



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Equação Diferencial Implícita aplicada ao Estudo de Curvas de Rarefação.

Fiorella María Rendón García

Belo Horizonte - MG  
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Equação Diferencial Implícita aplicada ao Estudo de Curvas de  
Rarefação**

Fiorella María Rendón García

Orientador: Cesar de Souza Eschenazi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEX) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG  
2017

*A meus pais Giovanna e Pedro e minha irmã Angela.*

# Sumário

---

<b>Agradecimentos</b>	<b>2</b>
<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>Preliminares</b>	<b>5</b>
<b>1 Equações Diferenciais Implícitas</b>	<b>10</b>
1.1 O recobrimento duplo de $M$ e o levantamento de campos . . . . .	10
1.2 Redução formal das EDIs . . . . .	18
1.2.1 Uma redução adicional da EDI . . . . .	23
1.3 Topologia das formas normais . . . . .	27
<b>2 Famílias genéricas a 1-parâmetro de EDIs do tipo Morse</b>	<b>37</b>
2.1 Redução das EDIs . . . . .	37
2.2 Topologia das formas normais . . . . .	43
<b>3 Aplicação</b>	<b>55</b>
3.1 Formulação do problema . . . . .	56
3.2 Estudo das configurações . . . . .	61
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>75</b>

# Agradecimientos

---

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer especialmente a meu orientador Prof. Cesar De Souza Eschenazi. Em particular, quero manifestar o meu apreço ao Cesar que, além de orientador, tem sido um amigo. Eu não tenho palavras para expressar minha sincera gratidão a ele, mas eu me considero afortunado por ter trabalhado com ele.

Também sou grata aos membros da minha banca examinadora, Prf. Alberto Berly Sarmiento Vera, Prf. Carlos Maria Carballo, Prf. Jose Antonio Gonçalves Miranda, que comprometeram muito generosamente seu tempo e conhecimento para avaliar a minha dissertação.

Eu também gostaria de agradecer a meus pais Pedro e Giovanna pelo apoio, mesmo a muitos quilômetros de distância, que tem sido essencial para encontrar forças e continuar lutando pelos meus objetivos. Palavras não podem expressar a imensidão da gratidão que tenho por eles. À minha irmã Angela pela força e confiança. E para uma parte importante para mim, meus amigos Camilo e Manuel, e por quem começou todo Edison.

Por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro.

# Introdução

---

Equações diferenciais implícitas aparecem muitos contextos da matemática e existe uma grande literatura sobre o assunto, bem como um grande número de técnicas para estudá-las. Nesta dissertação abordamos as técnicas introduzidas em [1] e [2]. Nosso objetivo é aplicar tais técnicas para reobter a configuração das curvas de rarefação em sistemas quadráticos de duas leis de conservação estudadas em [8], [9] e [10].

No capítulo 1 consideramos equações diferenciais implícitas da forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (1)$$

onde  $a, b$  e  $c$  são funções suaves que se anulam na origem, na vizinhança de pontos onde a função discriminante

$$\Delta(x, y) = b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y)$$

tem singularidades do tipo Morse. Equações diferenciais implícitas do tipo 1 são também conhecidas como equações diferenciais binárias. Aqui manteremos a nomenclatura Equações diferenciais implícitas (EDI). Em pontos onde  $\Delta(x, y) > 0$  a equação (1) define um par de direções no plano. Para estudar as soluções de (1) considera-se em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P$  o conjunto  $M$  de pontos  $(x, y, p)$ , com  $b^2(x, y) + a(x, y)c(x, y) \geq 0$  e  $p$  é uma direção definida por (1) no ponto  $(x, y)$ . As configurações topológicas das soluções são classificadas de acordo com os tipos de singularidades que apresentam.

No capítulo 2 consideraremos famílias genéricas a 1-parâmetro de equações diferenciais implícitas da forma

$$a(x, y, t)dy^2 + 2b(x, y, t)dxdy + c(x, y, t)dx^2 = 0,$$

foram estudadas em [2] na vizinhança de pontos onde o discriminante  $b^2 - ac = 0$  tem uma singularidade do tipo Morse em  $t = 0$ , que é o caso acima. Descreve-se então a mudança da configuração da curvas soluções de acordo com a variação do parâmetro.

No capítulo 3 aplicaremos as técnicas dos capítulos (1) e (2) no estudo da configuração topológica das curvas de rarefação de um sistema quadrático de duas leis de conservação.

As curvas de rarefação são soluções contínuas de um sistema de leis de conservação em uma variável espacial. Consideramos aqui um sistema de duas leis de rarefação

$$U_t + F(U)_x = 0,$$

onde  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ ,  $U(x, t) \in \mathbb{R}^2$  e as funções de fluxo  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$  são funções quadráticas. Mostramos que as curvas de rarefação são as curvas integrais da equação diferencial implícita

$$f_v(dy)^2 + (f_u - g_v)dudv - g_u(du)^2 = 0,$$

que é uma EDI do tipo (1). Terminamos nosso trabalho fazendo de uma breve comparação entre as técnicas introduzidas em [1] e [2] e as técnicas que foram usadas em [9] e [6].

# Preliminares

---

**Definição 0.1.** Dada uma equação diferencial de primeira ordem  $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$  onde  $F \in \mathbb{C}^\infty$  nas variáveis  $x, y, p = \frac{dy}{dx}$ , chamamos ponto singular da equação todo ponto de  $\mathbb{R}^3$  que anula a derivada de  $F$  em relação a  $p$ , isto é,  $F_p = 0$ .

Na vizinhança de um ponto singular a equação não é solúvel em relação a variável  $p = \frac{dy}{dx}$ , temos então a seguinte definição.

**Definição 0.2.** Equações diferenciais que apresentam pontos singulares são denominadas de equações diferenciais implícitas, (EDI) também conhecidas classicamente como equações diferenciais multifórmes.

Fora dos pontos singulares, as equações diferenciais implícitas podem ser resolvidas pelas técnicas usuais conhecidas.

**Observação 0.0.1.** Neste trabalho supomos que 0 é valor regular para a função  $F$ , ou seja, que a superfície definida por  $F(x, y, p) = 0$  é uma superfície suave  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

A observação acima juntamente com o fato de que  $p = \frac{dy}{dx}$ , permite-nos por

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ dy - p dx = 0 \end{cases}$$

O estudo das EDI não é novo. Em [12] René Thom retomou o estudo desse problema considerando o contexto de teoria das Singularidades. O estudo das EDI neste contexto permite que encaremos o problema da seguinte forma: estudar o campo de linhas definido pelo núcleo da 1-forma  $t = dy - p dx$  sobre a superfície  $M^2$ . Geometricamente, esse campo de linhas é definido pela interseção do plano tangente à superfície  $M^2$  com o plano vertical  $dy - p dx = 0$ .

**Observação 0.0.2.**  $dx, dy$  não estão sendo encarados como elementos infinitesimais, são interpretados como as componentes dos vetores tangentes à superfície  $M^2$ .

Ainda deste ponto de vista, os pontos singulares da equação  $F(x, y, p) = 0$ , que são dados por  $F_p = 0$ , definem, em geral, uma curva na superfície  $M^2$  definida pelas equações  $F = 0$  e  $F_p = 0$ .

As soluções da equação diferencial original que desejamos estudar são obtidas tomando-se a imagem pela projeção  $\pi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, p) \rightarrow (x, y)$  das trajetórias do campo de linhas em

$M^2$ .

O campo de linhas definido pelo núcleo da 1-forma  $t$  na superfície  $M^2$ , é singular nos pontos da superfície  $M^2$  onde o plano tangente e o plano vertical  $dy - pdx = 0$  são paralelos, isto é, são os pontos onde os vetores  $(F_x, F_y, F_p)$  e  $(-p, 1, 0)$  são paralelos. Segue que  $F_p = 0$ , o que significa que as singularidades estão sobre a curva singular  $\Gamma$  definida por  $F = F_p = 0$  e  $F_x + pF_y = 0$ .

**Observação 0.0.3.** *Não é difícil mostrar que a imagem das singularidades do campo de linhas pela projeção  $\pi$  são exatamente os pontos onde as soluções da equação são tangentes à curva  $\pi(\Gamma)$ .*

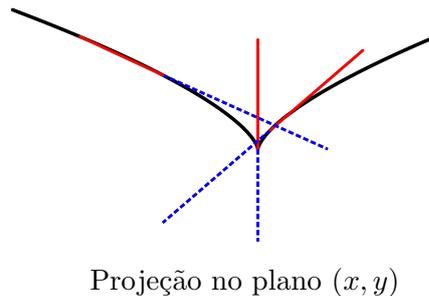
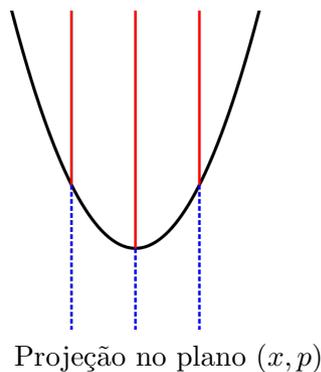
Um exemplo particular de uma equação diferencial implícita é a equação de Clairaut, que é uma equação do tipo  $y = xp + f(p)$ ;  $p = \frac{dy}{dx}$ .

A superfície  $F(x, y, p) = xp + f(p) - y = 0$  é uma superfície regrada pois para cada  $p$  fixo tem-se a equação de uma reta. A curva singular  $\Gamma$  é dada pela equação  $F = 0$ ;  $F_p = x + f'(p) = 0$ . Como  $y$  já está isolado no lado esquerdo, as coordenadas naturais para a superfície  $M^2$  são  $x$  e  $p$ . O campo de linhas restrito à superfície  $M^2$ , nessas coordenadas, se escrevem como  $(x + f'(p))dp = 0$  em cada ponto onde este sistema de coordenadas é válido, o campo de linhas tem o mesmo comportamento que o campo de vetores:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + f'(p) \\ \dot{p} = 0 \end{cases}$$

Este campo é singular se  $x + f'(p) = 0$ , ou seja, todo ponto da curva  $\Gamma$  é uma singularidade do campo de linhas. Este fato junto com a observação (0.0.3) mostra que a imagem da curva  $\Gamma$  pela projeção  $\pi$  é a envoltória das soluções da equação de Clairaut. As soluções da equação de Clairaut no plano  $(x, p)$  são as retas  $p$  constantes. Por exemplo:  $f(p) = -\frac{p^3}{3}$ , ou seja,  $y = xp - \frac{p^3}{3}$ . Usando  $x, p$  como coordenadas para  $M^2$  tem-se que a curva  $\Gamma$  é dada no plano  $(x, p)$  pela equação  $x = p^2$ . No plano  $(x, p)$  as soluções são as retas  $p = cte$

A curva  $\pi(\Gamma)$  projeção no plano  $(x, y)$  da curva é a parábola semi-cúbica  $y = \pm \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$



Em [3] L. Dara retoma a questão de estudar as singularidades das equações diferenciais implícitas. O trabalho de Dara pode ser dividido em duas partes:

- mostra via Teorema de Transversalidade, que as equações diferenciais implícitas apresentam 6 tipos de singularidades genéricas (lista de Thom é incompleta).
- Procura dar modelos das diferentes singularidades genéricas. Destes modelos fornecidos por Dara, enfocaremos apenas 3.

**Exemplo 0.0.4. Dobra simples** (segundo com a denominação original do autor)  $p^2 = x$ . A superfície  $F(x, y, p) = 0$  é dada por  $p^2 - x = 0$ .

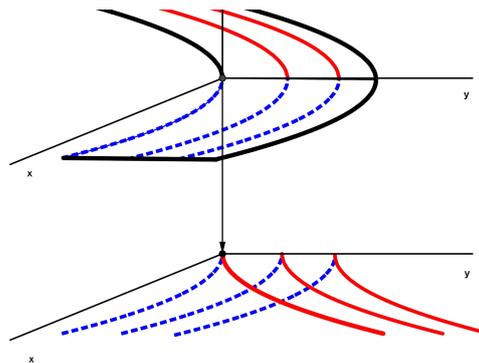
A curva singular  $\Gamma$  que é dada pelas equações  $F = 0$ .  $F_p = 0$  é o eixo  $y$ .

$$\begin{cases} x - p^2 = 0 \\ dy - p dx = 0 \end{cases}$$

é natural tomar  $y, p$  como coordenadas. Nestas coordenadas o campo de linhas definido pelo núcleo 1-forma  $t = dy - p dx$  na superfície  $M^2$  se escreve como:  $dy - 2p^2 dp = 0$ . Que tem o mesmo comportamento que o campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{y} = 2p^2 \\ \dot{p} = 1 \end{cases}$$

cuja solução é a família de curvas  $y = \frac{2}{3}p^3 + c$



como  $p = \pm\sqrt{x}$ , a imagem de curvas soluções pela projeção  $\pi$  é uma família de parábolas semicúbicas  $y = \pm\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + c$ .

**Observação 0.0.5.** Neste caso, usamos a denominação curva de dobra para a curva  $\Gamma$ , uma vez que todos os pontos da curva  $\Gamma$  são singularidades do tipo dobra para a projeção  $\pi$

**Exemplo 0.0.6. Singularidades do tipo dobra-sela**

$$\begin{cases} y = 2xp + p^2 \\ dy - p dx = 0 \end{cases}$$

a superfície  $F(x, y, p) = 0$  é a superfície  $p^2 + 2xp - y = 0$ . A curva singular  $\Gamma$  é dada por  $2x + 2p = 0$ , então  $x = -p$ .

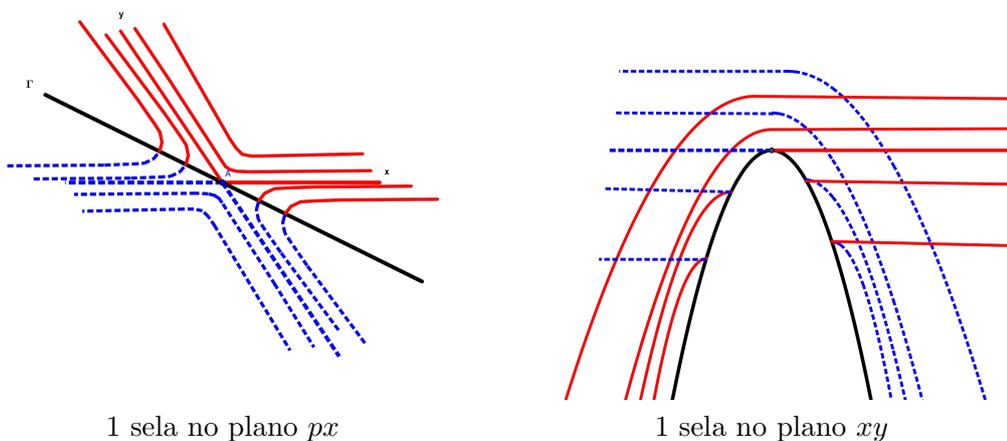
A superfície  $F$  é regrada. Pode-se notar ainda que fixando  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  a pré-imagem desse ponto pela projeção  $\pi$  pode ter cardinalidade zero, 1 ou 2 pontos conforme  $y + x^2$  seja negativo, zero ou positivo respectivamente.

Tomamos  $x, p$  como coordenadas para a superfície  $M^2$ . Neste sistema de coordenadas,  $dy - p dx = 0$  restrita a  $M^2$  se escreve como  $p dx + 2(x + p) dp = 0$  que tem o mesmo comportamento que o campo de vetores.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x + p) \\ \dot{p} = p \end{cases}$$

Este campo é singular em  $(0, 0)$  e esta singularidade é do tipo sela uma vez que  $\det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} < 0$ .

As variedades invariantes são o eixo  $x$  e a reta  $p = -\frac{3}{2}x$ .



A imagem da curva  $\Gamma$  pela projeção  $\pi$  é a parábola  $y = -x^2$  (Para ver isto ponha  $p = -x$  na equação define  $F$ ). Esta curva é a curva que separa a cardinalidade das pré-imagens dos pontos no plano.

A imagem do eixo  $x$  pela projeção  $\pi$  é o próprio eixo  $x$  e a imagem da reta  $y = -\frac{3}{2}x$  é a parábola  $y = -\frac{3}{4}x^2$ .

**Observação 0.0.7.** A denominação de dobra-sela dada por Dara justifica-se pelo fato de que as singularidades da projeção  $\pi$  são do tipo dobra e a singularidade do campo de linhas é do tipo sela.

**Exemplo 0.0.8. Singularidade do tipo dobra-nó**

$$y = p^2 + \frac{1}{3}xp$$

De novo a superfície  $F$  é regrada, a curva  $\Gamma$  é dada por  $2p + \frac{1}{3}x = 0$ , então  $p = -\frac{1}{6}x$ .

A pré-imagem de cada ponto  $(x, p) \in \mathbb{R}^2$  pode ter cardinalidade 0, 1 ou 2 conforme  $x^2 + 36y$  seja negativo, nulo o positivo respectivamente.

As coordenadas naturais para  $M^2$  são  $x$  e  $p$ . Nestas coordenadas o campo de linhas se escreve

$$(2p + \frac{1}{3}x)dp - \frac{2}{3}pdx = 0$$

que localmente tem o mesmo comportamento do campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{x} = 2p + \frac{1}{3}x \\ \dot{p} = \frac{2}{3}p \end{cases}$$

Este campo tem uma singularidade na origem do tipo nó, uma vez que  $\det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{9} > 0$ .

As variedades invariantes são o eixo  $x$  e a reta  $p = \frac{1}{6}x$

A imagem da curva  $\Gamma$  pela projeção  $\pi$  é a curva  $y = -\frac{1}{36}x^2$ . A imagem das variedades invariantes são  $\pi(x, p = 0) = (x, y = 0)$  e  $\pi(x, \frac{1}{6}x) = (x, \frac{1}{12}x^2)$ .

**Observação 0.0.9.** 1. Davidov mostrou posteriormente que estas singularidades são estruturalmente estáveis.

2. Palmeira em [9] usou esta técnica para descrever a configuração dos campos de linhas gerados pelos autoespaços da matriz derivada de uma função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cujas funções coordenadas são polinômios quadráticos. Para este problema, a curva singular  $F = 0, F_p = 0$  é a curva onde os autovalores da matriz  $DF$  têm multiplicidade algébrica igual a 2 e multiplicidade geométrica igual a 1. A região do plano onde não tem solução da E.D.I. são os pontos onde os autovalores da matriz  $DF$  são complexos. A função  $F$  considerada é tal que a região onde os autovalores de  $DF$  são complexos é limitada.

O interesse desse estudo está no fato de que as ondas de rarefação podem ser interpretadas como as curvas integrais do campo de linhas gerados pelos autoespaços da matriz derivada da função de fluxo  $F$  do sistema de leis de conservação

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad U \in \mathbb{R}^n; x, t \in \mathbb{R}$$

# Equações Diferenciais Implícitas

---

Neste capítulo nós vamos dar uma classificação local das curvas solução das equações diferenciais implícitas da forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0 \quad (1)$$

em pontos nos quais a função discriminante  $b^2 - ac$  tem uma singularidade de Morse. Vamos apresentar uma forma normal para tais equações.

## 1.1 O recobrimento duplo de $M$ e o levantamento de campos

Nesta seção vamos estudar o recobrimento duplo  $M$  e os zeros do levantamento do campo na reta projetiva  $0 \times \mathbb{R}P^1$ .

Consideramos equações diferenciais implícitas (EDIs) do tipo (1) da equação (1) onde  $a, b, c$  são funções suaves que se anulam no origem. Em pontos onde

$$b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0$$

A equação (1) define um par de direções no plano.

Uma forma natural de estudar estas equações é fazendo o levantamento do campo de direções bivaluado a um campo de recobrimento duplo associado.

Tomamos a carta afim  $\mathbb{R}P^1$  com a direção  $p = \frac{dy}{dx}$  e consideramos localmente em  $\mathbb{R}^3$  a superfície de recobrimento duplo.

$$M = \{(x, y, p) : ap^2 + 2bp + c = 0\} \quad (2)$$

Denotamos por  $F(x, y, p)$  a função

$$F(x, y, p) = ap^2 + 2bp + c$$

## 1.1. O RECOBRIMENTO DUPLO DE $M$ E O LEVANTAMENTO DE CAMPOS

onde

$$\begin{aligned}a &= a_1x + a_2y + O(2) \\b &= b_1x + b_2y + O(2) \\c &= c_1x + c_2y + O(2)\end{aligned}$$

**Definição 1.1.** Denominamos de curva discriminante da EDI (1) o conjunto

$$\Delta = \{(x, y) : b^2 - ac = 0\} \quad (3)$$

**Proposição 1.1.1.**

1. A superfície  $M$  em (2) é suave numa vizinhança de  $0 \times \mathbb{R}P^1$  se, e somente se, a função discriminante  $b^2 - ac$  tem uma singularidade de Morse.
2. A projeção natural

$$\begin{aligned}\pi : M &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\(x, y, p) &\rightarrow (x, y)\end{aligned}$$

é um difeomorfismo local fora de  $\pi^{-1}(\Delta)$ .

**Prova.**

1. Seja

$$F_p = \frac{\partial F}{\partial p} = 2ap + 2b$$

Em  $(x, y) = (0, 0)$

$$F_p = 2(a_1x + a_2y + O(2))p + 2(b_1x + b_2y + O(2)) = 0$$

Portanto a superfície  $M$  não é suave se, e somente se

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0, p) = a_1p^2 + 2b_1p + c_1 \quad (4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0, p) = a_2p^2 + 2b_2p + c_2, \quad (5)$$

Se anulam ao mesmo tempo para algum  $p$ .

Multiplicando-se Eq. (4) por  $-a_2$  e a Eq. (5) por  $a_1$  temos o sistema.

$$\begin{cases} -a_1a_2p^2 - 2a_2b_1p - a_2c_1 &= 0 \\ a_1a_2p^2 + 2a_1b_2p + a_1c_2 &= 0, \end{cases} \quad (6)$$

## 1.1. O RECOBRIMENTO DUPLO DE $M$ E O LEVANTAMENTO DE CAMPOS

Resolvendo o sistema para  $p$  temos

$$p = \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{2(b_2a_1 - b_1a_2)}$$

Multiplicando-se a Eq. (4) por  $-b_2$  e a Eq. (5) por  $b_1$  obtemos o sistema

$$\begin{cases} -a_1b_2p^2 - 2b_1b_2p - b_2c_1 & = 0 \\ a_2b_1p^2 + 2b_1b_2p + b_1c_2 & = 0 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema para  $p$  obtemos

$$p^2 = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

Se consideramos o quadrado da solução do sistema (6) obtemos.

$$\frac{(a_2c_1 - a_1c_2)^2}{4(b_2a_1 - b_1a_2)^2} = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

A igualdade é válida se, e somente se,

$$(a_2c_1 - a_1c_2)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = 0 \quad (7)$$

A expansão de Taylor de ordem 2 da função discriminante é a seguinte

$$\begin{aligned} b^2 - ac &= (b_1x + b_2y + O(2))^2 - (a_1x + a_2y + O(2))(c_1x + c_2y + O(2)) \\ &= (b_1^2 - c_1a_1)x^2 + (2b_1b_2 - c_2a_1 - c_1a_2)xy + (b_2^2 - c_2a_2)y^2 + O(2) \end{aligned}$$

Escrita na forma matricial, a parte quadrática desta função se escreve como

$$b^2 - ac = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^2 - a_1c_1 & \frac{1}{2}(2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1) \\ \frac{1}{2}(2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1) & b_2^2 - a_2c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

segue-se que seu determinante é dado por

$$\begin{aligned} Det(b^2 - ac) &= (b_1^2 - a_1c_1)(b_2^2 - a_2c_2) - \frac{1}{4}(2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1)^2 \\ &= -\frac{1}{4}(4b_1^2a_2c_2 + 4a_1b_2^2c_1 - 4a_1a_2c_1c_2 - 4b_1b_2c_2a_1 - 4b_1b_2c_1a_2 + \\ &\quad c_2^2a_1^2 + 2a_1a_2c_1c_2 + c_1^2a_2^2) \\ &= -\frac{1}{4}\left((a_2c_1 - a_1c_2)^2 - 4(b_2a_1 - b_1a_2)(b_1c_2 - b_2c_1)\right). \end{aligned}$$

Assim,  $Det(b^2 - ac) = 0$  se, e somente se, vale a equação (7).

2. Sabemos que a projeção  $\pi$  não será um difeomorfismo local em  $(x, y, p)$  se  $F_p(x, y, p) = 0$ .

## 1.1. O RECOBRIMENTO DUPLO DE $M$ E O LEVANTAMENTO DE CAMPOS

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\Delta) &= \{(x, y, p) : \pi(x, y, p) \in \Delta\} \\ &= \{(x, y, p) : (x, y) \in \Delta\} \\ &= \{(x, y, p) : b^2 - ac = 0\}\end{aligned}$$

Assim devemos ter

$$p = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

e portanto

$$Fp = 2ap + 2b = 2a\frac{-b}{a} + 2b = 0$$

Que é precisamente o conjunto

$$\pi^{-1}(\Delta) = \{(x, y, p) : F = F_p = 0\}$$

■

Pela proposição (1.1.1)  $M = \{F(x, y, p) = ap^2 + 2bp + c = 0\}$  é uma superfície suave, podemos fazer a seguinte construção. Notemos que cada ponto no plano onde  $b^2 - ac > 0$  existem duas direções  $p_1(x, y)$  e  $p_2(x, y)$  que correspondem a dois pontos na superfície  $M$  sobre a reta vertical que passa por  $(x, y)$  ver figura (1.1). Pelo teorema da função implícita, temos que localmente duas componentes ou superfícies que projetam-se difeomorficamente sobre o plano  $(x, y)$ . Localmente nos pontos onde  $b^2 - ac > 0$ , a EDI (1) define as direções  $p_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}$  e  $p_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}$  que definem os campos vetoriais associados  $v_1 = (1, p_1)$  e  $v_2 = (1, p_2)$ .

**Definição 1.2** (Levantamento). *O campo vetorial  $\xi$  sobre  $M$  é dito o levantamento de EDI (1) ou do campo bivaluado determinado se, e somente se  $d_\pi(\xi)(x, y, p)$  é um vetor com direção  $p$ .*

Em outras palavras, deve-se projetar um vetor no plano com a correspondente direção  $p$ .

**Proposição 1.1.2.** 1. *O campo vetorial  $\xi$  denotado por:*

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

*é o levantamento para  $M$  do par de direções no plano definido por (1).*

2. *O campo vetorial  $\xi$  tem uma ou três singularidades em  $0 \times \mathbb{RP}^1$ . Estas singularidades são do tipo sela ou nó.*

1.1. O RECOBRIMENTO DUPLO DE  $M$  E O LEVANTAMENTO DE CAMPOS

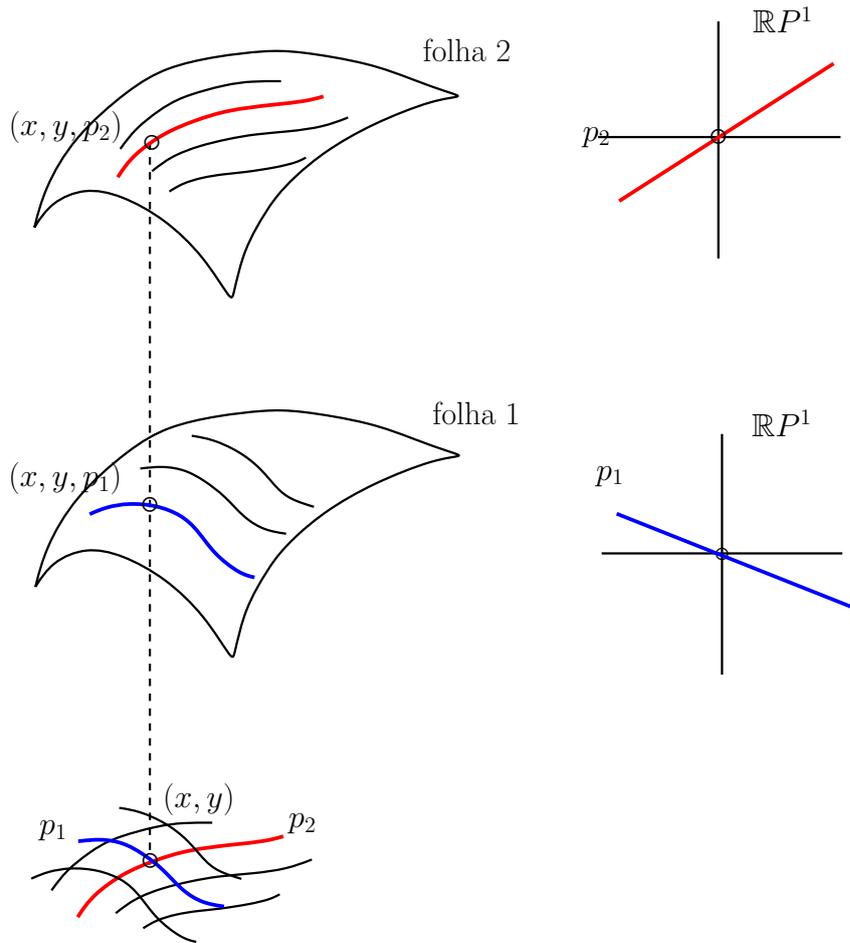


Figura 1.1:

**Prova.**

1. Como  $\xi$  é o levantamento do campo bivaluado  $v = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y}$ , isto é,  $d\pi(\xi(x, y, p)) = v(x, y)$  temos

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial p}.$$

Além disso, como  $\xi$  é um campo de vetores em  $M = F^{-1}(0)$ ,  $\xi$  é ortogonal a  $\nabla F$ .

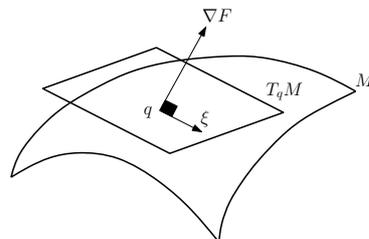


Figura 1.2:

## 1.1. O RECOBRIMENTO DUPLO DE $M$ E O LEVANTAMENTO DE CAMPOS

A condição de tangência de  $\xi$  em  $M$  dá

$$\begin{aligned}\xi \cdot \nabla F &= \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} + C \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \\ &= F_x + pF_y + CF_p = 0\end{aligned}$$

Como  $F_p \neq 0$ ,

$$C = -(F_x + pF_y)/F_p$$

Segue-se que

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y)/F_p \frac{\partial}{\partial p}$$

ou ainda,

$$\xi(x, y, p) = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

2. Vamos mostrar que as singularidades de  $\xi$  estão na reta  $0 \times \mathbb{R}P^1$ , logo a singularidade tem coordenada  $(0, 0, p)$ ,

(a)  $(0, 0, p) \in M$ , então  $F(0, 0, p) = 0$ .

(b)  $\xi(0, 0, p) = 0$ , então  $F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p} = 0$   
 $F_p(0, 0, p) = 0$  e  $F_x + pF_y(0, 0, p) = 0$

Vamos estudar  $F_x + pF_y = 0$  em  $(0, 0, p)$ .

$$\begin{aligned}\phi(p) &= (F_x + pF_y)(0, 0, p) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0, p) \\ &= a_1 p^2 + 2b_1 p + c_1 + p(a_2 p^2 + 2b_2 p + c_2) \\ &= a_2 p^3 + (a_1 + 2b_2)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1\end{aligned}$$

Supondo  $a_2 \neq 0$  a função cúbica  $\phi(p)$  tem uma ou três raízes fora da variedade de codimensão 1 no espaço  $(a_i, b_i, c_i)$  gerado pelos anuladores do discriminante de  $\phi$ .

Agora encontraremos a natureza de cada singularidade de  $\xi$ .

O ponto  $(0, 0, p)$  é singularidade de  $\xi$ . Pela proposição (1.1.1)  $M$  é suave, assim  $F_x(0, 0, p) \neq 0$  ou  $F_y(0, 0, p) \neq 0$ .

Seja  $p_1$  um zero de  $\phi$ . Supondo que  $F_y(0, 0, p_1) \neq 0$ ,  $M$  será localmente o gráfico da função  $y = g(x, p)$ . De fato,

$$F(x, y, p) = F(x, g(x, p), p) = 0$$

## 1.1. O RECOBRIMENTO DUPLO DE $M$ E O LEVANTAMENTO DE CAMPOS

Derivando com respeito a  $x$  e  $p$  obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial p} &= 0\end{aligned}$$

Seja  $\tilde{\xi}$  a projeção de  $\xi$  no plano  $(x, p)$

$$\tilde{\xi}(x, p) = F_p \frac{\partial}{\partial x} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

Vamos a escrever o polinômio de Taylor de ordem 1

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\xi}_2 \frac{\partial}{\partial p}$$

em torno de  $(0, p_1)$

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_1(x, p) &= \alpha_1 x + \alpha_2(p - p_1) + O(2) \\ \tilde{\xi}_2(x, p) &= \beta_1 x + \beta_2(p - p_1) + O(2)\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} &= \tilde{\xi}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\xi}_2 \frac{\partial}{\partial p} \\ &= [\alpha_1 x + \alpha_2(p - p_1) + O(2)] \frac{\partial}{\partial x} + [\beta_1 x + \beta_2(p - p_1) + O(2)] \frac{\partial}{\partial p}.\end{aligned}$$

Vamos agora obter a expressão de  $\tilde{\xi}$  em função de  $(a_i, b_i, c_i)$

$$\tilde{\xi} = F_p(x, g, p) \frac{\partial}{\partial x} - (F_x(x, g, p) + pF_y(x, g, p)) \frac{\partial}{\partial p}$$

Para tal procedemos como segue

Sejam,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\xi}_1 = \frac{\partial}{\partial x} F_p(x, g, p) \\ &= \left( (F_p)_x + (F_p)_y \frac{\partial g}{\partial x} \right) (0, p_1) \\ \alpha_2 &= \frac{\partial}{\partial p} \tilde{\xi}_1 = \frac{\partial}{\partial p} F_p(x, g, p) \\ &= \left( (F_p)_y \frac{\partial g}{\partial p} + (F_p)_p \right) (0, p_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\xi}_2 = -\frac{\partial}{\partial x} (F_x(x, g, p) + pF_y(x, g, p)) \\
 &= -\left( (F_x)_x + (F_y)_x \frac{\partial g}{\partial x} + p \left( (F_y)_x + (F_y)_y \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right) (0, p_1) \\
 \beta_2 &= \frac{\partial}{\partial p} \tilde{\xi}_2 = -\frac{\partial}{\partial p} (F_x(x, g, p) + pF_y(x, g, p)) \\
 &= -\left( (F_x)_y \frac{\partial g}{\partial p} + (F_x)_p + p \left( (F_y)_y \frac{\partial g}{\partial p} + (F_y)_p \right) + F_y \right) (0, p_1) \\
 \alpha_1 &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p} \frac{\partial g}{\partial x} \right) (0, p_1) \\
 \alpha_2 &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p} \frac{\partial g}{\partial p} \right) (0, p_1) \\
 \beta_1 &= -\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + p \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right) (0, p_1) \\
 \beta_2 &= -\left( \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial y} + p \left( \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial g}{\partial p} \right) \right) (0, p_1),
 \end{aligned}$$

onde,

$$\phi(p_1) = (F_x + pF_y)(0, p_1) = \left( -\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} \right) (0, p_1) = \frac{\partial F}{\partial y} \left( p - \frac{\partial g}{\partial x} \right) (0, p_1).$$

como  $\psi(p_1) = 0$  temos,  $\frac{\partial g}{\partial x}(0, p_1) = p_1$ ,  $\frac{\partial g}{\partial p}(0, p_1) = -\left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial p}(0, p_1) = 0$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{\partial}{\partial p} (a_1 p^2 + 2b_1 p + c_1)(0, p_1) + p \left( \frac{\partial}{\partial p} (a_2 p^2 + 2b_2 p + c_2) \right) (0, p_1) \\
 &= 2(a_2 p^2 + (b_2 + a_1)p_1 + b_1) \\
 \alpha_2 &= 0 \\
 \beta_2 &= -\left( \frac{\partial}{\partial p} (a_1 p^2 + 2b_1 p + c_1) \right) (0, p_1) + (a_2 p^2 + 2b_2 p + c_2)(0, p_1) + \\
 &\quad p \left( \frac{\partial}{\partial p} (a_2 p^2 + 2b_2 p + c_2) \right) (0, p_1) \\
 &= -(3a_2 p_1^2 + 2(a_1 + 2b_2)p_1 + (c_2 + 2b_1)) = -\phi'(p_1)
 \end{aligned}$$

Para determinar a natureza das singularidades precisamos conhecer os autovalores da parte linear de  $\xi$ , estes são os autovalores da matriz da parte linear de  $\tilde{\xi}$ ,  $\alpha_1(p_1) = 2(a_2 p_1^2 + (b_2 + a_1)p_1 + b_1)$  e  $-\phi'(p_1)$ .

$$D\tilde{\xi}(0, p_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a_2 p_1^2 + (b_2 + a_1)p_1 + b_1) & 0 \\ \beta_1 & -\phi'(p_1) \end{pmatrix}$$

Como  $p_1$  não é uma raiz repetida da função cúbica  $\phi$ , segue-se que  $\phi'(p_1) \neq 0$ . Como genericamente  $\alpha_1$  e  $\phi$  não têm raízes em comum, obtemos que  $\alpha_1(p_1) \neq 0$ . Assim, as

singularidades de  $\tilde{\xi}$  são nós ou selas.

Existe a possibilidade de que  $\Delta$  tenha dois ramos de zeros, onde o campo pode acumular todos os pontos com a exceção de uma fibra correspondente a eles. Mais geralmente as singularidades terão sempre autovalores diferentes de zero e que são isolados.

Pela expansão de Taylor da função discriminante vemos que os pontos correspondentes  $(0, 0, p)$  satisfazem

$$\begin{aligned}\phi(p) &= (Fx + pFy)(0, 0, p) \\ &= a_2p^3 + (a_1 + 2b_2)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1\end{aligned}$$

e, certamente,  $\phi(p) = 0$ . A condição de que a equação quadrática e a equação cúbica tenham raízes comun, determina uma subvariedade de codimensão 1 do espaço  $(a_i, b_i, c_i)$  que corresponde a um autovalor zero.

■

## 1.2 Redução formal das EDIs

Nesta seção formalizaremos a redução de uma EDI do tipo (1) com  $a = \pm c = y$ .

**Proposição 1.2.1.** *Suponha que  $\phi$  não tem raízes repetidas, e que  $\alpha_1(p)$  e  $\phi(p)$  não têm raízes em comun, então os termos lineares  $a, b, c$  da EDI  $ady^2 + 2bdxdy + cdx^2 = 0$  pode ser reduzida á forma:*

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy \pm ydx^2 \tag{8}$$

**Prova.** Começamos reduzindo a parte linear das funções  $a, b, c$ .

$$a = a_1x + a_2y$$

$$b = b_1x + b_2y$$

$$c = c_1x + c_2y$$

Seja

$$L = (a_1x + a_2y)dy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + (c_1x + c_2y)dx^2$$

Vamos escrever a parte linear com respeito a  $(x, y)$  na forma matricial

$$L = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^2 \\ 2dxdy \\ dy^2 \end{pmatrix}$$

Por abuso de notação, vamos escrever

$$L = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

Considerando a mudança de coordenadas lineares

$$\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned} dx &= \alpha dX + \beta dY \\ dy &= \gamma dX + \delta dY \\ dx^2 &= \alpha^2 dX^2 + 2\alpha\beta dXdY + \beta^2 dY^2 \\ dx dy &= \alpha\gamma dX^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma) dXdY + \beta\delta dY^2 \\ dy^2 &= \gamma^2 dX^2 + 2\gamma\delta dXdY + \delta^2 dY^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} dx^2 \\ 2dx dy \\ dy^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & 2(\alpha\delta + \beta\gamma) & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & 2\gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^2 \\ dXdY \\ dY^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^2 \\ 2dXdY \\ dY^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pondo

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}, e \quad W = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} S &= ULW \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim nas novas coordenadas  $(X, Y)$  a parte linear se escreve como

$$L_{XY} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} dX^2 \\ 2dXdY \\ dY^2 \end{pmatrix}$$

$$L_{XY} = AdY^2 + 2BdXdY + CdX^2$$

com

$$A = A_1X + A_2Y$$

$$B = B_1X + B_2Y$$

$$C = C_1X + C_2Y$$

onde

$$A_1 = \delta^2(\alpha a_1 + \gamma a_2) + 2\delta\beta(\alpha b_1 + \gamma b_2) + \beta^2(\alpha c_1 + \gamma c_2)$$

$$A_2 = a_2\delta^3 + (2b_2 + a_1)\delta^2\beta + (2b_1 + c_2)\delta\beta^2 + c_1\beta^3$$

$$B_1 = \gamma\delta(\alpha a_1 + \gamma a_2) + (\alpha\delta + \gamma\beta)(\alpha b_1 + \gamma b_2) + \alpha\beta(\alpha c_1 + \gamma c_2)$$

$$B_2 = \gamma\delta(\beta a_1 + \delta a_2) + (\alpha\delta + \gamma\beta)(\beta b_1 + \delta b_2) + \alpha\beta(\beta c_1 + \delta c_2)$$

$$C_1 = a_2\gamma^3 + (2b_2 + a_1)\gamma^2\alpha + (2b_1 + c_2)\gamma\alpha^2 + c_1\alpha^3$$

$$C_2 = \gamma^2(\beta a_1 + \delta a_2) + 2\gamma\alpha(\beta b_1 + \delta b_2) + \alpha^2(\beta c_1 + \delta c_2)$$

Para conseguir nosso objetivo precisamos de uma condição genérica para qualquer mudança de coordenadas  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  tal que  $C_1 = 0$  e  $A_1 = 0$ .

Lembrando que a expressão de  $\phi$  proporciona os zeros cúbicos do levantamento de  $\xi$  em  $0 \times \mathbb{R}P^1$ , então

$$\begin{aligned} A_2 &= a_2\delta^3 + (2b_2 + a_1)\delta^2\beta + (2b_1 + c_2)\delta\beta^2 + c_1\beta^3 \\ &= \beta^3 \left( a_2 \frac{\delta^3}{\beta^3} + (2b_2 + a_1) \frac{\delta^2}{\beta^2} + (2b_1 + c_2) \frac{\delta}{\beta} + c_1 \right) \\ &= \beta^3 \phi \left( \frac{\delta}{\beta} \right) \\ C_1 &= a_2\gamma^3 + (2b_2 + a_1)\gamma^2\alpha + (2b_1 + c_2)\gamma\alpha^2 + c_1\alpha^3 \\ &= \alpha^3 \left( a_2 \frac{\gamma^3}{\alpha^3} + (2b_2 + a_1) \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + (2b_1 + c_2) \frac{\gamma}{\alpha} + c_1 \right) \\ &= \alpha^3 \phi \left( \frac{\gamma}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

Como  $\phi$  tem pelo menos uma raiz, denotamos esta por  $p_1$ .

Pondo  $\gamma = \alpha p_1$ , temos

$$C_1 = \alpha^3 \phi \left( \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha^3 \phi \left( \frac{\alpha p_1}{\alpha} \right) = 0$$

Observe que não se pode tomar  $\delta = \beta p_1$ , uma vez que a mudança de coordenadas se escreveria como

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha p_1 \\ \beta & \beta p_1 \end{pmatrix}$$

que tem determinante zero. Substituindo o valor de  $\gamma$  nas expressões de  $A_1$  e  $C_2$  temos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha \left\{ \delta^2 (a_1 + p_1 a_2) + 2\delta\beta (b_1 + p_1 b_2) + \beta^2 (c_1 + p_1 c_2) \right\} \\ C_2 &= \alpha^2 \left\{ (a_1 p_1^2 + 2b_1 p_1 + c_1)\beta + (a_2 p_1^2 + 2b_2 p_1 + c_2)\delta \right\} \end{aligned}$$

1. Genericamente temos que  $C_2 \neq 0$ , pois se  $C_2 = 0$  temos que

$$(a_1 p_1^2 + 2b_1 p_1 + c_1)\beta + (a_2 p_1^2 + 2b_2 p_1 + c_2)\delta = 0.$$

$$F_x(0, 0, p_1) = a_1 p_1^2 + 2b_1 p_1 + c_1$$

$$F_y(0, 0, p_1) = a_2 p_1^2 + 2b_2 p_1 + c_2$$

Logo,

$$F_x(0, 0, p_1)\beta + F_y(0, 0, p_1)\delta = 0$$

O que leva a uma contradição pois,  $F_x$  e  $F_y$  não se anulam simultaneamente (do contrario a função discriminante é degenerada).

Vamos supor que  $F_y(0, 0, p_1) \neq 0$  segue que

$$\delta = -\frac{F_x(0, 0, p_1)\beta}{F_y(0, 0, p_1)}$$

A mudança de coordenadas ficaria

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha p_1 \\ \beta & -\frac{F_x(0, 0, p_1)\beta}{F_y(0, 0, p_1)} \end{pmatrix}$$

O determinante desta matriz é

$$-\alpha\beta \frac{F_x(0, 0, p_1)}{F_y(0, 0, p_1)} - \alpha\beta p_1 = \frac{-\alpha\beta}{F_y(0, 0, p_1)} \phi(p_1) = 0$$

O que não pode acontecer.

Assim, genericamente para  $\beta$  e  $\delta$  temos que

$$F_x\beta + F_y\delta \neq 0$$

2. Genericamente  $A_1 = 0$ .

De fato,  $A_1 = 0$  se, e somente se,

$$\delta^2(a_1 + p_1a_2) + 2\delta\beta(b_1 + p_1b_2) + \beta^2(c_1 + p_1c_2) = 0$$

substituindo  $\delta = \beta p_1$

$$A_1 = \alpha\beta^2\phi(p_1) = 0$$

já que  $p_1$  é raiz de  $\phi$ .

Logo se  $\delta = \beta p_1$ ,  $A_1 = 0$ .

A equação tem outra solução para  $\delta = \lambda\beta$ , se estas duas soluções coincidem

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{-2(b_2p_1 + b_1)\beta \pm \sqrt{4(b_2p_1 + b_1) - 4(a_2p_1 + a_1)(c_2p_1 + c_1)}}{2(a_2p_1 + a_1)} \\ \beta p_1 &= -\frac{(b_2p_1 + b_1)\beta}{(a_2p_1 + a_1)} \\ p_1 &= -\frac{(b_2p_1 + b_1)}{(a_2p_1 + a_1)}\end{aligned}$$

Equivalentemente

$$a_2p_1^2 + (a_1 + b_2)p_1 + b_1 = 0$$

$$\alpha_1(p_1) = 2(a_2p_1^2 + (b_2 + a_1)p_1 + b_1) = 0$$

Se  $p_1 = \lambda$ , onde  $p_1$  é uma raiz de  $\phi$  e  $\alpha_1$ . Não é generico, logo podemos assumir que  $p_1 \neq \lambda$ , e  $\delta = \lambda\beta$  anula a  $A_1$  na nova EDI.

### 3. Genericamente $A_2 \neq 0$

Como  $A_2 = \beta^3\phi(\frac{\delta}{\beta})$ , e pela condição de que  $\phi$  não tem raiz repetida, genericamente para a escolha de  $\beta$  tal que  $\lambda$  não é raiz de  $\phi$ . Por tanto  $A_2 \neq 0$ .

Por uma nova mudança de escala dada por  $A_2 = 1$ , e  $C_2 = \pm 1$  a equação

$$L = A_2YdY^2 + 2(B_1X + B_2Y)dXdY + C_2YdX^2$$

Pode ser escrita como

$$L = YdY^2 + 2(B_1X + B_2Y)dXdY \pm YdX^2$$

Considerando que a mudança de coordenadas feita foi linear, por abuso de notação vamos substituir  $(X, Y) \rightarrow (x, y)$

$$L = ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy \pm ydx^2$$

■

**Observação 1.2.2.** Destaco aqui que as novas variáveis  $x$  e  $y$  não são as originais da equação (1).

### 1.2.1 Uma redução adicional da EDI

Pela proposição (1.2.1), consideraremos a EDI da forma

$$(y + a(x, y))dy^2 + 2(b_1x + b_2y + b(x, y))dxdy + (\pm y + c(x, y))dx^2 = 0 \quad (9)$$

onde  $a, b, c$  são funções suaves sem termos constantes e lineares.

Mostraremos que esta EDI pode ser reduzida formalmente, não a uma forma linear, mas a uma forma com os coeficientes de  $dx^2$  e  $dy^2$  lineares.

Procederemos como no caso de campos de vetores univaluados seguindo a teoria de Poincaré, de transformar, na classe de série de potências formais, um campo vetorial "não ressonante" para sua forma linear em um ponto singular por um difeomorfismo formal.

Este processo consiste em anular sucessivamente todos os termos de grau ( $k \geq 2$ ) na equação. Suponhamos que neste processo todos os graus são menores ou iguais a  $k - 1$  assim temos uma nova EDI com

$$\begin{aligned} a &= a_k + O(k+1) \\ c &= c_k + O(k+1) \end{aligned}$$

onde  $a_k$  e  $c_k$  são polinômios homogêneos de grau  $k$ . Consideramos a mudança de coordenadas  $H_k$  em  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$\begin{aligned} x &= X + p_k \\ y &= Y + q_k \end{aligned}$$

onde  $p_k$  e  $q_k$  são polinômios de grau  $k$  em  $X$  e  $Y$ .

$$L = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ \pm 1 & b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^2 \\ 2dxdy \\ dy^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(x, y) & b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^2 \\ 2dxdy \\ dy^2 \end{pmatrix}$$

O difeomorfismo  $H_k$  dará uma nova EDI,

$$\begin{aligned} a_k(x, y) &= \sum_{i=0}^k a_{i,k} x^{k-i} y^i \\ a_k(X + p_k, Y + q_k) &= \sum_{i=0}^k a_{i,k} (X + p_k)^{k-i} (Y + q_k)^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^k a_{i,k} X^{k-i} Y^i + O(k+1) \\
&= a_k(X, Y) + O(k+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dx &= dX + \frac{\partial p_k}{\partial X} dX + \frac{\partial p_k}{\partial Y} dY \\
dy &= dY + \frac{\partial q_k}{\partial X} dX + \frac{\partial q_k}{\partial Y} dY
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} dx^2 \\ dx dy \\ dy^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + 2\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial p_k^2}{\partial X^2} & 2\frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial Y} + 2\frac{\partial p_k}{\partial Y} & \frac{\partial p_k^2}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial q_k}{\partial X} + \frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial X} & 1 + \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial X} + \frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial X} & \frac{\partial p_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial Y} \\ \frac{\partial q_k^2}{\partial X^2} & 2\frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + 2\frac{\partial q_k}{\partial X} & 1 + 2\frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial q_k^2}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^2 \\ dX dY \\ dY^2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} dx^2 \\ 2dx dy \\ dy^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + 2\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial p_k^2}{\partial X^2} & 2\frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial Y} + 2\frac{\partial p_k}{\partial Y} & \frac{\partial p_k^2}{\partial Y^2} \\ 2\frac{\partial q_k}{\partial X} + 2\frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial X} & 2(1 + \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial X} + \frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial X}) & 2(\frac{\partial p_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial Y}) \\ \frac{\partial q_k^2}{\partial X^2} & 2\frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + 2\frac{\partial q_k}{\partial X} & 1 + 2\frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial q_k^2}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^2 \\ dX dY \\ dY^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + 2\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial p_k^2}{\partial X^2} & \frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} & \frac{\partial p_k^2}{\partial Y^2} \\ 2\frac{\partial q_k}{\partial X} + 2\frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial X} & 1 + \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial X} + \frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial X} & 2\frac{\partial p_k}{\partial Y} + 2\frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial Y} \\ \frac{\partial q_k^2}{\partial X^2} & \frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial q_k}{\partial X} & 1 + 2\frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial q_k^2}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^2 \\ 2dX dY \\ dY^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 + 2\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial p_k^2}{\partial X^2} & \frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} & \frac{\partial p_k^2}{\partial Y^2} \\ 2\frac{\partial q_k}{\partial X} + 2\frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial X} & 1 + \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial X} + \frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial X} & 2\frac{\partial p_k}{\partial Y} + 2\frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial Y} \\ \frac{\partial q_k^2}{\partial X^2} & \frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial q_k}{\partial X} & 1 + 2\frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial q_k^2}{\partial Y^2} \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ \pm 1 & b_2 & 1 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & R_1 & T_1 \\ S_2 & R_2 & T_2 \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}
S_1 &= 2b_1 \left( \frac{\partial q_k}{\partial X} + \frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial X} \right) \\
R_1 &= b_1 \left( 1 + \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial X} + \frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial X} \right) \\
T_1 &= 2b_1 \frac{\partial p_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial Y} \\
S_2 &= \pm \left( 1 + 2\frac{\partial p_k}{\partial X} + \frac{\partial p_k^2}{\partial X^2} \right) + 2b_2 \left( \frac{\partial q_k}{\partial X} + \frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial X} \right) + \frac{\partial q_k^2}{\partial X^2} \\
R_2 &= \pm \left( \frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \right) + b_2 \left( 1 + \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial X} + \frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial X} \right) + \frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial q_k}{\partial X} \\
T_2 &= \pm \left( \frac{\partial p_k^2}{\partial Y^2} \right) + 2b_2 \left( \frac{\partial p_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial Y} \right) + 1 + 2\frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial q_k^2}{\partial Y^2}
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{pmatrix} c & b & a \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} c_k + W_1 & b + W_2 & a_k + W_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_k & q_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & R_1 & T_1 \\ S_2 & R_2 & T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm q_k + S(X, Y) & b_1 p_k + b_2 q_k + R(X, Y) & q_k + T(X, Y) \end{pmatrix}$$

onde  $W_1, W_2, W_3, S, R, T$  têm grau maior que  $k$

juntando todos os resultados temos

$$L = \begin{pmatrix} \pm Y + C(X, Y) & B(X, Y) & Y + A(X, Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^2 \\ 2dXdY \\ dY^2 \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} A(X, Y) &= 2b_1 X \frac{\partial p_k}{\partial Y} + X \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial Y} \pm Y \frac{\partial p_k^2}{\partial Y} + 2b_2 Y \left( \frac{\partial p_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial Y} \right) + 2Y \frac{\partial q_k}{\partial Y} + Y \frac{\partial q_k^2}{\partial Y} + a_k + q_k \\ B(X, Y) &= b_1 X \left( 1 + \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial X} + \frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial X} \right) \\ &+ b_2 Y \left( 1 + \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial X} + \frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \frac{\partial q_k}{\partial X} \right) \pm Y \left( \frac{\partial p_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial Y} + \frac{\partial p_k}{\partial Y} \right) \\ &+ Y \frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial q_k}{\partial Y} + Y \frac{\partial q_k}{\partial X} + b_k + b_1 p_k + b_2 q_k \\ C(X, Y) &= 2b_1 X \left( \frac{\partial q_k}{\partial X} + \frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial X} \right) + 2b_2 Y \left( \frac{\partial q_k}{\partial X} + \frac{\partial q_k}{\partial X} \frac{\partial p_k}{\partial X} \right) \pm 2Y \frac{\partial p_k}{\partial X} \pm Y \frac{\partial p_k^2}{\partial X} + Y \frac{\partial q_k^2}{\partial X} + c_k \pm q_k \end{aligned}$$

E os termos de grau  $k$  são dados por

$$A_k = q_k + 2(b_1 X + b_2 Y) \frac{\partial p_k}{\partial Y} + 2Y \frac{\partial q_k}{\partial Y} + a_k \quad (10)$$

$$C_k = \pm q_k + 2(b_1 X + b_2 Y) \frac{\partial q_k}{\partial X} \pm 2Y \frac{\partial p_k}{\partial X} + c_k \quad (11)$$

Aqui  $p_k, q_k$  são polinômios homogêneos de ordem  $k$  nas variáveis  $X$  e  $Y$  que podem ser escritas na forma

$$p_k = \sum_{i=0}^k p_{i,k} X^{k-i} Y^i$$

$$q_k = \sum_{i=0}^k q_{i,k} X^{k-i} Y^i$$

Procurando  $p_k$  e  $q_k$  (isto é  $p_{i,k}$  e  $q_{i,k}$ , com  $(2k+1)$  variáveis) de modo que a mudança de

coordenadas  $H_k$  satisfazem as equações (10), (11), então  $A_k = C_k = 0$

$$\begin{pmatrix} q_k + 2(b_1X + b_2Y) \frac{\partial p_k}{\partial Y} + 2Y \frac{\partial q_k}{\partial Y} \\ \pm q_k + 2(b_1X + b_2Y) \frac{\partial q_k}{\partial X} \pm 2Y \frac{\partial p_k}{\partial X} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_k \\ c_k \end{pmatrix}$$

$$M_k \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_k \\ c_k \end{pmatrix}$$

Afirmção: A matriz  $M_k$  só depende de  $b_1, b_2, k$

De fato, da primeira equação

$$\begin{aligned} - \sum_{i=0}^k a_{i,k} X^{k-i} Y^i &= \sum_{i=0}^k q_{i,k} X^{k-i} Y^i + 2(b_1X + b_2Y) \sum_{i=1}^k i p_{i,k} X^{k-i} Y^{i-1} + 2Y \sum_{i=1}^k i q_{i,k} X^{k-i} Y^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^k q_{i,k} X^{k-i} Y^i + 2 \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) b_1 p_{i+1,k} X^{k-i} Y^i + 2 \sum_{i=1}^k i b_2 p_{i,k} X^{k-i} Y^i \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^k i q_{i,k} X^{k-i} Y^i \\ &= q_{0,k} X^k + q_{k,k} Y^k + 2b_1 p_{1,k} X^k + \sum_{i=1}^{k-1} 2((i+1)b_1 p_{i+1,k} + i b_2 p_{i,k} + i q_{i,k}) X^{k-i} Y^i \\ &\quad + 2k b_2 p_{k,k} Y^k + 2k q_{k,k} Y^k \end{aligned}$$

Da segunda equação

$$\begin{aligned} - \sum_{i=0}^k c_{i,k} X^{k-i} Y^i &= \pm \sum_{i=0}^k q_{i,k} X^{k-i} Y^i + 2(b_1X + b_2Y) \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) q_{i,k} X^{k-i-1} Y^i \\ &\quad \pm 2Y \sum_{i=0}^{k-i} (k-i) p_{i,k} X^{k-i-1} Y^i \\ &= \pm \sum_{i=0}^k q_{i,k} X^{k-i} Y^i + 2 \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) b_1 q_{i,k} X^{k-i} Y^i + 2 \sum_{i=1}^k (k-i+1) b_2 q_{i-1,k} X^{k-i} Y^i \\ &\quad \pm 2 \sum_{i=1}^k (k-i+1) p_{i-1,k} X^{k-i} Y^i \\ &= \pm q_{0,k} X^k \pm q_{k,k} Y^k + 2k b_1 q_{0,k} X^k + 2b_2 q_{k-1,k} Y^k \\ &\quad \pm 2(k+1) p_{0,k} X^k \pm 2p_{k-1,k} Y^k \\ &\quad \sum_{i=1}^{k-1} \left[ \pm q_{i,k} + 2((k-i)b_1 q_{i,k} + (k-i+1)(b_2 q_{i-1,k} \pm p_{i-1,k})) \right] X^{k-i} Y^i \end{aligned}$$

Logo, o determinante é um polinômio não nulo em termos de  $b_1, b_2$ . Assim, o conjunto de pares  $(b_1, b_2)$  que anulam  $\text{Det}(M_k)$  tem medida zero em  $\mathbb{R}^2$

**Definição 1.3.** O par  $(b_1, b_2)$  é dito ressonante, se existe um inteiro  $k \geq 2$ , tal que a matriz  $M_k$  é singular.

Podemos enunciar o seguinte teorema.

**Proposição 1.2.3.** Se  $(b_1, b_2)$  é um par não ressonante, então a EDI (9) pode ser reduzida por um difeomorfismo formal a

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y + b(x, y))dxdy \pm ydx^2 = 0,$$

onde  $b(x, y)$  é uma série de potências formal não constante e que não tem termos lineares.

**Prova.** Se o par  $(b_1, b_2)$  é não ressonante, então o sistema linear

$$M_k \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_k \\ c_k \end{pmatrix}$$

tem uma única solução. Como o difeomorfismo correspondente  $H_k$  anula os termos de ordem  $k$  em  $a$  e  $c$ , obtemos o sistema desejado. ■

### 1.3 Topologia das formas normais

Na seção anterior, mostramos que em geral uma EDI (1) pode ser escrita na forma

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy \pm ydx^2 = 0$$

Uma EDI desta forma, divide o plano de parâmetros  $(b_1, b_2)$  de acordo com o tipo de singularidade do campo levantado  $\xi$ . Primeiro notemos que a mudança de coordenadas  $(x, y) \rightarrow (-x, y)$  produz uma EDI equivalente a EDI do tipo (1) dada pelo par  $(b_1, -b_2)$ . A nova EDI se escreve como  $L = ydy^2 + 2(b_1x - b_2y)dxdy \pm ydx^2$ . Temos assim uma simetria com respeito ao eixo  $b_1$  no plano  $(b_1, b_2)$ .

O plano  $(b_1, b_2)$  é separado por três curvas que são os casos especiais quando  $\phi$  tem raiz dupla, para  $\alpha_1$  e  $\phi$  tenham uma raiz em comum e a curva não é de Morse, isto é fazendo a prova da primeira proposição resolvemos o sistema (6) quando a superfície  $M$  não é suave, obtendo que  $p = \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{2(b_2a_1 - b_1a_2)}$  onde precisamos que  $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$ , assim para que a função discriminante  $\Delta$  não tenha uma singularidade de Morse precisamos de  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ .

1. Vamos estudar a divisão do espaço de parâmetros  $(b_1, b_2)$  para a EDI do tipo (1) reduzida à equação  $ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy - ydx^2 = 0$  como  $a(x, y) = a_1x + a_2y$ ,  $b(x, y) = b_1x + b_2y$ , e  $c(x, y) = c_1x + c_2y$ , temos que  $a_1 = c_1 = 0$  e  $a_2 = -c_2 = 1$ .

Lembrando que

$$\begin{aligned}\phi(p) &= a_2 p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1 \\ &= p^3 + 2b_2 p^2 + (2b_1 - 1)p \\ &= p(p^2 + 2b_2 p + 2b_1 - 1)\end{aligned}$$

a) Uma curva que não é de Morse:  $b_1 = 0$

b) A curva  $\phi$  tem uma raiz dupla:  $2b_1 - 1 = 0$  ou  $b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 + 1)$

Assim para  $2b_1 - 1 = 0$  obtemos  $\phi(p) = p^2(p + 2b_2)$

Outro caso é quando o discriminante da parte quadrática é zero, isto é,  $b_2^2 - (2b_1 - 1) = 0$ , onde  $b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 + 1)$

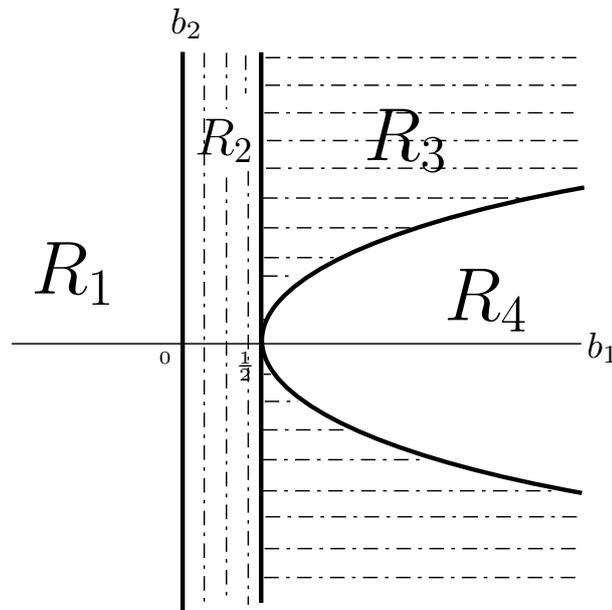
c) As curvas  $\alpha_1$  e  $\phi$  tem uma raiz em comum:  $b_1 = 0$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2(a_2 p^2 + (b_2 + a_1)p + b_1) \\ &= 2(p^2 + b_2 p + b_1)\end{aligned}$$

Observamos que  $p = 0$  é uma raiz de  $\phi$ . Logo para que seja uma raiz de  $\alpha_1$ , precisamos de  $b_1 = 0$

A figura (1.3) mostra a divisão do plano de parâmetros  $(b_1, b_2)$ .

Figura 1.3:



Vamos analisar o tipo de cada uma das singularidades em cada uma dessas regiões, pela

proposição (1.1.2) temos que os autovalores de  $\tilde{\xi}$  são  $\alpha_1(p)$  e  $\beta_2(p)$ , onde

$$\begin{aligned}\alpha_1(p) &= 2(p^2 + b_2p + b_1) \\ \beta_2(p) &= -(3p^2 + 4b_2p - 1 + 2b_1)\end{aligned}$$

As raízes de  $\phi(p)$  são  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}$ ,  $p_3 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1}$  Assim em cada singularidade os autovalores são dados por

$$\begin{cases} \alpha_1(p_1) = 2b_1 \\ \beta_2(p_1) = 1 - 2b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1(p_2) = 2(-b_2p_2 - b_1 + 1) \\ \beta_2(p_2) = -2(-b_2p_2 - 2b_1 + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1(p_3) = 2(-b_2p_3 - b_1 + 1) \\ \beta_2(p_3) = -2(-b_2p_3 - 2b_1 + 1) \end{cases}$$

Vamos determinar a natureza das singularidades em cada uma das regiões  $R_i$  com  $1 \leq i \leq 4$

(a) Na região  $R_1$ ,  $b_1 < 0$

(a<sub>1</sub>) A singularidade  $p_1 = 0$  é uma sela.

De fato,  $\alpha_1(p_1) = 2b_1 < 0$ ,  $\beta_2(p_1) = 1 - 2b_1 > 1$ . Por tanto  $Det(D\xi(p_1)) < 0$ .

(a<sub>2</sub>) A singularidade  $p_2$  é uma sela.

De fato,  $\alpha_1(p_2) > -2b_2p_2 + 1 > 0$ ,  $\beta_2(p_2) = -(\alpha_1(p_2) - 2b_1) < 0$ . Segue-se que  $Det(D\xi(p_2)) = \alpha_1(p_2) \cdot \beta_2(p_2) = -\alpha_1^2 + 2b_1 < 0$

(a<sub>3</sub>) A singularidade  $p_3$  é uma sela.

De fato, procedendo-se como no caso  $p_2$  concluímos que  $p_3$  é uma sela.

Assim as singularidades na região  $R_1$  são todas do tipo sela.

(b) Na região  $R_2$ ,  $0 < b_1 < 1/2$

com  $p_3 < p_1 < p_2$  e  $\alpha_1(p_1)\beta_2(p_1) > 0$ , por enquanto  $\alpha_1\beta_2 < 0$  para  $p_2$  e  $p_3$ .

$$\begin{aligned}\alpha_1(p_1) &= 2b_1 > 0 \\ \beta_2(p_1) &= 1 - 2b_1 > 0 \\ \alpha_1(p_2) &= 2(-b_2p_2 - b_1 + 1) \\ \beta_2(p_2) &= -2(-b_2p_2 - 2b_1 + 1) = -(\alpha_1 - 2b_1)\end{aligned}$$

Assim, temos em  $0 < b_1 < 1/2$  duas selas e um nó entre elas.

(c) Na região  $R_3$ ,  $b_1 > 1/2$  e  $b_1 < 1/2(b_2^2 + 1)$

(c<sub>1</sub>) A singularidade  $p_1 = 0$  é uma sela.

De fato,  $\alpha_1(p_1) = 2b_1 > 0$ ,  $\beta_2(p_1) = 1 - 2b_1 < 0$ . Segue-se que  $Det(D\xi(p_2)) < 0$

(c<sub>2</sub>) A singularidade  $p_2$  é um nó.

De fato,  $\alpha_1(p_2) = 2(-b_2p_2 - b_1 + 1) < (-b_2p_2 + 1/2) < 0$ ,  $\beta_2(p_2) = -2(-b_2p_2 - 2b_1 + 1) < 2b_2p_2 < 0$ . Segue-se que  $Det(D\xi(p_2)) > 0$ .

(c<sub>3</sub>) A singularidade  $p_3$  é uma sela.

De fato,  $\alpha_1(p_3) = 2(-b_2p_2 - b_1 + 1) = 2(b_2^2 + b_2\sqrt{b_2^2 - 2b_1 + 1} - b_1 + 1) > 2b_1 > 0$ ,  $\beta_2(p_3) = -2(-b_2p_2 - 2b_1 + 1) = -\alpha_1 + 2b_1 < 0$ . Segue-se que  $Det(D\xi(p_3)) < 0$ .

(d) Na região  $R_4$ ,  $b_1 > 1/2(b_2^2 + 1)$ . O campo tem uma única singularidade  $p_1 = 0$  que é uma sela. De fato,  $\alpha_1(p_1) = 2b_1 > 0$ ,  $\beta_2(p_1) = 1 - 2b_1 < 0$ . Logo em  $R_4$ ,  $p_1$  é uma sela.

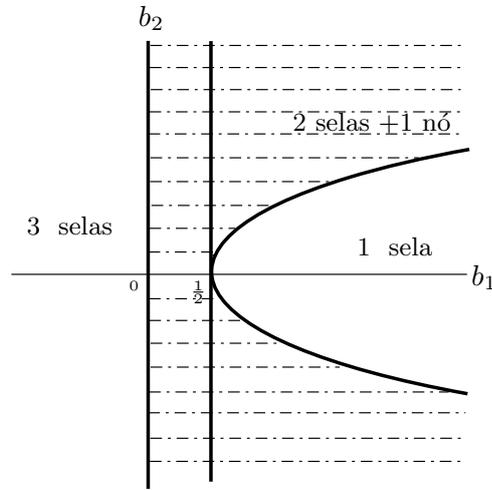


Figura 1.4: Partição do plano  $(b_1, b_2)$

**Observação 1.3.1.** A variação dos parâmetros  $b_1$  e  $b_2$  mostram que ao cruzar as fronteiras das regiões do plano de parâmetros  $(b_1, b_2)$  algumas singularidades mudam de tipo. O comportamento das singularidades sobre as fronteiras das regiões não é genérico e por esse motivo não foram estudados aqui.

2. Vamos estudar a divisão do espaço de parâmetros  $(b_1, b_2)$  para a EDI do tipo (1) reduzida à equação

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + ydx^2 = 0$$

como  $a(x, y) = a_1x + a_2y$ ,  $b(x, y) = b_1x + b_2y$ , e  $c(x, y) = c_1x + c_2y$ , temos que  $a_1 = c_1 = 0$  e  $a_2 = c_2 = 1$

Lembrando que

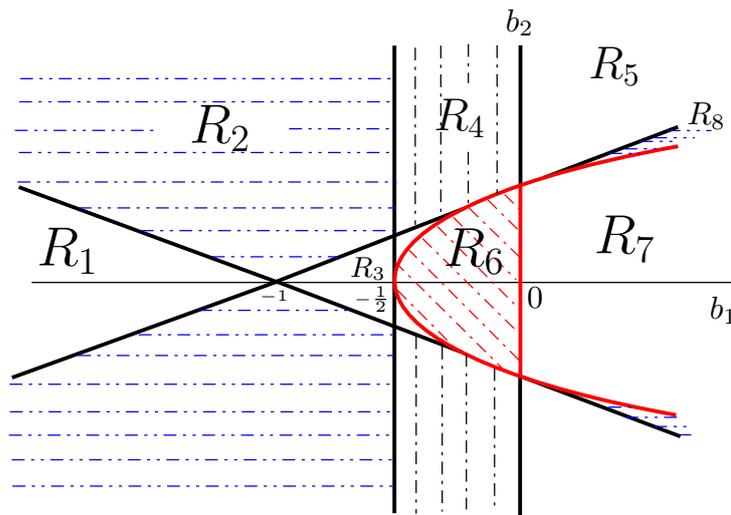
$$\begin{aligned} \phi(p) &= a_2p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1 \\ &= p^3 + 2b_2p^2 + (2b_1 + 1)p \\ &= p(p^2 + 2b_2p + 2b_1 + 1) \end{aligned}$$

a) Uma curva que não é de Morse:  $b_1 = 0$

- b) A curva  $\phi$  tem uma raiz dupla:  $2b_1 + 1 = 0$  ou  $b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 - 1)$   
 Assim para  $2b_1 + 1 = 0$  obtemos  $\phi(p) = p^2(p + 2b_2)$   
 Outro caso é quando o discriminante da parte quadrática é zero, isto é,  $b_2^2 - (2b_1 + 1) = 0$ ,  
 onde  $b_1 = \frac{1}{2}(b_2^2 - 1)$
- c) As curvas  $\alpha_1$  e  $\phi$  tem uma raiz em comum:  $b_1 = 0$  ou  $b_1 = \pm b_2 - 1$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2(a_2 p^2 + (b_2 + a_1)p + b_1) \\ &= 2(p^2 + b_2 p + b_1)\end{aligned}$$

Observamos que  $p = 0$  é uma raiz de  $\phi$ . Logo para que seja uma raiz de  $\alpha_1$ , é necessário que  $b_1 = 0$ , as raízes da parte quadrática de  $\phi$ , são  $p = -b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}$ . Logo para que seja uma raiz de  $\alpha_1$  é necessário que  $(-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1})^2 + b_2(-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}) + b_1 = 0$ , o que dá  $(b_1 + 1)^2 = b_2^2$  assim,  $b_1 = \pm b_2 - 1$ .



Vamos a analisar o tipo de cada uma das singularidades em cada uma dessas regiões. Pela proposição (1.1.2) os autovalores de  $\tilde{\xi}$  são dados por  $\alpha_1(p)$  e por  $\beta_2(p)$ .

$$\begin{aligned}\alpha_1(p) &= 2(p^2 + b_2 p + b_1) \\ \beta_2(p) &= -(3p^2 + 4b_2 p + 1 + 2b_1)\end{aligned}$$

As raízes de  $\phi(p)$  são dadas por:

$$p_1 = 0, p_2 = -b_2 + \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}, p_3 = -b_2 - \sqrt{b_2^2 - 2b_1 - 1}$$

Para cada singularidade temos os seguintes autovalores

$$\begin{cases} \alpha_1(p_1) = 2b_1 \\ \beta_2(p_1) = -1 - 2b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1(p_2) = -2(b_2p_2 + b_1 + 1) \\ \beta_2(p_2) = 2(b_2p_2 + 2b_1 + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1(p_3) = -2(b_2p_3 + b_1 + 1) \\ \beta_2(p_3) = 2(b_2p_3 + 2b_1 + 1) \end{cases}$$

Vamos determinar a natureza das singularidades em cada uma das regiões  $R_i$ ,  $1 \leq i \leq 8$ .

(a) Na região  $R_1$ ,  $b_1 < b_2 - 1$  e  $b_1 < -b_2 - 1$  com  $b_1 < -1$  e  $b_2 > 0$

(a<sub>1</sub>) A singularidade  $p_1 = 0$  é uma sela.

De fato,  $\alpha_1(p_1) = 2b_1 < -2 < 0$ ,  $\beta_2(p_1) = -1 - 2b_1 > 1 > 0$ . Por tanto  $Det(D\xi(p_1)) < 0$ .

(a<sub>2</sub>) A singularidade  $p_2$  é uma sela.

De fato,  $p_2 < 0$ ,  $\alpha_1(p_2) > -2b_2p_2 > 0$ ,  $\beta_2(p_2) < 2b_2p_2 < 0$ . Segue-se que  $Det(D\xi(p_2)) = \alpha_1(p_2) \cdot \beta_2(p_2) < 0$

(a<sub>3</sub>) A singularidade  $p_3$  é uma sela.

De fato, procedendo-se como no caso  $p_2$  concluímos que  $p_3$  é uma sela.

Assim as singularidades na região  $R_1$  são todas do tipo sela.

(b) Na região  $R_2$ ,  $b_1 > -b_2 - 1$ ,  $b_1 < b_2 - 1$  com  $b_1 < -1/2$  e  $b_2 > 0$

(b<sub>1</sub>) A singularidade  $p_1 = 0$  é uma sela.

De fato,  $\alpha_1(p_1) = 2b_1 < 0$ ,  $\beta_2(p_1) = -1 - 2b_1 > 0$ . Por tanto  $Det(D\xi(p_1)) < 0$ .

(b<sub>2</sub>) A singularidade  $p_2$  é um nó.

De fato,  $p_2 > 0$ ,  $\alpha_1(p_2) < -2b_2p_2 + 2b_2 < 0$ ,  $\beta_2(p_2) < 2(2b_1 + 1) < 0$ . Segue-se que  $Det(D\xi(p_2)) = \alpha_1(p_2) \cdot \beta_2(p_2) > 0$

(b<sub>3</sub>) A singularidade  $p_3$  é uma sela.

De fato,  $p_3 < 0$ ,  $\alpha_1(p_3) > -2b_2p_2 - 2b_2 > 0$ ,  $\beta_2(p_3) < 2b_2p_2 < 0$ . Segue-se que  $Det(D\xi(p_3)) = \alpha_1(p_3) \cdot \beta_2(p_3) < 0$

Assim as singularidades na região  $R_2$  são dois do tipo sela e um nó.

(c) Na região  $R_3$ ,  $b_1 > -b_2 - 1$ ,  $b_1 > b_2 - 1$  e  $b_2 > 0$

(c<sub>1</sub>) A singularidade  $p_1 = 0$  é uma sela.

De fato,  $\alpha_1(p_1) = 2b_1 < 0$ ,  $\beta_2(p_1) = -1 - 2b_1 > 0$ . Por tanto  $Det(D\xi(p_1)) < 0$ .

(c<sub>2</sub>) A singularidade  $p_2$  é um nó.

De fato,  $p_2 > 0$ ,  $\alpha_1(p_2) < -2b_2p_2 + 2b_2 < 0$ ,  $\beta_2(p_2) \leq 2(2b_1 + 1) < 0$ . Segue-se que  $Det(D\xi(p_2)) = \alpha_1(p_2) \cdot \beta_2(p_2) > 0$

(c<sub>3</sub>) A singularidade  $p_3$  é um nó.

De fato, procedendo-se como no caso  $p_2$  concluímos que  $p_3$  é um nó.

Assim as singularidades na região  $R_3$  são dois do tipo nó e uma sela.

(d) Na região  $R_4$ ,  $b_1 < b_2 - 1$ , e  $-1/2 < b_1 < 0$

(d<sub>1</sub>) A singularidade  $p_1 = 0$  é um nó.

De fato,  $\alpha_1(p_1) = 2b_1 < 0$ ,  $\beta_2(p_1) = -1 - 2b_1 < 0$ . Por tanto  $Det(D\xi(p_1)) > 0$ .

(d<sub>2</sub>) A singularidade  $p_2$  é uma sela.

De fato,  $p_2 < 0$   $\alpha_1(p_2) < -2b_2p_2 + 2b_2 < 0$ ,  $\beta_2(p_2) > 0$ . Segue-se que  $Det(D\xi(p_2)) = \alpha_1(p_2) \cdot \beta_2(p_2) < 0$

(d<sub>3</sub>) A singularidade  $p_3$  é uma sela.

De fato, procedendo-se como no caso  $p_2$  concluímos que  $p_3$  é uma sela.

Assim as singularidades na região  $R_4$  são dois do tipo sela e um nó.

(e) Na região  $R_5$ ,  $b_1 < b_2 - 1$ , e  $b_1 > 0$

(e<sub>1</sub>) A singularidade  $p_1 = 0$  é uma sela.

De fato,  $\alpha_1(p_1) = 2b_1 > 0$ ,  $\beta_2(p_1) = -1 - 2b_1 < 0$ . Por tanto  $Det(D\xi(p_1)) < 0$ .

(e<sub>2</sub>) A singularidade  $p_2$  é uma sela.

De fato,  $p_2 < 0$  com valores  $b_1 = 1$ , e  $b_2 = 2.5$   $\alpha_1(p_2) < 0$ ,  $\beta_2(p_2) > 0$ . Segue-se que  $Det(D\xi(p_2)) = \alpha_1(p_2) \cdot \beta_2(p_2) < 0$

(e<sub>3</sub>) A singularidade  $p_3$  é uma sela.

De fato, procedendo-se como no caso  $p_2$  concluímos que  $p_3$  é uma sela.

Assim as singularidades na região  $R_5$  são três do tipo sela.

(f) Na região  $R_8$ ,  $b_1 > b_2 - 1$ , e  $b_1 > 0$

(f<sub>1</sub>) A singularidade  $p_1 = 0$  é uma sela.

De fato,  $\alpha_1(p_1) = 2b_1 > 0$ ,  $\beta_2(p_1) = -1 - 2b_1 < 0$ . Por tanto  $Det(D\xi(p_1)) < 0$ .

(f<sub>2</sub>) A singularidade  $p_2$  é um nó.

De fato,  $p_2 < 0$  com valores  $b_1 = 1$ , e  $b_2 = 1.8$   $\alpha_1(p_2) > 0$ ,  $\beta_2(p_2) > 0$ . Segue-se que  $Det(D\xi(p_2)) = \alpha_1(p_2) \cdot \beta_2(p_2) > 0$

(f<sub>3</sub>) A singularidade  $p_3$  é uma sela.

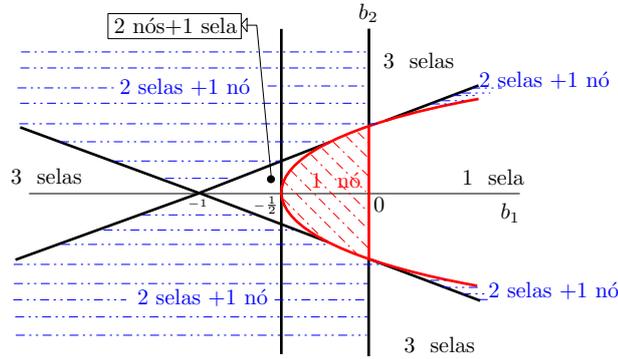
De fato,  $p_3 < 0$  com valores  $b_1 = 1$ , e  $b_2 = 1.8$   $\alpha_1(p_3) > 0$ ,  $\beta_2(p_3) < 0$ . Segue-se que  $Det(D\xi(p_3)) = \alpha_1(p_3) \cdot \beta_2(p_3) < 0$

Assim as singularidades na região  $R_5$  são dois do tipo sela e um nó.

(g) Na região  $R_6$ ,  $b_1 > 1/2(b_2^2 + 1)$  e  $-1/2 < b_1 < 0$ . O campo tem uma única singularidade  $p_1 = 0$  que é um nó. De fato,  $\alpha_1(p_1) = 2b_1 < 0$ ,  $\beta_2(p_1) = 1 - 2b_1 < 0$ . Logo em  $R_6$ ,  $p_1$  é um nó.

(h) Na região  $R_7$ ,  $b_1 > 1/2(b_2^2 + 1)$  e  $b_1 > 0$ . O campo tem uma única singularidade  $p_1 = 0$  que é uma sela. De fato,  $\alpha_1(p_1) = 2b_1 > 0$ ,  $\beta_2(p_1) = 1 - 2b_1 < -1 < 0$ . Logo em  $R_7$ ,  $p_1$  é uma sela.

Figura 1.5:



A figura (1.5) mostra a distribuição das singularidades no plano  $(b_1, b_2)$  onde:

- Nas regiões 1 e 5 temos 3 selas.
- Nas regiões 2 , 4 e 8 tem-se 2 selas e 1 nó.
- Na região 3 tem-se 2 nó e 1 sela.
- Na região 6 tem-se 1 nó.
- Na região 7 tem-se 1 sela.

Dada uma EDI do tipo (1), suponha que a função discriminante  $\Delta$  tem uma singularidade de Morse na origem e que  $\phi(p)$  não tem raízes duplas ou raiz em comum com  $\alpha_1(p)$ . Podemos enunciar o teorema.

**Teorema 1.3.2.** *Com as hipóteses acima, existe um homeomorfismo genérico  $h : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  que aplica as curvas integrais da EDI original nas curvas integrais de uma das formas normais:*

I O discriminante é um ponto isolado:

- a)  $dy^2 + 2xdxdy - ydx^2 = 0$  (1 sela, lemon)
- b)  $dy^2 - 2xdxdy - ydx^2 = 0$  (3 selas, star)
- c)  $dy^2 + 1/2xdxdy - ydx^2 = 0$  (2 selas e 1 nó, monstar)

II O discriminante é uma cruz de duas curvas suaves:

- a)  $dy^2 + 2xdxdy + ydx^2 = 0$  (1 sela)
- b)  $dy^2 - 1/2xdxdy + ydx^2 = 0$  (1 nó)
- c)  $dy^2 - 4xdxdy + ydx^2 = 0$  (3 selas)
- d)  $dy^2 + 2(y - x)dxdy + ydx^2 = 0$  (2 selas+1 nó)
- e)  $dy^2 + 4/3xdxdy + ydx^2 = 0$  (1 sela+2 nó)

O tipo é determinado pelas funções  $a, b, c$ . Mais ainda, este homeomorfismo é um difeomorfismo fora de certas direções singulares que passam pelo origem.

A importância deste teorema é estabelecer a classificação das curvas integrais de nossa EDI por meio de homeomorfismos.

Vamos a obter a configuração das curvas integrais no caso 3 selas (Star).

Para  $F = p^2y - 2px - y$ , obtemos suas derivadas parciais  $F_p = 2py - 2x$ ,  $F_x = -2p$ ,  $F_y = p^2 - 1$ . Resolvemos o sistema  $F = 0$ ,  $F_p = 0$ ,  $F_x + pF_y = -2p + p(p^2 - 1) = p(p^2 - 3) = 0$ , tem-se 3 singularidades localizadas nos pontos  $(0, 0)$ ,  $(0, p_1)$ ,  $(0, p_2)$ ; onde,  $p_1 = \sqrt{3}$ ,  $p_2 = -\sqrt{3}$ .

Para obter as trajetórias do campo de linha no plano  $(p, x)$  faremos o mesmo processo que em [6] e [9].

Em cada região do plano  $(p, x)$  onde este sistema de coordenadas está definido, as trajetórias do campo de linha tem o mesmo comportamento que as trajetórias do campo de vetores de

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{2p^2x+2x}{(p^2-1)^2} \\ \dot{p} = \frac{-p^5-4p^3+3p}{(p^2-1)^2} \end{cases}$$

Vamos estudar a natureza dessas singularidades.

$$\begin{aligned} \dot{x}_x &= -\frac{2(p^2+1)}{(p^2-1)^2} \\ \dot{x}_p &= \frac{4xp(p^2+3)}{(p^2-1)^3} \\ \dot{p}_x &= 0 \\ \dot{p}_p &= \frac{p^4+3}{(p^2-1)^2} \end{aligned}$$

Assim obtemos que

(a) Para  $(0, 0)$  temos que é uma sela. De fato,

$$D\tilde{\xi}(0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{2(p^2+1)}{(p^2-1)^2} & 0 \\ \frac{4xp(p^2+3)}{(p^2-1)^3} & \frac{p^4+3}{(p^2-1)^2} \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Para  $(0, p_1)$  temos que é uma sela. De fato,

$$D\tilde{\xi}(0, p_1) = \begin{pmatrix} -\frac{2(p^2+1)}{(p^2-1)^2} & 0 \\ \frac{4xp(p^2+3)}{(p^2-1)^3} & \frac{p^4+3}{(p^2-1)^2} \end{pmatrix} \Big|_{(0,\sqrt{3})} = \begin{pmatrix} -\frac{2.4}{4} & 0 \\ 0 & \frac{12}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Para  $(0, p_2)$  temos que é uma sela. De fato, procedendo-se como no caso para  $p_1$  concluímos que  $(0, p_2)$  é uma sela.

Assim, as singularidades para esta forma normal são todas do tipo sela. Nestas coordenadas a curva  $F = 0$ ,  $F_p = 0$  dada por  $x(p) = 0$  é a curva de dobra no plano  $px$ . Temos então em  $(0, 0)$  uma singularidade que tem o eixo  $x$  como variedade invariante para o autovalor  $-3$ . A outra variedade invariante associada ao autovalor 2 da matriz tem a direção do vetor  $(-5(p^2+1)^2, p^4+3)$ .

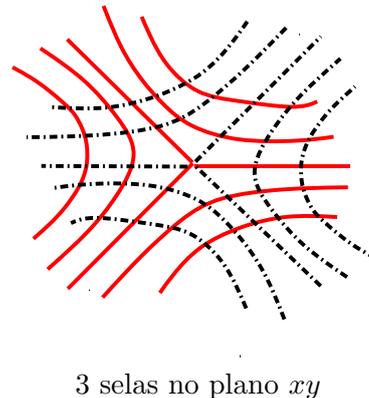
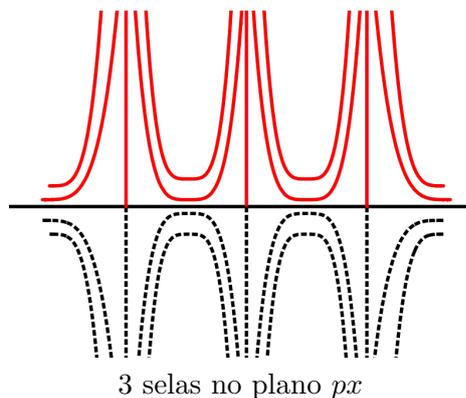
No plano  $xy$  a curva de dobra é um ponto isolado  $(0,0)$ . Chamamos  $y_{px}$  a equação onde colocamos em evidência  $y$  em  $F = yp^2 - 2xp - y = 0$ ,

$$y_{px} = -\frac{2xp}{p^2 - 1}$$

Projetando a variedade invariante, eixo  $x$ . Fazendo  $p = 0$  na equação  $y_{px}$ , e as outras variedades invariantes são fazendo  $p = p_1$ , e  $p = p_2$  respectivamente na equação de  $y_{px}$ .

$$\begin{aligned} y_{px0} &= 0 \\ y_{pxp_1} &= \sqrt{3}x \\ y_{pxp_2} &= -\sqrt{3}x \end{aligned}$$

Onde a configuração local do campo é dada pela seguinte figura (esquerda), e projetada no plano  $(x, y)$  dá a configuração mostrada na figura seguinte (direita).



# Famílias genéricas a 1-parâmetro de EDIs do tipo Morse

---

No capítulo anterior fizemos a classificação de Equações Diferenciais Implícitas

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 \quad (1)$$

perto de pontos onde a função discriminante  $b^2 - ac$  tem uma singularidade de Morse. Tais pontos aparecem naturalmente em famílias de equações diferenciais implícitas. Neste capítulo descreveremos como a configuração de curvas de solução muda de acordo com a deformação do parâmetro.

## 2.1 Redução das EDIs

Seja

$$a(x, y, t)dy^2 + 2b(x, y, t)dxdy + c(x, y, t)dx^2 = 0 \quad (2)$$

uma família de 1-parâmetro de EDIs do tipo Morse em  $t = 0$ . Denotamos por  $F(x, y, t, dx, dy) = 0$  a equação acima, e o levantamento da família do campo bivaluado que está determinado por esta equação à uma família de campo vetorial univaluado sobre a hipersuperfície  $M$  em  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}P^1$ , dado por

$$M = \{(x, y, t, p); \quad F(x, y, t, p) = ap^2 + 2bp + c = 0\}$$

A condição de Morse em  $t = 0$  garante que a superfície  $M_0 = M|_{t=0}$  é suave pela Prop(1.1.1), e consequentemente todo  $M$  é suave.

A projeção natural

$$\begin{aligned} \pi : M &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ (x, y, t, p) &\rightarrow (x, y, t) \end{aligned}$$

Para cada ponto  $(x, y, t, p)$  escolhemos a direção tangente de  $M$  que se projeta em linhas que passam por  $(x, y, t)$  com uma inclinação  $p$  no plano  $t$ -constante. A família de campo de vetores

dada por

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

é um levantamento adequado para a família de campo bivaluado. Espera-se, como no caso para a EDI simples, que a parte linear da equação (2) contenha toda a informação topológica da família de EDIs.

Começamos reduzindo a parte linear a uma forma simples. Denotemos por

$$\begin{aligned} a(x, y, t) &= a_1x + a_2y + l_1t \\ b(x, y, t) &= b_1x + b_2y + l_2t \\ c(x, y, t) &= c_1x + c_2y + l_3t \end{aligned}$$

Como no capítulo anterior, supomos aqui que em  $t = 0$  a cúbica  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} \phi(p) &= (F_x + pF_y)(0, 0, 0, p) \\ &= a_2p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1, \end{aligned}$$

que dá os zeros do campo  $\xi_0 = \xi|_{t=0}$  não tem raízes repetidas, e que os autovalores da matriz derivada destas singularidades são diferentes de zero.

**Proposição 2.1.1.** *A família de equações do tipo (2) pode ser reduzida a*

$$(y + t)dy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy \pm ydx^2$$

(com um novo par  $b_1, b_2$ ), se a seguinte condição de versalidade é satisfeita

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & l_1 \\ b_1 & b_2 & l_2 \\ c_1 & c_2 & l_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

**Prova.** Seja

$$L = a(x, y, t)dy^2 + 2b(x, y, t)dxdy + c(x, y, t)dx^2$$

se a parte linear com respeito a  $(x, y, t)$  é representada por matrizes da seguinte forma

$$L_{(x,y,t)} = \begin{pmatrix} x & y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ l_3 & l_2 & l_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^2 \\ 2dxdy \\ dy^2 \end{pmatrix}$$

Fazemos a mudança de coordenadas lineares

$$\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y \end{cases}$$

Sejam  $U$  a matriz de mudança de coordenada  $(X, Y)$ , e  $W$  a matriz que representa a mudança das formas quadráticas binárias correspondentes.

$$\begin{aligned} dx &= \alpha dX + \beta dY \\ dy &= \gamma dX + \delta dY \\ dx^2 &= \alpha^2 dX^2 + 2\alpha\beta dXdY + \beta^2 dY^2 \\ dx dy &= \alpha\gamma dX^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma) dXdY + \beta\delta dY^2 \\ dy^2 &= \gamma^2 dX^2 + 2\gamma\delta dXdY + \delta^2 dY^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X & Y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} dx^2 \\ 2dx dy \\ dy^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & 2(\alpha\delta + \beta\gamma) & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & 2\gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^2 \\ dXdY \\ dY^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^2 \\ 2dXdY \\ dY^2 \end{pmatrix} \\ U &= \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} R &= USW \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ l_3 & l_2 & l_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

porém a nova parte linear de  $L$  em coordenadas  $(X, Y)$  é

$$\begin{aligned} L_{(X,Y,t)} &= \begin{pmatrix} X & Y & t \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} dX^2 \\ 2dXdY \\ dY^2 \end{pmatrix} \\ L &= AdY^2 + 2BdXdY + CdX^2 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} A &= A_1X + A_2Y + L_1t \\ B &= B_1X + B_2Y + L_2t \\ C &= C_1X + C_2Y + L_3t \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= \delta^2(\alpha a_1 + \gamma a_2) + 2\delta\beta(\alpha b_1 + \gamma b_2) + \beta^2(\alpha c_1 + \gamma c_2) \\ A_2 &= a_2\delta^3 + (2b_2 + a_1)\delta^2\beta + (2b_1 + c_2)\delta\beta^2 + c_1\beta^3 \\ B_1 &= \gamma\delta(\alpha a_1 + \gamma a_2) + (\alpha\delta + \gamma\beta)(\alpha b_1 + \gamma b_2) + \alpha\beta(\alpha c_1 + \gamma c_2) \\ B_2 &= \gamma\delta(\beta a_1 + \delta a_2) + (\alpha\delta + \gamma\beta)(\beta b_1 + \delta b_2) + \alpha\beta(\beta c_1 + \delta c_2) \\ C_1 &= a_2\gamma^3 + (2b_2 + a_1)\gamma^2\alpha + (2b_1 + c_2)\gamma\alpha^2 + c_1\alpha^3 \\ C_2 &= \gamma^2(\beta a_1 + \delta a_2) + 2\gamma\alpha(\beta b_1 + \delta b_2) + \alpha^2(\beta c_1 + \delta c_2) \\ L_1 &= \delta^2l_1 + 2\delta\beta l_2 + \beta^2l_3 \\ L_2 &= \gamma\delta l_1 + (\gamma\beta + \delta\alpha)l_2 + \alpha\beta l_3 \\ L_3 &= \gamma^2l_1 + 2\alpha\gamma l_2 + \alpha^2l_3 \end{aligned}$$

Cálculos diretos fornecem que

$$A_2 = \beta^3\phi\left(\frac{\delta}{\beta}\right) \quad C_1 = \alpha^3\phi\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

onde  $\phi(p)$  é a cúbica que dá os zeros do levantamento em  $t = 0$ , denotemos por  $\gamma = p_1\alpha$  como no capítulo anterior (seção (1.2)) e  $\delta = \lambda_0\beta$ . Modificamos a função  $\phi$ , para obter a seguinte equação quadrática

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) = F_x + p_1F_y(0, 0, 0, \lambda) &= (a_1\lambda^2 + 2b_1\lambda + c_1) + p_1(a_2\lambda^2 + 2b_2\lambda + c_2) \\ &= (a_2p_1 + a_1)\lambda^2 + 2(b_2p_1 + b_1)\lambda + (c_2p_1 + c_1) \end{aligned}$$

Como  $p_1$  é uma raiz de  $\phi$ , também é raiz desta nova equação quadrática.

De fato,

$$\psi(p_1) = a_2p_1^3 + (2b_2 + a_1)p_1^2 + (2b_1 + c_2)p_1 + c_1 = \phi(p_1) = 0$$

Seja  $\lambda_0$  a outra raiz de  $\psi$ ,  $\lambda_0 \neq p_1$  segue que

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= (a_2p_1 + a_1)\lambda^2 + 2(b_2p_1 + b_1)\lambda + (c_2p_1 + c_1) \\ &= (\lambda - p_1)[(a_2p_1 + a_1)\lambda + 2(b_2p_1 + b_1) + a_1p_1 + a_2p_1^2] \end{aligned}$$

e portanto

$$\lambda_0 = -p_1 \left( \frac{2b_2}{a_2 p_1 + a_1} + 1 \right)$$

Outra forma de se escrever

$$\psi(\lambda_0) = f_1(\lambda_0) + f_2(\lambda_0)p_1 = 0$$

Onde

$$\begin{aligned} f_1(p) &= a_1 p^2 + 2b_1 p + c_1 \\ f_2(p) &= a_2 p^2 + 2b_2 p + c_2 \end{aligned}$$

Por outro lado temos que  $A_1 = C_1 = 0$  (pela seção (1.2)).

Portanto obtemos uma EDI com a parte linear sem termos em  $X$  nos coeficientes de  $dX^2$  e  $dY^2$ , isto é,

$$L = (A_2 Y + L_1 t) dY^2 + 2(B_1 X + B_2 Y + L_2 t) dX dY + (C_2 Y + L_3 t) dX^2$$

onde

$$\begin{aligned} A_2 &= \beta^3 \phi \left( \frac{\delta}{\beta} \right) = \beta^3 \phi(\lambda_0) \\ C_2 &= p_1^2 \alpha^2 (\beta a_1 + \delta a_2) + 2p_1 \alpha^2 (\beta b_1 + \delta b_2) + \alpha^2 (\beta c_1 + \delta c_2) \\ &= \alpha^2 \beta ((a_2 p_1^2 + 2b_2 p_1 + c_2) \lambda_0 + (a_1 p_1^2 + 2b_1 p_1 + c_1)) \\ L_1 &= \lambda_0^2 \beta^2 l_1 + 2\lambda_0 \beta^2 l_2 + \beta^2 l_3 = \beta^2 (\lambda_0^2 l_1 + 2\lambda_0 l_2 + l_3) \\ L_3 &= p_1^2 \alpha^2 l_1 + 2\alpha^2 p_1 l_2 + \alpha l_3 = \alpha^2 (p_1 l_1 + 2p_1 l_2 + l_3) \end{aligned}$$

uma nova mudança de coordenadas da forma  $(X, Y, t) \rightarrow (x + uT, y + vT, wT)$ , na forma matricial

$$\begin{pmatrix} X & Y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

Leva a parte linear à forma desejada se e só se o determinante da segunda matriz  $L_M$  é diferente de zero, isto é,  $B_1 \neq 0$  e  $C_2 L_1 - A_2 L_3 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ C_2 & B_2 & A_2 \\ L_3 & L_2 & L_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ C_2 & B_2 & A_2 \\ C_2 v + L_3 w & B_1 u + B_2 v + L_2 w & A_2 v + L_1 w \end{pmatrix} = L_M$$

1. A condição  $B_1 \neq 0$ , segue da proposição (1.1.1), uma vez que em  $t = 0$  tem-se uma singularidade do tipo Morse, isto é,  $B_1 A_2 - B_2 A_1 \neq 0$ , e mostramos anteriormente que  $A_1 = 0$  e que genericamente  $A_2 \neq 0$ .
2. Para mostrar que a condição  $C_2 L_1 - A_2 L_3 \neq 0$  é válida, suponhamos  $C_2 L_1 - A_2 L_3 = 0$ . Provamos no primeiro capítulo que em geral  $C_2 \neq 0$ , isto é,  $F_x \beta + F_y \delta \neq 0$ . Por outro lado,

$F_x\beta + F_y\delta = \beta(F_x + F_y\frac{\delta}{\beta}) = \beta(F_x + F_y\lambda_0)$  dessa forma temos que  
 $C_2 = \alpha^2\beta(F_x(p_1) + F_y(p_1)\lambda_0) \neq 0$ , pondo  $g(p) = l_1p^2 + 2l_2p + l_3$  obtemos que

$$\begin{aligned} L_1 &= \beta^2g(\lambda_0) \\ L_2 &= \alpha^2g(p_1) \end{aligned}$$

Portanto a equação se escreveria como

$$C_2L_1 - A_2L_3 = \alpha^2\beta^3[(f_1(p_1) + f_2(p_1)\lambda_0)g(\lambda_0) - \phi(\lambda_0)g(p_1)] = 0 \quad (3)$$

Usando  $f_1$  e  $f_2$  temos que  $\phi(\lambda_0) = f_1(\lambda_0) + f_2(\lambda_0)p_1$  substituindo  $\phi(\lambda_0)$  na equação (3) obtem-se

$$[f_1(\lambda_0) + f_2(\lambda_0)\lambda_0]g(p_1) = [f_2(p_1)\lambda_0 + f_1(p_1)]g(\lambda_0)$$

Resolvendo para  $\lambda_0$  e lembrando que  $\lambda_0 = \frac{\delta}{\beta}$  temos

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{g(\lambda_0)f_1(p_1) - g(p_1)f_1(\lambda_0)}{g(p_1)f_2(\lambda_0) - g(\lambda_0)f_2(p_1)} \\ \delta &= \frac{g(\lambda_0)f_1(p_1) - g(p_1)f_1(\lambda_0)}{g(p_1)f_2(\lambda_0) - g(\lambda_0)f_2(p_1)}\beta \end{aligned}$$

Assim a mudança de coordenadas teria a matriz

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha p_1 & 0 \\ \beta & \frac{g(\lambda_0)f_1(p_1) - g(p_1)f_1(\lambda_0)}{g(p_1)f_2(\lambda_0) - g(\lambda_0)f_2(p_1)}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cujo determinante é

$$\begin{aligned} \det(U) &= \alpha\beta \frac{(g(\lambda_0)f_1(p_1) - g(p_1)f_1(\lambda_0) - p_1g(p_1)f_2(\lambda_0) + p_1g(\lambda_0)f_2(p_1))}{g(p_1)f_2(\lambda_0) - g(\lambda_0)f_2(p_1)} \\ &= \alpha\beta \frac{(g(\lambda_0)f_1(p_1) - g(p_1)f_1(\lambda_0) - p_1g(p_1)f_2(\lambda_0) - g(\lambda_0)f_1(p_1))}{g(p_1)f_2(\lambda_0) - g(\lambda_0)f_2(p_1)} \\ &= -\alpha\beta g(p_1) \frac{f_1(\lambda_0) + p_1f_2(\lambda_0)}{g(p_1)f_2(\lambda_0) - g(\lambda_0)f_2(p_1)} = 0 \end{aligned}$$

o que é uma contradição pois  $\det(U) \neq 0$  por hipotese.

Por uma nova mudança de escala dada por  $A_2 = 1$  e  $C_2 = \pm 1$  podemos escrever

$$L = (\pm y + (\pm v + L_3w)T)dx^2 + 2(B_1x + B_2y + (B_1u + B_2v + L_2w)T)dxdy + (y + (v + L_1w)T)dy^2$$

■

Lembrando que  $w$  e  $B_1$  são diferentes de zero, tomando

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 \\ L_3 &= 0 \\ u &= -\frac{L_2 w}{B_1} \\ v &= 0 \end{aligned}$$

A EDI se escreve como,

$$L = (y + t)dy^2 + 2(B_1x + B_2y)dxdy \pm ydx^2$$

**Proposição 2.1.2.** *Para quase todos os pares  $(b_1, b_2)$ , a família de EDIs cuja parte linear é dada na Prop (2.1.1) pode ser reduzida por um difeomorfismo à*

$$(y + t)dy^2 + 2(b_1x + b_2y + b(x, y))dxdy \pm ydx^2 = 0$$

onde  $b(x, y)$  é uma série de potências formal sem termos constantes nem termos lineares.

**Prova.** Segue-se da prova da proposição (1.2.3) junto com a proposição (2.1.1). ■

## 2.2 Topologia das formas normais

Não podemos aplicar o método do capítulo anterior diretamente para obter um modelo de família de EDIs pelo levantamento de  $\xi_t$ . Porém estes campos nos fornecem uma boa informação das famílias dos campos bivaluados. De agora em diante, assumiremos que as famílias de EDIs satisfazem a condição de versalidade da Proposição (2.1.1).

Para nosso primeiro resultado, temos que dado um cone  $C$  com a equação  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  em  $\mathbb{R}^3$ , existem dois germes de funções genéricas  $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$  que preserva o cone  $C$ . A menos de difeomorfismo, são as funções  $g_1(x, y, z) = z$  e  $g_2(x, y, z) = x$  cujos zeros no cone correspondem a um ponto e um par de retas, respectivamente.

**Proposição 2.2.1.** *O discriminante  $\Delta = \{(x, y, t); b^2 - ac = 0\}$  é um cone, e a projeção ao longo do parâmetro  $t$  é uma família genérica de seções deste cone.*

**Prova.** Segue-se da mudança de coordenadas da Proposição (2.1.1), onde:

$$\begin{aligned} a(x, y, t) &= y + t \\ b(x, y, t) &= b_1x + b_2y \\ c(x, y, t) &= \pm y \end{aligned}$$

que

$$b^2 - ac = (b_1x + b_2y)^2 \mp y(y + t)$$

Como  $b_1 \neq 0$  e  $b_2$  sem restrição, fazemos:  $b_1 = 1, b_2 = 0$

$$\begin{aligned} b^2 - ac &= (b_1x + b_2y)^2 \mp y(y + t) \\ &= x^2 \mp y(y + t) \\ &= x^2 \mp y^2 \mp yt \\ &= x^2 \mp \left(y + \frac{t}{2}\right)^2 \pm \frac{t^2}{4} \end{aligned}$$

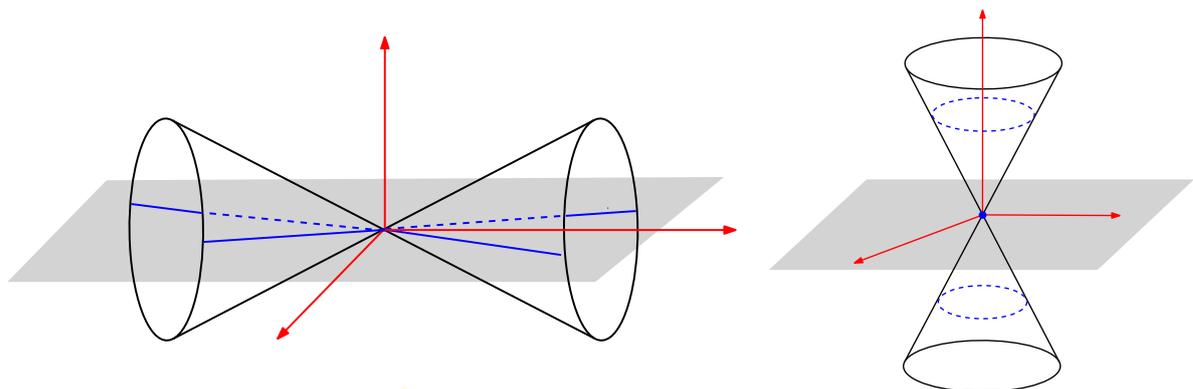
Por uma nova mudança dada por

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x \\ \tilde{y} &= y + \frac{t}{2} \\ \tilde{t} &= \frac{t}{2}, \end{aligned}$$

obtemos que o discriminante é dado por

$$\Delta = \tilde{x}^2 \mp \tilde{y}^2 \mp \tilde{t}^2,$$

que tem a estrutura de um cone. Além disso, as seções para  $t = 0$  são preservadas. Observamos que para o caso  $x^2 + y^2 - t^2$  a seção de zeros é dada pelo ponto zero e para o caso  $x^2 - y^2 + t^2$  a seção de zeros é dada por um par de linhas.



■

**Proposição 2.2.2.** *As singularidades do campo levantado  $\xi$  se projetam em 1 ou 3 curvas suaves mutuamente transversais através do ponto do cone. As singularidades resultantes da EDI para um  $t$  fixo ( $t \neq 0$ ) são do tipo dobra-selas ou dobra-nós.*

**Observação 2.2.3.** *A nomenclatura singularidade do tipo dobra-sela (dobra-nó) é como em [3]. Significa que a projeção  $\pi : M_t \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $M_t$  superfície associada a EDI, tem uma singularidade*

do tipo dobra nesse ponto e que este ponto é uma singularidade do tipo sela (nó) do campo levantado.

**Prova.** As singularidades(zeros) do campo levantado

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + pF_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

são dados por

$$F_p = F = F_x + pF_y = 0$$

Pelo teorema da função implícita, temos que a solução da equação acima tem curvas suaves através da fibra exepcional nos zeros de  $\xi_0$ . Assim obtemos 1 ou 3 curvas.

Fixando um  $t$ , obtemos que um campo levantado  $\xi_t$  que terá 1 ou 3 zeros. Por continuidade a natureza destes zeros não trocam ao longo das curvas, isto é, os zeros de  $\xi_t$  são do mesmo tipo (selas e nós) do que  $\xi_0$ .

Seja

$$M_t = \{(x, y, p) : F^t(x, y, p) = F(x, y, t, p) = 0\} \quad \text{para } t \neq 0$$

Como a EDI é do tipo Morse em  $t = 0$ , a superfície  $M_t$  é suave.

A projeção para  $t \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \pi_t : M_t &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, p) &\rightarrow (x, y) \end{aligned}$$

é uma dobra sobre o discriminante levantado  $\Delta_t$ , (uma  $t$ - seção de  $\Delta$ ).

### Afirmção

A projeção  $\pi_t$  não será uma dobra em  $F = F_p = 0$  se e somente se,  $F_{pp} = 0$ .

Se  $F = F_p = 0$  tem-se que  $F_{pp} = 0$ .

A recíproca é por contradição. Suponhamos que  $\pi_t$  é uma dobra para  $t \neq 0$ , com  $F_{pp} = 0$ , isto é

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x, y, t) = 2a = 0$$

assim sobre a  $t$ -seção de  $\Delta$  se tem que  $b^2 - ac = 0$ , por tanto  $b = 0$ .

De fato,

$$\begin{aligned} a(x, y, t) &= a_1x + a_2y + l_1t = 0 \\ b(x, y, t) &= b_1x + b_2y + l_2t = 0 \\ c(x, y, t) &= c_1x + c_2y + l_3t = 0 \end{aligned}$$

Escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & l_1 \\ b_1 & b_2 & l_2 \\ c_1 & c_2 & l_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como assumimos que esta família de EDI satisfaz a condição de versalidade temos que a única solução desta equação é  $(x, y, t) = (0, 0, 0)$  o que é uma contradição para  $t \neq 0$ .

Portanto obtemos que para  $t \neq 0$  se tem que  $F_{pp} \neq 0$ .

Precisamos mostrar que a involução troca dois pontos de  $M_t$ , e que estes são projetados sobre a mesma imagem, e esta será  $\xi_t$ -bom ou seja, os autovetores da parte linear de  $\xi_t$  avaliados nas singularidades e a tangente ao conjunto crítico de  $\pi - t$  são dois a dois distintos.

Para simplificar a notação, escrevemos  $F$  em lugar de  $F^t$ . E assumimos que  $M^t$  é parametrizada por  $(x, g(x, p), p)$ .

Assim no plano  $(x, p)$  a tangente de  $\pi_t$  ao conjunto crítico  $F = F_p = 0$  é dado por

$$w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_x & F_y & F_p \\ F_{xp} & F_{yp} & F_{pp} \end{vmatrix} = (F_y F_{pp} - F_p F_{yp}, F_p F_{xp} - F_x F_{pp}, F_x F_{yp} - F_y F_{xp})$$

Como  $F_p = 0$  temos  $w = (F_y F_{pp}, -F_x F_{pp}, F_x F_{yp} - F_y F_{xp})$

Projetando no plano  $(x, p)$  tem-se

$$\tilde{w} = (F_y F_{pp}, F_x F_{yp} - F_y F_{xp})$$

Em uma singularidade de  $\xi_t$  temos  $F_x + pF_y = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= (F_y F_{pp}, F_x F_{yp} - F_y F_{xp}) \\ &= (F_y F_{pp}, -pF_y F_{yp} - F_y F_{xp}) \\ &= F_y (F_{pp}, -(pF_{yp} + F_{xp})) \end{aligned}$$

A tangente é dada ao longo de

$$v = (F_{pp}, -(pF_{yp} + F_{xp})) \tag{4}$$

Agora projetamos o campo  $\xi_t$  no plano  $(x, p)$  e obtemos

$$\tilde{\xi}_t = F_p \frac{\partial}{\partial x} - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

Procedendo como na prova da proposição (1.1.2) temos que a parte linear de  $\xi_t$  dada por

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p} \frac{\partial g}{\partial x} \right) (0, p) \\ \alpha_2 &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p} \frac{\partial g}{\partial p} \right) (0, p) \\ \beta_1 &= - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + p \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right) (0, p) \\ \beta_2 &= - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial y} + p \left( \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial g}{\partial p} \right) \right) (0, p),\end{aligned}$$

onde,

$$0 = \phi(p) = (F_x + pF_y)(0, p) = \left( -\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} \right) (0, p) = \frac{\partial F}{\partial y} \left( p - \frac{\partial g}{\partial x} \right) (0, p)$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(0, p) &= p \\ \frac{\partial g}{\partial p}(0, p) &= - \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial p}(0, p) = 0\end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\partial}{\partial p}(a_1 p^2 + 2b_1 p + c_1)(0, p) + p \left( \frac{\partial}{\partial p}(a_2 p^2 + 2b_2 p + c_2) \right) (0, p) \\ &= 2(a_2 p^2 + (b_2 + a_1)p_1 + b_1) = F_{xp} + pF_{yp} \\ \alpha_2 &= F_{pp} \\ \beta_1 &= -(F_{xx} + pF_{yx} + p(F_{yx} + pF_{yy}))(0, p) \\ &= -(F_{xx} + 2pF_{yx} + p^2 F_{yy}) \\ \beta_2 &= - \left( \frac{\partial}{\partial p}(a_1 p^2 + 2b_1 p + c_1) \right) (0, p) + (a_2 p^2 + 2b_2 p + c_2)(0, p) + \\ &\quad p \left( \frac{\partial}{\partial p}(a_2 p^2 + 2b_2 p + c_2) \right) (0, p) \\ &= -(3a_2 p_1^2 + 2(a_1 + 2b_2)p_1 + (c_2 + 2b_1)) = -(F_y + F_{xp} + pF_{yp})\end{aligned}$$

Assim a matriz da parte linear fica

$$A = \begin{pmatrix} F_{xp} + pF_{yp} & F_{pp} \\ -(F_{xx} + 2pF_{yx} + p^2 F_{yy}) & -(F_y + F_{xp} + pF_{yp}) \end{pmatrix}$$

A direção  $v$  dada em (4) é um autovetor desta matriz, se e somente se,  $F_{pp} = 0$ .

De fato,

1. Se  $v$  é um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$ , isto é.

$$Av = \lambda v$$

ou ainda

$$\begin{pmatrix} F_{xp} + pF_{yp} & F_{pp} \\ -(F_{xx} + 2pF_{yx} + p^2F_{yy}) & -(F_y + F_{xp} + pF_{yp}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{pp} \\ -(F_{xp} + pF_{yp}) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} F_{pp} \\ -(F_{xp} + pF_{yp}) \end{pmatrix}$$

Assim obtemos que  $F_{pp} = 0$

2. Se  $F_{pp} = 0$

temos a nova  $A$

$$A = \begin{pmatrix} F_{xp} + pF_{yp} & 0 \\ -(F_{xx} + 2pF_{yx} + p^2F_{yy}) & -(F_y + F_{xp} + pF_{yp}) \end{pmatrix}$$

os autovalores são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= F_{xp} + pF_{yp} \\ \lambda_2 &= -(F_y + F_{xp} + pF_{yp}) \end{aligned}$$

Encontramos o autovetor correspondente para cada autovalor.

a) Para  $\lambda_1 = F_{xp} + pF_{yp}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -(F_{xx} + 2pF_{yx} + p^2F_{yy}) & -(F_y + 2F_{xp} + 2pF_{yp}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim  $v = (v_1, v_2) = (F_y + 2F_{xp} + 2pF_{yp}, -(F_{xx} + 2pF_{yx} + p^2F_{yy}))$

b) Para  $\lambda_2 = -(F_y + F_{xp} + pF_{yp})$

$$\begin{pmatrix} 2F_{xp} + 2pF_{yp} & 0 \\ -(F_{xx} + 2pF_{yx} + p^2F_{yy}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim,  $v_1 = 0$  e com  $v_2 = -(F_{xp} + pF_{yp})$ .

Tem-se que  $v = (v_1, v_2) = (0, -(F_{xp} + pF_{yp}))$  é o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_2$

Mas isto não pode acontecer para  $t \neq 0$ . (Pela afirmação anterior )

Portanto obtemos que o autovetor desta matriz e o vetor  $v$  são diferentes; assim a involução é  $\xi_t - bom$ .

Obtemos nosso resultado, para  $t \neq 0$  todas as singularidades são dobradas-selas (dobras-nós). ■

**Proposição 2.2.4.** Quando o discriminante  $\Delta_0 = \Delta|_{t=0}$  é um nó, a posição das curvas de zeros e do discriminante  $\Delta_0$  no cone depende apenas da parte linear da EDI em  $t = 0$ .

**Observação 2.2.5.** O discriminante  $\Delta$  é um nó quando é o cruzamento transversal de duas curvas suaves.

**Prova.** As curvas dos zeros são dadas por

$$F = F_p = F_x + pF_y = 0$$

onde se utiliza o produto vetorial generalizado como em [11], e se projetam em curvas de  $\mathbb{R}^3$  com direções tangentes à origem ao longo de  $w_i$ .

$$\begin{aligned} w &= \nabla F \times \nabla F_p \times \nabla(F_x + pF_y) \\ &= ((F_y F_{tp} - F_t F_{yp})(F_{px} + F_y + pF_{py}), (F_t F_{xp} - F_x F_{tp})(F_{px} + F_y + pF_{py}), \\ &\quad (F_x F_{yp} - F_y F_{xp})(F_{px} + F_y + pF_{py}), -F_x(F_{yp}(F_{tx} + pF_{ty}) - F_{tp}(F_{yx} + pF_{yy})) + \\ &\quad F_y(F_{xp}(F_{tx} + pF_{ty}) - F_{tp}(F_{xx} + pF_{xy})) - F_t(F_{xp}(F_{yx} + pF_{yy}) - F_{yp}(F_{xx} + pF_{xy}))) \\ w_i &= (F_y F_{tp} - F_t F_{yp}, F_t F_{xp} - F_x F_{tp}, F_x F_{yp} - F_y F_{xp}) \quad \text{para } F_p = 0 \quad , \end{aligned}$$

onde as componentes são avaliadas em  $(0, 0, 0, p_i)$  com  $p_i$  sendo zero da função cúbica  $\phi$ . O vetor  $w_i$  depende só da parte linear da equação

$$a(x, y, t)dy^2 + 2b(x, y, t)dx dy + c(x, y, t)dx^2 = 0$$

e pela proposição (2.1.1) podemos tomar a parte linear de  $a, b, c$  para obter a forma

$$(y + t)dy^2 + 2(b_1x + b_2y)dx dy + ydx^2$$

Ou seja as funções  $a, b, c$  tem a seguinte forma normal

$$\begin{aligned} a(x, y, t) &= y + t, & \text{onde } \{a_1 = 0, a_2 = 1, l_1 = 1\} \\ b(x, y, t) &= b_1x + b_2y, & \text{onde } \{l_2 = 0\} \\ c(x, y, t) &= y, & \text{onde } \{c_1 = 0, c_2 = 1, l_3 = 0\} \end{aligned}$$

Portanto obtemos

$$\begin{aligned} F_t &= l_1 p_i^2 + 2l_2 p_i + l_3 = p_i^2 & F_{tp} &= 2p_i \\ F_x &= a_1 p_i^2 + 2b_1 p_i + c_1 = 2b_1 p_i & F_{xp} &= 2b_1 \\ F_y &= a_2 p_i^2 + 2b_2 p_i + c_2 = p_i^2 + 2b_2 p_i + 1 & F_{yp} &= 2(p_i + b_2) \end{aligned}$$

Substituindo

$$w_i = 2(b_2 p_i^2 + p_i, -p_i^2 b_1, b_1 p_i^2 - b_1)$$

onde  $p_1$  é zero de  $\phi(p) = p^3 + 2b_2p^2 + (2b_1 + 1)p$ . A figura (2.1) (i) mostra a partição do plano  $(b_1, b_2)$  de acordo com as diferentes órbitas topológicas da EDI em  $t = 0$ . Os detalhes de como foi feito esta figura estão no primeiro capítulo.

E encontramos que as configurações dos vetores  $w_i$  e  $\Delta_0$  sobre o cone  $\Delta$  são as mesmas componentes para cada partição. Pode se notar na Figura (2.2) as posições destas curvas sobre o cone, e para as partições dos zeros de  $\xi_t$  para  $t = constante$ .

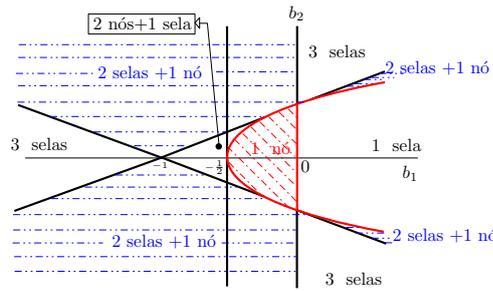


Figura 2.1: (i)

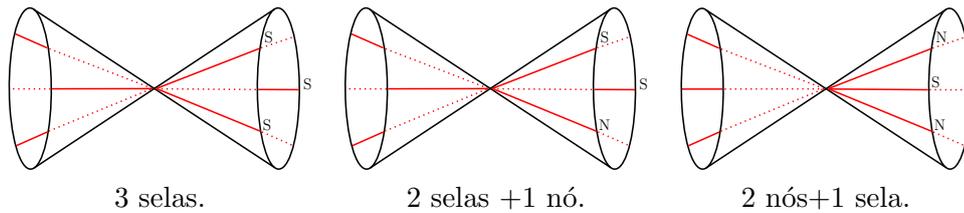


Figura 2.2:

A partir da figura (2.2) podemos concluir que:

- As imagens das singularidades  $(x_1, p_1)$  e  $(x_2, p_2)$  do tipo sela pela projeção  $\pi$  estão num mesmo ramo da hipérbole, isto é sobre a mesma linha do cone, enquanto que a imagen da singularidade  $(0, 0)$  do tipo sela está no outro ramo, a outra linha do cone.
- As imagens das singularidades  $(x_1, p_1)$  do tipo sela e  $(x_2, p_2)$  do tipo nó pela projeção  $\pi$  estão num mesmo ramo da hipérbole, enquanto que a imagen da singularidade  $(0, 0)$  do tipo sela está no outro ramo.
- As imagens das singularidades  $(x_1, p_1)$  e  $(x_2, p_2)$  do tipo nó e a singularidade  $(0, 0)$  do tipo sela pela projeção  $\pi$  estão num mesmo ramo da hipérbole.

■

Para provar nosso resultado principal precisaremos colar vários modelos locais para curvas integrais.

As faixas usadas neste processo de colagem consistem de famílias paralelas de cúspides, isto é, dada pela forma  $y^3 = (x - t)^2$  com a família de cúspides passando ao longo do eixo  $x$  e a cúspide tangente vertical.

Primeiro precisamos de um resultado de homogeneidade, que mostra que qualquer duas faixas dessa cúspide são difeomorfas.

**Lema 2.2.6.** *Seja  $r$  um número real qualquer. Então existe um difeomorfismo do plano preservando as curvas da cúspide  $y^3 = (x - t)^2$  que levam o intervalo  $[-1, 1] \times \{0\}$  à  $[-r, r] \times \{0\}$ .*

**Prova.** Seja  $\alpha$  um número positivo, e  $g$  a aplicação

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow g(x, y) = (\alpha^3 x, \alpha^2 y) \end{aligned}$$

onde  $g$  é contínua e

$$Dg = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Assim  $\det(Dg) = \alpha^5 > 0$ . Verificando que  $g$  é um difeomorfismo.

E que também preserva as cúspides

$$\begin{aligned} (\alpha^2 y)^3 &= (\alpha^3 x - t)^2 \\ &= \alpha^6 x^2 - 2\alpha^3 xt + t^2 \\ y^3 &= x^2 - 2\frac{xt}{\alpha^3} + \frac{t^2}{\alpha^6} \\ &= \left(x - \frac{t}{\alpha^3}\right)^2 \end{aligned}$$

e para  $\tilde{t} = \frac{t}{\alpha^3}$ , tem-se  $y^3 = (x - \tilde{t})^2$ .

De fato  $g : [-1, 1] \times \{0\} \rightarrow [-\alpha^3, \alpha^3] \times \{0\}$ , e com  $\alpha = r^{\frac{1}{3}}$  se tem o resultado. ■

Agora vamos a enunciar e mostrar nosso resultado principal desta dissertação, o qual diz assim,

**Teorema 2.2.7.** *Suponha que a família das EDIs é do tipo Morse em  $t = 0$ , e que a função cúbica  $\phi$  não tem raízes repetidas, os zeros de  $\xi_0$  são normais e a família satisfaz a condição de versalidade da proposição (2.1.1).*

*Então a família é topologicamente equivalente a uma das seguintes formas normais.*

$I \triangle_0$  é um ponto isolado

- a)  $(y + t)dy^2 + 2xdxdy - ydx^2 = 0$  (1 sela, lemon)
- b)  $(y + t)dy^2 - 2xdxdy - ydx^2 = 0$  (3 selas, star)
- c)  $(y + t)dy^2 + \frac{1}{2}xdxdy - ydx^2 = 0$  (2 selas e 1 nó)

II  $\Delta_0$  é um cruzamento transversal de duas curvas suaves

$$\begin{aligned}
 a) (y+t)dy^2 + 2xdxdy + ydx^2 &= 0 && 1 \text{ sela} \\
 b) (y+t)dy^2 - \frac{1}{2}xdxdy + ydx^2 &= 0 && 1 \text{ nó} \\
 c) (y+t)dy^2 - 4xdxdy + ydx^2 &= 0 && 3 \text{ selas} \\
 d) (y+t)dy^2 + 2(y-x)dxdy + ydx^2 &= 0 && 2 \text{ selas e 1 nó} \\
 e) (y+t)dy^2 - \frac{4}{3}xdxdy + ydx^2 &= 0 && 1 \text{ sela e 2 nós}
 \end{aligned}$$

A normalização é uma condição técnica sobre os valores dos zeros de um campo vetorial que vale para a maioria dos campos.

**Prova.** Pela proposição (2.2.1) temos que o discriminante da família de EDIs dada pela equação (1) é um cone e como o parâmetro na família muda, obtemos 2 famílias genéricas de seções do cone dependendo se o discriminante  $\Delta_0$  é um ponto isolado ou é um nó.

1. No primeiro caso, quando  $\Delta_0$  é um ponto isolado, o discriminante  $\Delta_t$ , para  $t \neq 0$  é uma curva suave fechada. Além disso, existem 1 ou 3 zeros no campo  $\xi_t$  sobre  $\Delta_t$ .

A natureza destes zeros dependem só do tipo da EDI em  $t = 0$ , e são do tipo dobra-sela ou dobra-nó (Prop 2.2.2).

Aplicando o resultado de Davydov, encontramos um homeomorfismo tomando as curvas integrais de  $\xi_t$  nestes zeros para nosso modelo.

Usando o Lema (2.2.6) estendemos este homeomorfismo a uma vizinhança de  $\Delta_t$ .

Como o campo vetorial  $\xi_0$  tem pontos não singulares fora do origem, podemos fixar o diâmetro da vizinhança de  $\Delta_t$  onde o homeomorfismo é definido.

2. No segundo caso, onde  $\Delta_0$  é um nó, temos vários casos para cada tipo de EDI em  $t = 0$ , dependendo da posição dos zeros do campo  $\xi_t$  nas componentes de  $\Delta_t$  (a união de dois curvas suaves).

Como tínhamos observado na Proposição (2.2.4) que a forma destes zeros são dados sobre  $\Delta_t$  dependem somente do tipo de EDI em  $t = 0$ .

Assim procedemos igual ao caso onde  $\Delta_0$  é um ponto isolado.

■

Vamos obter a configuração das curvas integrais no caso 2 selas e um nó.

Para  $F = (y+t)p^2 + 2(y-x)p + y = 0$ , obtemos suas derivadas parciais  $F_p = 2p(y+t) + 2(y-x)$ ,  $F_x = -2p$ ,  $F_y = p^2 + 2p + 1$ , Resolvemos o sistema  $F = 0$ ,  $F_p = 0$ ,  $F_x + pF_y = -2p + p(p^2 + 2p + 1) = p(p^2 + 2p - 1) = 0$ , tem-se 3 singularidades localizadas nos pontos  $(0, 0, 0)$ ,  $(x_1, y_1, p_1)$ ,  $(x_2, y_2, p_2)$ ; onde  $p_1 = \sqrt{2} - 1$ ,  $p_2 = -\sqrt{2} - 1$ .

Onde,

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \sqrt{2} - 1 & p_2 &= -\sqrt{2} - 1 \\
 x_1 &= \frac{t}{2}(p_1 + 1) & x_2 &= \frac{t}{2}(p_2 + 1) \\
 y_1 &= \frac{t}{2}p_1 & y_2 &= \frac{t}{2}p_2
 \end{aligned}$$

Para obter as trajetórias do campo de linha no plano  $(p, x)$  faremos o mesmo processo que em [6] e [9].

Em cada região do plano  $(p, x)$  onde este sistema de coordenadas está definido, as trajetórias do campo de linha tem o mesmo comportamento que as trajetórias do campo de vetores de

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{2p + 2px - 2x}{(p+1)(p^2 + 2p + 1)} \\ \dot{p} &= -\frac{p^4 + 3p^3 + p^2 - p}{(p+1)(p^2 + 2p + 1)}\end{aligned}$$

Vamos estudar a natureza dessas singularidades

$$\begin{aligned}\dot{x}_x &= \frac{2p - 2}{(p+1)(p^2 + 2p + 1)} \\ \dot{x}_p &= -\frac{2(2p + 2px - 1 - 4x)}{(p^2 + 2p + 1)^2} \\ \dot{p}_x &= 0 \\ \dot{p}_p &= -\frac{p^3 + 3p^2 + 5p - 1}{(p+1)(p^2 + 2p + 1)}\end{aligned}$$

Assim obtemos que para  $(0, 0)$  temos que é uma sela. De fato,

$$D\tilde{\xi}(0, 0) = \left( \begin{array}{cc} \frac{2p-2}{(p+1)(p^2+2p+1)} & 0 \\ -\frac{2(2p+2px-1-4x)}{(p^2+2p+1)^2} & -\frac{p^3+3p^2+5p-1}{(p+1)(p^2+2p+1)} \end{array} \right) \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

para  $(x_1, p_1)$  temos que é um nó. De fato,

$$D\tilde{\xi}(x_1, p_1) = \left( \begin{array}{cc} \frac{2p-2}{(p+1)(p^2+2p+1)} & 0 \\ -\frac{2(2p+2px-1-4x)}{(p^2+2p+1)^2} & -\frac{p^3+3p^2+5p-1}{(p+1)(p^2+2p+1)} \end{array} \right) \Big|_{(x_1, p_1)} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) & (1 - \sqrt{2})\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

para  $(x_2, p_2)$  temos que é uma sela. De fato,

$$D\tilde{\xi}(x_2, p_2) = \left( \begin{array}{cc} \frac{2p-2}{(p+1)(p^2+2p+1)} & 0 \\ -\frac{2(2p+2px-1-4x)}{(p^2+2p+1)^2} & -\frac{p^3+3p^2+5p-1}{(p+1)(p^2+2p+1)} \end{array} \right) \Big|_{(x_2, p_2)} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2}) & -(1 + \sqrt{2})\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Assim, as singularidades para esta forma normal são dois do tipo sela e um nó. Nestas coordenadas a curva  $F = 0$ ,  $F_p = 0$  dada por  $x(p) = -\frac{p}{p-1}$  é a curva de dobra no plano  $px$ . Temos então em  $(0, 0)$  uma singularidade que tem ao eixo  $x$  como variedade invariante para o autovalor  $-2$ . A outra variedade invariante associada ao autovetor  $1$  da matriz tem a direção do vetor  $(2, 3)$ .

No plano  $xy$  a curva de dobra é um cruzamento transversal de duas curvas

$$\begin{aligned}x(p) &= -\frac{p}{p-1} \\ y(p) &= -\frac{p^2}{p^2-1}\end{aligned}$$

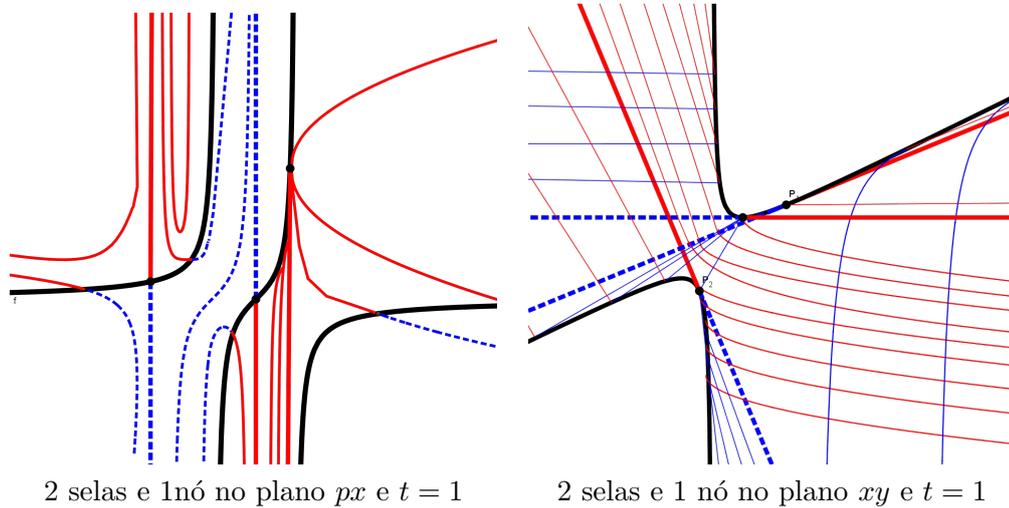
Chamamos  $ypx$  a equação onde colocamos em evidência  $y$  em  $F = yp^2 + 2(x - y)p + y = 0$ ,

$$ypx = -\frac{p(p - 2xp)}{p^2 + 2p + 1}$$

Projetando a variedade invariante, eixo  $x$ . Fazendo  $p = 0$  na equação  $ypx$ , e as outras variedades invariantes são fazendo  $p = p_1$ , e  $p = p_2$  respectivamente na equação de  $ypx$ .

$$\begin{aligned} ypx_0 &= 0 \\ ypx_{p_1} &= -\left(\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)\right)(\sqrt{2} - 1 - 2x) \\ ypx_{p_2} &= -\left(\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)\right)(\sqrt{2} + 1 + 2x) \end{aligned}$$

Onde a configuração local do campo é dada pela seguinte figura (esquerda), e projetada no plano  $(x, y)$  dá a configuração mostrada na figura seguinte (direita).



# Aplicação

Neste capítulo aplicaremos as técnicas estudadas nos capítulos 1 e 2 como ferramentas para a obtenção da configuração topológica de um sistema de duas leis de conservação.

Dado um sistema de duas leis de conservação

$$U_t + F(u)_x = 0,$$

onde  $x \in \mathbb{R}; t > 0$ ,  $U(x, t) \in \mathbb{R}^2$  e  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$  se considerarmos soluções contínuas invariantes por escala do tipo  $U(\frac{x}{t})$ , pondo  $s = \frac{x}{t}$  e substituindo no sistema obtemos

$$\frac{dU(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} + DF(U) \cdot \frac{dU(s)}{ds} \frac{ds}{dx} = 0 \quad (1)$$

denotando  $\frac{dU(s)}{ds} = \dot{U}(s)$  obtemos que o sistema (1) é equivalente  $DF(U)\dot{U} = s\dot{U}$ , ou seja,  $\dot{U}(s)$  são os autovetores da matriz derivada da função de fluxo, associados aos autovalores  $s$ , nesse sentido, dizemos que as curvas de rarefação são as curvas integrais do campo de linhas gerado pelos autovetores da matriz derivada função de fluxo.

Se denotamos  $\dot{U}$  por  $\dot{U} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ , teremos

$$\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} du \\ ds \end{pmatrix},$$

Eliminando-se  $s$  entre as duas equações que dão as coordenadas dos autovetores de  $DF$  teremos

$$f_v(dv)^2 + (f_u - g_v)dudv - g_u(du)^2 = 0, \quad (2)$$

que é uma EDI do tipo 1, ou seja, as curvas de rarefação são as curvas integrais da equação (2). Aqui consideraremos a função de fluxo  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  com funções coordenadas polinômios homogêneos completos de grau 2. Seguindo [6], após mudança linear de coordenadas mostraremos que é suficiente considerar funções coordenadas da forma:

$$f(x, y) = x^2 - xy \quad (3)$$

$$g(x, y) = mx^2 + \frac{n+1}{2}y^2, \quad m, n \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Temos então duas possibilidades:

- (1) Se  $m < 0$ , existem regiões do plano onde os autovalores da matriz  $DF$  são complexos, essas regiões são chamadas de região elítica, no problema em questão essas regiões são delimitadas por duas retas que passam pela origem.
- (2) Se  $m > 0$ , estamos no problema do ponto umbílico isolado não há uma região elítica.

A configuração das rarefações para o problema 1 com funções  $f, g$  acrescidas de termos lineares foi completamente descrita por Eschenazi em [6]. O acréscimo de termos lineares transformou a região elítica numa região ilimitada cujo bordo é uma hipérbole. A configuração para as funções  $f, g$  como em (3) e (4) não foi apresentada.

O problema 2, ou seja, estudar a configuração das curvas integrais da equação (2) na vizinhança de um ponto umbílico isolado foi estudado por Gutierrez-Sotomayor em [7] do ponto de vista de sistemas dinâmicos e por Shaeffer-Shearer em [10] do ponto de vista de leis de conservação. Em [10], por outro caminho, os autores reobtiveram os resultados de [7].

O acréscimo de termos lineares transformou o ponto umbílico isolado numa região elítica limitada cujo bordo é uma elipse.

### 3.1 Formulação do problema

Nesta seção mostramos que a equação diferencial sobre a superfície  $M^2$  pode ter uma ou 3 singularidades. Usando as técnicas desenvolvidas nos capítulos 1 e 2 determinamos a natureza dessas singularidades e descrevemos como obter as configurações das curvas de rarefação (curvas integrais dos campos de linhas gerados pelos autoespaços da matriz  $DF$ ) no espaço de estados. Consideramos  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ ,  $g(x, y) = a'x^2 + b'xy + c'y^2$ , a proposição abaixo mostra que existe uma mudança de coordenadas linear que reduz o número de parâmetros da função  $F$  de 6 para 2.

**Proposição 3.1.1.** *Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  e denotemos por  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ . Existe uma mudança de coordenadas linear,  $P$ , tal que nas novas coordenadas as funções  $f, g$  se escrevem como:*

$$\begin{aligned} f(x', y') &= (x')^2 + x'y' \\ g(x', y') &= m(x')^2 + \frac{n+1}{2}(y')^2 \end{aligned}$$

onde  $m, n \in \mathbb{R}$ .

**Prova.** Queremos escrever  $X = PY$ , onde  $P = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$

Se escrevemos:

$$Q = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

$$Q' = \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix}$$

Temos que

$$X \rightarrow F(X) = (X^T Q X, X^T Q' X)$$

E desta forma usando que  $X = PY$ , obtemos

$$Y = P^{-1} X \rightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} Y^T P^T Q P Y \\ Y^T P^T Q' P Y \end{pmatrix}$$

isto é, as novas  $f, g$  são dadas por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(x', y') & g(x', y') \end{pmatrix} &= F(Y) \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} Y^T P^T Q P Y \\ Y^T P^T Q' P Y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta} \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^T P^T Q P Y \\ Y^T P^T Q' P Y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta} \begin{pmatrix} Y^T P^T (\delta Q - \gamma Q') P Y \\ Y^T P^T (\alpha Q' - \beta Q) P Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Escrevendo,

$$P^{-1} \begin{pmatrix} Y^T P^T Q P Y \\ Y^T P^T Q' P Y \end{pmatrix}$$

como

$$\begin{pmatrix} Y^T \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} Y \\ Y^T \begin{pmatrix} A' & \frac{B'}{2} \\ \frac{B'}{2} & C' \end{pmatrix} Y \end{pmatrix}$$

temos

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} (\alpha^2(a\delta - a'\gamma) + \alpha\beta(b\delta - b'\gamma) + \beta^2(c\delta - c'\gamma)) \\
B &= \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} ((2a - b')\alpha\gamma\delta - 2a'\alpha\gamma^2 + b\alpha\delta^2 + (b - 2c')\beta\gamma\delta - b'\beta\gamma^2 + 2c\beta\delta^2) \\
C &= \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} (c\delta^3 + (b - c')\delta^2\gamma + (a - b')\delta\gamma^2 - a'\gamma^3) \\
A' &= \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} (a'\alpha^3 + (b' - a)\alpha^2\beta + (c' - b)\alpha\beta^2 - c\beta^3) \\
B' &= \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} ((b' - 2a)\alpha\beta + 2a'\alpha^2\gamma - b\beta^2\gamma + (2c' - b)\alpha\beta\delta + b'\alpha^2\delta - 2c\beta^2\delta) \\
C' &= \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} (-a\beta\gamma^2 + a'\alpha\gamma - b\beta\gamma\delta + b'\alpha\gamma\delta - c\beta\delta^2 + c'\alpha\delta^2)
\end{aligned}$$

1. Genericamente temos que  $C = 0$ , pois se  $C \neq 0$ ,

$$(c\delta^3 + (b - c')\delta^2\gamma + (a - b')\delta\gamma^2 - a'\gamma^3) \neq 0$$

podemos escolher  $\frac{\delta}{\gamma}$  como sendo uma raiz da equação

$$\psi(x) = cx^3 + (b - c')x^2 + (a - b')x - a = 0$$

Assim,

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} (c\delta^3 + (b - c')\delta^2\gamma + (a - b')\delta\gamma^2 - a'\gamma^3) \\
&= \frac{\gamma^3}{\alpha\delta - \beta\gamma} \left( c \frac{\delta^3}{\gamma^3} + (b - c') \frac{\delta^2}{\gamma^3} \gamma + (a - b') \frac{\delta}{\gamma^3} \gamma^2 - a' \frac{\gamma^3}{\gamma^3} \right) \\
&= \frac{\gamma^3}{\alpha\delta - \beta\gamma} \psi \left( \frac{\delta}{\gamma} \right) = 0
\end{aligned}$$

2. Tomamos  $\alpha, \beta$  tal que  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

Temos agora.

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= Ax^2 + Bxy \\
g(x, y) &= A'x^2 + B'xy + C'y^2
\end{aligned}$$

Fazemos uma nova mudança de variáveis com

$$P = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ \beta' & \delta' \end{pmatrix}$$

obtemos :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \alpha' A + \beta' B \\
 B_1 &= B\delta' \\
 C_1 &= 0 \\
 A'_1 &= \frac{A'(\alpha')^2 + (B' - A)\alpha'\beta' + (C' - B)(\beta')^2}{\delta'} \\
 B'_1 &= (2C' - B)\beta' + B'\alpha' \\
 C'_1 &= C'\delta'
 \end{aligned}$$

1. Genericamente  $B'_1 = 0$ , isto é,

$$\begin{aligned}
 (2C' - B)\beta' + B'\alpha' &= 0 \\
 \frac{\beta'}{\alpha'} &= \frac{B'}{B - 2C'}
 \end{aligned}$$

esta escolha é sempre possível uma vez que a escolha  $\frac{\delta}{\gamma}$  e o fato  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  implica que  $B - 2C' \neq 0$

2. Temos  $A_1 = \alpha' A + \frac{BB'}{B-2C'}\alpha'$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \alpha' A + \beta' B \\
 &= \alpha' \left( A + \frac{B\beta'}{\alpha'} \right) \\
 &= \alpha' \left( A + \frac{BB'}{B - 2C'} \right)
 \end{aligned}$$

Fazemos

$$\alpha' = \frac{B' - 2C'}{BB' + AB - 2AC'}$$

tem-se  $A_1 = 1$

3. Temos  $B_1 = 1$ , escolha dada por  $\delta' = \frac{1}{B}$

4.  $A'_1 = B \left( A' + \frac{B'-A}{B-2C'} B' + \frac{C'-B}{(B'-2C')^2} (B')^2 \right) (\alpha')^2$

$$\begin{aligned}
 A'_1 &= \frac{A'(\alpha')^2 + (B' - A)\alpha'\beta' + (C' - B)(\beta')^2}{\delta'} \\
 &= \frac{A'(\alpha')^2}{\delta'} + \frac{(B' - A)\beta'(\alpha')^2}{\delta'\alpha'} + \frac{(C' - B)(\beta')^2(\alpha')^2}{\delta'(\alpha')^2} \\
 &= \frac{(\alpha')^2}{\delta'} \left( A' + \frac{B' - A}{B - 2C'} B' + \frac{C' - B}{(B' - 2C')^2} (B')^2 \right) \\
 &= B(\alpha')^2 \left( A' + \frac{B' - A}{B - 2C'} B' + \frac{C' - B}{(B' - 2C')^2} (B')^2 \right)
 \end{aligned}$$

5. Para  $C'_1 = \frac{C'}{B}$ , pela escolha de  $\delta$

$$C'_1 = C' \delta' = \frac{C'}{B}$$

Segue-se que as novas funções  $f, g$  se escrevem como:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 \\ &= x^2 + xy \\ g(x, y) &= A'_1 x^2 + B'_1 xy + C'_1 y^2 \\ &= mx^2 + \frac{n+1}{2} y^2 \end{aligned}$$

Onde  $m, n \in \mathbb{R}$ . ■

Os autoespaços da matriz  $DF$  são dados pela equação

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Eliminando-se  $s$  entre essas duas equações obtemos

$$\begin{aligned} f_y \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + (f_x - g_y) \frac{dy}{dx} - g_x &= 0 \\ f_y dy^2 + (f_x - g_y) dx dy - g_x dx^2 &= 0 \end{aligned}$$

Aqui  $dx$  e  $dy$  representam a primeira e a segunda coordenada de um autovetor de  $DF$ , respectivamente.

Substituindo as derivadas parciais envolvidas, a equação se escreve como:

$$x dy^2 + (2x - ny) dx dy - 2m x dx^2 = 0 \quad (5)$$

que é uma equação diferencial implícita do tipo estudado no capítulo 1

$$a(x, y) dy^2 + 2b(x, y) dx dy + c(x, y) dx^2 = 0,$$

onde,

$$\begin{aligned} a(x, y) &= a_1 x + a_2 y = x \\ b(x, y) &= b_1 x + b_2 y = x - \frac{n}{2} y \\ c(x, y) &= c_1 x + c_2 y = -2m x \end{aligned}$$

Seja

$$L(x, y) = (a_1 x + a_2 y) dy^2 + 2(b_1 x + b_2 y) dx dy + (c_1 x + c_2 y) dx^2$$

Escrevendo a parte linear com respeito a  $(x, y)$  na forma matricial temos

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2m & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{n}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^2 \\ 2dxdy \\ dy^2 \end{pmatrix}$$

Vamos considerar a mudança linear de coordenadas

$$\begin{cases} x = \alpha Y \\ y = \beta X \end{cases}$$

Substituindo  $x$  e  $y$  na expressão de  $L(x, y)$  obtemos

$$L_{(X,Y)} = 2mY dY^2 + (nX - 2Y)dXdY - YdX^2.$$

Estamos interessados em estudar o problema considerando as funções  $f, g$  acrescidas de termos lineares, isto é, estudaremos os campos de linhas gerados pelos autoespaços da matriz derivada da função

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + xy + d_1x + e_1y \\ g(x, y) &= mx^2 + \frac{n+1}{2}y^2 + d_2x + e_2y \end{aligned}$$

Cálculos semelhantes aos desenvolvidos no capítulo 2 dão que

$$L_{(X,Y,t)} = (2mY + t)dY^2 + (2Y - nX)dXdY + YdX^2 \quad (6)$$

## 3.2 Estudo das configurações

Nesta seção obteremos as configurações das curvas integrais de algumas das EDI estudadas na seção anterior. Para a obtenção das configurações usamos a mesma técnica de [6] e [9].

Conforme estudado no capítulo 2, o espaço de parâmetros  $(m, n)$  é separada por três curvas.

1. Uma curva que não é de Morse.
2. A curva  $\phi$  tem uma raiz dupla.
3. A curva onde  $\alpha_1$  e  $\phi$  tem uma raiz em comum.

Devemos considerar dois casos:  $m > 0$  e  $m < 0$ . Queremos estudar a equação

$$(2my + t)dy^2 + (nx - 2y)dxdy - ydx^2 = 0.$$

Fazendo a correspondência entre os coeficientes da equação considerada no capítulo 2 com esta temos  $a_1 = c_1 = 0$ ,  $a_2 = 2m$ ,  $b_1 = \frac{n}{2}$ ,  $b_2 = -1$ ,  $c_2 = -1$ . Usando esta correspondência na expressão de  $\phi(p)$  temos que para esta equação  $\phi(p) = p(2mp^2 - 2p + n - 1)$ .

Vamos determinar as curvas que separam regiões com diferentes tipos de singularidades no espaço de parâmetros. Para isso faremos uso das técnicas descritas nos capítulos 1 e 2 para a EDI que consideramos as três curvas especiais de nosso interesse:

a) Para que a curva não seja de Morse devemos ter  $2mn = 0$  o que dá  $n = 0$  uma vez que  $m \neq 0$ .

b) A curva  $\phi$  tem uma raiz dupla:  $n = 1$  ou  $m = \frac{1}{2(n-1)}$

De fato, como uma raiz é  $p = 0$  para que seja dupla, precisamos de  $n - 1 = 0$

O outro caso é quando o discriminante da parte quadrática é zero, isto é,

$$\begin{aligned} 4 - 4(2m)(n - 1) &= 0 \\ m &= \frac{1}{2(n - 1)} \end{aligned}$$

c) As curvas  $\alpha_1$  e  $\phi$  têm uma raiz em comum:

Lembrando que

$$\begin{aligned} \alpha_1(p) &= 2(a_2p^2 + (b_2 + a_1)p + b_1) \\ &= 4mp^2 - 2p + n \end{aligned}$$

1 Observamos que como  $p = 0$  é uma raiz de  $\phi$ , e como  $\alpha_1(0) = n$ , segue-se que  $n = 0$ .

2 Para  $m < 0$ ,  $n = 2 \pm \frac{\sqrt{-2m}}{m}$

Se tem que  $\pm \frac{1}{\sqrt{-2m}}$  são raízes de  $\phi(p)$  e de  $\alpha_1(p)$ , onde obtemos que  $n = 2 \pm \frac{\sqrt{-2m}}{m}$ .

A divisão do espaço de parâmetros é mostrado na figura (3.1)

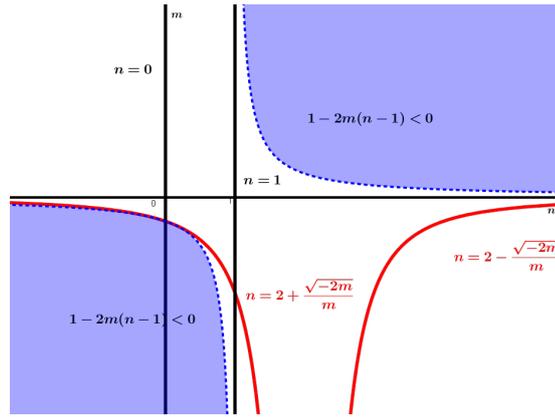


Figura 3.1: Separação do plano de parâmetros

Considerando o discriminante, o campo de linhas terá mais duas singularidades se  $1 - 2m(n - 1) > 0$  e só terá uma singularidade se  $1 - 2m(n - 1) < 0$  o que corresponde às regiões sombreadas na figura (3.1).

Seja  $p_i$  com  $i = 0, 1, 2$  raízes de  $\phi(p)$ , onde

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 \\ p_1 &= \frac{1 + \sqrt{1 - 2m(n - 1)}}{2m} \\ p_2 &= \frac{1 - \sqrt{1 - 2m(n - 1)}}{2m} \end{aligned}$$

os autovalores  $\alpha_1(p), \beta_2(p)$  são dados por:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 4mp^2 - 2p + n \\ \beta_2 &= -6mp^2 + 4p + 1 - n \end{aligned}$$

segue que a matriz  $D\tilde{\xi}(0, p_0)$  é dada por

$$D\tilde{\xi}(0, p_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ \beta_1 & 1 - n \end{pmatrix}$$

Assim podemos concluir que a singularidade  $p_0$  é do tipo

- nó se  $0 < n < 1$
- sela se  $n < 0$  ou  $n > 1$

Cálculos diretos mostram que

$$\begin{aligned}\alpha_1(p_1) &= \frac{1 + \sqrt{1 - 2mn + 2m} - nm + 2m}{m}, \\ \alpha_1(p_2) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} - 2nm + 2m}{m}, \\ \beta_1(p_1) &= \frac{-1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} + 2nm - 2m}{m}, \\ \beta_1(p_2) &= \frac{-1 + \sqrt{1 - 2mn + 2m} + 2nm - 2m}{m}.\end{aligned}$$

Vamos analisar o tipo de cada uma das singularidades em cada uma destas regiões

1. Começamos com o caso  $m > 0$ , o sinal do denominador é positivo, somente se analisará o sinal de cada numerador. Fazendo  $part_1 = (1 - mn + 2m)^2$ ,  $part_2 = 1 - 2mn + 2m$ ,  $part_3 = (1 - 2mn + 2m)^2$

$$\begin{aligned}\text{sinal}(\alpha_1(p_1)) &= 1 + \sqrt{1 - 2mn + 2m} - nm + 2m, \\ \text{sinal}(\alpha_1(p_2)) &= 1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} - 2nm + 2m \\ &= (\sqrt{part_1} - \sqrt{part_2}) \\ &= (part_1 - part_2) \\ &= m^2n^2 - 4m^2n + 4m^2 + 2m, \\ \text{sinal}(\beta_2(p_1)) &= -1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} + 2nm - 2m, \\ \text{sinal}(\beta_2(p_2)) &= -1 + \sqrt{1 - 2mn + 2m} + 2nm - 2m \\ &= (\sqrt{part_2} - \sqrt{part_3}) \\ &= (part_2 - part_3) \\ &= -4m^2n^2 + 8m^2n - 4m^2 + 2mn - 2m.\end{aligned}$$

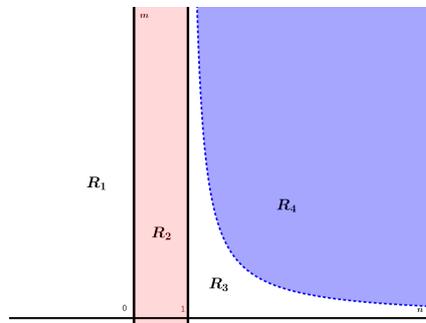


Figura 3.2:  $m > 0$

- (a) Na região  $R_1$ ,  $n < 0$  as três singularidades são tipo sela. De fato, a singularidade  $p_0$  é uma sela, para  $p_1$ ,  $\text{sinal}(\alpha_1(p_1)) > 1 + \sqrt{1 - 2mn + 2m} + 2m > 0$  e  $\text{sinal}(\beta_2(p_1)) < -1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} - 2m < 0$ , segue-se que a singularidade  $p_1$  é do tipo sela, e para

$p_2 \text{ sinal}(\alpha_1(p_2)) > 4m^2 + 2m > 0$  e  $\text{sinal}(\beta_2(p_2)) < -4m^2 + 2mn - 2m < 0$  segue-se a singularidade  $p_2$  é do tipo sela.

- (b) Na região  $R_2$ ,  $0 < n < 1$  as duas singularidades são tipo sela e a outra um nó. De fato, a singularidade  $p_0$  é um nó. para  $p_1$ ,  $\text{sinal}(\alpha_1(p_1)) > 1 + \sqrt{1 - 2mn + 2m} + m > 0$  e  $\text{sinal}(\beta_2(p_1)) < -1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} + 1 + 2m - 2m = -\sqrt{1 - 2mn + 2m} < 0$ , segue-se que a singularidade  $p_1$  é do tipo sela, e para  $p_2$   $\text{sinal}(\alpha_1(p_2)) > -4m^2n + 4m^2 + 2m = 4m^2(1 - m) + 2m > 0$   $\text{sinal}(\beta_2(p_2)) < 0$  uma vez que essa função é positiva para  $\frac{1}{2(1-m)} < m < 0$  e estamos no caso  $m > 0$ , segue-se que  $p_2$  é do tipo sela.
- (c) Na região  $R_3$ ,  $1 < n < \frac{1}{2m} + 1$  as duas singularidades são tipo nó e a outra uma sela. De fato, a singularidade  $p_0$  é sela. Para analisar a natureza das singularidades  $p_1$  e  $p_2$  usaremos que  $n < \frac{1}{2m} + 1$  para  $p_1$ ,  $\text{sinal}(\alpha_1(p_1)) > 1 + \sqrt{1 - 2mn + 2m} - \frac{(1 + 2m)}{2} + 2m > 0$  e  $\text{sinal}(\beta_2(p_1)) < -1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} + (2m + 1) - 2m < 0$ , segue-se que a singularidade  $p_1$  é do tipo sela, e para  $p_2$   $\text{sinal}(\alpha_1(p_2)) > -2m + 4m^2 + 4m^2 + 2m > 8m^2 > 0$  e  $\text{sinal}(\beta_2(p_2)) > 0$  é positivo somente entre suas raízes. segue-se a singularidade  $p_2$  é do tipo nó.
- (d) Na região  $R_4$ ,  $n > \frac{1}{2m} + 1$ . Para  $p_0$  temos uma sela, e como  $1 - 2m(n - 1) < 0$ , só se tem uma singularidade.

A figura (3.3) mostra a distribuição das singularidades no semi plano  $m > 0$

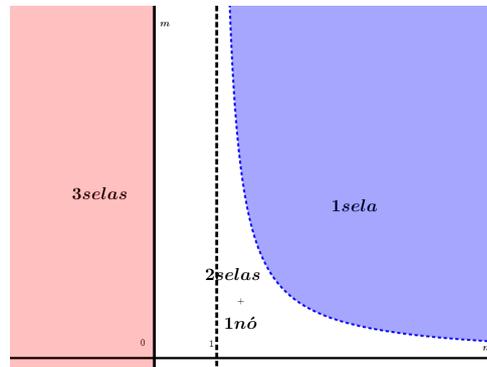
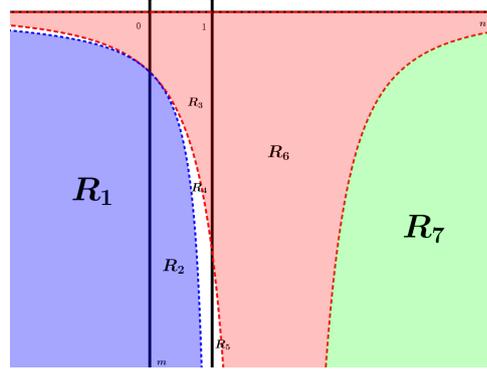


Figura 3.3: Distribuição das singularidades para  $m > 0$

2. Vamos considerar o caso  $m < 0$

Vamos a analisar o tipo de cada uma das singularidades em cada uma dessas regiões. Para o caso  $m < 0$ , o sinal do denominador é negativo, assim o sinal do autovalor será contrário ao sinal do numerador. Fazendo  $part_1 = (-1 - mn + 2m)^2$ ,  $part_2 = 1 - 2mn + 2m$ ,  $part_3 = (1 - 2mn + 2m)^2$

$$\begin{aligned}
\text{sinal}(\alpha_1(p_1)) &= -1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} + nm - 2m \\
\text{sinal}(\alpha_1(p_2)) &= -m^2n^2 + 4m^2n - 4m^2 - 2m, \\
\text{sinal}(\beta_2(p_1)) &= 1 + \sqrt{1 - 2mn + 2m} - 2nm + 2m, \\
\text{sinal}(\beta_2(p_2)) &= 4m^2n^2 - 8m^2n + 4m^2 - 2mn + 2m.
\end{aligned}$$

Figura 3.4:  $m < 0$ 

- (a) Na região  $R_1$ , onde  $1 + \frac{1}{2m} < n < 0$  existe somente uma singularidade em  $p_0$ , e esta é uma sela.
- (b) Na região  $R_2$ , onde  $1 + \frac{1}{2m} < n, n > 0$  existe somente uma singularidade em  $p_0$ , e esta é um nó.
- (c) Na região  $R_3$ , onde  $2 + \frac{\sqrt{-2m}}{m} < n < 1$ . Existem 3 singularidades 1 nó e 2 selas. A singularidade  $p_0$  é um nó, para  $p_1$ , e para  $-\frac{1}{2} < m < 0$   $\text{sinal}(\alpha_1(p_1)) < -1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} + m - \frac{1}{2} - 2m < 0$  e para  $m \leq -\frac{1}{2}$  tem-se  $\text{sinal}(\alpha_1(p_1)) < -1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} + 2m + \sqrt{-2m} - 2m < 0$  logo  $\text{sinal}(\beta_2(p_1)) > 0$ , segue-se que a singularidade  $p_1$  é do tipo sela, e para a singularidade  $p_2$   $\text{sinal}(\alpha_1(p_2)) = -2m(1 - 2mn - 2m) - m^2n^2 > 0$  e  $\text{sinal}(\beta_2(p_2)) < 4m^2 - 8m^2 - 4m + 4m^2 - 2m + 2m < 0$  segue-se a singularidade  $p_2$  é do tipo sela.
- (d) Na região  $R_4$ , onde  $0 < n < 2 + \frac{\sqrt{-2m}}{m}$  e  $n < 1$  existem 3 singularidades 2 nós e 1 sela. A singularidade  $p_0$  é um nó. para  $p_1$ , tem-se  $-\frac{1}{2} < m < 0$ ,  $\text{sinal}(\alpha_1(p_1)) < -1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} < 0$  e logo  $\text{sinal}(\beta_2(p_1)) > 0$ , segue-se que a singularidade  $p_1$  é do tipo sela, e para a singularidade  $p_2$   $\text{sinal}(\alpha_1(p_2)) < 0$  para  $m > -1/4$  o  $\text{sinal}(\beta_2(p_2)) < -4m - 1 < 0$  e para  $m < -1/4$   $\text{sinal}(\beta_2(p_2)) < -8m^2n - 2mn < 0$  segue-se a singularidade  $p_2$  é do tipo nó.
- (e) Na região  $R_5$ , onde  $1 < n < 2 + \frac{\sqrt{-2m}}{m}$  existem 3 singularidades 2 nó e 1 sela. A singularidade  $p_0$  uma sela, para  $p_1$ ,  $\text{sinal}(\alpha_1(p_1)) > -1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} + \sqrt{-2m} > 0$  logo  $\text{sinal}(\beta_2(p_1)) > 0$ , segue-se que a singularidade  $p_1$  é do tipo nó, e

para a singularidade  $p_2$   $\text{sinal}(\alpha_1(p_2)) < 0$  e com  $m < -2$   $\text{sinal}(\beta_2(p_2)) > 4m - 1 > 0$  segue-se a singularidade  $p_2$  é do tipo sela.

- (f) Na região  $R_6$ , onde  $2 + \frac{\sqrt{-2m}}{m} < n < 2 - \frac{\sqrt{-2m}}{m}$ , existem 3 singularidades 1 nó e 2 selas.

Temos em  $p_0$  uma sela, para  $p_1$ ,  $\text{sinal}(\alpha_1(p_1)) < -1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} + 2m + \sqrt{-2m} - 2m < 0$  logo  $\text{sinal}(\beta_2(p_1)) > 0$ , segue-se que a singularidade  $p_1$  é do tipo sela, e para a singularidade  $p_2$   $\text{sinal}(\alpha_1(p_2)) > -(2 - \sqrt{-2m})^2 + 8m^2 - 4m\sqrt{-2m} - 4m^2 - 2m > 0$  e  $\text{sinal}(\beta_2(p_2)) > 4m^2 - 8m^2 - 4m + 4m^2 - 2m + 2m > 0$  segue-se a singularidade  $p_2$  é do tipo nó.

- (g) Na região  $R_7$ , onde  $n > 2 - \frac{\sqrt{-2m}}{m}$  com  $n > 1$ , existem 3 singularidades do tipo sela, para  $p_1$ ,  $\text{sinal}(\alpha_1(p_1)) < -1 - \sqrt{1 - 2mn + 2m} + 2m + \sqrt{-2m} - 2m < 0$ ,  $\text{sinal}(\beta_2(p_1)) > 0$ , segue-se que a singularidade  $p_1$  é do tipo sela, e para a singularidade  $p_2$   $\text{sinal}(\alpha_1(p_2)) < -(2 - \sqrt{-2m})^2 + 8m^2 - 4m\sqrt{-2m} - 4m^2 - 2m < 0$  e  $\text{sinal}(\beta_2(p_2)) > 4m^2 - 8m^2 - 4m + 4m^2 - 2m + 2m > 0$  segue-se a singularidade  $p_2$  é do tipo sela.

A figura (3.5) mostra a distribuição das singularidades no semi plano  $m < 0$ .

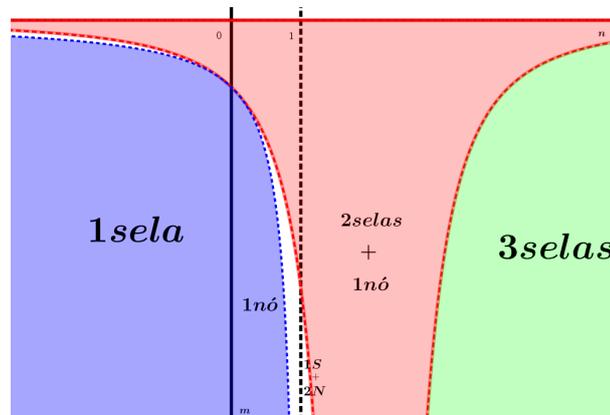
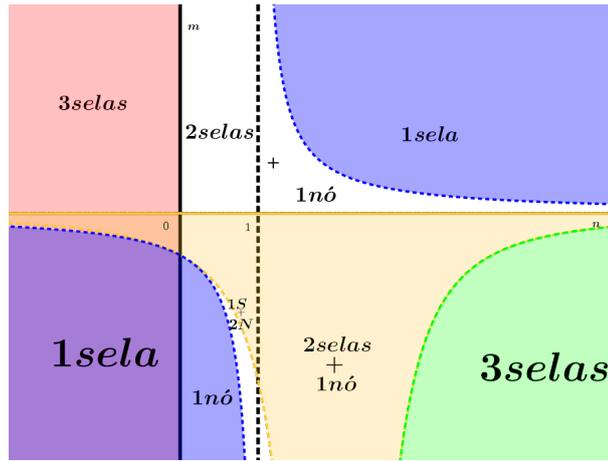


Figura 3.5:  $m < 0$

A figura (3.6) mostra a distribuição das singularidades de todo o plano, juntando a natureza para  $m < 0$  e  $m > 0$ .

Figura 3.6: Natureza para  $m, n$ 

**Proposição 3.2.1.** *Suponha que a EDI (6) é do tipo Morse, que a função cúbica  $\phi(p)$  não tem raízes duplas, e que  $\phi(p), \alpha_1(p)$  não têm raízes em comum, então a EDI é topologicamente equivalente à seguinte forma normal.*

$$(2my + t)dy^2 + (nx - 2y)dxdy - ydx^2 = 0$$

I-  $\Delta_0$  é um ponto isolado:  $m > 0$

(a) 1 sela,  $\frac{1}{2m} + 1 < n$

(b) 3 selas,  $n < 0$

(c) 2 selas + 1 nó,  $0 < n < 1$  ou  $1 < n < \frac{1}{2m} + 1$

II-  $\Delta_0$  é um cruzamento transversal de duas retas suaves:  $m < 0$

(a) 1 sela  $\frac{1}{2m} + 1 < n < 0$

(b) 1 nó  $\frac{1}{2m} + 1 < n, n > 0$

(c) 3 selas  $2 - \frac{\sqrt{-2m}}{m} < n, n > 1$

(d) 2 selas e 1 nó  $2 + \frac{-2m}{m} < n < 1$

(e) 1 sela e 2 nós  $0 < n < 2 + \frac{\sqrt{-2m}}{m}$  ou  $1 < n < 2 + \frac{-2m}{m}$

Para obter as trajetórias do campo de linha no plano  $(p, x)$  faremos o mesmo processo que em [6] e [9].

Em cada região do plano  $(p, x)$  onde este sistema de coordenadas está definido, as trajetórias do campo de linhas tem o mesmo comportamento que as trajetórias do campo de vetores de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{2mnp^2x - 2p^2t + nx - 2pt}{(2mp^2 - 2p - 1)^2} \\ \dot{p} &= \frac{-4m^2p^5 - 2mnp^3 + 8mp^4 + 4mp^3 + 2np^2 - 4p^3 + np - 4p^2 - p}{(2mp^2 - 2p - 1)^2} \end{aligned}$$

Nestas coordenadas a curva  $F = 0$ ,  $F_p = 0$  se escreve como

$$x(p) = -\frac{2pt(p+1)}{n(2mp^2+1)}$$

A curva  $x(p)$  é a curva de dobra no plano  $px$ . Temos então em  $(0,0)$  uma singularidade que tem o eixo  $x$  como variedade invariante para o autovalor  $n-1$ . A outra variedade invariante associada ao autovalor  $-n$  da matriz tem a direção do vetor  $(1-2n, 2t)$ .

No plano  $xy$  a curva de dobra tem equações paramétricas

$$\begin{aligned} x(p) &= -\frac{2pt(p+1)}{n(2mp^2+1)} \\ y(p) &= -\frac{p^2}{2mp^2+1} \end{aligned}$$

Projetando a variedade invariante, eixo  $x$ . Fazendo  $p = 0$  na equação  $y_{p_x}$

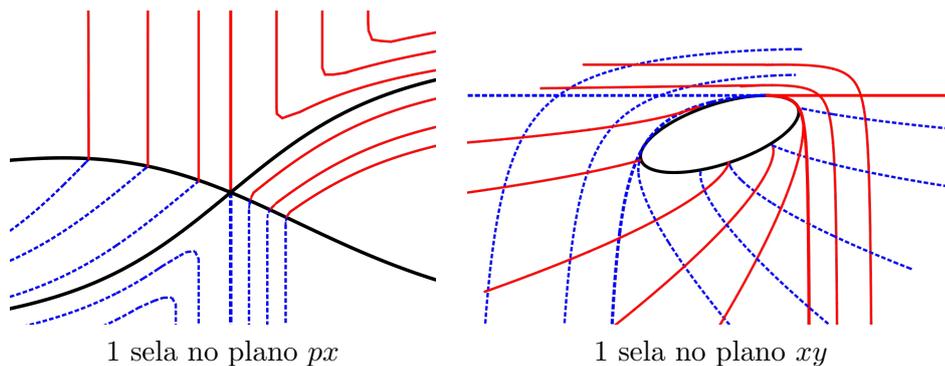
$$y_{p_x} = -\frac{p(nx-pt)}{2mp^2-2p-1}$$

Quando o campo tem somente uma singularidade, isto é,  $1+2m < 0$  e  $1-2m(n-1) < 0$ . Temos as duas possibilidades: para  $m > 0$  e  $m < 0$ .

1.  $m > 0$

1 sela

Fazemos os calculos para  $m = 1, n = 2$ , e para o parâmetro  $t = 1$ .

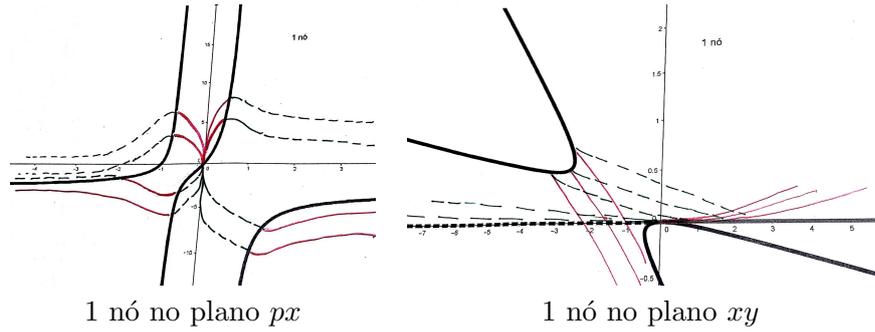


A configuração local do campo no plano  $px$  é dada pela figura à esquerda que projetada no plano  $(x, y)$  dá a configuração mostrada na figura à direita.

2.  $m < 0$

(a) 1 nó , se  $0 < n < 1$

Fazemos os cálculos para  $m = -1, n = 1/3$  e o parâmetro  $t = 1$ .



A configuração local do campo no plano  $px$  é dada pela figura à esquerda que projetada no plano  $(x, y)$  dá a configuração mostrada na figura à direita.

Vamos a considerar agora  $1 + 2m < 0$  e  $1 - 2m(n - 1) > 0$ , isto é, consideraremos o caso em que o campo tem 3 singularidades localizadas nos pontos  $(0, 0)$ ,  $(x_1, p_1)$ ,  $(x_2, p_2)$ .

Onde,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1 + \sqrt{1 - 2m(n-1)}}{2m} & p_2 &= \frac{1 - \sqrt{1 - 2m(n-1)}}{2m} \\ x_1 &= \frac{t(2mp_1 + 2p_1 - n + 1)}{mn(2p_1 - n + 2)} & x_2 &= \frac{t(2mp_2 + 2p_2 - n + 1)}{mn(2p_2 - n + 2)} \\ y_1 &= \frac{1}{2} \frac{t(2p_1 - n + 1)}{m(2p_1 - n + 2)} & y_2 &= \frac{1}{2} \frac{t(2p_2 - n + 1)}{m(2p_2 - n + 2)} \end{aligned}$$

As outras variedades invariantes são obtidas fazendo  $p = p_1$ , e  $p = p_2$ , respectivamente, na equação de  $ypx$ .

$$\begin{aligned} y_{p_x p_1} &= -\frac{1}{4} \frac{(1 + \sqrt{-2mn + 2m + 1})(-2mnx + \sqrt{-2mn + 2m + 1} + 1)}{m^2 n} \\ y_{p_x p_2} &= -\frac{1}{4} \frac{(-1 + \sqrt{-2mn + 2m + 1})(2mnx + \sqrt{-2mn + 2m + 1} - 1)}{m^2 n} \end{aligned}$$

Temos as duas possibilidades: para  $m > 0, m < 0$ .

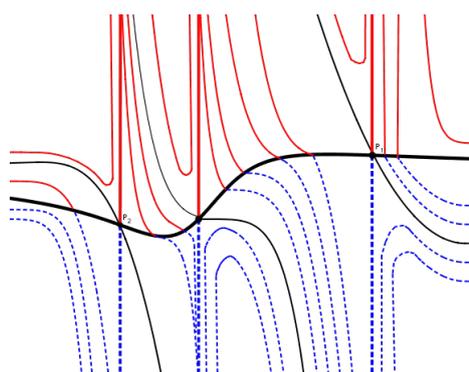
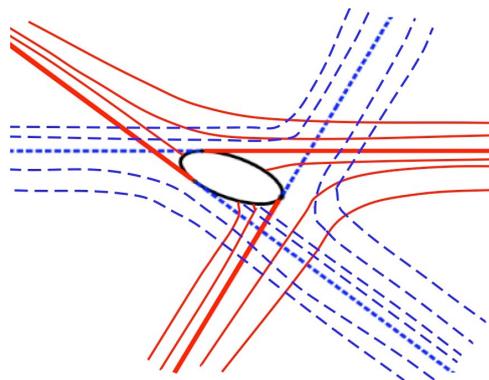
### 1. $m > 0$

#### (a) 3 selas

Fazemos os cálculos com  $m = 1/4, n = -2$  e com o parâmetro  $t = 1$ .

Obtemos que as variedades invariantes são:

$$\begin{aligned} y_{p_x 0} &= 0 \\ y_{p_x p_1} &= \frac{1}{5} \frac{(-5 + \sqrt{10})(-5 + \sqrt{10} - 30x)}{1 + 10\sqrt{10}} \\ y_{p_x p_2} &= -\frac{1}{5} \frac{(5 + \sqrt{10})(5 + \sqrt{10} + 30x)}{-1 + 10\sqrt{10}} \end{aligned}$$

3 selas no plano  $px$ 3 selas no plano  $xy$ 

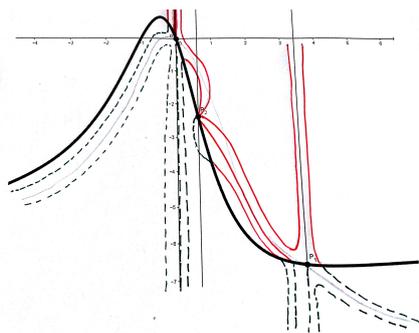
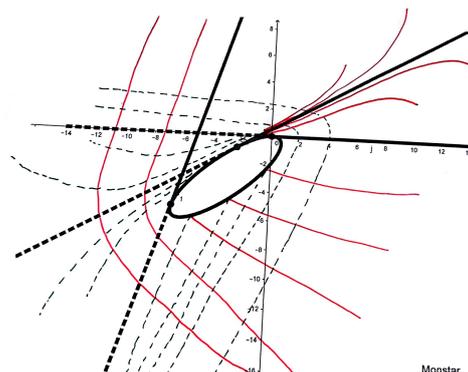
A configuração local do campo no plano  $px$  é dada pela figura à esquerda que projetada no plano  $(x, y)$  dá a configuração mostrada na figura à direita.

(b) **2 selas e 1 nó**

Fazemos os cálculos com  $m = 1/4$ ,  $n = 2$  e com o parâmetro  $t = 3$ .

Obtemos que as variedades invariantes são:

$$\begin{aligned} y_{p_{x_0}} &= 0 \\ y_{p_{xp_1}} &= \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})(6 + 3\sqrt{2} + 2x) \\ y_{p_{xp_2}} &= \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{2})(-6 + 3\sqrt{2} - 2x) \end{aligned}$$

2 selas e 1 nó no plano  $px$ 2 selas e 1 nó no plano  $xy$ 

A configuração local do campo no plano  $px$  é dada pela figura à esquerda que projetada no plano  $(x, y)$  dá a configuração mostrada na figura à direita.

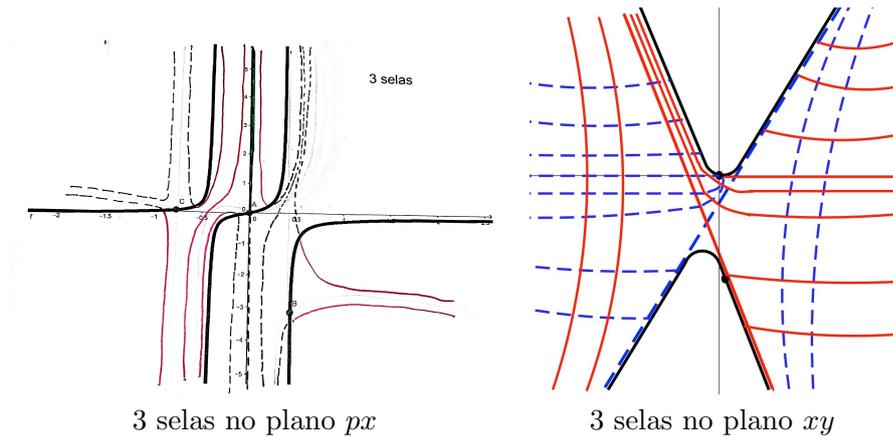
2.  $m < 0$

(a) **3 selas**, se  $n > 2 - \frac{\sqrt{-2m}}{m}$  com  $n > 1$ .

Fazemos os cálculos com  $m = -3$ ,  $n = 3$  e com o parâmetro  $t = 1$ .

Obtemos que as variedades invariantes são:

$$\begin{aligned}
 y_{p_x p_0} &= 0 \\
 y_{p_x p_1} &= -\frac{1}{108}(-1 + \sqrt{13})(-1 + \sqrt{13} - 18x) \\
 y_{p_x p_2} &= -\frac{1}{108}(1 + \sqrt{13})(1 + \sqrt{13} + 18x)
 \end{aligned}$$



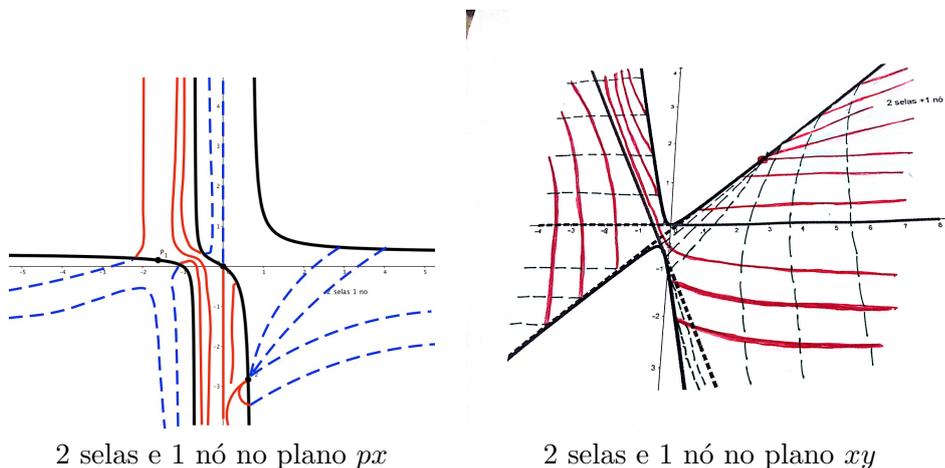
A configuração local do campo no plano  $px$  é dada pela figura à esquerda que projetada no plano  $(x, y)$  dá a configuração mostrada na figura à direita.

(b) **2 selas e 1 nó**

Fazemos os cálculos com  $m = -1, n = 3$ , e com o parâmetro  $t = 1$ .

Obtemos que as variedades invariantes são:

$$\begin{aligned}
 y_{p_x p_0} &= 0 \\
 y_{p_x p_1} &= -\frac{1}{12}(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} - 1 - 6x) \\
 y_{p_x p_2} &= -\frac{1}{12}(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} + 1 + 6x)
 \end{aligned}$$



A configuração local do campo no plano  $px$  é dada pela figura à esquerda que projetada no plano  $(x, y)$  dá a configuração mostrada na figura à direita.

# Conclusões

---

As técnicas desenvolvidas por Bruce-Tari em [1] e [2] fornecem formas normais que descrevem as configurações locais das curvas integrais de uma EDI do tipo

$$a(x, y, t)dy^2 + 2b(x, y, t)dxdy + c(x, y, t)dx^2 = 0,$$

onde  $a, b, c$  são funções suaves que se anulam na origem e a função discriminante  $\Delta = b^2 - ac$  tem uma singularidade do tipo Morse em  $t = 0$ . Para cada tipo de singularidade da função  $\Delta$  é apresentada uma forma normal.

Aplicamos as técnicas estudadas na obtenção das configurações das curvas de rarefação de um sistema quadrático de leis de conservação. Por ser um estudo de caráter local e com forma normal diferente para singularidades diferentes o uso dessas técnicas se mostrou pouco eficiente para descrever a configuração das curvas de rarefação, principalmente no caso em que a EDI tem mais de um tipo de singularidade.

# Referências Bibliográficas

---

- [1] J.W.BRUCE and F.TARI. **On binary differential equations**, *Nonlinearity* **8**(1995),255-271.
- [2] J.W.BRUCE and F.TARI. , **Generic 1-parameter families of binary differential equations of morse type**, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **3** (1997), no. 1, 79-90.
- [3] L. DARA, **Singularité génériques des equations differentielles multiformes**, *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática* **6** (1975), 95-128.
- [4] G.DARBOUX, **Leçons sur la théorie générale des surfaces**, Gauthier-Villars 4(1896), Paris.
- [5] A. A. DAVYDOV, **Normal forms of differential equations unsolved with respect derivatives in a neighborhood of singular point**, *Functional Analysis and Its Applications* **19** (1985), 81-89.
- [6] C.S. ESCHENAZI, **Campos de rarefação em sistemas de duas e três leis de conservação**, Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 1992.
- [7] C. GUTIERREZ and J. SOTOMAYOR, **Structurally stable configurations of lines of principal curvatures**, *Astérisque* 98-99 (1982), 195-215.
- [8] C.S. ESCHENAZI, M.J.D. CARNEIRO and R. RADICH, **On the topological classification of rarefaction curves in systems of three conservation laws**, *Bulletim Brazilian Mathematical Society-New Series* **41** (2010), no. 1, 139-160.
- [9] C.F.PALMEIRA, **Line fields defined by eigenspaces of derivatives of maps from the plane to itself**, *Proceedings of the VIth International Conference of Differential Geometry* (Santiago de Compostela, Spain), 1988, pp. 177-205.
- [10] D. G. SCHAEFFER and M. SHEARER, **The classification of  $2 \times 2$  systems of non-strictly hyperbolic conservation laws, with application to oil recovery**, *Communications in Pure and Applied Mathematics* **XL** (1987)

- 
- [11] L. Elon Lages **Análise no espaço  $\mathbb{R}^n$  V.2** Integrais de superfície, cap 7.(1929)
- [12] Thom R. **Sur les Equations Différentielle Multiformes et leurs integrales Singulaires** Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática no.1,1972, vol.3 p 1-11.