Sobre Gonalidade, Modelo Canônico de Curvas e Scrolls

Jairo Menezes e Souza

Belo Horizonte, Outubro de 2017

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Sobre Gonalidade, Modelo Canônico de Curvas e Scrolls

por

Jairo Menezes e Souza

Orientador: Prof. Dr. Renato Vidal da Silva Martins

Belo Horizonte 2017

Sobre Gonalidade, Modelo Canônico de Curvas e Scrolls

Este exemplar corresponde à redação final
da tese defendida por **Jairo Menezees e Souza**

Belo Horizonte, 27 de Outubro de 2017.

Prof. Dr. Renato Vidal da Silva Martins

Orientador

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. André Luis Contiero - UFMG.
- Profa. Dra. Danielle Franco Nicolau Lara - UFV/Florestal.
- Prof. Dr. Ethan Guy Cotterill - UFF.
- Prof. Dr. Maurício Barros Correa Jr - UFMG.
- Prof. Dr. Renato Vidal S. Martins (orientador) - UFMG.
- Prof. Dr. Simone Marchesi - UNICAMP.

Tese apresentada ao
Instituto de Ciências Exatas, **ICEx**,
Como requisito parcial para obtenção do título de
Doutor em Matemática.

Para Ester e Noemi.

Dare You to Move
By Switchfoot

Welcome to the Planet
Welcome to existence
Everyone's here
Everyone's here
Everybody's watching you now
Everybody waits for you now
What happens next?
What happens next?

I dare you to move
I dare you to move
I dare you to lift yourself up off the floor
I dare you to move
I dare you to move
Like today never happened
Today never happened before

Welcome to the fallout
Welcome to resistance
The tension is here
The tension is here
Between who you are and who you could be
Between how it is and how it should be

I dare you to move
I dare you to move
I dare you to lift yourself up off the floor
I dare you to move
I dare you to move
Like today never happened
Today never happened before

Maybe redemption has stories to tell
Maybe forgiveness is right where you fell
Where can you run to escape from yourself?
Where you gonna go?
Where you gonna go?
Salvation is here

I dare you to move...

Agradecimentos

A Deus Pai de Nosso Senhor Jesus Cristo que nos tem dado Seu Santo Espírito consolador. Por ser autor da vida e doador de todos os dons.

Ao Professor Renato por seu empenho e dedicação a este trabalho e pela paciência com que suportou minhas dificuldades.

À Professora Danielle por sua participação fundamental desde o início deste trabalho. Aos demais membros da banca pelas sugestões sempre valiosas.

Aos professores da Pós Graduação em Matemática da UFMG. Em especial: Prof. Israel Vaisencher e Prof. André Contieiro pelos cursos ministrados.

Aos funcionários do Departamento de Matemática. Em especial: Andréa e Kelli que atenderam todas as minhas demandas com um sorriso no rosto.

Aos meus colegas da Pós Graduação, em especial os da Geometria Algébrica que estiveram mais tempo junto a mim: Alan Muniz, Divane, Artur, Aislan, Weverson, Jhon, Gilson, Vinícios, Bruno e outros.

À minha querida esposa pelo carinho e cuidado constante, à minha filha pela alegria contagiante.

Aos meus pais por acreditarem em mim.

Aos meus familiares e aos irmãos da “Casa de Oração” que tornaram muito agradável estes anos em Belo Horizonte.

À IMTec/RC/UFG por possibilitar o tempo de licença para dedicação a este trabalho.

Resumo

Seja C uma curva inteira e projetiva; e seja C' seu modelo canônico. Estudaremos a relação entre a gonalidade de C e a dimensão de um scroll racional normal S que pode conter C'. O nosso maior interesse está no caso em que C é singular, ou mais ainda não-Gorenstein, em tal caso $C' \ncong C$. Em um primeiro momento analisamos algumas propriedades de uma inclusão $C' \subset S$ quando esta é induzida por um pencil em C. Depois, na direção oposta, assumimos que C' está contida em certo scroll, e verificamos algumas propriedades que C deve satisfazer, tais como gonalidade e o tipo de suas singularidades. Por fim, provamos que uma curva monomial racional C tem gonalidade d se e somente se C' está contida em um scroll de dimensão $d-1$.

Palavras-chave: curva não-Gorenstein, modelo canônico, gonalidade, scroll.

Abstract

Let C be an integral and projective curve; and let C' be its canonical model. We study the relation between the gonality of C and the dimension of a rational normal scroll S where C' can lie on. We are mainly interested in the case where C is singular, or even non-Gorenstein, in which case $C' \ncong C$. We first analyze some properties of an inclusion $C' \subset S$ when it is induced by a pencil on C. Afterwards, in an opposite direction, we assume C' lies on a certain scroll, and check some properties C may satisfy, such as gonality and the kind of its singularities. At the end, we prove that a rational monomial curve C has gonality d if and only if C' lies on a $(d-1)$-fold scroll.

Keywords: non-Gorenstein curve, canonical model, gonality, scrolls.

Sumário

Introdução

F. Enriques e D. W. Babbage [15, 4] provaram que uma curva canônica suave não hiperelítica é a interseção conjuntista de hiperquádricas, a menos do caso em que a curva é trigonal ou isomorfa a uma quíntica plana. Pode se deduzir de seus trabalhos a seguinte proposição: “uma curva regular, integral e projetiva é trigonal se e somente se é isomorfa a uma curva canônica que está contida em um scroll racional normal suave bidimensional". Isto nos dá uma caracterização geométrica da trigonalidade.

A partir desta perspectiva, somos levados a duas generalizações naturais desta caracterização, que foram feitas de fato. Pode-se considerar gonalidades mais altas, ou, ao invés, permitir que curvas trigonais tenham pontos singulares.

Na primeira linha encontramos, por exemplo, no trabalho de F.-O. Schreyer [30, Sec. 6], um estudo detalhado da relação entre uma curva canônica C de gonalidade d e o scroll S de dimensão $d-1$ em que ela está contida, quando $d=4,5$ (bem como $d=3$). Este estudo envolve verificar a unicidade do g_d^1; analisar a resolução de ciclos quando C é uma interseção completa em S; e também encontrar cotas superior e inferior para os invariantes de S em termos do gênero de C.

Na outra direção, em [28], K.-O. Stöhr e R. Rosa dedicaram seus estudos ao caso em que ambos, a curva trigonal e o scroll bidimensional, são singulares. Os resultados em que chegaram se encaixam perfeitamente com a afirmação acima trocando “regular” por “Gorenstein”. Um ponto chave nesta abordagem foi admitir sistemas lineares com pontos de base não-removíveis. Tal flexibilização na noção tradicional de pencil foi necessária porque os autores demonstram que uma curva canônica (Gorenstein) contida em um cone sempre passa pelo vértice, que não pode ser removido, se não a curva seria hiperelítica. Na verdade, sistemas lineares com pontos de base não-removíveis aparecerem mais cedo na literatura, sendo introduzidos por M. Coppens em [10]. Essencialmente, é o mesmo que permitir feixes livre de torção de posto 1, no lugar de fibrados, na definição de sistemas lineares; e trocar morfismos por pencils, na definição de gonalidade (veja a Seção 1.1).

Quando este estudo é feito para curvas não-Gorenstein, logo se depara com a seguinte questão: qual seria exatamente a generalização do enunciado acima neste caso? Os termos "isomorfos" e "canônico" caminham agora em direções diferentes, dependendo da escolha que fazemos. De fato, dada uma curva não-Gorenstein C com gonalidade d, podemos procurar por um scroll de dimensão $d-1$ contendo: (i) ou uma cópia isomorfa de C por meio de um mergulho adequado; (ii) ou, então, uma curva C' que poderia ser naturalmente chamada um "modelo canônico" de C.

No Exemplo 2.1.1, fazemos algumas observações sobre a dificuldade de obtermos o item (i) acima já que os métodos usuais de induzir inclusões em scrolls via pencils podem falhar em obter a dimensão esperada quando C é não-Gorenstein. Por outro lado, se (ii) representa uma opção, pode-se lidar, por exemplo, com a noção de um *modelo canônico* C' introduzido por Rosenlicht em [29] e também estudado por S. L. Kleiman e R. V. Martins em [20] (veja a Seção 1.1). Além disso, dentro desta perspectiva, [20, Thm. 3.4] que afirma que C' é a curva racional normal de grau $g-1$ em $\mathbb{P}^{g-1}$ se e somente se C é ou hiperelítica ou racional nearly normal, se combinado com [23, Thm. 2.1], pode ser reformulado como: C tem gonalidade 2 se e somente se C' está contida em um scroll de dimensão 1. Daí o mero formalismo de considerar curvas racionais normais como scrolls desempenha aqui o primeiro passo de um resultado geral, demonstrado no Teorema 4.2.2 para curvas monomiais.

No Capítulo 2, mostramos no Teorema 2.2.1 como obter uma inclusão $C' \subset S$ induzido por qualquer pencil em C. Em particular temos que S tem dimensão $(d-1)$ se C tem gonalidade d. Este resultado estende o de Stöhr-Rosa [28, Thm. 2.1, Lem 2.3] sobre curvas trigonais para qualquer gonalidade. O argumento usado é similar aos métodos de Andreotti-Mayer [1]. Nós também damos um cota superior para a dimensão do conjunto singular de S em termos de alguns invariantes do pencil e procuramos condições suficientes para que S seja de fato singular.

Ainda discutindo o caso geral, no Capítulo 3, nós estudamos a recíproca. Assumimos que C' está contida em um dado scroll S de dimensão d tal que o número de interseção de C' com uma fibra genérica de S é ℓ. Variando ℓ, nós descrevemos propriedades importantes de C em função de d e outros invariantes de S. Nosso principal objetivo é estudar gonalidade, mas nós também estudamos o número de pontos não-Gorenstein de C

e verificamos quando a curva pode ser, nearly Gorenstein, Kunz ou nearly normal. Estes conceitos, baseados em princípios locais introduzidos por V. Barucci e R. Fröberg em [5], tomaram uma caracterização geométrica em [20, Thms. 5.10, 6.5] onde foram conectados com a normalidade projetiva e aritmética do modelo canônico. Eles se mostraram uma ferramenta essencial ao fazer as primeiras distinções entre as curvas não-Gorenstein. Colocamos os resultados obtidos juntos no Teorema 3.2.1, que é uma generalização para d arbitrário de [22, Thms. 2.1, 4.1], provado para $d = 2, 3$ por D. Lara, S. Marchesi e R. V. Martins. No entanto, nós não obtemos a recíproca para o teorema da seção anterior. De fato, nos parece que teoria de interseção pura é insuficiente para concluir que C tem gonalidade $d+1$ quando S é um scroll de dimensão d até mesmo no caso mais simples em que $d = 2$; E o leitor deve notar a dificuldade de ajustar os argumentos de, por exemplo, [30] ou Brundu-Sacchiero [7] e Casnati-Ekedahl [8], para o caso em que o feixe dualizante não é um fibrado. Terminamos o capítulo estudando o caso específico de curvas nearly Gorenstein no Teorema 3.2.3

No Capítulo 4, assumimos que C é uma curva racional monomial e provamos que C tem gonalidade d se e somente se C' está contida em um scroll de dimensão $d-1$ (Teorema 4.2.2). Este resultado generaliza [22, Thms. 3.3, 5.1] que foi provado assumindo $d = 2, 3$ e C com somente um ponto singular. O ponto chave é a descrição combinatória de C' no Teorema 4.1.1, que é uma extensão de [22, Prp 3.1] e foi obtido com argumentos ligeiramente diferentes.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Modelo Canônico

Para nós, uma curva C é um esquema unidimensional integral e completo, definido sobre um corpo algebricamente fechado k. Chamamos g o gênero aritmético da curva C com feixe estrutural $\mathcal{O}_C$, ou simplesmente $\mathcal{O}$. Se $\pi : \overline{C} \to C$ é a normalização, seja $\overline{\mathcal{O}} := \pi_*(\mathcal{O}_{\overline{C}})$ e $\mathcal{C} := \mathcal{H}\mathrm{om}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{O})$, o condutor de $\overline{\mathcal{O}}$ em $\mathcal{O}$. Denotaremos por ω_C, ou simplesmente ω, o feixe dualizante de C.

Definição 1. Dizemos que uma curva C de gênero g é *Gorenstein* se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

(i) $dim\ \overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P = dim\ \mathcal{O}_P/\mathcal{C}_P$ para todo $P \in C$.

(ii) ω é invertível, isto é, $\omega_P \cong \mathcal{O}_P$ para todo $P \in C$.

(iii) $g = 0$ ou existe o morfismo $\varphi_\omega : C \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$.

Às curvas que não forem Gorenstein nos referimos simplesmente por *não Gorenstein*, o mesmo valendo para os pontos que não satisfazem às igualdades dos itens (i) e (ii).

Definição 2. Uma curva C é dita *hiperelítica* se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

(i) Existe um morfismo de grau 2 de $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$.

(ii) Existe um feixe invertível $\mathcal{F}$ tal que $\deg \mathcal{F} = h^0(\mathcal{F}) = 2$.

Curvas hiperelíticas são Gorenstein, como verificado em [29, Teo 17].

Definição 3. Um *sistema linear de dimensão r em C* é um conjunto da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{F}, V) := \{x^{-1}\mathcal{F} \mid x \in V \setminus 0\}$$

em que $\mathcal{F}$ é um feixe coerente de ideais fracionários em C e V é um subespaço vetorial de $H^0(\mathcal{F})$ de dimensão $r+1$. O *grau* de um sistema linear é o inteiro

$$d := \deg \mathcal{F} := \chi(\mathcal{F}) - \chi(\mathcal{O})$$

Note, em particular, que se $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}$ então

$$\deg \mathcal{F} = \sum_{P \in C} \dim(\mathcal{F}_P/\mathcal{O}_P).$$

Usaremos a notação g_d^r para representar um "sistema linear de grau d e dimensão r". Comumente chamamos um g_d^1 de pencil. O sistema linear é dito *completo* se $V = H^0(\mathcal{F})$, neste caso escrevemos simplesmente $\mathcal{L} = |\mathcal{F}|$. Finalmente, a *gonalidade* de C é o menor d para o qual existe um g_d^1 em C, ou equivalentemente, um feixe livre de torção $\mathcal{F}$ de posto 1 em C com grau d e $h^0(\mathcal{F}) \geq 2$. Um ponto $P \in C$ é dito um *ponto de base de $\mathcal{L}$* se $x\mathcal{O}_P \subsetneq \mathcal{F}_P$ para todo $x \in V$. Um ponto de base é dito *removível* se $\mathcal{L}'(\mathcal{O}\langle V\rangle, V)$ não possui ponto de base, onde $\mathcal{O}\langle V\rangle$ é o subfeixe do feixe constante das funções racionais gerado por todas seções de $V \subset k(C)$. Então, P é um ponto de base não removível de $\mathcal{L}$ se $\mathcal{F}_P$ não é um $\mathcal{O}_P$-module livre; em particular, P é singular no caso afirmativo.

Esta definição difere da definição usual de sistema linear já que se troca feixe invertíveis por feixe livre de torção de posto 1. Esta alteração é necessária por trabalharmos com curvas singulares que podem admitir ponto de base *não-removíveis* (para maiores detalhes ver M. Coppens [10]). Isto foi feito com sucesso por R. Rosa and K.-O. Stöhr em [28] obtendo resultados geométricos para curvas trigonais Gorenstein que se encaixam perfeitamente com os resultados conhecidos no caso de curvas suaves.

Exemplo 1.1.1. Considere a curva $C := \overline{(t^3, t^4, t^5)} \subset \mathbb{P}^3$.
C está contida no cone $S := \{(w : x : y : z) \in \mathbb{P}^3 \mid xz = y^2\}$.

Considere os pontos $P := (1:0:0:0)$ e $\infty := (0:0:0:1)$ e as retas $L_t := \{(\lambda : \theta : \theta t : \theta t^2) \,|\, (\lambda : \theta) \in \mathbb{P}^1_k\}$ e $L_\infty := \{(\lambda : 0 : 0 : \theta) \,|\, (\lambda : \theta) \in \mathbb{P}^1_k\}$. Temos que L_t encontra C em P e $P_t = (t^3, t^4, t^5)$ e L_∞ encontra C em P e ∞

Geometricamente, isto é um g^1_2 com ponto de base não-removível.

Escreva $k(C) = k(t)$, considere $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, t\rangle$, temos para $c \in k$:

$$\deg_Q((t-c)^{-1}\mathcal{F}) = \begin{cases} 1 & \text{se } Q = P \\ 1 & \text{se } Q = P_c \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \qquad \deg_Q(\mathcal{F}) = \begin{cases} 1 & \text{se } Q = P \\ 1 & \text{se } Q = \infty \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Logo $\mathcal{L}(\mathcal{F}, \langle 1, t\rangle)$ descreve este sistema linear.

Mas $\mathcal{O}_P = k \oplus t^3\overline{\mathcal{O}}_P$ e $\mathcal{F}_P = \mathcal{O}_P + t\mathcal{O}_P = k \oplus kt \oplus t^3\overline{\mathcal{O}}_P$, que não é um $\mathcal{O}_P$-módulo livre. Logo $\mathcal{F}$ não é invertível, mas apenas livre de torsão de posto 1.

Dados um esquema integral A, uma aplicação $\varphi : A \to C$ e um feixe $\mathcal{G}$ em C, seja

$$\mathcal{O}_A\mathcal{G} := \varphi^*\mathcal{G}/\mathrm{Torsion}(\varphi^*\mathcal{G}).$$

Dado um feixe coerente $\mathcal{F}$ em C seja $\mathcal{F}^n := \mathrm{Sym}^n\mathcal{F}/\mathrm{Torsion}(\mathrm{Sym}^n\mathcal{F})$. Se $\mathcal{F}$ é invertível, então $\mathcal{F}^n = \mathcal{F}^{\otimes n}$.

Definição 4. Definimos $\widehat{C} := \mathrm{Proj}(\oplus\, \omega^n)$ o blowup de C ao longo de ω. Se $\widehat{\pi} : \widehat{C} \to C$ é o morfismo natural, sejam $\widehat{\mathcal{O}} = \widehat{\pi}_*(\mathcal{O}_{\widehat{C}})$ e $\widehat{\mathcal{O}}\omega := \widehat{\pi}_*(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega)$. Em [29, p 188 top] Rosenlicht mostrou que o sistema linear $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\overline{C}}\omega, H^0(\omega))$ é livre de ponto base. Ele considerou então o morfismo $\kappa : \overline{C} \to \mathbb{P}^{g-1}$ definido por $\mathcal{L}$ e chamou $C' := \kappa(\overline{C})$ de *modelo canônico* de C. Ele também provou em [29, Teo 17] que se C é não hiperelítica, o mapa $\pi : \overline{C} \to C$ se fatora por $\pi' : C' \to C$. Neste caso, tome $\mathcal{O}' := \pi'_*(\mathcal{O}_{C'})$. Em [20, Dfn 4.9] encontramos uma outra caracterização de C'. Ele é a imagem do morfismo

$$\widehat{\kappa} : \widehat{C} \to \mathbb{P}^{g-1}$$

definido pelo sistema linear

$$\widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega, H^0(\omega)).$$

De acordo com o Teorema de Rosenlicht, como ω é gerado por seções globais, nós temos que

$$\widehat{\kappa} : \widehat{C} \to C'$$

é um isomorfismo se C é não hiperelítica.

Seja $\overline{\mathcal{O}}\omega := \pi_*(\mathcal{O}_{\overline{C}}\omega)$ e tome $\lambda \in H^0(\omega)$ tal que $(\overline{\mathcal{O}}\omega)_P = \overline{\mathcal{O}}_P\lambda$ para todo ponto singular $P \in C$. Tal diferencial existe pois $H^0(\omega)$ gera $\overline{\mathcal{O}}\omega$ como foi provado em [29, p 188 top], e também porque C possui finitos pontos singulares e k é infinito já que é algebricamente fechado. Seja

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_\lambda := \omega/\lambda$$

Assim, temos

$$\mathcal{C}_P \subset \mathcal{O}_P \subset \mathcal{W}_P \subset \widehat{\mathcal{O}}_P = \mathcal{O}'_P \subset \overline{\mathcal{O}}_P$$

para todo ponto singular $P \in C$, e a igualdade acontece se C não hiperelítica.

Definição 5. Seja $P \in C$. De acordo com [5, p 433] dizemos que P é *Kunz* se

$$\dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P) = \dim(\mathcal{O}_P/\mathcal{C}_P) + 1$$

e, de acordo com [5, p 418] dizemos que P é *quase Gorenstein* se

$$\dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P) = \dim(\mathcal{O}_P/\mathcal{C}_P) + \dim(\mathrm{Ext}^1(k, \mathcal{O}_P)) - 1.$$

Uma outra caracterização é dada por [5, Prp 21], um ponto $P \in C$ é *Kunz* se

$$\eta_P := \dim(\mathcal{W}_P/\mathcal{O}_P) = 1$$

e qualquer tal ponto é não Gorenstein e também quase Gorenstein. Finalmente, dizemos que C é *Kunz* se todos seus pontos não Gorenstein o forem. Por outro lado, pontos Gorenstein são sempre quase Gorenstein, e para qualquer ponto não Gorenstein P de uma curva (não hiperelítica) temos que P é quase Gorenstein se

$$\mu_P := \dim(\mathcal{O}'_P/\mathcal{W}_P) = 1$$

devido a [5, Prp 28]. Isso nos leva a definir dois invariantes

$$\eta := \sum_{P \in C} \eta_P \qquad\qquad \mu := \sum_{P \in C} \mu_P$$

que nos dá a seguinte relação

$$g = g' + \eta + \mu \tag{1.1}$$

onde g' é o gênero de C'. É provado em [5, Prp. 21] que pontos Kunz são quase Gorenstein, isto é,

$$\eta_P = 1 \implies \mu_P = 1$$

Finalmente, seguindo [20, Dfn 5.7], dizemos que C é *nearly Gorenstein* se C tem um único ponto não Gorenstein P que também é quase Gorenstein; e dizemos que C é *nearly normal* se $h^0(\mathcal{O}/\mathcal{C}) = 1$, isto é, C possui um único ponto não Gorenstein P e o feixe ideal maximal $\mathcal{M}_{\{P\}}$ é igual ao condutor $\mathcal{C}$.

Vamos listar alguns resultados importantes envolvendo os conceitos acima:

(i) C é nearly Gorenstein se e somente se é não Gorenstein e C' é projetivamente normal, segundo a [20, Thm. 6.5].

(ii) C é nearly normal se somente se é não Gorenstein e C' é aritmeticamente normal, devido a [20, Thm. 5.10].

(iii) P é Gorenstein se e somente se $\eta_P = \mu_P = 0$, e P é não Gorenstein se e somente se $\eta_P, \mu_P > 0$, mostrado em [5, p. 438 top]. Além disso, se $\eta_P = 1$ então $\mu_P = 1$, o que pode ser verificado em [5, Prp. 21]. Em particular, uma curva Kunz com um único ponto não Gorenstein é o mais perto de Gorenstein que temos.

(iv) O grau em $\mathbb{P}^{g-1}$ de C' é dado pela equação $deg(C') = 2g - 2 - \eta$, onde g é o gênero aritmético de C, segundo [23].

1.2 Semigrupo de Valores

Dado um ponto uniramificado $P \in C$ e uma função $x \in k(C)^*$, seja

$$v_P(x) := v_{\overline{P}}(x) \in \mathbb{Z}$$

em que $\overline{P}$ representa o ponto de $\overline{C}$ sobre P, e $v_{\overline{P}}$ é a valorização do AVD $\overline{\mathcal{O}}_P$. O *semigrupo de valores* de P é

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_P := v_P(\mathcal{O}_P).$$

Como $\mathcal{O}_P$ é um anel, S satisfaz as propriedades de semigrupo de valores, a saber:

(i) se $a, b \in S$ então $a + b \in S$

(ii) $0 \in S$

(iii) $\mathbb{N} \setminus S$ é finito.

Apresentamos também dois elementos de S, a saber:

$$\alpha = \alpha_P := \min(\mathrm{S} \setminus \{0\}) \quad \text{ e } \quad \beta = \beta_P := \min(v_P(\mathcal{C}_P)). \tag{1.2}$$

Para uso posterior vamos definir $\mathrm{S}^* = \mathrm{S}_P^* := \{a \in S \,|\, a \leq \beta\}$, e $\delta = \delta_P := \#(\mathbb{N} \setminus \mathrm{S})$ que coincide com o grau de singularidade P, isto é, $\delta = \dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P)$.

O *número Frobenius* de S é $\gamma := \beta - 1$ e um conjunto, cuja importância irá aparecer mais tarde, é definido por

$$\mathrm{K} = \mathrm{K}_P := \{a \in \mathbb{Z} \mid \gamma - a \notin \mathrm{S}\}. \tag{1.3}$$

Definimos também, o seguinte conjunto $\mathrm{K}^* = \mathrm{K}_P^* := \{a \in K \,|\, a < \beta\}$. Chame $G_P := \{a \in \mathbb{N} \,|\, a \notin S_P\}$ o conjunto das lacunas de S_P. Defina para $\lambda \in \mathbb{Z}$ o conjunto $G_P + \lambda := \{a + \lambda \,|\, a \in G_P\}$ e note que, $\mathrm{K}_P^* = G_P - \gamma$.

Definição 6. Seja $P \in C$. Definimos a *multiplicidade* de P por

$$m_C(P) = \dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathfrak{m}_P\overline{\mathcal{O}}_P),$$

então P é singular se sua multiplicidade é pelo menos 2. Dizemos que um ponto P uniramificado é *monomial* se $\widehat{\mathcal{O}_P} = k[[t^{n_1}, \ldots, t^{n_r}]]$, onde t é um parâmetro local em $\overline{P}$.

Exemplo 1.2.1. Seja k um corpo de característica zero e

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^4 \\ (X : Y) & \mapsto & (X^4Y^6 : X^7Y^3 : X^9Y : X^{10} : Y^{10}) \end{array}$$

e $C = \varphi(\mathbb{P}^1)$. C é uma curva algébrica integral e completa, possui uma única singularidade em $P = (0:0:0:0:1)$ e tem gênero aritmético 5. Tome $\overline{P} = (0:1)$ a pré imagem de P. Considerando $x = X/Y$, temos $k(\mathbb{P}^1) = k(x)$ e $\mathcal{O}_{\overline{P},\mathbb{P}^1} = k[x]_{(x)}$ e como $\varphi = (x^4 : x^7 : x^9 : x^{10} : 1)$ e, vendo $k(C)$ em $k(\mathbb{P}^1)$ segue que

$$\mathcal{O}_{P,C} = k[x^4, x^7, x^9, x^{10}]_{(x^4,x^7,x^9,x^{10})}$$

e que

$$\widehat{O}_P = k + kx^4 + kx^7 + kx^8 + kx^9 + kx^{10} + kx^{11} + \ldots$$

Temos $g = \delta_P = dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P) = dim(k[[x]], O_P) = 5$. E,

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_P = v_P(\mathcal{O}_P) = v_P(\widehat{O}_P) = \{0, 4, 7, \rightarrow\}$$

Temos $\alpha = 4$, $\gamma = 6$ e $\mathrm{K} = \mathrm{K}_P = \{0, 1, 3, 4, 5, 7, \rightarrow\}$.

1.3 Scrolls

Um *scroll racional normal* $S := S_{m_1,\ldots,m_d} \subset \mathbb{P}^N$ com $m_1 \leq \ldots \leq m_d$, é uma variedade projetiva de dimensão d que, depois de uma mudança de coordenadas adequada, é o conjunto dos pontos $(x_0 : \ldots : x_N) \subset \mathbb{P}^N$ tais que o posto da matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|c|cc} x_0 & x_1 & \ldots & x_{m_1-1} & x_{m_1+1} & \ldots & x_{m_1+m_2} & \ldots & \ldots & x_{N-1} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{m_1} & x_{m_1+2} & \ldots & x_{m_1+m_2+1} & \ldots & \ldots & x_N \end{array}\right) \tag{1.4}$$

é menor do que 2. Então, em particular,

$$N = e + d - 1 \tag{1.5}$$

onde $e := m_1 + \ldots + m_d$

Note que S é a união disjunta de $(d-1)$-planos determinados por uma escolha (parametrizada) de um ponto em cada uma das d curvas racionais normais de grau m_d contidas em espaços complementares em $\mathbb{P}^N$. Vamos nos referir a cada um destes $(d-1)$-planos como uma *fibra*. Então S é suave se $m_1 > 0$. Atravéz desta descrição geométrica podemos ver que

$$\deg(S) = e \tag{1.6}$$

O scroll S pode também ser visto naturalmente como a imagem de um fibrado projetivo. De fato, tomando $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_d)$, temos um morfismo birracional

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow S \subset \mathbb{P}^N$$

definido por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. O morfismo é tal que qualquer fibra de $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ é levada a uma fibra de S. O morfismo é um isomorfismo quando S é suave. Podemos usar, por exemplo, [13, 27] para mais detalhes.

Neste caso, vamos descrever o grupo de Picard do scroll como

$$\mathrm{Pic}(S) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}F$$

onde F é a classe da fibra, e H é a classe hiperplana. Podemos também computar o anel de Chow como

$$A(S) = \frac{\mathbb{Z}[H, F]}{(F^2\,,\ H^{d+1}\,,\ H^dF\,,\ H^d - eH^{d-1}F)} \tag{1.7}$$

De (1.6) temos as relações

$$H^d = e \qquad \text{and} \qquad H^{d-1}F = 1 \tag{1.8}$$

A classe canônica em S é dada por

$$K_S = -dH + (e-2)F \tag{1.9}$$

De [26, Lem. 3.1, Cor. 3.2], temos também a fórmula

$$h^0(\mathcal{O}_S(aH + bF)) = \begin{cases} (b+1)\binom{a+d-1}{d-1} + e\binom{a+d-1}{d} & \text{se } a \geq 0 \text{ e } b \geq -am_1 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases} \tag{1.10}$$

e

$$h^i(\mathcal{O}_S(aH + bF)) = 0 \qquad \text{se } i \geq 1,\ a \geq 0 \text{ e } b \geq -(am_1 + 1) \tag{1.11}$$

Capítulo 2

Modelos Canônicos em Scrolls via Sistemas Lineares

2.1 Motivação

Neste capítulo analisamos a relação entre pencils sobre uma curva e scrolls que devem contê-la. Estamos particularmente interessados no caso em que a curva aparece como um modelo canônico. Assim, seja $\mathcal{L}(\mathcal{F}, V)$ um pencil em uma curva $C \subset \mathbb{P}^n$; e assuma $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C(D)$ onde D é um divisor de Weil efetivo em C com suporte não contido em $\mathrm{Sing}(C)$. Seja ainda H uma seção hiperplana em C e suponha que a curva é linearmente normal, isto é, as seções hiperplanas realizam um sistema linear completo. Nestas hipóteses, podemos ajustar, por exemplo, o estudo de Schreyer em [30, pp. 113-115] para o caso singular, de modo a induzir, por meio de $\mathcal{L}$, uma inclusão $C \subset S \subset \mathbb{P}^n$ onde S é um scroll racional normal.

De fato, considere a aplicação multiplicação

$$V \otimes H^0(\mathcal{O}_C(H - D)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_C(H)) \tag{2.1}$$

e assuma $f := h^0(\mathcal{O}_C(H - D)) \geq 2$. Então a aplicação (2.1) produz uma matriz em $M_{2\times f}(H^0(\mathcal{O}_C(H)))$ cujos menores 2×2 se anulam em C. Portanto C está contido no scroll racional normal S definido por estes menores, que é tal que

$$\dim(S) = h^0(\mathcal{O}_C(H)) - h^0(\mathcal{O}_C(H - D)) \tag{2.2}$$

Podemos aplicar esta construção no seguinte exemplo.

Exemplo 2.1.1. Nós já sabemos por [28] que qualquer curva trigonal canônica (Gorenstein) está contida em um scroll bidimensional. Considere então, por exemplo, a curva

$$C = (1 : t^3 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10}) \subset \mathbb{P}^5$$

É uma curva racional monomial com somente um ponto singular $P = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$. Logo, seu gênero aritmético coincide com o grau de singularidade de P. Agora $\mathrm{S}_P = \langle 3, 7\rangle$, daí, C tem gênero $g = \delta_P = 6$. Mais ainda, $\deg(C) = 10$ então, C é canônica. Podemos também verificar que C é trigonal, com a gonalidade sendo computada pelo sistema linear $|\mathcal{O}_C(3Q)|$, onde $Q = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$. Daí, podemos usar a teoria esboçada acima para por C em um scroll bidimensional. Temos que $V = \langle 1, t^3\rangle$, $H = 10\,Q$ e

$$H^0(\mathcal{O}_C(H - 3Q)) = H^0(\mathcal{O}_C(7Q)) = \langle 1, t^3, t^6, t^7\rangle \subset k(t) = k(C)$$

Então, de acordo com (2.2), C está contida em um scroll bidimensional S já que

$$h^0(\mathcal{O}_C(H)) - h^0(\mathcal{O}_C(7Q)) = 6 - 4 = 2$$

Agora para ver este scroll de um modo que seja definido por uma matriz tal como (1.4), podemos reordenar as coordenadas como

$$C = (t^7 : t^{10} : 1 : t^3 : t^6 : t^9) \subset \mathbb{P}^5 = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5)\}$$

Assim, S é a superfície de $\mathbb{P}^5$ cortada pelos menores 2×2 de

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$$

Note que o scroll é da forma S_{13}. Note também que as seções da primeira linha (quando restritas ao C) geram $H^0(\mathcal{O}_C(7Q)) = \langle 1\rangle \otimes H^0(\mathcal{O}_C(7Q))$, enquanto as seções da segunda linha geram $\langle t^3\rangle \otimes H^0(\mathcal{O}_C(7Q))$ exatamente como na aplicação (2.1).

Uma pequena perturbação no exemplo acima é suficiente para perceber como as coisas pioram quando se passa para o caso não-Gorenstein. Por exemplo, seja agora C uma curva racional monomial com somente uma singularidade cujo semigrupo é o mesmo acima a menos de removermos o 7. A saber, um modelo linearmente normal para tal curva com a menor dimensão do espaço ambiente possível é

$$C = (1 : t^3 : t^6 : t^9 : t^{10} : t^{12} : t^{13} : t^{14}) \subset \mathbb{P}^7$$

O ponto singular é $P = (1 : 0 : \ldots : 0)$. Já que $\mathrm{S}_P = \langle 3, 10, 14\rangle$, a curva tem gênero $g = \delta_P = 7$. E como $\beta_P = 12 \neq 2\delta_P$, segue que P é não-Gorenstein, e então C é não-Gorenstein. Mais ainda, a curva é também trigonal, com gonalidade computada por $|\mathcal{O}_C(3Q)|$, onde $Q = (0 : \ldots : 0 : 1)$, é similar ao exemplo anterior. No entanto, este pencil não induz uma inclusão de C em um scroll bidimensional, como seria esperado. De fato, temos que $H = 14Q$ e

$$H^0(\mathcal{O}_C(H - 3Q)) = H^0(\mathcal{O}_C(11Q)) = \langle 1, t^3, t^6, t^9, t^{10}\rangle$$

Então, de acordo com (2.2), C está contida em um Scroll de dimensão

$$h^0(\mathcal{O}_C(H)) - h^0(\mathcal{O}_C(11Q)) = 8 - 5 = 3$$

A fim de alcançar a dimensão esperada, podemos trabalhar com o modelo canônico C' ao invés de C. Embora C' não é isomorfa a C (já que esta é não-Gorenstein), preserva a propriedade relacionada com a gonalidade de C. De fato, pelo Teorema 4.1.1 adiante, nós temos que

$$C' = (1 : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10}) \subset \mathbb{P}^6$$

que está contida em um scroll bidimensional da forma S_{23}. Esta inclusão do modelo canônico $C' \subset S_{23}$ pode ser obtida, por exemplo, trabalhando com o pullback $|(\pi')^*(\mathcal{O}_C(3Q))|$ e seguindo os mesmos passos acima.

Embora, na sequência, usaremos um outro enfoque para se obter scrolls por meio de sistemas lineares, vale destacar que a abordagem (extrínseca) acima é muito útil, mesmo no caso singular, quando espaço ambiente é pré-determinado (ver, e.g., [11, 12])

2.2 Curvas com Gonalidade Fixa

A maneira de induzir uma inclusão de C' em um scroll por meio de um g_d^1 em C pode ser ligeiramente modificada se o pencil tem um ponto de base (não-removível). É necessária uma abordagem mais intrínseca. Esta foi feita por Stöhr e Rosa em [28] baseados no trabalho de Andreotti e Mayer [1] no caso em que $d = 3$. O seguinte resultado usa argumentos similares para estender [28, Thm. 2.1, Lem 2.3] para graus maiores.

Teorema 2.2.1. *Seja C uma curva integral e projetiva com gênero aritimético g sobre um corpo algebricamente fechado k, e C' seu modelo canônico. Seja $\mathcal{L}(\mathcal{F}, V)$ um g_d^1 em C. Então $\mathcal{L}$ induz uma inclusão $C' \subset S \subset \mathbb{P}^{g-1}$ onde S é um scroll racional de dimensão m, tal que:*

(I) $m \leq d-1$, com igualdade se e somente se $\mathcal{L}$ é completo;

(II) Se S é singular então

$$\dim(\mathrm{Sing}(S)) < d - 2h^0(\mathcal{F}) + 1 + \frac{\deg(\mathcal{F} \cap x^{-1}\mathcal{F})}{2}$$

com $x \in V \setminus k$; em particular,

(i) se a expressão acima não for extritamente positiva, então S é suave;

(ii) se $\mathcal{L}$ é completo e livre de ponto de base, então $\dim(\mathrm{Sing}(S)) \leq m-3$;

(III) Se C é Gorenstein e $\mathcal{L}$ é completo com um ponto de base então S é singular.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos tomar $V = \langle 1, x\rangle \subset H^0(\mathcal{F}) \subset k(C)$. Considere então a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & H^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_C) \\ & f & \longmapsto & xf \end{array}$$

definida para qualquer $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega)$. Note que φ é não-estável, i.e., para todo subespaço $W \in H^1(\mathcal{F})$, se $\varphi(W) \subset W$, então $W = 0$, porque $\{x^i f\}_{i\in\mathbb{N}}$ forma um conjunto linearmente independente (visto em $k(C)$). Como $\mathcal{O}_C$ é um subfeixe de $\mathcal{F}$, temos que $H^1(\mathcal{F}) \subset H^1(\mathcal{O}_C)$. Então, por [1, Lem. 5, Cor. 1], podemos escrever

$$H^1(\mathcal{F}) = \bigoplus_{i=1}^{r} \left(\bigoplus_{j=0}^{m_i-1} kx^j f_i \right)$$

e

$$H^0(\omega) \cong H^1(\mathcal{O}_C) = \left(\bigoplus_{i=1}^{r} \left(\bigoplus_{j=0}^{m_i} kx^j f_i \right) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s} kh_i \right) \tag{2.3}$$

onde $f_i \in H^1(\mathcal{F}) \setminus \varphi(H^1(\mathcal{F}))$ para $1 \leq i \leq r$ e $h_i \in H^1(\mathcal{O}_C) \setminus (H^1(\mathcal{F}) + \varphi(H^1(\mathcal{F})))$ para $1 \leq i \leq s$. Daí por (2.3) o modelo canônico C' é a imagem do morfismo

$$(f_1 : \ldots : x^{m_1} f_1 : \ldots\ldots : f_r : \ldots : x^{m_r} f_r : h_1 : \ldots : h_s) : \overline{C} \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$$

e, em particular,

$$C' \subset S := S_{m_1,\ldots,m_r,0,\ldots,0} \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

além disso,

$$\begin{aligned} \dim(S) = r + s &= \dim(H^1(\mathcal{O}_C)/\varphi(H^1(\mathcal{F}))) \\ &= h^1(\mathcal{O}_C) - h^1(\mathcal{F}) \\ &= g - (h^0(\mathcal{F}) - \deg(\mathcal{F}) - 1 + g) \\ &= \deg(\mathcal{F}) - (h^0(\mathcal{F}) - 1) \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade vale já que φ é injetora. Agora $\deg(\mathcal{F}) = d$ e

$$\dim(\mathcal{L}) = 2 \leq h^0(\mathcal{F})$$

com a igualdade valendo se e somente se $\mathcal{L}$ é completo. Assim completamos a demonstração de (I).

Para demonstrarmos (II), ponha $\mathcal{G} := x^{-1}\mathcal{F}$, e note que $\varphi(H^1(\mathcal{F})) = xH^1(\mathcal{F}) = H^1(\mathcal{G})$. Agora, para todo subfeixe $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ do feixe constante $\mathcal{K}$ de funções racionais da curva C, podemos olhamos para os conjuntos $H^0(\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \omega))$ e $H^0(\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{G}, \omega))$ como subconjuntos de $H^0(\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, \omega))$. Podemos também formar a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} + \mathcal{G} \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

e aplicar o funtor exato a esquerda $H^0(\mathcal{H}\mathrm{om}(\bullet, \omega))$ para obtermos

$$H^0(\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \omega)) \cap H^0(\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{G}, \omega)) = H^0(\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F} + \mathcal{G}, \omega))$$

relacionando os três subconjuntos de $H^0(\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}\cap\mathcal{G},\omega))$. disso concluímos que

$$H^1(\mathcal{F})\cap H^1(\mathcal{G}) = H^1(\mathcal{F}+\mathcal{G}) \tag{2.5}$$

De (2.4) também temos que $\chi(\mathcal{F})+\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{F}+\mathcal{G})+\chi(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})$ o que nos dá

$$\deg(\mathcal{F}+\mathcal{G}) = \deg(\mathcal{F})+\deg(\mathcal{G})-\deg(\mathcal{F}\cap\mathcal{G}) \tag{2.6}$$

Para $\mathcal{F}$ como no enunciado do teorema, e $\mathcal{G}$ como posto anteriormente, é fácil ver pela definição deste que

$$h^0(\mathcal{G}) = h^0(\mathcal{F}) \qquad \text{e} \qquad \deg(\mathcal{G}) = \deg(\mathcal{F}) = d \tag{2.7}$$

Com isto em mente, temos que

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{Sing}(S)) = s-1 &= \dim(H^1(\mathcal{O}_C)/(H^1(\mathcal{F})+\varphi(H^1(\mathcal{F}))) - 1\\
&= \dim(H^1(\mathcal{O}_C)/(H^1(\mathcal{F})+H^1(\mathcal{G}))) - 1\\
&= h^1(\mathcal{O}_C) - (h^1(\mathcal{F})+h^1(\mathcal{G})-h^1(\mathcal{F}+\mathcal{G})) - 1\\
&= g - (2(h^0(\mathcal{F})-d-1+g) - h^1(\mathcal{F}+\mathcal{G})) - 1\\
&= 2(d-h^0(\mathcal{F})) - g + 1 + h^1(\mathcal{F}+\mathcal{G})\\
&< 2(d-h^0(\mathcal{F})) - g + 1 + g - \frac{\deg(\mathcal{F}+\mathcal{G})}{2}\\
&= 2(d-h^0(\mathcal{F})) + 1 - \left(\frac{2d-\deg(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})}{2}\right)\\
&= d - 2h^0(\mathcal{F}) + 1 + \frac{\deg(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})}{2}
\end{aligned}$$

onde a quarta igualdade vale por (1.11), a quinta é devida a (2.7) e Riemann-Roch, a desigualdade segue de [14, App.], e a sétima igualdade vale por (2.6). Daí demonstramos o ítem (II)-(i). Agora, se $\mathcal{L}$ é livre de pontos de base, então $\mathcal{F}\cap\mathcal{G} = \mathcal{O}$, e se for completo, então $h^0(\mathcal{F}) = 2$, daí segue (II)-(ii).

Para demonstrar (III), vemos que o isomorfismo natural

$$\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}\cap\mathcal{G},\omega) = \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F},\omega)+\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{G},\omega)$$

nos dá a inclusão $H^1(\mathcal{F}) + H^1(\mathcal{G}) \subset H^1(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$, portanto

$$\begin{aligned}\dim(H^1(\mathcal{O}_C)/(H^1(\mathcal{F}) + H^1(\mathcal{G}))) &\geq \dim(H^1(\mathcal{O}_C)/H^1(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})) \\ &= g - (h^0(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) - \deg(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) - 1 + g) \\ &= \deg(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) + 1 - h^0(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})\end{aligned}$$

se $\mathcal{L}$ é completo, então $h^0(\mathcal{F}) = 2$; mas já que $H^0(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) \subset H^0(\mathcal{F})$ e $x \notin H^0(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$ segue que $h^0(\mathcal{F} \cap G) = 1$. Por outro lado, se $\mathcal{L}$ tem um ponto de base P, que é Gorenstein uma vêz que C o é, então $\mathcal{F}_P \cap \mathcal{G}_P \supsetneq \mathcal{O}_P$, portanto $\deg(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) > 0$ e daí $s > 0$, i.e., S é singular. □

Como uma consequência do resultado acima nós temos o seguinte corolário.

Corolário 2.2.2. *Seja C uma curva projetiva integral de gonalidade d e seja C' seu modelo canônico. Então C' está contida em um scroll de dimensão $(d-1)$.*

Demonstração. Pelo ítem (I) do teorema anterior, é suficiente provar que se um sistema linear $\mathcal{L}$ computa a gonalidade de C, então deve ser completo. Para isto escreva $\mathcal{L} = (\mathcal{F}, V)$ onde $\mathcal{F}$ é livre de torsão de posto 1. Escolha qualquer ponto regular $P \in C$ e considere a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-P) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}(-P) \longrightarrow 0$$

Tomando característica de Euler temos

$$\big(h^0(\mathcal{F}) - h^0(\mathcal{F}(-P))\big) + \big(h^1(\mathcal{F}(-P)) - h^1(\mathcal{F})\big) = 1$$

Agora as duas parcelas são não negativas; além disso, $h^0(\mathcal{F}) \geq \dim(V) = 2$ e também temos que $h^0(\mathcal{F}(-P)) \leq 1$ já que este feixe tem grau $d-1$ e a gonalidade de C é d. Portanto $h^0(\mathcal{F}) = 2$ como desejado, i.e., $\mathcal{L}$ é completo. □

Capítulo 3

Sistemas Lineares via Modelos Canônicos em Scrolls

3.1 O Gênero de uma Curva no Scroll

Neste capítulo vamos usar as ferramentas da teoria de interseção para estudarmos curvas cujo modelo canônico está contido em um scroll suave. Mas antes disso começamos com um lema sobre combinatória elementar.

Lema 3.1.1. *Seja A um anel comutativo e sejam $a_1, \ldots, a_m$ elementos de A com $m \geq 2$ então temos que*

$$\sum_{j=1}^{s}\left((-1)^{j-1}\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq s}(a_{i_1}+\ldots+a_{i_j})^r\right)=\begin{cases}0 & r<s\\ (-1)^{s+1}s!\,a_1\ldots a_s & r=s\\ \dfrac{(-1)^r r!}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{s}a_1\ldots a_i^2\ldots a_s & r=s+1\end{cases} \tag{3.1}$$

Demonstração. Pelo teorema do binômio de Newton temos que $(a+b)^r=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}a^{r-j}b^j$ assim temos que

$$0=(1-1)^r=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}$$

Em palavras: a soma alternada da r-ésima linha do Triângulo de Pascal é zero para $r\geq 1$.

Lembre ainda do teorema do multinômio

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_l)^r = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_l=r} \binom{r}{k_1, k_2, \ldots, k_l} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot a_l^{k_l}$$

onde $\binom{r}{k_1,k_2,\ldots,k_l} = \frac{r!}{k_1!k_2!\cdot\ldots\cdot k_l!}$

Agora podemos mostrar o lema fazendo a contagem das parcelas iguais nas somas. Vamos fazer o caso $r < s$. No primeiro somatório de 3.1 ($j = 1$) vemos que o a parcela a_i^r aparece uma vêz. No segundo somatório ($j = 2$) temos $-(m-1)a_i^r$ e no terceiro temos $\binom{m-1}{2}a_i^r$, assim no l-ésimo somatório temos $(-1)^{l-1} \cdot \binom{m-1}{l}a_i^r$ e continuamos até o último somatório onde teremos $(-1)^{m-1} \cdot \binom{m-1}{m-1}a_i^r = (-a)^{m-1}a_i^r$. Daí quando efetuarmos a soma de 3.1 teremos que

$$\left(1 - (m-1) + \binom{m-1}{2} - \ldots + (-1)^{m-1} \cdot \binom{m-1}{m-1}\right) \cdot a_i^r = 0$$

para todo $i = 1, \ldots, m$.

Já no segundo somatório aparece pela primeira vez a parcela $-\binom{r}{k}a_{i_1}^{r-k}a_{i_2}$ e aparece somente uma vez. Já no terceiro somatório temos $(m-2) \cdot \binom{r}{r-k,k,0}a_{i_1}^{r-k}a_{i_2}^k a_{i_3}^0$. Já no quarto somatório temos $-\binom{m-2}{2} \cdot \binom{r}{r-k,k,0,0}a_{i_1}^{r-k}a_{i_2}^k a_{i_3}^0 a_{i_4}^0$, assim no l-ésimo somatório temos $(-1)^{l-1} \cdot \binom{m-2}{l} \cdot \binom{r}{r-k,k,0,\ldots,0}a_{i_1}^{r-k}a_{i_2}^k a_{i_3}^0 \ldots a_{i_l}^0$ e continuamos até o último somatório onde teremos $(-1)^{m-1} \cdot \binom{m-2}{m-2} \cdot \binom{r}{r-k,k,0,\ldots,0}a_{i_1}^{r-k}a_{i_2}^k a_{i_3}^0 \ldots a_{i_m}^0$. Daí quando efetuarmos a soma de 3.1 teremos que

$$-\left(1 - (m-2) + \binom{m-2}{2} - \ldots + (-1)^{m-1} \cdot \binom{m-2}{m-2}\right) \cdot \binom{r}{k} a_{i_1}^{r-k} a_{i_2} = 0$$

para todo $1 \leq i_1 < i_2 \leq m$.

Continuando, vemos que a parcela $\binom{r}{k_1,k_2,\ldots,k_l}a_{i_1}^{k_1}a_{i_2}^{k_2}\ldots a_{i_l}^{k_l}$, onde $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = r$, aparece pela primeira vez quando computamos o somatório $\sum(a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_l})^r$ e aparece uma só vez. Já no próximo somatório temos $\binom{r}{k_1,k_2,\ldots,k_l,0}a_{i_1}^{k_1}a_{i_2}^{k_2}\ldots a_{i_l}^{k_l}a_{i_{l+1}}^0$ que aparece $(m-l)$ vezes. No somatório seguinte temos $\binom{r}{k_1,k_2,\ldots,k_l,0,0}a_{i_1}^{k_1}\ldots a_{i_l}^{k_l}a_{i_{l+1}}^0 a_{i_{l+2}}^0$ que aparece $\binom{m-l}{2}$ vezes. Assim, no $(l+t)$-ésimo somatório temos $\binom{r}{k_1,k_2,\ldots,k_l,0,\ldots,0}a_{i_1}^{k_1}\ldots a_{i_l}^{k_l}a_{i_{l+1}}^0 \cdots a_{i_{l+t}}^0$ que aparece $\binom{m-l}{t}$. Daí quando efetuarmos a soma teremos, a menos de multiplicar por

± 1, que

$$\left(1-(m-l)+\binom{m-l}{2}-\ldots+(-1)^{m-1}\cdot\binom{m-l}{m-l}\right)\cdot\binom{r}{k_1,k_2,\ldots,k_l}a_{i_1}^{k_1}a_{i_2}^{k_2}\ldots a_{i_l}^{k_l}=0$$

para todo $1\leq i_1<\cdots<i_l\leq m$.

Resumindo o nosso argumento, quando computamos todos os somatórios de 3.1 colocamos o termo $\binom{r}{k_1,k_2,\ldots,k_l}a_{i_1}^{k_1}\ldots a_{i_l}^{k_l}$ em evidência e o número pelo qual teremos que multiplicar é, a menos de ± 1, a soma alternada da $(m-l)$-ésima linha do Triângulo de Pascal que é zero. Os outros casos são análogos, lembrando que se deve observar as parcelas que só aparecem na última soma. $\square$

Voltemos agora nossa atenção para curvas. Começamos com X uma curva contida em uma variedade suave S de dimensão d como

$$X=D_1\cdot\ldots\cdot D_{d-1}$$

onde os D_i's são divisores em S, e seja

$$\mathcal{E}:=\bigoplus_{i=1}^{d-1}\mathcal{O}_S(D_i).$$

Para calcular o gênero aritmético de X, considere sua resolução dentro de S via complexo de Koszul dada por

$$0\to\bigwedge^{d-1}\mathcal{E}^\vee\to\ldots\to\bigwedge^{2}\mathcal{E}^\vee\to\mathcal{E}^\vee\to\mathcal{O}_S\to\mathcal{O}_X\to 0$$

o que nos dá

$$p_a(X)=1-\chi(\mathcal{O}_S)+\chi(\mathcal{E}^\vee)-\chi(\wedge^2\mathcal{E}^\vee)+\ldots+(-1)^d\chi(\wedge^{d-1}\mathcal{E}^\vee) \tag{3.2}$$

Agora

$$\bigwedge^{j}\mathcal{E}^\vee=\bigoplus_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq d-1}\mathcal{O}_S(-D_{i_1}-\ldots-D_{i_j}) \tag{3.3}$$

e para um divisor arbitrário $D \in \mathrm{Pic}(S)$, o Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch nos dá

$$\chi(\mathcal{O}_S(D)) = td_d + D \cdot td_{d-1} + \ldots + \frac{1}{(d-2)!} D^{d-2} \cdot td_2 + \frac{1}{(d-1)!} D^{d-1} \cdot td_1 + \frac{1}{d!} D^d \quad (3.4)$$

onde td_i é a componente de grau i-ésimo do polinômio de Todd do fibrado tangente $\mathcal{T}_S$.

Então aplique (3.4) a (3.3) usando a linearidade da característica de Euler. Em seguida escreva a soma envolvendo as potências exteriores de $\mathcal{E}^\vee$ em (3.2) como um polinômio linear nas variáveis td_i e aplique (3.1) a cada um dos seus coeficientes. Assim, chegamos a

$$p_a(X) = 1 - \chi(\mathcal{O}_S) + \left(t_d - D_1 \cdot \ldots \cdot D_{d-1}\, t_1 + \frac{\sum_{i=1}^{d-1} D_1 \cdot \ldots \cdot D_i^2 \cdot \ldots D_{d-1}}{2} \right)$$

Agora lembre que $td_d = \chi(\mathcal{O}_S)$ e $td_1 = c_1(\mathcal{T}_S)/2$, o que nos dá a fórmula

$$2p_a(X) - 2 = D_1 \cdot \ldots \cdot D_{d-1} \cdot \big(D_1 + \ldots + D_{d-1} - c_1(\mathcal{T}_S)\big) \quad (3.5)$$

Agora assuma que S é um scroll racional normal. Para qualquer curva $X \subset S$ considere o parâmetro

$$\ell := X \cdot F \quad (3.6)$$

que será amplamente estudado aqui. Se X é uma interseção completa em S escreva

$$D_i = a_i H + b_i F$$

como acima. Então, de (1.7) e (1.8), temos facilmente que

$$\ell = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{d-1} \quad (3.7)$$

E também podemos usar essas relações para calcular $X \cdot H$ e obtemos

$$\deg(X) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{d-1} \cdot e + \sum_{i=1}^{d-1} a_1 \cdot \ldots \cdot b_i \cdot \ldots \cdot a_{d-1} \quad (3.8)$$

Para o restante e por razões de simplicidade, escreva

$$a := a_1 + \ldots + a_{d-1} \qquad b := b_1 + \ldots + b_{d-1}$$

Assim, referiremos a X como sendo *de tipo* (a, b), e note que

$$D_1 + \ldots + D_{d-1} = aH + bF$$

enquanto de (1.9) nós temos que

$$c_1(\mathcal{T}_S) = dH + (2 - e)F$$

Daí, para computar o gênero aritimético de X, nós temos

$$\begin{aligned} D_1 \cdot \ldots \cdot D_{d-1} \cdot c_1(\mathcal{T}_S) &= (de + 2 - e)\, a_1 \cdot \ldots \cdot a_{d-1} + d \sum_{i=1}^{d-1} a_1 \cdot \ldots \cdot b_i \cdot \ldots \cdot a_{d-1} \\ &= d \deg(X) + (2 - e)\ell \end{aligned}$$

e analogamente

$$D_1 \cdot \ldots \cdot D_{d-1} \cdot (D_1 + \ldots + D_{d-1}) = a \deg(X) + b\,\ell$$

que combinado com (3.5), nos dá

$$2p_a(X) - 2 = \deg(X)(a - d) + \ell(b + e - 2) \tag{3.9}$$

essa é uma ferramenta útil e será usada aqui ao estudarmos modelos canônicos de curvas.

3.2 Modelo Canônico em Scrolls de Dimensão Fixa

Nesta seção generalizamos, para dimensão arbitrária, os Teoremas [22, Thms. 2.1, 4.1] que estudam curvas C em que o modelo canônico C' está contido em um scroll de dimensão d para $d = 2, 3$. A ideia é pôr o enunciado do teorema de modo que ambos os casos possam ser deduzidos de fórmulas gerais envolvendo d. Para isto, relembre, da Seção 1.1, as definições dos parâmetros η e μ. A razão de focarmos apenas nos casos $\ell = 1,\ 2,\ d,$ $d + 1$ ficará clara após o Teorema 3.2.3 adiante

Teorema 3.2.1. *Seja C uma curva não hiperelítica de gênero $g \geq d + 3$, cujo modelo canônico C', de gênero g', está contido em um scroll racional normal suave S de dimensão*

d como uma interseção completa de tipo (a,b). Seja ℓ o número de pontos de C' em uma fibra genérica do scroll. Então vale o seguinte:

(I) $\mathrm{gon}(C) \leq \ell + g - g'$

(II) Se $b = -(g-(d+2))$ então ou bem C é Gorenstein e no máximo tetragonal ou então, $\ell = 2$ e C' é elítica. Caso contrário

$$\ell = \frac{(a-d-1)(2g-2-\eta)+\eta+2\mu}{b-d-2+g}$$

em particular, $\ell \leq 3$ se $d=2$.

(III) Vale o seguinte:

(i) se $\ell = 1$ então $C' \cong \mathbb{P}^1$ e C é racional com todos pontos singulares não-Gorenstein;

(ii) se $\ell = 2$ e C' não é elítica, então $C' \cong \mathbb{P}^1$ se e somente se $b = -(g-(d+1))$ ou então $b \geq -(g-(d+3))$.

(iii) se $\ell = d$, então $b = -(g-(d+2)) - (\eta + 2\mu + \tau(2g-2-\eta))/d$; onde $\tau \in \{-1,0,1,\ldots,d-3\}$. Em particular, se $d=2$ então C é nearly Gorenstein; e se $d=3$, então C é Kunz com somente um ponto não-Gorenstein se e somente se $b=-(g-4)$.

(iv) se $\ell = d+1$, então $b = -(g-(d+2)) - (\eta+2\mu+\tau(2g-2-\eta))/(d+1)$; onde $\tau \in \{0,1,\ldots,d-2\}$. Em particular, se $d=2$ então C é quase Gorenstein se e somente se for Kunz; e se $d=3$, então C é Kunz com somente um ponto não-Gorenstein se e somente se $b=-(3g-2)/2$ com g par.

(IV) Se C é não-Gorenstein e $\ell \geq 3$, escrevendo $S = S_{m_1,\ldots,m_d}$ temos que:

$$\frac{g-d-1}{\ell+d-2} + \frac{\nu(g-1)+3-\ell}{\ell(d+\ell-2)} \leq m_1 \leq \ldots \leq m_d \leq \frac{2g-2-\eta}{\ell}$$

onde $\nu := (d-1)\sqrt[d-1]{\ell} - d - 1$; a menos que $a = d+1$ onde $m_1 \geq (g-d-1)/(d+1)$; em particular, as duas fórmulas estendem o caso $d=2$ onde $m_1 \geq (g-3)/3$.

Demonstração. Primeiro, note que o item (I) e a cota superior em (IV) na verdade não dependem de C' ser uma interseção completa em S. Então, começamos aí nossa demonstração. Para demonstrarmos (I), primeiramente note que, como S é não singular, ℓ

coincide com o número de interseção $C' \cdot F$ definido anteriormente. Mais ainda, as fibras de S realizam um g^1_ℓ que podemos escrever como $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{C'}(D), V)$. Podemos assumir que D é efetivo, e considerar a seguinte sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \pi'_*(\mathcal{O}_{C'}(D)) \longrightarrow \pi'_*(\mathcal{O}_{C'}(D))/\mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

a partir da qual obtemos, depois de tomar as características de Euler, que

$$\deg(\pi'_*(\mathcal{O}_{C'}(D))) = h^0(\pi'_*(\mathcal{O}_{C'}(D))/\mathcal{O}_C)$$

Podemos ainda assumir que D é suportado fora de $(\pi')^{-1}(\mathrm{Sing}(C))$ para vermos que

$$h^0(\pi'_*(\mathcal{O}_{C'}(D))/\mathcal{O}_C) = \deg(D) + h^0(\pi'_*(\mathcal{O}_{C'})/\mathcal{O}_C) = \ell + g - g'$$

que é o grau do pencil $\mathcal{L}(\pi'_*(\mathcal{O}_{C'}(D)), V)$ em C e, em particular, supera sua gonalidade. Para verificarmos a cota superior em (IV), seguimos [30, pp. 113-115] para vermos que

$$\mathcal{O}_{C'}(m_d D) \subset \mathcal{O}_{C'}(H)$$

Agora $\deg(\mathcal{O}_{C'}(m_d D)) = m_d\ell$; enquanto, por outro lado, $\mathcal{O}_{C'}(H) = \mathcal{O}_{C'}\omega = \mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega$ já que $C' \cong \widehat{C}$. Mas

$$\deg(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega) = 2g - 2 - \eta$$

como foi provado em [20, Cor. 4.9] e a cota superior segue comparando os graus.

Para demonstrar os itens restantes, vamos tomar $X = C'$ em (3.9). Assim, note que $p_a(C') = g - \eta - \mu$ devido a (1.1), e $\deg(C') = \deg(\mathcal{O}_{C'}(H)) = 2g - 2 - \eta$ como acabamos de ver. Além disso, a dimensão do espaço ambiente é $N = g - 1$ o que implica que $e = g - d$ por (1.5). Portanto (3.9) nos dá

$$(a - d - 1)(2g - 2 - \eta) + \eta + 2\mu - \ell(d + 2 - b - g) = 0 \tag{3.10}$$

Se $b \neq d + 2 - g$, a igualdade acima fornece a fórmula de (II). Caso contrário

$$\eta + 2\mu = (d + 1 - a)(2g - 2 - \eta) \tag{3.11}$$

Como o lado esquerdo da equação é positivo, nós temos que $a \leq d+1$. Agora, note que C' é dada pela interseção de divisores efetivos, daí todos $a_i \geq 0$ devido a (1.10). Mais ainda, por construção, C' é não degenerada; portanto $\ell \geq 1$, o que implica que todos $a_i \geq 1$ e então $a \geq d-1$. Sendo não degenerada em $\mathbb{P}^{g-1}$, segue que C' tem grau pelo menos $g-1$. Então se todos $a_i = 1$, então (3.8) nos dá

$$\deg(C') = e + b = (g-d) - (g-d-2) = 2$$

o que não pode ocorrer já que $g \geq d+3 \geq 5$. Portanto, pelo menos um dos $a_i \neq 1$ e então $a \geq d$. Agora $a = d$ se e somente se existe exatamente um $a_i \neq 1$, e temos necessariamente $a_i = 2$, que acontece se e somente se $\ell = 2$; além disso (3.11) estabeleçe a relação

$$g - \eta - \mu = 1$$

que, por (1.1), é equivalente a $g' = 1$, i.e., C' é elítica. Se $a = d+1$, então ou bem nós temos somente dois $a_i \neq 1$ os dois com valor 2, e daí $\ell = 4$, ou então existe exatamente um $a_i \neq 1$ com valor 3, e então $\ell = 3$; além disso, o anulamento do lado esquerdo de (3.11) implica que C é Gorenstein. Neste caso, $C \cong C'$ e, lembrando que as fibras realizam um g_ℓ^1 em C', a gonalidade de C é pelo menos ℓ, o que, como já vimos, deve ser 3 ou 4 em tal caso. Logo demonstramos a primeira afirmação de (II) a menos da suficiencia, que será analisada mais adiante quando lidarmos com o caso $\ell = 2$.

Para terminarmos (II), falta demonstrar que $\ell \leq 3$ se $d = 2$. De fato, $d = 2$ é um caso especial quando $a = \ell$ e $b = d' - \ell(g-2)$ com, digamos, $d' := \deg(C')$, devido a (3.8). Daí (3.9) se torna

$$2g' = p(\ell) = -(g-2)\ell^2 + (2d' + g - 4)\ell - 2(d'-1) \tag{3.12}$$

Como $y = p(x)$ é côncava para baixo com raízes 1 e $2(d'-1)/(g-2)$, e g' é positivo, segue que

$$\ell \leq \frac{2(d'-1)}{g-2} = \frac{2(2g-\eta-3)}{g-2} = 4 - \frac{2(\eta-1)}{g-2}$$

Então $\ell \leq 4$ como $g \geq 5$. Se C é Gorenstein então $g' = g$, daí tomando $\ell = 4$ em (3.12) nos dá $g = 3$ o que é excluído. E se C é não Gorenstein e $\ell = 4$ então $\eta = 1$ e portanto $g' = 0$; mas pela Observação 1.1.(iii), $\mu = 1$ e também $g = 2$ o que também não pode ocorrer. Segue então que $\ell \leq 3$ em todo caso.

Para demonstrarmos (III), assuma $\ell = 1$. Assim, as fibras de S realizam g_1^1 em C', daí $C' \cong \mathbb{P}^1$. Como C é não hiperelítica, C e C' são biracionalmente equivalentes, então C é racional. Mais ainda, como C' é não singular, então todos os pontos singulares de C são necessáriamente não-Gorenstein, porque $\mathcal{O}_{C',P} \cong \mathcal{O}_{C,P}$ quando P é Gorenstein e C é não hiperelítica.

Se $\ell = 2$ então, como dissemos acima, $a = d$ e (3.10) nos dá

$$\eta + \mu + b - d - 1 = 0$$

Daí podemos escrever $b = d - g + g' + 1$. Se $g' = 0$ então $C' \cong \mathbb{P}^1$ com $b = d + 1 - g$; se $g' = 1$, isto é, C' é elítica, então $b = d + 2 - g$ e a equivalência na primeira afirmação do ítem (I) está completa agora. E, finalmente, se $g' \geq 2$, segue que $b > d + 2 - g$ como desejado. Agora, por definição, C é nearly Gorenstein se e somente se $\mu = 1$, que acontece se e somente se $b = d - \eta$. Se $d = 2$ então, como dito acima, $b = d' - \ell(g - 2)$; daí se $\ell = 2$, então

$$b = (2g - 2 - \eta) - 2(g - 2) = 2 - \eta$$

daí C é sempre nearly Gorenstein.

Se $\ell = d$ então (a fórmula em) (iii) segue de (3.10) pondo $\tau := a - d - 1$ e observando que $a \geq d$, como vimos acima, e

$$a \leq \ell + d - 2 = 2d - 2.$$

Em particular, se $d = 2$ então $\tau = -1$, e, como dissemos antes, $b = d' - \ell(g-2) = 2 - \eta$, daí substituindo em (iii) nos dá $\mu = 1$, que é equivalente a dizer que C é nearly Gorenstein. E se $d = 3$ então ou bem $\tau = -1$, o que implica que $a = d$ de onde nós temos $\ell = 2$ como discutido anteriormente; mas isto não pode ocorrer já que $\ell = d = 3$; ou então $\tau = 0$ o que nos dá $b = -(g - 4) + (\eta + 2\mu)/3$; o resultado segue já que C é Kunz com somente um ponto não-Gorenstein se e só se $\eta = \mu = 1$.

Se $\ell = d + 1$ então, similarmente, (iv) segue de (3.10) pondo novamente $\tau := a - d - 1$ e observando que $a \geq d + 1$ e $a \leq \ell + d - 2 = 2d - 1$. Em particular, se $d = 2$ então $\tau = 0$, e agora $b = d' - \ell(g - 2) = 4 - g - \eta$, daí substituindo em (iv) nos dá $\eta = \mu$, o que implica que C é quase Gorenstein se e somente se for Kunz. E se $d = 3$ então ou bem $\tau = 0$, isto implicaria $b = -g + 5 - (\eta + 2\mu)/4$ o que não permite o caso $\eta = \mu = 1$ já que b é inteiro; ou então $\tau = 1$ e $b = -(3g-2)/2$ com g par para que C seja Kunz com somente um ponto não-Gorenstein.

Para terminarmos a demonstração do teorema, vamos demonstrar a cota inferior do ítem (IV). Lembre que $m_1 \geq -b/a$ por (1.10). Já que estamos assumindo $\ell \geq 3$, podemos tomar $a \geq d+1$ como discutido acima. Se vale a igualdade então (3.10) nos dá

$$m_1 \geq \frac{g-d-1}{d+1} + \frac{\eta+2\mu}{\ell} - \frac{1}{d+1}$$

E a cota inferior segue desconsiderando a soma dos dois últimos termos, que é positiva, pois C é não-Gorenstein. Por outro lado, se $a > d+1$ então (3.10) nos dá

$$m_1 \geq \frac{g-d-2}{a} + \frac{(a-d-1)d' + \eta + 2\mu}{a\ell}$$

E a cota segue já que $d' \geq g-1$ como visto acima, $\eta + 2\mu \geq 3$ porque C é não-Gorenstein, e $(d-1)\sqrt[d-1]{\ell} \leq a \leq \ell + d - 2$ por definição. $\square$

Como foi mostrado em [22, Thm 4.1], se $d = 3$ tem-se um resultado similar enfraqueçendo a hipótese e permitindo C' ser uma interseção completa local. Isto foi feito via correspondencia de Hartshorne-Serre para variedades de codimensão 2 contidas em uma variedade suave. Então podemos completar a tabela em [22, Sec. 5] para todas curvas racionais monomiais tetragonais exibindo suas equações explícitas nas cartas afins, usando o método de H. Bresinsky [6] que prova que qualquer curva monomial no espaço afim é conjuntistamente uma interseção completa (ver Exemplo 3.2.2 abaixo). Mas, antes disso, mostraremos que o parâmetro ℓ definido acima pode ser calculado idependentemente para tal curva. De fato, podemos escrever a carta afim do scroll $S_{m_1 \ldots m_d}$ onde C' está contido como

$$(1 : x : \ldots : x^{m_d} : y_1 : y_1 x : \ldots : y_1 x^{m_{d-1}} : \ldots : y_{d-1} : y_{d-1} x : \ldots : y_{d-1} x^{m_1}) \cong \mathbb{A}^d$$

O que nos dá o morfismo

$$\varphi_i : C' \longrightarrow \mathbb{P}^1 \cong (1 : x : \ldots : x^{m_1})$$

e, por definição, ℓ nos dá o número genérico de pontos em uma fibra de φ_i para qualquer

$i \in \{1, \ldots, d\}$. Se C é monomial racional, então podemos escrever $x = t^r$ e $y_i = t^{s_i}$. Daí o número de pontos na pré-imagem de $(1 : a : \ldots : a^{m_i})$ é precisamente o número de soluções da equação $t^r = a$ uma vez que todo t determina um único ponto de C' pois é uma parametrização. Daí temos $\ell = r$ e, por construção, este r é a mesma razão da progressão aritmética que aparece no Lema 4.2.1.

Exemplo 3.2.2. Considere a curva $C = (1 : t^4 : t^9 : t^{11} : t^{15} : t^{16})$ que tem genêro 8 e um único ponto singular $P = (1 : 0 : \ldots : 0)$. Esta curva tem gonalidade 4 computada pelo sistema linear $|\mathcal{O}_C(4Q)|$ onde $Q = (0 : \ldots : 0 : 1)$. Pelo Corolário 2.2.2, seu modelo canônico C' está contido em um scroll de dimensão 3. De fato, pelo Teorema 4.1.1, $C' = (1 : t^4 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$, que está contido no scroll S_{113}. Considere então a carta afim:

$$U = \{(1 : x : y : x^2 : z : xy : x^2 : zx)\} \cong \{(x, y, z)\} = \mathbb{A}^3$$

e seja $X := C' \cap U$. Então podemos escrever $X = (t^4, t^7, t^9) \subset \mathbb{A}^3$. Do trabalho de J. Herzog [18] vemos que qualquer curva monomial X no espaço afim pode ser definida por um ideal primo I gerado por polinômios da forma

$$f_1 = x^{a_1} - y^{a_{12}} z^{a_{13}} \qquad f_2 = y^{a_2} - x^{a_{21}} z^{a_{23}} \qquad f_3 = z^{a_3} - x^{a_{31}} y^{a_{32}}$$

onde os expoentes satisfazem as relações

$$a_1 = a_{21} + a_{31} \qquad a_2 = a_{12} + a_{32} \qquad a_3 = a_{13} + a_{23}$$

Podemos ver no trabalho de H. Brezinsky [6] que é possível desconsiderar f_i quando $a_{jk}, a_{kj} \neq 0$ para $j, k \neq i$. De fato, se, por exemplo, $a_{21}, a_{12} \neq 0$, então podemos mostrar que

$$\langle f_1, f_2, f_3 \rangle \cap \langle x^{a_{21}}, y^{a_{12}} \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle$$

Temos então que $Z(f_1, f_2) = X \cup L$ onde $L = \{x = y = 0\}$ é o eixo z. Daí é suficiente encontrar $h \in I$ tal que $f_2 \in \sqrt{(f_1, h)}$ e $h = z^b + p$ com $p \in \langle x, y \rangle$. Então, claramente, $X = Z(f_1, h)$. Em [6], também é esboçado um método para encontrar tal h, que aplicamos no nosso exemplo. Logo, em nosso caso, $X = Z(I)$ com I gerado por

$$f_1 = x^4 - yz \qquad f_2 = y^3 - x^3 z \qquad f_3 = z^2 - xy^2$$

A fim de encontrar h, primeiro tome

$$\begin{aligned} h_1 &:= \big(f_2^{a_1} + (-1)^{a_1+1} x^{a_1(a_{21}-1)} z^{a_1 a_{23}} f_1\big)/y^{a_{12}} \\ &= (f_2^4 - x^8 z^4 f_1)/y \\ &= y^{11} - 4y^8x^3z + 6y^5x^6z^2 - 4y^2x^9z^3 + x^8z^5 \end{aligned}$$

Então tome

$$\begin{aligned} h_2 &:= \big(h_1 + x^4 z^5 f_1\big)/y \\ &= y^{10} - 4y^7x^3z + 6y^4x^6z^2 - 4yx^9z^3 + x^4z^6 \end{aligned}$$

Finalmente tome

$$\begin{aligned} h = h_3 &:= \big(h_2 + z^6 f_1\big)/y \\ &= y^9 - 4y^6x^3z + 6y^3x^6z^2 - 4x^9z^3 + z^7 \end{aligned}$$

Portanto $y^3h \in I$ e como I é primo e $y \notin I$ temos que $h \in I$. Além disso $f_2^4 \in \langle f_1, h\rangle$ então $f_2 \in \sqrt{\langle f_1, h\rangle}$ e daí $X = Z(f_1, h)$. Apenas observamos que este procedimento pode envolver a substituição de alguns termos binomiais para que a divisão $y^{a_{12}}$ seja possível.

Agora podemos melhorar a tabela que aparece em [22, pp. 18-19], onde, para qualquer curva monomial racional tetragonal C com somente um ponto singular e de gênero até 8, é exibido o modelo canônico C' e um scroll S onde aquele está contido. Aqui nós também damos as equações de C' em S, o parâmetro ℓ, e o tipo de singularidade. Com isto, podemos unificar as tabelas de [22] relativas a curvas com um ponto singular, conforme explicitado abaixo

gênero 4					
C	C'		eqs para C'	ℓ	scr
$(1 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9)$	$(1 : t : t^2 : t^3)$	NN	$y - x^2$	1	S_{11}
$(1 : t^3 : t^7 : t^8)$	$(1 : t : \frac{1}{t^3} : \frac{1}{t^2})$	–	$x^3y - 1$	1	S_{11}

gênero 5					
C	C'		eqs para C'	ℓ	scr
$(1 : t^6 : t^7 : \ldots : t^{10} : t^{11})$	$(1 : t^2 : t^4 : t : t^3)$	NN	$y^2 - x$	2	S_{12}
$(1 : t^3 : t^8 : t^9 : t^{10})$	$(1 : t^3 : t^6 : t^2 : t^5)$	NG	$y^3 - x^2$	3	S_{12}
$(1 : t^3 : t^7 : t^{10} : t^{11})$	$(1 : t^3 : t^6 : t^4 : t^7)$	K	$y^3 - x^4$	3	S_{12}
$(1 : t^4 : t^7 : t^9 : t^{10})$	$(1 : t : t^2 : \frac{1}{t^3} : \frac{1}{t^2})$	NG	$x^3y - 1$	1	S_{12}
$(1 : t^4 : t^5 : t^{10} : t^{11})$	$(1 : t : t^2 : \frac{1}{t^4} : \frac{1}{t^3})$	–	$x^4y - 1$	1	S_{12}
$(1 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{11})$	$(1 : t^2 : t^4 : t^3 : t^5)$	NG	$y^2 - x^3$	2	S_{12}
gênero 6					
$(1 : t^7 : t^8 : \ldots : t^{12} : t^{13})$	$(1 : t : t^2 : t^3 : t^4 : t^5)$	NN	$y - x^4$	1	S_{13}
$(1 : t^3 : t^8 : t^{12} : t^{13})$	$(1 : t^3 : t^6 : t^9 : t^5 : t^8)$	K	$y^3 - x^5$	3	S_{13}
$(1 : t^5 : t^8 : t^9 : t^{11} : t^{12})$	$(1 : t : t^2 : t^3 : \frac{1}{t^3} : \frac{1}{t^2})$	–	$x^3y - 1$	1	S_{13}
$(1 : t^5 : t^6 : t^9 : t^{12} : t^{13})$	$(1 : t : t^2 : t^3 : \frac{1}{t^4} : \frac{1}{t^3})$	–	$x^4y - 1$	1	S_{13}
$(1 : t^5 : t^6 : t^7)$	$(1 : t : t^2 : t^3 : \frac{1}{t^5} : \frac{1}{t^4})$	–	$x^5y - 1$	1	S_{13}
$(1 : t^5 : t^7 : t^9 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	$(1 : t^2 : t^3)$	NG	$y^2 - x^5$	2	S_{13}
$(1 : t^3 : t^{10} : t^{11})$	$(1 : t^3 : t^6 : \frac{1}{t} : t^2 : t^5)$	–	$xy^3 - 1$	3	S_{22}
$(1 : t^4 : t^9 : t^{10} : t^{11})$	$(1 : t : t^2 : t^4 : t^5 : t^6)$	–	$y - x^4$	1	S_{22}

gênero 6				
C e C'		eqs para C'	ℓ	scr
$(1 : t^5 : t^6 : t^8 : t^{13} : t^{14})$ $(1 : t^2 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8)$	–	$f = x^3 - z$ $h = y^6 - 3x^2y^4z + 3x^4y^2z^2 - z^5$	2	S_{111}
gênero 7				
$(1 : t^3 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$ $(1 : t^3 : t^6 : t^9 : t^2 : t^5 : t^8)$	–	$y^3 - x^2$	3	S_{23}
$(1 : t^3 : t^{10} : t^{13} : t^{14})$ $(1 : t^3 : t^4 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10})$	–	$y^3 - x^4$	3	S_{23}

gênero 7				
C e C'		eqs para C'	ℓ	scr
$(1:t^5:t^6:t^{13}:t^{14})$ $(1:t:t^2:t^5:t^6:t^7:t^8)$	–	$y-x^5$	1	S_{23}
$(1:t^5:t^9:t^{11}:t^{12}:t^{13})$ $(1:t:t^2:t^4:t^5:t^6:t^7)$	–	$y-x^4$	1	S_{23}
$(1:t^6:t^7:t^{10}:t^{11}:t^{14}:t^{15})$ $(1:t:t^4:t^5:t^6:t^7:t^8)$	–	$y-x^4$	1	S_{14}
$(1:t^6:t^7:t^8:t^{10}:t^{11})$ $(1:t:t^5:t^6:t^7:t^8:t^9)$	–	$y-x^5$	1	S_{14}
$(1:t^6:t^7:t^8:t^9)$ $(1:t:t^6:t^7:t^8:t^9:t^{10})$	–	$y-x^6$	1	S_{14}
$(1:t^6:t^9:t^{10}:t^{11}:t^{12}:t^{13})$ $(1:t:t^3:t^4:t^5:t^6:t^7)$	–	$y-x^3$	1	S_{14}
$(1:t^6:t^8:t^{10}:t^{11}:t^{13}:t^{14}:t^{15})$ $(1:t^2:t^4:t^6:t^8:t^5:t^7)$	NG	y^2-x^5	2	S_{14}
$(1:t^4:t^7:t^{12}:t^{13})$ $(1:t:t^4:t^5:t^7:t^8:t^9)$	–	$f=x^4-y$ $h=x^7-z$	1	S_{112}
$(1:t^4:t^{10}:t^{11}:t^{12}:t^{13})$ $(1:t^2:t^3:t^4:t^6:t^7:t^8)$	–	$f=y^2-x$ $h=z^4-2xyz^2+x^3$	4	S_{112}
$(1:t^5:t^8:t^{11}:t^{12}:t^{13}:t^{14})$ $(1:t^2:t^3:t^5:t^6:t^7:t^8)$	–	$f=x^3-z$ $h=y^2-z$	2	S_{112}
$(1:t^5:t^7:t^8)$ $(1:t^2:t^5:t^7:t^8:t^9:t^{10})$	–	$f=x^4-z$ $h=y^8-4xy^6z+6x^2y^4z^2$ $-4x^3y^2z^3+z^5$	2	S_{112}
$(1:t^6:t^7:t^8:t^{10})$ $(1:t^2:t^6:t^7:t^8:t^9:t^{10})$	–	$f=x^3-y$ $h=y^7-3x^2y^5z^2+3x^4y^2z^4+z^6$	2	S_{112}

gênero 8				
C e C'		eqs para C'	ℓ	scr
$(1 : t^4 : t^{10} : t^{13} : t^{14} : t^{15})$ $(1 : t^2 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	–	$f = x^3 - z$ $h = y^6 - 3x^2y^4z$ $+3x^4y^2z^2 + z^5$	2	S_{222}
$(1 : t^6 : t^9 : t^{11} : t^{13} : t^{14} : t^{15} : t^{16})$ $(1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9)$	–	$f = x^3 - z$ $h = y^2 - z$	2	S_{113}
$(1 : t^4 : t^9 : t^{14} : t^{15})$ $(1 : t : t^4 : t^5 : t^6 : t^8 : t^9 : t^{10})$	–	$f = x^4 - y$ $h = y^2 - z$	1	S_{122}
$(1 : t^4 : t^9 : t^{14} : t^{15})$ $(1 : t : t^4 : t^5 : t^6 : t^8 : t^9 : t^{10})$	–	$f = y^4 - x$ $h = y^6 - z$	4	S_{122}
$(1 : t^5 : t^7 : t^{13} : t^{15} : t^{16})$ $(1 : t^2 : t^3 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	–	$f = x^4 - z$ $g = y^2 - x^3$	2	S_{113}
$(1 : t^5 : t^7 : t^9 : t^{10})$ $(1 : t^2 : t^5 : t^7 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{12})$	–	$f = x^5 - z$ $g = y^2 - z$	2	S_{113}
$(1 : t^4 : t^{10} : t^{11} : t^{16} : t^{17})$ $(1 : t^4 : t^6 : t^7 : t^8 : t^{10} : t^{11} : t^{12})$	NG	$f = x^3 - y^2$ $h = y^7 - 3xy^4z$ $+3x^2yz^4 + z^6$	4	S_{113}
$(1 : t^4 : t^9 : t^{11} : t^{15} : t^{16})$ $(1 : t^4 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$	K	$f = x^4 - yz$ $h = y^9 - 4x^3y^6z$ $+6x^6y^3z^2 - 4x^9z^3 + z^7$	4	S_{113}
$(1 : t^4 : t^{11} : t^{13} : t^{14})$ $(1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9)$	–	$f = x^3 - y$ $h = x^7 - z$	1	S_{122}
$(1 : t^4 : t^{11} : t^{13} : t^{14})$ $(1 : t : t^3 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9)$	–	$f = y^3 - x$ $h = y^4 - z$	4	S_{122}
$(1 : t^5 : t^8 : t^{12} : t^{13} : t^{14})$ $(1 : t^2 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10})$	–	$f = x^4 - z$ $h = y^8 - 4xy^6z + 6x^2y^4z^2$ $-4x^3y^2z^3 + z^5$	2	S_{122}

onde convenientemente adotamos

$$\begin{aligned} \mathrm{K} &:= \text{Kunz} \\ \mathrm{NG} &:= \text{nearly Gorenstein} \\ \mathrm{NN} &:= \text{nearly normal} \end{aligned}$$

Note que na tabela acima não encontramos nenhuma curva trigonal nearly Gorenstein (ou Kunz) C com modelo canônico C' contido em um scroll com $\ell = 1$; e também não achamos nenhuma C tetragonal nearly Gorenstein com C' em um scroll com $\ell = 1,\ 2$. Esta observação motiva o seguinte resultado.

Teorema 3.2.3. *Seja C uma curva nearly Gorenstein, cujo modelo canônico C' está contido em um sroll racional normal S de dimensão d. Se as fibras de S geram um g^1_ℓ completo sobre C', então $d \leq \ell \leq d+1$.*

Demonstração. Como S é suave, o g^1_ℓ não tem pontos de base e pode ser escrito como $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{C'}(D), V)$. Agora, de acordo com [20, Thm. 6.5], C é nearly Gorenstein se e somente se C' é linearmente normal. E se C' é linearmente normal e está contida em S, então, por [30, Sec. 2], temos que

$$h^0(\mathcal{O}_{C'}(H-D)) = \deg(S).$$

Usando [20, Cor. 4.9] junto com Riemann-Roch em C' para o lado esquerdo da última igualdade, e usando (1.5) e (1.6) para o lado direito nós obtemos

$$2g - 2 - \eta - \ell + 1 - g' + h^1(\mathcal{O}_{C'}(H-D)) = g - d \tag{3.13}$$

Lembre que $g' = g - \eta - \mu$ e que C é nearly Gorenstein se e somente se $\mu = 1$, daí temos que (3.13) fica

$$\ell = d + h^1(\mathcal{O}_{C'}(H-D)) \tag{3.14}$$

Defina $\mathcal{F} := \pi'_*(\mathcal{O}_{C'}(D))$. Olhando a imagem direta e usando a dualidade de Serre em C temos

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{O}_{C'}(H-D)) &= H^1(\pi'_*(\mathcal{O}_{C'}(H-D))) \\ &= H^1(\widehat{\mathcal{O}}\omega \otimes \mathcal{F}^\vee) \\ &= H^0(\mathcal{H}\mathrm{om}(\widehat{\mathcal{O}}\omega, \omega) \otimes \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Ponha

$$\mathcal{G} := \mathcal{H}\mathrm{om}(\widehat{\mathcal{O}}\omega, \omega) \otimes \mathcal{F}.$$

. Claramente, $H^0(\mathcal{G}) \subset H^0(\mathcal{F}) = H^0(\mathcal{O}_{C'}(D))$. Agora, já que C é nearly Gorenstein, ela tem um único ponto não-Gorenstein que chamamos P. Podemos assumir que D tem suporte fora de $(\pi')^{-1}(P)$. Então, por construção, $\mathcal{G}_Q = \mathcal{F}_Q$ se $Q \neq P$, e também $\mathcal{G}_P = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\widehat{\mathcal{O}}_P, \mathcal{O}_P)$. Podemos ainda assumir que D é efetivo, daí $k \subset H^0(\mathcal{F})$; mas note que $k \cap \mathcal{G}_P = 0$, logo $H^0(\mathcal{G}) \subsetneq H^0(\mathcal{F})$. Portanto

$$h^1(\mathcal{O}_{C'}(H-D)) = h^0(\mathcal{G}) < h^0(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{O}_{C'}(D)) = 2$$

onde a última igualdade vale porque g^1_ℓ é completo. O resultado segue de (3.14). $\square$

Da mesma maneira que observado em [22], os esforços feitos aqui para caracterizar gonalidade via scrolls, mesmo que gerais, são ainda iniciais.

É possível que tal caracterização requeira mesmo um estudo mais detalhado de syzygies de modelos canônicos nos mesmos moldes de, e.g., [9], o que seria um tema interessante para trabalhos futuros.

Capítulo 4

Gonalidade de Curvas Racionais Monomiais

4.1 Modelos Canônicos de Curvas Monomiais

Primeiramente, vamos estabelecer os objetos com os quais trabalharemos neste capítulo. Considere o morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ (s:t) & \longmapsto & (s^{a_n} : t^{a_1}s^{a_n-a_1} : \ldots : t^{a_{n-1}}s^{a_n-a_{n-1}} : t^{a_n}) \end{array}$$

A imagem C de tal aplicação é o que chamamos de uma *curva racional monomial*, que, por simplicidade, denotamos por

$$C = (1 : t^{a_1} : \ldots : t^{a_{n-1}} : t^{a_n})$$

com $a_1 < \ldots < a_n$. Note que C admite no máximo dois pontos singulares que são $P = (1 : 0 : \ldots : 0)$ a origem do espaço afim $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$, e $Q = (0 : 0 : \ldots : 1)$ o ponto no infinito sob a parametrização dada por t.

No próximo resultado, vamos olhar para a aritmética dos dois semigrupos S_P e S_Q de uma curva racional monomial nos pontos, possivelmente singulares, para generalizar [22, Prp. 3.1] com argumentos um pouco diferentes.

Teorema 4.1.1. *Seja C uma curva racional monomial. Então seu modelo canônico é*

$$C' = (1 : t^{b_2} : \ldots : t^{b_{\delta_P}} : t^{c_1} : \ldots : t^{c_{\delta_Q}})$$

onde $\{0, b_2, \ldots, b_{\delta_P}\} = \gamma_P - G_P$, $\{c_1, \ldots, c_{\delta_Q}\} = \gamma_P + G_Q$ *e* G_P *(resp.* G_Q*) é o conjunto das lacunas de* S_P *(resp.* S_Q*).*

Demonstração. Seja g o gênero de C e seja $\mathcal{W}$ um subfeixe livre de torção de posto 1 do feixe constante de funções racionais $\mathcal{K}$ sobre C. Se $h^0(\mathcal{W}) \geq g$ e $\deg(\mathcal{W}) = 2g - 2$ então existe uma imersão do feixe dualizante $\omega \hookrightarrow \mathcal{K}$ cuja imagem é $\mathcal{W}$. De fato, isto pode ser visto, por exemplo, reescrevendo [31, p. 110 top] em termos de feixes. Então considere o subfeixe de $\mathcal{K}$ definido por

$$\mathcal{W} := \mathcal{O}_C\langle 1, t^{b_1}, \ldots, t^{b_{\delta_P - 1}}, t^{c_1}, \ldots, t^{c_{\delta_Q}}\rangle$$

isto é, o subfeixe gerado pelas seções (globais) $1, t^{b_i}, t^{c_j} \in k(t) = k(C)$ definidas no enunciado do teorema. Uma vez que b_i e c_j são todos diferentes um do outro, estas seções são linearmente independentes, daí $h^0(\mathcal{W}) \geq \delta_P + \delta_Q = g$. Afirmamos que $\deg(\mathcal{W}) = 2g - 2$.

De fato para provar isto, primeiro note que $1 \in H^0(\mathcal{W})$ assim $\mathcal{W} \supset \mathcal{O}$ e então

$$\deg(\mathcal{W}) = \sum_{R \in C} \dim(\mathcal{W}_R/\mathcal{O}_R).$$

Agora se $R \neq P, Q$, então, claramente, $\mathcal{W}_R = \mathcal{O}_R$ e então R não contribui para o grau do feixe. Vamos computar a dimensão para o ponto Q. Relembre, por exemplo, de [25, Prp. 1] que

$$\dim(\mathcal{W}_Q/\mathcal{O}_Q) = \#(v_Q(\mathcal{W}_Q) \setminus \mathrm{S}_Q) \tag{4.1}$$

Afirmamos que

$$v_Q(\mathcal{W}_Q) \setminus \mathrm{S}_Q = -(\gamma_P + G_Q) \bigcup \{-\gamma_P + 1, -\gamma_P + 2, \ldots, -1\} \bigcup G_Q \tag{4.2}$$

De fato, para demonstrar "$\supset$" note que $\gamma_P + G_Q = \{c_i\}_{i=1}^{\gamma_P}$, e que $t^{c_i} \in \mathcal{W}_Q$ por construção; por outro lado, $v_Q(t^{c_i}) = -c_i$ então vale a inclusão no primeiro conjunto da união acima. Agora seja $r \in \mathbb{Z}$ tal que $r \leq \gamma_P - 1$; então, em particular, $c_i - r \geq 2$

para todo i; como o número de c_i é o número de lacunas de S_Q e 1 é uma lacuna, temos que $c_j - r \in \mathrm{S}_Q$ para algum j, então tome $f \in \mathcal{O}_Q$ para qual $v_Q(f) = c_j - r$; portanto $t^{c_j} f \in \mathcal{W}_Q$ e $v_Q(t^{c_j} f) = -c_j + c_j - r = -r$ então valem as inclusões no segundo e terceiro conjunto da união acima.

Agora para demostrarmos "$\subset$" usamos o fato que C é monomial e, em particular, o anel local de Q também o é. Isto é, se escrevermos

$$\mathrm{S}_Q = \{0, s_1, \ldots, s_n, \beta_Q, \rightarrow\} \tag{4.3}$$

então temos que

$$\mathcal{O}_Q = k \oplus kt^{-s_1} \oplus \ldots \oplus kt^{-s_n} \oplus \mathcal{C}_Q \tag{4.4}$$

já que t^{-1} é um uniformizante local para $\overline{Q}$. Daí concluímos que qualquer $a \in v_Q(\mathcal{W}_Q)$ é da forma $a = v_Q(t^d t^{-s}) = s - d$ onde $d \in \{0, b_2, \ldots, b_{\delta_P}, c_1, \ldots, c_{\delta_Q}\}$ e $s \in \mathrm{S}_Q$. Logo é suficiente mostrar que se $s - d \leq -\gamma_P$ então $d - s - \gamma_P \notin S_Q$. Agora a desigualdade implica que $d \in \{c_1, \ldots, c_{\delta_Q}\} = \gamma_P + G_Q$. Portanto existe um $\ell \in G_P$ para o qual $d = \gamma_P + \ell$ o que nos dá $d - s - \gamma_P = \ell - s$ que não pode pertencer a S_Q caso contrário, ℓ também pertenceria. Logo também provamos "$\subset$".

De (4.1) e (4.2) concluímos que

$$\dim(\mathcal{W}_Q / \mathcal{O}_Q) = 2\delta_Q + \beta_P - 2 \tag{4.5}$$

Agora vamos computar a dimensão para o ponto P. Afirmamos que

$$\mathcal{W}_P = k \oplus kt^{b_2} \oplus \ldots \oplus kt^{b_{\delta_P}} \oplus \mathcal{C}_P \tag{4.6}$$

De fato, "$\supset$" se deduz facilmente do fato de que

$$\mathcal{W}_P = \mathcal{O}_P + t^{b_2}\mathcal{O}_P + \ldots + t^{b_{\delta_P}}\mathcal{O}_P \tag{4.7}$$

Para demonstrarmos "$\subset$" primeiramente note que

$$v_P(k \oplus kt^{b_2} \oplus \ldots \oplus kt^{b_{\delta_P}} \oplus \mathcal{C}_P) = \mathrm{K}_P$$

onde a última parcela foi definida em (1.3). Uma vez que vale "$\supset$", é suficiente mostrarmos que

$$v_P(\mathcal{W}_P) = \mathrm{K}_P \tag{4.8}$$

Para vermos isto, relembre novamente que C é monomial e daí $\mathcal{O}_P$ também satisfaz (4.4) trocando Q por P e t^{-1} por t. Combinando isto com (4.7) é suficiente mostrarmos que $\mathrm{S}_P + \mathrm{K}_P \subset \mathrm{K}_P$ para termos (4.8); ou, em linguagem de semigrupos, que K_P é um S_P ideal relativo; mas isto é conhecido, por exemplo, em [19], logo vale "$\subset$" e segue a afirmação.

Assim, de (4.6), temos que $\dim(\mathcal{W}_P/\mathcal{C}_P) = \delta_P$. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{W}_P/\mathcal{O}_P) &= \dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P) + \dim(\mathcal{W}_P/\mathcal{C}_P) - \dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{C}_P)\\ &= 2\delta_P - \beta_P\end{aligned}$$

Combinando com (4.5) teremos

$$\begin{aligned}\deg(\mathcal{W}) &= \dim(\mathcal{W}_P/\mathcal{O}_P) + \dim(\mathcal{W}_Q/\mathcal{O}_Q)\\ &= 2\delta_P - \beta_P + 2\delta_Q + \beta_P - 2\\ &= 2g - 2\end{aligned}$$

Então $\mathcal{W}$ é a imagem de ω em $\mathcal{K}$ por um isomorfismo, como queríamos. Chame

$$V := k \oplus kt^{b_2} \oplus \ldots \oplus kt^{b_{\delta_P}} \oplus kt^{c_1} \oplus \ldots \oplus kt^{c_{\delta_Q}}$$

Como $\mathcal{W} \cong \omega$, em particular, $h^0(\mathcal{W}) = g$ e daí $H^0(\mathcal{W}) = V$. Agora $\overline{C} = \mathbb{P}^1$ então o modelo canônico C' é a imagem do morfismo $\kappa : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{g-1}$ definido pelo sistema linear $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\overline{C}}\mathcal{W}, H^0(\mathcal{W})) = \mathcal{L}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\langle V\rangle, V)$, isto é, $C' = \kappa(\mathbb{P}^1)$ onde

$$\begin{array}{rccc}\kappa : & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^{g-1}\\ & (1:t) & \longmapsto & (1 : t^{b_2} : \ldots : t^{b_{\delta_P}} : t^{c_1} : \ldots : t^{c_{\delta_Q}})\end{array}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

4.2 Curvas Monomiais no Scroll

Vamos agora relembrar um resultado para scrolls de dimensão arbitrária que nos será útil em nossos objetivos. Advertimos ao leitor que o enunciado – como todos envolvendo monomialidade – depende de uma mudança de coordenadas adequada no espaço ambiente, que sempre é possível pois se trata apenas de reordenarmos as coordenadas.

Lema 4.2.1. [22, Lem 3.2] *A curva monomial racional* $(1 : t^{a_1} : \ldots : t^{a_N}) \subset \mathbb{P}^N$ *está contida em um scroll de dimensão d* $S_{m_1 m_2 \ldots m_d}$ *se e somente se existe uma partição do conjunto* $\{0 = a_0, a_1, \ldots, a_N\}$ *em d subconjuntos, com, respectivamente,* $m_1 + 1, m_2 + 1, \ldots, m_d + 1$ *elementos, tal que tais elementos de todos subconjuntos podem ser reordenados formando uma progressão aritmética de mesma razão.*

Com este lema em mãos, vamos demonstrar o nosso principal reultado.

Teorema 4.2.2. *Seja C uma curva racional monomial de gênero $g \geq 1$. Então* $\mathrm{gon}(C) = d$ *se e somente se seu modelo canônico C' está contido em um scroll de dimensão $d-1$, e não está contido em qualquer scroll de dimensão menor.*

Demonstração. A demonstração será por indução em d. Uma vez que $g \geq 1$, então $\mathrm{gon}(C) \geq 2$. Daí note que o enunciado do teorema para $d = 2$ corresponde a seguinte afirmação: C tem gonalidade 2 se e somente se C' é a curva racional normal de grau $g-1$ em $\mathbb{P}^{g-1}$. Mas isto foi provado em [20, Thm. 3.4] e [23, Thm. 2.1].

Para o restante, escreva

$$C' = (1 : t^{b_2} : \cdots : t^{b_{\delta_P}} : t^{c_1} : \cdots : t^{c_{\delta_Q}}) \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

como no teorema 4.1.1 e chame

$$A := \{0, b_2, \ldots, b_{\delta_P}, c_1, \ldots, c_{\delta_Q}\}$$

Agora vamos provar o resultado para um número inteiro positivo arbitrário d assumindo que o resultado é válido para qualquer inteiro positivo menor do que d. Para provarmos a suficiência, suponha que C' está contida em um scroll de dimensão $d-1$. Pelo lema 4.2.1, existe uma partição de A em $d-1$ subconjuntos, digamos $A_1, \ldots, A_{d-1}$, todos formando uma progressão aritmética de mesma razão, digamos r.

Colocamos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0, r, \ldots, e_1\} \\ A_2 &= \{a_2, a_2 + r, \ldots, e_2\} \\ &\vdots \\ A_{d-1} &= \{a_{d-1}, a_{d-1} + r, \ldots, e_{d-1}\} \end{aligned}$$

Supondo também que $d-1$ é a menor dimensão de um scroll em que C' pode estar contida, vemos do lema 4.2.1 que qualquer elemento final $e = e_i$ de A_i satisfaz $e + r \notin A$.

Agora considere o subfeixe de $\mathcal{K}$ em C definido por

$$\mathcal{F} := \mathcal{O}_C \langle 1, t^r \rangle$$

gerado pelas seções (globais) $1, t^r \in k(C) = k(t)$. Afirmamos que

$$\deg(\mathcal{F}) = d$$

De fato, para provar isto, note que como C é monomial e t (resp. t^{-1}) é um uniformizante local para P (resp. Q) temos que

$$v_R(\mathcal{F}_R) = \begin{cases} \mathrm{S}_P \bigcup (\mathrm{S}_P + r) & \text{se } R = P \\ \mathbb{N} & \text{se } R \neq P, Q \\ \mathrm{S}_Q \bigcup (\mathrm{S}_Q - r) & \text{se } R = Q \end{cases}$$

Logo, como na demonstração do teorema anterior, concluímos que

$$\deg(\mathcal{F}) = \#(\mathrm{S}_P + r \setminus \mathrm{S}_P) + \#(\mathrm{S}_Q - r \setminus \mathrm{S}_Q)$$

Agora seja $e = e_i \in A_i$ para algum $i \in \{1, \ldots, d-1\}$. Considere os seguintes casos:
(i) se $e = \gamma_P - \ell$ com $\ell \in G_P$ e $\ell \geq r$ então $\ell - r \in S_P$ já que $e + r \notin A$, o que implica que $\ell \in \mathrm{S}_P + r \setminus \mathrm{S}_P$;
(ii) se $e = \gamma_P - \ell$ com $\ell \in G_P$ e $\ell < r$ então $r - \ell \in S_Q$ já que $e + r \notin A$, o que implica que$-\ell \in \mathrm{S}_Q - r \setminus \mathrm{S}_Q$;

(iii) se $e = \gamma_P + \ell$ com $\ell \in G_Q$ então $\ell + r \in S_Q$ já que $e + r \notin A$, logo $\ell \in \mathrm{S}_Q - r \setminus \mathrm{S}_Q$;

Mais ainda, $-r \in \mathrm{S}_Q - r \setminus \mathrm{S}_Q$. Portanto, combinando este fato com as três afirmações acima nós concluímos que $\deg(\mathcal{F}) \geq d$. Vamos provar que vale a igualdade.

Se $s \in \mathrm{S}_P$ com $s+r \notin S_P$, então $\gamma_P-(s+r) \in A$ e $\gamma_P-s \notin A$; portanto $\gamma_P-(s+r) = e_i$ para algum i.

Se $s \in S_Q$ com $s-r \notin S_Q$ temos dois casos. Primeiro, se $s > r$, então $\gamma_P+(s-r) \in A$ e $\gamma_P + s \notin A$; portanto $\gamma_P + (s-r) = e_i$ para algum i.

De outro modo, se $s < r$, separamos este caso em outros dois casos. Se $r - s \notin \mathrm{S}_P$, então $\gamma_P - (r-s) \in A$ e $\gamma_P + s \notin A$ portanto $\gamma_P - (r-s) = e_i$ para algum i.

Se não, i.e., se $r - s \in \mathrm{S}_P$, tome uma nova partição de A em subconjuntos todos formando uma progressão aritmética de mesma razão $r-s$. Note que sempre é possível fazer isto mesmo que nenhum elemente do A esteja ligado a outro em um mesmo subconjunto da nova partição. Mas afirmamos que, no nosso caso, a nova partição decompõe A em $d-1$ subconjuntos disjuntos. De fato, se $\gamma_P - \ell \in A$ para $\ell \in G_P$com $\ell \geq r-s$ então

$$\gamma_P - l + r - s \in A$$

porque se não $l - r + s \in \mathrm{S}_P$ o que implica que $\ell \in \mathrm{S}_P$ o que não ocorre. Daí se $\gamma_P - \ell$, com $\ell \in G_P$, é o elemento final de um subconjunto A da nova partição então

$$\ell < r - s \;\text{ e }\; \gamma_P + r - s - \ell \notin A$$

logo $r - s - \ell \in \mathrm{S}_Q$ e portanto $r - \ell \in \mathrm{S}_Q$. Mas isto implica que $\gamma_P - \ell$ é o elemento final de um subconjunto de A na primeira partição. E se $\gamma_P + \ell$, com $\ell \in G_Q$, é o elemento final de um subconjunto de A na nova partição então

$$\gamma_P + \ell + r - s \notin A$$

o que implica que $\ell+r-s \in \mathrm{S}_Q$ e daí $\ell+r \in \mathrm{S}_Q$; logo $\gamma_P - \ell$ também é um elemento final de um subconjunto de A na primeira partição. Segue que se a nova partição subdivide A em d' subconjuntos, então $d' \leq d-1$. Mas deve valer a igualdade se não, pelo lema 4.2.1, C' está contida em um scroll de dimensão d' com $d' < d-1$, o que contraria a nossa hipótese. Logo podemos trocar r por $r-s$ e recomeçar. Fazemos isto até termos

$r - s \notin \mathrm{S}_P$ para todo $s \in \mathrm{S}_Q$ com $s - r \notin \mathrm{S}_Q$. O processo certamente termina pois r decresce a cada passo.

Daí $\deg(\mathcal{F}) = d$ e $\mathrm{gon}(C) \leq d$. Mas é de fato d, porque se não C' estaria contida em um scroll de dimensão menor do que $d-1$ contrariando nossa hipótese de indução.

Reciprocamente, a necessidade segue do Teorema 2.2.1.(I) e indução. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. Andreotti, A. L. Mayer, *On period relations for abelian integrals on algebraic curves*, Annali della Scuolla Normale Superiore di Piza, 21 2 (1967) 189-238.

[2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Springer-Verlag (1985).

[3] E. Arrondo, *A home-made Hartshorne-Serre correspondence*, arXiv: math/0610015v1 [math.AG] 30 Sep 2006.

[4] D. W. Babbage, *A note on the quadrics through a canonical curve*, J. Lodon Math. Soc. 14 (1939), 310–315.

[5] V. Barucci, R. Fröberg, *One-dimensional almost Gorenstein rings*, Journal of Algebra 188 (1997), 418–442.

[6] H. Bresinsky, *Monomial space curves in* $\mathbb{A}^3$ *as set-theoretic complete intersections*, Proceedings of the American Mathematical Society 75 (1979), 23–24.

[7] M. Brundu, G. Sacchiero, *Stratification of the moduli space of fourgonal curves*, Proc. Edinb. Math. Soc., Vol. 57, Issue 03, 631 - 686 (2014)

[8] G. Casnati, T. Ekedahl, *Covers of algebraic varieties I: A general structure theorem, covers of degree 3,4 and Enriques surfaces*, J. Algebraic Geom. 5 (1996), no. 3, 439 - 460.

[9] A. Contiero and K.-O. Stöhr. *Upper bounds for the dimension of moduli spaces of curves with symmetric Weierstrass semigroups*, J. Lond. Math. Soc., 88 (2013) 580–598.

[10] M. Coppens, *Free linear systems on integral Gorenstein curves*, Journal of Algebra 145 (1992), 209–218.

[11] E. Cotterill, L. Feital, R. V. Martins, *Dimension counts for singular rational curves via semigroups*, ArXiv:1511.08515v2

[12] E. Cotterill, L. Feital, R. V. Martins, *Singular rational curves with points of nearly-maximal weight*, ArXiv:1705.02658

[13] D. Eisenbud, J. Harris, *On varieties of minimal degree*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 46 (1987), 3–13

[14] D. Eisenbud, J. Harris, J. Koh, M. Stillmann, *Determinantal equations for curves of high degree*, American Journal of Mathematics 110 (1988) 513-539

[15] F. Enriques, *Sulle curve canoniche di genera p cello spazio a $p-1$ dimensioni*, Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, 23 (1919), 80–82.

[16] L. Feital. R. V. Martins, *Gonality of non-Gorenstein curves of genus five*, Bull. Braz. Math. Soc., 45(4) (2014), 1–22.

[17] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag (1977)

[18] J. Herzog, *Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscripta Math. 3 (1970), 175-193

[19] J. Jäger, *Längeberechnungen und kanonische ideale in eindimensionalen ringen*, Arch. Math. 29 (1977) 504-512

[20] S. L. Kleiman, R. V. Martins, *The canonical model of a singular curve*, Geometria Dedicata. 139 (2009), 139-166.

[21] D. Lara, *Curvas com modelos canônicos em scrolls*, Ph. D. Thesis UFMG (2014).

[22] D. Lara, S. Marchesi, R. V. Martins, *Curves with canonical models on scrolls*, International Journal of Mathematics, Vol. 27, No. 5 (2016) 1650045-1-30.

[23] R. V. Martins, *On trigonal non-Gorenstein curves with zero Maroni invariant*, Journal of Algebra 275 (2004) 453-470

[24] R. V. Martins, *Trigonal non-Gorenstein curves*, J. Pure Appl. Algebra, 209 (2007), 873–882.

[25] T. Matsuoka, *On the degree of singularity of one-dimensional analytically irreducible noetherian rings*, J. Math. Kyoto Univ. 11 (1971) 485-491

[26] R. M. Miró-Roig, *The representation type of rational normal scrolls*, Rend. Circ. Mat. Palermo 62 (2012), 153–164.

[27] M. Reid, *Chapters on algebraic surfaces*, arXiv:alg-geom/9602006v1 6 Feb 1996; Lectures of a summer programm Park City, UT, 1993

[28] R. Rosa, K.-O. Stöhr, *Trigonal Gorenstein curves*, Journal of Pure and Applied Algebra 174 (2002), 187-205.

[29] M. Rosenlicht, *Equivalence relations on algebraic curves*, Annals of Mathematics 56 (1952), 169–191

[30] F.-O. Schreyer, *Syzygies of canonical curves and special linear series*, Mathematische Annalen 275 (1986), 105–137.

[31] K.-O. Stöhr, *On the poles of regular differentials of singular curves*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática 24 (1993), 105–135.

[32] K.-O. Stöhr, *Hyperelliptic Gorenstein curves*, Journal of Pure and Applied Algebra 135 (1999), 93–105.

[33] K.-O. Stöhr, P. Viana, *Weierstrass gap sequences and moduli varieties of trigonal curves*, Journal of Pure and Applied Algebra 81 (1992), 63–82.