \in \overline{D}$ é efetivo se, e somente se, $D' = D + D_f$ para algum $f \in \mathcal{L}_D \setminus \{0\}$. O espaço $\mathcal{L}_D$ depende de D, mas se D' é um divisor na classe de D, então $\mathcal{L}_D$ e $\mathcal{L}'_D$ são isomorfos. De fato, $D' = D + D_g$ para algum $g \in K^*$ e assim $gf \in \mathcal{L}_D$ se, e somente se, $f \in \mathcal{L}'_D$. Com isso temos o isomorfismo linear $\varphi : \mathcal{L}'_D \xrightarrow{\cdot g} \mathcal{L}_D$ (multiplicação por g).

Teorema 2.3.8. *O espaço $\mathcal{L}_D$ tem dimensão finita, e se $\deg(D) \geq 0$, vale que*

$$\dim_{\mathbf{k}} \mathcal{L}_D \leq \deg(D) + 1.$$

Demonstração. Se $\deg(D) < 0$ já sabemos que nenhum $D + D_f$ é efetivo, i.e., $\mathcal{L}_D = \{0\}$. Agora vamos provar a desigualdade por indução no grau de D.

Suponha que $\deg(D) = 0$. Nesse caso, $D + D_f$ tem grau zero para todo $f \in K^*$. Portanto, $D + D_f$ será efetivo se, e somente se, $D + D_f = 0$, isto é, $\overline{D} = \overline{D_{f^{-1}}} = 0$. Fixado um tal f, para qualquer outro $g \in \mathcal{L}_D$ temos que $D = D_{f^{-1}} = D_{g^{-1}}$, ou seja, $D_{gf^{-1}} = 0$, o que implica $g = \lambda f$ para algum $\lambda \in \mathbf{k}^*$. Assim, $\mathcal{L}_D = \langle f \rangle$ ou $\{0\}$, conforme exista $f \neq 0$ tal que $D + D_f \geq 0$, ou não.

Agora, assuma que $\deg(D) > 0$ e que o resultado seja válido para divisores com grau $\deg(D) - 1$. Escreva $D = \sum_{q \in C_K} n_q \cdot q$ e considere $p \in C_K$ tal que $n_p > 0$ (que existe pois $\deg(D) > 0$). Para todo $f \in \mathcal{L}_D$, temos que $v_p(f) \geq -n_p$.

Se para algum $f \in \mathcal{L}_D$ tivermos $v_p(f) > -n_p$, então $v_p(f) - 1 \geq -n_p$, portanto, $(D - p) + D_f \geq 0$ e $f \in \mathcal{L}_{D-p}$. Se isso ocorrer para todo f, então $\mathcal{L}_D \subseteq \mathcal{L}_{D-p}$, e por hipótese de indução

$$\dim_{\mathbf{k}} \mathcal{L}_D \leq \dim_{\mathbf{k}} \mathcal{L}_{D-p} \leq \deg(D - p) + 1 < \deg(D) + 1.$$

Por último, suponha que exista $f \in \mathcal{L}_D$ tal que $v_p(f) = -n_p$. Para todo $g \in \mathcal{L}_D$ temos que $v_p(gf^{-1}) \geq 0$ e nesse caso existe um único $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $v_p(gf^{-1} - \lambda) > 0$, disto segue que

$$v_p(g - \lambda f) > v_p(f) = -n_p.$$

Como $f, g \in \mathcal{L}_D$ temos que $g - \lambda f \in \mathcal{L}_D$ logo $D + D_{g-\lambda f} \geq 0$, além disso, de $n_p + v_p(g - \lambda f) > 0$ segue que $n_p - 1 + v_p(g - \lambda f) \geq 0$. Com isso, $D - p + D_{g-\lambda f} \geq 0$, ou seja, $g - \lambda f \in \mathcal{L}_{D-p}$. Desse modo, todo $g \in \mathcal{L}_D$ se escreve como

$$g = (g - \lambda f) + \lambda f \in \mathcal{L}_{D-p} + \langle f \rangle, \quad \lambda \in \mathbf{k}.$$

Vamos mostrar que essa é uma soma direta. Com efeito, se $h \in \mathcal{L}_{D-p} \cap \langle f \rangle$ é não nulo, então $h = \lambda f$ para algum $\lambda \in \mathbf{k}^*$. Pelo fato de h pertencer a $\mathcal{L}_{D-p}$, temos que

$$D - p + D_h = D - p + D_{\lambda f} \geq 0,$$

o que é um absurdo pois isto implica que $n_p - 1 + v_p(f) = -1 \geq 0$. Portanto, $\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_{D-p} \oplus \langle f \rangle$, e com isso

$$\dim_{\mathbf{k}} \mathcal{L}_D = \dim_{\mathbf{k}} \mathcal{L}_{D-p} + 1 \leq (\deg(D - p) + 1) + 1 = \deg(D) + 1.$$

$\square$

3 Fibrados Vetoriais

3.1 Fibrados vetoriais sobre espaços topológicos

Definição 3.1.1. Seja X um espaço topológico (variedade algébrica sobre $\mathbf{k}$). Um *fibrado vetorial de posto m sobre X* é um trio (E, p, X) onde E é um espaço topológico (variedade algébrica sobre $\mathbf{k}$) e $p : E \to X$ é um mapa contínuo (morfismo de variedades) sobrejetivo satisfazendo as seguintes condições:

(i) Cada *fibra* $E_x := p^{-1}(x)$ é isomorfa a um espaço vetorial V de dimensão m (isomorfa a $\mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$),

(ii) Para todo $x \in X$ existem uma vizinhança U de x e um homeomorfismo (isomorfismo de variedades)

$$\phi_U : p^{-1}(U) \to U \times V,$$

dito uma *trivialização local* de E sobre U, que é linear nas fibras e de tal maneira que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[dr, "p|_U"'] & U \times V \arrow[d, "\pi_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

onde π_1 denota a projeção na primeira coordenada.

Note que pela condição *(ii)*, ϕ_U leva a fibra E_x em $p(x) \times V$ isomorficamente, para cada $x \in U$. Assim, para todo $\mathrm{v} \in E_x$, $\phi_U(\mathrm{v}) = (p(x), \Phi^x_U \cdot \mathrm{v})$, para um determinado isomorfismo linear $\Phi^x_U : E_x \to V$.

Agora, sejam U_1 e U_2 duas vizinhanças de $x \in X$ e ϕ_1, ϕ_2 suas respectivas trivializações. Dado $(y, v) \in (U_1 \cap U_2) \times V$, seja $x = p^{-1}(y)$. Para um certo w na fibra E_x, $\Phi^x_2 \cdot w = v$. Desse modo, $\phi_2^{-1}(y, v) = w = (\Phi^x_2)^{-1} \cdot v$, e com isso

$$\phi_1(\phi_2^{-1}(y, v)) = \phi_1((\Phi^x_2)^{-1} \cdot v) = (p(x), \Phi^x_1 \cdot ((\Phi^x_2)^{-1} \cdot v)) = (y, (\Phi^x_1 \circ (\Phi^x_2)^{-1}) \cdot v).$$

Denotando $\Phi^x_1 \circ (\Phi^x_2)^{-1}$ por $g_{12}(y)$, temos que

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : (U_1 \cap U_2) \times V \to (U_1 \cap U_2) \times V$$

é dado por

$$(\phi_1 \circ \phi_2^{-1})(y, v) = (y, g_{12}(y) \cdot v),$$

onde para cada $y \in U_1 \cap U_2$, $g_{12}(y) : V \to V$ é um isomorfismo linear. As funções g_{ij} são chamadas *funções de transição* e satisfazem as seguintes *condições de cociclos*:

(1) $g_{ii} = \mathrm{id}$,

(2) $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$,

(3) $g_{ik} = g_{ij} \cdot g_{jk}$ em $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Na definição acima, p é chamado o *mapa projeção*, E, o *espaço total* e X o *espaço base*.

Definição 3.1.2. *Um fibrado de posto 1 é comumente chamado um* fibrado em retas.

Uma *seção* de um fibrado (E, p, X) é um mapa $s : X \to E$ tal que $p(s(x)) = x$ para todo $x \in X$.

Um *homomorfismo* de um fibrado vetorial (E, p, X) a outro (F, q, X) é um mapa contínuo $\varphi : E \to F$ tal que:

(i) $q \circ \varphi = p$,

(ii) Para cada $x \in X$, $\varphi|_{E_x} : E_x \to F_x$ é um mapa linear de espaços vetoriais.

Dizemos que φ é um isomorfismo se é bijetivo e φ^{-1} é contínuo, neste caso, dizemos também que E e F são isomorfos.

Exemplo 3.1.3. *Seja V um espaço vetorial, $E = X \times V$, e $p : E \to X$ a projeção na primeira coordenada. E é chamado o fibrado produto. Se F é isomorfo a algum fibrado produto, dizemos que F é um fibrado trivial.*

Seja Y um subespaço de X e (E, p, X) um fibrado vetorial sobre X. Então $(p^{-1}(Y), p, Y)$ é um fibrado vetorial sobre Y, denominado a restrição de E a Y e denotado $E|Y$.

Fibrados vetoriais são frequentemente construídos por meio de uma *colagem*, como vamos descrever a seguir.

Suponha que nos são dadas uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i\in I}$ de X e mapas $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(V)$ satisfazendo as condições de cociclos descritas acima. Sobre a união disjunta dos $U_\lambda \times V$ definimos a relação de equivalência $\sim$ que identifica $(x, v) \in U_j \times V$ com $(x, g_{ij}(v)) \in U_i \times V$ sempre que $U_i \cap U_j \ni x$.

Considere E o espaço quociente $(\amalg_{i\in I} U_i \times V)/\sim$. Com isso, é fácil verificar que o mapa canônico $p : E \to X$ faz de E um fibrado vetorial sobre X.

Chamamos E o fibrado vetorial obtido por *colagem* via as funções de transição g_{ij}. Vale ressaltar a seguinte observação:

Observação 3.1.4. *Um fibrado vetorial é determinado por um par* $(\{U_i\}, \{g_{ij}\})$ *em que* $\{U_i\}$ *é uma cobertura por abertos de* X*, (que são as trivializações locais) e* $\{g_{ij}\}$ *são as funções de transição.*

Para encerrar a seção observamos algumas operações que podemos fazer com fibrados vetoriais. Seguindo D. Huybrechts, e seu Meta-Teorema [Huyb, thm 2.2.3] afirmando que

Meta-Teorema: *Qualquer operação canônica entre espaços vetoriais induz uma operação análoga entre fibrados vetoriais.*

A exemplo do Meta-Teorema de D. Huybrechts, e trabalhando com as funções de transição, temos que as seguintes operações entre fibrados vetoriais são verificadas:

- Seja E e F fibrados vetoriais sobre X, existe o fibrado soma direta $E \oplus F$, cujas fibras sobre um ponto qualquer $x \in X$ são $(E \oplus F)(x) = E(x) \oplus F(x)$;
- Existe o produto tensorial $E \otimes F$ dos fibrados E e F sobre X, em que a fibra sobre $x \in X$ é $(E \otimes F)(x) = E(x) \otimes F(x)$;
- Existe o fibrado dual $E^\vee$, cuja fibra sobre um ponto x é $E^\vee(x) = E(x)^\vee$.

3.2 Feixes, fibrados vetoriais e divisores de Weil

Esta seção é dedicada a relacionar três objetos presentes na Geometria Algébrica, a saber: Fibrados Vetoriais, Divisores de Weil e Feixes. Tal relação será muito útil para a prova do Teorema de Birkhoff–Grothendieck, como veremos na próxima seção, para tanto lembramos os conceitos básicos de feixes e esquemas. Além disso, nesta seção faremos uma importante conexão entre curvas como na Definição 2.1.20 e as dadas por esquemas projetivos, precisamente mostraremos a única distinção entre estas definições. Traduziremos também os conceitos dados no último capítulo em termos de certos feixes de módulos.

Definição 3.2.1. Seja X um espaço topológico. Um *feixe* $\mathscr{F}$ *de grupos (anéis)* sobre X consiste nos seguintes dados:

1. Para cada aberto $U \subseteq X$ associamos um grupo (anel) $\mathscr{F}(U)$, cujos elementos são chamados *seções* de U, e os elementos de $\mathscr{F}(X)$ *seções globais*;
2. Se $U \subseteq V$ são dois abertos de X temos um homomorfismo de grupos res_{VU} : $\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ denominado de *restrição*. A restrição de $f \in \mathscr{F}(V)$ a U é denotada por $f|_U$. O mapa restrição deve satisfazer as seguintes condições:

a) $\mathrm{res}_{UU} = id$, para todo aberto U de X;

b) Se $U \subseteq V \subseteq W$, então $\mathrm{res}_{WU} = \mathrm{res}_{WV} \circ \mathrm{res}_{VU}$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(W) \arrow[r, "\mathrm{res}_{WV}"] \arrow[dr, "\mathrm{res}_{WU}"'] & \mathscr{F}(V) \arrow[d, "\mathrm{res}_{VU}"] \\ & \mathscr{F}(U) \end{tikzcd}$$

c) (identidade) Se $\{U_i\}$ é uma cobertura aberta de U e $f, g \in \mathscr{F}(U)$ são tais que $f|_{U_i} = g|_{U_i}$, $\forall i$, então $f = g$.

d) (colagem) Dadas seções $f_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tais que

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \; \forall i, j$$

existe $f \in \mathscr{F}(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$, com $U = \cup U_i$.

Exemplo 3.2.2. *Seja C uma curva como na Definição 2.1.20. Coloque em C a topologia do complemento finito. Para cada aberto U de C considere o anel*

$$\mathcal{O}_C(U) = \bigcap_{p \in U} \mathcal{O}_{C,p} \,.$$

Não é difícil verificar que $\mathcal{O}_C$ define um feixe sobre C. Tal feixe é denominado feixe estrutural de C, ou feixe de funções regulares de C.

Definição 3.2.3. Seja X um espaço topológico e $\mathscr{F}$ um feixe sobre X. Dados $p \in X$ e $f \in \mathscr{F}(U)$, o *germe* f_p de f em p consiste na classe de pares (V, g) com $p \in V$ e $g \in \mathscr{F}(V)$ sujeitos a relação de equivalência: $(V, g) \sim (U, f)$ se existe $W \subseteq U \cap V$ tal que $g|_W = f|_W$. O *stalk* $\mathscr{F}_p$ de $\mathscr{F}$ em p é o conjunto dos germes em p de todas as seções. Categoricamente, $\mathscr{F}_p = \varinjlim \mathscr{F}(U)$, onde o colimite é tomado sobre todos os abertos que contêm p. Segue diretamente da definição que $\mathscr{F}_p$ é um grupo (ou anel).

Exemplo 3.2.4. *No Exemplo 3.2.2 o stalk de $\mathcal{O}_C$ em p é o anel local $\mathcal{O}_{C,p}$ das funções regulares em p.*

Definição 3.2.5. *Um espaço (localmente) anelado é um par $(X, \mathcal{O}_X)$ em que X é um espaço topológico e $\mathcal{O}_X$ é um feixe de anéis sobre X cujos stalks $\mathcal{O}_{X,p}$ são anéis (locais).*

Exemplo 3.2.6. *Se C é uma curva como na Definição 2.1.20 e $\mathcal{O}_C$ seu feixe de funções regulares como no exemplo acima, então $(C, \mathcal{O}_C)$ é um espaço localmente anelado.*

Definição 3.2.7. *Sejam X e Y espaços localmente anelados. Um morfismo $\varphi : X \to Y$ consiste de um mapa contínuo $\varphi : X \to Y$ junto com um homomorfismo de feixes, a saber: Para cada aberto $U \subseteq Y$ temos um homomorfismo de anéis $\varphi^\sharp : \mathcal{O}_Y(U) \to \varphi_*\mathcal{O}_X(U)$ em que $\varphi_*\mathcal{O}_X(U) := \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$. Dizemos que um esquema é definido sobre um corpo $\mathbf{k}$, ou algébrico, se existe um morfismo $X \to \mathrm{Spec}(\mathbf{k})$.*

A fim de introduzirmos esquemas afins e projetivos a partir da colagem de cartas locais, alguns conceitos e definições preliminares são apresentados abaixo.

Definição 3.2.8. Seja X um espaço topológico e $\{B_i\}$ uma base de abertos para a topologia de X. Cada aberto básico B_i está associado a um grupo (anel) $F(B_i)$. Assumimos que para abertos básicos $B_i \subseteq B_j$ existe um homomorfismo de restrição $\mathrm{res}_{ji} : F(B_j) \to F(B_i)$ satisfazendo as condições (a) e (b) da Definição 3.2.1 de feixes. Adicionalmente, assumimos que F satisfaz análogos dos axiomas de identidade e colagem, a saber: se $B := \cup B_i$ é um aberto base e $f, g \in F(B)$ são tais que $\mathrm{res}_{BB_i}(f) = \mathrm{res}_{BB_i}(g)$ então $f = g$. E por fim se qualquer família de seções $f_i \in F(B_i)$ é tal que $\mathrm{res}_{ik}(f_i) = \mathrm{res}_{jk}(f_j)$ para $B_k \subseteq B_i \cap B_j$, então existe $f \in F(B)$ com $B = \cup B_i$ aberto básico, tal que $\mathrm{res}_{BB_i}(f) = f_i$. Este trio $(X, \{B_i\}, F)$ satisfazendo as condições acima é denominado um *feixe sobre a base* $\{B_i\}$.

Lema 3.2.9. *Sejam X um espaço topológico e F um feixe sobre a base $\{B_i\}$. Existe um feixe $\mathscr{F}$ sobre X, estendendo F, com isomorfismos $\mathscr{F}(B_i) \cong F(B_i) \forall\, i$, compatível com os mapas de restrições. O feixe $\mathscr{F}$ é único a menos de isomorfismos.*

Demonstração. Definiremos o feixe $\mathscr{F}$ a partir de germes de funções compatíveis. Primeiramente definimos o stalk do pré-feixe F da seguinte forma: $F_p := \varinjlim F(B_i)$. Para um aberto U de X defina

$$\mathscr{F}(U) := \{(f_p) \in \prod_{p \in U} F_p \mid \forall\, p \in U, \exists\, B_i \subseteq U,\, p \in B_i \text{ e } s \in F(B_i) \text{ com } s_q = f_q \,\forall\, q \in B_i\},$$

que é um grupo (anel). Não é difícil verificar que $\mathscr{F}$ é um feixe sobre X. Considere o mapa natural $F(B_i) \longrightarrow \mathscr{F}(B_i)$ dado por $s \in F(B_i) \longmapsto \prod_{q \in B_i} s_q \in \mathscr{F}(B_i)$, cuja inversa é dada por $s_q \in \mathscr{F}(B_i) \longmapsto s \in F(B_i)$ com s uma colagem conforme a definição de $\mathscr{F}(U)$ e na Definição 3.2.8. Segue diretamente das definições que $\mathscr{F}$ é único a menos de isomorfismos. □

No exemplo que segue podemos notar a importância de se poder definir feixes a partir da colagem de feixes sobre uma determinada (e especial) base de abertos.

Exemplo 3.2.10. Esquemas afins: Seja A um anel Noetheriano. Seja $X := \mathrm{Spec}(A)$ o conjunto dos ideais primos de A munido da topologia de Zariski. Dado $f \in A$, usando o fato que A é Noetheriano temos que os abertos da forma $D(f) := \{p \in X | f \notin p\}$ formam uma base para a topologia de X, além disso, $D(f) \cap D(g) = D(fg)$. Considere

$$\mathcal{O}_X(D(f)) := A_f := \left\{ \frac{a}{f^n} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Com o Lema 3.2.9 segue que $(X, \mathcal{O}_X)$ é um espaço localmente anelado, o stalk do feixe estrutural em p é A_p, a localização de A no ideal primo p.

Exemplo 3.2.11. *Sejam* $A := \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ *um anel de polinômios em* $n > 0$ *indeterminadas. O espaço afim n-dimensional é o esquema afim* $\mathbb{A}^n := \operatorname{Spec}(A)$*. Note que se* $\mathbf{k}$ *é algebricamente fechado os ideais maximais de* A*, que são os pontos fechados de* $\mathbb{A}^n$*, correspondem a n-uplas* $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{k}^n$*. Assim* $\mathbf{k}^n \subseteq \mathbb{A}^n$*.*

Definição 3.2.12. *Um esquema é um espaço localmente anelado que admite uma cobertura por abertos que são isomorfos a esquemas afins. Aqui, cada aberto* U *de um esquema* X *admite uma estrutura de espaço localmente anelado naturalmente herdada de* X*, bastando tomar* $(U, \mathcal{O}_X|_U)$*, em que* $i : U \to X$ *é a inclusão natural e* $\mathcal{O}_X|_U := i_*\mathcal{O}_X$*.*

Exemplo 3.2.13. *Sejam* $\mathbb{A}^n$ *um espaço afim e* $I \subseteq \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ *um ideal próprio. O subconjunto fechado* $Y = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ *é um subesquema afim. De fato, basta considerar o esquema afim* $X := \operatorname{Spec}(\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]/I)$*. O mapa que associa a cada ideal primo de* $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]/I$ *seu correspondente primo em* $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ *contendo* I*, induz o isomorfismo de esquemas procurado.*

A principal classe de esquemas desta dissertação é formada por espaços projetivos, que introduziremos a seguir.

Seja $S = \oplus_{d \geq 0} S_d$ um anel Noetheriano graduado que é uma S_0-álgebra. Considere $\operatorname{Proj}(S)$ o conjunto de todos os ideais primos p homogêneos de S tais que $S_+ \nsubseteq p$ munido da topologia de Zariski. Para cada $f \in S_d$ homogêneo de grau d, tomamos o aberto $D_+(f) := \{p \in \operatorname{Proj}(S) \mid f \notin p\}$. Usando o fato que S é Noetheriano, $\{D_+(f)\}$ forma uma base para a topologia de Zariski de $\operatorname{Proj}(S)$. Para cada aberto básico $D_+(f)$ considere o anel, que também é uma S_0-álgebra,

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(S)}(D_+(f)) := S_{(f)} := \left\{ \frac{s}{f^n} \mid \deg(s) = n \deg(f), \text{ com } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Teorema 3.2.14. *Seja* $S = \mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]$ *um anel de polinômios em* n *indeterminadas sobre um corpo algebricamente fechado* $\mathbf{k}$ *munido da graduação usual através do grau. O espaço localmente anelado* $(\operatorname{Proj(S)}, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(S)})$ *é um esquema.*

Demonstração. Vamos denotar $\operatorname{Proj}(S)$ por X. Note que nas condições do teorema, $S_0 = \mathbf{k}$ e X pode ser coberto por exatamente $n+1$ abertos, a saber

$$D_+(X_i) := \{p \in X \mid X_i \notin p\}.$$

De fato, se p é um ideal primo de S distinto do ideal irrelevante $S_+ := (X_0, \ldots, X_n)$ claramente $X_i \notin p$ para algum i. Note que $D_+(X_i) \cong \operatorname{Spec}(\mathbf{k}[X_0/X_i, \ldots, X_n/X_i])$. Obtemos assim que localmente $\operatorname{Proj}(S)$ é um esquema afim isomorfo a $\mathbb{A}^n$, como no caso clássico. $\square$

Definição 3.2.15. *Seja* $S = \mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]$ *um anel de polinômios em* $n+1$ *indeterminadas com coeficientes num corpo algebricamente fechado* $\mathbf{k}$*. O espaço projetivo* n*-dimensional é o esquema projetivo* $\mathbb{P}^n := (\mathrm{Proj}(S), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)})$*.*

Como podemos notar na prova do Teorema 3.2.14, o espaço projetivo n-dimensional $\mathbb{P}^n$ pode ser coberto por $n+1$ abertos da forma $D_+(X_i)$ com $0 \leq i \leq n$, em que cada aberto é isomorfo ao esquema afim $\mathrm{Spec}(R_{(X_i)}) \cong \mathrm{Spec}(\mathbf{k}[Y_1, \ldots, Y_n]) = \mathbb{A}^n$.

Para definir curvas como esquemas (afins ou projetivos) devemos introduzir o conceito de dimensão de esquemas.

Definição 3.2.16. *Seja* $(X, \mathcal{O})$ *um esquema. A dimensão topológica de Krull de* X *é o maior inteiro não negativo* n *tal que existe uma cadeia de fechados irredutíveis*

$$F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n = X.$$

Exemplo 3.2.17. *A reta afim* $\mathbb{A}^1$*, definida sobre um corpo* $\mathbf{k}$ *algebricamente fechado, tem dimensão igual a* 1*. De fato, um fechado* F*, próprio e irredutível de* $\mathbb{A}^1$ *corresponde a um ideal primo* $I = (f) \subset \mathbf{k}[X]$*, com* f *irredutível, logo* $f = X - a$ *para um certo* $a \in \mathbf{k}$*. Assim,* F *é um ponto.*

Segue diretamente da definição e de propriedades puramente topológicas que se X é um esquema irredutível e $U \subseteq X$ é um aberto afim, então $\dim U = \dim X$. No que segue, todos os esquemas serão considerados irredutíveis e reduzidos, ou seja, inteiros. Uma curva C será um subesquema (irredutível e reduzido) unidimensional de um espaço projetivo, $C \hookrightarrow \mathbb{P}^n$.

Exemplo 3.2.18. *A reta projetiva* $\mathbb{P}^1$ *tem dimensão igual a* 1*. De fato, pois* $\mathbb{P}^1$ *é irredutível e pode ser coberto por duas retas afins.*

A conexão entre a definição topológica e a dimensão algébrica pode ser reproduzida nos seguintes três resultados cujas provas podem ser encontradas na referência [AtiMac].

Teorema 3.2.19. *Seja* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *um esquema afim, com* A *domínio Noetheriano. Vale que* $\dim X = \dim A$*.*

Teorema 3.2.20. *Seja* A *um domínio Noetheriano e* p *um ideal primo de* A*. Vale que*

$$\dim A = \dim A/p + \mathrm{ht}(p)$$

em que $\mathrm{ht}(p)$ *denota a altura de* p*.*

Teorema 3.2.21. *Seja* A *um domínio Noetheriano que é uma* $\mathbf{k}$*-álgebra finitamente gerada. Seja* K *o corpo de frações de* A*. Vale que*

$$\mathrm{trdeg}(K|\mathbf{k}) = \dim A\,.$$

Definição 3.2.22. *Uma curva algébrica é um subesquema unidimensional fechado, irredutível e reduzido (inteiro) de um espaço projetivo* $\mathbb{P}^n$ *para algum* $n > 0$.

Mais geralmente, podemos definir uma curva como um esquema de dimensão pura igual a 1. Porém, para os propósitos desta dissertação basta definir curva como acima.

O primeiro passo para a ponte entre curvas como esquemas e as curvas definidas via corpos de funções, como na Definição 2.1.20, pode ser feita considerando o *corpo das funções meromorfas de um esquema inteiro.*

Definição 3.2.23. *Seja* X *um subesquema fechado e inteiro de um espaço afim* $\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(R)$ *ou projetivo* $\mathbb{P}^n = \mathrm{Proj}(R)$. *Considere* p *o ideal primo (homogêneo) que define* X, *ou seja,* $X = V(I)$, *e considere* $\mathbf{k}[X] := R/I$ *o anel de funções coordenadas de* X. *O corpo de funções meromorfas de* X *é o corpo de frações* $\mathbf{k}(X) := \mathrm{cf}(R/I)$. *Se* X *é uma curva, então* $\mathbf{k}(X)|\mathbf{k}$ *é um corpo de funções unidimensional.*

Teorema 3.2.24. *Um ponto* p *de uma curva* C, *como na Definição 3.2.22, é fechado se, e somente se,* $\dim \mathcal{O}_{C,p} = 1$. *O único ponto não fechado de* C *é seu ponto genérico.*

Demonstração. Primeiramente lembramos que o ponto genérico de C é um ponto cujo fecho é C. No caso de curvas mergulhadas irredutíveis, como na Definição 3.2.22, o ponto genérico corresponde ao ideal nulo do anel de funções coordenadas de C. Seja $p \in C$ um ponto fechado, como a dimensão de p é zero, pelos teoremas 3.2.19 e 3.2.20 segue que $\dim \mathcal{O}_{C,p} = 1$. Reciprocamente, seja p um ponto de C tal que $\dim \mathcal{O}_{C,p} = 1$. Considere o fecho $Y = \overline{\{p\}}$ de p em C. Novamente pelo Teorema 3.2.19, segue $\dim Y + \mathrm{codim}(Y, C) = \dim C = 1$, contudo $\mathrm{codim}(Y, C) = \dim \mathcal{O}_{C,p} = 1$, donde concluímos que $\dim Y = 0$. Da unicidade do ponto genérico em fechados irredutíveis, segue que $Y = \{p\}$.

Seja, agora, $p \in C$ um ponto qualquer de C. Desde que $\overline{\{p\}}$ é um fechado irredutível de C, podemos verificar a partir dos teoremas 3.2.19 e 3.2.20 que $\dim \mathcal{O}_{C,p} = \dim C - \dim \overline{\{p\}} \leq \dim C$. Assim, se p não é fechado, vale que $\dim \mathcal{O}_{C,p} = 0$, implicando que $\dim \overline{\{p\}} = \dim C$, donde $\overline{\{p\}} = C$. Concluindo assim que o ponto genérico de C é o único não fechado de C. □

Convém notar que se X é um esquema fechado inteiro de um espaço afim ou projetivo, então para todo aberto U de X as seções $\mathcal{O}_X(U)$ e os stalks $\mathcal{O}_{C,p}$ do feixe estrutural estão naturalmente contidos no corpo de funções de X. Do teorema acima segue que cada curva da Definição 2.1.20 está associada a uma única curva como em 3.2.22, bastando adicionar um único ponto, o ponto genérico. Note ainda que o stalk do feixe estrutural no ponto genérico é o corpo de funções $K(C)$ da curva C. Podemos, assim, sempre nos referir a curvas como esquemas, não fazendo diferença entre as definições. Lembramos ainda, que um ponto fechado $p \in C$ é dito liso (ou suave, ou simples) se seu anel local $\mathcal{O}_{C,p}$ é um anel de valorização discreta, que é equivalente a existir reta tangente a C em p, cf. [Ful, thm. 1, pg. 35].

Passemos agora a fazer a conexão entre divisores em curvas e uma classe especial de feixes.

Definição 3.2.25. Um *divisor de Weil* D em uma curva C é um elemento do grupo abeliano gerado pelos pontos fechados (que são os divisores primos) de C, ou seja,

$$D := \sum n_i p_i$$

com $n_i \neq 0$ para somente uma quantidade finita de índices i. Dizemos que o divisor D é *efetivo* se $n_i \geq 0 \,\forall\, i$. O grupo dos divisores de C é denotado por $\mathrm{Div}(C)$. Dizemos, ainda, que $D \geq D'$ se $D - D'$ é efetivo. O grau de D é $\deg(D) = \sum n_i$.

Definição 3.2.26. *Seja C uma curva lisa com corpo de funções K. Para cada $f \in K^*$ associamos o divisor principal*

$$\mathrm{div}(f) := \sum_p \mathrm{ord}_p(f)\, p$$

De maneira inteiramente análoga ao capítulo anterior, pode-se mostrar que de fato $\mathrm{div}(f)$ é um divisor em C de grau zero.

Seja p um divisor primo de C, localmente p é dado pelo conjunto dos zeros de uma função regular em p, ou seja por um ideal do anel local $\mathcal{O}_{C,p}$. Como notamos acima, se assumirmos que a curva C é não singular, os anéis locais $\mathcal{O}_{C,p}$ são de valorização discreta, logo o ideal que corresponde ao ponto fechado p é o ideal maximal (t) de $\mathcal{O}_{C,p}$. Analogamente, cada ideal maximal $(t) \subset \mathcal{O}_{C,p}$ corresponde a um divisor primo p. Desta forma, existe uma bijeção entre os geradores dos ideais maximais dos anéis locais de C e divisores primos de C.

Podemos redefinir divisores como segue:

Definição 3.2.27. *Seja C uma curva lisa. Um divisor em C é um produto formal*

$$D = \prod t_p^{n_p} \cdot \mathcal{O}_{C,p}$$

em que t_p é o gerador do ideal maximal do anel de valorização discreta $\mathcal{O}_{C,p}$ e $n_p \in \mathbb{Z}$ com $n_p = 0$ para quase todo p.

A soma e a diferença de divisores como definido acima se faz através de operações com ideais fracionários, a saber: se $D = \prod t_p^{n_p} \cdot \mathcal{O}_{C,p}$ e $D' = \prod t_p^{l_p} \cdot \mathcal{O}_{C,p}$ temos

$$D + D' := \prod t_p^{n_p + l_p} \cdot \mathcal{O}_{C,p} = \prod (t_p^{n_p} \cdot \mathcal{O}_{C,p}) \otimes (t_p^{l_p} \cdot \mathcal{O}_{C,p})$$

enquanto que

$$D - D' := \prod t_p^{n_p - l_p} \cdot \mathcal{O}_{C,p} = \prod (t_p^{n_p} \cdot \mathcal{O}_{C,p} : t_p^{l_p} \cdot \mathcal{O}_{C,p})$$

em que se A e B são dois $\mathcal{O}_{C,p}$ ideais fracionários, $(A:B) := \{z \in K(C) \mid z \cdot B \subseteq A\}$.

As observações acima sugerem que divisores de Weil estão intimamente ligados a feixes, sob a ótica do Exemplo 3.2.2, um feixe pode ser dado através dos stalks em todos os pontos de uma curva C. Obviamente temos a condição de que todos os stalks vivem num mesmo ambiente, que neste caso é o corpo de funções de C. Formalmente:

Definição 3.2.28. *Seja C uma curva lisa. Para cada divisor de Weil $D = \sum_p n_p p$ em C e para cada aberto U de C associamos*

$$\mathcal{O}_C(D)(U) := \{f \in K(C)^* \mid \operatorname{div}(f)|_U + D|_U \geq 0\} \cup \{0\}$$

em que $D|_U := \sum_{p \in U} n_p p$ é a restrição de D a U

.

Teorema 3.2.29. *Seja C uma curva lisa. Para cada divisor de Weil D em C tem-se que $\mathcal{O}_C(D)$ é um feixe tal que para cada aberto U de C o espaço de seções $\mathcal{O}_C(D)(U)$ é um $\mathcal{O}_C(U)$-módulo. Adicionalmente, para cada $p \in C$ o stalk $\mathcal{O}_C(D)_p$ é um $\mathcal{O}_{C,p}$-módulo livre de posto* 1.

Demonstração. Analogamente ao que fizemos no capítulo anterior, um elemento $f \in K(C)^*$ por ser considerado como uma função racional definida em C. Desta forma, segue diretamente das propriedades de restrições de funções que $\mathcal{O}_C(D)$ é um feixe. Seja U um aberto de C, para cada $g \in \mathcal{O}_C(U)$ e $f \in \mathcal{O}_C(D)(U)$ vale que

$$\operatorname{div}(g\, f)|_U + D|_U = \operatorname{div}(g)|_U + \operatorname{div}(f)|_U + D|_U \geq 0,$$

pois $g \in \mathcal{O}_C(U)$ é uma função regular e logo o divisor associado a g em U é efetivo. Podemos mostrar, agora, de maneira natural que $\mathcal{O}_C(D)(U)$ é um $\mathcal{O}_C(U)$-módulo.

Segue diretamente das definições 3.2.27 e 3.2.28 a seguinte identificação:

$$\mathcal{O}_C(D)(U) = \bigcap_{p \in U} t_p^{-n_p} \mathcal{O}_{C,p} \tag{3.1}$$

que nos dá uma outra prova de que $\mathcal{O}_C(D)(U)$ é um $\mathcal{O}_C(U)$-módulo. Além disso, verificamos de imediato que $\mathcal{O}_C(D)_p \cong \mathcal{O}_{C,p}$. $\square$

Definição 3.2.30. *Um feixe $\mathscr{L}$ sobre uma curva C é dito invertível se $\mathscr{L} \cong \mathcal{O}_C(D)$ para algum divisor de Weil D.*

Do Teorema 3.2.29 acima, podemos traduzir as operações de divisores em operações com seus respectivos feixes invertíveis como segue.

Sejam D e D' dois divisores de Weil sobre uma curva lisa C. Associamos

$$D + D' \longmapsto \mathcal{O}_C(D) \otimes \mathcal{O}_C(D') \cong \mathcal{O}_C(D + D')$$

em que o isomorfismo de feixes exibido acima pode ser verificado da Equação (3.1).

O elemento neutro do grupo de Picard é um divisor de Weil nulo, enquanto que seu feixe invertível associado é o feixe estrutural $\mathcal{O}_C$. O oposto de um divisor de Weil D é $-D$, enquanto que o elemento inverso de seu feixe invertível associado é $\mathcal{O}_C(-D)$. Note ainda que a partir da Equação (3.1) o inverso é dado pelo dual, conforme:

$$\mathcal{O}_C(D)^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C(D), \mathcal{O}_C) \cong \mathcal{O}_C(D)\,.$$

Teorema 3.2.31. *Seja D um divisor de Weil em uma curva lisa C. Temos que D é principal se, e somente se, $\mathcal{O}_C(D) \cong \mathcal{O}_C$.*

Demonstração. Assuma que $D := \mathrm{div}(f)$ seja uma divisor principal. Seja U um aberto de C, as seções em U do feixe invertível associado a D são dadas por

$$\mathcal{O}_C(D)(U) = \{g \in K(C)^* \,|\, \mathrm{div}(g)|_U + \mathrm{div}(f)|_U \geq 0\} \cup \{0\}\,.$$

Note que $\mathrm{div}(g)|_U + \mathrm{div}(f)|_U = \mathrm{div}(g \cdot f)|_U$, donde $g \in \mathcal{O}_C(D)(U) \Leftrightarrow g \cdot f \in \mathcal{O}_C(U)$. Assim o mapa de multiplicação por $f|_U$ induz um isomorfismo $\mathcal{O}_C(D)(U) \cong \mathcal{O}_C(U)$. Que nos dá o isomorfismo de feixes procurado.

Por outro lado, assuma que D seja um divisor tal que $\mathcal{O}_C(D) \cong \mathcal{O}_C$. Podemos encontrar uma cobertura $\{U_i\}$ por abertos de C tal que $D|_U = \mathrm{div}(f_i)$. Do fato de $\mathcal{O}_C(D)$ ser isomorfo ao feixe estrutural, segue que existem funções invertíveis $\mathcal{O}_C(U_i)^*$ tais que $f_i\, f_j^{-1} = g_i\, g_j^{-1}$, assim

$$(f_i\, g_j)|_{U_i \cap U_j} = (f_j\, g_i)|_{U_i \cap U_j}\ \forall\, i, j\,.$$

Pelo axioma da colagem de seções em feixes, temos que existe $f \in K(C)$ tal que $f|_{U_i} = f_i\, g_j|_{U_i}$. Como $g_i \in \mathcal{O}_C(U_i)^*$ segue que $\mathrm{div}(f) = D$. □

Do teorema acima temos que a aplicação $D \longmapsto \mathcal{O}_C(D)$ induz um isomorfismo

$$\mathrm{Pic(C)} \longrightarrow \mathrm{Inv}(C)$$

em que $\mathrm{Inv}(C)$ denota o grupo das classes de isomorfismos de feixes invertíveis com produto dado pelo tensor $\otimes$, elemento neutro $\mathcal{O}_C$ e inverso dado pelo dual. Desta forma, podemos definir o grupo de Picard de C como segue.

Definição 3.2.32. *Seja C uma curva, o grupo de Picard de C é o grupo formado pelas classes de isomorfismos de feixes invertíveis sobre C com produto dado pelo produto tensorial, o elemento neutro sendo o feixe estrutural de C e o oposto dado pelo dual.*

Como vimos acima, divisores de Weil e feixes invertíveis sobre uma curva estão intimamente ligados através do grupo de Picard. Passemos agora a relacionar feixes e fibrados.

Definição 3.2.33. *Dizemos que um feixe $\mathcal{F}$ sobre um esquema C é livre se $\mathcal{F}$ é isomorfo a $\mathcal{O}_C^{\oplus r}$ para algum inteiro positivo r que é chamado o posto de $\mathcal{F}$. Adicionalmente, $\mathcal{F}$ é localmente livre se existe uma cobertura por abertos de C, tal que a restrição $\mathcal{F}|_{U_i}$ é isomorfa a $\mathcal{O}_C^{\oplus r}|_{U_i}$ para cada i.*

Exemplo 3.2.34. Fixado um inteiro $d \in \mathbb{Z}$, para cada aberto U de $\mathbb{P}^n$ considere

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)(U) := \left\{ \frac{f}{g} \in K(\mathbb{P}^n) \mid g|_U \neq 0 \text{ e } \deg(f) - \deg(g) = d \right\}$$

que induz um feixe sobre $\mathbb{P}^n$, que denotamos por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$, e este é localmente livre de posto 1. De fato, considere um aberto afim básico $\mathbb{A}^n = \operatorname{Spec}(\mathbf{k}[X_0/X_i, \ldots, X_n/X_i]) \subset \mathbb{P}^n$. Para cada $U \subseteq \mathbb{A}^n$, sabemos que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_U$ consiste de todas as funções regulares bem definidas em todo U. Assim, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_U \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_U$.

Exemplo 3.2.35. Seja $\pi : E \to X$ um fibrado de posto r sobre um esquema X. Para cada aberto U de X considere as seções $s : U \to E$ tais que $\pi \circ s = id_U$. Não é difícil verificar que as seções definem um feixe sobre X. Considere agora uma cobertura $\{U_i\}$ por abertos de X que trivializam localmente o fibrado E. As seções em cada U_i são funções regulares $s : U_i \to U_i \times \mathbb{A}^r$ cuja composição com a projeção sobre U dá a identidade. Assim as seções de E sobre U são morfismos (funções regulares) $U \to \mathbb{A}^r$, que é um produto cartesiano de r funções regulares de $\mathcal{O}_C(U)$. Concluímos assim que as seções de um fibrado de posto r formam um feixe localmente livre de posto também r.

No exemplo acima associamos a cada fibrado de posto r um feixe localmente livre de posto também r. Por outro lado, considere um feixe $\mathcal{F}$ localmente livre de posto r sobre um esquema X. Tome uma cobertura $\{U_i\}$ (finita) de X tal que $\mathcal{F}|_{U_i} \cong {\mathcal{O}_C|_{U_i}}^{\oplus r} \cong \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$. Considere a reunião disjunta $\sqcup_i U_i \times \mathbb{A}^r$. Para cada i temos um isomorfismo $\varphi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$. No aberto $U_{ij} := U_i \cap U_j$ temos um automorfismo $g_{ji} := \varphi_i \varphi_j^{-1} : \mathcal{F}|_{U_{ij}} \to \mathcal{F}|_{U_{ij}}$. Usando o isomorfismo de $\mathcal{F}_{U_{ij}} \cong \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\oplus r}$, o isomorfismo g_{ji} é, portanto, associado a uma matriz A_{ji} de tamanho $r \times r$ cujas entradas são funções regulares em U_{ij}, i.e., estão no anel $\mathcal{O}(U_{ij})$. Devemos agora colar a reunião disjunta utilizando as matrizes A_{ji}. Tomamos $E := \sqcup(U_i \times \mathbb{A}^r)/\sim$ em que identificamos (x, v) com $(x, A_{ji}(v))$ sempre que $(x, v) \in U_{ji} \times \mathbb{A}^r$. Por construção, temos um mapa de projeção $\pi : E \to X$ cujas fibras são os espaços vetoriais $\mathbb{A}^r$. Novamente pela construção temos as trivializações locais de E. Também da construção, tomando cada U_i e cada U_{ji} afim, obtemos que E possui uma cobertura aberta por afins, sendo, portanto, um esquema.

Desta forma, temos a importante conexão entre fibrados e feixes localmente livres. Claramente um fibrado de posto 1 está associado a um feixe localmente livre de posto também 1. Pode-se mostrar [Huyb] que a classe de isomorfismo de um feixe localmente livre de posto 1 sobre uma curva lisa está associado a um feixe invertível, conforme a Definição 3.2.30.

Observação 3.2.36. Consideremos o caso particular de $\mathbb{P}^1$. Um fibrado E sobre $\mathbb{P}^1$ está associado, como vimos acima, a um feixe localmente livre. Uma cobertura natural de $\mathbb{P}^1$ é dada por dois abertos afins U_1 e U_2 que são isomorfos a $\mathbb{A}^1$. Desta forma, para determinar um fibrado sobre $\mathbb{P}^1$ devemos entender sua matriz de transição com coeficientes em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_1 \cap U_2)$. Desta forma, a classe de isomorfismo de um fibrado está determinada por uma única matriz A. Note que se tomamos A como a matriz identidade, temos um fibrado trivial. Note ainda, que se assumirmos que o fibrado tem posto 1, então sua matriz será um elemento de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(U_{12})^*$.

4 O Teorema de Birkhoff–Grothendieck

O teorema de Birkhoff–Grothendieck caracteriza todos os fibrados sobre a reta projetiva $\mathbb{P}^1$, precisamente assegura que todo fibrado sobre a reta projetiva é isomorfo a uma soma direta de fibrados em retas bem conhecidos. Este teorema tem sua prova formal dada por A. Grothendieck em 1957, cf. [Gro, Thm 2.1], muito embora um teorema de fatorização de G. D. Birkhoff de 1909 predizia tal caracterização. Nesta dissertação será apresentada uma prova dada por Hazewinkel–Martin [HaMa], que curiosamente somente foi formalmente conhecida em 1982, bem mais simples que a versão dada por Grothendieck, utilizando apenas a forma canônica de uma matriz com coeficientes num anel de polinômios em uma indeterminada sobre um corpo $\mathbf{k}$, que pode ser encontrada por exemplo no livro de álgebra de [Artin].

Começamos este último capítulo estudando a cobertura aberta trivial de $\mathbb{P}^1$ por dois abertos afins, sem perder de vista fibrados sobre $\mathbb{P}^1$, vide observações 3.1.4 e 3.2.36.

Lema 4.0.1. *Seja $\mathbf{0}$ a origem do espaço afim $\mathbb{A}^1$. Temos que $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} \setminus \{\mathbf{0}\} = \operatorname{Spec}(\mathbf{k}[s, s^{-1}])$.*

Demonstração. Considere a hipérbole afim $\operatorname{Spec}(\mathbf{k}[X,Y]/(XY-1))$ que corresponde ao fechado $V(XY-1) \subset \mathbb{A}^2$. Geometricamente podemos identificar, via projeção no eixo-X, que a hipérbole deve ser isomorfa a $\mathbb{A}^1 \setminus \{\mathbf{0}\}$. De maneira algébrica e precisa. Considere a imersão da hipérbole em $\mathbb{A}^2$, que é induzida pelo homomorfismo sobrejetivo $\mathbf{k}[X,Y] \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathbf{k}[X,Y]/(XY-1)$. Notamos que no quociente $\mathbf{k}[X,Y]/(XY-1)$ vale que $Y = X^{-1}$, donde naturalmente temos um isomorfismo $\mathbf{k}[s,s^{-1}] \cong \mathbf{k}[X,Y]/(XY-1)$, induzindo um isomorfismo de esquemas afins $\operatorname{Spec}(\mathbf{k}[X,Y]/(XY-1)) \cong \operatorname{Spec}(\mathbf{k}[s,s^{-1}])$. Considere agora o mapa $\mathbb{A}^1 \setminus \{\mathbf{0}\} \to V(XY-1)$ dado por $x \mapsto (x, 1/x)$. Nota-se que tal mapa é um isomorfismo, donde segue o lema. $\square$

Teorema 4.0.2. *Sejam $R = \mathbf{k}[X]$ e P um R-módulo projetivo finitamente gerado. Nestas condições, P é um R-módulo livre.*

Demonstração. Lembremos que $R = \mathbf{k}[X]$ é um domínio de ideais principais (DIP). Assim, pela classificação de módulos finitamente gerados sobre um DIP, temos a decomposição $P = R^m \oplus T$, onde T é o submódulo de torsão de P. Como P é projetivo, sabemos que P é somando direto de um R-módulo livre e, por isso, P não pode conter elementos de torsão. Portanto, devemos ter $T = 0$ e $P = R^m$.

$\square$

Corolário 4.0.3. *Todo fibrado vetorial sobre $\mathbb{A}^1_{\mathbf{k}}$ é trivial.*

Demonstração. De fato, vimos no capítulo anterior que existe uma correspondência biunívoca entre fibrados de posto r sobre uma variedade $\mathcal{X}$ e feixes localmente livre de posto também r. Além disso, se $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(R)$, então a correspondência associa fibrados vetoriais a R-módulos projetivos finitamente gerados, e os fibrados triviais correspondem a R-módulos projetivos finitamente gerados livres.

Portanto, um fibrado $E \to \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}} = \mathrm{Spec}(\mathbf{k}[X])$, está associado a um $\mathbf{k}[X]$-módulo projetivo finitamente gerado que, pelo teorema anterior, deve ser livre. Assim, pela correspondência, o fibrado E do qual este $\mathbf{k}[X]$-módulo é proveniente é trivial. □

Seja E um fibrado vetorial de posto m sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$. Considerando a cobertura aberta $\{U_1, U_2\}$ de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ temos, pela condição de trivialização, que $E|_{U_i} \simeq U_i \times \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ $(i = 1, 2)$, assim, E pode ser visto (a menos de isomorfismo) como obtido através de uma colagem de $U_1 \times \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ e $U_2 \times \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ identificando $U_1 \setminus \{\mathbf{0}\} \times \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ e $U_2 \setminus \{\mathbf{0}\} \times \mathbb{A}^m_{\mathbf{k}}$ por meio de um isomorfismo da forma

$$(s, v) \mapsto (s^{-1}, A(s, s^{-1}) \cdot v),$$

onde $A(s, s^{-1})$ é uma matriz com coeficientes no anel $\mathbf{k}[s, s^{-1}]$ com determinante não-nulo para todos $s \neq 0$, $s^{-1} \neq 0$. Note ainda, que $U_i \setminus \{\mathbf{0}\} = \mathbb{A}^1 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Lema 4.0.4. *Seja $A(s, s^{-1})$ uma matriz $m \times m$ com coeficientes em $\mathbf{k}[s, s^{-1}]$ tal que $\det(A(s, s^{-1})) \neq 0$ para todo $s \neq 0$. Então $\det(A(s, s^{-1})) = \lambda\, s^n$ para certos $n \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$.*

Demonstração. De fato, vamos denotar por f o determinante $\det(A(s, s^{-1}))$. É claro que $f \in \mathbf{k}[s, s^{-1}]$. Assim, se $f \notin \mathbf{k}[s]$, podemos escrever $f = a_{-m} s^{-m} + \cdots + a_r\, s^r$ com $m > 0$ e $r > -m$, consequentemente, $f = s^{-m}\, g$ para um certo $g \in \mathbf{k}[s]$. Como $f(s) \neq 0$ para todo $s \neq 0$, o mesmo vale para g. Assim, $V(g) = \varnothing$ ou $\{0\}$, portanto, $g(s) = \lambda\, s^t$, $t \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in k^*$. Com isso, vemos que $f = \lambda\, s^n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. □

Diante do exposto acima temos a seguinte proposição.

Proposição 4.0.5. *Classes de isomorfismo de fibrados de posto m sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ correspondem bijetivamente a classes de equivalência de matrizes $A(s, s^{-1})$ sobre $\mathbf{k}[s, s^{-1}]$, de ordem m, tais que $\det(A(s, s^{-1})) = s^n$, $n \in \mathbb{Z}$, onde a relação de equivalência é a seguinte: $A(s, s^{-1}) \sim A'(s, s^{-1})$ se e somente se existem matrizes invertíveis $U(s)$ e $V(s^{-1})$ sobre $\mathbf{k}[s]$ e $\mathbf{k}[s^{-1}]$, respectivamente, com determinante constante e tais que*

$$A'(s, s^{-1}) = V(s^{-1})\, A(s, s^{-1})\, U(s). \tag{4.1}$$

4.1 Uma forma para matrizes sobre $\mathbf{k}[s, s^{-1}]$

Vamos estudar formas canônicas para matrizes $m \times m$ sobre $\mathbf{k}[s, s^{-1}]$ sob a relação de equivalência definida na Proposição 4.0.5 acima, cujo principal resultado é

Proposição 4.1.1. *Seja $A(s, s^{-1})$ uma matriz $m \times m$ sobre $\mathbf{k}[s, s^{-1}]$ com determinante igual a s^n para algum $n \in \mathbb{Z}$. Então existem matrizes polinomiais $m \times m$, $V(s^{-1})$ e $U(s)$, com determinantes em $\mathbf{k} \setminus \{0\}$ e tais que*

$$V(s^{-1})\, A(s, s^{-1})\, U(s) = \begin{pmatrix} s^{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{r_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{r_m} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

com $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_m$, $r_i \in \mathbb{Z}$. Os r_i's são unicamente determinados por $A(s, s^{-1})$. Além disso, se $A(s, s^{-1})$ é polinomial em s, então $r_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$ e se $A(s, s^{-1})$ é polinomial em s^{-1}, então $r_i \leq 0$ para $i = 1, \ldots, m$.

Demonstração. Vamos provar primeiro a unicidade. Denotemos por $D(r_1, \ldots, r_m) = D$ a matriz do lado direito da Equação 4.2. Suponha que exista outra matriz, $D(r'_1, \ldots, r'_m) = \tilde{D}$, satisfazendo as condições da Proposição 4.1.1. Desse modo, vamos ter uma equação

$$V(s^{-1})\, D(r_1, \ldots, r_m) = D(r'_1, \ldots, r'_m)\, U(s). \tag{4.3}$$

Para uma matriz A vamos denotar por $A^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}$ o determinante da submatriz de A obtida pela remoção das linhas com índice em $\{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ e das colunas com índice em $\{1, \ldots, m\} \setminus \{j_1, \ldots, j_k\}$.

Observação 4.1.2. *Note que se A é uma matriz diagonal e $\{i_1, \ldots, i_k\} \neq \{j_1, \ldots, j_k\}$, então $A^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k} = 0$. Com efeito, escolhendo um i_l não pertencente a $\{j_1, \ldots, j_k\}$ a linha $(a_{i_l j_1}\ a_{i_l j_2} \ldots\ a_{i_l j_k})$ será nula.*

Um caso mais geral da Fórmula de Cauchy-Binet nos diz que

$$(AB)^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k} = \sum_{r_1 < \cdots < r_k} A^{i_1,\ldots,i_k}_{r_1,\ldots,r_k}\, B^{r_1,\ldots,r_k}_{j_1,\ldots,j_k}. \tag{4.4}$$

Com isso, de $(V\,D)^{1,2,\ldots,k}_{j_1,\ldots,j_k} = (\tilde{D}\,U)^{1,2,\ldots,k}_{j_1,\ldots,j_k}$ seguirá que

$$\sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k} V^{1,2,\ldots,k}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\, D^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}_{j_1,\ldots,j_k} = \sum_{\beta_1 < \cdots < \beta_k} \tilde{D}^{1,2,\ldots,k}_{\beta_1,\ldots,\beta_k}\, U^{\beta_1,\ldots,\beta_k}_{j_1,\ldots,j_k},$$

e pela observação anterior essa equação resume-se a $V^{1,2,\ldots,k}_{j_1,\ldots,j_k}\, D^{j_1,\ldots,j_k}_{j_1,\ldots,j_k} = \tilde{D}^{1,2,\ldots,k}_{1,2,\ldots,k}\, U^{1,2,\ldots,k}_{j_1,\ldots,j_k}$, ou seja,

$$V^{1,2,\ldots,k}_{j_1,\ldots,j_k}(s^{-1})\, s^{r_{j_1}+\cdots+r_{j_k}} = s^{r'_1+\cdots+r'_k}\, U^{1,2,\ldots,k}_{j_1,\ldots,j_k}(s) \tag{4.5}$$

para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$ e todo $j_1 < \cdots < j_k$. Note que como $\det(V\,D) \neq 0$, para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$ existe um menor não-nulo de $V\,D$ da forma $(V\,D)^{1,2,\ldots,k}_{j_1,\ldots,j_k}$. Para ver isso proceda indutivamente em k começando em m e decrescendo até 1 via expansão de Laplace com respeito à m-ésima linha. Assim, fixado k, escolha $i_1 < \cdots < i_k$ tal que

$$(V\,D)^{1,2,\ldots,k}_{i_1,\ldots,i_k} = V^{1,2,\ldots,k}_{i_1,\ldots,i_k}(s^{-1})\,s^{r_{i_1}+\cdots+r_{i_k}} = s^{r'_1+\cdots+r'_k}\,U^{1,2,\ldots,k}_{i_1,\ldots,i_k}(s) \neq 0.$$

Desse modo,

$$0 \neq U^{1,2,\ldots,k}_{i_1,\ldots,i_k}(s) = V^{1,2,\ldots,k}_{i_1,\ldots,i_k}(s^{-1})\,s^{(r_{i_1}+\cdots+r_{i_k})-(r'_1+\cdots+r'_k)},$$

o que implica $r'_1 + \cdots + r'_k \leq r_{i_1} + \cdots + r_{i_k}$. Note que $i_1 \geq 1$ implica $r_{i_1} \leq r_1$, $i_2 > i_1$ implica $i_2 \geq 2$ e, por conseguinte, $r_{i_2} \leq r_2$. Continuando com esse processo vamos concluir que $r'_1 + \cdots + r'_k \leq r_1 + \cdots + r_k$.

Multiplicando a Equação 4.4 por $V(s^{-1})^{-1}$ à esquerda e $U(s)^{-1}$ à direita, obtemos $V^{-1}\,\tilde{D} = D\,U^{-1}$. Repetindo o argumento para essa equação, vamos encontrar $r_1+\cdots+r_k \leq r'_1 + \cdots + r'_k$ para todo k e portanto $r_i = r'_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Agora vamos provar a existência. Primeiro multiplicamos $A(s, s^{-1})$ por uma potência adequada s^r $(r \geq 0)$ de modo que $B(s) := s^r\,A(s, s^{-1})$ seja polinomial em s. Desse modo, $\det B(s) = s^\lambda$ com $\lambda = mr + n \in \mathbb{N}$ (porque $B(s)$ é polinomial em s). Podemos supor que na primeira linha de B temos $b_{11}, \ldots, b_{1l} \neq 0$ (algum $l \in \{1, \ldots, m\}$) e que as demais entradas são nulas. Suponha ainda que $\deg(b_{11}) \leq \deg(b_{12})$ e considere a seguinte sequência de divisões euclidianas e as respectivas operações elementares sobre as colunas de B:

$$\begin{aligned}
b_{12} &= b_{11} \cdot q_1 + r_1, && C_2 \mapsto C_2 - q_1 C_1\\
b_{11} &= r_1 \cdot q_2 + r_2, && C_1 \mapsto C_1 - q_2 C_2\\
r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3, && C_2 \mapsto C_2 - q_3 C_1\\
&\ \ \vdots\\
r_k &= r_{k+1} \cdot q_{k+2}, && C_i \mapsto C_i - q_{k+2} C_j,
\end{aligned}$$

com $i, j \in \{1, 2\}$ distintos. Ao final, a coluna C_i terá 0 na primeira entrada e a C_j terá $r_{k+1} = \mathrm{mdc}(b_{11}, b_{12})$. Agora fazemos o mesmo procedimento com as colunas C_j e C_3 obtendo, assim, 0 em uma delas e $\mathrm{mdc}(\mathrm{mdc}(b_{11}, b_{12}), b_{13}) = \mathrm{mdc}(b_{11}, b_{12}, b_{13})$ na outra. Continuando com esse processo até a coluna C_l vamos ter $\mathrm{mdc}(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1l}) := b'_{11}$ em uma entrada da primeira linha e zero em todas as demais. Tais operações equivalem a multiplicarmos B à esquerda com uma matriz elementar $U(s)$, o que nos dá

$$B'(s) = B(s)\,U(s) = \begin{pmatrix} b'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b'_{21} & & & \\ \vdots & & (B'_2) & \\ b'_{m1} & & & \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Como B é equivalente a B', podemos continuar a prova com B' no lugar de B. Note que, por um lado, $\det B'(s) = \det B(s) = s^{\lambda}$ e, por outro, $\det B' = b'_{11} \cdot \det B'_2$. Assim, $b'_{11} = s^{k_1}$ para algum $k_1 \geq 0$ e $\det B'_2 = s^{\lambda - k_1}$. Por indução podemos assumir que o resultado seja válido para matrizes de ordem $m-1$ (O caso $m=1$ é trivial). Assim, existem matrizes $V_2(s^{-1}), U_2(s)$ tais que $V_2(s^{-1})\,B'_2\,U_2(s)$ tem a forma diagonal que procuramos. Então

$$C(s) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} B' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & s^{k_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_m & 0 & & s^{k_m} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

para certos $k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ e $c_i \in \mathbf{k}[s, s^{-1}]$. Subtraindo das linhas $2, \ldots, m$ múltiplos da primeira linha por elementos de $k[s^{-1}]$ adequados, podemos supor que cada c_i pertence a $\mathbf{k}[s]$ (o que equivale a multiplicar C à esquerda por uma $V(s^{-1})$).

Agora considere todas as matrizes polinomiais da forma 4.7 que são equivalentes a $B(s)$ (no sentido da Proposição 4.0.5). Escolha uma para a qual k_1 é maximal, que existe pois $k_1 \leq \lambda$ e $k_2, \ldots, k_m \geq 0$. Afirmamos que $k_1 \geq k_i$ para todo $i = 2, \ldots, m$. De fato, suponha que para algum i, $k_1 < k_i$. Assim, para algum $f \in \mathbf{k}[s^{-1}]$ adequado, a operação $L_i \mapsto L_i - f L_1$ transforma c_i em $s^{k_1+1}g$, $g \in \mathbf{k}[s]$. Permutando a primeira e i-ésima linhas dessa nova matriz, obtemos uma matriz $\mathcal{B}(s)$ cujo máximo divisor comum dos elementos de sua primeira linha é $s^{k'_1}$ com $k'_1 \geq k_1 + 1$. Agora, aplicando a $\mathcal{B}(s)$ o mesmo procedimento que fizemos para $B(s)$ vamos encontrar uma matriz $\mathcal{C}(s)$ da forma 4.7 com $k'_1 > k_1$, uma contradição. Portanto, $k_1 \geq k_i$ para $i = 2, \ldots, m$ e, com isso, existem $f_2, \ldots, f_m$ em $\mathbf{k}[s^{-1}]$ de modo que as operações $C_1 \mapsto C_1 - f_i\,C_i$ $(2 \leq i \leq m)$ transformam nossa matriz da forma 4.7 (que tem k_1 maximal) em uma do mesmo tipo e para a qual $\deg(c_i) \leq k_i$. Mas então $\deg(c_i) \leq k_1$ e, assim, existem $g_2, \ldots, g_m \in \mathbf{k}[s^{-1}]$ tais que $s^{k_1}\,g_i = c_i$. Portanto, após multiplicarmos à esquerda com uma matriz $V(s^{-1})$ teremos $c_2 = \cdots = c_m = 0$.

Com isso, mostramos que existem naturais $k_1 \geq \cdots \geq k_m \geq 0$ (permutando linhas e colunas se necessário) e matrizes $U(s), V(s^{-1})$ com determinantes em $\mathbf{k} \setminus \{0\}$ tais que

$$V(s^{-1})\,B(s)\,U(s) = V(s^{-1})\,s^r\,A(s, s^{-1})\,U(s) = D(k_1, \ldots, k_m).$$

Multiplicando por s^{-r} obtemos $V(s^{-1})\,A(s,s^{-1})\,U(s) = D(r_1,\ldots,r_m)$ com $r_i = k_i - r$. Para finalizar a prova resta mostrar que para uma matriz $B(s^{-1})$ vamos ter $r_i \leq 0$, $i = 1,\ldots,m$. Substituindo s^{-1} por t e aplicando a $B(t)$ o procedimento feito para $B(s)$, porém, utilizando-se operações linhas (resp. colunas) em toda parte onde usamos operações colunas (resp. linhas), obtemos

$$U(t)\,B(t)\,V(t^{-1}) = D(r_1,\ldots,r_m), \qquad r_i \geq 0,$$

donde $U(s^{-1})\,B(s^{-1})\,V(s) = D(-r_1,\ldots,-r_m)$. Agora permutamos linhas e colunas para obter a ordem desejada. $\square$

4.2 O Teorema de Birkhoff–Grothendieck

Consideremos agora o fibrado vetorial $\mathcal{O}(d)$ sobre $\mathbb{P}^1$, como foi definido no Exemplo 3.2.34. Sob o ponto de vista de trivializações locais e funções de transição, vide Observação 3.1.4, temos que $\mathcal{O}(d)$ é dado por um elemento $A \in \mathbf{k}[s,s^{-1}]$, que corresponde a colagem na intersecção dos abertos afins U_1 e U_2, como vimos acima. Note que $\mathcal{O}(d)$ está determinado pela função de transição s^{-d}. Sob o ponto de vista do Meta-Teorema, temos que uma matriz diagonal $A(s,s^{-1}) = D(r_1,\ldots,r_m)$ determina, a menos de isomorfismos, o fibrado $\mathcal{O}(-r_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(-r_m)$. Desta forma, temos o Teorema de Birkhoff–Grothendieck

Teorema de Birkhoff–Grothendieck 4.2.1. *Seja E um fibrado sobre a reta projetiva $\mathbb{P}^1$. Existem inteiros $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_m$ de modo que temos o isomorfismo de fibrados*

$$E \cong \mathcal{O}(r_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(r_m)$$

em que cada r_i depende unicamente da classe de isormorfismos de E.

Referências

[Artin] M. Artin, *Algebra*, Pearson Modern Classics for Advanced Mathematics Series (2017).

[AtiMac] M. Atiyah and I. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishin, Company Inc (1969).

[Bir] G. D. Birkhoff, *Singular points of ordinary linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 10, (1909) 436–470.

[BoPe] F. Bogomolov and T. Petrov, *Algebraic curves and one-dimensional fields*, Courant Lec. Notes in Math. (2002).

[Ful] W. Fulton, *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*, W. A. Benjamin; First edition (1969).

[Gro] A. Grothendieck, *Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphere de Riemann*, Amer. J. Math. 79 (1957) 121–138.

[HaMa] M. Hazenwinkel and C. F. Martin, *A short elementary proof of Grothendieck's theorem on algebraic vectorbundles over the projective line*, J. Pure App. Algebra, 25 (1982) 207–211.

[Huyb] D. Huybrechts, *Complex Geometry: An Introduction*, Springer-Verlag (2005).

[Lang] S. Lang, *Introduction to algebraic and abelian functions*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1982).

[OkSchSpin] C. Okonek, M. Schneider and H.Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1980).

[St] K.-O. Stoehr, *On the poles of regular differentials of singular curves*, Bull. Brazilian Math. Soc., 24 (1993) 105–135.