



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

MONOTONICIDADE DA ÁREA PARA SUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE

Aída Betsabé Díaz Reyna

Belo Horizonte - MG
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Aída Betsabé Díaz Reyna
Orientador:

Prof. Ezequiel Rodrigues Barbosa.

MONOTONICIDADE DA ÁREA PARA SUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO COM
CURVATURA MÉDIA CONSTANTE

Dissertação submetida à banca examinadora,
designada pelo Programa de Pós-Graduação em
Matemática da UFMG, como requisito parcial
para a obtenção do título de mestre em Mate-
mática.

Belo Horizonte - MG
Dezembro - 2017

Agradecimentos

Agradeço a Deus.

Aos meus pais, irmã e tios, sem os quais nada disso teria sido possível. Obrigada por sempre estar ao meu lado, tanto nos momentos difíceis quanto nos momentos de alegria. A Renato, pela paciência, força e conselhos.

Ao meu orientador: Ao Ezequiel pela valiosa orientação, pelas boas discussões e sugestões que enriqueceram este trabalho, as várias horas de sábios conselhos e acompanhamento nas horas críticas. E a todos professores que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Um muito obrigada a todos os meus amigos, dentre os quais não posso deixar de citar o Carlos, o Joel, o Manuel, o Tauan e o Victor.

Ao CNPq pela bolsa de mestrado que possibilitou meus estudos.

Resumo

Nós estudamos superfícies tipo-espaço compactas com curvatura média constante no espaço tridimensional de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 . Quando a fronteira da superfície é uma curva plana, nós obtemos uma estimativa para a altura da superfície medida desde o plano Π que contem a fronteira. Nós mostramos que esta altura não pode ser maior que $\frac{A|H|}{2\pi}$ sobre Π , onde A e H denotam respectivamente, a área da superfície que fica acima de Π e a curvatura média da superfície. Além disso, esta estimativa é atingida se, e somente se, a superfície é um domínio planar (com $H = 0$) ou uma tampa hiperbólica (com $H \neq 0$).

Abstract

We study compact spacelike surfaces with constant mean curvature in the three-dimensional Lorentz-Minkowski space \mathbb{L}^3 . When the boundary of the surface is a planar curve, we obtain an estimate for the height of the surface measured from the plane Π that contains the boundary. We show that this height cannot extend more than $\frac{A|H|}{2\pi}$ above Π , where A and H denote respectively, the area of the surface that lies over Π and the mean curvature of the surface. Moreover, this estimative is attained if and only if the surface is a planar domain (with $H = 0$) or a hyperbolic cap (with $H \neq 0$).

Sumário

1	Preliminares	1
1.1	Métricas Riemannianas, conexões e curvaturas	1
1.2	Imersão e mergulho	5
1.3	Operadores diferenciáveis	7
1.4	Variedades Semi-Riemannianas	12
2	Espaço de Lorentz-Minkowski	20
2.1	Conceitos básicos	20
2.2	Notações e preliminares	21
2.3	O princípio da tangência e suas consequências	28
2.4	Prova do teorema	31

Introdução

Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável \mathcal{M} com um tensor métrico definido positivo em todo $p \in \mathcal{M}$. Se nós não exigimos que o tensor métrico g seja definido positivo, então para cada $p \in \mathcal{M}$ podem existir subespaços $W \subset T_p\mathcal{M}$ onde $g|_W$ seja definido negativo. Portanto, para cada $p \in \mathcal{M}$ é natural definir o inteiro $\nu \geq 0$ da seguinte forma:

$$\nu = \max\{i : \exists W \subset T_p\mathcal{M} \text{ subespaço tal que } g|_W \text{ é definido negativo com } \dim W = i\}.$$

Dito inteiro chama-se o índice da métrica no ponto p . Uma variedade semi-Riemanniana é então uma variedade diferenciável \mathcal{M} com um tensor métrico indefinido não degenerado e com um índice constante para todo $p \in \mathcal{M}$. A geometria Riemanniana é o caso no qual $\nu = 0$. No caso no qual $\nu = 1$ chama-se geometria Lorentziana.

A motivação para o estudo desta geometria foi desenvolvida no início do século XX pelo físico alemão Albert Einstein, um dos cientistas mais notáveis e brilhantes de todos os tempos. A Relatividade transformou-se em uma das teorias mais importantes da Física, tais como a unidade do espaço e do tempo, da matéria e da energia e a equivalência entre as forças de gravidade e os efeitos da aceleração de um sistema.

De acordo com Einstein, tudo o que existe no universo se movimenta a uma velocidade distribuída entre o tempo e o espaço, sendo que o tempo corre com velocidade máxima para um corpo parado; já quando o corpo se coloca em movimento e ganha velocidade no espaço, a velocidade do tempo diminui, passando mais devagar para ele. Ou seja, tempo e espaço são relativos e estão extremamente ligados um ao outro. A primeira parte da teoria de Einstein, a teoria da relatividade Especial, foi elaborado em 1905. Segundo essa teoria, existe uma contração no comprimento dos corpos: quanto mais rápido um objeto se movimenta, mais curto ele fica. Esta teoria deduz que o comprimento, a massa e o tempo de um objeto variam de acordo com a sua velocidade.

A geometria do espaço-tempo da relatividade especial foi proposta por Minkowski no ano 1907, poderia ser melhor entendida em um espaço de quatro dimensões, conhecido desde então como espaço-tempo de Minkowski, onde tempo e espaço não são entidades separadas, mas misturadas em um espaço-tempo de quatro dimensões, e no qual a geometria de Lorentz da relatividade especial pode ser muito bem representada. O espaço resultante foi chamado de espaço de Minkowski e é uma variedade de Lorentz plana, sem curvatura. Porém, no ano de 1915, o físico alemão desenvolveu a segunda parte de sua teoria: a teoria da Relatividade Geral, na qual usou a constatação da teoria anterior para redefinir a gravidade, examinando a influência do espaço e do tempo na atração entre os corpos. A teoria da Relatividade Geral considera os objetos que se movimentam de forma acelerada um em relação ao outro, para poder explicar as aparentes contradições entre as leis da relatividade e a lei da gravidade. Nesta nova teoria o espaço-tempo é uma variedade de Lorentz genérica, aonde a presença da matéria curva o espaço-tempo através de uma relação dada na equação de Einstein e os efeitos desta curvatura são os efeitos usualmente atribuídos à força da gravidade.

Nas últimas décadas, vem sendo crescente o interesse pelo estudo das hipersuperfícies tipo-espaço imersas em ambientes espaço-tempo. Em verdade é bem conhecido que hipersuperfícies com curvatura média constantes são soluções da primeira ordem para o problema isoperimétrico, tanto no caso em que o ambiente é uma variedade Riemanniana ou Lorentziana. No caso Riemanniano, estas hipersuperfícies foram estudadas em propriedades desde o início da geometria diferencial. Já o caso Lorentziano, tem atraído atenção de um grande número de pesquisadores tanto na área da física como da

matemática. Do ponto da vista da física (Veja [6, 8, 9, 10, 12]), as hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante identicamente nula são soluções para o problema de Cauchy associado à equação de Einstein

$$R_{\alpha\beta}(g) - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R(g) = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

onde $R_{\alpha\beta}$ e R são respectivamente o tensor de Ricci e curvatura escalar de g e $T_{\alpha\beta}$ é o tensor do momento de energia da matéria. E no caso em que a curvatura média é diferente de zero, são normalmente usadas para compreender o comportamento das ondas gravitacionais. Por outro lado, do ponto de vista da matemática as hipersuperfícies tipo-espaço no espaço de Lorentz-Minkowski também desempenham um interessante papel devido às suas boas propriedades tipo-Bernstein. Lembremos que o problema de Bernstein para hipersuperfícies maximais no espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^{n+1} foi introduzido por Calabi [6], quem propôs o estudo da equação de hipersuperfície maximal em \mathbb{L}^{n+1} . Para $n \leq 4$, Calabi encontrou que a única equação inteira para o problema são as funções afim. Depois Cheng e Yau [7] estenderam esses resultados ao caso general n -dimensional e a sua versão paramétrica, mostrando que a única hipersuperfície maximal completa em \mathbb{L}^{n+1} são os hiperplanos tipo-espaço. Para o caso de curvatura média constante não nula, alguns outros autores construíram alguns exemplos não lineares de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante não nula.

Este tipo de hipersuperfícies foram estudadas pela primeira vez no exemplo de espaço-tempo mais simples: o espaço de Lorentz-Minkowski.

É útil e interessante ter ditos conceitos em mente no momento de ler as definições matemáticas já que todas estas definições derivam de conceitos físicos.

Neste trabalho faremos um primeiro capítulo dedicado a fazer menção dos conceitos e ferramentas principais entre eles: métricas Riemannianas, conexões, curvaturas, isometria, teorema de Levi-Civita, imersões, mergulhos, operadores diferenciáveis, princípio do máximo fraco, princípio de comparação, lema de Hopf, princípio do máximo forte e variedades semi-Riemannianas. Já no segundo capítulo iremos colocar os resultados principais do trabalho. Isto é, sobre espaços de Lorentz-Minkowski, hipersuperfícies tipo-espaço compactas com curvatura média constante, estabelecendo uma fórmula de fluxo para este tipo de superfícies. Além disso iremos definir o conceito de hiperplanos hiperbólicos e também vamos a desenvolver o princípio da tangencia e assim obteremos uma estimativa da altura de um grafo com curvatura média constante em função do diâmetro do domínio. Finalmente para concluir este capítulo iremos falar de resultados mais relevantes os quais estão baseados em ferramentas como o princípio de tangencia o qual diz:

Princípio da tangencia *Sejam \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 duas hipersuperfícies tipo-espaço de \mathbb{L}^{n+1} com a mesma curvatura média constante (respeito à normal unitária futuro-dirigida). Suponha que são tangentes em um ponto interior comum p e que \mathcal{M}_1 está acima de \mathcal{M}_2 perto de p , então elas coincidem em uma vizinhança de p . O mesmo acontece se p é um ponto comum no bordo com a hipótese adicional que $\partial\mathcal{M}_1$ e $\partial\mathcal{M}_2$ são tangentes em p .*

As equações de Gauss e Weingarten as quais são respectivamente as seguintes

$$\nabla_X^0 Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y \rangle N$$

e

$$A(X) = -\nabla_X^0 N$$

para todos os campos de vetores tangentes $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, onde $A : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$ denota o operador de Weingarten de \mathcal{M} com respeito à escolha de uma orientação temporal N para \mathcal{M} . E além disso outra ferramenta importante será a fórmula de fluxo

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \langle \nu, a \rangle ds = -nH \text{vol}(\partial\mathcal{M}),$$

onde ν é o vetor co-normal apontando para o interior ao longo do bordo de \mathcal{M} , sendo \mathcal{M} uma hipersuperfície tipo-espaço, H é curvatura média (constante) e $a \in \mathbb{L}^{n+1}$ um vetor fixo.

Entre os resultados mais semelhantes temos o trabalho de Bartnik e Simon no qual eles obtiveram uma estimativa similar a $h \leq \frac{|H|A}{2\pi}$ no contexto dos gráficos.

A monotonicidade deles mede a variação da área da superfície que encontra-se no domínio

$$S_r(p) = \{x \in \mathbb{L}^3 : \langle x - p, x - p \rangle < r^2\}.$$

Eles provaram que se o bordo de \mathcal{M} satisfaz:

$$\partial\mathcal{M} \cap S_r(p) = \emptyset,$$

então tem-se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{área}(\mathcal{M} \cap S_r(p))}{r^2} = \pi.$$

Esta abordagem é baseada na fórmula de co-área de Federer para a função altura, uma fórmula que mede o fluxo da superfície através do bordo, junto com a clássica desigualdade isoperimétrica no plano. Mediante estas ferramentas iremos expor como resultado principal do trabalho o seguinte teorema.

Teorema *Seja $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma imersão tipo-espaço de uma superfície compacta com o bordo contido em um plano Π e com curvatura média constante H . Se h denota a altura de \mathcal{M} com respeito a Π , então temos:*

$$h \leq \frac{|H|A}{2\pi}, \tag{1}$$

onde A é a área da região de \mathcal{M} no plano Π . A igualdade ocorre se, e somente se \mathcal{M} é um domínio planar ($H = 0$) ou uma tampa hiperbólica ($H \neq 0$).

Preliminares

Neste capítulo estabeleceremos a notação a ser usadas e recordaremos alguns conceitos e fatos básicos, necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. Sendo assim a prova de alguns resultados não será feita, mas em todo o texto ficará clara a referência para obter tais demonstrações.

1.1 Métricas Riemannianas, conexões e curvaturas

Definição 1 Um subconjunto $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ é uma **variedade diferenciável** de dimensão k se, para cada $p \in \mathcal{M}$, existem conjuntos $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ e $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ e uma função continuamente diferenciável $f : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{V}$ tais que

1. $p \in \mathcal{V}$;
2. $f(\mathcal{U}) = \mathcal{V} \cap \mathcal{M}$, f é injetiva e $f^{-1} : \mathcal{V} \cap \mathcal{M} \mapsto \mathcal{U}$ é contínua;
3. para cada $q \in \mathcal{U}$, o Jacobiano de $f'(q)$ tem posto k .

A função f chama-se um sistema de coordenadas ao redor de p .

Exemplo 1 A esfera $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2} = 1\}$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞ e dimensão n .

Exemplo 2 O espaço projetivo real $P^n(\mathbb{R})$, isto é, o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ pela relação de equivalência:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$$

é uma variedade diferenciável de classe C^∞ de dimensão n .

Observação 1 A definição implica então que uma variedade diferenciável de dimensão k é um conjunto tal que, localmente é a imagem de uma função definida num conjunto aberto \mathcal{U} em \mathbb{R}^k e com valores em \mathbb{R}^n . A condição que a imagem $f(\mathcal{U})$ é um conjunto da forma $\mathcal{V} \cap \mathcal{M}$ ao redor de cada ponto de \mathcal{M} estabelece uma coberta natural para \mathcal{M} de conjuntos abertos, os quais formam o que é chamado de atlas.

Definição 2 Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável \mathcal{M}^n é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in \mathcal{M}^n$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p \mathcal{M}^n$, que varia diferencialmente no seguinte sentido, se $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}^n$ é um sistema local de coordenadas em torno de $p \in \mathcal{M}^n$, com $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = q \in \varphi(\mathcal{U})$, então

$$g_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_q \right\rangle_q$$

é uma função diferenciável em $\varphi(\mathcal{U})$.

Exemplo 3 O exemplo quase trivial vem dado por $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ identificada com $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. A métrica vem dada por

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Observação 2

- i. Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par X, Y de campos de vetores diferenciáveis em um aberto V de \mathcal{M}^n , a função $\langle X, Y \rangle$ é diferenciável em V .
- ii. As funções g_{ij} são chamadas coeficientes da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathcal{M}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 3 Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana*.

Exemplo 4 Seja $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, e para cada $p \in \mathcal{M}$ temos que $T_p \mathcal{M}$ é isomorfo a \mathbb{R}^n . Assim se (x^1, \dots, x^n) é um sistema de coordenadas usuais do \mathbb{R}^n , então

$$\langle u_p, v_p \rangle = \sum_i u^i v^i,$$

define um produto interno em \mathbb{R}^n , onde $u_p = \sum_i u^i \partial_i$ e $v_p = \sum_j v^j \partial_j$. Desta maneira, \mathbb{R}^n munido como esta métrica nos dá uma variedade Riemanniana chamada espaço Euclidiano n -dimensional.

Exemplo 5 A esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}(1) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ é uma variedade Riemanniana. Com efeito, basta definirmos a métrica g como $g(u, v)_p = \langle u, v \rangle$ onde $u, v \in T_p \mathbb{S}^{n-1}$.

Exemplo 6 O espaço hiperbólico \mathcal{H}^n . Considere a variedade diferenciável $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^n$, com a carta $i : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{U}$. Dado $p \in \mathcal{U}$, $p = (x_1, \dots, x_n)$, sejam $v, w \in T_p \mathcal{U} = \mathbb{R}^n$. Definimos

$$h_p(v, w) = \frac{1}{x_n^2} \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Vê-se que $(\mathcal{U}, h) := \mathcal{H}^n$ é uma variedade riemanniana denominada espaço hiperbólico.

Definição 4 Sejam $(\mathcal{M}^n, g_{\mathcal{M}})$ e $(\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ variedades Riemannianas de dimensão n . Um difeomorfismo $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{N}^n$ é chamado uma *isometria* se

$$g_{\mathcal{M}}(u, v)_p = g_{\mathcal{N}}(df_p(u), df_p(v))_{f(p)}, \quad (1.1)$$

para todo $p \in \mathcal{M}$, $u, v \in T_p\mathcal{M}^n$.

Definição 5 *Sejam \mathcal{M}^n e \mathcal{N}^n variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{N}^n$ é uma **isometria local** em $p \in \mathcal{M}^n$ se existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^n$ de p tal que $f : \mathcal{U} \rightarrow f(\mathcal{U})$ é um difeomorfismo satisfazendo (1.1). Dizemos que a variedade Riemanniana \mathcal{M}^n é localmente isométrica à variedade Riemanniana \mathcal{N}^n se para todo $p \in \mathcal{M}^n$ existe uma vizinhança $\mathcal{U}_p \subset \mathcal{M}^n$ de p e uma isometria local $f : \mathcal{U} \rightarrow f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{N}^n$.*

Definição 6 *Seja \mathcal{M}^n uma variedade diferenciável. O **fibrado tangente** de \mathcal{M}^n é o espaço $T\mathcal{M}^n = \{(p, v) : p \in \mathcal{M}^n, v \in T_p\mathcal{M}^n\} = \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}^n} T_p\mathcal{M}^n$, onde \bigsqcup é a união disjunta. $T\mathcal{M}^n$ possui estrutura de variedade diferenciável. Seja $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$ a estrutura diferenciável de \mathcal{M}^n . Indicaremos por $\{x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha\}$ as coordenadas de \mathcal{U}_α e por $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ o referencial local associado. Para cada α , defina*

$$\Phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathcal{M}^n,$$

por

$$\Phi_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) = \left(\varphi_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right).$$

Definição 7 *Uma **conexão afim** ∇ em uma variedade diferenciável é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M}) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y, \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades

1. $\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(fY)$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ e $f, g \in C^\infty(\mathcal{M}^n)$.

Definição 8 *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana \mathcal{M}^n é **compatível com a métrica** se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

Definição 9 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável \mathcal{M}^n é dita **simétrica** quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todos $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, onde $[X, Y]$ denota o colchete de Lie dos campos X e Y .

Em um sistema coordenado (\mathcal{U}, φ) , se $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, o fato de ser ∇ simétrica implica que para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad (1.2)$$

Teorema 1 (Levi-Civita) *Dada uma variedade Riemanniana \mathcal{M}^n , com métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, existe uma única conexão afim ∇ em \mathcal{M}^n , denominada conexão de Levi-Civita, ou conexão Riemanniana, satisfazendo as condições*

1. ∇ é simétrica;
2. ∇ é compatível com a métrica Riemanniana g .

Definição 10 *Sejam \mathcal{M}^n uma variedade Riemanniana com métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, conexão Riemanniana ∇ e um sistema local de coordenadas (\mathcal{U}, φ) . Denominamos as funções Γ_{ij}^k definidas em \mathcal{U} por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ de coeficientes da conexão ∇ em \mathcal{U} ou os símbolos de Christoffel da conexão. Um cálculo simples nós permite concluir que*

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\},$$

onde $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$.

Como a matriz (g_{km}) admite inversa (g^{km}) , teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \quad (1.3)$$

A equação (1.3) é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij} . Assim, para o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , teremos $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Definição 11 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana \mathcal{M}^n é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ uma aplicação de $R(X, Y) : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

para todo $Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ onde ∇ é a conexão Riemanniana de \mathcal{M}^n .

Observe que se $\mathcal{M}^n = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Em termos de um sistema de coordenadas $(\mathcal{U}, x_1, \dots, x_n)$ em torno de $p \in \mathcal{M}^n$. Seja $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Como $[X_i, X_j] = 0$, obteremos

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k.$$

E ainda, sendo $\nabla_{X_i} X_k = \sum_l \Gamma_{ik}^l X_l$ e $\nabla_{X_j} X_k = \sum_l \Gamma_{jk}^l X_l$, teremos

$$\begin{aligned}
R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k = \sum_l \nabla_{X_i} \Gamma_{jk}^l X_l - \sum_l \nabla_{X_j} \Gamma_{ik}^l X_l \\
&= \sum_l [X_i(\Gamma_{jk}^l)X_l + \Gamma_{jk}^l \nabla_{X_i} X_l] - \sum_l [X_j(\Gamma_{ik}^l)X_l + \Gamma_{ik}^l \nabla_{X_j} X_l] \\
&= \sum_l \left[X_i(\Gamma_{jk}^l)X_l + \Gamma_{jk}^l \sum_s \Gamma_{il}^s X_s - X_j(\Gamma_{ik}^l)X_l - \Gamma_{ik}^l \sum_s \Gamma_{jl}^s X_s \right] \\
&= \sum_s \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma_{jk}^s) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_{ik}^s) + \sum_l (\Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s) \right] X_s.
\end{aligned}$$

Proposição 1 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana satisfaz as seguintes propriedades*

1. $R \in C^\infty(\mathcal{M}^n)$ -bilinear em $\mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M})$, isto é,

$$\begin{aligned}
R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\
R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),
\end{aligned}$$

para todo $f, g \in C^\infty(\mathcal{M}^n)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

2. Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$ é $C^\infty(\mathcal{M}^n)$ -linear, isto é,

$$\begin{aligned}
R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W, \\
R(X, Y)(fZ) &= fR(X, Y)Z,
\end{aligned}$$

para todos $f \in C^\infty(\mathcal{M}^n)$, $Z, W \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

3. Vale a primeira identidade de Bianchi.

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0. \quad (1.4)$$

4. Para todo $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ valem as seguintes propriedades de simetria

$$\begin{aligned}
\checkmark \langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle &= 0 \\
\checkmark \langle R(X, Y)Z, T \rangle &= -\langle R(Y, X)Z, T \rangle \\
\checkmark \langle R(X, Y)Z, T \rangle &= -\langle R(X, Y)T, Z \rangle \\
\checkmark \langle R(X, Y)Z, T \rangle &= \langle R(Z, T)X, Y \rangle.
\end{aligned}$$

1.2 Imersão e mergulho

Definição 12 *Sejam $\mathcal{M}^n, \mathcal{N}^n$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável (suave) $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{N}^n$ é uma **imersão** se $df_p : T_p \mathcal{M}^n \rightarrow T_{f(p)} \mathcal{N}^n$ é injetiva para todo $p \in \mathcal{M}^n$.*

Definição 13 Seja $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{N}^{n+k}$ uma **imersão**. Se \mathcal{N}^n tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em \mathcal{M}^n por

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \forall u, v \in T_p\mathcal{M}^n.$$

A métrica de \mathcal{M}^n é chamada então a métrica induzida por f , e f torna-se, então, uma imersão isométrica.

Definição 14 Sejam $\mathcal{M}^n, \mathcal{N}^n$ variedades diferenciáveis e uma aplicação suave $\phi : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{N}^n$. O par (\mathcal{M}^n, ϕ) é uma **subvariedade** de \mathcal{N}^n se ϕ for uma imersão injetiva. Equivalentemente, uma variedade diferenciável \mathcal{M}^n é uma subvariedade de uma variedade diferenciável \mathcal{N}^n desde que

1. \mathcal{M}^n é um subespaço topológico de \mathcal{N}^n ;
2. A aplicação inclusão $i : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{N}^n$ é suave e em cada ponto $p \in \mathcal{M}^n$ e sua aplicação diferencial di_p é injetiva.

Observação 3 Seja \mathcal{M}^n uma subvariedade de \mathcal{N}^n . Então

- i. Se $f : \mathcal{M}^n \rightarrow P$ é uma aplicação suave (P variedade diferenciável), então a restrição de $f|_{\mathcal{M}^n}$ de f em \mathcal{M}^n é suave, pois $f|_{\mathcal{M}^n}$ é exatamente $f \circ i$ (ou $f \circ \phi$);
- ii. Se $i : \mathcal{M}^n \subset \mathcal{N}^n$ é uma subvariedade de \mathcal{N}^n , é usual identificar-se o espaço tangente $T_p\mathcal{M}^n$ como um subespaço de $T_p\mathcal{N}^n$ para cada $p \in \mathcal{M}^n$ (isto é, $T_p\mathcal{M}^n \approx di_p(T_p\mathcal{M}^n)$);
- iii. Se $\phi : P \rightarrow \mathcal{N}^n$ é uma aplicação suave (P variedade diferenciável), tal que $\phi(p) \subset \mathcal{M}^n$, então a aplicação induzida $\bar{\phi} : P \rightarrow \mathcal{M}^n$, com $\bar{\phi}(x) = \phi(x)$ para todo $x \in P$, é suave.

Definição 15 Sejam $\mathcal{M}^n, \mathcal{N}^n$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação suave $\phi : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{N}^n$ é um **mergulho** se ϕ for uma imersão e $\phi : \mathcal{M}^n \rightarrow \phi(\mathcal{M}^n) \subset \mathcal{N}^n$ for um homeomorfismo sobre a imagem, munida da topologia subespaço.

Portanto, $\tilde{\phi} : \mathcal{M}^n \rightarrow \phi(\mathcal{M}^n)$, com $\tilde{\phi}(p) = \phi(p)$, é uma aplicação aberta sobre $\phi(\mathcal{M}^n)$, munido com a topologia subespaço.

Subvariedades e mergulhos estão intimamente relacionados, se \mathcal{M}^n é uma subvariedade de \mathcal{N}^n , então a aplicação inclusão $i : \mathcal{M}^n \subset \mathcal{N}^n$ é um mergulho.

Exemplo 7 Dados $m \leq n$ inteiros positivos o exemplo clássico de mergulho é a aplicação $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$.

Definição 16 Sejam \mathcal{M}^n uma subvariedade de uma variedade \mathcal{N}^n , com $X \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$. Dizemos que X é um **campo vetorial tangente** a \mathcal{M}^n quando $X(p) \in T_p(\mathcal{M}^n)$ para todo $p \in \mathcal{M}$.

Proposição 2 Sejam \mathcal{M}^n uma subvariedade de uma variedade \mathcal{N}^n , e $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{N})$ são tangentes a \mathcal{M}^n . Então

1. a restrição $X|_{\mathcal{M}^n}$ de X a \mathcal{M}^n é um campo suave em \mathcal{M}^n , isto é, $X|_{\mathcal{M}^n} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$;
2. Além disso, $[X, Y]$ é tangente a \mathcal{M}^n e $[X, Y]|_{\mathcal{M}^n} = [X|_{\mathcal{M}^n}, Y|_{\mathcal{M}^n}]$.

Lema 1 $T_{(p,q)}(\mathcal{M}^n \times \mathcal{N}^n)$ é a soma direta dos seus subespaços de $T_{(p,q)}\mathcal{M}^n$ e $T_{(p,q)}\mathcal{N}^n$; isto é, cada elemento $v \in T_{(p,q)}(\mathcal{M}^n \times \mathcal{N}^n)$ tem uma única expressão como $v = v_1 + v_2$ onde $v_1 \in T_{(p,q)}\mathcal{M}^n$ e $v_2 \in T_{(p,q)}\mathcal{N}^n$.

1.3 Operadores diferenciáveis

Definição 17 Sejam \mathcal{M}^n uma variedade diferenciável, $p \in \mathcal{M}^n$ e \mathcal{U} uma vizinhança de p onde é possível definir campos de vetores $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, de modo que em cada $q \in \mathcal{U}$, os vetores $\{e_i(q)\}_{i=1, \dots, n}$ formam uma base de $T_q\mathcal{M}^n$.

Diremos, neste caso, que $\{e_i(q)\}_{i=1, \dots, n}$ é um **referencial móvel** em \mathcal{U} . Se o conjunto de campos $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ são dois a dois ortonormais, então dizemos que $\{e_i(q)\}_{i=1, \dots, n}$ é um **referencial ortonormal** em \mathcal{M}^n .

Definição 18 Seja $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O **gradiente** de f é o campo vetorial suave $\nabla f \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, definido sobre \mathcal{M}^n

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \quad (1.5)$$

para todo $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

É imediato, a partir da definição acima, que o gradiente de uma função suave é unicamente determinado por (1.5). A existência é assegurada pela proposição a seguir.

Proposição 3 Seja $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal local em uma vizinhança aberta $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^n$. Então, em \mathcal{U} temos

$$\nabla f = \sum_{j=1}^n e_j(f)e_j, \quad (1.6)$$

e o segundo membro da igualdade acima é independente do referencial escolhido. Além disso, quando $\mathcal{M}^n = \mathbb{R}^n$ podemos tomar, para $1 \leq i \leq n$, $e_i = E_i$ o i -ésimo campo canônico em \mathbb{R}^n . Desse modo

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n E_i(f)E_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Portanto, nossa definição de gradiente de uma função concorda com a dada nos cursos de cálculo diferencial e integral para funções suaves $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposição 4 Se $f, g : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções diferenciáveis em \mathcal{M}^n , então

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;
2. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Proposição 5 Seja $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dados $p \in \mathcal{M}^n$ e $v \in T_p\mathcal{M}^n$, seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}^n$ uma curva suave tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = v(f).$$

Em um sistema local de coordenadas o campo gradiente pode ser reescrito da seguinte forma.

Proposição 6 Se $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^n$ é uma vizinhança coordenada, com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, então o gradiente de f é dado por

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Exemplo 8 Se $\mathcal{M}^n = \mathbb{R}^n$ tem-se que $g_{ij} = \delta_{ij}$ são os coeficientes da métrica euclidiana e,

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definição 19 Seja X um campo vetorial suave em \mathcal{M}^n . A **divergência** de X é a função suave $\text{div} : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ em \mathcal{M}^n dada por

$$(\text{div}X)(p) = \text{tr}(v \mapsto (\nabla_v X)(p)),$$

onde $v \in T_p \mathcal{M}^n$ e tr denota o traço do operador linear entre chaves.

Dizemos que um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ em um aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^n$ é **geodésico** em $p \in \mathcal{U}$ se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n$.

Proposição 7 Seja X um campo suave em \mathcal{M}^n e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^n$. Se $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ em \mathcal{U} , então

$$\text{div}X = \sum_{i=1}^n (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle). \quad (1.7)$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in \mathcal{U}$, então temos em p que

$$\text{div}X = \sum_{i=1}^n e_i(a_i).$$

Exemplo 9 Para $\mathcal{M}^n = \mathbb{R}^n$ e $1 \leq i \leq n$, podemos considerar $e_i = E_i$, o i -ésimo campo canônico em \mathbb{R}^n . Como tais campos formam um referencial geodésico em cada ponto de \mathbb{R}^n , tem-se

$$\text{div}X = \sum_{i=1}^n E_i(a_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

a qual concorda com a definição dada usualmente nos cursos de cálculo diferencial.

Proposição 8 Se X, Y são campos vetoriais suaves em \mathcal{M}^n e $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então

1. $\text{div}(X + Y) = (\text{div}X + \text{div}Y)$;
2. $\text{div}(fX) = f \text{div}X + \langle \nabla f, X \rangle$.

Para obter a expressão de $\operatorname{div} X$ em um sistema de coordenadas arbitrário, comecemos com o seguinte.

Lema 2 *Seja X um campo vetorial suave sobre \mathcal{M}^n e $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^n$ uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Se X for dado em \mathcal{U} por $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, então a divergência de X é dado por*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n a_i \Gamma_{ij}^j, \quad (1.8)$$

onde os Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da métrica de \mathcal{M}^n em \mathcal{U} e $a_i \in C^\infty(\mathcal{M}^n)$, $i = 1, \dots, n$.

Definição 20 *Sejam \mathcal{M}^n uma variedade Riemanniana e $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O **Laplaciano** de f é a função $\Delta f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f). \quad (1.9)$$

Proposição 9 *Seja $f : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em um aberto $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}^n$. Então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)). \quad (1.10)$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in \mathcal{U}$, então temos em p que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)).$$

Definição 21 *Dizemos que o operador L definido por*

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} + c(x) u, \quad (1.11)$$

onde $u \in C^2(\Omega)$ e os coeficientes $a^{ij}, b^i, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e limitado; é **elíptico** no ponto $x \in \Omega$ se a forma quadrática associada à matriz $A(x)$ simétrica definida por

$$A(x) = \begin{bmatrix} a^{11}(x) & \cdots & a^{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1}(x) & \cdots & a^{nn}(x) \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

é **positiva definida**, isto é, se $\lambda(x)$ denota o menor autovalor de A , então

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda(x) |\xi|^2 > 0$$

para todo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. O operador é **elíptico** em Ω se for elíptico em cada ponto de Ω . Finalmente dizemos que L é **uniformemente elíptico** em Ω se existe um $\theta_0 > 0$ tal que $\lambda(x) \geq \theta_0$ para todo $x \in \Omega$.

Teorema 2 *Seja L um operador uniformemente elíptico no aberto limitado Ω com $c \equiv 0$ em Ω . Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, então valem os seguintes itens:*

1. Se $Lu \geq 0$ em Ω , então

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u.$$

2. Se $Lu \leq 0$ em Ω , então

$$\min_{x \in \bar{\Omega}} u = \min_{x \in \partial\Omega} u.$$

Observação 4 *Tal vez seja importante fazer menção da relevância das hipóteses do teorema acima. Mais especificamente, salientamos que a conclusão do teorema pode não ser válida em cada uma das situações abaixo:*

i. Se Ω não é limitado, basta considerar $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \pi)$, $Lu = \Delta u$ e a função $u(x, y) = e^x \sin(y)$.

ii. Se $c \neq 0$, bastando para isso considerar $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, $Lu = \Delta u + 2u$ e $u(x, y) = \sin x \sin y$.

iii. Se os coeficientes do operador não são limitados, bastando para isso considerar $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, $Lu = u'' + b(x)u'$, com

$$b(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

e a função $u(x) = 1 - x^4$.

No que segue, vamos considerar uma versão do teorema acima para o caso em que o termo de ordem zero $c(x)$ é não positivo. Antes porém, lembremos que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer, então a parte positiva u^+ e parte negativa u^- definidas por

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\}, \quad u^-(x) := \max\{-u(x), 0\},$$

para $x \in \Omega$. Observe que as duas funções acima são não negativas e que, além disso, valem as seguintes igualdades

$$|u| = u^+ + u^-, \quad u = u^+ - u^-.$$

Teorema 3 (Princípio do máximo fraco.) *Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$ em Ω . Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, então valem os seguintes itens:*

1. Se $Lu \geq 0$ em Ω , então

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

2. Se $Lu \leq 0$ em Ω , então

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-.$$

3. Se $Lu = 0$ em Ω , então

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Teorema 4 *Se L é uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$, então o problema*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

possui no máximo uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Teorema 5 (Princípio de Comparação) *Se \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são duas hipersuperfícies tipo-espaço (não necessariamente constantes) com curvaturas médias H_1 e H_2 respectivamente e se \mathcal{M}_1 está localmente acima de \mathcal{M}_2 e perto de um ponto p , então $H_1(p) \geq H_2(p)$.*

Lema 3 (Lema de Hopf) *Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana orientável, compacta e conexa. Seja f uma função diferenciável em \mathcal{M} com $\Delta f \geq 0$. Então f é constante. Em particular, as funções harmônicas em \mathcal{M} , isto é, aquelas para as quais $\Delta f = 0$ são constantes.*

Observação 5

i. *Se $x_0 \in \partial B$ é um ponto de máximo local e existe $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0)$, então é sempre verdade que*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(x_0 + h\eta) - u(x_0)}{h} \geq 0,$$

independente do sinal de Lu .

ii. *Sob as hipóteses do lema, mesmo quando não existe a derivada normal no ponto x_0 , a demonstração a seguir mostra que para toda direção exterior ν que $\langle \nu, \eta(x_0) \rangle > 0$, vale*

$$\liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(x_0 + h\nu) - u(x_0)}{h} > 0.$$

Teorema 6 (Princípio do Máximo Forte.) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e conexo, L um operador uniforme elíptico em Ω com $c \neq 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. então*

1. *Se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge máximo em Ω , então u é constante em Ω .*
2. *Se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge mínimo em Ω , então u é constante em Ω .*
No caso em que $c \leq 0$ vale o seguinte:
3. *Se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge máximo não negativo em Ω , então u é constante em Ω .*
4. *Se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge mínimo não positivo em Ω , então u é constante em Ω .*

Observação 6 *Note que o teorema acima vale para domínios ilimitados. A elipticidade uniforme e a limitação dos coeficientes não é essencial. De fato, basta que as funções*

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{a^{ij}(x)}{\lambda(x)}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{b^i(x)}{\lambda(x)}, \quad \frac{c(x)}{\lambda(x)}$$

sejam limitadas em toda bola fechada contida em Ω , em que $\lambda(x)$ é o menor autovalor da matriz $A(x) = (a^{ij}(x))$.

O resultado abaixo é um princípio de máximo geral para o operador L sem restrições no sinal de $c(x)$.

Teorema 7 *Suponha que L é uniformemente elíptico no conexo Ω e que existe $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ tal que $w > 0$ em Ω e $Lw \leq 0$ em Ω . Dada $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ temos que*

1. se $Lu \geq 0$ e $\frac{u}{w}$ assume máximo não negativo em Ω então $\frac{u}{w}$ é constante em Ω .
2. se $Lu \leq 0$ e $\frac{u}{w}$ assume mínimo não positivo em Ω então $\frac{u}{w}$ é constante em Ω .

1.4 Variedades Semi-Riemannianas

Apresentaremos aqui algumas conhecimentos que estão intimamente relacionados com o nossos objetos de estudo.

Definição 22 *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma **forma bilinear** $b = \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação que satisfaz:*

1. *Positiva definida, quando $\langle v, v \rangle > 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$;*
2. *Negativa definida, quando $\langle v, v \rangle < 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$;*
3. *Não-degenerada, quando $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in V$ implica que $v = 0$.*

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre V , um subespaço W de V é dito não degenerado se $b|_{W \times W} : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ for não degenerada, que vamos denotar por $b|_W$.

Definição 23 *O índice ν de uma forma bilinear simétrica b em V é maior dimensão de um subespaço W de V tal que $b|_W$ é negativa definida.*

Assim $0 \leq \nu \leq \dim V$ e $\nu = 0$ se, e somente se, b é positivo definido. A função $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $q(v) = \langle v, v \rangle$ é chamada a **forma quadrática** de $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Em alguns casos é mais conveniente trabalhar com ela do que com a própria b , e não há perda de generalidade pois b pode ser recuperada pela identidade de polarização

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v)).$$

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base para V , a matriz $n \times n$ cujas coordenadas são $b_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ é chamada matriz de b relativa a a base e_1, \dots, e_n . Uma vez que b é simétrica, esta matriz é simétrica.

Lema 4 *Uma forma bilinear simétrica é não de degenerada se, e somente se, a matriz relativa a uma base (e portanto a todas) é invertível.*

Falaremos um pouco sobre produtos escalares. Exibiremos algumas de suas propriedades importantes.

Definição 24 *Um **produto escalar** g em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica e não degenerada sobre V .*

Um produto interno é um produto escalar positivo definido. Quando $V = \mathbb{R}^n$, temos o produto interno canônico definido por

$$u \cdot v = \sum_i u_i v_i.$$

Muitas propriedades do produto interno valem para produtos escalares, porém alguns fenômenos novos surgem quando g é indeterminado, isto é, $g(v, v) = 0$, mas $v \neq 0$.

O próximo exemplo nos mostra que mudando o sinal do produto escalar usual do \mathbb{R}^2 temos um exemplo de produto escalar indefinido.

Exemplo 10 Defina $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$g(u, v) = u_1 v_1 - u_2 v_2.$$

Observe que g é simétrica e bilinear. Considerando a base $\{(1, 0), (0, 1)\}$ do \mathbb{R}^2 , temos que g é não degenerado. Assim, g é um produto escalar indefinido e a sua forma quadrática associada é dada por $q(v) = u_1^2 - u_2^2$.

Definição 25 Seja V um espaço vetorial com produto escalar e seja W um subespaço de V . O **complemento ortogonal** de W é o subespaço W^\perp de todos os vetores em V que são ortogonais a todo vetor em W , ou seja,

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0; \forall w \in W\}.$$

Os próximos lemas descrevem algumas propriedades da operação \perp que são usados em nossos estudos.

Lema 5 Se W é um subespaço de um espaço com produto escalar V , então

1. $\dim W + \dim W^\perp = n = \dim V$;
 2. $(W^\perp)^\perp = W$;
 3. Um subespaço W de V é não degenerado se, e somente se, $V = W \oplus W^\perp$.
- Ademais, $\text{ind} V = \text{ind} W + \text{ind} W^\perp$.

Lema 6 Seja e_1, \dots, e_n uma base ortonormal de V . Então toda $v \in V$ é escrito de maneira única como

$$v = \sum_i g(v, e_i) e_i.$$

Definiremos agora tensor métrico e o que vem a ser uma variedade de Lorentz.

Definição 26 Um **tensor métrico** g em uma variedade diferenciável \mathcal{M} é um tensor do tipo $(0, 2)$ simétrico, não degenerado em \mathcal{M} de índice constante. Em outras palavras, $g \in \mathfrak{T}_2^0(\mathcal{M})$ leva suavemente cada ponto $p \in \mathcal{M}$ em um produto escalar g_p em $T_p \mathcal{M}$, e o índice de g_p é o mesmo para todo $p \in T_p \mathcal{M}$. Ou seja,

$$\begin{aligned} g : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathfrak{T}_2^0(\mathcal{M}) \\ p &\longmapsto g_p : T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\quad (u, v) \longrightarrow g_p(u, v) \end{aligned}$$

é uma aplicação suave tal que,

1. $g_p(u, v) = g_p(v, u), \quad \forall u, v \in T_p\mathcal{M};$
2. $g_p(u, v) = 0, \quad \forall v \in T_p\mathcal{M}, \text{ implica } u = 0;$
3. $\text{ind}(T_p\mathcal{M}) = \text{ind}(T_q\mathcal{M}), \quad \forall p, q \in \mathcal{M}, \text{ com } p \neq q.$

Definição 27 Uma variedade semi-Riemanniana é uma variedade diferenciável \mathcal{M} munida com um tensor métrico g .

Observação 7

- i. O valor comum ν do índice de g_p em uma variedade semi-Riemanniana \mathcal{M} é chamado índice de \mathcal{M} . Note que $0 \leq \nu \leq n = \dim(\mathcal{M})$.
- ii. Se $\nu = 0$, então \mathcal{M} é uma variedade Riemanniana. Neste caso, cada g_p é um produto interno em $T_p\mathcal{M}$.
- iii. Quando $\nu = 1$ e $n \geq 2$, então \mathcal{M} é dita uma variedade de Lorentz (ou espaço-tempo).

Exemplo 11 O exemplo básico de variedade Lorentziana é o espaço \mathbb{R}^n com a métrica dada por:

$$\langle (x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n.$$

Notação 1 Denotemos por $g = \langle, \rangle$ o tensor métrico.

Assim podemos escrever $g(u, v) = \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$, para todos $u, v \in T_p\mathcal{M}$ e $g(U, V) = \langle U, V \rangle$ e para $U, V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

Para um sistema de coordenadas podemos escrever g sendo

$$g(U, V) = \langle U, V \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} U^i V^j,$$

de fato, se $\xi = x^1, \dots, x^n$ é um sistema de coordenadas em $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ então as componentes de g em \mathcal{U} são

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Assim, se $V = \sum_i v^i \partial_i$ e $U = \sum_j u^j \partial_j$, temos que

$$g(U, V) = \langle U, V \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} v^i u^j.$$

Como g é não degenerada temos que em cada $p \in \mathcal{M}$ a matriz $(g_{ij}(p))_{n \times n}$ é invertível e a sua inversa é denotada por $(g^{ij}(p))_{n \times n}$. A fórmula usual para a inversa de uma matriz nos garante que as funções g_{ij} são suaves em \mathcal{U} . Além disso, como g é simétrica então $g_{ij} = g_{ji}$ e conseqüentemente $g^{ij} = g^{ji}$, para quaisquer $i = 1, \dots, n$. Finalmente em \mathcal{U} o tensor métrico g pode ser escrito como

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Assim, se $U, V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ temos

$$\begin{aligned} g(U, V) &= \sum_{ij} g_{ij}(dx^i \otimes dx^j)(U, V) \\ &= \sum_{ij} g_{ij} dx^i(U) \cdot dx^j(V) \\ &= \sum_{ij} g_{ij} U^i \cdot V^j. \end{aligned}$$

Exemplo 12 Defina-se a seguinte métrica sobre a variedade $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$:

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n f_i X^i Y^i$$

onde $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ e $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esta métrica dota a \mathbb{R}^n com uma estrutura de variedade semi-Riemanniana. A métrica tem sinais constantes sobre as regiões da forma $\Pi_{i=1}^n(a_i, b_i) \subset \mathbb{R}^n$ onde os intervalos (a_i, b_i) tem a propriedade que $f_i|_{(a_i, b_i)}$ tem sinal constante (o qual é $+1$ ou -1 , ou constante igual 0). A métrica muda de sinal nos pontos $p = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que possuem a propriedade que para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ está no bordo do suporte da função f_i .

Exemplo 13 Seja ν um inteiro tal que $0 \leq \nu \leq n$. Então \mathbb{R}^n munido com o tensor métrico

$$\langle u_p, v_p \rangle = - \sum_i^\nu u^i v^i + \sum_{j+\nu=0}^n u^j v^j,$$

de índice ν nos dá uma variedade semi-Riemanniana \mathbb{R}_ν^n , chamado espaço semi-Euclidiano.

Observe que $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n$, e para $n \geq 2$, \mathbb{R}_1^n é o espaço de Lorentz-Minkowski n -dimensional.

Fixando a notação

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1, & \text{se } 1 \leq i \leq \nu; \\ 1, & \text{se } \nu + 1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

então o tensor métrico de \mathbb{R}_ν^n pode ser escrito com

$$g = \sum_i \epsilon_i dx^i \otimes dx^i.$$

Definição 28 Seja M uma variedade semi-Riemanniana com métrica \langle, \rangle . Dizemos que um vetor $v \in T_p M$ é:

1. Spacelike (tipo-espaço), se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$.
2. Timelike (tipo-tempo), se $\langle v, v \rangle < 0$.
3. Lightlike (tipo-luz ou nulo), se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$.

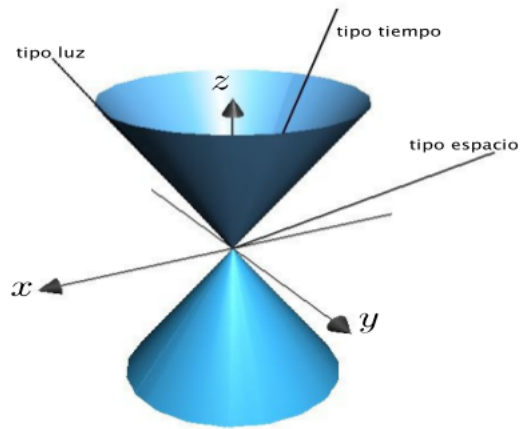


Figura 1.1: vetores tipo-tempo, espaço e luz

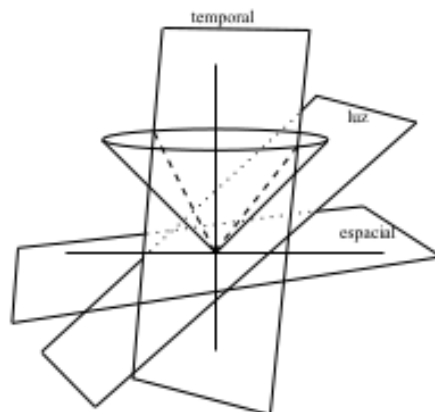
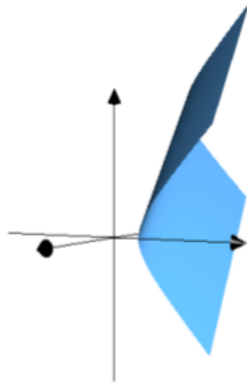


Figura 1.2: vetores tipo-tempo, espaço e luz

Exemplo 14 Defina $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t) = (\cosh t, t^2, \sinh t)$. Assim sendo $\alpha'(t) = (\sinh t, 2t, \cosh t)$ é ainda $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 4t^2 - 1$. Portanto a curvatura é tipo-espaço nos intervalos $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$, é tipo-luz para $t = \pm\frac{1}{2}$ e tipo-tempo no intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

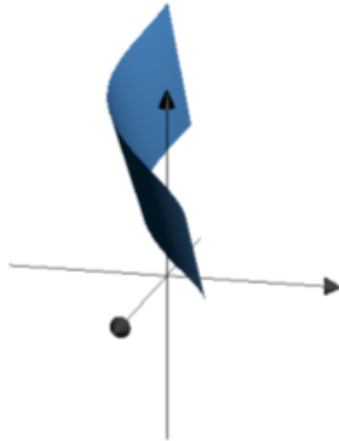
Exemplo 15 Superfície tipo-tempo com curvaturas Gaussiana e media constantes iguais a zero. Com curva tipo-tempo y vetor tipo-luz dados por:

$$\gamma(s) = (0, \cosh(s), \sinh(s)), \beta = (-1, 0, 1).$$



Exemplo 16 Superfície tipo-tempo com curvaturas Gaussiana e média constantes iguais a zero. Com curva tipo-luz y vetor tipo-luz dados por:

$$\gamma(s) = (\sin(s), \cos(s), s), \beta = (1, 0, 1)$$



O conjunto $\{v \in T_p\mathcal{M}; \langle v, v \rangle = 0 \quad v \neq 0\}$ de todos os vetores nulos de $T_p\mathcal{M}$ é chamado cone nulo em $p \in \mathcal{M}$. Quando \mathcal{M} é uma variedade Lorentz, os vetores nulos são chamados de tipo-luz.

Para cada $p \in \mathcal{M}$, seja

$$q : T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto q(v) = \langle v, v \rangle,$$

a forma quadrática associada ao produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Temos que q determina $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Mas observe que

$$q(fV) = \langle fV, fV \rangle = f^2 \langle V, V \rangle = f^2 q(V),$$

para qualquer $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ e toda $f \in C^\infty(\mathcal{M})$. Assim, temos que q não é $C^\infty(\mathcal{M})$ -linear e portanto não é um campo tensor.

Definição 29 *Sejam \mathcal{M} uma variedade semi-Riemanniana, $p \in \mathcal{M}$ e $\sigma \subset T_p\mathcal{M}$ um subespaço 2-dimensional não degenerado de $T_p\mathcal{M}$. O número*

$$k(\sigma) = \frac{\langle R(v, w)v, w \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2},$$

*independente da base escolhida $\{v, w\}$ de σ e é denominado **curvatura seccional** de \mathcal{M} em p segundo σ .*

Definição 30 *A variedade semi-Riemanniana \mathcal{M} tem **curvatura seccional constante** quando, para cada $p \in \mathcal{M}$, os conjuntos $k(\sigma)$ da definição acima independem do subespaço 2-dimensional não-degenerado de σ de $T_p\mathcal{M}$.*

Observação 8 *Quando a dimensão de $\mathcal{M} \geq 3$ e \mathcal{M} tem curvatura seccional constante, temos pelo teorema de Schur que o valor de $k(\sigma)$ é também independente do ponto $p \in \mathcal{M}$ escolhido.*

Definição 31 *Seja V um **espaço vetorial Lorentziano**, isto é, um espaço vetorial munido de um produto escalar de índice constante igual a 1. Temos o conjunto*

$$\mathcal{T} = \{u \in V : \langle u, u \rangle < 0\}.$$

Definição 32 *Seja \mathcal{M} uma variedade de Lorentz. Uma aplicação \mathcal{T} , que associa a cada $p \in \mathcal{M}$ um **cone tipo-tempo** $\mathcal{T}_p \in T_p\mathcal{M}$, é suave quando para cada $p \in \mathcal{M}$ existem uma vizinhança aberta \mathcal{U}_p e $v \in \mathcal{X}(\mathcal{U})$, tais que $V(q) \in \mathcal{T}_p$ para todo $q \in \mathcal{U}$. Caso uma tal aplicação \mathcal{T} exista diz-se que \mathcal{M} é **temporalmente orientável**.*

Proposição 10 *Uma variedade de Lorentz \mathcal{M} é temporalmente orientável se, e somente se, existe um campo $k \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ tipo-tempo definido em \mathcal{M} .*

De outro modo o resultado acima nos diz que não importa se nos referimos à função suave \mathcal{T} ou ao campo vetorial tipo-tempo k . Assim, sempre que \mathcal{M} for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação \mathcal{T} como acima, ou de um campo vetorial tipo-tempo k correspondente com ele será denominada uma orientação temporal para \mathcal{M} .

Observação 9 *Seja \mathcal{T} uma orientação temporal para \mathcal{M} e $V \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.*

1. *Se $V(q) \in \mathcal{T}_q$, para todo $q \in \mathcal{M}$. Diz-se que V aponta para o futuro. Então sendo k uma orientação temporal para \mathcal{M} , temos que um campo vetorial tipo-tempo V sobre \mathcal{M} aponta para o futuro se, e somente se, $\langle V, k \rangle < 0$.*
2. *Se $-V(q) \in \mathcal{T}_q$ para todo $q \in \mathcal{M}$. Diz-se que V aponta para o passado. Então sendo k uma orientação temporal para \mathcal{M} , temos que um campo vetorial tipo-tempo V sobre \mathcal{M} aponta para o passado se, e somente se, $\langle V, k \rangle > 0$.*

Exemplo 17 *O espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^{n+1} é temporalmente orientado, pois*

$$k = \frac{\partial}{\partial t} = (1, 0, \dots, 0)$$

é um campo de vetores tipo-tempo globalmente definido em \mathbb{L}^{n+1} .

Espaço de Lorentz-Minkowski

Neste capítulo vamos estudar as superfícies do tipo-espaço compactas com curvatura média constante no espaço tridimensional de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 .

Sobre a hipótese que o bordo de uma superfície é uma curva plana obteremos uma estimativa para a altura da superfície desde que o plano Π contém ao bordo. Demonstraremos que esta altura não pode ser maior que $\frac{A|H|}{2\pi}$ sobre Π , onde A e H denotam respectivamente, a área da superfície que está sobre Π e a curvatura média da superfície. Além disso, a igualdade é atingida se, e somente se, a superfície é um domínio planar (com $H = 0$) ou uma tampa hiperbólica ($H \neq 0$).

2.1 Conceitos básicos

Consideremos $B_u = \{E_1, E_2, E_3\}$ como a base canônica de \mathbb{R}^3 tal que

$$E_1 = (1, 0, 0), \quad E_2 = (0, 1, 0), \quad E_3 = (0, 0, 1).$$

Definição 33 *O espaço Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 é o espaço métrico \mathbb{R}^3 munido à métrica \langle, \rangle a qual é definida como:*

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3,$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$. *Esta métrica é chamada de métrica Lorentziana.*

Observação 10

- i. A métrica Lorentziana é uma métrica não degenerada de índice 1.*
- ii. Denotaremos o espaço Euclidiano 3-dimensional como $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$.*
- iii. O espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 também pode ser definido como o espaço \mathbb{R}^3 munido com a métrica Lorentziana,*

$$\langle, \rangle = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 - (dx_3)^2,$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3)$ são coordenadas canônicas de \mathbb{R}^3 .

Definição 34 *Uma imersão suave $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{L}^3$ de uma superfície \mathcal{M} é chamada **tipo-espaço** se a métrica induzida sobre a superfície \mathcal{M} é definida positiva; isto é, a métrica induzida pela imersão x é Riemanniana.*

Neste contexto, as noções da primeira e segunda formas fundamentais e a curvatura média, são definidas do mesmo jeito que seria feito para uma superfície no espaço Euclidiano.

Observação 11

- i. Neste trabalho estudaremos as superfícies imersas tipo-espaço $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{L}^3$ com curvatura média constante H . É bem conhecido que tais superfícies são pontos críticos da funcional área para variações que preservam uma função de volume adequada. Por outro lado, na relatividade existe um interesse em encontrar funções sobre espaço-tempo, tal que os conjuntos de nível dessas funções possuam curvatura média constante.*
- ii. A função curvatura média poder ser usada como uma coordenada de tempo global e fornecer um indicador do tempo o qual é importante no estudo de singularidades, a positividade da massa e no estudo das radiações gravitacionais.*
- iii. Obteremos uma fórmula de monotonicidade da área a qual da uma dependência da área de uma superfície tipo-espaço compacta com curvatura média constante em \mathbb{L}^3 com respeito à altura da superfície.*

Este trabalho está dividido em 4 seções:

A secção 2.2 é uma secção preliminar, onde apresentaremos algumas definições e notações, estudaremos as propriedades básicas das superfícies tipo-espaço compactas com curvatura média constante.

Na secção 2.3 vamos desenvolver o principio da tangência e obteremos uma estimativa da altura de um grafo com curvatura média constante em função do diâmetro do domínio. Finalmente o teorema principal será apresentado na secção 2.4.

2.2 Notações e preliminares

Ao longo desta secção, mesmo que no seguinte, vamos considerar que a dimensão é arbitrária. Primeiro começaremos com os conceitos básicos sobre hipersuperfícies tipo-espaço compactas com curvatura média constante. Além disso vamos a estabelecer uma fórmula de fluxo para este tipo de hipersuperfícies, a qual será necessária para a demonstração de nosso resultado principal.

Denotaremos por \mathbb{L}^{n+1} o espaço de Lorentz-Minkowski $(n+1)$ -dimensional, isto é, o espaço vetorial \mathbb{R}^{n+1} dotado com a métrica Lorentziana

$$\langle , \rangle = (dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2 - (dx_{n+1})^2,$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ são coordenadas canônicas de \mathbb{R}^{n+1} .

Definição 35 *Uma imersão suave $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ de uma variedade n -dimensional conexa \mathcal{M} é chamada de **hipersuperfície tipo-espaço** se a métrica induzida por x é uma métrica Riemanniana sobre \mathcal{M} . Denotaremos essa métrica como \langle , \rangle .*

Observação 12 *Se $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$, para qualquer campo de vetores unitários N de \mathcal{M} tipo-tempo, então o produto $\langle N, e_{n+1} \rangle$ não pode-se anular em qualquer um dos pontos. Fixemos uma orientação na hipersuperfície tal que $\langle N, e_{n+1} \rangle < 0$, isto é, N aponta para acima. Dizemos então que N é futuro-dirigido. Vamos supor que \mathcal{M} é uma hipersuperfície tipo-espaço compacto. Como \mathcal{M} não pode ser fechada em \mathbb{L}^{n+1} , então a hipersuperfície \mathcal{M} tem bordo não vazio $\partial\mathcal{M}$.*

Definição 36 *Se Γ é uma variedade fechada de dimensão $(n-1)$ em \mathbb{L}^{n+1} , então dizemos que a aplicação $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ é uma **hipersuperfície com bordo** Γ se a restrição $x : \partial\mathcal{M} \rightarrow \Gamma$ é um difeomorfismo.*

Proposição 11 *Seja \mathcal{M} uma hipersuperfície tipo-espaço isometricamente imersa no espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^{n+1} . Então \mathcal{M} admite um campo vetorial normal unitário $N \in \mathcal{X}^\perp(\mathcal{M})$ de vetores tipo-tempo. Em particular, \mathcal{M} é orientável.*

Prova: Fixe um campo $k \in \mathcal{X}(\mathbb{L}^{n+1})$ que dá a orientação temporal de \mathbb{L}^{n+1} , e observe que, para todo $p \in \mathcal{M}$, o conjunto de todos os vetores tipo-tempo $v \in T_p\mathbb{L}^{n+1}$ é a união disjunta de $C(k(p))$ e $C(-k(p))$. Tome em cada $p \in \mathcal{M}$, um vetor unitário $N(p) \in T_p\mathcal{M}^\perp$. Desde que $N(p)$ é tipo-tempo, trocando $N(p)$ por $-N(p)$ se necessário, podemos supor que $N(p) \in C(k(p))$. Deste modo, definamos unicamente um campo vetor normal unitário N sobre \mathcal{M} , apontando para o futuro. Agora devemos mostrar que tal campo N é suave. Fixe, então, $p \in \mathcal{M}$ e tome um referencial móvel $\{e_i\}$ sobre uma vizinhança aberta e conexa \mathcal{U}_p em \mathcal{M} . Então $\tilde{N} = k - \sum_{i=1}^n \langle k, e_i \rangle e_i$ é suave e normal a \mathcal{M} em \mathcal{U} , com

$$\langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle = \langle \tilde{N}, k \rangle = \langle k, k \rangle - \sum_{i=1}^n \langle k, e_i \rangle^2.$$

Mas $\langle k, k \rangle = \sum_{i=1}^n \langle k, e_i \rangle^2 - \langle k, N \rangle^2$, de modo que $\langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle = -\langle k, N \rangle^2 < 0$. Portanto, $\tilde{N}(q) \in C(k(p))$ para cada $q \in \mathcal{U}$, e $N = \frac{\tilde{N}}{|\tilde{N}|}$ é um campo de vetores diferenciáveis em \mathcal{M} .

Seja agora ∇^0 (respectivamente ∇) a notação da conexão de Levi-Civita no \mathbb{L}^{n+1} (respectivamente \mathcal{M}). As formulas de Weingarten e Gauss para \mathcal{M} em \mathbb{L}^{n+1} são respectivamente:

$$A(X) = -\nabla_X^0 N$$

e

$$\nabla_X^0 Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y \rangle N$$

para todos os campos de vetores tangentes $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, onde $A : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$ denota o operador de Weingarten de \mathcal{M} com respeito à escolha de uma orientação temporal N para \mathcal{M} .

Definição 37 A segunda forma fundamental σ de \mathcal{M} é:

$$\sigma(X, Y) = -\langle \nabla_X^0 Y, N \rangle$$

onde $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

Definição 38 A curvatura média H de \mathcal{M} é:

$$H = \frac{1}{n} \text{tr } \sigma = -\frac{1}{n} \text{tr}(A) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \sigma(v_i, v_i), N \rangle,$$

onde $\{v_i : 1 \leq i \leq n\}$ é um referencial tangente suave ao longo de \mathcal{M} .

Definição 39 Dizemos que \mathcal{M} é uma *hipersuperfície com curvatura média constante*, se a função H é constante em \mathcal{M} .

Localmente uma hipersuperfície tipo-espaço pode ser vista como o gráfico de uma função $u = u(x_1, \dots, x_n) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um domínio de \mathbb{R}^n , com a condição $|Du|^2 < 1$ a qual significa que o gráfico definido por u é tipo-espaço.

Exemplo 18 O espaço hiperbólico $\mathbb{H}(r)$ é uma hipersuperfície tipo-espaço em \mathbb{L}^{n+1} com curvatura média constante. De fato, inicialmente observe que $\mathbb{H}(r) = f^{-1}(0)$, onde $f : \mathbb{L}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função diferenciável definida por $f(x) = \langle x, x \rangle + r^2$. É imediato verificar que zero é um valor regular de f , onde segue que $\mathbb{H}(r)$ é uma hipersuperfície de \mathbb{L}^{n+1} . Agora, dado $p \in \mathbb{H}(r)$, seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{H}(r)$ uma curva suave tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, onde $v \in T_p \mathbb{H}(r)$. Note que, para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ tem-se que $\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = -r^2$. Derivando esta última igualdade obtemos que $\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ e, em particular, fazendo $t = 0$, segue que $\langle p, v \rangle = 0$. Com isso, segue que os vetores posição e normal estão na mesma direção para cada $p \in \mathbb{H}(r)$. Agora, observe que temos a seguinte decomposição em soma direta

$$\mathbb{L}^{n+1} = T_p \mathbb{H}(r) \oplus (T_p \mathbb{H}(r))^\perp \quad (2.1)$$

para todo $p \in \mathbb{H}(r)$. Como $\mathbb{H}(r)$ é uma hipersuperfície e o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tem índice 1 em $(T_p \mathbb{H}(r))^\perp$, concluímos de (2.1) que o índice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $T_p \mathbb{H}(r)$ é zero. Portanto, $\mathbb{H}(r)$ é uma hipersuperfície tipo-espaço em \mathbb{L}^{n+1} . Observe que $N(p) = (\frac{1}{r})(p)$ para todo $p \in \mathbb{H}(r)$ é um campo de vetores tipo-tempo unitários e normais a $\mathbb{H}(r)$ e, com isso, o operador de Weingarten de $\mathbb{H}(r)$ é dado por $A(X) = -(\frac{1}{r})(X)$, para todo $X \in \mathcal{X}(\mathbb{H})$. Disto, concluímos que a curvatura média de $\mathbb{H}(r)$ é dada por $H = \frac{1}{r}$ que é constante.

Definição 40 A orientação futuro-dirigida é:

$$N = \frac{(Du, 1)}{\sqrt{1 - |Du|^2}}, \quad \langle N, e_{n+1} \rangle < 0. \quad (2.2)$$

Assim temos que, a primeira e segunda forma fundamental de \mathcal{M} são dadas respectivamente por:

$$g_{ij} = \delta_{ij} - u_i u_j, \quad A_{ij} = \frac{u_{ij}}{\sqrt{1 - |Du|^2}},$$

onde

$$u_i = D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad u_{ij} = D_i D_j u.$$

Para os gráficos de funções, a curvatura média H do gráfico de u é expressado por:

$$(1 - |Du|^2) \sum_{i=1}^n u_{ii} + \sum_{i,j=1}^n u_i u_j u_{ij} = nH(1 - |Du|^2)^{\frac{3}{2}},$$

esta aplicação pode ser escrita alternativamente na forma divergente da seguinte maneira:

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 - |Du|^2}} \right) = nH. \quad (2.3)$$

No estudo de hipersuperfícies do tipo-espaço com curvatura média constante nós estabeleceremos um resultado que será necessário na prova do teorema principal.

Definição 41 Seja $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma hipersuperfície compacta no espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^{n+1} . Para um vetor arbitrário fixo $a \in \mathbb{L}^{n+1}$, defina-se a **função altura** $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ relativa com a dada por

$$h(p) = \langle x(p), a \rangle,$$

para todo $p \in \mathcal{M}$.

Observação 13 Observe que se $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, então da compatibilidade da métrica segue que $X_h = \langle \nabla_X^0 x, a \rangle + \langle x, \nabla_X^0 a \rangle = \langle X, a \rangle = \langle X, a^\perp \rangle$, onde a^\perp é a projeção ortogonal de a sobre o fibrado tangente $T\mathcal{M}$, isto é,

$$a^\perp = a + \langle N, a \rangle N.$$

Portanto, da igualdade anterior concluímos que $\nabla H = a^\perp$. Agora, observe que

$$0 = \nabla_X^0 a = \nabla_X^0 (a^\perp - \langle N, a \rangle N) = \nabla_X^0 a^\perp - \nabla_X^0 (\langle N, a \rangle N).$$

Logo usando a equação de Gauss e Weingarten segue que

$$\nabla_X \nabla H = -\langle N, a \rangle AX,$$

para todo $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Assim, da expressão anterior temos que

$$\Delta h = -nH \langle N, a \rangle,$$

onde $H = -\left(\frac{1}{n}\right) \operatorname{tr} A$ é a curvatura média de \mathcal{M} .

Lema 7 (Fórmula do fluxo) *Sejam $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ uma imersão tipo-espaço de uma hipersuperfície compacta com bordo $\partial\mathcal{M}$ e ν o vetor co-normal unitário que aponta para o interior ao longo de $\partial\mathcal{M}$. Se a curvatura média H é constante então para qualquer vetor fixo $a \in \mathbb{L}^{n+1}$ temos:*

$$H \int_{\partial\mathcal{M}} \det(x, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}, a) ds + \int_{\partial\mathcal{M}} \langle \nu, a \rangle ds = 0, \quad (2.4)$$

onde $\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$ é um referencial tangente unitário a $\partial\mathcal{M}$. Se $x(\partial\mathcal{M})$ está incluído num hiperplano $\Pi = a^\perp$, com $\langle a, a \rangle = -1$, então obtemos a **fórmula do fluxo**.

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \langle \nu, a \rangle ds = -nH \text{vol}(\partial\mathcal{M}), \quad (2.5)$$

onde $\text{vol}(\partial\mathcal{M})$ é o volume algebraico de $\partial\mathcal{M}$.

Prova: Seja $a \in \mathbb{L}^{n+1}$ um vetor fixo arbitrário e $\langle a, x \rangle$ a função altura definida sobre \mathcal{M} . Assim o gradiente de $\langle a, x \rangle$ é

$$\nabla \langle a, x \rangle = a^T = a + \langle a, N \rangle N,$$

onde $a^T \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ é tangente a \mathcal{M} e N é um campo vetorial normal sobre \mathcal{M} . Logo

$$\begin{aligned} \nabla^2 \langle a, x \rangle(X, Y) &= \nabla \cdot \nabla \langle a, x \rangle(X, Y) \\ &= \langle \nabla_X \nabla \langle a, x \rangle, Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X (a + \langle a, N \rangle N), Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X a + \langle a, N \rangle \nabla_X N, Y \rangle \\ &= \langle a, N \rangle \langle \nabla_X N, Y \rangle. \end{aligned}$$

Mas pela Fórmula de Gauss e Weingarten temos $\nabla_X^0 N = \nabla_X N - \langle AX, N \rangle N$ e $\nabla_X^0 N = -AX$.

Daí $-AX = \nabla_X N - \langle AX, N \rangle N$.

Logo

$$\begin{aligned} \nabla^2 \langle a, x \rangle(X, Y) &= \langle a, N \rangle \langle -AX + \langle AX, N \rangle N, Y \rangle \\ &= -\langle a, N \rangle \langle AX, Y \rangle + \langle a, N \rangle \langle AX, N \rangle \langle N, Y \rangle \\ &= -\langle a, N \rangle \langle AX, Y \rangle. \end{aligned}$$

Portanto o laplaciano de $\langle a, x \rangle$ é

$$\Delta \langle a, x \rangle = -\langle a, N \rangle \text{tr}A,$$

mas $H = -\frac{1}{n} \text{tr}A$. Assim, $\Delta \langle a, x \rangle = nH \langle a, N \rangle$.

Logo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}} nH\langle a, N \rangle dV &= \int_{\mathcal{M}} \Delta\langle a, x \rangle dV \\
&= \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}_g(\nabla\langle a, x \rangle) dV \\
&= \int_{\partial\mathcal{M}} \langle \nabla\langle a, x \rangle, \nu \rangle ds \\
&= \int_{\partial\mathcal{M}} \langle a, \nu \rangle ds.
\end{aligned}$$

Por outro lado, defina como a $(n-1)$ -forma

$$\theta_a(X_1, \dots, X_{n-1}) = \det(x, X_1, \dots, X_{n-1}, a),$$

onde $X_1, \dots, X_{n-1} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Usando a equação de Gauss, temos

$$\begin{aligned}
(\nabla_Y \theta_a)(X_1, \dots, X_{n-1}) &= \det(Y, X_1, \dots, X_{n-1}, a) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \langle AX_i, Y \rangle \det(x, X_1, \dots, X_{i-1}, N, X_{i+1}, \dots, X_{n-1}, a),
\end{aligned}$$

onde $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Portanto a derivada exterior de θ_a é

$$\begin{aligned}
d\theta_a(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^i (\nabla_{X_i} \theta_a)(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n) \\
&= n \det(X_1, \dots, X_n, a).
\end{aligned}$$

Daí $d\theta_a = -n\langle a, N \rangle dV$. Logo

$$\int_{\mathcal{M}} nH\langle a, N \rangle dV = -H \int_{\partial\mathcal{M}} \det(x, X_1, \dots, X_{n-1}, a) ds.$$

O qual demonstra a primeira afirmação.

Para demonstrar a segunda afirmação é suficiente verificar que

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \det(x, X_1, \dots, X_{n-1}, a) ds = n \operatorname{vol}(\partial\mathcal{M}).$$

Como $x(\partial\mathcal{M})$ é uma hipersuperfície fechada mergulhada no hiperplano tipo-espaço Π , então

$$\operatorname{vol}(\partial\mathcal{M}) = \frac{1}{n} \int_{\partial\mathcal{M}} \langle x, \eta \rangle ds,$$

onde η é um vetor normal unitário apontando para fora de \mathcal{M} em Π . Observamos que se $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ é um referencial tangente positivamente orientado ao longo de $\partial\mathcal{M}$, então $\{\eta, e_1, \dots, e_{n-1}, a\}$ é orientado positivamente e $\det(\eta, e_1, \dots, e_{n-1}, a) = 1$.

Daí

$$\theta_a(e_1, \dots, e_{n-1}) = \det(x, e_1, \dots, e_{n-1}, a) = \langle x, \eta \rangle.$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{M}} \theta_a &= \int_{\partial\mathcal{M}} \det(x, e_1, \dots, e_{n-1}, a) ds \\ &= \int_{\partial\mathcal{M}} \langle x, \eta \rangle ds \\ &= n \text{vol}(\partial\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Logo usando a primeira afirmação, temos que

$$Hn \text{vol}(\partial\mathcal{M}) + \int_{\partial\mathcal{M}} \langle \nu, a \rangle ds = 0.$$

□

Observação 14 *Em contraste com o caso Euclidiano, a equação (2.5) não implica alguma restrição sobre os valores possíveis da curvatura média. Por exemplo, se $x(\partial\mathcal{M}) = \mathbb{S}^{n-1}$ e \mathcal{M} é uma hipersuperfície compacta imersa no espaço Euclídeo limitada por \mathbb{S}^{n-1} com curvatura média constante H , então a fórmula do fluxo implica que $0 \leq |H| \leq 1$. Porém, no caso dos espaços de Lorentz-Minkowski, a família de tampas hiperbólicas*

$$D_\lambda = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} : \langle x, x \rangle = -\lambda^2, 0 < x_{n+1} \leq \sqrt{1 + \lambda^2}\},$$

com $\lambda \in \mathbb{R}^+$, descreve uma família de hipersuperfícies compactas tipo-espaço em \mathbb{L}^{n+1} limitadas por \mathbb{S}^{n-1} e com curvatura média constante $H_\lambda = \frac{1}{\lambda}$.

Observação 15 *A chamada **fórmula de fluxo** pode ser interpretada como o equilíbrio físico entre as forças de tensão superficial de \mathcal{M} a qual age ao longo do bordo com a força de pressão que age sobre o domínio limitado por $\partial\mathcal{M}$. Mais geralmente, se cortamos \mathcal{M} numa coleção de abertos, então a tensão superficial ao longo dos cortes e a pressão nas tampas deve ser equilibrada.*

No que segue da secção vamos estudar os hiperplanos hiperbólicos e a importância deles no enfoque Lorentziano. Agora vamos revisar a construção de tais hipersuperfícies.

Definição 42 *Para cada $\rho > 0$ e $p \in \mathbb{L}^{n+1}$, definimos os **hiperplanos hiperbólicos** como:*

$$\mathcal{H}_\rho(p) = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} : \langle x - p, x - p \rangle = -\rho^2\}.$$

Logo cada hipersuperfície tem exatamente dois componentes

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\rho(p) &= \mathcal{H}_\rho^+(p) \cup \mathcal{H}_\rho^-(p) \\ &= \{x \in \mathcal{H}_\rho(p) : \langle x - p, e_{n+1} \rangle > 0\} \cup \{x \in \mathcal{H}_\rho(p) : \langle x - p, e_{n+1} \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

Com a orientação futuro-dirigida, a curvatura média de $\mathcal{H}_\rho^+(p)$ é $\frac{1}{\rho}$ e de $\mathcal{H}_\rho^-(p)$ é $-\frac{1}{\rho}$.

Definição 43

1. Chamamos de **tampas hiperbólicas** às peças compactas de hiperplanos hiperbólicos cuja fronteira é uma $(n-1)$ -esfera, isto é, as hipersuperfícies compactas que derivam da intersecção de $\mathcal{H}_\rho^+(p)$ e $\mathcal{H}_\rho^-(p)$ com hiperplanos horizontais. Exatamente para cada $p \in \mathbb{L}^{n+1}$ e $r > 0$ considere o disco:

$$D_r(p) = \{(x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{L}^{n+1} : (x_1 - p_1)^2 + \dots + (x_n - p_n)^2 < r^2\}.$$

2. Chamamos de **tampa hiperbólica superior** $\mathcal{H}_\rho^+(p, r)$ à peça de $\mathcal{H}_\rho^+(p)$ que fica no cilindro $\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1 - p_1)^2 + \dots + (x_n - p_n)^2 < r^2, x_{n+1} \in \mathbb{R}\}$.
3. Chamamos de **tampa hiperbólica inferior** $\mathcal{H}_\rho^-(p, r)$ à peça de $\mathcal{H}_\rho^-(p)$ que fica no cilindro $\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1 - p_1)^2 + \dots + (x_n - p_n)^2 < r^2, x_{n+1} \in \mathbb{R}\}$.

As tampas hiperbólicas $\mathcal{H}_\rho^\pm(p, r)$ são as aplicações da função u_ρ^\pm definidas em $D_r(p)$ como:

$$u_\rho^\pm(x_1, \dots, x_n) = p_{n+1} \pm \sqrt{\rho^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - p_i)^2},$$

com a condição de fronteira:

$$u_\rho^\pm \Big|_{\partial D_r(p)} = p_{n+1} \pm \sqrt{r^2 + \rho^2}.$$

Ambas funções, e seus correspondentes gráficos são utilizados como hipersuperfícies de barreira para estabelecer a altura de bordos e em estimativas do gradiente.

De fato, a inclinação de tais tampas hiperbólicas em uma altura dada é um limite superior para a inclinação de qualquer comparação da aplicação de curvatura média constante, nas alturas correspondentes. Estas C^0 -estimativas e C^1 -estimativas tem uma aplicação imediata para a solutividade do problema de Dirichlet quando Ω é um domínio convexo. De forma geral, Bartnik e Simon em [4] demonstraram a existência e a regularidade para superfícies com curvatura média prescrita e valor de fronteira φ , desde que a função φ limite alguma superfície tipo-espaço.

2.3 O princípio da tangência e suas consequências

Nesta secção vamos expor o princípio da tangência para superfícies tipo-espaço com curvatura média constante e obteremos alguns resultados os quais poderiam ser interessantes por eles mesmos.

Teorema 8 *Sejam \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 duas hipersuperfícies tipo-espaço de \mathbb{L}^{n+1} com a mesma curvatura média constante (respeito à normal unitária futuro-dirigida). Suponha que são tangentes em um ponto interior comum p e que \mathcal{M}_1 está acima de \mathcal{M}_2 perto de p , então elas coincidem em uma vizinhança de p . O mesmo acontece se p é um ponto comum no bordo com a hipótese adicional que $\partial\mathcal{M}_1$ e $\partial\mathcal{M}_2$ são tangentes em p .*

Prova: Sejam u e v duas funções que são expressões locais de duas hipersuperfícies tipo-espaço \mathcal{M}_u e \mathcal{M}_v de \mathbb{L}^{n+1} . Se \mathcal{M}_u e \mathcal{M}_v tem um ponto em comum $p = (p_1, \dots, p_{n+1})$ onde elas são tangentes, vamos dizer que \mathcal{M}_u fica acima de \mathcal{M}_v perto de p quando $u \geq v$ numa vizinhança do ponto (p_1, \dots, p_n) . Nós vamos supor que

\mathcal{M}_u e \mathcal{M}_v tem a mesma curvatura média constante H . Dado que $\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1-|Du|^2}}\right) = nH$ é de tipo elíptico quase-linear, a função diferença $u - v$ satisfaz a equação elíptica linear numa vizinhança de (p_1, \dots, p_n) e portanto o princípio do máximo de Hopf para equações lineares elípticas pode ser aplicado à diferença $u - v$. Daí conclui-se o teorema. \square

Observação 16

- i. Este resultado é mais forte que o princípio de comparação o qual estabelece que se \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são dois hipersuperfícies tipo-espaço (não necessariamente constantes) com curvaturas médias H_1 e H_2 respectivamente e se \mathcal{M}_1 está localmente acima de \mathcal{M}_2 e perto de um ponto p , então $H_1(p) \geq H_2(p)$.*
- ii. O princípio da tangência permite entender a estrutura da família de hipersuperfícies tipo-espaço compactas cuja função curvatura média é constante. Para isto, observe que para cada $H \in \mathbb{R}$, o espaço \mathbb{L}^{n+1} pode ser foliado por hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante H , denominados:*

- ✓ Família de hiperplanos tipo-espaço paralelo, se $H = 0$.
- ✓ Hiperplanos hiperbólicos $\{\mathcal{H}_{\frac{1}{H}}^+(te_{n+1}) : t \in \mathbb{R}\}$, se $H > 0$.
- ✓ Família $\{\mathcal{H}_{-\frac{1}{H}}^-(te_{n+1}) : t \in \mathbb{R}\}$, se $H < 0$.

Como consequência do princípio da tangência, estabelecemos dois resultados sobre hipersuperfícies tipo-espaço compactas. Primeiro consideremos a condição para que uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com curvatura média constante fique contida num semi-espaço determinado por uma hipersuperfície umbílica.

Teorema 9 *Seja \mathcal{M} uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com curvatura média constante H . Se o bordo $\partial\mathcal{M}$ de \mathcal{M} está incluído ou num hiperplano ou num hiperplano hiperbólico Π , então \mathcal{M} está completamente incluído num dos semiespaços determinados por Π .*

Prova: (por contradição)

Suponha que \mathcal{M} possui pontos interiores em ambos lados de Π . Primeiro vamos demonstrar o resultado considerando a hipótese que $\partial\mathcal{M}$ está em um hiperplano Π . Este hiperplano deve ser do tipo-espaço e além disso nós podemos assumir, sem perda da generalidade que $\Pi = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} : \langle x, e_{n+1} \rangle = 0\}$.

Considere a família $\Pi(t) = \{x \in \mathbb{L}^{n+1} : x_{n+1} = t\}$ de hiperplanos horizontais paralelos. Dado que \mathcal{M} é uma hipersuperfície compacta e tem pontos interiores sobre Π , então existe $t_0 > 0$ tal que:

$$\Pi(t) \cap \mathcal{M} = \emptyset \quad \text{para todo } t > t_0.$$

e

$$\Pi(t_0) \cap \mathcal{M} = \emptyset$$

em algum ponto interior comum. Logo o princípio de comparação implica que $H \leq 0$. Lembrar que todas nossas hipersuperfícies tem orientação futuro-dirigidas. Mas pelo princípio da tangência descarta-se o caso $H = 0$ pois nesse caso, \mathcal{M} estaria no hiperplano $\Pi(t_0)$ o qual contradiz com que $\partial\mathcal{M} \subset \Pi(0)$. Um argumento similar usando hiperplanos $\Pi(t)$ com valores negativos para t mostra que $H > 0$, o que é uma contradição.

Agora consideremos que o bordo $\partial\mathcal{M}$ está em um hiperplano hiperbólico. Depois de uma homotetia seguida de uma isometria de \mathbb{L}^{n+1} . Nós podemos assumir que $\partial\mathcal{M}$ está incluso em um hiperplano hiperbólico superior $\mathcal{H}_1^+(0)$. Novamente por contradição, assumindo que \mathcal{M} tem pontos interiores em ambos lados de $\mathcal{H}_1^+(0)$. Considere agora a família $\mathcal{H}_1^+(te_{n+1})$ de hiperplanos hiperbólicos superiores, isto é, translações verticais de $\mathcal{H}_1^+(0)$. Como \mathcal{M} é uma hipersuperfície compacta, para um valor grande de t , vamos dizer t_1 , $\mathcal{H}_1^+(t_1e_{n+1}) \cap \mathcal{M} = \emptyset$. Agora, deslocando para baixo $\mathcal{H}_1^+(t_1e_{n+1})$ fazendo t diminuir de t_1 até 0. Já que existem pontos de \mathcal{M} que ficam sobre $\mathcal{H}_1^+(0)$, então para algum $t_0 > 0$ teremos $\mathcal{M} \cap \mathcal{H}_1^+(t_0e_{n+1}) \neq \emptyset$ em algum ponto interior e $\mathcal{M} \cap \mathcal{H}_1^+(te_{n+1}) = \emptyset$ para $t > t_0$. Então pelo princípio de comparação tem-se que $H \leq 1$. Mas se $H = 1$, o princípio da tangência implica que $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}_1^+(t_0e_{n+1})$, o qual é impossível desde que os pontos de $\partial\mathcal{M}$ não estão em $\mathcal{M} \cap \mathcal{H}_1^+(t_0e_{n+1})$. Em consequência $H < 1$. Fazendo o mesmo raciocínio com $\mathcal{M} \cap \mathcal{H}_1^+(te_{n+1})$ para $t < 0$, existe $t_2 < 0$ tal que \mathcal{M} fica acima de $\mathcal{M} \cap \mathcal{H}_1^+(t_2e_{n+1})$ e ambas superfícies são tangentes em algum ponto interior comum. Agora o princípio de comparação implica que $H \geq 1$. Evidentemente isto é uma contradição e portanto conclui-se a prova do teorema. \square

Observação 17 Usando os mesmos argumentos temos que:

- i. Se a função curvatura média de \mathcal{M} não se anula e o bordo está incluso em um hiperplano Π , então \mathcal{M} está em um dos dois hiperespaços fechados determinados por Π .
- ii. Assumindo que a curvatura média H é constante e o bordo está contido em um hiperplano hiperbólico com a mesma curvatura média constante H , então \mathcal{M} está incluso nesse hiperplano hiperbólico.

Vamos concluir esta secção estabelecendo como uma aplicação do princípio da tangência, uma C^0 -estimativa da solução da equação (2.3). Como já foi mencionado no início, não é possível obter uma C^0 -estimativa dependendo apenas de H . No seguinte teorema, vamos a derivar uma estimativa da altura em termos de H e do diâmetro de Ω .

Teorema 10 Sejam \mathcal{M} um domínio compacto de \mathbb{R}^n com diâmetro $\delta > 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ uma função cujo gráfico tem curvatura média H (não necessariamente constante). Se existe uma constante $c > 0$ tal que $|H| \leq c$. Então

$$\min_{\partial\Omega} u + \frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{4 + \delta^2 c^2} \right) \leq u \leq \max_{\partial\Omega} u + \frac{1}{c} \left(-1 + \frac{1}{2} \sqrt{4 + \delta^2 c^2} \right). \quad (2.6)$$

Em particular, se $H \equiv 0$, então

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u \leq \max_{\partial\Omega} u. \quad (2.7)$$

Prova: Sem perda da generalidade suponha que Ω está incluso no $D_r(0)$ onde $r = \frac{\delta}{2}$ e fixemos as funções v_ρ^\pm cujos gráficos são as tampas hiperbólicas $\mathcal{H}_\rho^\pm(0, r)$ com $\rho = \frac{1}{c}$. Denotemos por \mathcal{M} o gráfico de u . As translações verticais de $\mathcal{H}_\rho^+(0, r)$ são as tampas hiperbólicas de $\mathcal{H}_\rho^+(te_{n+1}, r)$. Transladando $\mathcal{H}_\rho^+(0, r)$ verticalmente para abaixo até ser disjuncto de \mathcal{M} . Logo deslocando para acima $\mathcal{H}_\rho^+(0, r)$ até o primeiro t_0 tal que

$\mathcal{H}_\rho^+(t_0 e_{n+1}, r)$ alcança \mathcal{M} em algum ponto p . Então:

$$v_\rho^+|_{\partial D_r(0)} \leq \min_{\partial\Omega} u,$$

isto é,

$$t_0 + \sqrt{\rho^2 + r^2} \leq \min_{\partial\Omega} u. \quad (2.8)$$

Assim nós temos duas possibilidades para aquele ponto p .

Caso 1 (p é um ponto de tangência entre \mathcal{M} e $\mathcal{H}_\rho^+(t_0 e_{n+1}, r)$).

Já que a curvatura média de $\mathcal{H}_\rho^+(t_0 e_{n+1}, r)$ é c e $|H| \leq c$, então o princípio da tangência afirma $|H| \equiv c$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}_\rho^+(t_0 e_{n+1}, r)$ e nós temos igualdade em (2.8) e consequentemente em (2.6).

Caso 2 (p é um ponto no bordo onde ambas superfícies \mathcal{M} e $\mathcal{H}_\rho^+(t_0 e_{n+1}, r)$ não são tangentes).

Nesse caso nós temos a igualdade (2.8), isto é, $t_0 + \sqrt{\rho^2 + r^2} = \min_{\partial\Omega} u$, e para cada $x \in \Omega$ tem-se:

$$u(x) \geq v_\rho^+(x) \geq v_\rho^+(0) = t_0 + \rho = \min_{\partial\Omega} u + \rho - \sqrt{r^2 + \rho^2}.$$

Assim (lembrando que $r = \frac{\delta}{2}$ e $\rho = \frac{1}{c}$) temos a estimativa do lado esquerdo:

$$\begin{aligned} u(x) &\geq \min_{\partial\Omega} u + \frac{1}{c} - \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{1}{c^2}} \\ &= \min_{\partial\Omega} u + \frac{1}{c} - \sqrt{\frac{\delta^2 c^2 + 4}{4c^2}} \\ &= \min_{\partial\Omega} u + \frac{1}{c} - \frac{1}{2c} \sqrt{\delta^2 c^2 + 4} \\ &= \min_{\partial\Omega} u + \frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 c^2 + 4} \right). \end{aligned}$$

De forma análoga, podemos demonstrar a outra desigualdade de (2.6) usando as tampas hiperbólicas de $\mathcal{H}_\rho^-(t_0 e_{n+1}, r)$.

Para o caso $H \equiv 0$, tomando $c \rightarrow 0$, temos a desigualdade 2.7. Isto conclui a prova. \square

Como corolário pode ser interessante ressaltar o caso no qual a curvatura média é constante e a fronteira está contida em um hiperplano.

Corolário 1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave com diâmetro δ , H um número real e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ uma solução de (2.3) com a condição de fronteira $u = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então*

$$|u - \alpha| \leq \frac{1}{|H|} \left(-1 + \frac{1}{2} \sqrt{4 + H^2 \delta^2} \right)$$

e a igualdade segue se, e somente se, o gráfico de u é uma tampa hiperbólica.

2.4 Prova do teorema

Bartnik e Simon obtiveram uma estimativa similar a $h \leq \frac{|H|A}{2\pi}$ no contexto dos gráficos.

A monotonicidade deles mede a variação da área da superfície que encontra-se no domínio

$$S_r(p) = \{x \in \mathbb{L}^3 : \langle x - p, x - p \rangle < r^2\}.$$

Eles provaram que se o bordo de \mathcal{M} satisfaz:

$$\partial\mathcal{M} \cap S_r(p) = \emptyset,$$

então tem-se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{área}(\mathcal{M} \cap S_r(p))}{r^2} = \pi.$$

Esta abordagem é baseada na fórmula de co-área de Federer para a função altura, uma fórmula que mede o fluxo da superfície através do bordo, junto com a clássica desigualdade isoperimétrica no plano.

Teorema 11 *Seja $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma imersão tipo-espaço de uma superfície compacta com o bordo contido em um plano Π e com curvatura média constante H . Se h denota a altura de \mathcal{M} com respeito a Π , então temos:*

$$h \leq \frac{|H|A}{2\pi}, \quad (2.9)$$

onde A é a área da região de \mathcal{M} no plano Π . A igualdade ocorre se, e somente se, \mathcal{M} é um domínio planar ($H = 0$) ou uma tampa hiperbólica ($H \neq 0$).

Prova: Começaremos demonstrando que se a superfície é uma tampa hiperbólica, então a desigualdade (2.9) é válida:

Considere $\mathcal{H}_\rho^-(0, r)$ com $\rho = \frac{1}{|H|}$, então

$$\mathcal{H}_\rho^-(0, r) \subset \{x \in \mathbb{L}^3 : x_3 \geq -\left(\frac{1}{|H|}\right)\sqrt{1 + H^2r^2}\} \text{ e}$$

$$\partial\mathcal{H}_\rho^-(0, r) \subset \{x \in \mathbb{L}^3 : x_3 = -\left(\frac{1}{|H|}\right)\sqrt{1 + H^2r^2}\}.$$

Seque que

$$H = \frac{(\sqrt{1 + H^2r^2} - 1)}{|H|}, \text{ e}$$

$$\text{área}(\mathcal{H}_\rho^-(0, r)) = \frac{2\pi}{H^2}(\sqrt{1 + H^2r^2} - 1).$$

Considere \mathcal{M} uma superfície satisfazendo as hipóteses do teorema 11. Seja a o vetor unitário tipo-tempo futuro-dirigido em \mathbb{L}^3 tal que $\Pi = a^\perp$. Fazendo uma isometria do espaço ambiente e assumindo que $a = e_3 = (0, 0, 1)$ e $\Pi = \{x \in \mathbb{L}^3 : \langle x, e_3 \rangle = 0\}$. Denote $\Gamma = x(\partial\mathcal{M})$. Se a curvatura média é $H = 0$, então $x(\mathcal{M})$ é o domínio planar determinado por Γ . Nesse caso, a altura é $h = 0$ e temos a igualdade em (2.2). Agora considere $H \neq 0$; e a função $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\langle x, e_3 \rangle$ o qual mede a altura de \mathcal{M} respeito de Π . Nós precisamos estimar a altura h da superfície, isto é, o número $h = \max_{p \in \mathcal{M}} f(p) \geq 0$. Fazendo uso da fórmula de co-área o raciocínio é e seguinte:

$$\mathcal{M}(t) = \{p \in \mathcal{M} : f(p) \geq t\}, \quad \Gamma(t) = \{p \in \mathcal{M} : f(p) = t\}.$$

Denotando por $A(t)$ e $L(t)$ à área e o comprimento de $\mathcal{M}(t)$ e $\Gamma(t)$ respetivamente. Vamos calcular os pontos críticos da função f . Como $\nabla\langle x, e_3 \rangle = e_3 - \langle N, e_3 \rangle N$, então

$p \in \mathcal{M}$ é um ponto crítico de f se $|\nabla f|^2(p) = -1 + \langle N, e_3 \rangle = 0$, isto é, se $N(p) = e_3$. Defina-se sobre \mathcal{M} as funções $g_i = \langle N, e_i \rangle$, $i = 1, 2$, onde $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$. Portanto, o conjunto \mathcal{C} de pontos críticos de f está dentro de $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$, onde

$$\mathcal{N}_1 = \{p \in \mathcal{M} : \langle N(p), e_1 \rangle = 0\}, \quad \mathcal{N}_2 = \{p \in \mathcal{M} : \langle N(p), e_2 \rangle = 0\}$$

são as linhas nodais de g_1 e g_2 respectivamente.

Por outro lado, dado um vetor fixo $a \in \mathbb{L}^3$, então a curvatura média H da imersão x da seguinte fórmula:

$$\Delta \langle N, a \rangle = (4H^2 + 2K) \langle N, a \rangle = \text{tr} A^2 \langle N, a \rangle, \quad (2.10)$$

onde Δ é o laplaciano da métrica induzida por x e K é a curvatura Gaussiana de \mathcal{M} . Segue desta equação que as funções g_1 e g_2 satisfazem:

$$\Delta g_i - \text{tr}(A^2)g_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.11)$$

Se as funções g_i são identicamente nulas, então $N = e_3$ sobre \mathcal{M} e a superfície seria um domínio planar, isto é $H = 0$ o que contradiz a hipótese. Assim, ou g_1 ou g_2 são não triviais, pois as equações (2.11) são de tipo Schrödinger. Logo pelo teorema de Cheng sobre linhas nodais temos que a linha nodal de g_i tem um número finito de círculos imersos. Em particular sua medida é 0 e também de \mathcal{C} . Daí segue-se que $A(t)$ é uma função contínua e a fórmula de co-área diz:

$$A'(t) = - \int_{\Gamma(t)} \frac{1}{|\nabla f|} dS_t, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde dS_t é o elemento da linha sobre o nível $\Gamma(t)$. Pela desigualdade de Hölder temos:

$$L(t)^2 = \left(\int_{\Gamma(t)} dS_t \right)^2 \leq \int_{\Gamma(t)} |\nabla f| dS_t \int_{\Gamma(t)} \frac{1}{|\nabla f|} dS_t = -A'(t) \int_{\Gamma(t)} |\nabla f| dS_t. \quad (2.12)$$

Além disso, temos que $|\nabla f|$ ao longo da curva $\Gamma(t)$ é:

$$|\nabla f|^2 = -1 + \langle N, e_3 \rangle^2 = \langle \nu_t, e_3 \rangle^2,$$

onde ν_t é o vetor unitário co-normal de $\mathcal{M}(t)$ ao longo de $\Gamma = \partial\mathcal{M}(t)$. Como $\mathcal{M}(t)$ está acima do plano $\Pi(t) = \{x \in \mathbb{L}^3 : -\langle x, e_3 \rangle = t\}$, então sabemos que $\langle \nu_t, e_3 \rangle \leq 0$. Portanto:

$$|\nabla f|_{|\Gamma(t)} = -\langle \nu_t, e_3 \rangle.$$

Daí pela equação (2.12) temos:

$$L(t)^2 \leq A'(t) \int_{\Gamma(t)} \langle \nu_t, e_3 \rangle dS_t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Como $\mathcal{M}(t)$ é uma superfície compacta com bordo suave $\Gamma(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se

$t \geq 0$, $\Gamma(t) \subset \Pi(t)$, logo pela fórmula de fluxo (2.5) temos que:

$$- \int_{\partial\mathcal{M}(t)} \langle \nu_t, e_3 \rangle dS_t = 2|H|a_g(t)$$

onde $a_g(t)$ é a área algébrica da curva plana fechada $\Gamma(t)$. Assim de (2.13) temos que

$$L(t)^2 \leq -2|H|A'(t)|a_g(t)|. \quad (2.14)$$

Se $t < 0$, então $\partial\mathcal{M} \subset \mathcal{M}(t)$ e assim $\Gamma(t)$ tem uma componente no plano Π e possivelmente outros em $\Pi(t)$.

Denotemos por $\Omega_1(t), \dots, \Omega_{n_t}(t)$ os domínios limitados determinados por $\Pi(t) \cap \mathcal{M}(t)$ e seja $a_i(t)$ a área de Lebesgue do correspondente $\Omega_i(t)$. Então

$$a_g(t) = \epsilon_1 a_1(t) + \dots + \epsilon_{n_t} a_{n_t}(t),$$

onde $\epsilon_i \in \mathbb{Z}$ é o número de ordem correspondente às curvas $x(\partial\Omega_i(t))$. Logo

$$|a_g(t)| \leq |\epsilon_1|a_1(t) + \dots + |\epsilon_{n_t}|a_{n_t}(t). \quad (2.15)$$

Se $L_i(t)$ denota o comprimento de $\partial\Omega_i(t)$, então temos que:

$$|L(t)| = |\epsilon_1|L_1(t) + \dots + |\epsilon_{n_t}|L_{n_t}(t),$$

o qual implica que

$$\epsilon_1^2 L_1^2(t) + \dots + \epsilon_{n_t}^2 L_{n_t}^2(t) \leq L^2(t). \quad (2.16)$$

Daí pelas desigualdades (2.14)-(2.16) temos:

$$\epsilon_1^2 L_1^2(t) + \dots + \epsilon_{n_t}^2 L_{n_t}^2(t) \leq -2|H|A'(t) \left(|\epsilon_1|a_1(t) + \dots + |\epsilon_{n_t}|a_{n_t}(t) \right).$$

Nós usamos a desigualdade isoperimétrica no plano $\Pi(t)$. Note-se que como $\Pi(t)$ é isométrico com o plano Euclidiano \mathbb{R}^2 , então tal desigualdade é válida para tais planos. Portanto $4\pi a_i(t) \leq L_i^2(t)$, mas $|\epsilon_i| \leq \epsilon_i^2$, então temos que

$$2\pi \leq -|H|A'(t), \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (2.17)$$

Integrando essa desigualdade desde 0 ate a altura h temos:

$$2\pi h \leq |H| \left(A(0) - A(h) \right) = |H|A,$$

daí segue a estimativa (2.9).

Para finalizar a prova vamos analisar a igualdade em (2.9). Nesse caso temos igualdade em (2.12) e na desigualdade isoperimétrica. Assim $|\nabla f|$ é uma função constante sobre $\Gamma(t)$, então $\Gamma(t)$ é uma circunferência para cada $t > 0$. Porém de [5], as únicas superfícies tipo-espaço compactas de \mathbb{L}^3 com curvatura média constante não nula e fronteira limitada por uma circunferência são as tampas hiperbólicas. Isto mostra que $x(\mathcal{M})$ é uma tampa hiperbólica e portanto conclui-se a demonstração. \square

Exemplo 19 *Considere a superfície tipo espaço imersa em $S^3(1)t$*

Uma consequência imediata do teorema 11 é o seguinte corolário.

Corolário 2 *Seja $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma imersão como no teorema 11 excepto que o bordo não é planar. Denote por x_3 a função altura sobre \mathcal{M} dada por $x_3(p) = -\langle p, e_3 \rangle$. Logo:*

$$\min_{\partial\mathcal{M}} x_3 - \frac{\text{área}(\mathcal{M})|H|}{2\pi} \leq x_3 \leq \max_{\partial\mathcal{M}} x_3 + \frac{\text{área}(\mathcal{M})|H|}{2\pi}.$$

Observação 18

- i. A interpretação do teorema 11 é: qualquer superfície tipo-espaço compacta \mathcal{M} de \mathbb{L}^3 com curvatura média constante e com bordo planar tem área maior que a área de uma tampa hiperbólica com a mesma altura e curvatura média que \mathcal{M} .*
- ii. Um problema em aberto é a generalização da estimativa (2.9) para dimensão arbitrária. Conjeturamos que para uma hipersuperfície tipo-espaço compacta \mathcal{M} de \mathbb{L}^{n+1} com curvatura média constante H e cujo bordo esteja contido num hiperplano, segue a seguinte estimativa da altura h de \mathcal{M} :*

$$h \leq \frac{\text{vol}(\mathcal{M})|H|}{\omega_{n-1}},$$

onde ω_{n-1} é o volume da esfera unitária de dimensão $(n - 1)$.

Referências Bibliográficas

- [1] R. LÓPEZ, *Differential Geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space*, International Electronic Journal of Geometry, 7 (2014), 44-107.
- [2] R. LÓPEZ, *Área monotonicity for spacelike surface with constant mean curvature*, Journal of Geometry and Physics, 52 (2004), no 3, 353-363.
- [3] R. BARTNIK, Maximal surfaces and general relativity, in: Proceedings of the Mini-conference on Geometry and Partial Differential Equations, vol.2, Canberra,1986; *Maximal surfaces and general relativity*, in: Proceedings of the Centre of Mathematical Analysis, vol.12, Australian National University, Canberra, 1987, pp 24-49.
- [4] R. BARTNIK, L. SIMON, *Spacelike hypersurfaces with prescribed boundary values and mean curvature*, commun. Math. Phys. (1982) pp 131-152.
- [5] L. ALÍAS, R. LÓPEZ, J. PASTOR, *Compact spacelike surfaces with constant mean curvature in the Lorentz-Minkowski 3-space*, Tohoku Math. J. 50(1998)491-501.
- [6] E. CALABI, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Sympos. Pure Math. 15 (1970), 223-230.
- [7] S. Y. CHENG, S. T. YAU, *Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space*, Ann. of Math., 104 (1976) 407-419.
- [8] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Maximal submanifolds and submanifolds of constant extrinsic curvature of a Lorentzian manifold*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 3 (1976), 361-376.
- [9] Y. CHOQUET-BRUHAT, A. E. FISCHER, J. E. MARSDEN *Maximal hypersurfaces and positivity of mass*, Proc. of the E. Fermi Summer School of the Italian Physical Society, J. Ehlers, ed. North-Holland, 1979.
- [10] A. J. GODDARD, *Foliations of space by spacelike hypersurfaces of constant mean curvature*, Comm. Math. Phys., 54 (1977), 279-282.
- [11] A. J. GODDARD *Some remarks on the existence of spacelike hypersurface of constant mean curvature*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 82 (1977), 489-495.
- [12] J. E. MARSDEN, F. J. TIPLER, *Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in the general relativity*, Phis. Rep. C, 66 (1980), 109-139.

- [13] S. STUMBLES, *Hypersurfaces of constant mean extrinsic curvature*, Ann. of Physics 133 (1981), 28-56.
- [14] M. PERDIGAO DO CARMO *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, (2008).
- [15] BARRET O' NEILL *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press a Division of Hareourt Brace, (1900).