

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Álgebras de Lie Nilpotentes e Solúveis

GIORDANNI ZOPPELLARO

Belo Horizonte/MG
Março de 2017

GIORDANNI ZOPPELLARO

Álgebras de Lie Nilpotentes e Solúveis

Monografia apresentada à banca examinadora do corpo docente do Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientador: Lucas Calixto

Belo Horizonte/MG
Março de 2017

GIORDANNI ZOPPELLARO

Álgebras de Lie Nilpotentes e Solúveis

Monografia apresentada à banca examinadora do corpo docente do Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Aprovada em

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Lucas Calixto - Orientador
UFMG

Prof. Dr. André Gimenez Bueno
UFMG

Prof. Dr. Viktor Bekkert
UFMG

Belo Horizonte/MG
Março de 2017

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me guiar, dar forças e saúde para que eu continuasse os estudos. Aos meus pais, agradeço o apoio incondicional e a luta diária a fim de que eu pudesse realizar os meus sonhos, sem nunca medirem esforços para ver um sorriso em meu rosto. Agradeço ao João por toda a felicidade compartilhada e pelo companheirismo que nunca me faltou. Aos familiares, agradeço a união e os ensinamentos de vida. Aos amigos, o apoio e os momentos de diversão durante as pausas nos estudos. Ao professor orientador Lucas Calixto, agradeço a oportunidade de realizar este trabalho e toda a paciência (enorme!) em me ensinar e mostrar a beleza das álgebras de Lie. Aos demais professores e funcionários da UFMG, obrigado por contribuírem com a minha formação.

Resumo

Este texto tem o objetivo de introduzir as álgebras de Lie, bem como apresentar suas propriedades básicas envolvendo subálgebras, ideais, homomorfismos e representações. Também definiremos álgebras de Lie solúveis e nilpotentes, e demonstraremos os teoremas de Engel e de Lie.

Palavras-chave: Álgebras de Lie, Álgebra de Lie nilpotente, Álgebra de Lie solúvel, Teorema de Engel, Teorema de Lie.

Abstract

The goal of the current work is to introduce Lie algebras and to present their basic properties concerning subalgebras, homomorphisms and representations. We will also define nilpotent and solvable Lie algebras and prove Lie's and Engel's Theorems.

Keywords: Lie algebras, Nilpotent Lie algebra, Solvable Lie algebra, Engel's Theorem, Lie's Theorem.

Sumário

Introdução	9
1 Conceitos Básicos	10
1.1 Definições e exemplos	10
1.2 Morfismos e ideais	14
1.3 Representações e derivações	19
1.4 Séries de composição e álgebras nilpotentes e solúveis	27
2 Os Teoremas de Engel e de Lie	36
2.1 O teorema de Engel	36
2.2 O teorema de Lie	39

Introdução

Álgebras de Lie são espaços vetoriais juntamente com uma operação produto, também denominada colchete, satisfazendo algumas propriedades. Elas surgiram na década de 1870, quando o matemático norueguês Sophus Lie (1842-1889) decidiu estudar as equações diferenciais de maneira similar ao estudo de Galois para as equações algébricas, dando origem à teoria de Lie. De acordo com os trabalhos realizados por Lie, as álgebras de Lie eram objetos infinitesimais associados a grupos de transformações (em espaços com determinadas simetrias), também conhecidos como grupos de Lie. Alguns resultados desta teoria mostram uma relação entre as álgebras de Lie (objetos algébricos), e os grupos de Lie (objetos de natureza geométrica). Alguns matemáticos como Friedrich Engel (1820-1895), Wilhelm Killing (1847-1923), Felix Klein (1849-1925), Elie Cartan (1869-1951) e Herman Weyl (1885-1955) também contribuíram com o desenvolvimento da teoria de Lie.

O objetivo deste trabalho é introduzir as álgebras de Lie, bem como apresentar diversas propriedades e resultados básicos envolvendo conceitos como ideais, quocientes, homomorfismos, e representações de álgebras de Lie. Ao final, apresentamos os teoremas de Lie e de Engel, importantes resultados que descrevem álgebras nilpotentes e solúveis como álgebras de matrizes triangulares superiores. Como pré-requisito para a leitura deste trabalho, são necessários alguns resultados de Álgebra Linear. As principais referências bibliográficas utilizadas para a elaboração deste texto foram os livros [?, ?], bem como as notas de aula [?].

Notação: A menos que seja dito o contrário, todos os espaços vetoriais deste texto serão considerados sobre um corpo \mathbb{k} algebricamente fechado e de característica zero. Se V é um espaço vetorial e $X \subseteq V$ um subconjunto, então denotaremos por $\langle X \rangle$ o subespaço vetorial de V gerado por X , ou seja, $\langle X \rangle$ é o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de X .

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo introduziremos a definição de álgebra de Lie e abordaremos algumas proposições, teoremas, exemplos e definições envolvendo subálgebras, ideais, quocientes, homomorfismos, representações e álgebras de Lie solúveis e nilpotentes.

1.1 Definições e exemplos

Definição 1.1 (Álgebra de Lie). Uma *álgebra de Lie*, sobre um corpo \mathbb{k} , é um espaço vetorial \mathfrak{g} juntamente com uma operação produto (também denominada colchete) $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $(x, y) \mapsto [x, y]$, que satisfaz as seguintes condições:

1. $[\cdot, \cdot]$ é bilinear,
2. $[x, x] = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$,
3. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

A condição 2, também conhecida como antissimetria, é equivalente a $[x, y] = -[y, x]$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ (se o corpo \mathbb{k} não tem característica 2). De fato, suponha que $[x, y] = -[y, x]$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. Então

$$[x, x] = -[x, x] \Rightarrow 2[x, x] = 0 \Rightarrow [x, x] = 0,$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$. Reciprocamente, se $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, e utilizando o fato de que o produto é bilinear, temos que

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x] \Rightarrow [x, y] = -[y, x].$$

A condição 3 é conhecida como *Identidade de Jacobi*, e também pode ser escrita de duas maneiras:

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] &= [[x, y], z] + [y, [x, z]], \\ [[x, y], z] &= [[x, z], y] + [x, [y, z]]. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2. Seja $\text{End}(V)$ o espaço vetorial das transformações lineares de um espaço vetorial V em si mesmo. Tal espaço, juntamente com o colchete definido por

$$[A, B] = AB - BA,$$

com $A, B \in \text{End}(V)$, é uma álgebra de Lie. De maneira mais geral, dada uma álgebra associativa \mathcal{A} , fica definida uma álgebra de Lie, proveniente de \mathcal{A} , se definirmos o colchete pelo comutador

$$[x, y] = xy - yx, \quad x, y \in \mathcal{A}.$$

De fato, sejam $x_1, x_2, x, y_1, y_2, y, z \in \mathcal{A}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. O colchete será bilinear, pois

$$[\alpha x_1 + x_2, y] = (\alpha x_1 + x_2)y - y(\alpha x_1 + x_2) = \alpha x_1 y + x_2 y - \alpha y x_1 - y x_2 = \alpha [x_1, y] + [x_2, y]$$

$$[x, \beta y_1 + y_2] = x(\beta y_1 + y_2) - (\beta y_1 + y_2)x = \beta x y_1 + x y_2 - \beta y_1 x - y_2 x = \beta [x, y_1] + [x, y_2].$$

O colchete é antissimétrico, pois $[x, x] = xx - xx = 0$. Por fim, A Identidade de Jacobi também é satisfeita, já que

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] &= [x, (yz - zy)] + [z, (xy - yx)] + [y, (zx - xz)] = \\ &= x(yz - zy) - (yz - zy)x + z(xy - yx) - (xy - yx)z + y(zx - xz) - (zx - xz)y = 0. \end{aligned}$$

A álgebra de Lie associada à $\text{End}(V)$ é denotada por $\mathfrak{gl}(V)$. Além disso, note que se V tem dimensão n , então, fixando uma base de V , $\text{End}(V)$ pode ser visto como sendo o espaço das matrizes $n \times n$ com entradas em \mathbb{k} (tal identificação leva uma transformação T na sua matriz com relação à base fixada). A álgebra de Lie proveniente da álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em \mathbb{k} é denotada por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$.

Definição 1.3. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e \mathfrak{h} um subespaço vetorial de \mathfrak{g} . Dizemos que \mathfrak{h} é uma *subálgebra* de \mathfrak{g} se \mathfrak{h} é fechado pelo colchete, ou seja, se

$$[x, y] \in \mathfrak{h}, \quad \text{para todos } x, y \in \mathfrak{h}.$$

Exemplos de subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$

Exemplo 1.4. O subespaço das matrizes antissimétricas $\mathfrak{so}(n, \mathbb{k}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \mid A + A^t = 0\}$, onde A^t é a transposta da matriz A , é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$. De fato, sejam $A, B \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{k})$. Então $A^t = -A$ e $B^t = -B$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} [A, B]^t &= (AB - BA)^t \\ &= (AB)^t - (BA)^t \\ &= B^t A^t - A^t B^t \\ &= (-B)(-A) - (-A)(-B) \\ &= BA - AB \\ &= -(AB - BA) \\ &= -[A, B], \end{aligned}$$

ou seja, $[A, B] \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{k})$. Observe que o subespaço das matrizes simétricas $\{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \mid A = A^t\}$ não é subálgebra se $n \geq 2$. De fato, dadas duas matrizes simétricas A, B , temos que

$$\begin{aligned} [A, B]^t &= (AB - BA)^t \\ &= (AB)^t - (BA)^t \\ &= B^t A^t - A^t B^t \\ &= BA - AB \\ &= -(AB - BA) \\ &= -[A, B], \end{aligned}$$

o que mostra que $[A, B]$ não é uma matriz simétrica.

Exemplo 1.5. O subespaço $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$. De fato, sejam $A, B \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$. Lembrando do fato de que $\text{tr}(A'B') = \text{tr}(B'A')$ para A', B' matrizes quaisquer, temos que

$$\text{tr}([A, B]) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0,$$

e assim $[A, B] \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$.

Exemplo 1.6. O subespaço $\mathfrak{t}(n, \mathbb{k}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \mid A \text{ é triangular superior}\}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$. Para ver isso, basta notar que o produto de duas matrizes em $\mathfrak{t}(n, \mathbb{k})$ é novamente uma matriz em $\mathfrak{t}(n, \mathbb{k})$.

Exemplo 1.7. O subespaço $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{k}) = \{A \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{k}) \mid AJ + JA^t = 0\}$, em que J é escrita em blocos $n \times n$ da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde 0 é a matriz nula e 1 é a matriz identidade $n \times n$, é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{k})$. De fato, observando que $J^2 = -1$, temos que $A \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{k})$ se, e somente se, $A^t = JAJ$. Assim, dados $A, B \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{k})$, temos que

$$\begin{aligned} [A, B]^t &= (AB - BA)^t \\ &= -A^t B^t + B^t A^t \\ &= -JAJ^2BJ + JB^2AJ \\ &= J(AB - BA)J \\ &= J[A, B]J, \end{aligned}$$

ou seja, $[A, B] \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{k})$.

Exemplo 1.8. O subespaço $\mathfrak{so}(p, q, \mathbb{k}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \mid AJ + JA^t = 0\}$, onde J é escrita na forma

$$\begin{pmatrix} -1_{p \times p} & 0 \\ 0 & 1_{q \times q} \end{pmatrix},$$

é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$. Observando que $J^2 = 1$, segue que $A \in \mathfrak{so}(p, q, \mathbb{k})$ se, e somente se, $A^t = -JAJ$. Desse modo, dados $A, B \in \mathfrak{so}(p, q, \mathbb{k})$, temos que

$$\begin{aligned} [A, B]^t &= (AB - BA)^t \\ &= -A^t B^t + B^t A^t \\ &= -JAJ^2BJ - JBJ(-J)AJ \\ &= -JABJ + JBAJ \\ &= -J(AB - BA)J \\ &= -J[A, B]J, \end{aligned}$$

ou seja, $[A, B] \in \mathfrak{so}(p, q, \mathbb{k})$.

Definição 1.9. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita uma *álgebra abeliana* se $[x, y] = 0$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$.

Exemplos de álgebras de Lie abelianas

Exemplo 1.10. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Se $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, então \mathfrak{g} é abeliana. De fato, seja $\{v\}$ uma base de \mathfrak{g} . Assim, dados $x, y \in \mathfrak{g}$, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ tais que $x = \alpha v$, $y = \beta v$. Então

$$[x, y] = [\alpha v, \beta v] = \alpha\beta[v, v] = 0.$$

Ademais, se \mathfrak{h} é uma álgebra de Lie qualquer, então todo subespaço de dimensão 1 será uma álgebra abeliana.

Exemplo 1.11. Seja $D(n, \mathbb{k}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \mid A \text{ é diagonal}\}$. Como o comutador de duas matrizes diagonais é sempre nulo, segue que $D(n, \mathbb{k})$ é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$.

Exemplo 1.12. O espaço das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & & & \\ b_1 & a_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_k & -b_k \\ & & & b_k & a_k \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}(2k, \mathbb{k})$. Vamos verificar o caso 2×2 : Sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}.$$

Então

$$[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a'a - b'b & -a'b - b'a \\ b'a + a'b & -b'b + a'a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para o caso geral, basta observar que uma matriz $2k \times 2k$ da forma (1.1.1) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix},$$

onde cada bloco A_i é uma matriz 2×2 , para a qual o resultado é verdade, pelo que foi verificado acima. Portanto, para concluir o resultado, basta notar que o produto de matrizes da forma (1.1.1) é dado em termos dos produtos dos blocos A_i , $i = 1, \dots, k$.

Exemplo 1.13 (Álgebras de Lie \mathfrak{g} com dimensão menor ou igual a 2). Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Se $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, então já vimos que \mathfrak{g} é abeliana. Se $\dim(\mathfrak{g}) = 2$, temos duas possibilidades:

1. \mathfrak{g} é abeliana, ou
2. \mathfrak{g} possui uma base $\{u, v\}$ tal que $[u, v] = v$.

De fato, suponha que \mathfrak{g} não seja abeliana e tome $\{u', v'\}$ uma base de \mathfrak{g} . Como \mathfrak{g} não é abeliana, segue que $[u', v'] \neq 0$. Seja $v'' = [u', v']$ e tome u'' tal que $\{u'', v''\}$ seja base de \mathfrak{g} . Assim, $u'' = \alpha u' + \beta v'$, $v'' = \gamma u' + \delta v'$, onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{k}$. Então,

$$[u'', v''] = [\alpha u' + \beta v', \gamma u' + \delta v'] = (\alpha\delta - \beta\gamma)[u', v'] = (\alpha\delta - \beta\gamma)v''.$$

Como \mathfrak{g} não é abeliana, segue que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Assim, fazendo $u = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}u''$ e $v'' = v$, obtemos uma base $\{u, v\}$ de \mathfrak{g} tal que $[u, v] = v$.

1.2 Morfismos e ideais

Definição 1.14. Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um *homomorfismo de álgebras de Lie* se

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \text{ para todos } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Caso φ seja inversível, então φ é chamado um *isomorfismo de álgebras de Lie*. As álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} são ditas *isomorfas* caso exista um isomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$. Dizemos que φ é um *automorfismo de álgebras de Lie* se este é um isomorfismo e $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.

De agora em diante, os termos homomorfismos, isomorfismos e automorfismos serão sempre entendidos como sendo de álgebras de Lie, a menos que digamos o contrário.

Exemplo 1.15. Seja $\varphi : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$, $\varphi(A) = \text{tr}(A)$ a transformação linear que associa a cada matriz $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ o seu traço. Como $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ e \mathbb{k} é uma álgebra de Lie abeliana (pois $\dim(\mathbb{k}) = 1$), temos que

$$\varphi([A, B]) = \varphi(AB - BA) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0.$$

Por outro lado, verificamos que

$$[\varphi(A), \varphi(B)] = [\text{tr}(A), \text{tr}(B)] = \text{tr}(A)\text{tr}(B) - \text{tr}(B)\text{tr}(A) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0.$$

Portanto, φ é um homomorfismo.

Definição 1.16. Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita e $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ uma base de \mathfrak{g} . O colchete de dois elementos x_i, x_j quaisquer de B pode ser escrito da seguinte forma:

$$[x_i, x_j] = \sum_k c_{ij}^k(x) x_k.$$

Os elementos $c_{ij}^k(x) \in \mathbb{k}$ são chamados de *constantes de estrutura* de \mathfrak{g} em relação à base B . Note que tais constantes de estrutura determinam a álgebra, a menos de isomorfismo. De fato, sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie, com bases $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, \dots, y_n\}$, respectivamente, e suponha que $c_{ij}^k(x) = c_{ij}^k(y)$, para todos $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$. Dessa forma, a transformação linear $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tal que $\varphi(x_i) = y_i$, para todo $i = 1, \dots, n$ define um isomorfismo de álgebras de Lie. Vamos fazer o caso em que $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{h}) = 2$. De fato, sejam $\{x_1, x_2\}$ e $\{y_1, y_2\}$ bases de \mathfrak{g} e \mathfrak{h} , respectivamente, tais que suas constantes de estruturas sejam iguais, ou seja,

$$[x_1, x_2] = c_{12}^1 x_1 + c_{12}^2 x_2 \quad \text{e} \quad [y_1, y_2] = c_{12}^1 y_1 + c_{12}^2 y_2.$$

Considere $x, y \in \mathfrak{g}$, tais que $x = \alpha x_1 + \beta x_2$ e $y = \gamma x_1 + \delta x_2$, com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{k}$. Então temos

$$\begin{aligned} \varphi([x, y]) &= \varphi([\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma x_1 + \delta x_2]) \\ &= \varphi((\alpha\delta - \beta\gamma)[x_1, x_2]) \\ &= \varphi((\alpha\delta - \beta\gamma)(c_{12}^1 x_1 + c_{12}^2 x_2)) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)(c_{12}^1 \varphi(x_1) + c_{12}^2 \varphi(x_2)) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)(c_{12}^1 y_1 + c_{12}^2 y_2) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)[y_1, y_2] \\ &= [\varphi(x), \varphi(y)], \end{aligned}$$

o que mostra que φ é um isomorfismo, ou seja, \mathfrak{g} e \mathfrak{h} são isomorfas.

Definição 1.17. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e \mathfrak{h} um subespaço vetorial de \mathfrak{g} . Dizemos que \mathfrak{h} é um *ideal* de \mathfrak{g} se

$$[x, y] \in \mathfrak{h}, \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{g} \text{ e } y \in \mathfrak{h},$$

ou seja,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \langle [x, y] \mid x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h} \rangle \subseteq \mathfrak{h}.$$

Dizemos que \mathfrak{g} é *simples* se

1. $\dim(\mathfrak{g}) \neq 1$ e
2. os únicos ideais de \mathfrak{g} são $\{0\}$ e \mathfrak{g} .

Excluimos o caso 1-dimensional na definição de álgebras de Lie simples, pois, caso contrário, teríamos álgebras de Lie que são abelianas e simples, e isso não é desejável.

Exemplo 1.18. Vamos mostrar que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$ é ideal de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$. Basta verificar que $[A, B] \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$ para todos $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ e $B \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$. De fato,

$$\text{tr}([A, B]) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0.$$

Portanto, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$ é ideal de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$.

Proposição 1.19. Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ ideais de \mathfrak{g} . Então $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ também é ideal de \mathfrak{g} .

Demonstração. Sejam $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ quaisquer. Como $y \in \mathfrak{h}_1$ e \mathfrak{h}_1 é ideal de \mathfrak{g} , segue que $[x, y] \in \mathfrak{h}_1$. De maneira análoga, temos que $[x, y] \in \mathfrak{h}_2$. Portanto, concluímos que

$$[x, y] \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2.$$

□

Proposição 1.20. *Seja $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo e $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{h}$.*

1. *Se \mathfrak{i} é subálgebra de \mathfrak{g} , então $\varphi(\mathfrak{i})$ é subálgebra de \mathfrak{h} .*
2. *Se \mathfrak{i} é ideal de \mathfrak{g} e φ é sobrejetivo, então $\varphi(\mathfrak{i})$ é ideal de \mathfrak{h} .*
3. *Se \mathfrak{j} é subálgebra de \mathfrak{h} , então $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ é subálgebra de \mathfrak{g} .*
4. *Se \mathfrak{j} é ideal de \mathfrak{h} , então $\varphi^{-1}(\mathfrak{j})$ é ideal de \mathfrak{g} .*
5. *$\ker(\varphi) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \varphi(x) = 0\}$ é um ideal de \mathfrak{g} .*
6. *$\text{im}(\varphi) = \{y \in \mathfrak{h} \mid y = \varphi(x) \text{ para algum } x \in \mathfrak{g}\}$ é uma subálgebra de \mathfrak{h} .*
7. *φ é injetivo se e somente se $\ker(\varphi) = \{0\}$.*

Demonstração. Para a parte (1), sejam $\varphi(x), \varphi(y) \in \varphi(\mathfrak{i})$. Então

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y]) \in \varphi(\mathfrak{i}),$$

pois como \mathfrak{i} é subálgebra, $[x, y] \in \mathfrak{i}$.

Para a parte (2), sejam $h \in \mathfrak{h}$ e $\varphi(y) \in \varphi(\mathfrak{i})$. Como φ é sobrejetivo, existe $x \in \mathfrak{g}$ tal que $\varphi(x) = h$. Assim, temos

$$[h, \varphi(y)] = [\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y]) \in \varphi(\mathfrak{i}),$$

pois $[x, y] \in \mathfrak{i}$, uma vez que \mathfrak{i} é ideal.

Para a parte (3), sejam $x, y \in \varphi^{-1}(\mathfrak{j})$. Então

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \in \mathfrak{j},$$

já que \mathfrak{j} é subálgebra e $\varphi(x), \varphi(y) \in \mathfrak{j}$. Assim, temos que $[x, y] \in \varphi^{-1}(\mathfrak{j})$.

Para a parte (4), sejam $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in \varphi^{-1}(\mathfrak{j})$. Então

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \in \mathfrak{j},$$

uma vez que \mathfrak{j} é ideal de \mathfrak{h} e $\varphi(y) \in \mathfrak{j}$. Assim, temos que $[x, y] \in \varphi^{-1}(\mathfrak{j})$.

Para a parte (5), sejam $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in \ker(\varphi)$ quaisquer. Temos que

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = [\varphi(x), 0] = 0.$$

Portanto, $[x, y] \in \ker(\varphi)$, e então $\ker(\varphi)$ é um ideal de \mathfrak{g} .

Para a parte (6), considere $\varphi(x), \varphi(y) \in \text{im}(\varphi)$ quaisquer. Então

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y]) \in \text{im}(\varphi).$$

Logo, $\text{im}(\varphi)$ é subálgebra de \mathfrak{h} .

Para a parte (7), suponha que φ é injetivo e tome $x \in \ker(\varphi)$. Então

$$\varphi(x) = 0 = \varphi(0).$$

Como φ é injetivo, segue que $x = 0$ e, portanto, $\ker(\varphi) = \{0\}$. Reciprocamente, assuma $\ker(\varphi) = \{0\}$. Então, dados $x, y \in \mathfrak{g}$ tais que $\varphi(x) = \varphi(y)$, temos

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) = 0 \Rightarrow \varphi(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in \ker(\varphi).$$

Como $\ker(\varphi) = \{0\}$, segue que $x - y = 0$, ou seja, $x = y$, o que mostra que φ é injetivo. □

Definição 1.21. Seja \mathfrak{h} um ideal de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} . O espaço quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ possui uma estrutura de álgebra de Lie, onde o colchete é definido por

$$[x + \mathfrak{h}, y + \mathfrak{h}] = [x, y] + \mathfrak{h}.$$

Vamos mostrar que o colchete está bem definido: Sejam $x, x', y, y' \in \mathfrak{g}$ tais que $x + \mathfrak{h} = x' + \mathfrak{h}$ e $y + \mathfrak{h} = y' + \mathfrak{h}$. Observando que $x - x', y - y' \in \mathfrak{h}$, temos que

$$\begin{aligned} [x', y'] + \mathfrak{h} &= [x + (x' - x), y + (y' - y)] + \mathfrak{h} \\ &= [x, y] + [x, y' - y] + [x' - x, y] + [x - x', y' - y] + \mathfrak{h} \\ &= [x, y] + \mathfrak{h}, \end{aligned}$$

pois $[x, y' - y], [x' - x, y], [x - x', y' - y] \in \mathfrak{h}$, uma vez que \mathfrak{h} é ideal.

Teorema 1.22 (1º Teorema do Isomorfismo). *Seja $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo. Então,*

$$\mathfrak{g}/\ker(\varphi) \cong \text{im}(\varphi).$$

Demonstração. Considere a transformação linear $\psi : \mathfrak{g}/K \rightarrow \text{im}(\varphi)$, $x + K \mapsto \varphi(x)$, onde $K := \ker(\varphi)$. Vamos mostrar que ψ é um isomorfismo. De fato, suponha $x, x' \in \mathfrak{g}$ tais que $x + K = x' + K$. Então $x - x' \in K$, ou seja, $x - x' = 0 + K = \bar{0}$. Desse modo,

$$\psi(x - x') = \psi(0 + K) \Rightarrow \varphi(x - x') = \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(x') = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x') \Rightarrow \psi(x + K) = \psi(x' + K).$$

Logo, ψ está bem definida. Note ainda que dados $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$\psi([x + K, y + K]) = \psi([x, y] + K) = \varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = [\psi(x + K), \psi(y + K)],$$

mostrando que ψ é um homomorfismo. Agora, se $x + K \in \ker(\psi)$, então $0 = \psi(x + K) = \varphi(x)$, ou seja, $x \in K$. Logo,

$$x + K = K \Rightarrow \ker(\psi) = K = 0 + K = \bar{0},$$

e portanto ψ é injetivo. Finalmente, tome $y \in \text{im}(\varphi)$. Então existe $x_0 \in \mathfrak{g}$ tal que $\varphi(x_0) = y$. Assim,

$$\psi(x_0 + K) = \varphi(x_0) = y,$$

ou seja, ψ é sobrejetivo. Desse modo, ψ é um isomorfismo e, portanto, $\mathfrak{g}/K \cong \text{im}(\varphi)$. □

Teorema 1.23 (2º Teorema do Isomorfismo). *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ ideais de \mathfrak{g} . Então,*

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \cong \mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2).$$

Demonstração. Considere o diagrama abaixo, em que ρ é a projeção canônica e i a inclusão de \mathfrak{h}_2 em $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$:

$$\mathfrak{h}_2 \xrightarrow{i} \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 \xrightarrow{\rho} (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1.$$

Note que a composição $\rho \circ i$ é um homomorfismo, pois dados $x, y \in \mathfrak{h}_2$, temos

$$\rho \circ i([x, y]) = \rho([i(x), i(y)]) = [\rho \circ i(x), \rho \circ i(y)].$$

Considere agora $x_1 + x_2 + \mathfrak{h}_1 \in (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1$, com $x_1 \in \mathfrak{h}_1$, $x_2 \in \mathfrak{h}_2$. Então

$$x_1 + x_2 + \mathfrak{h}_1 = x_2 + \mathfrak{h}_1 = \rho \circ i(x_2),$$

o que mostra que $\rho \circ i$ é sobrejetivo. O núcleo da composição é dado por $\ker(\rho \circ i) = \{z \in \mathfrak{h}_2 \mid z + \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_1\} = \{z \in \mathfrak{h}_2 \mid z \in \mathfrak{h}_1\} = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. Portanto, pelo 1º Teorema do Isomorfismo, temos que $\mathfrak{h}_2/\ker(\rho \circ i) \cong \text{im}(\rho \circ i)$, ou seja,

$$\mathfrak{h}_2/(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) \cong (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1.$$

□

Teorema 1.24 (3º Teorema do Isomorfismo). *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}, \mathfrak{i}$ ideais de \mathfrak{g} tais que $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{h}$. Então,*

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{h}/\mathfrak{i}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

Demonstração. Seja φ o homomorfismo $\varphi : \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $x + \mathfrak{i} \mapsto x + \mathfrak{h}$. φ é sobrejetivo, pois dado $x + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, temos que $x + \mathfrak{h} = \varphi(x + \mathfrak{i})$. Observe que o núcleo de φ é dado por

$$\ker(\varphi) = \{x + \mathfrak{i} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \mid x + \mathfrak{h} = \mathfrak{h}\} = \{x + \mathfrak{i} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{i} \mid x \in \mathfrak{h}\} = \mathfrak{h}/\mathfrak{i}.$$

Logo, pelo 1º Teorema do Isomorfismo, temos que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/\ker(\varphi) \cong \text{im}(\varphi)$, ou seja,

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{h}/\mathfrak{i}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

□

Definição 1.25. A soma de direta de álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n$ é a álgebra de Lie \mathfrak{g} definida por

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$$

como soma direta dos espaços vetoriais e com o colchete dado por

$$[x, y] = ([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n])$$

em que $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são elementos de $\mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$.

1.3 Representações e derivações

Definição 1.26. Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e V um espaço vetorial. Uma *representação* de \mathfrak{g} em V é um homomorfismo

$$\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Caso $\ker(\varphi) = \{0\}$, dizemos que φ é uma *representação fiel*.

Exemplo 1.27. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie não abeliana de dimensão 2, com base $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = y$ (veja exemplo 1.13). Vamos mostrar que a transformação linear $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{k}^2)$, satisfazendo

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \varphi(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

é uma representação fiel de \mathfrak{g} . De fato, por um lado temos que

$$\varphi([x, y]) = \varphi(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desse modo, temos que $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ e, portanto, φ é um homomorfismo. Para ver que φ é injetora, tome $z \in \ker(\varphi)$. Como $\{x, y\}$ é base de \mathfrak{g} , então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ tais que $z = \alpha x + \beta y$. Assim, como φ é linear, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \varphi(z) = \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y) = \begin{pmatrix} \alpha/2 & \beta \\ 0 & -\alpha/2 \end{pmatrix}.$$

Logo, $\alpha = \beta = 0$, e portanto $z = 0$. Sendo assim, $\ker(\varphi) = \{0\}$, o que mostra que φ é de fato uma representação fiel de \mathfrak{g} .

Definição 1.28. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Para cada elemento $x \in \mathfrak{g}$ podemos definir a função

$$\text{ad}(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g},$$

dada por $\text{ad}(x)(y) = [x, y]$. A função

$$\text{ad} : x \in \mathfrak{g} \mapsto \text{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

define uma representação de \mathfrak{g} em \mathfrak{g} . De fato, a bilinearidade de $[\cdot, \cdot]$ nos garante a linearidade de ad : Sejam $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Então

$$\text{ad}(x + y)(z) = [x + y, z] = [x, z] + [y, z] = \text{ad}(x)(z) + \text{ad}(y)(z) = (\text{ad}(x) + \text{ad}(y))(z),$$

ou seja, $\text{ad}(x + y) = \text{ad}(x) + \text{ad}(y)$. Também temos que $\text{ad}(\alpha x) = \alpha \text{ad}(x)$, pois $\forall \alpha \in \mathbb{k}$, e para todos $x, z \in \mathfrak{g}$, temos que

$$\text{ad}(\alpha x)(z) = [\alpha x, z] = \alpha [x, z] = \alpha \text{ad}(x)(z).$$

Por fim, $\text{ad}([x, y]) = [\text{ad}(x), \text{ad}(y)]$, pois dados $x, y, z \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned} [\text{ad}(x), \text{ad}(y)](z) &= \text{ad}(x) \text{ad}(y)(z) - \text{ad}(y) \text{ad}(x)(z) \\ &= \text{ad}(x)([y, z]) - \text{ad}(y)([x, z]) \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\ &= [x, [y, z]] + [[x, z], y] \\ &= [[x, y], z] \\ &= \text{ad}([x, y])(z), \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue da identidade de Jacobi. Logo, ad é um homomorfismo. Tal representação é chamada de *representação adjunta* de \mathfrak{g} .

Definição 1.29. O núcleo de uma representação adjunta de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é chamado de *centro* de \mathfrak{g} , e denotado por

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}(x)(y) = [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

De maneira geral, se A é um subconjunto não vazio de \mathfrak{g} , então o *centralizador* de A é definido como

$$\mathfrak{z}(A) = \{y \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0, \forall x \in A\}.$$

O centro de \mathfrak{g} é um ideal de \mathfrak{g} , pois para todo $y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ e para todo $x \in \mathfrak{g}$, temos que $[x, y] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. De fato, a identidade de Jacobi nos garante que dado $z \in \mathfrak{g}$, $[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]] = 0$, pois $y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, implicando $[y, z] = 0$, e $[x, z] \in \mathfrak{g}$, logo $[[x, z], y] = 0$. A identidade de Jacobi também nos mostra que dado $A \subseteq \mathfrak{g}$, o centralizador de A é uma subálgebra de \mathfrak{g} : dados $x, y \in \mathfrak{z}(A)$, e $z \in A$, então $[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]] = [0, y] + [x, 0] = 0$, ou seja, $[x, y] \in \mathfrak{z}(A)$.

Proposição 1.30. Se \mathfrak{h} é ideal de \mathfrak{g} , então o centralizador $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ também é um ideal de \mathfrak{g} .

Demonstração. Novamente, pela identidade de Jacobi, temos que dados $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{h}$ e $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$,

$$[[z, x], y] = [[z, y], x] + [z, [x, y]] = [0, y] + 0 = 0,$$

pois $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, logo $[z, y] = 0$ e $[x, y] \in \mathfrak{h}$, então $[z, [x, y]] = 0$. Portanto, $[z, x] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, o que mostra que $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ é ideal de \mathfrak{g} . □

Proposição 1.31. Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie e $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo sobrejetivo. Se $\mathfrak{z} := \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, então

$$\varphi(\mathfrak{z}) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{h}).$$

Demonstração. Sejam $x \in \mathfrak{z}$ e $y \in \mathfrak{h}$. Como φ é sobrejetivo, existe $x_0 \in \mathfrak{g}$ tal que $y = \varphi(x_0)$. Assim, temos que

$$[\varphi(x), y] = [\varphi(x), \varphi(x_0)] = \varphi([x, x_0]) = \varphi(\{0\}) = \{0\},$$

ou seja, $\varphi(x) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. □

Exemplo 1.32. Seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie de dimensão dois não abeliana com base $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = y$. Temos que

$$[x, x] = 0, \quad [x, y] = y, \quad [y, x] = -y, \quad [y, y] = 0,$$

e então

$$\text{ad}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \text{ad}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $z \in \mathfrak{g}$ qualquer. Então existem $a, b \in \mathbb{k}$ tais que $z = ax + by$. Assim,

$$\text{ad}(z) = a \text{ad}(x) + b \text{ad}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar que o centro de \mathfrak{g} é trivial. Seja $w \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ qualquer. Então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ tais que $w = \alpha x + \beta y$. Como $w \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, w comuta com todos os elementos de \mathfrak{g} , e em particular com x e y . Assim,

$$0 = [w, x] = [\alpha x + \beta y, x] = \alpha[x, x] + \beta[y, x] = -\beta y,$$

o que implica que $\beta = 0$. Mas então

$$0 = [w, y] = [\alpha x + \beta y, y] = \alpha[x, y] + \beta[y, y] = \alpha y,$$

de onde segue que $\alpha = 0$ e, portanto, $w = 0$. Desse modo, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Exemplo 1.33. Vamos determinar a representação adjunta de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$. Seja a base $\{X, H, Y\}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$, em que

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

As constantes de estrutura são dadas por

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Temos que

$$\text{ad}(X)(X) = [X, X] = 0, \quad \text{ad}(X)(H) = [X, H] = -2X \text{ e } \text{ad}(X)(Y) = [X, Y] = H,$$

e então

$$\text{ad}(X) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De maneira análoga, obtemos

$$\text{ad}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } \text{ad}(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $Z \in \mathfrak{g}$ qualquer. Então $Z = aX + bH + cY$, ou seja, $Z = \begin{pmatrix} b & a \\ c & -b \end{pmatrix}$, em que $a, b, c \in \mathbb{k}$.

Assim, $\text{ad}(Z) = a \text{ad}(X) + b \text{ad}(H) + c \text{ad}(Y) = \begin{pmatrix} 2b & -2a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 2c & -2b \end{pmatrix}$. Desse modo, temos que a representação adjunta de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ é dada por

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad \begin{pmatrix} b & a \\ c & -b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2b & -a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 2c & -2b \end{pmatrix}.$$

Vamos agora mostrar que o centro de \mathfrak{g} é trivial. Seja $W \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Então existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$ tais que $W = \alpha X + \beta H + \gamma Y$. Como $W \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, W comuta com todos os elementos de \mathfrak{g} , e em particular com Y e X . Assim,

$$0 = [W, Y] = [\alpha X + \beta H + \gamma Y, Y] = \alpha[X, Y] + \beta[H, Y] + \gamma[Y, Y] = \alpha H - 2\beta Y,$$

o que implica $\alpha = 0 = \beta$, ou seja, $W = \gamma Y$. Mas como

$$0 = [W, X] = [\gamma Y, X] = \gamma[Y, X] = -\gamma H,$$

temos que $\gamma = 0$ e, portanto, $W = 0$. Desse modo, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

A base $\{X, H, Y\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ dada no exemplo (1.33) é chamada de *base padrão* de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$.

Definição 1.34. Seja φ uma representação de \mathfrak{g} em V . Dizemos que $W \subseteq V$ é *sub-representação* de V , ou *subespaço invariante* por φ , se

$$\forall x \in \mathfrak{g}, \quad \varphi(x)W \subseteq W.$$

Note que a soma e a interseção de duas sub-representações também é sub-representação. A representação φ é dita *irredutível* se possui apenas as sub-representações triviais $\{0\}$ e V . A representação φ é denominada *completamente redutível* se podemos decompor V como

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

onde cada V_i é sub-representação de V e a restrição de φ a V_i é irredutível.

Observação 1.35. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie com dimensão maior do que 1. Note que a representação adjunta de \mathfrak{g} é irredutível se, e somente se, \mathfrak{g} é simples. Isso segue do fato que um subespaço de \mathfrak{g} é um ideal se, e somente se, esse subespaço é uma sub-representação da representação adjunta de \mathfrak{g} .

Proposição 1.36. *Seja φ uma representação de \mathfrak{g} em V de dimensão finita n . Então φ é completamente redutível se, e somente se, toda sub-representação de V possui uma sub-representação complementar, ou seja, dada qualquer sub-representação W de V , existe uma sub-representação W' de V tal que $V = W \oplus W'$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos admitir que toda sub-representação de V possui uma sub-representação complementar. Vamos utilizar indução sobre a dimensão de V . Se $\dim(V) = 1$, então V é irredutível, e escrevemos $V = V$. Suponha o resultado válido se $\dim(V) \leq n - 1$. Seja agora V um espaço vetorial de dimensão n . Se V é irredutível, podemos escrever $V = V$ e o resultado fica provado. Suponha que V não é irredutível e seja $W \subseteq V$ sub-representação de V . Sabemos que existe $W' \subseteq V$ sub-representação de V tal que $V = W \oplus W'$. Se ambos W e W' são irredutíveis, basta fazer $W = V_1$ e $W' = V_2$, e a demonstração está feita. Suponha então, sem perda de generalidade, que W não é irredutível. Logo, existe $U \subseteq W$ sub-representação de W . Como $U \subseteq W \subseteq V$, segue que U é sub-representação de V . Portanto, existe $U' \subseteq V$ sub-representação de V tal que $V = U \oplus U'$. Vamos mostrar que

$$W = (U \cap W) \oplus (U' \cap W).$$

De fato, seja $w \in W \subseteq V$. Como $V = U \oplus U'$, segue que $w = u + u'$, com $u \in U = U \cap W$, pois $U \subseteq W$, e com $u' \in U'$. Como $U \subseteq W$, $u \in W$, e então $u' = w - u \in W$. Assim, $u' \in U' \cap W$. Como $U \cap U' = \{0\}$, segue que $(U \cap W) \cap (U' \cap W) = \{0\}$ e, portanto, temos que $W = (U \cap W) \oplus (U' \cap W)$. Como $\dim(W) < \dim(V) = n$ e $U \cap W = U$ é sub-representação de W , segue que W satisfaz a hipótese de indução. Logo, $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$, com cada W_i sub-representação de W . Caso W' não seja irredutível, procedemos de maneira análoga, concluindo que $W' = W'_1 \oplus \dots \oplus W'_s$, com cada W'_i sub-representação de W' . Portanto, escrevemos

$$V = W \oplus W' = W_1 \oplus \dots \oplus W_r \oplus W'_1 \oplus \dots \oplus W'_s,$$

e a demonstração está feita.

Para a recíproca, também aplicamos indução sobre a dimensão n de V . Se $\dim(V) = 1$, então V é irredutível, e escrevemos $V = \{0\} \oplus V$. Suponha o resultado válido se $\dim(V) \leq n - 1$. Seja agora $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ um espaço vetorial de dimensão n . Seja $W \subseteq V$ sub-representação de V . Como cada $W \cap V_i$ é sub-representação, e cada V_i é irredutível, segue que $W \cap V_i = \{0\}$, ou $W \cap V_i = V_i$ para todo i . Vamos analisar os dois casos:

Caso I: Suponha que $W \cap V_i = V_i$ para algum i . Podemos rearranjar os índices de modo a obter $i=1$. Assim, $W \cap V_1 = V_1$, ou seja, $V_1 \subseteq W$. Vamos mostrar que

$$W = V_1 \oplus (W \cap (V_2 \oplus \dots \oplus V_n)).$$

Seja $w \in W \subseteq V$, $w = w_1 + w_2$, com $w_1 \in V_1$, e $w_2 \in V_2 \oplus \dots \oplus V_n$. Como $V_1 \subseteq W$, então $w_1 \in W$. Assim, $w_2 = w - w_1 \in W$. Logo, $w_2 \in W \cap (V_2 \oplus \dots \oplus V_n)$. Como

$$V_1 \cap (W \cap (V_2 \oplus \dots \oplus V_n)) = V_1 \cap (V_2 \oplus \dots \oplus V_n) = \{0\},$$

segue que $W = V_1 \oplus (W \cap (V_2 \oplus \dots \oplus V_n))$. Observamos que $W \cap (V_2 \oplus \dots \oplus V_n)$ é sub-representação de $V_2 \oplus \dots \oplus V_n$. De fato, consideremos φ a representação de \mathfrak{g} em $V_2 \oplus \dots \oplus V_n$. Seja $v \in W \cap (V_2 \oplus \dots \oplus V_n)$. Então $v = v_2 + \dots + v_n$, com cada $v_i \in W \cap V_i$. Para todo $x \in \mathfrak{g}$, temos que

$$\varphi(x)(v) = \varphi(x)(v_2 + \dots + v_n) = \varphi(x)v_2 + \dots + \varphi(x)v_n \in W \cap V_2 + \dots + W \cap V_n \subseteq W \cap (V_2 \oplus \dots \oplus V_n),$$

pois cada V_i é sub-representação. Como $\dim(V_2 \oplus \dots \oplus V_n) < n$, temos que $V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ satisfaz a hipótese de indução. Logo, existe sub-representação W' , tal que

$$V_2 \oplus \dots \oplus V_n = (W \cap (V_2 \oplus \dots \oplus V_n)) \oplus W'.$$

Mas então W' complementa W em V , pois

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n = V_1 \oplus (W \cap (V_2 \oplus \dots \oplus V_n)) \oplus W',$$

ou seja $V = W \oplus W'$.

Caso II: Suponha agora que $W \cap V_i = \{0\}$ para todo i . Então $W \oplus V_1$ satisfaz as condições anteriores, uma vez que $(W \oplus V_1) \cap V_1 = V_1$. Portanto, existe W' sub-representação de V tal que $V = (W \oplus V_1) \oplus W'$, ou seja,

$$V = W \oplus (V_1 \oplus W').$$

□

Exemplo 1.37. Considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$, com base padrão $\{X, H, Y\}$. Note que o homomorfismo

$$\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{k}^2), \quad \begin{pmatrix} b & a \\ c & -b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b & a \\ c & -b \end{pmatrix}$$

define uma representação de \mathfrak{g} em \mathbb{k}^2 . Tal representação é chamada de *representação natural* de \mathfrak{g} . Vamos verificar se o subespaço $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ é uma sub-representação de \mathbb{k}^2 . Para isso, temos que verificar se $\varphi(x)W \subseteq W$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. Porém, se $c \neq 0$, então

$$\begin{pmatrix} b & a \\ c & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{k}.$$

Portanto, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ não é sub-representação.

Exemplo 1.38. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$, $\mathfrak{h} = \langle H \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{k} \right\}$ e considere a restrição da representação adjunta de \mathfrak{g} a \mathfrak{h} :

$$\varphi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad A \mapsto \varphi(A) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad Z \mapsto [A, Z].$$

Vamos verificar que $W_1 = \langle X \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ é sub-representação, ou seja, vamos verificar que $\varphi(H)W_1 \subseteq W_1$, $\forall H \in \mathfrak{h}$. De fato,

$$\varphi(H)W_1 \subseteq \langle [H, X] \rangle = \langle 2X \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = W_1.$$

Portanto, W_1 é uma sub-representação de \mathfrak{g} . De maneira análoga, $W_2 = \langle H \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ também é sub-representação, pois

$$\varphi(H)W_2 \subseteq \langle [H, H] \rangle = \{0\} \subseteq W_2,$$

ou seja, $\varphi(H)W_2 \subseteq W_2$, $\forall H \in \mathfrak{h}$. Similarmente, $W_3 = \langle Y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ também é sub-representação, pois

$$\varphi(H)W_3 \subseteq \langle [H, Y] \rangle = \langle -2Y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = W_3,$$

ou seja, $\varphi(H)W_3 \subseteq W_3$, $\forall H \in \mathfrak{h}$. Desse modo, temos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ pode ser escrito como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3,$$

onde cada W_i é uma sub-representação irredutível (pois possui dimensão igual a 1) de \mathfrak{g} .

Lema 1.39. *Sejam $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de \mathfrak{g} , e $v \in V \setminus \{0\}$. Então*

$$\varphi(\mathfrak{g})v = \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_k)v \mid k \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{g} \rangle$$

é uma sub-representação de V . Em particular, a representação V é irredutível se, e somente se, $\varphi(\mathfrak{g})v = V$, $\forall v \in V \setminus \{0\}$.

Demonstração. Por definição, $W = \varphi(\mathfrak{g})v$ é subespaço vetorial de V . Para ver que W é sub-representação, note que, para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $\varphi(x_1) \dots \varphi(x_k)v \in W$, temos que $\varphi(x)\varphi(x_1) \dots \varphi(x_k)v \in W$. Assim, segue que W é sub-representação de V . Assuma agora que V é irredutível. Como V é irredutível e $W \neq \{0\}$, segue que $W = V$ e, portanto, $V = \varphi(\mathfrak{g})v$.

Para a recíproca, considere $U \subseteq V$ uma sub-representação de V tal que $U \neq \{0\}$, e tome $u \in U \setminus \{0\}$. Por hipótese, temos que $\varphi(\mathfrak{g})u = V$. Assim, $V = \varphi(\mathfrak{g})u \subseteq U$, pois U é sub-representação e $u \in U$. Logo, $U = V$ e, portanto, V é irredutível. □

Exemplo 1.40. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$. Vamos verificar se a representação adjunta $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $Z \mapsto \text{ad}(Z)$ é irredutível. Para isso, tome $Z \in \mathfrak{g}$ não nulo e considere $W = \text{ad}(\mathfrak{g})Z$. Então, $Z = \alpha X + \beta H + \gamma Y$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$ não todos nulos, onde $\{X, H, Y\}$ é a base padrão de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$. Vamos dividir em casos:

Caso I: Suponha que Z é múltiplo de algum dos elementos da base. Se $Z = \alpha X$, com $\alpha \neq 0$, então aplicando $\text{ad}(Y)$ em Z obtemos H e aplicando $\text{ad}(Y)^2$ em Z obtemos Y . Logo, neste caso todos os elementos da base estão contidos em $\text{ad}(\mathfrak{g})Z$, o que implica $\mathfrak{g} = W$. Se $Z = \gamma Y$, com $\gamma \neq 0$, então aplicando $\text{ad}(X)$ em Z obtemos H e aplicando $\text{ad}(X)^2$ em Z obtemos X . Logo, neste caso todos os elementos da base estão contidos em $\text{ad}(\mathfrak{g})Z$, o que implica $\mathfrak{g} = W$. Analogamente, se $Z = \beta H$, com $\beta \neq 0$, então temos que $\mathfrak{g} = W$.

Caso II: Suponha que $Z = \alpha X + \beta H$, com $\alpha, \beta \neq 0$. Neste caso, aplicando $\text{ad}(H)$ em Z vemos que $X \in W$ e usando o caso I, temos $\mathfrak{g} = W$. Se $Z = \alpha X + \gamma Y$, com $\alpha, \gamma \neq 0$, então aplicando $\text{ad}(Y)$ em Z vemos que $H \in W$ e pelo o caso I segue que $\mathfrak{g} = W$. Analogamente, se $Z = \beta H + \gamma Y$, com $\beta, \gamma \neq 0$, aplicamos $\text{ad}(H)$ em Z , e vemos que Y pertence a W e novamente temos que $\mathfrak{g} = W$ pelo caso I.

Caso III: Suponha que $Z = \alpha X + \beta H + \gamma Y$, com $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. Neste caso, aplicando $\text{ad}(X)$ em Z vemos que $-2\beta X + \gamma H \in W$ e usando o caso II, temos $\mathfrak{g} = W$.

Pelos casos I, II e III acima, temos que $\mathfrak{g} = \text{ad}(\mathfrak{g})Z$ para qualquer $Z \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$. Logo, pelo Lema 1.39, ad é uma representação irredutível.

Definição 1.41. Uma *derivação de uma álgebra de Lie* \mathfrak{g} é uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisfaz

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)], \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Uma das formas da identidade de Jacobi nos mostra que, para qualquer $x \in \mathfrak{g}$, a transformação linear $\text{ad}(x)$ é uma derivação de \mathfrak{g} . De fato, dados $y, z \in \mathfrak{g}$, temos que

$$\text{ad}(x)([y, z]) = [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]],$$

ou seja,

$$\text{ad}(x)([y, z]) = [\text{ad}(x)(y), z] + [y, \text{ad}(x)(z)].$$

As derivações da forma $\text{ad}(x)$, com $x \in \mathfrak{g}$, são chamadas de *derivações internas* de \mathfrak{g} . Denote por $\text{Der}(\mathfrak{g})$ o subespaço de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ de todas as derivações de \mathfrak{g} , e por $\text{ad}(\mathfrak{g})$ o subespaço de $\text{Der}(\mathfrak{g})$ de todas as derivações internas de \mathfrak{g} . Observe que $\text{Der}(\mathfrak{g})$ tem estrutura de álgebra de Lie se definirmos o colchete pelo comutador.

Proposição 1.42. *O subespaço $\text{ad}(\mathfrak{g})$ é um ideal de $\text{Der}(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathfrak{g}$ e $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$. Temos que

$$\begin{aligned} [D, \text{ad}(x)](y) &= (D \circ \text{ad}(x) - \text{ad}(x) \circ D)(y) \\ &= D \circ \text{ad}(x)(y) - \text{ad}(x) \circ D(y) \\ &= D([x, y]) - [x, D(y)] \\ &= [D(x), y] + [x, D(y)] - [x, D(y)] \\ &= [D(x), y] \\ &= \text{ad}(D(x))(y), \end{aligned}$$

ou seja, $[D, \text{ad}(x)] \in \text{ad}(\mathfrak{g})$. Logo, $\text{ad}(\mathfrak{g})$ é ideal de $\text{Der}(\mathfrak{g})$. □

Exemplo 1.43. Seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie de dimensão dois não abeliana com base $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = y$. Considere $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ uma aplicação linear que, nesta base, é dada por

$$D = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Vamos determinar as relações entre a, b, c , e d para que D seja derivação. A bilinearidade do colchete nos garante que é suficiente analisar a relação $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$ com x, y os elementos da base dada. Então, temos que

$$D(y) = D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

é equivalente a

$$cx + dy = [ax + by, y] + [x, cx + dy] = a[x, y] + b[y, y] + c[x, x] + d[x, y] = ay + dy = (a + d)y.$$

Então, D é derivação se, e somente se, $c = 0$ e $d = a + d$, ou seja, $a = 0$. Desse modo, as matrizes das derivações D de \mathfrak{g} são da forma

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & d \end{pmatrix}.$$

1.4 Séries de composição e álgebras nilpotentes e solúveis

Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $A, B \subseteq \mathfrak{g}$. Definimos $[A, B] := \langle [x, y] \mid x \in A, y \in B \rangle$.

Definição 1.44. A *série derivada* de \mathfrak{g} é definida indutivamente por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{(1)} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \\ \mathfrak{g}^{(2)} &= [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]. \end{aligned}$$

Tais subespaços são ideais de \mathfrak{g} . Basta observar que se i, j são ideais de \mathfrak{g} , então $[i, j]$ também é ideal. De fato, dados $x \in \mathfrak{g}$, $i \in i$ e $j \in j$, a identidade de Jacobi nos mostra que

$$[x, [i, j]] = [[x, i], j] + [i, [x, j]] \in [i, j],$$

uma vez que i e j são ideais de \mathfrak{g} e, portanto, $[x, i] \in i$ e $[x, j] \in j$. Assim, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é ideal, bem como $\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$, etc.

Exemplo 1.45. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é abeliana se, e somente se, $\mathfrak{g}' = 0$. De fato, se \mathfrak{g} é abeliana, então $[x, y] = 0$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$. Portanto, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$. Reciprocamente, se $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, então $[x, y] = 0 \forall x, y \in \mathfrak{g}$, ou seja, \mathfrak{g} é abeliana.

Exemplo 1.46. Sejam \mathbb{k} um corpo com característica diferente de 2 e $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$, com base padrão $\{X, H, Y\}$. Como

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H,$$

temos que $X, H, Y \in \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e, portanto, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. Desse modo, $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}$, $\forall k \geq 0$. Se a característica de \mathbb{k} é dois, segue que

$$[H, X] = 0 = [H, Y], \quad [X, Y] = H,$$

e então \mathfrak{g}' é o subespaço gerado por H . Assim, $\mathfrak{g}^{(2)} = \{0\}$.

Proposição 1.47. Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal.

1. $\mathfrak{g}^{(k-1)}/\mathfrak{g}^{(k)}$ é abeliano.
2. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é abeliano se, e somente se, $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{h}$.

Demonstração. Para a parte (1), dados $x, y \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$, temos que

$$[x + \mathfrak{g}^{(k)}, y + \mathfrak{g}^{(k)}] = [x, y] + \mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}^{(k)},$$

pois $[x, y] \in \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$.

Para a parte (2), considere $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ abeliano e tome $x, y \in \mathfrak{g}$. Então

$$[x + \mathfrak{h}, y + \mathfrak{h}] = [x, y] + \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \Rightarrow [x, y] \in \mathfrak{h}, \forall x, y \in \mathfrak{g} \Rightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{h}.$$

Suponha agora que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{h}$. Então, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$, temos que $[x, y] \in \mathfrak{h}$, o que implica

$$[x + \mathfrak{h}, y + \mathfrak{h}] = [x, y] + \mathfrak{h} = \mathfrak{h},$$

mostrando assim que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é abeliano. □

Proposição 1.48. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal, e $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ o homomorfismo canônico. Então*

$$\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}.$$

Demonstração. Vamos provar utilizando indução sobre k . Naturalmente, temos que $\pi(\mathfrak{g}^{(0)}) = \pi(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(0)}$. Assumindo o resultado válido para $k - 1$, temos:

$$\begin{aligned} \pi(\mathfrak{g}^{(k)}) &= \pi([\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]) \\ &= [\pi(\mathfrak{g}^{(k-1)}), \pi(\mathfrak{g}^{(k-1)})] \\ &= [(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k-1)}, (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k-1)}] \\ &= (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.49. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra. Então*

$$\mathfrak{h}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{(k)}.$$

Demonstração. Novamente, utilizaremos indução sobre k . Naturalmente, $\mathfrak{h}^{(0)} = \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)}$. Suponha o resultado verdadeiro para $k - 1$. Temos que

$$\mathfrak{h}^{(k)} = [\mathfrak{h}^{(k-1)}, \mathfrak{h}^{(k-1)}] \subseteq [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] = \mathfrak{g}^{(k)}.$$

□

Definição 1.50. A *série central descendente da álgebra de Lie \mathfrak{g}* é definida indutivamente por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \\ \mathfrak{g}^3 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]. \end{aligned}$$

Por indução sobre k podemos ver que \mathfrak{g}^k é um ideal de \mathfrak{g} para todo $k \geq 1$. De fato, se $k = 1$, o resultado é trivial. Suponha o resultado válido para k , ou seja, suponha que \mathfrak{g}^k é ideal de \mathfrak{g} e, portanto, $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subseteq \mathfrak{g}^k$. Então

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k+1}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = \mathfrak{g}^{k+1},$$

ou seja, \mathfrak{g}^{k+1} é ideal de \mathfrak{g} . Observe que $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subseteq \mathfrak{g}^k$, para todo $k \geq 1$, e assim temos que

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^k \supset \cdots .$$

Exemplo 1.51. Seja $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ a álgebra das matrizes triangulares superiores 3×3 com

zeros na diagonal principal. Então $\mathfrak{g}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{g}^3 = \{0\}$, e $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ se $k \geq 3$.

Exemplo 1.52. Seja $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ a álgebra das matrizes triangulares superiores 3×3 .

Então $\mathfrak{g}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{g}^3 = \mathfrak{g}^2$, e $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}^2$ se $k \geq 3$.

Proposição 1.53. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie.*

1. $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subseteq \mathfrak{g}^{i+j}$,
2. $\mathfrak{g}^k = \langle [x_1, \dots, [x_{k-1}, x_k] \dots] \mid k \in \mathbb{N}, x_i \in \mathfrak{g} \text{ para todo } 1 \leq i \leq k \rangle$.

Demonstração. Para a parte (1), utilizaremos indução sobre j . Para $j = 1$, temos que $\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i] \subseteq \mathfrak{g}^i$, já que \mathfrak{g}^i é ideal. Suponha o resultado verdadeiro para j . Utilizando a identidade de Jacobi, temos:

$$[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{j+1}] = [\mathfrak{g}^i, [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}]] \subseteq [[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j], \mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}^j, [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}]] \subseteq [\mathfrak{g}^{i+j}, \mathfrak{g}] + [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^{i+1}] \subseteq \mathfrak{g}^{i+j+1}.$$

Para a parte (2), utilizaremos indução sobre k . Para $k = 1$ (ou 2), o resultado é imediato da definição de \mathfrak{g}^k . Assumindo o resultado válido para $k - 1$, temos que os elementos de \mathfrak{g}^{k-1} são da forma $\sum_i z_i$, em que z_i é produto de $k - 1$ elementos de \mathfrak{g} . Desse modo, $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]$ é gerado por elementos da forma

$$\sum_i [x_i, z_i], \quad x_i \in \mathfrak{g},$$

ou seja, pelo produto de k elementos de \mathfrak{g} . □

Proposição 1.54. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Então*

$$\mathfrak{g}^k / \mathfrak{g}^{k+1}$$

é uma álgebra abeliana.

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathfrak{g}^k$. Então

$$[x + \mathfrak{g}^{k+1}, y + \mathfrak{g}^{k+1}] = [x, y] + \mathfrak{g}^{k+1} = \mathfrak{g}^{k+1},$$

já que $[x, y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = \mathfrak{g}^{k+1}$. Logo, $\mathfrak{g}^k / \mathfrak{g}^{k+1}$ é abeliana. □

Para a demonstração das duas proposições abaixo, utilizaremos indução sobre k .

Proposição 1.55. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal, e $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ o homomorfismo canônico. Então*

$$\pi(\mathfrak{g}^k) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^k.$$

Demonstração. Naturalmente, $\pi(\mathfrak{g}^1) = \pi(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^1$. Assumindo o resultado válido para $k - 1$, temos que

$$\begin{aligned} \pi(\mathfrak{g}^k) &= \pi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]) \\ &= [\pi(\mathfrak{g}), \pi(\mathfrak{g}^{k-1})] \\ &= [(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{k-1}] \\ &= (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^k. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.56. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Então*

$$\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{k+1},$$

ou seja, a série derivada tem decrescimento mais rápido que a série central descendente.

Demonstração. Para $k = 1$, tem-se que $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^2 \subseteq \mathfrak{g}^2$. Admitindo o resultado válido para k , temos que

$$\mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}] \subseteq [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{k+1}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k+1}] = \mathfrak{g}^{k+2}.$$

□

Definição 1.57. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita *solúvel* se

$$\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\},$$

para algum $k \geq 1$, ou seja, se alguma de suas álgebras derivadas se anula.

Exemplo 1.58. Seja \mathfrak{g} uma álgebra abeliana. Então \mathfrak{g} é solúvel, pois $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^{(1)} = 0$.

Exemplo 1.59. Considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$. Então \mathfrak{g} não é solúvel, pois conforme visto no exemplo 1.46, $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g} \forall k \geq 0$.

Exemplo 1.60. Seja $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ a álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores 3×3

com entradas em \mathbb{k} . Então $\mathfrak{g}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{g}^{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{g}^{(3)} = \{0\}$, e $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$

se $k \geq 3$, o que mostra que \mathfrak{g} é solúvel. Este resultado pode ser estendido para dimensões maiores: se \mathfrak{g} é a álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em \mathbb{k} , então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ se $k \geq k_0$.

Proposição 1.61. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie solúvel e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Temos:*

1. Se \mathfrak{h} é subálgebra, então \mathfrak{h} é solúvel.
2. Se \mathfrak{h} é ideal, então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é solúvel.
3. Se $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{m}$ é um homomorfismo, então $\varphi(\mathfrak{g})$ é uma subálgebra solúvel de \mathfrak{m} . Em particular, se φ é sobrejetivo, então \mathfrak{m} é solúvel.

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$. Então, pela proposição 1.49,

$$\mathfrak{h}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{(k)} = \{0\},$$

o que mostra que se \mathfrak{g} é solúvel, então \mathfrak{h} também é solúvel.

Para a parte (2), seja $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ o homomorfismo canônico. Como \mathfrak{g} é solúvel, existe $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$. Mas então

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)} = \pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = \pi(\{0\}) = \{0\},$$

ou seja, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ também é solúvel.

Para a parte (3), como \mathfrak{g} é solúvel, existe $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$. Assim,

$$\varphi(\mathfrak{g}^{(k)}) = \varphi(\{0\}) = \{0\}.$$

Desse modo, segue que $\varphi(\mathfrak{g})$ é solúvel. Se φ é sobrejetivo, então $\varphi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{m}$ e, portanto, \mathfrak{m} é solúvel. \square

Proposição 1.62. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal. Se \mathfrak{h} e $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ são solúveis, então \mathfrak{g} também é solúvel.*

Demonstração. Como $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é solúvel, então existe $k_1 \geq 1$ tal que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_1)} = 0$. Considerando $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ o homomorfismo canônico, temos que $\pi(\mathfrak{g}^{(k_1)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_1)} = 0$, ou seja, $\mathfrak{g}^{(k_1)} \subseteq \mathfrak{h}$. Como \mathfrak{h} é solúvel, existe $k_2 \geq 1$ tal que $\mathfrak{h}^{(k_2)} = 0$. Então

$$\mathfrak{g}^{(k_1+k_2)} = (\mathfrak{g}^{(k_1)})^{(k_2)} \subseteq \mathfrak{h}^{(k_2)} = 0,$$

ou seja, \mathfrak{g} é solúvel. \square

Definição 1.63. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita nilpotente se

$$\mathfrak{g}^k = 0,$$

para algum $k \geq 1$, ou seja, se sua série central descendente se anula em algum momento.

Exemplo 1.64. Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie abeliana, então \mathfrak{g} é nilpotente, pois $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' = 0$.

Exemplo 1.65. Seja $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & a & * \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}$ a álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores 3×3

com entradas em \mathbb{k} cujos elementos da diagonal principal são iguais. Então $\mathfrak{g}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$,

$\mathfrak{g}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{g}^4 = \{0\}$, e $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ se $k \geq 4$, o que mostra que \mathfrak{g} é nilpotente. Este resultado

pode ser estendido para dimensões maiores: se \mathfrak{g} é a álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em \mathbb{k} cujos elementos da diagonal principal são iguais, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ se $k \geq k_0$.

Proposição 1.66. *Álgebras de Lie nilpotentes são solúveis.*

Demonstração. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie nilpotente. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$. A proposição 1.56 nos diz que

$$\mathfrak{g}^{(k-1)} \subseteq \mathfrak{g}^k = \{0\},$$

o que mostra que \mathfrak{g} é solúvel. □

A recíproca da proposição anterior nem sempre é verdadeira, como podemos ver no exemplo abaixo:

Exemplo 1.67. Seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie não abeliana de dimensão 2 com base $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = y$. Observe que \mathfrak{g} é solúvel, pois

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(1)} &= \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \langle [x, y] \rangle = \langle y \rangle, \\ \mathfrak{g}^{(2)} &= [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = \langle [y, y] \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{g}^2 &= \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \langle [x, y] \rangle = \langle y \rangle, \\ \mathfrak{g}^3 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2] = \langle [x, y] \rangle = \langle y \rangle = \mathfrak{g}', \\ \mathfrak{g}^4 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^3] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'] = \langle [x, y] \rangle = \langle y \rangle = \mathfrak{g}', \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, temos que $\mathfrak{g}^k = \langle y \rangle$, $\forall k \geq 2$ e, portanto, \mathfrak{g} não é nilpotente. Vale a pena mencionar que este é o menor (com dimensão mínima) exemplo de uma álgebra de Lie que é solúvel mas não é nilpotente.

Proposição 1.68. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie nilpotente. Então*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\},$$

ou seja, seu centro não é trivial.

Demonstração. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie nilpotente. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^k \neq 0$ e $\mathfrak{g}^{k+1} = 0$. Como $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] = 0$, segue que $\mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, o que mostra que o centro de \mathfrak{g} não é trivial. Entretanto, o centro de uma álgebra solúvel pode se anular, conforme visto no exemplo 1.32. □

Proposição 1.69. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie nilpotente e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Temos:*

1. *Se \mathfrak{h} é subálgebra, então \mathfrak{h} é nilpotente.*
2. *Se \mathfrak{h} é ideal, então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é nilpotente.*

Demonstração. Para a parte (1), vamos mostrar por indução sobre k que se $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, então $\mathfrak{h}^k \subseteq \mathfrak{g}^k$. Para $k = 1$, o resultado é trivial. Suponha agora o resultado verdadeiro para $k - 1$. Temos que

$$\mathfrak{h}^k = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{k-1}] \subseteq [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^{k-1}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] = \mathfrak{g}^k,$$

ou seja, $\mathfrak{h}^k \subseteq \mathfrak{g}^k$. Seja agora $k_0 \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^{k_0} = 0$. Então

$$\mathfrak{h}^{k_0} \subseteq \mathfrak{g}^{k_0} = \{0\},$$

o que mostra que se \mathfrak{g} é nilpotente, então \mathfrak{h} também é nilpotente.

Para a parte (2), seja $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ o homomorfismo canônico. Como \mathfrak{g} é nilpotente, existe $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^k = \{0\}$. Mas então

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^k = \pi(\mathfrak{g}^k) = \pi(\{0\}) = \{0\},$$

ou seja, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ também é nilpotente. □

Proposição 1.70. *Sejam $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ ideais solúveis de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} . Então $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ também é ideal solúvel de \mathfrak{g} .*

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ é ideal de \mathfrak{g} . Sejam $x \in \mathfrak{g}$ e $y_1 + y_2 \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$, com $y_1 \in \mathfrak{h}_1, y_2 \in \mathfrak{h}_2$. Então

$$[x, y_1 + y_2] = [x, y_1] + [x, y_2] \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2,$$

uma vez que $[x, y_1] \in \mathfrak{h}_1$ e $[x, y_2] \in \mathfrak{h}_2$, já que $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ são ideais. Observe que o 2º teorema do isomorfismo nos garante que

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_2 \cong \mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2.$$

Como \mathfrak{h}_1 é solúvel, a proposição 1.61 nos garante que $\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ também é solúvel e, portanto, $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_2$ é solúvel. Por hipótese, \mathfrak{h}_2 é solúvel, logo a proposição 1.62 nos diz que $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ é solúvel. □

Proposição 1.71. *Toda álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensão finita possui um ideal solúvel maximal \mathfrak{r} que contém todos os ideais solúveis de \mathfrak{g} .*

Demonstração. Seja \mathfrak{r} um ideal solúvel de dimensão maximal n . Se \mathfrak{h} é ideal solúvel de \mathfrak{g} , então, pela proposição anterior, $\mathfrak{r} + \mathfrak{h}$ também é ideal de \mathfrak{g} , com $\dim(\mathfrak{r} + \mathfrak{h}) \geq \dim(\mathfrak{r})$. Mas, pela maximalidade da dimensão, temos que $\dim(\mathfrak{r} + \mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{r}) = n$, ou seja, $\mathfrak{r} + \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{r}$, e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{r}$. □

Definição 1.72. O ideal \mathfrak{r} da proposição anterior é chamado de *radical solúvel* de \mathfrak{g} , e é denotado por $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.

Definição 1.73. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita *semisimples* se possui apenas 0 como ideal solúvel, ou seja, se

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0.$$

Proposição 1.74. Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie simples, então \mathfrak{g} é semisimples.

Demonstração. Como \mathfrak{g} é simples e $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é ideal, devemos ter $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$ ou $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$, o resultado segue. Suponha que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Então, \mathfrak{g} é solúvel, e $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$, pois caso contrário $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}$ para todo $k \geq 1$, e \mathfrak{g} não seria solúvel. Como \mathfrak{g}' é ideal de \mathfrak{g} , segue que $\mathfrak{g}' = 0$, ou seja, \mathfrak{g} é abeliana, o que é um absurdo se $\dim(\mathfrak{g}) \geq 2$, já que subespaços de álgebras abelianas são ideais. Portanto, temos que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$, ou seja, \mathfrak{g} é semisimples. □

Exemplo 1.75. Vamos mostrar que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ é simples. De fato, pelo exemplo 1.40 sabemos que a representação adjunta de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ é irredutível. Desse modo, pela observação 1.35, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ é simples.

Corolário 1.76. Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$, então $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}'$ e $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$.

Demonstração. De fato, como \mathfrak{g} é simples e \mathfrak{g}' e $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ são ideais de \mathfrak{g} , segue que $\mathfrak{g}' = \{0\}$ ou $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ ou $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Como \mathfrak{g} não é abeliana, não podemos ter $\mathfrak{g}' = \{0\}$ e nem $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Logo, segue que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$. □

Exemplo 1.77. O radical solúvel de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k})$ é

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z} = \mathbb{k}I_2,$$

onde I_2 denota a matriz identidade 2×2 . De fato, o ideal \mathfrak{z} é solúvel pois é abeliano, e é também o único ideal solúvel, já que os ideais de \mathfrak{g} são $\{0\}$, \mathfrak{z} , $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ e \mathfrak{g} . Para ver isso, primeiramente note que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{z}$$

(não só como espaço vetorial, mas como álgebras de Lie). De fato, basta observar que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \cap \mathfrak{z} = \{0\}$ e se $A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{k})$, podemos escrever

$$A = \left(A - \frac{\text{tr}(A)}{n}I_2\right) + \frac{\text{tr}(A)}{n}I_2,$$

em que $\left(A - \frac{\text{tr}(A)}{n}I_2\right) \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ e $\frac{\text{tr}(A)}{n}I_2 \in \mathfrak{z}$. Considere agora a transformação linear sobrejetiva $\varphi : \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$, $A + Z \mapsto A$. Note que φ é um homomorfismo, pois dados $A, B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ e $Z \in \mathfrak{z}$, temos

$$\varphi([A + Z, B + Z]) = \varphi([A, B] + Z) = [A, B] = [\varphi(A + Z), \varphi(B + Z)].$$

Como $\ker(\varphi) = \mathfrak{z}$ e $\text{im}(\varphi) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$, o 1º Teorema do Isomorfismo nos garante que

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{z} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}).$$

Considere agora \mathfrak{h} um ideal de \mathfrak{g} e o homomorfismo $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$. O 2º Teorema do Isomorfismo nos diz que $\pi(\mathfrak{h}) = (\mathfrak{h} + \mathfrak{z})/\mathfrak{z} \cong \mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}$. Vamos dividir em dois casos:

Caso I: Suponha que $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{h}$.

Neste caso, $\pi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z} = \mathfrak{h}/\mathfrak{z}$. Se $\pi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}/\mathfrak{z} \neq 0$, então existe $X \in \mathfrak{h}$ tal que $X = Y + \alpha I_2$, com $Y \neq 0$, $Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ e $\alpha \in \mathbb{k}$. Mas então $Y = X - \alpha I_2 \in \mathfrak{h}$, pois $X \in \mathfrak{h}$ e $\alpha I_2 \in \mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{h}$. Logo, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \neq 0$. Como $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ é ideal de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ é simples, segue que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$, ou seja, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \subseteq \mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{h}$, e $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \oplus \mathfrak{z}$, segue que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Agora, se $\pi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}/\mathfrak{z} = 0$, então $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{z}$. Como $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{h}$, segue que $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}$.

Caso II: Suponha que $\mathfrak{z} \not\subseteq \mathfrak{h}$.

Neste caso, $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h} = 0$ (pois $\dim(\mathfrak{z}) = 1$), ou seja $\pi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z} = \mathfrak{h}$. Se $\pi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \neq 0$, então existe $X \in \mathfrak{h}$ tal que $X = Y + \alpha I_2$, com $Y \neq 0$, $Y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ e $\alpha \in \mathbb{k}$. Pelo corolário 1.76, $\mathfrak{z}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})) = 0$, logo existe $Y' \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ tal que $[Y, Y'] \neq 0$. Logo, $[X, Y'] = [Y + \alpha I_2, Y'] = [Y, Y'] + [\alpha I_2, Y'] = [Y, Y'] \neq 0$. Como \mathfrak{h} e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ são ideais, temos que $[X, Y'] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$, logo $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \neq 0$. Como $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ é ideal de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ é simples, segue que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$, ou seja, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \subseteq \mathfrak{h}$. Neste caso, $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$, pois se existe $A \in \mathfrak{h}$ tal que $A = B + \beta I_2$, com $B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ e $\beta \neq 0 \in \mathbb{k}$, temos que $\beta I_2 = A - B \in \mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}$, pois $A \in \mathfrak{h}$, $B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{k}) \subseteq \mathfrak{h}$ e $\beta I_2 \in \mathfrak{z}$. Mas isso é uma contradição, pois estamos no caso em que $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h} = 0$. Agora, se $\pi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} = 0$, segue que $\mathfrak{h} = 0$.

Por ambos os casos acima, vemos que se \mathfrak{h} é ideal de \mathfrak{g} , então $\mathfrak{h} = 0$, \mathfrak{z} , $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ ou \mathfrak{g} . Assim, o radical de \mathfrak{g} só pode ser \mathfrak{z} , como queríamos.

Proposição 1.78. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie não solúvel e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal solúvel. Então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é semissimples se, e somente se,*

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}).$$

Demonstração. Suponha $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ semissimples e seja \mathfrak{h} ideal solúvel de \mathfrak{g} . Então $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ e a proposição 1.61 garante que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h}$ é ideal solúvel de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Mas como $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é semissimples, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})/\mathfrak{h} = 0$, ou seja, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{h}$. Logo, $\mathfrak{h} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Suponha agora que $\mathfrak{h} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, e considere $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ o homomorfismo canônico. Se $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é ideal solúvel, então $\pi^{-1}(\mathfrak{i})$ é ideal de \mathfrak{g} por 1.20. Tomando o homomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(\mathfrak{i}) \rightarrow \mathfrak{i}$, o 1º Teorema do Isomorfismo nos garante que $\pi^{-1}(\mathfrak{i})/\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{i}$, e aplicando a proposição 1.62, segue que $\pi^{-1}(\mathfrak{i})$ é solúvel. Desse modo, $\pi^{-1}(\mathfrak{i}) \subseteq \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, o que implica que $\pi^{-1}(\mathfrak{i})/\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{i} = \bar{0}$ e, portanto, $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é semissimples.

□

Capítulo 2

Os Teoremas de Engel e de Lie

2.1 O teorema de Engel

O fato de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ ser nilpotente não implica que todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente. De fato, tome \mathfrak{g} a álgebra de Lie das matrizes diagonais. Como \mathfrak{g} é abeliana, \mathfrak{g} é nilpotente, porém nenhum elemento não nulo de \mathfrak{g} é nilpotente. Por outro lado, o Teorema de Engel diz que \mathfrak{g} é nilpotente se, e somente se, $\text{ad}(x)$ é nilpotente, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Entretanto, antes de demonstrarmos o Teorema de Engel, vamos enunciar o seguinte lema:

Lema 2.1. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo \mathbb{k} e $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra. Suponha que todo elemento de \mathfrak{g} seja nilpotente. Então existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que $Xv = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração. A prova será feita usando indução na dimensão de \mathfrak{g} . Suponha que $\dim(\mathfrak{g}) = 1$ e seja $X \in \mathfrak{g}$, $X \neq 0$. Como X é nilpotente, existe $k \geq 1$ tal que $X^k = 0$ e $X^{k-1} \neq 0$. Seja $w \in V$ tal que $X^{k-1}w \neq 0$. Tome $v = X^{k-1}w$. Então $v \neq 0$ e $X(v) = XX^{k-1}w = X^k w = 0$. Suponha o resultado válido para subálgebras de dimensão menor que n . Assuma $\dim(\mathfrak{g}) = n > 1$. A demonstração da indução será feita em alguns passos:

Passo I: Para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}(X)$ é nilpotente.

Como $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$, o colchete de dois elementos $X, Y \in \mathfrak{g}$ quaisquer é dado pelo comutador: $[X, Y] = XY - YX$. Tomando $X \in \mathfrak{gl}(V)$, denotaremos por L_X a multiplicação à esquerda por X : $L_X(Y) = XY$. De maneira análoga, denotamos por R_X a multiplicação à direita por X , $R_X(Y) = YX$. Como $L_X \circ R_X(Y) = XYX = R_X \circ L_X(Y)$, segue que L_X e R_X comutam. Por hipótese, X é nilpotente, logo existe $k \geq 1$ tal que $X^k = 0$. Desse modo, $L_X^k(Y) = X^k Y = 0$ e $R_X^k(Y) = Y X^k = 0$. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ quaisquer, e utilizando o fato de L_X e R_X comutarem,

podemos usar a fórmula do Binômio de Newton e escrever

$$\begin{aligned}
(\text{ad}(X))^{2k}(Y) &= (L_X - R_X)^{2k}(Y) \\
&= \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} L_X^i \circ R_X^{2k-i}(Y) \\
&= \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} X^i Y X^{2k-i}(Y) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois se $i \geq k$, então $X^i = 0$, e se $i < k$, $2k - i > k$ e $X^{2k-i} = 0$. Logo, temos que $\text{ad}(X)$ é nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Passo II: Se \mathfrak{m} é uma subálgebra própria maximal de \mathfrak{g} , então existe $X_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{m}$ tal que $[X_0, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$.

Sejam $X \in \mathfrak{g}$, $Z \in \mathfrak{m}$. Considere $\text{ad}'(Z)(X + \mathfrak{m}) = \text{ad}(Z)(X) + \mathfrak{m}$. ad' está bem definido, pois dados $X, X' \in \mathfrak{g}$ tais que $X + \mathfrak{m} = X' + \mathfrak{m}$, temos que $X = X' + Y$, $Y \in \mathfrak{m}$. Assim, para todo $Z \in \mathfrak{m}$, temos

$$\begin{aligned}
\text{ad}'(Z)(X + \mathfrak{m}) &= \text{ad}(Z)(X) + \mathfrak{m} \\
&= \text{ad}(Z)(X' + Y) + \mathfrak{m} \\
&= \text{ad}(Z)(X') + \text{ad}(Z)(Y) + \mathfrak{m} \\
&= \text{ad}(Z)(X') + \mathfrak{m} \\
&= \text{ad}'(Z)(X' + \mathfrak{m}),
\end{aligned}$$

onde $\text{ad}(Z)(Y) \in \mathfrak{m}$, pois \mathfrak{m} é subálgebra de \mathfrak{g} . Pelo *Passo I*, $\text{ad}(Z)$ é nilpotente. Logo, existe $k \geq 1$ tal que $\text{ad}(Z)^k = 0$. Assim, segue que $\text{ad}'(Z)$ também é nilpotente, pois

$$(\text{ad}'(Z))^k(Y + \mathfrak{m}) = (\text{ad}(Z))^k(Y) + \mathfrak{m} = 0 + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}.$$

A transformação $\varphi : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{m})$, $Z \mapsto \text{ad}'(Z)$ é um homomorfismo. De fato, φ é linear, pois dados $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{m}$ e $\alpha \in \mathbb{k}$, temos que

$$\varphi(\alpha Z_1 + Z_2) = \text{ad}'(\alpha Z_1 + Z_2) = \text{ad}(\alpha Z_1 + Z_2) + \mathfrak{m} = \alpha \text{ad}(Z_1) + \mathfrak{m} + \text{ad}(Z_2) + \mathfrak{m} = \alpha \varphi(Z_1) + \varphi(Z_2).$$

Ademais, se $X \in \mathfrak{g}$ e $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{m}$, temos

$$\begin{aligned}
\text{ad}'([Z_1, Z_2])(Y + \mathfrak{m}) &= \text{ad}([Z_1, Z_2])(Y) + \mathfrak{m} \\
&= [\text{ad}(Z_1), \text{ad}(Z_2)](Y) + \mathfrak{m} \\
&= [\text{ad}'(Z_1), \text{ad}'(Z_2)](Y + \mathfrak{m}).
\end{aligned}$$

Desse modo, $\text{ad}'(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{m})$ é uma subálgebra cujos elementos são nilpotentes. Como $\dim(\text{ad}'(\mathfrak{m})) \leq \dim(\mathfrak{m}) < \dim(\mathfrak{g})$, a hipótese de indução do Lema nos garante que existe $X_0 + \mathfrak{m} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{m}$ não nulo tal que $\text{ad}'(Z)(X_0 + \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$, $\forall Z \in \mathfrak{m}$, ou seja, $X_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{m}$ e $\text{ad}(Z)(X_0) = [X_0, Z] \in \mathfrak{m}$, $\forall Z \in \mathfrak{m}$ e, portanto, $[X_0, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$.

Passo III: Seja \mathfrak{m} uma subálgebra própria maximal de \mathfrak{g} , e tome $X_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{m}$ dado pelo passo II. Então $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathbb{k}X_0$.

Note que $\mathfrak{m} + \mathbb{k}X_0$ é subálgebra de \mathfrak{g} , pois

$$[\mathfrak{m} + \mathbb{k}X_0, \mathfrak{m} + \mathbb{k}X_0] = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] + [\mathfrak{m}, \mathbb{k}X_0] + [\mathbb{k}X_0, \mathfrak{m}] + [\mathbb{k}X_0, \mathbb{k}X_0] \subseteq \mathfrak{m},$$

uma vez que $[\mathfrak{m}, \mathbb{k}X_0]$, $[\mathbb{k}X_0, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$, pois \mathfrak{m} é subálgebra e $[\mathbb{k}X_0, \mathbb{k}X_0] = 0$. Como $X_0 \notin \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m} + \mathbb{k}X_0$, com $\mathfrak{m} + \mathbb{k}X_0$ subálgebra de \mathfrak{g} . Mas $\dim(\mathfrak{m}) < \dim(\mathfrak{m} + \mathbb{k}X_0)$ e, por hipótese, \mathfrak{m} é subálgebra própria maximal de \mathfrak{g} . Logo, $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathbb{k}X_0$. Na verdade, \mathfrak{m} é ideal de \mathfrak{g} , pois

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] = [\mathfrak{m} + \mathbb{k}X_0, \mathfrak{m}] = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] + [\mathbb{k}X_0, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}.$$

Passo IV: Existe $v \in V \setminus \{0\}$ tal que $Xv = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Novamente, seja \mathfrak{m} uma subálgebra própria maximal de \mathfrak{g} . Observe que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$, ou seja, \mathfrak{m} é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ cujos elementos são nilpotentes. Como $\dim(\mathfrak{m}) < \dim(\mathfrak{g})$, a hipótese de indução do Lema nos garante que o subespaço $W = \{v \in V \mid Zv = 0, \forall Z \in \mathfrak{m}\}$ é não nulo. Dados $w \in W$ e $Z \in \mathfrak{m}$, temos

$$\begin{aligned} Z(X_0(w)) &= (ZX_0 - X_0Z)(w) + X_0Z(w) \\ &= [Z, X_0](w) + X_0(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

uma vez que $[Z, X_0] \in \mathfrak{m}$, pois \mathfrak{m} é ideal. Logo, concluímos que $X_0(w) \in W$, ou seja, W é X_0 -invariante. Como X_0 é nilpotente, existe $k \geq 1$ tal que $X_0^k = 0$ e $X_0^{k-1} \neq 0$. Tome $w_0 \in V \setminus \{0\}$ tal que $X_0^{k-1}w_0 \neq 0$. Faça $v_0 = X_0^{k-1}w_0$. Então $v_0 \neq 0$ e $v_0 \in W$, pois W é X_0 -invariante. Temos que $X_0v_0 = X_0X_0^{k-1}w_0 = X_0^k w_0 = 0$. Agora, dado $Z \in \mathfrak{m}$, temos que $Zv_0 = 0$, pois $v_0 \in W$. Como $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathbb{k}X_0$, segue que $Xv_0 = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Com os 4 passos acima, o Lema fica demonstrado. □

Teorema 2.2 (Teorema de Engel). *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo \mathbb{k} . Então \mathfrak{g} é nilpotente se, e somente se, $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}(x)$ é nilpotente.*

Demonstração. Se \mathfrak{g} é nilpotente, então existe $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$. Sejam $x, y \in \mathfrak{g}$. Temos

$$(\text{ad}(x))^k(y) = \underbrace{[x, [x, [\dots x[x, y]]]]}_{k \text{ vezes}} \in \mathfrak{g}^k = 0.$$

Logo, $(\text{ad}(x))^k(y) = 0$ e, portanto, $\text{ad}(x)$ é nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$. Para demonstrar a recíproca, utilizaremos indução sobre a dimensão de \mathfrak{g} . Se $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, então \mathfrak{g} é abeliano e, portanto, nilpotente. Suponha o resultado válido para álgebras de Lie de dimensão menor que n . Suponha que $\dim(\mathfrak{g}) = n$ e $\text{ad}(x)$ é nilpotente, para todo $x \in \mathfrak{g}$. $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é subálgebra. Cada $\text{ad}(x) \in \text{ad}(\mathfrak{g})$ é nilpotente, então podemos utilizar o Lema anterior e concluir que existe $z \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ tal que $\text{ad}(x)(z) = 0 \forall x \in \mathfrak{g}$. Logo, $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}$. Sejam agora $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ e $\text{ad}_{\mathfrak{z}}$ sua adjunta definida por

$$\text{ad}_{\mathfrak{z}}(x + \mathfrak{z})(y + \mathfrak{z}) = [x + \mathfrak{z}, y + \mathfrak{z}] = [x, y] + \mathfrak{z} = \text{ad}(x)(y) + \mathfrak{z}.$$

Para cada $x \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}_{\mathfrak{z}}(x + \mathfrak{z})$ é nilpotente, pois cada $\text{ad}(x)$ é nilpotente. Como $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}) < \dim(\mathfrak{g})$, a hipótese de indução nos diz que $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ é nilpotente. Logo, existe $k \geq 1$ tal que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{z})^k = \mathfrak{z}$. Considere a projeção $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$, $x \mapsto x + \mathfrak{z}$. Temos que

$$\pi(\mathfrak{g}^k) = \pi(\mathfrak{g})^k = (\mathfrak{g}/\mathfrak{z})^k = \mathfrak{z},$$

ou seja, $\mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{z}$. Mas então

$$\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{z}] = \{0\}.$$

Portanto, \mathfrak{g} é nilpotente. □

Teorema 2.3. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra de Lie cujos elementos são nilpotentes. Então existe uma base de V para a qual toda matriz de \mathfrak{g} em relação a esta base é triangular superior com zeros na diagonal principal.*

Demonstração. Utilizaremos indução sobre a dimensão de V . Se $\dim(V) = 1$, o resultado segue pois qualquer transformação linear nilpotente em V será nula. Suponha que o resultado seja válido para espaços vetoriais de dimensão menor do que n , e considere $\dim(V) = n$. Pelo Lema 2.1, existe um vetor não nulo v_1 tal que $Xv_1 = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$. Defina $V_1 = \mathbb{k}v_1$. Como V_1 é \mathfrak{g} -invariante, temos que a transformação induzida $\bar{X} : V/V_1 \rightarrow V/V_1$, $\bar{X}(v + V_1) = X(v) + V_1$, $\forall v \in V$ e $\forall X \in \mathfrak{g}$ é bem definida. Como cada $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente, segue que cada \bar{X} é nilpotente. Logo, $\bar{\mathfrak{g}} = \{\bar{X} \in \mathfrak{gl}(V/V_1) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(V/V_1)$ cujos elementos são todos nilpotentes. Como $\dim(V/V_1) < n$, segue pela hipótese de indução que V/V_1 possui uma base $\{v_2 + V_1, \dots, v_n + V_1\}$ para a qual a matriz de cada $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{g}}$ é triangular superior com zeros na diagonal principal. Portanto $\bar{X}(v_i + V_1) \in \langle v_1 + V_1, \dots, v_n + V_1 \rangle$, ou seja, $Xv_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Assim $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V para a qual a matriz de cada $X \in \mathfrak{g}$ em relação a esta base é triangular superior com zeros na diagonal principal. □

2.2 O teorema de Lie

Lema 2.4. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo \mathbb{k} e $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ subálgebra. Suponha que \mathfrak{h} é ideal de \mathfrak{g} e f é um funcional linear de \mathfrak{h} . Então o subespaço*

$$V_f = \{v \in V : T(v) = f(T)v, \forall T \in \mathfrak{h}\}$$

é \mathfrak{g} -invariante, ou seja, $X(V_f) \subseteq V_f$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Dados $X \in \mathfrak{g}$ e $v \in V_f$, queremos mostrar que $X(v) \in V_f$, ou seja, $T(X(v)) = f(T)X(v)$, $\forall T \in \mathfrak{h}$. Se $v = 0$, o resultado é trivial. Suponha $v \neq 0$ e tome $T \in \mathfrak{h}$. Temos

$$\begin{aligned} T(X(v)) &= X(T(v)) + (TX - XT)(v) \\ &= X(T(v)) + [T, X](v) \\ &= X(f(T)v) + f([T, X])v \\ &= f(T)X(v) + f([T, X])v. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Basta mostrar que $f([T, X]) = 0$. Para isso, consideremos $v_0 = v, v_1 = X(v), v_2 = X^2(v), \dots, v_j = X^j(v)$. Para cada $j \geq 0$, seja V_j o subespaço de V gerado por $\{v_0, \dots, v_j\}$. Como V tem dimensão finita, seja $k \geq 0$ o menor inteiro tal que $\{v_0, \dots, v_k\}$ é linearmente independente, mas

$\{v_0, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ é linearmente dependente. Para cada $0 \leq j \leq k$, V_j é invariante $\forall T \in \mathfrak{h}$, e a matriz de T restrita a V_j em relação à base $\{v_0, \dots, v_j\}$ é triangular superior, da forma

$$\begin{pmatrix} f(T) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f(T) \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

De fato, se $k = 0$, $V_j = V_k = V_0 = \mathbb{k}v_0$ e $T(v_0) = f(T)v_0 \in V_j$, pois $v_0 \in V_f$. Assumindo $k \geq 1$, a equação (2.2.1) nos diz que $\forall T \in \mathfrak{h}$,

$$T(v_1) = f(T)v_1 + f([T, X])v_0 \in V_1,$$

o que mostra que o subespaço $V_1 = \langle v_0, v_1 \rangle = \mathbb{k}v_0 + \mathbb{k}v_1$ é invariante sobre T . Ademais, a matriz de $T|_{V_1}$ em relação à base $\{v_0, v_1\}$ é

$$\begin{pmatrix} f(T) & f([T, X]) \\ 0 & f(T) \end{pmatrix}$$

Utilizaremos indução sobre $j \leq k$: Suponha que todo V_{j-1} é T -invariante e, para todo $T \in \mathfrak{h}$, a matriz de T em relação à base $\{v_0, \dots, v_{j-1}\}$ é da forma (2.2.2). Então, $\forall T \in \mathfrak{h}$ temos

$$\begin{aligned} T(v_j) &= T(X^j(v)) \\ &= TX(X^{j-1}(v)) \\ &= XT(X^{j-1}(v)) + [T, X]X^{j-1}(v) \\ &= XT(v_{j-1}) + [T, X](v_{j-1}) \\ &= X(f(T)v_{j-1} + \sum_{i < j-1} c_i v_i) + (f([T, X])v_{j-1} + \sum_{i < j-1} d_i v_i) \\ &= f(T)X(v_{j-1}) + \sum_{i < j-1} c_i X(v_i) + f([T, X])v_{j-1} + \sum_{i < j-1} d_i v_i \\ &= f(T)v_j + \sum_{i < j-1} c_i v_{i+1} + f([T, X])v_{j-1} + \sum_{i < j-1} d_i v_i \\ &= f(T)v_j + (\text{uma combinação linear de } \{v_0, \dots, v_{j-1}\}) \end{aligned}$$

onde c_i e d_i são constantes garantidas pela hipótese de indução. Logo, V_k é \mathfrak{h} -invariante e a matriz de $T|_{V_k}$ em relação à base $\{v_0, \dots, v_k\}$ é da forma (2.2.2). Desse modo, dado $T \in \mathfrak{h}$, $\text{tr}(T|_{V_k}) = (k+1)f(T)$. Então, como $[T, X] \in \mathfrak{h}$, $\text{tr}([T, X]|_{V_k}) = (k+1)f([T, X])$. Mas

$$\text{tr}([T, X]|_{V_k}) = \text{tr}(T|_{V_k}X|_{V_k}) - \text{tr}(X|_{V_k}T|_{V_k}) = 0.$$

Portanto, $(k+1)f([T, X]) = 0$, o que implica que $f([T, X]) = 0$, e o Lema está demonstrado. \square

Teorema 2.5. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado \mathbb{k} . Considere $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra solúvel. Então existem $v \in V \setminus \{0\}$ e f funcional linear em \mathfrak{g} , tais que*

$$T(v) = f(T)v, \quad \forall T \in \mathfrak{g}.$$

Demonstração. Utilizaremos indução sobre a dimensão de \mathfrak{g} : Se $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, $\mathfrak{g} = \mathbb{k}T$, $T \in \mathfrak{g}$. Como \mathbb{k} é algebricamente fechado, T possui autovalor λ . Seja v um autovetor associado a λ . Para cada $S \in \mathfrak{g}$, temos que $S = cT$, $c \in \mathbb{k}$. Então

$$S(v) = cT(v) = c\lambda v.$$

Fazendo $f(cT) = c\lambda$, obtemos o resultado desejado, uma vez que f assim definido é um funcional linear em \mathfrak{g} . Considere agora $\dim(\mathfrak{g}) = n$ e suponha o resultado válido para toda subálgebra solúvel de $\mathfrak{gl}(V)$ com dimensão menor que n . Como \mathfrak{g} é solúvel, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é ideal próprio de \mathfrak{g} , logo \mathfrak{g}' é subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ com dimensão menor que n . Seja \mathfrak{h} um subespaço vetorial de \mathfrak{g} com dimensão $n - 1$ tal que $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{h}$. Como

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{h},$$

segue que \mathfrak{h} é ideal de \mathfrak{g} . Como \mathfrak{g} é solúvel, pela proposição 1.61 \mathfrak{h} também é solúvel. Então, pela hipótese de indução, o subespaço $V_l = \{v \in V : T(v) = l(T)v, \forall T \in \mathfrak{h}\}$, em que l é um funcional linear de \mathfrak{h} , é não nulo. Seja $S \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ não nulo. Como $\dim(\mathfrak{h}) = n - 1$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{k}S$ como espaços vetoriais. Como \mathfrak{h} é ideal de \mathfrak{g} , o Lema 2.4 implica que V_l é \mathfrak{g} -invariante e, portanto, S -invariante. Então a restrição $S|_{V_l}$ possui um autovalor λ , pois o corpo é algebricamente fechado. Seja $v \in V_l$ o autovetor correspondente a λ (ou seja, $S(v) = \lambda v$). Para cada $T \in \mathfrak{g}$, temos $T = cS + Y$, $c \in \mathbb{k}$, $Y \in \mathfrak{h}$. Seja $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{k}$, $f(cS + Y) = c\lambda + l(Y)$. f é funcional linear de \mathfrak{g} , pois dados $\alpha, c_1, c_2 \in \mathbb{k}$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{h}$, temos:

$$f(c_1S + Y_1 + c_2S + Y_2) = (c_1 + c_2)\lambda + l(Y_1) + l(Y_2) = f(c_1S + Y_1) + f(c_2S + Y_2)$$

$$f(\alpha(c_1S + Y_1)) = f(\alpha c_1S + \alpha Y_1) = \alpha c_1\lambda + \alpha l(Y_1) = \alpha f(c_1S + Y_1).$$

Então, dado $T \in \mathfrak{g}$, $T = cS + Y$, temos:

$$\begin{aligned} T(v) &= (cS + Y)(v) \\ &= cS(v) + Y(v) \\ &= c\lambda v + l(Y)v \\ &= (c\lambda + l(Y))(v) \\ &= f(T)v, \end{aligned}$$

ou seja, v é autovetor de \mathfrak{g} , como queríamos. □

Teorema 2.6 (Teorema de Lie). *Sejam V um espaço vetorial não nulo de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado \mathbb{k} , e $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra solúvel. Então V possui uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ em relação a qual cada elemento de \mathfrak{g} é uma matriz triangular superior.*

Demonstração. Utilizaremos indução sobre a dimensão de V . Se $\dim(V) = 1$, então as matrizes de \mathfrak{g} serão 1×1 e, portanto, triangulares superiores. Considere $\dim(V) = n > 1$ e suponha o teorema de Lie válido para subespaços vetoriais de dimensão menor que n . Pelo Teorema anterior, \mathfrak{g} possui um autovetor v_1 . Então, $\forall T \in \mathfrak{g}$, o subespaço $V_1 = \mathbb{k}v_1$ é T -invariante, pois dado $\alpha \in \mathbb{k}$, $T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha \lambda v_1 \in V_1$. Considere a transformação linear induzida $\bar{T} : V/V_1 \rightarrow$

V/V_1 , $\overline{T}(v + V_1) = T(v) + V_1$. Então $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V/V_1)$, $T \mapsto \overline{T}$ é um homomorfismo. De fato, dados $T_1, T_2, S, T \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{k}$, temos:

$$\varphi(T_1 + T_2)(v) = \overline{T_1 + T_2}(v + V_1) = (T_1 + T_2)(v) + V_1 = T_1(v) + T_2(v) + V_1 = \overline{T_1} + \overline{T_2} = \varphi(T_1) + \varphi(T_2),$$

$$\varphi(\alpha T)(v + V_1) = (\overline{\alpha T})(v + V_1) = (\alpha T)(v) + V_1 = \alpha \varphi(T)(v + V_1)$$

$$\begin{aligned} \varphi([S, T])(v + V_1) &= (\overline{[S, T]})(v + V_1) = \overline{ST - TS}(v + V_1) = (ST - TS)(v) + V_1 = \\ &= ST(v) + V_1 - TS(v) + V_1 = (\overline{ST} - \overline{TS})(v + V_1) = [\overline{S}, \overline{T}](v + V_1) = [\varphi(S), \varphi(T)]. \end{aligned}$$

Como \mathfrak{g} é solúvel, $\varphi(\mathfrak{g}) = \overline{\mathfrak{g}}$ também é solúvel. Assim, $\overline{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{gl}(V/V_1)$ é subálgebra solúvel, e como $\dim(V/V_1) = n-1$, a hipótese de indução nos dá uma base $\{v_2 + V_1, \dots, v_n + V_1\}$ de V/V_1 em relação a qual a matriz de cada $\overline{T} \in \overline{\mathfrak{g}}$ é triangular superior. Portanto, $\overline{T}(v_i + V_1) \in \langle v_1 + V_1, \dots, v_n + V_1 \rangle$, ou seja, $T(v_i) \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Assim $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V para a qual a matriz de cada $T \in \mathfrak{g}$ em relação a esta base é triangular superior. □

Proposição 2.7. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie sobre um corpo algebricamente fechado \mathbb{k} . Então \mathfrak{g} é solúvel se, e somente se, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente.*

Demonstração. Suponha \mathfrak{g}' nilpotente. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathfrak{g}')^k = 0$. Da proposição 1.56, segue que $(\mathfrak{g}')^{(k-1)} \subseteq (\mathfrak{g}')^k = \{0\}$, o que mostra que \mathfrak{g}' também é solúvel. Utilizando a proposição 1.54, temos que $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ é abeliano e, portanto, solúvel (veja o exemplo 1.58). Portanto, pela proposição 1.62, segue que \mathfrak{g} é solúvel.

Suponha agora que \mathfrak{g} é solúvel. Pelo Teorema de Lie, existe uma base em relação a qual a matriz de $\text{ad}(x)$ é triangular superior, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Logo, dados $x, y \in \mathfrak{g}$ quaisquer, a matriz de $\text{ad}([x, y]) = [\text{ad}(x), \text{ad}(y)] = \text{ad}(x) \circ \text{ad}(y) - \text{ad}(y) \circ \text{ad}(x)$ é triangular superior com diagonal nula, uma vez que o colchete de matrizes triangulares superiores resulta em uma matriz triangular superior com zeros na diagonal principal. Como matrizes triangulares superiores com diagonal nula correspondem a transformações lineares nilpotentes, segue que $\text{ad}(z)$ é nilpotente para todo $z \in \mathfrak{g}'$. Assim, a restrição $\text{ad}(z)|_{\mathfrak{g}'}$ é nilpotente, e o Teorema de Engel garante que \mathfrak{g}' é nilpotente. □

Observação 2.8. Existe um famoso teorema, o Teorema de Ado, que diz o seguinte: *toda álgebra de Lie de dimensão finita admite uma representação fiel de dimensão finita*. Sendo assim, toda álgebra de Lie solúvel de dimensão finita é isomorfa à uma subálgebra de Lie solúvel de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo, por esse motivo juntamente com o teorema de Lie, temos que qualquer álgebra de Lie solúvel de dimensão finita é, essencialmente, uma álgebra de matrizes triangulares superiores.

Referências Bibliográficas

- [Gon07] Fulton B. Gonzalez. Lie algebras. <http://emerald.tufts.edu/~fgonzale/lie.algebras.book.pdf>, 2007.
- [Hum72] J. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. GTM9. Springer, 1972.
- [SM99] L. A. B. San Martin. *Álgebras de Lie*. UNICAMP, 1999.