UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Sobre formas normais para sistemas de Pfaff não-integráveis singulares

Vinícius Soares dos Reis

Tese apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Doutor*.

Belo Horizonte
MINAS GERAIS - BRASIL
2017

Vinícius Soares dos Reis

About Normal Forms for Singular and Non-Integrable Pfaff Systems

Tese apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais, como parte das exigências do Programa de Pós graduação em Matemática, para obtenção do título de *Doutor*.

Bruno César de Azevedo Scárdua

Wanderson Costa e Silva

Arturo Ulises Fernández Perez

Márcio Gomes Soares

Maurício Barros Corrêa Júnior
(Orientador)

"We chooose to go to the moon in this
decaded and do the other things,
not because they are easy,
but because they are hard".
John F. Kennedy, 1962.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo projeto de vida que traçou para mim, me dando muita saúde, paz e força para a realização desse trabalho. O agradeço também pela família maravilhosa que me permitiu ter.

Agradeço a rainha incomparável, Nossa Senhora da Conceição Aparecida, por me salvar em momentos de extremo desespero, pela força e proteção que sempre me proporciona e por ter me acolhido debaixo de vossa proteção.

Agradeço minha esposa Beatriz, pelo exemplo de pessoa, pelo amor, carinho, confiança, pelo companheirismo e principalmente por ter tornado minha vida algo que nunca pensei ser digno de viver. Muito obrigado Bé, te amo!

Agradeço o meu filho Murilo, por completar minha vida, por me trazer tanta felicidade com suas descobertas e por me dar tranquilidade e força em todos os momentos.

Agradeço minha mãe Maria do Carmo, por tantas orações e por sofrer junto de mim diante das adversidades, mesmo sem saber o porque de estar sofrendo.

Agradeço o meu pai Sebastião (in memoriam), por sempre acreditar que um dia eu estudaria em uma universidade.

Agradeço minha avó Francisca (in memoriam), por tantas orações durante a graduação.

Agradeço minha sogra Célia, por vibrar com nossos objetivos alcançados e por tanta ajuda que nos dá.

Agradeço a Eva, por cuidar tão bem de mim e da minha família em Ouro Preto.

Agradeço meus irmãos, sobrinhos e cunhados pela força.

Agradeço o meu orientador Maurício, que tenho o privilégio de trabalhar junto desde o mestrado, sempre procurou o melhor para mim e sempre me amparou durante a pós-graduação, sendo um verdadeiro exemplo como professor, pesquisador e pessoa. Muito obrigado Tonesco!

Agradeço a Universidade Federal de Minas Gerais, por ter me acolhido e me permitido fazer um doutorado, uma grande instituição que estará presente pra sempre em minhas memórias e que tem meu eterno agradecimento.

Agradeço a Universidade Federal de Viçosa, por ter me permitido cursar uma graduação, por ter me aceitado em um programa de mestrado e por ter me proporcionado meu primeiro emprego em seu colégio de aplicação, carrego essa universidade com muito carinho e respeito em meu infinito particular.

Agradeço a todos os amigos, pela força e amizade. Em especial agradeço a Ana Paula, pelas inúmeras caronas de Ouro Preto para BH e vice-versa. Um agradecimento especial aos amigos Rodolfo e Cibele, por terem me permitido ficar em suas casa no início doutorado, sem eles tudo teria sido mais difícil.

Agradeço a Universidade Federal de Ouro Preto , meu atual local de trabalho. Em particular, agradeço ao departamento de matemática pelas reduções de carga horária, sempre que possível, de modo que pude me dedicar ao doutorado.

Agradeço aos professores de graduação e pós graduação que tive, tanto na UFV quanto na UFMG, pelos valiosos ensinamentos que contribuíram para minha formação acadêmica.

Agradeço as secretárias do DMAT-UFMG, Kelli e Andréa, pela simpatia, presteza e competência com que realizam seus trabalhos.

Agradeço à banca examinadora, pela presença e pelas correções.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro durante parte do curso.

CONTENTS

RESUMO

Nesta tese encontramos algumas formas normais para sistemas de Pfaff não-integráveis e singulares, tais como sistemas de Goursat, sistemas de Goursat estendidos e para 1-formas e 2-formas polinomiais de graus 2 e 1, respectivamente. Por fim, demonstramos um teorema de Darboux generalizado para sistemas diferenciais k-simpléticos. Aplicamos esses resultados para obter informações sobre certas distribuições não-integráveis em espaços projetivos.

ABSTRACT

In this thesis we find some normal forms for non-integrable and singular Pfaff systems, such as Goursat systems, extended Goursat systems and for polynomials 1-forms and 2-forms of degrees 2 and 1, respectively. Finally, we prove a generalized Darboux theorem for k-symplectic differential systems. We applied these results to obtain information about certain non-integrable distributions in projective spaces.

NOTAÇÕES

Neste trabalho utilizamos as seguintes notações:

- $\mathcal{O}_0^n$: Feixe de germes de funções holomorfas em $(\mathbb{C}^n, 0)$.

- $\Omega(\mathbb{C}^n, 0)$: Espaço dos germes de formas diferenciais holomorfas em $(\mathbb{C}^n, 0)$.
- $\Omega^p(\mathbb{C}^n, 0)$: Espaço dos germes de p-formas diferenciais holomorfas em $(\mathbb{C}^n, 0)$.

- $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$: Fibrado em retas tautológico.

- $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) := \overbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)}^{k-vezes}$.

- $\Omega^p_{\mathbb{P}^n}(k) := \Omega^p_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$.

- $\mathcal{I} = \langle \alpha^1, \cdots, \alpha^s \rangle$: Sistema diferencial exterior gerado pelas formas $\alpha^1, \cdots, \alpha^s$.

- $\mathcal{I}^{(k)}$: k-ésimo sistema de derivadas de $\mathcal{I}$.

- $\mathcal{A}(\mathcal{I})$: Espaço característico do sistema $\mathcal{I}$.

- $\mathcal{C}(\mathcal{I})$: Sistema característico do sistema $\mathcal{I}$.

- $\mathbb{P}(1^k, 2^k)$: Espaço projetivo com peso com k entradas de peso 1 e k entradas de peso 2.

- $\eta_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\eta}_i \wedge \eta_{i+1} \wedge \cdots \eta_n$: $(n-1)$-forma, onde $\hat{\eta}_i$ significa a omissão do termo η_i.

- $i_R\alpha$: contração da forma α na direção do vetor R.

INTRODUÇÃO

Um sistema diferencial exterior sem singularidades em uma variedade M é definido como um ideal finitamente gerado $\mathcal{I} \subset \Omega(M)$, que é fechado pela diferencial exterior. Uma variedade integral desse sistema diferencial é uma imersão $f : N \to M$ tal que $f^*\omega = 0$, para todo $\omega \in \mathcal{I}$. Assim, localmente, variedades integrais correspondem a soluções de certos sistemas de equações diferenciais parciais de primeira ordem. O problema fundamental em sistemas diferenciais exteriores é estudar suas variedades integrais.

Uma equação da forma

$$a_1(x)dx^1 + \cdots + a_n(x)dx^n = 0, x = (x^1, \cdots, x^n),$$

onde a_i é uma função C^∞, é chamada equação de Pfaff e o sistema formado por essa equação é chamado sistema de Pfaff de codimensão 1. Encontrar as variedades integrais de dimensão máxima desta equação é resolver o conhecido problema de Pfaff [1814-1815]. No início dos estudos de sistemas diferenciais exteriores, Pfaff mostrou que podemos encontrar (localmente) ou sitemas de funções $(f_1, \cdots, f_r, g_1, \cdots, g_r)$, ou sistemas $(f, f_1, \cdots, f_r, g_1, \cdots, g_r)$ com diferenciais independentes, tais que a 1-forma possa ser escrita como $\sum_{i=1}^r f_i dg_i$ ou $df + \sum_{i=1}^r f_i dg_i$.

O trabalho de Pfaff continuou na direção do conhecido Teorema de Frobenius. Ainda, no estudo de 1-formas, destaca-se o clássico teorema de Pfaff-Darboux. Localmente, esse teorema fornece uma forma normal para a 1-forma estudada, exigindo condições sobre a classe da mesma. Malgrange em [17] provou uma versão singular de um teorema do tipo Frobenius, enquanto Cerveau em [7] prova uma versão singular do teorema de Pfaff-Darboux.

Para sistemas de Pfaff não integráveis sem singularidades de codimensão 2, temos os trabalhos clássicos de Engel [10] e Goursat [12]. O teorema das formas normais de Engel aplica-se a sistemas de duas equações em um espaço de dimensão 4. Corrêa-Maza em [9] provam uma versão singular do teorema das formas normais de Engel.

Um sistema de Goursat sem singularidades é um sistema de Pfaff de $(n-2)$ equações em um espaço n dimensional, cujos geradores são escritos na forma normal do tipo $dz_i - z_{i-1}dz_1$, $i = 1, \cdots, n-2$. O teorema de Goursat regular descreve a forma normal à qual um sistema pode ser reduzido. Motivados pelos trabalhos de Cerveau e Corrêa-Maza, no capítulo 2, provamos a seguinte versão para sistemas de Goursat holomorfos singulares.

Teorema A. *Seja $\mathcal{I}$ um germe de um sistema de Pfaff holomorfo em $(\mathbb{C}^n, 0)$, com $n = s + 2$, gerado pelas s 1-formas*

$$\mathcal{I} = \langle \alpha^1, \cdots, \alpha^s \rangle,$$

tal que $codim(Sing(\mathcal{I})) \geq 2$ e $codim(Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)})) \geq 3$. Suponha que exista uma 1-forma integrável π, com $\pi \neq 0 \mod (\mathcal{I})$, satisfazendo as congruências de Goursat,

$$\begin{aligned} d\alpha^i &\equiv -\alpha^{i+1} \wedge \pi \mod (\alpha^1, \cdots, \alpha^i), 1 \leq i \leq s-1, \\ d\alpha^s &\not\equiv 0 \mod (\mathcal{I}). \end{aligned}$$

Então, existem $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{O}_0^n$ tais que

$$\mathcal{I} = \langle df_3 - f_2 df_1, \cdots, df_n - f_{n-1} df_1 \rangle.$$

Sendo $\mathcal{I}$ um germe de sistema de Pfaff de codimensão k em $(\mathbb{C}^n, 0)$, dizemos que $Sing(\mathcal{I})$ tem *codimensão esperada* se ele é uma subvariedade de $\mathbb{C}^n$ de codimensão $k+1$. Como aplicação do teorema A, provamos no seguinte teorema que o conjunto singular de um sistema de Goursat em $\mathbb{P}^n$ tem codimensão atípica.

Teorema B. *Seja $\mathcal{I} = \langle \alpha^1, \cdots, \alpha^s \rangle$, com $\alpha^i \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(r_i))$, um sistema de Pfaff de codimensão s em $\mathbb{P}^n$ satisfazendo as congruências de Goursat. Então, ou $Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)})$ tem uma componente de codimensão 2, ou $Sing(\mathcal{I})$ tem uma componente de codimensão 1. Além disso, se $codim(Sing(\mathcal{I})) \geq 2$, então $Sing(\mathcal{I})$ tem uma componente de codimensão 2.*

Um sistema de Pfaff $\mathcal{I}$ de codimensão n em uma variedade de dimensão $n + m + 1$, está na forma normal de Goursat estendida se ela é gerada por n formas do tipo

$$\mathcal{I} = \{dz_i^j - z_{i+1}^j dz^0 : i = 1, \cdots, s_j; j = 1, \cdots, m\}.$$

As formas normais de Goursat podem ser pensadas como uma única cadeia de formas, já as formas normais de Goursat estendidas consistem de várias cadeias de formas.

O teorema das formas normais de Goursat estendida regular, assism como o teorema das formas normais de Goursat regular, descreve a forma normal à qual o sistema pode ser reduzido. Na segunda seção do capítulo 2, provamos a seguinte versão para sistema de Goursat estendido holomorfo singular.

Teorema C. *Seja $\mathcal{I}$ um germe de um sistema de Pfaff holomorfo em $(\mathbb{C}^{n+m+1},0)$ de codimensão $m+1$. Suponha que $codim(Sing(\mathcal{I}))\geq 2$ e $codim(Sing(d(\mathcal{I}^{s_j-i}))\geq 3$ para $i=1,\cdots,s_j$ e $j=1,\cdots,m$. Se existe, $\{\alpha_i^j : i=1,\cdots,s_j; j=1,\cdots,m\}$, um conjunto de geradores holomorfos para $\mathcal{I}$ e uma 1-forma holomorfa integrável π tal que para todo j valem,*

$$\begin{aligned} d\alpha_i^j &\equiv -\alpha_{i+1}^j\wedge\pi \mod (\mathcal{I}^{(s_j-i)}), i=1,\cdots,s_j-1\\ d\alpha_{s_j}^j &\not\equiv 0 \mod (\mathcal{I}). \end{aligned}$$

Então, existe um sistema de coordenadas holomorfas tal que

$$\mathcal{I}=\langle df_i^j - f_{i+1}^j df^0 : i=1,\cdots,s_j; j=1,\cdots,m\rangle.$$

No capítulo 3 estudamos formas normais para 2-formas e 1-formas polinomiais homogêneas de graus 1 e 2, respectivamente. Primeiramente provamos o seguinte teorema para 2-formas polinomiais:

Teorema D. *Seja ω uma 2-forma polinomial homogênea, fechada e de grau 1 tal que, $\omega^k\neq 0$ e $\omega^{k+1}=0$. Então, existe um sistema de coordenadas $(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_k,z)$ em $\mathbb{C}^n$, com $z=(z_{2k+1},\cdots,z_n)$ tal que*

1. *ω depende somente de $(x_1,\cdots x_k,y_1,\cdots,y_k)$. Isto é,*

   $$\omega=\sum_{i<j} f_{ij}dx_i\wedge dx_j+\sum_{i<j} r_{ij}dy_i\wedge dy_j+\sum_{i,j} s_{ij}dx_i\wedge dy_j$$

   com $f_{ij},r_{ij},s_{ij}\in\mathbb{C}[x_1,\cdots x_k,y_1,\cdots,y_k]$, ou

2. $$\omega=d\Omega+dt_1\wedge dh_1+\cdots+dt_k\wedge dh_k,$$

   onde $\Omega\in\langle dx_1,\cdots,dx_k,dy_1,\cdots,dy_k\rangle$ é uma 1-forma quadrática, $t_1,\cdots,t_k$ são funções lineares nas variáveis $(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_k)$ e $h_1,\cdots,h_k$ são funções quadráticas em $\mathbb{C}^n$.

Denote por $\mathbb{P}(1^k,2^k)$ o espaço projetivo com pesos, onde temos k pesos iguais a 1 e k pesos iguais a 2. Como consequência do teorema D, provamos o seguinte teorema de classificação para distribuições de grau 1 em $\mathbb{P}^n$.

Teorema E. *Seja $\mathcal{F}$ uma distribuição de grau 1 em $\mathbb{P}^n$ e de classe k. Então, vale um dos ítens abaixo:*

i) Existe um mapa racional linear $\rho : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{2k+1}$ e uma distribuição $\mathcal{G}$ de grau 1 em $\mathbb{P}^{2k+1}$ tal que $\mathcal{F} = \rho^*\mathcal{G}$.

ii) Existe um mapa racional $\xi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}(1^{k+1}, 2^{k+1})$ tal que $\mathcal{F} = \xi^*\mathcal{G}_0$, onde $\mathcal{G}_0$ é a distribuição de contato canônica

$$\theta_0 = \frac{1}{3}\left[\sum_i (u_i dw_i - 2w_i du_i)\right],$$

em $\mathbb{P}(1^{k+1}, 2^{k+1})$.

iii) Existe um sistema de coordenadas $(x_0 : \cdots , x_k : y_0, \cdots : y_k : z)$ e uma 1-forma quadrática $\Theta \in \langle dx_0, \cdots , dx_k, dy_0, \cdots , dy_k\rangle$ tal que $\mathcal{F}$ é induzida por $i_R d\Theta + \xi^*\theta_0$, onde R denota o campo radial e $\xi^*\theta_0$ é o pull-back da 1-forma de contato canônica em $\mathbb{P}(1^{k+1}, 2^{k+1})$ via um mapa racional $\xi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}(1^{k+1}, 2^{k+1})$.

Em [1], Araújo-Corrêa-Massarenti estudam distribuições de classe k em variedade Fano.

No capítulo 4 trabalharemos com sistemas k-simpléticos. Denote por $\mathfrak{X}(n)$ o módulo de germes de campos de vetores holomorfos em $(\mathbb{C}^n, 0)$ e por $\Omega^p(\mathbb{C}^n, 0)$ os germes de p-formas em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Considerando $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{C}^n, 0)$, temos que o *espaço característico de* α, denotado por $\mathcal{A}(\alpha)$, é dado por

$$\mathcal{A}(\alpha) = \{X \in \mathfrak{X}(n); i_X\alpha = 0\}.$$

O espaço característico é uma distribuição involutiva. O *sistema característico de* α, denotado por $\mathcal{C}(\alpha)$, é o dual de $\mathcal{A}(\alpha)$ definido por

$$\mathcal{C}(\alpha) = \{\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0); \omega(\mathcal{A}(\alpha)) = 0\}.$$

Definimos um sistema diferencial gerado por k germes de 2-formas, $\alpha_1, \cdots , \alpha_k \in \Omega^2(\mathbb{C}^N, 0)$, sendo um *sistema k-simplético* com respeito a uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão r, quando este satisfaz:

1. $\mathcal{C}_x(\alpha_1) \cap \cdots \cap \mathcal{C}_x(\alpha_k) = \{0\}$ para todo $x \in (\mathbb{C}^N, 0) \setminus \bigcup_{i=1}^k Sing(\alpha_i)$;
2. $\alpha_i(u, v) = 0$, para todos u, v campos de vetores tangentes a $\mathcal{F}$.

Inspirados na demonstração de Cerveau para $k = 1$, provamos o seguinte teorema de Darboux generalizado singular.

Teorema F. *Seja* $\mathcal{I} = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_k \rangle$ *um sistema* k*-simplético em* $(\mathbb{C}^{n(k+1)}, 0)$ *com respeito a uma folheação* $\mathcal{F}$ *de codimensão* n*, onde as* α_i'*s são formas fechadas. Suponha que:*

1. *Seja* r_j *a classe de* α_j*, então* $\alpha_j^{r_j}$ *é decomponível em 1-formas holomorfas e* $codim(Sing(\mathcal{C}(\alpha_j^{r_j}))) \geq 3$;

2. $codim(Sing(\mathcal{F})) \geq 3$ *e* $\mathcal{F}$ *é induzida por uma* n*-forma decomponível.*

Então, existem germes de funções holomorfas $g_{ji}, f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{O}_0^n$*, tais que*

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} dg_{ji} \wedge df_i, 1 \leq j \leq k.$$

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas notações, definições e alguns resultados básico sobre sistemas diferenciais exteriores. Para maiores detalhes veja [3] e [23].

1.1 Sistemas Diferenciais Exteriores

O espaço dos germes de formas diferenciais holomorfas em $(\mathbb{C}^n, 0)$,

$$\Omega((\mathbb{C}^n, 0)) = \Omega^0((\mathbb{C}^n, 0)) \oplus \cdots \oplus \Omega^n((\mathbb{C}^n, 0)),$$

junto com o produto exterior $\wedge$ produz uma *álgebra exterior* em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Um *ideal algébrico* desta álgebra é definido como um subespaço $I \subset \Omega((\mathbb{C}^n, 0))$ tal que, se $\alpha \in I$ então $\alpha \wedge \beta \in I$ para qualquer $\beta \in \Omega((\mathbb{C}^n, 0))$.

Definição 1.1 *Um ideal $I \subset \Omega((\mathbb{C}^n, 0))$ é dito **fechado** em relação à diferencial exterior se, e somente se,*

$$\alpha \in I \Rightarrow d\alpha \in I.$$

*Isto é, $dI \subset I$. Um ideal que é fechado em relação à diferenciação exterior é chamado **ideal diferencial**.*

Uma coleção finita de formas diferenciais $\Sigma := \{\alpha^1, \cdots, \alpha^k\}$ gera um ideal algébrico

$$I_\Sigma = \{\omega \in \Omega((\mathbb{C}^n,0))/\omega = \sum_{i=1}^{k} \theta^i \wedge \alpha^i \text{ para algum } \theta^i \in \Omega((\mathbb{C}^n,0))\}.$$

Se R_d denota a coleção de todos ideais diferenciais contendo Σ, então o ideal diferencial gerado por Σ é definido como o menor ideal diferencial contendo Σ,

$$\mathcal{I}_\Sigma := \bigcap_{I \in R_d} I.$$

Definição 1.2 *Um **sistema diferencial exterior** é dado por um ideal $\mathcal{I} \subset \Omega((\mathbb{C}^n,0))$ que é fechado em relação a diferencial exterior.*

Definição 1.3 *Uma **variedade integral** do sistema é dado por uma imersão $f : N \to (\mathbb{C}^n,0)$ tal que $f^*\alpha = 0$ para $\alpha \in \mathcal{I}$.*

1.1.1 Sistemas completamente integráveis

Considere um conjunto de 1-formas linearmente independentes $\alpha^1, \cdots, \alpha^s$ na vizinhança de um ponto satisfazendo as condições equivalentes:

1. $d\alpha^i$ é uma combinação de $\alpha^1, \cdots, \alpha^s$.
2. $d\alpha^i \wedge \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s = 0$, para $1 \leq i \leq s$.
3. $d\alpha^i = \sum_{j=1}^{s} \theta^j \wedge \alpha^j$.

Quando $d\alpha^i$ é uma combinação de $\alpha^1, \cdots, \alpha^s$ usamos a seguinte expressão,

$$d\alpha^i \equiv 0 \mod (\alpha^1, \cdots, \alpha^s), \ 1 \leq i \leq s. \tag{1.1}$$

A condição (1.1) é chamada condição de Frobenius, e um sistema satisfazendo tal condição é dito ser *completamente integrável*. Um sistema completamente integrável assume uma forma muito simples sobre uma escolha adequada das coordenadas locais. Este é o clássico teorema de Frobenius.

Teorema 1.4 ***(Teorema de Frobenius)*** *Seja I um ideal algébrico gerado pelas 1-formas independentes $\alpha^1, \cdots, \alpha^s$ que satisfazem as condições de Frobenius. Então, em uma vizinhança de x, existem funções h^i com $1 \leq i \leq s$ tais que I é gerado por $dh^1, \cdots, dh^s$.*

Para mais detalhes deste teorema veja [3] páginas 27 e 28.
O teorema nos dá uma forma normal para o sistema, e as variedades integrais máximas deste são

$$h^1 = c_1, \cdots, h^s = c_s,$$

onde c_i são constantes complexas. Essas variedades tem dimensão $(n - s)$, portanto o sistema define uma folheação holomorfa de codimensão s.

Para sistemas diferenciais exteriores mais gerais as condições de integrabilidade são dadas pela distribuição característica de Cauchy.

Definição 1.5 *(Espaço Associado de um Ideal). Seja Σ uma coleção finita de formas e I_Σ o ideal algébrico gerado por este sistema. O* ***espaço associado*** *ao ideal I_Σ é definido por*

$$\mathcal{A}(I_\Sigma) := \{X \in T_pM / i_X\alpha \in I_\Sigma \; \forall\alpha \in I_\Sigma\}.$$

O dual do espaço associado, ou ***espaço retrato*** *do ideal é definido por*

$$\mathcal{A}(I_\Sigma)^\perp = \{\alpha \in T_p^*M / i_X\alpha = 0; X \in T_pM\},$$

e denotado por $\mathcal{C}(I_\Sigma) \subset T_p^*M$.

O espaço associado de $\mathcal{I}_\Sigma$ é a chamada *distribuição característica de Cauchy* e denotado por $\mathcal{A}(\mathcal{I}_\Sigma)$. A dimensão do espaço retrato $\mathcal{C}(\mathcal{I}_\Sigma)$ em um ponto p é chamada a classe de $\mathcal{I}_\Sigma$ em p.

O teorema a seguir, que pode ser encontrado em [3, pág. 31], nos fornece a condição para que um sistema diferencial exterior seja integrável.

Teorema 1.6 *Se a distribuição característica de Cauchy $\mathcal{A}(\mathcal{I}_\Sigma)$ de $\mathcal{I}_\Sigma$ tem dimensão constante r em uma vizinhança de x, então a distribuição $\mathcal{A}(\mathcal{I}_\Sigma)$ é integrável.*

Condições sobre a dimensão de um espaço retrato de um ideal $\mathcal{I}$, podem ser dadas para que este ideal seja gerado por um número menor de variáveis. O resultado abaixo é encontrado em [3, pág. 31-33].

Teorema 1.7 *Seja $\mathcal{I}$ um ideal diferencial finitamente gerado cujo espaço retrato $\mathcal{C}(\mathcal{I})$ tem dimensão constante $s = n - r$. Então existe uma vizinhança na qual existem coordenadas $(x_1, \cdots, x^r; y^1, \cdots, y^s)$ tais que $\mathcal{I}$ tem um conjunto de geradores que são formas em $(y^1, \cdots, y^s)$ e suas diferenciais.*

Definição 1.8 *As folhas definidas pela distribuição $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ são chamadas* ***características de Cauchy****.*

1.1.2 Sistemas de Pfaff em Variedades

Definição 1.9 *Um sistema diferencial exterior singular da forma*

$$\alpha^1 = \cdots = \alpha^s = 0,$$

onde os α^i's são 1-formas holomorfas em uma variedade n-dimensional M, é chamado um sistema de Pfaff de codimensão s.

As 1-formas $\alpha^1, \cdots, \alpha^s$, geram o ideal algébrico

$$I = \{\sigma \in \Omega(M) : \sigma \wedge \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s = 0\}.$$

O ideal algébrico gerado pelas 1-formas α^i é também um ideal diferencial $\mathcal{I}$ se satisfaz as condições de Frobenius.

Definimos o conjunto singular de um sistema de Pfaff por

$$Sing(\mathcal{I}) = \{p \in M; (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s)(p) = 0\}.$$

Dizemos que o sistema $\mathcal{I}$ é regular se seu conjunto singular é vazio.

Um sistema consistindo de uma simples equação

$$\alpha = 0, \tag{1.2}$$

com α uma 1-forma regular, foi estudada por Pfaff [1814-15]. O correspondente ideal diferencial $\mathcal{I}$ tem os geradores α e $d\alpha$. O inteiro r definido por

$$\begin{gathered} \alpha \wedge (d\alpha)^r \not\equiv 0 \\ \alpha \wedge (d\alpha)^{(r+1)} \equiv 0 \end{gathered}$$

é chamado *classe* de α.

Para o estudo local do sistema (1.2), temos o clássico teorema de Pfaff-Darboux, que pode ser encontado em [3, capítulo II, teorema 3.1]. Este teorema nos fornece uma forma normal para uma 1-forma desde que satisfeita uma condição sobre sua classe.

Teorema 1.10 (Pfaff-Darboux) *Seja α uma 1-forma, suponha que $\mathcal{I} = \langle \alpha \rangle$ tenha classe constante r em uma vizinhança em $\mathbb{C}^n$ com $Sing(\mathcal{I}) = \emptyset$. Então existem $f_1, \cdots, f_{r+1}, g_1, \cdots, g_r \in \mathcal{O}_0^n$ tais que*

$$\alpha = \textstyle\sum_{i=1}^r f_i dg_i + df_{r+1}.$$

Denotando por $\Omega^p_{\mathbb{C}^n}$ o feixe dos germes de p-formas em $(\mathbb{C}^n, 0)$, temos que um germe de sistema de Pfaff de codimensão k em $(\mathbb{C}^n, 0)$ é um subfeixe $\mathcal{I}$ do feixe $\Omega^1_{\mathbb{C}^n}$ de $(\mathbb{C}^n, 0)$, gerado por k germes de 1-formas diferenciais holomorfas $\alpha^1, \cdots, \alpha^k$ linearmente independentes em um ponto genérico próximo à 0 e denotado por $\mathcal{I} = \langle \alpha^1, \cdots, \alpha^k \rangle$. Do exposto acima, vemos que o conjunto singular de $(\mathcal{I})$ é o germe de subconjunto analítico dado por:

$$Sing(\mathcal{I}) = \{p \in (\mathbb{C}^n, 0); (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(p) = 0\}.$$

Seja $\mathfrak{a} = \langle f_1, \cdots, f_r \rangle$. Considere

$$\mathcal{C} = V(\mathfrak{a}) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n : f(a_1, \cdots, a_n) = 0 \, \forall \, f \in \mathfrak{a}\},$$

um germe de subconjunto analítico em $(\mathbb{C}^n, 0)$ de codimensão menor ou igual a k. Denotemos por $d\mathfrak{a}$ o sistema de Pfaff gerado por $df_1, \cdots, df_r$.

Dizemos que $\mathcal{C} = V(\mathfrak{a})$ é uma variedade integral de $\mathcal{I} = \langle \alpha^1, \cdots, \alpha^k \rangle$ se, e somente se,

$$\alpha^i \wedge d\mathfrak{a} \in \mathfrak{a} \otimes \Omega^{r+1}_{\mathbb{C}^n}, i = 1, \cdots, k.$$

Um sistema de Pfaff $\mathcal{I}$ é integrável se, e somente se,

$$d\mathcal{I} \equiv 0 \mod (\mathcal{I}).$$

Se $\mathcal{I}$ for integrável e codim$(Sing(\mathcal{I})) \geq 3$, podemos utilizar um teorema do tipo Frobenius com singularidade, provado por Malgrange em [17, pág. 73], para provar a existência de variedades integrais que passam pelos pontos singulares do sistema.

Teorema 1.11 (Malgrange-Frobenius) *Sejam $\omega_1, \cdots, \omega_p$ 1-formas e $\mathcal{I}$ o sistema diferencial integrável gerado por estas formas $\omega_{i's}$. Se $codim(Sing(\mathcal{I})) \geq 3$, então existem germes de funções holomorfas $f_1, \ldots, f_p$ tais que $\mathcal{I} =< df_1, \ldots, df_p >$.*

Se o ideal algébrico gerado pelo sistema de Pfaff não satisfaz a condição de Frobenius, então ele não é um ideal diferencial. Contudo, pode existir um ideal diferencial que é um subconjunto do ideal algébrico, este ideal pode ser encontrado tomando a flag derivada do sistema.

Definição 1.12 *Para um germe de sistema de Pfaff $\mathcal{I}$, definimos sua* flag derivada

$$\mathcal{I}^{(0)} \supset \mathcal{I}^{(1)} \supset \cdots$$

pelas relações,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{(0)} &= \mathcal{I}\\ \mathcal{I}^{(i+1)} &= \{\alpha \in \mathcal{I}^{(i)} : d\alpha \equiv 0 \mod (\mathcal{I}^{(i)})\}.\end{aligned}$$

Esta definição resulta na filtração

$$\mathcal{I}^{(k)} \subset \cdots \subset \mathcal{I}^{(2)} \subset \mathcal{I}^{(1)} \subset \mathcal{I}^{(0)} = \mathcal{I}.$$

Assim, temos a flag derivada do sitema de Pfaff $\mathcal{I}$ definida indutivamente pela sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{(i+1)} \longrightarrow \mathcal{I}^{(i)} \longrightarrow \mathcal{I}^{(i)}/\big(\mathcal{I}^{(i)}d\mathcal{I}^{(i)}\big).$$

Como a codimensão de cada sistema de Pfaff $\mathcal{I}^{(i)}$ é genericamente constante, então existe um inteiro N tal que $\mathcal{I}^{(N)} = \mathcal{I}^{(N+1)}$. O sistema de Pfaff $\mathcal{I}^{(N)}$ é sempre integrável pela definição pois

$$d\mathcal{I}^{(N)} \equiv 0 \mod (\mathcal{I}^{(N)}).$$

Note que, $\mathcal{I}^{(N)}$ é o maior subsistema integrável contido em $\mathcal{I}$. Se $\mathcal{I}^{(N)} = 0$ dizemos que o sistema $\mathcal{I}$ é *completamente não-holonômico*.

Um sistema de contato em $(\mathbb{C}^3, 0)$ é um exemplo de sistema completamente não-holonômico. O Teorema de Pfaff-Darboux (1.10) nos fornece uma forma normal para o sistema de contato não-singular, isto é, se $\mathcal{I}$ é um sistema de contato não-singular então existe um germe de sistema de coordenadas em $(\mathbb{C}^3, 0)$ tal que $\mathcal{I} = \langle dz_3 - z_2dz_1\rangle$. Uma versão singular desse teorema foi provada por Cerveau em [7]:

Teorema 1.13 (Pfaff-Darboux-Cerveau) *Seja β um germe de 1-forma holomorfa em $(\mathbb{C}^n, 0)$ de classe r e $codim(Sing(d\beta)) \geq 3$. Então existem $f_1, \cdots, f_{r+1}, g_1, \cdots, g_r \in \mathcal{O}_0^n$ tais que*

$$\beta = \textstyle\sum_{i=1}^r f_i dg_i + df_{r+1}.$$

1.1.3 Sistema de Pfaff de codimensão 2

Para sistemas de Pfaff de codimensão 2 regular, encontramos formas normais utilizando as formas normais de Engel e as formas normais de Goursat para espaços de dimensão 4 e n, respectivamente.

Definição 1.14 *Um germe de um sistema de Engel em* $(\mathbb{C}^4, 0)$, *é um sistema de Pfaff* $\mathcal{I} = \langle \alpha, \beta \rangle$ *de codimensão 2 em* $(\mathbb{C}^4, 0)$*tais que* α *e* β *satisfazem as condições:*

1. $\alpha \wedge \beta \wedge d\alpha \not\equiv 0$
2. $\alpha \wedge \beta \wedge d\beta \equiv 0$
3. $\beta \wedge d\beta \not\equiv 0$.

Friedrich Engel mostrou em [10] que um sistema de Engel não-singular é localmente isomorfo, em um ponto genérico, ao sistema canônico

$$\mathcal{I}_0 = \langle dz_2 - z_3 dz_1, dz_3 - z_4 dz_1 \rangle.$$

Isto é, Engel prova um teorema do tipo Pfaff-Darboux para estes sistemas de codimensão 2.

Teorema 1.15 ***(Forma Normal de Engel).*** *Seja* $\mathcal{I} = \langle \alpha^1, \alpha^2 \rangle$ *um sistema de Pfaff de duas equações em um espaço de dimensão 4 com flag derivada satisfazendo,*

$$\begin{aligned} dim(\mathcal{I}^{(1)}) &= 1, \\ dim(\mathcal{I}^{(2)}) &= 0. \end{aligned}$$

Então, localmente, existem coordenadas (z_1, z_2, z_3, z_4) *tais que* $\mathcal{I}_0 = \langle dz_2 - z_3 dz_1, dz_3 - z_4 dz_1 \rangle$.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [23, pág. 610].

Exemplo 1.16 *No caso regular se um sistema é colocado na forma normal de Engel, então a solução desse sistema é dada por*

$$z_2 = f(z_1), z_3 = f'(z_1), z_4 = f''(z_1),$$

onde $f(z_1)$ *é uma função arbitrária de* z_1 *e* f' *significa derivada de* f.

Considerando o sistema de Engel do teorema (1.15), temos que $\mathcal{I}^{(1)} = \langle \alpha^2 \rangle$ e denotamos por $d\mathcal{I}^{(1)}$ o sistema gerado por $d\alpha^2$. Definimos o conjunto singular de $d\mathcal{I}^{(1)}$ como

$$Sing(d\mathcal{I}^{(1)}) \ := \ \{p \in Sing(\mathcal{I}^{(1)}); d\alpha^2(p) = 0\}.$$

Sendo $\beta = f\alpha^2$, onde $f \in \mathcal{O}_0^*$, temos que $d\beta(p) = df(p) \wedge \alpha^2(p) + f(p)d\alpha^2(p)$. Se $p \in Sing(\mathcal{I}^{(1)})$ então, do fato de que $f \in \mathcal{O}_0^*$, temos que $d\beta(p) = 0 \Leftrightarrow d\alpha^2(p) = 0$. O conjunto singular está portanto bem definido.

Seguindo a linha de Cerveau, que provou uma versão singular do teorema de Pfaff-Darboux, Corrêa-Maza provam em [9, teorema 1.2] uma versão singular do teorema de Engel.

Teorema 1.17 ***(Corrêa-Maza)*** *Seja $\mathcal{I}$ um sistema de Engel de codimensão 2 em $(\mathbb{C}^4, 0)$ com $codim(Sing(\mathcal{I})) \geq 2$ e $codim(Sing(d\mathcal{I}^1)) \geq 3$. Então existem $f_1, \cdots, f_4 \in \mathcal{O}_0^4$ tais que,*

$$\mathcal{I}_0 = \langle df_4 - f_3 df_1, df_3 - f_2 df_1 \rangle.$$

Mais precisamente, existe um germe de mapas holomorfos $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) : (\mathbb{C}^4, 0) \circlearrowleft$ que é um biholomorfismo fora de $Sing(\mathcal{I}) \cup Sing(d\mathcal{I}^{(1)})$ tal que $f^*\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$.

Este teorema nos dá condições sobre o conjunto singular de $\mathcal{I}$ de tal maneira que existam variedades integrais passando pelos pontos singulares do sistema.

Definição 1.18 *Um sistema de Pfaff $\mathcal{I} = \langle \alpha^1, \cdots, \alpha^s \rangle$ regular em $\mathbb{C}^{s+2}$ que satisfaz as seguintes condições:*

$$\begin{aligned} d\alpha^i \ &\equiv \ -\alpha^{i+1} \wedge \pi \quad \text{mod } (\alpha^1, \cdots, \alpha^i), 1 \leq i \leq s-1 \ \ e \\ d\alpha^s \ &\not\equiv \ 0 \quad \text{mod } (\mathcal{I}), \end{aligned} \tag{1.3}$$

*onde $\pi \neq 0$ é uma 1-forma integrável, é chamado **Sistema de Goursat**.*

O teorema seguinte, que pode ser encontrado em [23, pág.611], nos fornece as condições necessárias e suficientes para converter um sistema de Pfaff regular em um sistema de Goursat.

Teorema 1.19 ***(Formas Normais de Goursat)****. Seja $\mathcal{I}$ um sistema de Pfaff regular em $\mathbb{C}^{s+2}$ dado por,*

$$\mathcal{I} = \langle \alpha^1, \cdots, \alpha^s \rangle.$$

Suponha que exista uma forma integrável π tal que $\pi \neq 0 \mod (\mathcal{I})$ satisfazendo as congruências de Goursat (1.3). Sendo $n = s+2$, existe um sistema de coordenadas $(z_1, \cdots, z_n)$ na qual o sistema de Pfaff está na forma normal de Goursat

$$\mathcal{I} = \langle dz_3 - z_2 dz_1, \cdots, dz_n - z_{n-1} dz_1 \rangle.$$

Se o sistema $\mathcal{I}$ puder ser convertido à forma normal de Goursat, definindo

$$\beta_1(z) = dz_n - z_{n-1}dz_1, \cdots, \beta_{n-2}(z) = dz_3 - z_2 dz_1$$

então, pelas formas normais de Goursat, a flag derivada de $\mathcal{I}$ é dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I} & = & \langle \beta_1(z), \cdots, \beta_{n-3}(z), \beta_{n-2}(z) \rangle \\ \mathcal{I}^{(1)} & = & \langle \beta_1(z), \cdots \beta_{n-3}(z) \rangle \\ & \vdots & \\ \mathcal{I}^{(n-4)} & = & \langle \beta_1(z), \beta_2(z) \rangle \\ \mathcal{I}^{(n-3)} & = & \langle \beta_1(z) \rangle \\ \mathcal{I}^{(n-2)} & = & 0. \end{array}$$

Na seção 1 do capítulo 2 demonstramos uma versão holomorfa singular para o teorema das Formas Normais de Goursat.

1.1.4 Sistemas de Pfaff de codimensão maior que 2

Definição 1.20 *Um sistema de Pfaff $\mathcal{I} = \langle \alpha_1^1, \cdots, \alpha_{s_1}^1, \cdots, \alpha_1^m, \cdots, \alpha_{s_m}^m \rangle$ regular em $\mathbb{C}^{n+m+1}$, com*

$$s_1 + \cdots + s_m = n,$$

que satisfaz

$$\begin{array}{rcl} d\alpha_i^j & \equiv & -\alpha_{i+1}^j \wedge \pi \mod (\mathcal{I}^{(s_j - i)}), i = 1, \cdots, s_j - 1 \\ d\alpha_{s_j}^j & \not\equiv & 0 \mod (\mathcal{I}), \end{array} \tag{1.4}$$

*onde $\pi \neq 0$ é uma 1-forma integrável, é chamado **Sistema de Goursat Estendido**.*

Para converter um sistema de Pfaff regular em um sistema de Goursat estendido, podemos utilizar o teorema abaixo cuja demonstração pode ser encontrada em [23, pág.624].

Teorema 1.21 ***(Formas Normais de Goursat Estendidas)*** *Seja $\mathcal{I}$ um sistema de Pfaff regular em $\mathbb{C}^{n+m+1}$ dado por*

$$\mathcal{I} = \langle \alpha_1^1, \cdots, \alpha_{r_1}^1, \cdots, \alpha_1^m, \cdots, \alpha_{r_m}^m \rangle.$$

Se existe uma 1-forma holomorfa integrável π tal que para todo j as congruências (1.4) são satisfeitas, então existe um conjunto de coordenadas tal que $\mathcal{I}$ está na forma normal de Goursat estendida

$$\mathcal{I} = \langle df_i^j - f_{i+1}^j df^0 : i = 1, \cdots, s_j; j = 1, \cdots, m \rangle. \tag{1.5}$$

Se um sistema de Pfaff $\mathcal{I}$ puder ser convertido na forma normal de Goursat estendida, então a flag derivada de $\mathcal{I}$ tem a seguinte estrutura.

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\mathcal{I} = & \{\alpha_1^1 & \cdots & & \alpha_{s_1-1}^1 & \alpha_{s_1}^1 & \cdots & \alpha_1^m & \cdots & \alpha_{s_m}^m\} \\
\mathcal{I}^{(1)} = & \{\alpha_1^1 & \cdots & \cdots & \alpha_{s_1-1}^1 & & \cdots & \alpha_1^m & \cdots\} & \\
 & \vdots & & & \iddots & & \vdots & & \iddots & \\
\mathcal{I}^{(s_m-1)} = & \{\alpha_1^1 & \cdots & \alpha_{s_1-s_m+1}^1 & & & \cdots & \alpha_1^m\} & & \\
 & \vdots & & \iddots & & & & & & \\
\mathcal{I}^{(s_1-2)} = & \{\alpha_1^1 & \alpha_2^1\} & & & & & & & \\
\mathcal{I}^{(s_1-1)} = & \{\alpha_1^1\} & & & & & & & & \\
\mathcal{I}^{(s_1)} = & \{0\}. & & & & & & & &
\end{array}$$

Os sobrescritos j indica a torre que a forma pertence e o subscrito i indica a posição da forma com relação a j-ésima torre. Existem s_j formas na j-ésima torre.

Como um dos resultados desta tese, no capítulo 2, provamos uma versão holomorfa singular da Forma Normal de Goursat estendida

1.2 Sistemas de Pfaff em Variedades Complexas

Definição 1.22 *Seja X uma variedade complexa. Um sistema de Pfaff $\mathcal{F}$ em X de codimensão k, é um subfeixe coerente $\mathcal{E}_{\mathcal{F}} \subset \Omega^1(X)$ sobre $\mathcal{O}_X$ de posto k tal que,*

$$\mathrm{Q}_{\mathcal{F}} = \Omega^1(X)/\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$$

é livre de torção.

Portanto, temos a sequência exata curta

$$0 \to \mathcal{E}_{\mathcal{F}} \to \Omega^1(X) \to \mathrm{Q}_{\mathcal{F}} \to 0.$$

Tomando potências exteriores temos o morfismo

$$\bigwedge^k \mathcal{E}_{\mathcal{F}} \to \Omega^k(X),$$

que por sua vez induz uma k-forma torcida

$$\omega \in H^0(X, \Omega_X^k \otimes (\bigwedge^k \mathcal{E}_{\mathcal{F}})^*).$$

Definição 1.23 *Um sistema de Pfaff é uma folheação (a nível de germes) se satisfaz*

$$d\mathcal{E}_{\mathcal{F}} \equiv 0 \mod (\mathcal{E}_{\mathcal{F}}).$$

Dizemos que o sistema $\omega \in H^0(X, \Omega_X^k \otimes N)$, onde $N = N_1 \otimes \cdots \otimes N_k$, é globalmente decomponível se existem $\omega_i \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes N_i)$ tais que

$$\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$$

1.2.1 Sistemas de Pfaff em $\mathbb{P}^n$

Seja $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^k \otimes \mathcal{L})$. Se $i : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^n$ é uma imersão linear genérica, então $i^*\omega \in H^0(\mathbb{P}^k, \Omega_{\mathbb{P}^k}^k \otimes \mathcal{L})$ é uma seção de um fibrado em retas, e seu divisor de zeros refletem as tangências entre $\mathcal{I}$ e $i(\mathbb{P}^k)$. O *grau* de $\mathcal{I}$ é, por definição, o grau de um tal divisor de tangência. Seja $d := deg(\mathcal{I})$, como $\Omega_{\mathbb{P}^k}^k \otimes \mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(deg(\mathcal{L}) - k - 1)$, concluímos que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d + k + 1)$.

Além disso, a sequência de Euler implica que uma seção ω de $\Omega_{\mathbb{P}^n}^k(d + k + 1)$ pode ser pensada como uma k-forma polinomial em $\mathbb{C}^{n+1}$ com coeficientes homogêneos de grau $d + 1$. Esta forma então satisfaz a identidade

$$i_R\omega = 0, \tag{1.6}$$

onde
$$R = x_0\frac{\partial}{\partial x_0} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}.$$
Assim, o estudo de distribuições de grau d em $\mathbb{P}^n$, se reduz ao estudo de k-formas homogêneas de grau $d+1$ localmente decomponíveis fora do conjunto singular em $\mathbb{C}^{n+1}$, satisfazendo a relação (1.6).

O seguinte lema é fundamental nos estudos de sistemas de Pfaff em $\mathbb{P}^n$.

Lema 1.24 ***(Lema de Jouanolou) [13, lema 1.2, pág. 3]*** *Seja ω uma p-forma homogênea de grau s, então*
$$i_R d\omega + d(i_R\omega) = (p+s)\omega,$$
onde R é o campo de vetores radial e i_R denota o produto interior ou contração com R.

1.3 r-Formas Diferenciais Polinomiais em $\mathbb{C}^n$

Considere a álgebra exterior de r-formas polinomiais em $\mathbb{C}^n$ dada por
$$\Omega^r(n) := A_r(\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}[z],$$
onde $A_r(\mathbb{C}^n)$ é o espaço das formas r-lineares alternadas em $\mathbb{C}^n$. Seja S_d o subespaço de $\mathbb{C}[z]$ de polinômios de grau $\leq d$. A álgebra $\Omega^r(n)$ é naturalmente graduada:
$$\Omega^r(n) = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} \Omega^r_d(n),$$
onde $\Omega^r_d(n) = A_r(\mathbb{C}^n) \otimes S_d$. Note que $\Omega^r_d(n)$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita com
$$dim_{\mathbb{C}}(\Omega^r_d(n)) = \binom{d+n}{n} \cdot \binom{n}{r}.$$
De fato, note que $A_r(\mathbb{C}^n) \simeq \mathbb{C}^{\binom{n}{r}}$, daí
$$\Omega^r_d(n) = A_r(\mathbb{C}^n) \otimes S_d \simeq S_d^{\oplus\binom{n}{r}}.$$
Então,

$$dim_{\mathbb{C}}\Omega^r_d(n) = dim_{\mathbb{C}}S_d^{\oplus\binom{n}{r}} = \binom{n}{r} \cdot dim_{\mathbb{C}}S_d.$$

Como $dim_{\mathbb{C}}S_d = \binom{d+n}{n}$, temos que

$$dim_{\mathbb{C}}(\Omega^r_d(n)) = \binom{d+n}{n} \cdot \binom{n}{r}.$$

Tomando uma r-forma polinomial

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq n} P_{i_1\ldots i_r} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_r},$$

definimos o grau de ω por

$$grau(\omega) = max\{grau(P_{i_1,\ldots,i_r}), 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\}.$$

Se $\omega \in \Omega^r_d(n)$, então $P_{i_1,\ldots,i_r} \in S_d$.

Observe que um sistema diferencial exterior formado por uma 1-forma polinomial é um exemplo de sistema de Pfaff singular de codimensão 1. No capítulo 3 encontramos formas normais para este sistema, onde a 1-forma polinomial tem grau 2. No teorema demonstrado foi utilizado o clássico teorema de Darboux, enunciado após a definição abaixo.

Definição 1.25 *Dada uma 1-forma θ, considere sua diferencial, isto é, a 2-forma fechada $d\theta$. A* classe *de $d\theta$ em um ponto $x_0 \in \mathbb{C}^n \setminus Sing(d\theta)$ é o número $2m$ onde*

$$(d\theta)^m(x_o) \neq 0, \; (d\theta)^{m+1}(x_o) = 0.$$

Teorema 1.26 ***(Darboux) [3, capítulo II, teorema 3.3]*** *Seja ω uma 2-forma regular em $(\mathbb{C}^n, 0)$ de classe constante $2m$. Então, existe um sistema de coordenadas $(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_{n-2m})$ tal que*

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \; \cdots dx_m \wedge dy_m.$$

Capítulo 2

Formas Normais de Goursat

Na primeira seção deste capítulo demonstraremos uma versão singular do teorema das formas normais de Goursat. Veremos, como uma aplicação do teorema demonstrado, que o conjunto singular de um sistema de Goursat em $\mathbb{P}^n$ tem codimensão atípica. Provaremos na segunda seção uma versão singular do teorema das formas normais de Goursat estendidas.

2.1 Formas Normais de Goursat

Vários teoremas são baseados em formas normais para provar a existência de variedades integrais de um sistema diferencial. As formas normais de Goursat regular podem ser aplicadas, por exemplo, no estudo equações diferenciais de ordem alta. Observe que as E.D.O's

$$y' = \frac{dy}{dx}, \cdots, y^{(s)} = \frac{dy^{(s-1)}}{dx}$$

podem ser associadas às 1-formas

$$\alpha^1 = dy - y'dx, \cdots, \alpha^s = dy^{(s-1)} - y^{(s)}dx.$$

Se estamos em dimensão $s+2$, estas formas representam um sistema de Pfaff de codimensão s que satisfazem as condições de Goursat, elas também são caracterizadas pelo teorema das formas normais de Goursat:

Teorema 2.1 *Seja $\mathcal{I}$ um sistema de Pfaff gerado pelas s 1-formas,*

$$\mathcal{I} = \langle \alpha^1, \cdots, \alpha^s \rangle,$$

em um espaço de dimensão $n = s + 2$. *Suponha que exista uma 1-forma integrável* π, *com* $\pi \not\equiv 0 \mod (\mathcal{I})$, *satisfazendo as congruências de Goursat,*

$$\begin{aligned} d\alpha^i &\equiv -\alpha^{i+1} \wedge \pi \mod (\alpha^1, \cdots, \alpha^i), 1 \leq i \leq s-1 \\ d\alpha^s &\not\equiv 0 \mod (\mathcal{I}). \end{aligned}$$

Então, existe um sistema de coordenadas $(z_1, \cdots, z_n)$ *na qual o sistema de Pfaff está na forma normal de Goursat*

$$\mathcal{I} = \langle dz_3 - z_2 dz_1, \cdots, dz_n - z_{n-1} dz_1 \rangle.$$

Motivados pelos trabalhos de Cerveau [7] e Corrêa-Maza [9] que provaram versões singulares para as formas de Pfaff-Darboux e sistemas de Engel, respectivamente, apresentamos a seguinte versão singular para o teorema das formas normais de Goursat.

Teorema A. *Seja* $\mathcal{I}$ *um germe de um sistema de Pfaff holomorfo em* $(\mathbb{C}^n, 0)$, $n = s + 2$, *gerado pelas* s *1-formas,*

$$\mathcal{I} = \langle \alpha^1, \cdots, \alpha^s \rangle,$$

tal que $codim(Sing(\mathcal{I})) \geq 2$ *e* $codim(Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)})) \geq 3$. *Suponha que exista uma 1-forma integrável* π, *com* $\pi \neq 0 \mod (\mathcal{I})$, *satisfazendo as congruências de Goursat,*

$$\begin{aligned} d\alpha^i &\equiv -\alpha^{i+1} \wedge \pi \mod (\alpha^1, \cdots, \alpha^i), 1 \leq i \leq s-1 \\ d\alpha^s &\not\equiv 0 \mod (\mathcal{I}). \end{aligned}$$

Então, existem $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{O}_0^n$ *tais que*

$$\mathcal{I} = \langle df_3 - f_2 df_1, \cdots, df_n - f_{n-1} df_1 \rangle.$$

Demonstração: As congruências de Goursat podem ser expressas como

$$\begin{aligned} d\alpha^1 &\equiv -\alpha^2 \wedge \pi \mod (\alpha^1) \\ d\alpha^2 &\equiv -\alpha^3 \wedge \pi \mod (\alpha^1, \alpha^2) \\ &\vdots \\ d\alpha^{s-1} &\equiv -\alpha^s \wedge \pi \mod (\alpha^1, \cdots, \alpha^{s-1}) \\ d\alpha^s &\equiv -\alpha^{s+1} \wedge \pi \mod (\alpha^1, \cdots, \alpha^s), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\alpha^{s+1} \notin \mathcal{I}$. Observe que

$$\pi \not\equiv 0 \mod (\mathcal{I}) \Rightarrow \pi \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_s \neq 0,$$

$$\alpha^{s+1} \notin \mathcal{I} \Rightarrow \alpha^{s+1} \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_s \neq 0$$

e

$$d\alpha^s \not\equiv 0 \Rightarrow \alpha^{s+1} \wedge \pi \neq 0.$$

Portanto, $\{\alpha^{s+1}, \pi\}$ formam um complemento para $\mathcal{I}$. Podemos associar a seguinte flag derivada ao sistema $\mathcal{I}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}^{(0)} & = & \langle \alpha^1, \cdots, \alpha^s \rangle \\ \mathcal{I}^{(1)} & = & \langle \alpha^1, \cdots, \alpha^{s-1} \rangle \\ & \vdots & \\ \mathcal{I}^{(s-1)} & = & \langle \alpha^1 \rangle \\ \mathcal{I}^{(s)} & = & 0. \end{array} \tag{2.2}$$

Das congruências de Goursat, concluímos que

$$d\alpha^1 \equiv -\alpha^2 \wedge \pi \mod (\alpha^1) \Rightarrow d\alpha^1 = -\alpha^2 \wedge \pi + \alpha^1 \wedge \eta, \tag{2.3}$$

para alguma 1-forma η.
Daí,

$$d\alpha^1 \wedge \alpha^1 = -\alpha^2 \wedge \pi \wedge \alpha^1 \neq 0 \quad e \quad (d\alpha^1)^2 \wedge \alpha^1 = 0,$$

que implica que a classe de α^1 é igual a 1. Note que

$$Sing(d\alpha^1) = Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)}).$$

De fato, por definição $Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)}) = Sing(\alpha^1) \cap Sing(d\alpha^1)$, ou seja, $Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)}) \subseteq Sing(d\alpha^1)$. Por outro lado, sejam $p \in Sing(d\alpha^1)$ e $\beta \in d\mathcal{I}^{(s-1)}$. Como $d\mathcal{I}^{(s-1)} = \langle d\alpha^1 \rangle$, temos que $\beta = f d\alpha_1, f \in \mathcal{O}_0^*$. Então, se $p \in Sing(d\alpha^1)$ temos $\beta(p) = f(p) d\alpha^1(p) = 0$, ou seja, $p \in Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)})$. Daí,

$$Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)}) = Sing(d\alpha^1),$$

então $codim(Sing(d\alpha^1)) \geq 3$, pelo teorema de Darboux-Cerveau-Pfaff (1.13) existem

$$f_n, f_{n-1}, f_1 \in \mathcal{O}_0^n$$

tais que,

$$\alpha^1 = df_n - f_{n-1}df_1. \tag{2.4}$$

Em particular,

$$d\alpha^1 = -df_{n-1} \wedge df_1.$$

Das flag derivadas do sistema, temos que $\mathcal{I}^{(s-2)} = \langle \alpha^2, \alpha^1 \rangle \subseteq \mathcal{I}$, daí $Sing(\mathcal{I}^{(s-2)}) \subseteq Sing(\mathcal{I})$. Portanto, codim$Sing(\mathcal{I}^{(s-2)}) \geq 2$. Observe ainda que, das congruências de Goursat (2.1), temos

$$\begin{aligned} \alpha^2 \wedge \alpha^1 \wedge d\alpha^1 &= 0, \\ \alpha^2 \wedge \alpha^1 \wedge d\alpha^2 &= -\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge d\alpha^2 = \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge (\alpha^3 \wedge \pi) \neq 0, \\ \alpha^1 \wedge d\alpha^1 &\neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, α^2 e α^1 geram um sistema do tipo Engel que satisfaz as condições do teorema de Corrêa-Maza (1.17), então existe $f_{n-2} \in O_0^n$ tal que,

$$\alpha^2 = df_{n-1} - f_{n-2}df_1. \tag{2.5}$$

Nestas coordenadas temos, $d\alpha^1 \wedge \alpha^1 = -df_{n-1} \wedge df_1 \wedge df_n$ e daí, segue de (2.3) que

$$\begin{aligned} 0 &= d\alpha^1 \wedge \alpha^1 \wedge \pi \\ &= \pi \wedge (-df_{n-1} \wedge df_1 \wedge df_n). \end{aligned}$$

Portanto, fora de $Sing(\mathcal{I})$ temos que π é combinação linear de df_1, df_{n-1}, df_n. De (2.4) e (2.5) temos as congruências

$$\begin{aligned} df_n &\equiv f_{n-1}df_1 \quad \bmod (\alpha^1) \ e \\ df_{n-1} &\equiv f_{n-2}df_1 \quad \bmod (\alpha^2) \end{aligned}$$

que implicam que,

$$\begin{aligned} \pi &\equiv \tilde{a}df_1 + \tilde{b}df_{n-1} + \tilde{c}df_n \quad \bmod (\alpha^1, \alpha^2) \\ &\equiv \tilde{a}df_1 + \tilde{b}f_{n-2}df_1 + \tilde{c}f_{n-1}df_1 \quad \bmod (\alpha^1, \alpha^2), \end{aligned}$$

com $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ holomorfas em $(\mathbb{C}^n, 0) \setminus Sing(\mathcal{I}) \bigcup Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)})$. Como

$$codim(Sing(\mathcal{I}) \bigcup Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)})) \geq 2,$$

pelo teorema de extensão de Hartogs' segue que

$$\begin{aligned} \pi &\equiv a df_1 + b df_{n-1} + c df_n \mod (\alpha^1, \alpha^2) \\ &\equiv a df_1 + b f_{n-2} df_1 + c f_{n-1} df_1 \mod (\alpha^1, \alpha^2), \end{aligned}$$

com $a, b, c \in O_0^n$. Considere $\psi = a + b f_{n-2} + c f_{n-1}$. Note que ψ é não nulo pois $\pi \neq 0 \mod (\mathcal{I})$. Utilizando novamente as congruências de Goursat temos que,

$$d\alpha^2 \equiv -\alpha^3 \wedge \pi \mod (\alpha^1, \alpha^2). \tag{2.6}$$

De (2.5) vemos que $d\alpha^2 = -df_{n-2} \wedge df_1$ daí, utilizando (2.6) temos

$$\begin{aligned} df_{n-2} \wedge df_1 &\equiv \alpha^3 \wedge \pi \mod (\alpha^1, \alpha^2) \\ -df_{n-2} \wedge df_1 &\equiv -\psi\alpha^3 \wedge df_1 \mod (\alpha^1, \alpha^2) \\ -df_{n-2} \wedge df_1 + \psi\alpha^3 \wedge df_1 &\equiv 0 \mod (\alpha^1, \alpha^2) \\ \psi\alpha^3 - df_{n-2} &\equiv g \cdot df_1 \mod (\alpha^1, \alpha^2) \\ \psi\alpha^3 &\equiv df_{n-2} \mod (\alpha^1, \alpha^2, df_1). \end{aligned}$$

Isto significa que, $\mod (\alpha^1, \alpha^2, df_1)$ temos que α^3 é um múltiplo não-nulo de df_{n-2}. Então

$$\alpha^3 \equiv \lambda(x) df_{n-2} \mod (df_1, \alpha^1, \alpha^2), \tag{2.7}$$

para alguma função $\lambda(x)$ holomorfa não-nula. A congruência (2.7) pode ser reescrita como,

$$\alpha^3 = df_{n-2} - \frac{1}{\lambda(x)} df_1 \mod (\alpha^1, \alpha^2).$$

Seja $f_{n-3} = \frac{1}{\lambda(x)}$, então

$$\alpha^3 = df_{n-2} - f_{n-3} df_1.$$

Continuando este processo, temos pelas congruências de Goursat a existência de funções coordenadas $f_2, \cdots, f_{n-3} \in \mathcal{O}_0^*$ tais que

$$\begin{aligned} \alpha^4 &= df_{n-3} - f_{n-4}df_1, \\ &\vdots \\ \alpha^s &= df_3 - f_2 df_1 \end{aligned}$$

e,

$$d\alpha^s \not\equiv 0 \mod (\mathcal{I}).$$

Portanto,

$$\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^s \wedge d\alpha^s \neq 0.$$

Substituindo $\alpha^i = df_{n-(i-1)} - f_{n-1}df_1$ na expressão acima, obtemos

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_n \neq 0$$

e assim as funções $f_1, \cdots, f_n$ formam um sistema de coordenadas locais. $\square$

Como uma aplicação do teorema A, provaremos que o conjunto singular de um sistema de Goursat em $\mathbb{P}^n$ tem codimensão atípica. Sabemos que para sistemas de Pfaff de codimensão s a codimensão esperada para o conjunto singular é $s+1$. Pelo teorema a seguir veremos que o conjunto singular do sistema de Pfaff em questão tem codimensão menor ou igual a 2.

Teorema B. *Seja $\mathcal{I} = \langle \alpha^1, \cdots, \alpha^s \rangle$, $\alpha^i \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(r))$, um sistema de Pfaff de codimensão s em $\mathbb{P}^n$ satisfazendo as congruências de Goursat. Então, ou $Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)})$ tem uma componente de codimensão 2, ou $Sing(\mathcal{I})$ tem uma componente de codimensão 1. Além disso, se $codim(Sing(\mathcal{I})) \geq 2$, então $Sing(\mathcal{I})$ tem uma componente de codimensão 2.*

Demonstração: Considerando as flags derivadas do sistema $\mathcal{I}$ temos

$$\mathcal{I}^{(s-1)} = \langle \alpha^1 \rangle.$$

Seja $Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)}) = \{p \in Sing(\mathcal{I}^{(s-1)}); d\alpha^1(p) = 0\}$. Por definição

$$Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)}) = Sing(d\alpha^1) \cap Sing(\alpha^1).$$

Do lema de Jouanolou (1.24) temos que

$$i_R d\alpha^1 = (r+1)\alpha^1, \tag{2.8}$$

então $Sing(d\alpha^1) \subset Sing(\alpha^1)$, logo

$$Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)}) = Sing(d\alpha^1).$$

Supondo por contradição que codim$(Sing(\mathcal{I})) \geq 2$ e codim$(Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)})) \geq 3$ temos, pelo Teorema 1, que existem $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{O}_0^n$ tais que

$$\mathcal{I} = \langle df_3 - f_2 df_1, \cdots, df_n - f_{n-1} df_1 \rangle.$$

Em particular,

$$d\alpha^s \wedge \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s = (-1)^{(n-1)} df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_n.$$

Seja $\alpha^i = df_{i+2} - f_{i+1} df_1$ para $i \in \{1, \cdots, s\}$, fazendo a contração de α_i pelo campo radial temos que

$$i_R \alpha^i = r_{i+2} f_{i+2} - r_1 f_{i+1} f_1, \tag{2.9}$$

onde r_{i+2} e r_1 são os graus de f_{i+1} e f_1, respectivamente. Por outro lado, pelo fato de α^i ser homogênea,

$$i_R \alpha^i = 0. \tag{2.10}$$

De (2.9) e (2.10) segue que

$$df_{i+2} = \frac{r_1}{r_{i+2}} (f_{i+1} df_1 + f_1 df_{i+1}) \ \forall i \in \{1, cdots, s\}.$$

Logo

$$d\alpha^s \wedge \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s = 0,$$

uma contradição.

Suponha que codim$(Sing(\mathcal{I})) \geq 2$. De (2.8) temos

$$Sing(d\alpha^1) \subset Sing((i_R d\alpha^1) \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^s) = Sing((r+1)\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^s) = Sing(\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^s).$$

Portanto, $Sing(\mathcal{I})$ tem uma componente de codimensão 2. $\square$

Exemplo 2.2

Seja $\mathcal{I}$ o sistema diferencial exterior induzido pelas 1-formas nas coordenadas homogêneas $[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{P}^n$.

$$\begin{aligned}
\alpha^1 &= z_0^2 dz_3 - z_0 z_2 dz_1 + (z_2 z_1 - z_0 z_3) dz_0,\\
\alpha^2 &= z_0^2 dz_4 - z_0 z_3 dz_1 + (z_3 z_1 - z_0 z_4) dz_0,\\
&\vdots\\
\alpha^{s-1} &= z_0^2 dz_{n-1} - z_0 z_{n-2} dz_1 + (z_{n-2} z_1 - z_0 z_{n-1}) dz_0,\\
\alpha^s &= z_0^2 dz_n - z_0 z_{n-1} dz_1 + (z_{n-1} z_1 - z_0 z_n) dz_0.
\end{aligned}$$

Considere

$$\begin{aligned}
\alpha^i &= z_0^2 dz_{i+2} - z_0 z_{i+1} dz_1 + (z_{i+1} z_1 - z_0 z_{i+2}) dz_0,\\
\alpha^{i+1} &= z_0^2 dz_{i+3} - z_0 z_{i+2} dz_1 + (z_{i+2} z_1 - z_0 z_{i+3}) dz_0.
\end{aligned}$$

Note que,

$$d\alpha^{i+1} = 3z_0 dz_0 \wedge dz_{i+3} - 2z_{i+2} dz_o \wedge dz_1 - z_0 dz_{i+2} \wedge dz_1 + z_1 dz_{i+2} \wedge dz_0 \tag{2.11}$$

e

$$\begin{aligned}
\alpha^i \wedge \alpha^{i+1} &= z_0^4 dz_{i+2} \wedge dz_{i+3} + z_0^3 z_{i+2} dz_1 \wedge dz_{i+2} - z_0^3 z_{i+1} dz_1 \wedge dz_{i+3} -\\
&- z_0^2 (z_{i+2} z_1 - z_0 z_{i+3}) dz_0 \wedge dz_{i+2} - z_0^2 (z_0 z_{i+3} - z_{i+2}^2) dz_0 \wedge dz_1 + \\
&+ z_0^2 (z_{i+1} z_1 - z_0 z_{i+2}) dz_o \wedge dz_{i+3}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Fazendo o produto exterior de (2.11) com (2.12) temos que,

$$\begin{aligned}
d\alpha^{i+1} \wedge \alpha^i \wedge \alpha^{i+1} &= 3z_0^4 z_{i+2} dz_0 \wedge dz_1 \wedge dz_{i+2} \wedge dz_{i+3} - 3z_0^4 z_{i+2} dz_0 \wedge dz_1 \wedge dz_{i+2} \wedge dz_{i+3}\\
&+ z_0^3 z_1 z_{i+1} dz_0 \wedge dz_1 \wedge dz_{i+2} \wedge dz_{i+3} - z_0^3 z_1 z_{i+1} dz_0 \wedge dz_1 \wedge dz_{i+2} \wedge dz_{i+3}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Então,

$$d\alpha^{i+1} \equiv 0 \mod (\alpha^i, \alpha^{i+1}).$$

Logo,

$$d\alpha^{i+1} \equiv -\alpha^i \wedge \pi \mod (\alpha^{i+1}),$$

onde $\pi = z_0 dz_1 - z_1 dz_0$ é uma 1-forma não-nula. Reenumerando os índices das formas, podemos ver $\mathcal{I}$ sendo gerado por

$$\begin{aligned}
\alpha^1 &= z_0^2 dz_n - z_0 z_{n-1} dz_1 + (z_{n-1} z_1 - z_0 z_n) dz_0 \\
\alpha^2 &= z_0^2 dz_{n-1} - z_0 z_{n-2} dz_1 + (z_{n-2} z_1 - z_0 z_{n-1}) dz_0 \\
&\vdots \\
\alpha^{s-1} &= z_0^2 dz_4 - z_0 z_3 dz_1 + (z_3 z_1 - z_0 z_4) dz_0 \\
\alpha^s &= z_0^2 dz_3 - z_0 z_2 dz_1 + (z_2 z_1 - z_0 z_3) dz_0.
\end{aligned}$$

Daí, as 1-formas que geram $\mathcal{I}$ satisfazem a congruência

$$d\alpha^j \equiv -\alpha^{j+1} \wedge \pi \mod (\mathcal{I}), j \in \{1, \cdots, s\},$$

com

$$\alpha^{s+1} = z_0^2 dz_2 - z_0 z_1 dz_1 + (z_1^2 - z_0 z_2) dz_0 \notin \mathcal{I}.$$

Vemos então que $\mathcal{I}$ satisfaz as condições do teorema das Formas Normais de Goursat. Como,

$$i_R \alpha^j = 0 \, \forall j,$$

onde R é o campo de vetores radial, $\mathcal{I}$ induz um sistema de Goursat em $\mathbb{P}^n$. Observe ainda que

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s = z_0^{2s} dz_3 \wedge \cdots \wedge dz_n + z_0 \Big(\sum_{k=1}^{\frac{(s+2)(s+1)}{2}} \beta_k \Big),$$

onde β_k é uma s-forma homogênea de grau $2s - 1$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ e é gerada por $dz_0, \cdots, dz_n$. Então

$$Sing(\mathcal{I}) = \{z_0 = 0\}$$

tem codimensão 1. Da flag derivada do sistema $\mathcal{I}$ vemos que

$$\mathcal{I}^{s-1} = \langle \alpha^1 \rangle,$$

onde

$$\alpha^1 = z_0^2 dz_n - z_0 z_{n-1} dz_1 + (z_{n-1} z_1 - z_0 z_n) dz_0.$$

Note que, sendo $\alpha \in \mathcal{I}^{(s-1)}$ então $\alpha = f\alpha^1$ para $f \in \mathcal{O}_n^*$. Daí,

$$d\alpha = df \wedge \alpha^1 + f d\alpha^1.$$

Além disso, sendo $p \in Sing(\mathcal{I}^{(s-1)})$ temos

$$d\alpha(p) = df(p) \wedge \alpha^1(p) + f(p) d\alpha^1(p) = f(p) d\alpha^1(p),$$

então $d\alpha(p) = 0$ se, e somente se, $d\alpha^1(p) = 0$. Considere então

$$Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)}) = \{p \in Sing(\mathcal{I}^{(s-1)}); d\alpha^1(p) = 0\}.$$

Na demonstração do teorema A vimos que $Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)}) = Sing(d\alpha^1)$.

Como

$$d\alpha^1 = 3z_0 dz_0 \wedge dz_n - 2z_{n-1} dz_0 \wedge dz_1 - z_0 dz_{n-1} \wedge dz_1 + z_1 dz_{n-1} \wedge dz_0$$

e

$$Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)}) = Sing(d\alpha^1),$$

temos

$$Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)}) = \{z_0 = z_1 = z_{n-1} = 0\}.$$

Logo, $codim(Sing(d\mathcal{I}^{(s-1)})) = 3$.

2.2 Formas Normais de Goursat Singular Estendida

Enquanto as formas normais de Goursat são utilizadas em sistemas de Pfaff de codimensão igual a s em $(\mathbb{C}^{s+2}, 0)$, para encontrarmos formas normais para sistemas de Pfaff de codimensão n em $(\mathbb{C}^{n+m+1}, 0)$, podemos utilizar as formas normais de Goursat estendida.

Definição 2.3 *Um germe de sistema de Pfaff $\mathcal{I}$ regular em $(\mathbb{C}^{n+m+1}, 0)$ de codimensão n é um sistema de Goursat estendido se é gerado por n formas do tipo*

$$\mathcal{I} = \langle dz_i^j - z_{i+1}^j dz^0 : i = 1, \cdots, s_j; j = 1, \cdots, m \rangle. \tag{2.13}$$

Essa é uma extensão direta das formas normais de Goursat.

Seja $\mathcal{I}$ uma coleção de n 1-formas holomorfas independentes definidas em $U \subset M$,

$$\mathcal{I} = \{\omega_1^j, \omega_2^j, \cdots, \omega_{s_j}^j : j = 1, \cdots, m\}. \tag{2.14}$$

Considere a 1-forma $\pi \neq 0 \mod (\mathcal{I})$ tal que para $j = 1, \cdots, m$,

$$\begin{aligned} d\omega_k^j &\equiv \pi \wedge \omega_{k+1}^j \mod (\mathcal{I}^{(s_j-k)}), k = 1, \cdots, s_j - 1 \\ d\omega_{s_j}^j &\neq 0 \mod (\mathcal{I}). \end{aligned} \tag{2.15}$$

A flag derivada induzida pelas congruências (2.15) associada ao sistema $\mathcal{I}$ é dada por

$$\mathcal{I}^{(i)} = \{\omega_1^j, \cdots, \omega_{s_j-i}^j : j = 1, \cdots, m\}.$$

Dizemos que a flag derivada de $\mathcal{I}$ tem m torres, e o conjunto de relações (2.15) chamamos de *congruências de Goursat estendidas*.

As condições para converter um sistema de Pfaff regular de codimensão maior que 2 em um sistema de Goursat estendido regular são dadas pelo teorema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em [23].

Teorema 2.4 *Seja $\mathcal{I}$ um sistema de Pfaff regular em $(\mathbb{C}^{n+m+1}, 0)$ de codimensão $m+1$. Se (e só se) existem $\{\alpha_i^j : i = 1, \cdots, s_j, j = 1, \cdots, m\}$ conjunto de geradores holomorfos para $\mathcal{I}$ e uma 1-forma holomorfa integrável π tal que para todo j,*

$$\begin{aligned} d\alpha_i^j &\equiv -\alpha_{i+1}^j \wedge \pi, \quad \mod (\mathcal{I}^{(s_j-i)}) i = 1, \cdots, s_j - 1 \\ d\alpha_{s_j}^j &\not\equiv 0 \mod (\mathcal{I}), \end{aligned}$$

então, existe um conjunto de coordenadas tal que

$$\mathcal{I} = \langle df_i^j - f_{i+1}^j df^0 : i = 1, \cdots, s_j; j = 1, \cdots, m \rangle.$$

Para o caso singular, as condições para converter um sistema de Pfaff holomorfo de codimensão maior que 2 em um sistema de Goursat estendido são dadas pelo seguinte teorema.

Teorema C. *Seja $\mathcal{I}$ um germe de um sistema de Pfaff holomorfo em $(\mathbb{C}^{n+m+1}, 0)$ de codimensão $m+1$. Suponha que $codim(Sing(\mathcal{I})) \geq 2$ e $codim(Sing(d(\mathcal{I}^{(s_j-i)})) \geq 3$ para $i = 1, \cdots, s_j$ e $j = 1, \cdots, m$. Se existe, $\{\alpha_i^j : i = 1, \cdots, s_j, j = 1, \cdots, m\}$, um conjunto de geradores* *holomorfos para $\mathcal{I}$ e uma 1-forma holomorfa integrável π tal que, para todo j valem*

$$\begin{aligned} d\alpha_i^j &\equiv -\alpha_{i+1}^j \wedge \pi, \quad \mod (\mathcal{I}^{(s_j - i)}) \quad i = 1, \cdots, s_j - 1 \\ d\alpha_{s_j}^j &\not\equiv 0 \mod (\mathcal{I}). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Então, existe um conjunto de coordenadas holomorfas tal que

$$\mathcal{I} = \langle df_i^j - f_{i+1}^j df^0 : i = 1, \cdots, s_j; j = 1, \cdots, m \rangle.$$

Demonstração: Se o sistema está na forma normal de Goursat estendida tome $\pi = df^0$ (que é integrável) e considere a base de 1-formas, α_i^j, dadas por:

$$\alpha_i^j = df_i^j - f_{i+1}^j df^0.$$

Diferenciando α_i^j, temos

$$\begin{aligned} d\alpha_i^j &= -df_{i+1}^j \wedge df^0 \\ &= -\alpha_{i+1}^j \wedge \pi. \end{aligned} \tag{2.17}$$

E portanto as congruências (2.16) são satisfeitas.

Suponhamos agora que uma base de 1-formas para $\mathcal{I}$, $\{\alpha_i^j\}$, foi encontrada satisfazendo (2.16). Observe que

$$\mathcal{I}^{(k)} = \{\alpha_1^1, \cdots \alpha_{s_1 - k}^1, \alpha_1^2, \cdots \alpha_{s_2 - k}^2, \cdots, \alpha_1^m, \cdots \alpha_{s_m - k}^m\},$$

e daí,

$$\mathcal{I}^{(k)} = \langle \alpha_i^j : i = 1, \cdots, s_j - k; j = 1, \cdots, m \rangle.$$

Como π é integrável, podemos tomar uma integral primeira qualquer de π para ser a coordenada f^0. Reescalemos, se necessário, os α_i^j para que as congruências sejam satisfeitas com df^0:

$$d\alpha_i^j \equiv -\alpha_{i+1}^j \wedge df^0 \mod (\mathcal{I}^{(s_j - i)}), i = 1, \cdots, s_j - 1.$$

Reenumere as 1-formas para que

$$s_1 \geq \cdots \geq s_m.$$

Considere o último sistema de derivadas não trivial $\mathcal{I}^{(s_1-1)}$. As 1-formas $\alpha_1^1, \cdots, \alpha_1^{r_1}$ formam uma base para esse sistema, onde $s_1 = \cdots = s_{r_1}$. Como

$$d\alpha_1^j \equiv -\alpha_2^j \wedge df^0 \mod (\mathcal{I}^{(s_1-1)}),$$

temos

$$d\alpha_1^j = -\alpha_2^j \wedge df^0 + \eta_1 \wedge \alpha_1^1 + \cdots \eta_{r_1} \wedge \alpha_1^{r_1},$$

onde η_i são 1-formas. Daí,

$$d\alpha_1^j \wedge \alpha_1^1 \wedge \cdots \alpha_1^{r_1} \wedge df^0 = 0.$$

Pelo fato de que $\mathcal{I}^{(s_j-1)} \subset \mathcal{I}$, temos por hipótese que $codim(Sing(\mathcal{I}^{(s_j-1)})) \geq 3$ para $j = 1, \cdots m$. Então, pelo teorema de Frobenius com singularidade (1.11), existem $f_1^1, \cdots, f_1^{r_1} \in \mathcal{O}_0^n$ tais que

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_1^{r_1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} df_1^1 \\ \vdots \\ df_1^{r_1} \end{pmatrix} + B \cdot df^0.$$

A matriz A é não-singular, pois os α_1^j formam uma base par $\mathcal{I}^{(s_1-1)}$ e elas são independentes de df^0. Portanto, podemos definir uma nova base $\widetilde{\alpha_i^j}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha_1^1} \\ \vdots \\ \widetilde{\alpha_1^{r_1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df_1^1 \\ \vdots \\ df_1^{r_1} \end{pmatrix} + A^{-1}B \cdot df^0,$$

onde,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha_1^1} \\ \vdots \\ \widetilde{\alpha_1^{r_1}} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_1^{r_1} \end{pmatrix}.$$

Agora, as coordenadas $f_2^j := -(A^{-1}B)_j$ são tais que as 1-formas $\widetilde{\alpha_1^j}$ tem a forma

$$\widetilde{\alpha_1^j} = df_1^j - f_2^j df^0 \ \ para \ \ j = 1, \cdots, r_1.$$

Diferenciando $\widetilde{\alpha_1^j}$, temos

$$d\widetilde{\alpha_1^j} = -df_2^j \wedge df^0.$$

Se existir alguma coordenada f_2^k que possa ser expressa como uma função das outras f_2^j's e f_1^j's, então existe alguma combinação linear das $\widetilde{\alpha_1^j}$'s cuja derivada exterior é zero módulo $\mathcal{I}^{(s_1-1)}$, o que é uma contradição. De fato, suponha $f_2^k = f_2^j + f_1^j$ e considere $\widetilde{\alpha_1^k} = df_1^k - f_2^k df^0$, então

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha_1^k} &= df_1^k - f_2^k df^0 \\ &= df_1^k - (f_2^j + f_1^j)df^0 \\ &= df_1^k - f_2^j df^0 - f_1^j df^0 \\ &= df_1^k + \widetilde{\alpha_1^j} - df_1^j - f_1^j df^0.\end{aligned}$$

Isto implica que,

$$(\widetilde{\alpha_1^k} - \widetilde{\alpha_1^j}) = df_1^k - df_1^j - f_1^j df^0.$$

De onde temos que

$$\begin{aligned}d(\widetilde{\alpha_1^k} - \widetilde{\alpha_1^j}) &= -df_1^j \wedge df^0 \\ &= \alpha_1^j \wedge df^0\end{aligned}$$

E daí,

$$d(\widetilde{\alpha_1^k} - \widetilde{\alpha_1^j}) \equiv 0 \mod (\mathcal{I}^{(s_1-1)}).$$

Isto é uma contradição, pois as α_1^j são linearmente independentes para $j = \{1, \cdots, r_1\}$. Assim, temos uma escolha válida de coordenadas. Pela prova do teorema A, temos que todas as coordenadas da j-ésima torre podem ser encontradas a partir de f_1^j e f^0. Pelo procedimento acima, todas as coordenadas nas primeiras r_1 torres podem ser encontradas.

Devemos encontrar as coordenadas para as outras torres, para isso, consideraremos os menores sistemas de derivadas na qual elas aparecem. Considere o menor inteiro k tal que $dim\mathcal{I}^{(s_1-k)} > kr_1$. Uma base para $\mathcal{I}^{(s_1-k)}$ é

$$\{\widetilde{\alpha_1^1}, \cdots, \widetilde{\alpha_k^1}, \cdots, \widetilde{\alpha_1^{r_1}}, \cdots, \widetilde{\alpha_k^{r_1}}, \alpha_1^{r_1+1}, \cdots, \alpha_1^{r_1+r_2}\},$$

onde, $\widetilde{\alpha_i^j} = df_i^j - f_{i+1}^j df^0$ para $j = 1, \cdots, r_1$ são as formas encontradas acima e α_1^j, $j = r_1 + 1, \cdots, r_1 + r_2$, são 1-formas que satisfazem as congruências (2.16) e são adaptadas para a flag derivada. Como

$$\mathcal{I}^{(s_1-k)} = \{\tilde{\alpha}_1^1, \cdots, \tilde{\alpha}_k^1, \cdots, \widetilde{\alpha_1^{r_1}}, \cdots, \widetilde{\alpha_k^{r_1}}, \alpha_1^{r_1+1}, \cdots, \alpha_{s_{r_1}-(s_1-k)}^{r_1+1}, \cdots, \alpha_1^{r_1+r_2}, \cdots, \alpha_{s_{r_1+r_2}-(s_1-k)}^{r_1+r_2}\},$$

os comprimentos dessas torres são $s_{r_1+1} = \cdots = s_{r_1+r_2} = s_1 - k + 1$. Defina, por conveniência, $f^j_{(k)} := (f^j_1, \cdots, f^j_k)$ para $j = 1, \cdots, r_1$. Por (2.16), $d\alpha^j_1 \equiv -\alpha^j_2 \wedge df^0 \mod (I^{(s_1-k)})$ para $j = r_1 + 1, \cdots, r_1 + r_2$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
d\alpha^j_1 &= -\alpha^j_2 \wedge df^0 + \mu^1_1 \wedge \tilde{\alpha}^1_1 + \cdots + \mu^1_k \wedge \tilde{\alpha}^1_k + \cdots + \mu^{r_1}_1 \wedge \widetilde{\alpha}^{r_1}_1 + \cdots + \\
&+ \mu^{r_1}_k \wedge \widetilde{\alpha}^{r_1}_k + \mu^{r_1+1}_1 \wedge \alpha^{r_1+1}_1 + \cdots + \mu^{r_1+r_2}_1 \wedge \alpha^{r_1+r_2}_1
\end{aligned}
$$

para 1-formas μ^j_i, e isto implica que

$$
\begin{aligned}
d\alpha^j_1 &= (-\alpha^j_2 - f^1_2\mu^1_1 - \cdots - f^1_{k+1}\mu^1_k - \cdots - f^{r_1}_2\mu^{r_1}_1 - \cdots - f^{r_1}_{k+1}\mu^{r_1}_k) \wedge df^0 + \\
&+ \mu^{r_1+1}_1 \wedge \alpha^{r_1+1}_1 + \cdots + \mu^{r_1+r_2}_1 \wedge \alpha^{r_1+r_2}_1 + \mu^1_1 \wedge df^1_1 + \cdots + \mu^1_k \wedge df^1_k + \cdots + \\
&+ \mu^{r_1}_1 \wedge df^{r_1}_1 + \cdots + \mu^{r_1}_k \wedge df^{r_1}_k.
\end{aligned}
$$

Assim, a condição de Frobenius

$$d\alpha^j_1 \wedge \alpha^{r_1+1}_1 \wedge \cdots \wedge \alpha^{r_1+r_2}_1 \wedge df^1_1 \wedge \cdots \wedge df^1_k \wedge \cdots \wedge df^{r_1}_1 \wedge \cdots \wedge df^{r_1}_k \wedge df^0 = 0,$$

é satisfeita para $j = r_1 + 1, \cdots, r_1 + r_2$.

Temos ainda que $codimSing(\mathcal{I}^{(s_1-k)}) \geq 3$, segue novamente do teorema de Frobenius com singularidades (1.11) que novas coordenadas holomorfas $f^{r_1+1}_1, \cdots, f^{r_1+r_2}_1$ podem ser encontradas tais que

$$\begin{pmatrix} \alpha^{r_1+1}_1 \\ \vdots \\ \alpha^{r_1+r_2}_1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} df^{r_1+1}_1 \\ \vdots \\ df^{r_1+r_2}_1 \end{pmatrix} + B \cdot df^0 + C \cdot \begin{pmatrix} df^1_{(k)} \\ \vdots \\ df^{r_1}_{(k)} \end{pmatrix}.$$

Como as congruências são definidas apenas até $\mod (\mathcal{I}^{(s_1-k)})$, o grupo de termos multiplicados pela matriz C pode ser eliminado pela adição de múltiplos apropriados $\overline{\alpha}^j_i = df^j_i - f^j_{i+1} \cdot df^0$ para $j = 1, \cdots, r_1$ e $i = 1, \cdots, k$. Daí a matriz B será alterada, deixando a equação:

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha}^{r_1+1}_1 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}^{r_1+r_2}_1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} df^{r_1+1}_1 \\ \vdots \\ df^{r_1+r_2}_1 \end{pmatrix} + \bar{B} \cdot df^0 .$$

Novamente, A deve ser não-singular, pois os α^j_1's são independentes $\mod (I^{(s_1-k)})$ e independe de df^0. Defina

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1^{r_1+1} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_1^{r_1+r_2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} df_1^{r_1+1} \\ \vdots \\ df_1^{r_1+r_2} \end{pmatrix} + A^{-1}\bar{B} \cdot df^0,$$

onde,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1^{r_1+1} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_1^{r_1+r_2} \end{pmatrix} := A^{-1} \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1^{r_1+1} \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_1^{r_1+r_2} \end{pmatrix}.$$

Então, teremos $f_2^j := -(A^{-1}\bar{B})_j$ para $j = r_1+1, \cdots, r_1+r_2$ de modo que $\tilde{\alpha}_1^j = df_1^j - f_2^j df^0$. Novamente, pelo teorema das formas normais de Goursat singulares, as coordenadas das torres $r_1+1, \cdots, r_1+r_2$ agora estão definidas à partir de f_1^j e f^0.

Para as torres que restam, as coordenadas são definidas analogamente à segunda maior torre.

$\square$

Capítulo 3

2-Formas Polinomiais e Classificação de Distribuição de grau 1 em $\mathbb{P}^n$

Neste capítulo consideramos 1-formas e 2-formas polinomiais homogêneas. No teorema D encontramos formas normais para um sistema formado por uma 2-forma polinomial fechada. Como consequência desse teorema, demonstramos o teorema E, que classifica distribuições não-integráveis de grau 1 em $\mathbb{P}^n$ com classe arbitrária. No caso integrável, em codimensão 1 tal classificação foi feita por Jouanolou em [13] e por Loray, Pereira e F. Touzet em [15] no caso de codimensão arbitrária.

O teorema D, que demonstraremos a seguir, generaliza o teorema de Medeiros [19] para o caso de 1-formas não-integráveis.

Teorema D. *Seja ω uma 2-forma polinomial homogênea, fechada e de grau 1 em $\mathbb{C}^n$ tal que, $\omega^k \neq 0$ e $\omega^{k+1} = 0$. Então existe um sistema de coordenadas $(x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_k, z)$ em $\mathbb{C}^n$, onde $z = (z_{2k+1}, \cdots, z_n)$ tal que:*

1. *ω depende somente de $(x_1, \cdots x_k, y_1, \cdots, y_k)$. Isto é,*

$$\omega = \sum_{i<j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j + \sum_{i<j} r_{ij} dy_i \wedge dy_j + \sum_{i,j} s_{ij} dx_i \wedge dy_j$$

   com $f_{ij}, r_{ij}, s_{ij} \in \mathbb{C}[x_1, \cdots x_k, y_1, \cdots, y_k]$, ou

2. $$\omega = d\Omega + dt_1 \wedge dh_1 + \cdots + dt_k \wedge dh_k,$$

   onde $\Omega \in \langle dx_1, \cdots, dx_k, dy_1, \cdots, dy_k \rangle$ é uma 1-forma quadrática, $t_1, \cdots, t_k$ são funções lineares nas variáveis $(x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_k)$ e $h_1, \cdots, h_k$ são funções quadráticas *em* $\mathbb{C}^n$.

Demonstração: Seja ω uma 2-forma polinomial de grau 1 tal que,

$$\omega^k \neq 0; \qquad \omega^{k+1} = 0.$$

Tomando $x_0 \in \mathbb{C}^n \setminus Sing(\omega)$, pelo clássico teorema de Darboux, podemos encontrar em uma vizinhança de x_0 coordenadas θ_i, α_i $i \in \{1, \cdots k\}$ tais que,

$$\omega = \theta_1 \wedge \alpha_1 + \cdots + \theta_k \wedge \alpha_k. \tag{3.1}$$

Pela linearidade de ω temos

$$\omega = \theta_1'(x_0) \wedge \alpha_1(x_0) - \theta_1(x_0) \wedge \alpha_1'(x_0) + \cdots + \theta_k'(x_0) \wedge \alpha_k(x_0) - \theta_k(x_0) \wedge \alpha_k'(x_0).$$

Podemos fazer a seguinte mudança de coordenadas linear,

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_0) = dx_1, \quad \cdots, \quad \alpha_k(x_0) = dx_k \\ \theta_1(x_0) = dy_1, \quad \cdots, \quad \theta_k(x_0) = dy_k \\ \alpha_1'(x_0) = \pi_1, \quad \cdots, \quad \alpha_k'(x_0) = \pi_k \\ \theta_1'(x_0) = \eta_1, \quad \cdots, \quad \theta_k'(x_0) = \eta_k. \end{aligned}$$

De onde obtemos,

$$\omega = \eta_1 \wedge dx_1 + \cdots + \eta_k \wedge dx_k + \cdots + \pi_1 \wedge dy_1 + \cdots + \pi_k \wedge dy_k. \tag{3.2}$$

Escolhendo

$$\begin{aligned} \eta_1 &= l_{12}dx_2 + \cdots + l_{1k}dx_k + m_{11}dy_1 + \cdots + m_{1k}dy_k + \overline{\eta_1}, \\ \eta_2 &= l_{21}dx_1 + \cdots + l_{2k}dx_k + m_{21}dy_1 + \cdots + m_{2k}dy_k + \overline{\eta_2}, \\ \vdots &= \vdots \\ \eta_k &= l_{k1}dx_1 + \cdots + l_{k-1k}dx_{k-1} + m_{k1}dy_1 + \cdots + m_{kk}dy_k + \overline{\eta_k}, \\ \pi_1 &= g_{12}dy_2 + \cdots + g_{1k}dy_k + h_{11}dx_1 + \cdots + h_{1k}dx_k + \overline{\pi_1}, \\ \pi_2 &= g_{21}dy_1 + \cdots + g_{2k}dy_k + h_{21}dx_1 + \cdots + h_{2k}dx_k + \overline{\pi_2}, \\ \vdots &= \vdots \\ \pi_k &= g_{k1}dy_1 + \cdots + g_{k-1k}dy_{k-1} + h_{k1}dx_1 + \cdots + h_{kk}dx_k + \overline{\pi_k}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $\overline{\eta_i}, \overline{\pi_i} \in \langle dz_{2k+1}, \cdots, dz_n \rangle$ e $g_{ij}, h_{ij}, l_{ij}, m_{ij}$ são funções lineares para $i, j \in \{1, \cdots, k\}$, teremos a seguinte expressão para ω:

$$\omega = \sum_{i<j}(l_{ji}-l_{ij})dx_i \wedge dx_j + \sum_{i<j}(g_{ji}-g_{ij})dy_i \wedge dy_j + \sum_{i,j}(h_{ji}-m_{ij})dx_i \wedge dy_j + \sum_i \overline{\eta_i} \wedge dx_i + \sum_i \overline{\pi_i} \wedge dy_i.$$

Por hipótese $\omega^{k+1} = 0$, com isso temos a seguinte identidade:

$$0 = [\textstyle\sum_{i,j} u_{ij}\overline{\pi_i} \wedge \overline{\pi_j} + \sum_{i,j} v_{ij}\overline{\eta_i} \wedge \overline{\eta_j} + \sum_{i,j} w_{ij}\overline{\eta_i} \wedge \overline{\pi_j}] \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k +$$
$$\textstyle\sum_i \overline{\eta_i} \wedge \overline{\pi_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\pi_k} \wedge dx_i \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k + \sum_{i,j} \overline{\eta_i} \wedge \overline{\eta_j} \wedge \overline{\pi_2} \wedge \cdots \wedge \overline{\pi_k} \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge$$
$$\wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k + \cdots + \textstyle\sum_i \overline{\eta_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\eta_k} \wedge \overline{\pi_i} \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \wedge dy_i,$$

onde u_{ij} e v_{ij} são produtos das $(l_{ji} - l_{ij})$ com as $(g_{ji} - g_{ij})$ e têm graus $k-2$. Observe que w_{ij} também tem grau $k-2$, porém são produtos das $(h_{ji} - h_{ij})$ com elas mesmas. Fazendo a multiplicação exterior desta identidade por $dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_i} \wedge \cdots dx_k$ obtemos,

$$\overline{\eta_i} \wedge \overline{\pi_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\pi_k} \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_k \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k = 0, \quad i \in \{1, \cdots k\}.$$

Da independência linear dos $dx_i's$ e dy_i's e do fato de que $\overline{\eta_i}, \overline{\pi_i} \in \langle dz_{2k+1}, \cdots, dz_n \rangle$ segue que,

$$\overline{\eta_i} \wedge \overline{\pi_1} \wedge \cdots \overline{\pi_k} = 0, \quad i \in \{1, \cdots, k\},$$

e daí,

$$\overline{\eta_i} = a_1^i \overline{\pi_1} + \cdots + a_k^i \overline{\pi_k}, \ \ a_j^i \in \mathbb{C} \ \ \forall i, j \in \{1, \cdots, k\}.$$

Portanto, se $\overline{\pi_i} = 0$ para todo $i, j \in \{1, \cdots, k\}$ teremos

$$\omega = \sum_{i<j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j + \sum_{i<j} r_{ij} dy_i \wedge dy_j + \sum_{i,j} s_{ij} dx_i \wedge dy_j, \tag{3.4}$$

onde f_{ij}, r_{ij} e s_{ij} são funções lineares. Como $d\omega = 0$, concluímos que

$$f_{ij}, r_{ij}, s_{ij} \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_k].$$

Suponha agora que $\overline{\pi_i} \neq 0$ para algum $i \in \{1, \cdots, k\}$. Sendo ω fechada, de (3.2) temos

$$0 = d\eta_1 \wedge dx_1 + \cdots + d\eta_k \wedge dx_k + d\pi_1 \wedge dy_1 + \cdots d\pi_k \wedge dy_k. \tag{3.5}$$

Fazendo a multiplicação exterior de (3.5) por $dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k$, ficamos com

$$d\eta_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots dx_k \wedge dy_1 \wedge \cdots dy_k = 0.$$

Daí,

$$d\eta_1 = \sigma_1 \wedge dx_1 + \cdots \sigma_k \wedge dx_k + \xi_1 \wedge dy_1 + \cdots \xi_k \wedge dy_k,$$

onde os $\sigma_{i's}$ e $\xi_{i's}$ são 1-formas constantes. Existe então uma 1-forma linear

$$\beta_1 \in \langle dx_1, \cdots, dx_k, dy_1, \cdots, dy_k \rangle,$$

tal que $d\eta_1 = d\beta_1$. Como $d(\eta_1 - \beta_1) = 0$, existe uma função quadrática f_1^1 em $\mathbb{C}^n$ tal que

$$\eta_1 = \beta_1 + df_1^1.$$

De maneira análoga, encontramos para os outros $\eta_i's$ e $\pi_i's$ funções quadráticas, f_i^1, f_i^2 em $\mathbb{C}^n$, e formas lineares β_i, μ_i, em $\langle dx_1, \cdots, dx_k, dy_1, \cdots, dy_k \rangle$ tais que,

$$\omega = (\beta_1 + df_1^1) \wedge dx_1 + \cdots + (\beta_k + df_k^1) \wedge dx_k + (\mu_1 + df_1^2) \wedge dy_1 + \cdots + (\mu_k + df_k^2) \wedge dy_k. \quad (3.6)$$

Note que,

$$\pi_i - \overline{\pi_i} = g_{i1} dy_1 + \cdots + g_{(i-1)k} dy_k + h_{i1} dx_1 + \cdots + h_{ik} dx_k, \quad \forall i \in \{1, \cdots, k\}.$$

Tomando as 1-formas μ_i's encontradas acima, defina uma 1-forma δ_i como

$$\delta_i = g_{i1} dy_1 + \cdots + g_{(i-1)k} dy_k + h_{i1} dx_1 + \cdots + h_{ik} dx_k - \mu_i, \quad \forall i \in \{1, \cdots, k\}.$$

Definida dessa maneira, $\delta_i \in \langle dx_1, \cdots, dx_k, dy_1, \cdots, dy_k \rangle, \ \forall i \in \{1, \cdots, k\}$. Como

$$\pi_i = \mu_i + df_i^2,$$

segue que

$$\overline{\pi_i} = df_i^2 - \delta_i. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.7) nas expressões η_i de (3.3) temos,

$$\eta_i = l_{i1} dx_1 + \cdots + l_{i(i-1)} dx_{(i-1)} + l_{i(i+1)} dx_{(i+1)} + \cdots + l_{ik} dx_k + m_{i1} dy_1 + \cdots + m_{ik} dy_k + a_1^i (df_1^2 - \delta_1) + \cdots + a_k^i (df_k^2 - \delta_k).$$

Tomando

$$\gamma_i = l_{i1}dx_1 + \cdots + l_{i(i-1)}dx_{(i-1)} + l_{i(i+1)}dx_{(i+1)} + \cdots + l_{ik}dx_k + m_{i1}dy_1 + \cdots + m_{ik}dy_k - a_1^i\delta_1 - \cdots - a_k^i\delta_k \in \langle dx_1, \cdots, dx_k, dy_1, \cdots, dy_k\rangle,$$

pela expressão (3.6), segue que

$$\omega = (\gamma_1 + a_1^1 df_1^2 + a_2^1 df_2^2 + \cdots + a_k^1 df_k^2) \wedge dx_1 + \cdots + (\gamma_k + a_1^k df_1^2 + a_2^k df_2^2 + \cdots + a_k^k df_k^2) \wedge dx_k + (\mu_1 + df_1^2) \wedge dy_1 + \cdots (\mu_k + df_k^2) \wedge dy_k.$$

Obtemos assim a seguinte expressão para ω,

$$\omega = \zeta + (-a_1^1 dx_1 - \cdots - a_1^k dx_k - dy_1) \wedge df_1^2 + \cdots + (-a_k^1 dx_1 - \cdots - a_k^k dx_k - dy_k) \wedge df_k^2,$$

onde $\zeta \in \langle dx_1, \cdots, dx_k, dy_1, \cdots, dy_k\rangle$ é uma 2-forma linear. Isto é,

$$\omega = \zeta + dt_1 \wedge df_1^2 + \cdots + dt_k \wedge df_k^2,$$

com $t_1, \cdots t_k$ lineares e dependentes apenas das variáveis $(x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_k)$. Note daí que

$$d\omega = d\zeta,$$

e como $d\omega = 0$, existe uma 1-forma $\Omega \in \langle dx_1, \cdots, dx_k, dy_1, \cdots, dy_k\rangle$ com coeficientes quadráticos, tal que $\zeta = d\Omega$. Assim

$$\omega = d\Omega + dt_1 \wedge df_1^2 + \cdots + dt_k \wedge df_k^2.$$

$\square$

Uma consequência importante desse teorema é que podemos classificar distribuição de grau 1 em $\mathbb{P}^n$, generalizando a classificação de Jouanolou [13] no caso integrável.

Teorema E. *Seja $\mathcal{F}$ uma distribuição de grau 1 em $\mathbb{P}^n$ e de classe k. Então, vale um dos ítens abaixo:*

i) Existe um mapa racional linear $\rho : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{2k+1}$ e uma distribuição $\mathcal{G}$ de grau 1 em $\mathbb{P}^{2k+1}$ tal que $\mathcal{F} = \rho^*\mathcal{G}$.

ii) Existe um mapa racional $\xi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}(1^{k+1}, 2^{k+1})$ tal que $\mathcal{F} = \xi^*\mathcal{G}_0$, onde $\mathcal{G}_0$ é a distribuição de contato canônica

$$\theta_0 = \frac{1}{3}\left[\sum_i (u_i dw_i - 2w_i du_i)\right],$$

em $\mathbb{P}(1^{k+1}, 2^{k+1})$.

iii) Existe um sistema de coordenadas $(x_0 : \cdots, x_k : y_0, \cdots : y_k : z)$ *e uma 1-forma quadrática* $\Theta \in \langle dx_0, \cdots, dx_k, dy_0, \cdots, dy_k\rangle$ *tal que* $\mathcal{F}$ *é induzida por* $i_R d\Theta + \xi^*\theta_0$, *onde* R *denota o campo radial e* $\xi^*\theta_0$ *é o pull-back da 1-forma de contato canônica em* $\mathbb{P}(1^{k+1}, 2^{k+1})$ *via um mapa racional* $\xi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}(1^{k+1}, 2^{k+1})$.

Demonstração: Seja θ a 1-forma polinomial homogênea em $\mathbb{C}^{n+1}$ de grau 2 e de classe k que induz $\mathcal{F}$. Considere a 2-forma polinomial $\omega = d\theta$. Como $\theta \wedge (d\theta)^k \neq 0$, derivando temos $(d\theta)^{k+1} \neq 0$. Temos ainda que $(d\theta)^{k+2} = 0$, ou seja, ω tem classe $2(k+1)$. Pelo teorema D, existem coordenadas $(x_0, \cdots, x_k, y_0, \cdots, y_k, z)$ onde $z = \{z_{2k+3}, \cdots, z_{n+1}\}$ tais que,

1)

$$\omega = \sum_{i<j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j + \sum_{i<j} r_{ij} dy_i \wedge dy_j + \sum_{i,j} s_{ij} dx_i \wedge dy_j, \tag{3.8}$$

com f_{ij}, r_{ij} e $s_{ij} \in \mathbb{C}[x_0, \cdots, x_k, y_0, \cdots, y_k]$, ou

2)

$$\omega = d\Theta + du_0 \wedge dh_0 + \cdots + du_k \wedge dh_k,$$

onde $\Theta \in \langle dx_0, \cdots, dx_k, dy_0, \cdots, dy_k\rangle$ é uma 1-forma quadrática, $u_0, \cdots, u_k$ são funções lineares nas variáveis $(x_0, \cdots, x_k, y_0, \cdots, y_k)$ e $h_0, \cdots, h_k$ são funções quadráticas em $\mathbb{C}^{n+1}$.

O caso 1) prova i). Suponhamos agora que estamos no caso 2). Por hipótese θ induz uma distribuição $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^n$, portanto a contração de θ com o campo de vetores radial é zero, ou seja,

$$i_R\theta = 0.$$

Do lema de Jouanolou (1.24),

$$i_R d\theta = 3\theta. \tag{3.9}$$

Note ainda que

$$i_R(du_i \wedge dh_i) = (i_R du_i) dh_i - du_i(i_R dh_i) = u_i dh_i - 2h_i du_i.$$

Utilizando a linearidade da contração segue que

$$i_R \sum_i (du_i \wedge dh_i) = \sum_i [(i_R du_i) dh_i - (i_R dh_i) du_i] = \sum_i (u_i dh_i - 2h_i du_i). \tag{3.10}$$

Fazendo então a contração da forma ω com R obtemos,

$$i_R\omega = i_R d\theta = i_R d\Theta + i_R(\sum_{i=1}^{k} du_i \wedge dh_i). \tag{3.11}$$

Substituindo (3.9) e (3.10) em (3.11) temos que,

$$\theta = \frac{1}{3}\left[i_R d\Theta + \sum_i (u_i dh_i - 2h_i du_i)\right].$$

Se $i_R d\Theta = 0$, então vale o caso $ii)$. De fato, nesse caso a forma θ é o pull-back da forma de contato canônica

$$\theta_0 = \frac{1}{3}\left[\sum_i (t_i dw_i - 2w_i dt_i)\right]$$

via o mapa racional

$$\xi : (x_0 : \cdots : x_k : y_0 : \cdots : y_k : z) \in \mathbb{P}^n \to (u_0 : \ldots, u_k, h_0, \ldots, h_k) \in \mathbb{P}(1^{k+1}, 2^{k+1}).$$

Caso a 1-forma $i_R d\Theta$ seja não nula temos que a distribuição é induzida por,

$$i_R d\Theta + \sum_i (u_i dh_i - 2h_i du_i) = i_R d\Theta + \xi^* \theta_0.$$

Isso mostra o caso $iii)$.

□

Considere o espaço de distribuições de codimensão 1 em $\mathbb{P}^n$, de grau d e classe k

$$\mathcal{D}(d,k,n) = \{\omega \in \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d+2)),\ \omega\wedge(d\omega)^k \neq 0,\ \omega\wedge(d\omega)^{k+1} = 0,\ cod(sing(\omega)) \geq 2\}.$$

Temos que $\mathcal{D}(d,k,n)$ é uma subvariedade algébrica de $\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d+2))$. Uma consequência da classificação acima é o:

Corolário *Se $k \geq 1$, então o espaço $\mathcal{D}(1,k,n)$ tem 3 componentes irredutíveis.*

Em [1] Araújo, Corrêa e Massarenti ,em particular, estudam a geometria dos espaços $\mathcal{D}(0,k,n)$.

Capítulo 4

Teorema de Darboux Generalizado Singular

Neste capítulo faremos um breve estudo sobre sistemas k-simpléticos singulares com repeito a uma folheação $\mathcal{F}$. Demonstraremos o teorema de Darboux generalizado singular, ou seja, encontraremos uma forma normal para descrever um sistema k-simplético singular.

Seja $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{C}^n, 0)$, vimos que o espaço característico de α é dado por

$$\mathcal{A}(\alpha) = \{X \in \mathfrak{X}(n); i_X\alpha = 0\}.$$

O *sistema característico de* α, denotado por $\mathcal{C}(\alpha)$, é o dual de $\mathcal{A}(\alpha)$ definido por

$$\mathcal{C}(\alpha) = \{\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0); \omega(\mathcal{A}(\alpha)) = 0\}.$$

Definição 4.1 *Um sistema diferencial gerado por k 2-formas, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \Omega^2(\mathbb{C}^N, 0)$, é dito k-simplético com respeito a uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão r, se satisfaz:*

1. $\mathcal{C}_x(\alpha_1) \cap \cdots \cap \mathcal{C}_x(\alpha_k) = \{0\}$ *para todo* $x \in (\mathbb{C}^N, 0) \setminus \bigcup_{i=1}^k Sing(\alpha_i)$;
2. $\alpha_i(u, v) = 0$*, para todos u, v campos de vetores tangentes a $\mathcal{F}$.*

Em [2, pág.148] encontramos o seguinte teorema de Darboux generalizado sem singularidades:

Teorema 4.2 *Seja $\mathcal{I} = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_k \rangle$ sistema k-simplético em $(\mathbb{C}^{n(k+1)}, 0)$ com respeito a uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão n, onde as $\alpha_i' s$ são 2-formas fechadas não-singulares. Então, existem germes de funções holomorfas $g_{ji}, f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{O}_0^n$, tais que*

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} dg_{ji} \wedge df_i, 1 \leq j \leq k.$$

Cerveau, em [7], demonstrou para $k = 1$ uma versão singular do teorema de Darboux. Vamos, inspirados no trabalho de Cerveau, demonstrar o teorema de Darboux generalizado singular para sistemas k-simpléticos.

Teorema F. *Seja $\mathcal{I} = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_k \rangle$ um sistema k-simplético em $(\mathbb{C}^{n(k+1)}, 0)$ com respeito a uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão n, onde as $\alpha_i' s$ são 2-formas fechadas. Suponha que*

1. *Seja r_j a classe de α_j, então $\alpha_j^{r_j}$ é decomponível em 1-formas holomorfas e $codim(Sing(\mathcal{C}(\alpha_j^{r_j}))) \geq 3$;*

2. *$codim(Sing(\mathcal{F})) \geq 3$ e $\mathcal{F}$ induzida por uma n-forma decomponível.*

Então, existem germes de funções holomorfas $g_{ji}, f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{O}_0^n$, tais que

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} dg_{ji} \wedge df_i, 1 \leq j \leq k.$$

Demonstração: Como $codim(Sing(\mathcal{F})) \geq 3$ então, pelo teorema de Malgrange, $\mathcal{F}$ é dada por $dF_1, \cdots, dF_n$, com $F_i \in \mathcal{O}_0$. Como $\mathcal{F}$ está contida em $\mathcal{C}(\alpha_i) = \langle \alpha_i^{r_i} \rangle$ para todo $i = 1, \cdots, k$ e $\alpha_i^{r_i}$ é decomponível, integrável e $codim(Sing(\alpha_i^{r_i})) \geq 3$, segue novamente do teorema de Malgrange que

$$\alpha_j = \sum_{s=1}^{r_j} a_{is}^j dG_{js} \wedge dF_s, a_{is}^j \in \mathcal{O}_0. \tag{4.1}$$

Isto é,

$$\mathcal{C}(\alpha_j) = \langle dG_{j_1}, \cdots, dG_{j_{r_j}}, dF_1, \cdots, dF_n \rangle.$$

Logo,

$$\alpha_j^{r_j} = A_j dG_{j_1} \wedge \cdots dG_{j_{r_j}} \wedge dF_1 \wedge \cdots dF_n.$$

Como $d\alpha_j = 0, \forall j = 1, \cdots, k$, temos de (4.1) que

$$0 = d\alpha_j = \sum_{s=1}^{r_j} (da_{is}^j) \wedge dG_{js} \wedge dF_s. \tag{4.2}$$

Multiplicando (4.2) por

$$dG_{j_1} \wedge \cdots \widehat{dG_{js}} \wedge \cdots dG_{jr_j} \wedge dF_1 \wedge \cdots \widehat{dF_s} \wedge \cdots dF_{r_j},$$

obtemos a seguinte identidade,

$$0 = da^j_{is} \wedge dG_{j_1} \wedge \cdots dG_{j_{r_j}} \wedge dF_1 \wedge \cdots dF_{r_j}.$$

Segue de [20] que existem funções b^j_{is} em $\mathbb{C}^{r_j+n}$ tais que

$$a^j_{is} = b^j_{is} \circ [G^j, F],$$

onde $[G^j, F] := (G_{j_1}, \cdots, G_{j_{r_j}}, F_1, \cdots, F_{r_j})$. Isso mostra que

$$\alpha_j = [G^j, F]^* \widetilde{\alpha_j},$$

onde $\widetilde{\alpha_j} = \sum_{s=1}^{r_j} b^j_{is}(x) dx_{j_s} \wedge dx_s, x \in \mathbb{C}^{r_j+n}$. Como

$$\alpha_j^{r_j} = A_j([G^j, F]) dG_{j_1} \wedge \cdots dG_{j_{r_j}} \wedge dF_1 \wedge \cdots dF_n$$

e $A_j([G^j, F])$ nunca se anula, temos que

$$\widetilde{\alpha_j^{r_j}} = A_j(x) dx_{j_1} \wedge \cdots dx_{j_{r_j}} \wedge dx_1 \wedge \cdots dx_n.$$

Por hipótese, $\mathcal{C}(\alpha_1^{r_1}) \cap \cdots \cap \mathcal{C}(\alpha_k^{r_k}) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^{n(k+1)} \setminus \bigcup_j Sing(\alpha_j)$, de onde se conclui que $\mathcal{C}(\widetilde{\alpha_1^{r_1}}) \cap \cdots \cap \mathcal{C}(\widetilde{\alpha_k^{r_k}}) = 0$. Portanto, segue do teorema (4.2) que

$$\widetilde{\alpha_j} = \sum_{i=1}^{r_j} dp_{ji} \wedge dq_i.$$

Logo,

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} dg_{ji} \wedge df_i,$$

onde $g_{j_i} = p_{ji} \circ ([G^j, F])$ e $f_i = g_i \circ ([G^j, F])$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] C. Araújo; M. Corrêa; A. Massarenti. *Codimension one Fano distributions on Fano manifold.* Communications in Contemporary Mathematics, (2017), DOI:10.1142/502219199717500584.

[2] A. Awane, M. Goze. *Pfaffian Systems, k-Sypletic Systems*; Springer Netherlands, (2000).

[3] R. L. Bryant; S.S. Chern; R.B. Gardner; H.L. Goldschmidt; P. A. Griffiths. *Exterior differential forms.* Mathematical Sciences Research Institute publications; vol. 18, Springer-Verlag, (1991).

[4] L. Bushnell; D. Tilbury; S. Sastry. *Extended Goursat normal form with applications to nonholonomic motionplanning.* In Proc. IEEE Conf. Decision Control, (1993).

[5] É.Cartan. *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre.* Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 27 (1910), p. 109-192, Elsevier. http://eudml.org/doc/81284.

[6] É. Cartan. *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff.* Ann. Sci. École Normale Supérieure, Sér. 3, 16 (1899), p. 239-332.

[7] D. Cerveau. *Une application du théorème de Frobenius singulier: le théorème de Darboux singulier*. C. R. Acad Sci. Paris Sér. A-B 288 (1979), no.22, A1021-A1024.

[8] M. Corrêa; L.G. Maza; M. G. Soares. *Algebraic integrability of polynomial differential r-forms. Journal of Pure and Applied Algebra (Print), v. 215, p. 2290-2294, (2011).*

[9] M. Corrêa ; L. G. Maza. *Engel Theorem through singularities. Bulletin des Sciences Mathématiques, vol. 140, (2016).*

[10] F. Engel. *Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen.* Berichte Verhandlungen der Koniglich Sachsischen Gesellshaft der Wissenshaften Mathematisch-Physikalische Klasse, Leipzig, 41,42:157-176;192-207, (1889, 1890).

[11] C. Godbillon. *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique.* Hermann, Paris (1969).

[12] E. Goursat. *Leçons sur le Problème de Pfaff.* Hermann (1922).

[13] J-P. Jouanolou. *Equations de Pfaff algébriques. Lectures Notes in Mathematics,* 708. Springer, Berlin, (1979). 3, 3

[14] A. Lins Neto. *Componentes irredutíveis dos espaços de folheações*. Publicações Matemáticas do IMPA. Rio de Janeiro, (2007). 26o Colóquio Brasileiro de Matemática.

[15] F. Loray, J. Vitório Pereira, and F. Touzet, *Foliations with trivial canonical bundle on Fano 3-folds*, Math. Nachr. 286 (2013), no. 8-9, 9210-940. 3

[16] B. Malgrange. *Frobenius avec singularités - 1. codimension 1.* Public. Sc. I.H.E.S., 46 (1976), pp. 163-173.

[17] B. Malgrange. *Frobenius avec singularités - 2. Le cas général.* Inventiones Math., 39 (1977), 67-89.

[18] J. Martinet. *Sur les singularités des formes différentielles.* Annales de L'institut Fourier: tome 20, no.1 (1970), p.95-178.

[19] A.S. de Medeiros. *Singular foliations and differential p-forms.* Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques, Sér.6, 9 no.3 (2000), p.451-466. 3

[20] R. Moussu; J.C. Tougeron. *Fonctions coomposées analytiques et difféntiables.* Comptes rendus; C. R. Acad. Scie., Paris, vol. 282, série A, (1976), p.1237-1240.

[21] P. Nurowski. *Differential equations and conformal structures;* arXiv:math/0406400v3, 16 Aug (2006).

[22] W. Pasillas-Lépine and W. Respondek. *Contact systems and corank one involutive subdistributions,* Acta Appl. Math. 69 (2001), 105-128.

[23] S. Sastry. *Nonlinear systems : analysis, stability, and control*, Lecture Note in Interdisciplinary and App.lied Mathematics. Springer, Verlag, vol. 10. (1999).

[24] D. Tilbury and S. Sastry. *On Goursat normal forms, prolongations, and control systems.* Proccedings of 1994 33rd IEEE conference on decision and control, Lake Buena Vista, FL, (1994), pp.1797-1802 vol.2.

[25] M. Zhitomirskii. *Typical singularities of differential 1-forms and Pfaffian equations*, American Mathematical Society, series: Translations of mathematical monographs 113, (1992).