

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SOBRE A CATEGORIA DERIVADA DO PRODUTO
TENSORIAL DE ÁLGEBRAS

Juliano Soares Amaral Dias

Belo Horizonte - MG
2017

Juliano Soares Amaral Dias

SOBRE A CATEGORIA DERIVADA DO
PRODUTO TENSORIAL DE ÁLGEBRAS

Tese apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Professor Viktor Bekkert

Belo Horizonte
2017

Agradecimentos

Agradeço aos membros da banca, Prof. John MacQuarrie (UFMG), Prof. Flávio Ulhoa (USP), Prof. Eduardo Marcos (USP) e Prof. Edson Ribeiro (UFPR). Agradeço ao CNPq, pelo apoio financeiro, à UFOP, pelo incentivo, à UFMG, por todos os treze anos que mudaram minha vida.

Agradeço aos professores e funcionários do departamento de matemática da UFMG, em especial ao Prof. Viktor Bekkert, que acreditou em mim quando nem eu acreditava mais, às amigas Eliane Andréa e Eliane Kelli, que sempre me receberam de braços abertos, ao Coordenador Prof. Rémy Sanchis, por todo seu apoio.

Agradeço às irmãs acadêmicas Adriana Xavier e Ana Paula Cota, por todas as valiosas conversas e discussões, aos queridos amigos da UFMG, Camila Ferreira, Édén Amorin e Rafael Bezerra, com quem compartilhei todas as minhas tristezas e felicidades, aos queridos amigos da UFOP, Antônio Marcos, Edney Augusto, Isaque Viza, Monique Rafaella e Vinícius de Almeida, por todas as palavras de apoio.

Dedico esta Tese aos meus pais, José Maria de Paula Dias e Carmelita Soares Rodrigues Dias, que sempre me motivaram com todo amor que eu precisava, à minha irmã Janaína, que me deu a sobrinha mais linda do mundo, ao meu irmão Junio, que foi o grande responsável pelo meu ingresso na vida acadêmica, à Jeanne Amaral, que acompanhou cada passo desta caminhada.

Resumo

Neste trabalho, a menos de equivalência derivada, classificamos as álgebras derivadamente mansas do produto tensorial de álgebras básicas, não semissimples, de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado.

Palavras-chave: Categoria derivada, álgebras derivadamente mansas, derivadamente selvagens, produto tensorial de álgebras.

Abstract

In this thesis we describe the derived tame tensor products $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ of basic, connected, nonsimple, finite-dimensional algebras \mathbf{A} and \mathbf{B} over an algebraically closed field \mathbf{k} .

Key Words: Derived category, derived tame, tensor product of algebras, group algebras.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos e Resultados Iniciais	7
1.1 A Álgebra e as Representações de um Quiver com Relações	7
1.2 Álgebras Mansas e Selvagens	12
1.3 Produto Tensorial de quivers com relações	17
1.4 Álgebras de Grupo	19
1.5 Álgebras de Matrizes e Álgebras Envolventes	22
1.6 Categoria Triangulada e Categoria Derivada	23
1.7 Equivalência Derivada	27
1.8 Álgebras Hereditárias por partes	36
1.9 Álgebras Canônicas e Retas Projetivas com Pesos	37
1.10 Tipos de Representações da Categoria Derivada	38
2 A Categoria Derivada de $A \otimes_{\mathbf{k}} B$	45
2.1 Álgebras $A \otimes_{\mathbf{k}} B$ Derivadamente Selvagens	45
2.2 A Álgebra $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} B$	59
2.3 Álgebras do tipo Árvore	64
3 O Teorema Principal e Suas Consequências	71
3.1 Demonstração do Teorema Principal	71
3.1.1 $A \simeq_d \mathbf{k}A_2$ e $B \simeq_d \mathbf{k}D_4$	72
3.1.2 $A \simeq_d \mathbf{k}A_2$ e $B \simeq_d \mathbf{k}A_n$, em que $2 \leq n \leq 5$	72
3.1.3 $A \simeq_d B \simeq_d \mathbf{k}A_3$	72

3.1.4	Feixes Coerentes e Álgebras de Dynkin	73
3.1.5	$\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ Derivadamente Mansa	73
3.1.6	Corolários do Teorema Principal	75
3.2	Álgebras de Grupo Derivadamente Mansas	76
3.3	Álgebras Envolventes Derivadamente Mansas	78
3.4	Álgebras de Matrizes Triangulares Inferiores	79
3.5	Listas das Álgebras $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ Derivadamente Mansas	80
	Tabela 3.1	81
	Tabela 3.2	82
	Tabela 3.3	83
	Tabela 3.4	83
	Referências Bibliográficas	84
	Índice Remissivo	89

Introdução

Neste trabalho, o corpo \mathbf{k} será sempre algebricamente fechado e as álgebras serão \mathbf{k} -álgebras associativas, com unidade, básicas, conexas e de dimensão finita. Dada uma álgebra \mathbf{A} , definimos $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$, como a categoria de \mathbf{A} -módulos à direita finitamente gerados. Sabemos que a categoria $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$ é de Krull-Schmidt, e portanto, é natural que se queira classificar todos os objetos indecomponíveis. O estudo dos módulos indecomponíveis de uma álgebra é, entre outros, um dos principais interesses da área de Teoria de Representações de álgebras associativas. Em geral, distinguimos os diversos tipos de representações de uma categoria, pelo comportamento quantitativo dos seus objetos indecomponíveis.

Dizemos que uma álgebra é *mansa* se em cada dimensão n , os módulos indecomponíveis de dimensão n ocorrem parametrizados por uma quantidade finita de famílias a um parâmetro, a menos de uma quantidade finita. Enquanto que as *selvagens* tem famílias de módulos indecomponíveis dependendo de uma quantidade arbitrária de parâmetros contínuos. As duas características em questão são invariantes por equivalências entre categorias, cuja condição necessária e suficiente foi estabelecida pelo Teorema de Morita ao final da década de 50 [Mor58]. Drozd enunciou e demonstrou o Tame and Wild Teorema [Dro79], determinando que todas as álgebras são mansas ou selvagem, e jamais são ambas, dividindo as categorias de módulos em duas classes disjuntas.

Dados um corpo \mathbf{k} de característica p , um grupo finito G e uma álgebra \mathbf{A} , denotamos as álgebras de grupo com coeficientes em \mathbf{A} , por $\mathbf{A}[G]$. As álgebras de grupo do tipo $\mathbf{k}[G]$ de representação finita foram classificadas por Higman na década de cinquenta [Hig54]. Nos anos setenta, Bondarenko e Drozd classificaram as do tipo $\mathbf{k}[G]$ de representação mansa [BD77]. Meltzer e Skowroński classificaram as álgebras de grupo $\mathbf{A}[G]$ de representação finita [MS83][MS84] na década de oitenta. No início deste século, Leszczyński e Skowroński classificaram as álgebras de grupo $\mathbf{A}[G]$ mansas [LS03].

As álgebras do tipo $T_n(\mathbf{A})$ são as álgebras das matrizes triangulares inferiores de ordem $n \times n$ com entradas em uma álgebra \mathbf{A} . Nos anos 70, Brenner [Bre71] e Auslander [AR76] iniciaram a classificação de indecomponíveis na categoria de módulos do caso $T_2(\mathbf{A})$. Na década de 90, Leszczyński obteve alguns resultados na classificação do caso $T_n(\mathbf{A})$ mansa [Les94]. E no início deste século, Leszczyński e Skowroński [LS00] classificaram alguns casos particulares do tipo $T_2(\mathbf{A})$ mansa. Para $n \geq 3$, Leszczyński e Skowroński classificaram todas as álgebras $T_n(\mathbf{A})$ mansas, a menos de isomorfismo [LS03].

Destacamos o artigo [LS03] de Leszczyński e Skowroński, que citamos anteriormente, pela classificação das álgebras de grupo mansas e das álgebras de matrizes triangulares

inferiores de ordem maior ou igual a três mansas. Neste mesmo trabalho, Leszczyński e Skowroński obtiveram alguns resultados da classificação das álgebras do produto tensorial $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ mansas e classificaram as álgebras envolventes $\mathbf{A}^e = \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}^{op}$ mansas.

Grothendieck e Verdier iniciaram os estudos das categorias trianguladas e categorias derivadas, introduzidas inicialmente, na Geometria Algébrica e Álgebra Homológica. Hartshorne [Har66], Beilinson, Bernstein e Deligne [BBD82] e Iversen [Ive86] também trabalharam com estas categorias. Passados alguns anos Happel [Hap88] começou o estudo sistemático de categorias derivadas de categorias de módulos de álgebras associativas de dimensão finita.

Sabemos que a categoria derivada de uma álgebra é de Krull-Schmidt, motivando novos trabalhos na busca por classificar os objetos indecomponíveis. De La Peña [dlPn98] deu as primeiras ideias de mansidão da categoria derivada, via álgebras repetitivas. Em seguida, Vossieck [Vos01] introduziu o conceito de álgebras derivadamente discretas. Motivados por estes dois trabalhos, Geiß e Krause [GK02] deram a definição clássica de álgebras derivadamente mansas. A grosso modo, as álgebras derivadamente mansas, são as que em sua categoria derivada, em cada dimensão cohomológica $\vec{n} = (n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, os complexos indecomponíveis podem ser parametrizados por uma quantidade finita de famílias a um parâmetro. Enquanto que as derivadamente selvagens, são aquelas que em uma dimensão cohomológica, os complexos indecomponíveis são parametrizados por uma quantidade arbitrária de parâmetros contínuos. Neste mesmo trabalho, foi demonstrado que o tipo de representação derivada é preservado por equivalência triangulada entre as categorias derivadas, cujas condições necessárias e suficientes foram enunciadas por Rickard no conhecido *Teorema de Rickard* [[Ric89], Teorema 6.4]. Bekkert e Drozd demonstraram o Derived Tame and Wild Teorema [BD03], determinando que todas as álgebras são derivadamente mansas ou derivadamente selvagens, mas nunca ambas.

Neste trabalho classificamos os pares de álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} , que não são semissimples, cujo produto tensorial $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é uma álgebra derivadamente mansa. Nós também classificamos as álgebras derivadamente mansas do tipo $\mathbf{A}[G]$, $T_n(\mathbf{A})$ e \mathbf{A}^e . Nos resultados a seguir, $\mathbf{k}A_n$, $\mathbf{k}D_4$ e $\mathbf{k}E_n$ são álgebras do tipo Dynkin, $D_{(m)}$, $S_{(m)}$ e $Q_{(m)}$ são grupos e \mathbb{X}_{236} , \mathbb{X}_{244} e \mathbb{X}_{333} são retas projetivas com pesos.

Teorema Principal. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} duas \mathbf{k} -álgebras associativas, básicas, conexas, não simples de dimensão finita. As afirmações abaixo são equivalentes:*

1. $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa.
2. as álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} satisfazem um dos seguintes casos:
 - (a) uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}D_4$;
 - (b) uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}A_n$, em que $2 \leq n \leq 5$;
 - (c) ambas são derivadamente equivalentes a $\mathbf{k}A_3$.
3. $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente equivalente a uma das álgebras de Dynkin $\mathbf{k}D_4$, $\mathbf{k}E_6$ ou $\mathbf{k}E_8$, ou a uma das categorias de feixes coerentes das retas projetivas com pesos \mathbb{X}_{236} , \mathbb{X}_{244} ou \mathbb{X}_{333} .

Nestes casos, a álgebra $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é hereditária por partes.

É conhecido que uma álgebra básica é derivadamente equivalente a álgebra de Dynkin $\mathbf{k}A_2$ se, e somente se, é isomorfa a $\mathbf{k}A_2$. As álgebras derivadamente equivalentes a $\mathbf{k}D_4$ e $\mathbf{k}A_n$ com $3 \leq n \leq 5$ também são conhecidas, cujas classificações estão descritas na Proposição 1.35 e no Corolário 1.34, respectivamente. Segue abaixo algumas consequências do Teorema Principal.

Corolário 1. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} duas \mathbf{k} -álgebras associativas, básicas, conexas, não simples de dimensão finita. O produto tensorial das álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} é derivadamente discreto se, e somente se, uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}A_n$, em que $2 \leq n \leq 4$. Nestes casos, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}D_4$, $\mathbf{k}E_6$ ou $\mathbf{k}E_8$.*

Corolário 2. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} duas \mathbf{k} -álgebras associativas, básicas, conexas, não simples de dimensão finita. A álgebra $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente discreta se, e somente se, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente finita.*

Corolário 3. *Dados um número natural $n \geq 3$ e n álgebras $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ associativas, básicas, conexas, não simples de dimensão finita. A álgebra $\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}} \dots \otimes_{\mathbf{k}} \Lambda_n$ é derivadamente mansa se, e somente se, $n = 3$ e $\Lambda_1 \cong \Lambda_2 \cong \Lambda_3 \cong \mathbf{k}A_2$. Neste caso, o produto tensorial $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$ é derivadamente equivalente a categoria de feixes coerentes da reta projetiva com pesos \mathbb{X}_{333} .*

Teorema 1. *Sejam G um grupo finito, \mathbf{k} um corpo de característica \mathbf{p} e \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita. A álgebra de grupo $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente mansa se, e somente se, ocorre um dos seguintes casos:*

1. \mathbf{p} não divide a ordem de G e \mathbf{B} é derivadamente mansa;
2. \mathbf{p} divide a ordem de G , $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$ e $\mathbf{k}[G]$ é derivadamente mansa.

Corolário 4. *Sejam \mathbf{k} um corpo de característica 2 e \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita. Se G é um dos grupos listados abaixo, então $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente selvagem.*

1. grupo diedral $D_{(m)} = \langle g, h \mid g^2 = h^{2^m} = 1, hg = gh^{-1} \rangle$, em que $m \geq 1$;
2. grupo semidiedral $S_{(m)} = \langle g, h \mid g^2 = h^{2^m} = 1, hg = gh^{2^{m-1}-1} \rangle$, em que $m \geq 3$;
3. grupo dos quatérnios $Q_{(m)} = \langle g, h \mid g^2 = h^{2^{m-1}}, g^4 = 1, hg = gh^{-1} \rangle$, com $m \geq 2$.

Corolário 5. *Sejam \mathbf{k} um corpo de característica \mathbf{p} , G um grupo cíclico de ordem \mathbf{p}^n e \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita. A álgebra de grupo $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente mansa se, e somente se, $\mathbf{p} = 2$, $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$ e G é o grupo cíclico de ordem 2. Neste caso, $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente discreta.*

Teorema 2. *Seja \mathbf{A} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa, não simples de dimensão finita. A álgebra envolvente \mathbf{A}^e é derivadamente discreta se, e somente se, \mathbf{A} é isomorfa a $\mathbf{k}A_2$. Neste caso, \mathbf{A}^e é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}D_4$.*

Teorema 3. *Seja \mathbf{A} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa, não simples de dimensão finita. A álgebra envolvente \mathbf{A}^e é derivadamente mansa se, e somente se, \mathbf{A} é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ ou $\mathbf{k}A_3$. Nestes casos, \mathbf{A}^e é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}D_4$ ou \mathbb{X}_{244} .*

Teorema 4. *Sejam $n > 1$, \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita e $T_n(\mathbf{B})$ a álgebra de matrizes triangulares inferiores de ordem $n \times n$ com coeficientes em \mathbf{B} . $T_n(\mathbf{B})$ é derivadamente discreta se, e somente se, ocorre um dos seguintes casos:*

1. $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$;
2. $n = 2$ e \mathbf{B} é derivadamente equivalente a $T_m(\mathbf{k})$, em que $2 \leq m \leq 4$;
3. $n = 3$ e $\mathbf{B} \cong T_2(\mathbf{k})$;
4. $n = 4$ e $\mathbf{B} \cong T_2(\mathbf{k})$.

Teorema 5. *Sejam $n > 1$, \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita e $T_n(\mathbf{B})$ a álgebra de matrizes triangulares inferiores de ordem $n \times n$ com coeficientes em \mathbf{B} . A álgebra $T_n(\mathbf{B})$ é derivadamente mansa se, e somente se, ocorre um dos seguintes casos:*

1. $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$;
2. $n = 2$ e \mathbf{B} é derivadamente equivalente a um dos casos abaixo;
 - (a) $T_m(\mathbf{k})$, em que $2 \leq m \leq 5$,
 - (b) $T_2(T_2(\mathbf{k}))$;
3. $n = 3$ e \mathbf{B} é derivadamente equivalente a $T_m(\mathbf{k})$, em que $m = 2$ ou $m = 3$;
4. $n = 4$ e $\mathbf{B} \cong T_2(\mathbf{k})$;
5. $n = 5$ e $\mathbf{B} \cong T_2(\mathbf{k})$.

Teorema 6. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} duas \mathbf{k} -álgebras associativas, básicas, conexas, não simples de dimensão finita. A álgebra $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa se, e somente se, o par de álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} é isomorfo a um dos pares de álgebras listados nas Tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4.*

Corolário 6. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} duas \mathbf{k} -álgebras associativas, básicas, conexas, não simples de dimensão finita. As afirmações abaixo são equivalentes:*

1. $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente finita.
2. $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente discreta.
3. O par de álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} é isomorfo a um dos pares de álgebras da Tabela 3.1.

Organizamos o texto em três capítulos. No primeiro, apresentamos os conceitos básicos e fixamos a notação ao longo do trabalho. Ressaltamos que muitos dos resultados enunciados no primeiro capítulo são essenciais em nossas demonstrações.

No segundo capítulo, iniciamos nossos resultados, dividindo em três seções. Na primeira seção, demonstramos que algumas álgebras estrategicamente escolhidas são derivadamente selvagens. Na segunda seção, obtemos vários lemas que comparam o tipo da representação derivada do produto tensorial $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ com o tipo das representações derivadas das álgebras \mathbf{A} , \mathbf{B} e do produto tensorial de uma delas com $\mathbf{k}A_2$. Nesta mesma seção, iniciamos uma caracterização do quiver destas álgebras, mais especificamente, do comportamento em cada vértice. Na terceira seção, demonstramos que se $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa, então as álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} são álgebras do tipo árvore ou isomorfas a $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$.

No terceiro e último capítulo, demonstramos o Teorema Principal e damos as consequências nas álgebras de grupo, álgebras envelopentes e álgebras de matrizes triangulares inferiores.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Iniciais

De maneira sucinta, neste capítulo definimos, fixamos notações e apresentamos resultados que são utilizados ao longo deste trabalho. O corpo \mathbf{k} é sempre algebricamente fechado e as álgebras \mathbf{A} são \mathbf{k} -álgebras associativas, com unidade, básicas, conexas e de dimensão finita, exceto por algumas álgebras que especificamos. Definimos $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$, como a categoria de \mathbf{A} -módulos à direita finitamente gerados.

1.1 A Álgebra e as Representações de um Quiver com Relações

Nesta seção definimos, fixamos notações e apresentamos resultados sobre álgebras de caminhos e representações de quivers. Quiver, a grosso modo, pode ser visto como uma representação gráfica de uma álgebra associativa, que também permite visualizar seus módulos como famílias de \mathbf{k} -espaços vetoriais conectados por aplicações lineares. Segundo Assem, Simson e Skowroński a ideia de tal representação gráfica retorna ao final dos anos quarenta por Grothendieck [Gro57] e Thral [Thr47], mas a noção mais explícita de quiver e representação de quiver foi apresentada por Gabriel em [Gab72], dando início a Teoria Moderna de Representações de Álgebras Associativas de dimensão finita. Maiores detalhes sobre o assunto e as demonstrações de todas as propriedades e teoremas citados nesta seção podem ser vistos em [ASS06].

Definição 1.1 (Quiver). *Um quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ é uma quádrupla formada por um conjunto Q_0 de vértices, um conjunto Q_1 de flechas e duas aplicações $s, t : Q_1 \longrightarrow Q_0$, que associam cada flecha $\alpha \in Q_1$ aos vértices início $s(\alpha) \in Q_0$ e final $t(\alpha) \in Q_0$.*

Usualmente, representa-se um quiver por um grafo orientado, em que cada flecha $\alpha \in Q_1$ é uma seta do grafo, ligando os vértices $s(\alpha)$ e $t(\alpha)$, como abaixo:

$$s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha).$$

Quando não faz diferença, omitimos o nome de cada flecha ou até mesmo sua orientação no grafo de Q . Dizemos que dois vértices $i, j \in Q_0$ são *vizinhos* se um é início e o outro é

final de algum $\alpha \in Q_1$. Neste texto, usamos letras gregas minúsculas para as flechas e as denotamos por $\alpha : s(\alpha) \longrightarrow t(\alpha)$. Nos casos em que $s(\alpha) = t(\alpha) = i$, chamamos α de *laço* e o representamos no grafo orientado como abaixo:

$$i \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \alpha \end{array}.$$

Em geral, por depender somente das flechas e dos vértices, denotamos o quiver por apenas $Q = (Q_0, Q_1)$. Dizemos que um quiver Q é *finito* se Q_0 e Q_1 são conjuntos finitos e é *conexo* se o grafo não orientado do quiver é conexo. Um *caminho* $c = \alpha_1 \dots \alpha_n$ de *comprimento* n do vértice i para o vértice j é uma sequência de n flechas $(i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid j)$, em que $s(\alpha_1) = i$, $t(\alpha_n) = j$ e $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ para qualquer $1 \leq k \leq n-1$. Embora as aplicações s, t sejam de Q_1 em Q_0 , extendemos para caminhos, definindo para $c = \alpha_1 \dots \alpha_n$ seu início $s(c) = s(\alpha_1)$ e final $t(c) = t(\alpha_n)$. Para cada vértice $i \in Q_0$, associamos um caminho $\varepsilon_i = (i \parallel i)$ de comprimento 0, chamado de *caminho trivial ou estacionário*. Um caminho c de comprimento n é um *ciclo* se $n \geq 1$ e $s(c) = t(c)$. Um quiver Q é *acíclico* se não possui ciclos.

Exemplo 1. Os três quivers abaixo são acíclicos:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 3 \\ \uparrow \\ 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4, \end{array} & \begin{array}{c} 1 \longrightarrow 2 \\ \longrightarrow \\ 1 \longrightarrow 2 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3 & \longrightarrow & 4. \end{array} \end{array}$$

Enquanto que os próximos dois quivers possuem ciclos:

$$1 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ 2, \end{array} \quad \alpha \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1 \xrightarrow{\beta} 2 \curvearrowright \gamma. \end{array}$$

Para estabelecermos a noção de caminho não orientado, associamos para cada flecha $\alpha : 1 \longrightarrow 2$ de Q , o seu inverso formal $\alpha^{-1} : 2 \longrightarrow 1$ com início $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ e final $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$. Extendemos a definição para os próprios inversos formais definindo $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ e denotando $\alpha = \alpha^1$. Um *passeio* p de comprimento $n \geq 1$ do vértice $s(p) = i$ para o vértice $t(p) = j$ é uma sequência $p = \alpha_1^{x_1} \dots \alpha_n^{x_n}$, em que $x_i \in \{-1, 1\}$, $s(\alpha_1^{x_1}) = i$, $t(\alpha_n^{x_n}) = j$ e $t(\alpha_k^{x_k}) = s(\alpha_{k+1}^{x_{k+1}})$ para qualquer $1 \leq k \leq n-1$. Dizemos que um passeio $p = \alpha_1^{x_1} \dots \alpha_n^{x_n}$ é um *ciclo não orientado* se $s(p) = t(p)$ e $(\alpha_i^{x_i})^{-1} \neq \alpha_j^{x_j}$ para $i \neq j$. Dizemos que um quiver Q é uma *árvore* se não tem ciclos não orientados.

Exemplo 2. Os dois quivers abaixo são acíclicos, mas têm ciclos não orientados.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3 & \longrightarrow & 4. \end{array} \\ 1 \longrightarrow 2, & & \end{array}$$

Sejam Q um quiver e \mathbf{k} um corpo. Denotamos $\mathbf{k}Q$ o \mathbf{k} -espaço vetorial que tem como base o conjunto dos caminhos de Q . Induzimos em $\mathbf{k}Q$ uma operação composição entre dois caminhos $c = \alpha_1 \dots \alpha_n$ e $d = \beta_1 \dots \beta_m$ dada por:

$$cd = \begin{cases} 0, & \text{se } t(c) \neq s(d) \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m, & \text{se } t(c) = s(d). \end{cases}$$

Para um ciclo c e um número natural m , denotamos a composição de m ciclos c por $c^m = \underbrace{c \dots c}_{m \text{ vezes}}$.

Com a operação composição, o espaço vetorial $\mathbf{k}Q$ é uma \mathbf{k} -álgebra associativa chamada *álgebra de caminhos*.

Exemplo 3. *Seja Q o quiver de um único vértice 1 e que a única flecha é um laço α , conforme abaixo:*

$$1 \curvearrowright \alpha.$$

Sua álgebra de caminhos é isomorfa a álgebra de polinômios $\mathbf{k}[x]$, que não é de dimensão finita.

Exemplo 4. *Seja Q o quiver abaixo:*

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots \longrightarrow n.$$

Sua álgebra de caminhos $\mathbf{k}Q$ é isomorfa a álgebra de matrizes triangulares inferiores $T_n(\mathbf{k})$, que é definida pelas matrizes triangulares inferiores de ordem $n \times n$, como abaixo:

$$T_n(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{k} & \mathbf{k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{k} & \mathbf{k} & \dots & \mathbf{k} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5. *Um dos quivers mais conhecidos é o quiver de Kronecker dado por:*

$$1 \rightrightarrows 2.$$

Chamamos sua álgebra de caminhos de álgebra de Kronecker que é isomorfa a seguinte álgebra:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k} & 0 \\ \mathbf{k}^2 & \mathbf{k} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ (b, c) & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{k} \right\},$$

cuja multiplicação é dada por

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ (b, c) & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 \\ (f, g) & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & 0 \\ (be + df, ce + dg) & dh \end{bmatrix}.$$

De maneira similar, define-se o quiver e a álgebra três-Kronecker a partir do quiver abaixo:

$$1 \rightrightarrows 2.$$

Se Q é um quiver conexo, finito e acíclico, a álgebra de caminhos $\mathbf{k}Q$ é uma álgebra associativa, básica, conexa, de dimensão finita com unidade, cujo conjunto de caminhos triviais $\{\varepsilon_i \mid i \in Q_0\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos. O ideal de flechas R_Q de uma álgebra de caminhos $\mathbf{k}Q$ é o ideal gerado pelas flechas de Q_1 . Um ideal I de $\mathbf{k}Q$ é dito *admissível* se existe $m \geq 2$ tal que $R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$. É possível demonstrar que os ideais admissíveis de um quiver finito são gerados por um conjunto finito $\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$, em que cada ρ_i é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a 2 de mesmo início e final chamada *relação*. O par (Q, I) formado por um quiver e um dos seus ideais admissíveis é chamado *quiver com relações*, enquanto que o quociente $\mathbf{k}Q/I$ é a *álgebra de quiver com relações*.

Proposição 1.2. *Se um quiver Q é finito e conexo, então para qualquer ideal admissível $I \in \mathbf{k}Q$ a álgebra com relações $\mathbf{k}Q/I$ é associativa, básica, conexa, de dimensão finita, em que $\{\varepsilon_i + I \mid i \in Q_0\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos.*

Enunciamos a seguir, um dos resultados mais relevantes das \mathbf{k} -álgebras associativas de dimensão finita, demonstrado por Gabriel [Gab72], que nos permite obter resultados sobre \mathbf{k} -álgebras associativas via álgebras de quiver .

Teorema 1.3. *Seja \mathbf{A} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa e de dimensão finita. Existem um quiver Q e um ideal admissível $I \in \mathbf{k}Q$, tais que $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}Q/I$. O quiver Q da álgebra \mathbf{A} é único.*

Chamamos o quiver Q , descrito no Teorema 1.3, de *quiver de Gabriel* da álgebra \mathbf{A} . Alertamos, que embora o quiver de Gabriel seja único, podemos obter ideais I distintos que realizam o mesmo isomorfismo $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}Q/I$. Em cada um destes casos, dizemos que $\mathbf{k}Q/I$ é uma *apresentação* de \mathbf{A} .

Exemplo 6. *A álgebra local $\mathbf{k}[x]/(x^n)$ é isomorfa a álgebra de quiver com relações $\mathbf{k}Q/I$, em que $I = \langle \alpha^n \rangle$ e Q é o quiver abaixo:*

$$1 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} .$$

Enquanto que a álgebra \mathbf{k} é isomorfa a álgebra de quiver com relações $\mathbf{k}Q'/I'$, em que $I' = 0$ e Q' é o quiver sem flechas abaixo:

$$1 .$$

O quiver de Gabriel pode facilitar a identificação de características relevantes, como por exemplo, das *álgebras hereditárias*. Dizemos que uma álgebra básica de dimensão finita é hereditária se todo submódulo de um módulo projetivo também é projetivo. Conforme o teorema a seguir, podemos identificá-las observando o respectivo quiver.

Teorema 1.4. *Seja \mathbf{A} uma álgebra básica, conexa e de dimensão finita. \mathbf{A} é uma álgebra hereditária se, e somente se, $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}Q$, em que Q é um quiver finito, conexo e acíclico.*

Também identificamos as álgebras *do tipo árvore*, pelo seu quiver de Gabriel. Dizemos que $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ é uma álgebra do tipo árvore se o quiver Q é uma árvore.

Seja Q um quiver finito. Uma *representação* $M = M(Q) = (M_i, M_\alpha)$ de Q é definida associando para cada vértice i e para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$, um espaço vetorial M_i e uma transformação linear $M_\alpha : M_i \longrightarrow M_j$, respectivamente. Dizemos que M é de *dimensão finita* se cada M_i é um espaço vetorial de dimensão finita. Se cada M_i tem dimensão finita, definimos a *dimensão* de M por:

$$\dim_{\mathbf{k}} M = \sum_{i \in Q_0} \dim_{\mathbf{k}} M_i.$$

Dadas duas representações $M = (M_i, M_\alpha)$ e $N = (N_i, N_\alpha)$ de um mesmo quiver Q , definimos um *morfismo entre representações* $f : M \longrightarrow N$ por uma família de transformações

lineares $f = (f_i : M_i \longrightarrow N_i)_{i \in Q_0}$ que satisfazem a igualdade $N_\alpha \circ f_i = f_j \circ M_\alpha$ para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$, isto é, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{M_\alpha} & M_j \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_j \\ N_i & \xrightarrow{N_\alpha} & N_j. \end{array}$$

As representações de um quiver finito Q e seus morfismos entre representações formam uma categoria abeliana denotada por $\mathbf{Rep}_k(Q)$. A subcategoria plena de $\mathbf{Rep}_k(Q)$ das representações de dimensão finita de Q é denotada por $\mathbf{rep}_k(Q)$. Associamos para cada caminho $w = \alpha_i \cdots \alpha_j$ a composição de aplicações lineares $\phi_w = M_{\alpha_j} \circ \cdots \circ M_{\alpha_i}$. Fixando um ideal admissível $I \subset kQ$, dizemos que uma representação $M(Q) = (M_i, M_\alpha)$ de Q *satisfaz as relações* de I ou é uma *representação do quiver com relações* (Q, I) se a combinação linear das composição de transformações lineares $\sum_i \lambda_i \phi_{w_i}$ é igual a transformação nula sempre que a respectiva combinação linear de caminhos $\sum_i \lambda_i w_i$ pertence a I . Denotamos a subcategoria plena das representações de um quiver com relações e das representações de dimensão finita de um quiver com relações por $\mathbf{Rep}_k(Q, I)$ e $\mathbf{rep}_k(Q, I)$, respectivamente. Nestas categorias, dizemos que uma representação é *indecomponível* se não é soma direta de duas representações não nulas.

Exemplo 7. *Considere o ideal admissível $I = \langle \alpha^2 \rangle$ de kQ , em que Q é o quiver abaixo:*

$$1 \curvearrowright \alpha.$$

A representação M descrita abaixo é uma representação indecomponível do quiver com relações (Q, I) :

$$k^2 \curvearrowright \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos estudar as categorias de módulos à direita $\mathbf{Mod}\text{-}\mathbf{A}$ e $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$ de uma álgebra $\mathbf{A} \cong kQ/I$ estudando as categorias $\mathbf{Rep}_k(Q, I)$ e $\mathbf{rep}_k(Q, I)$. Isto é possível por existir uma conhecida k -equivalência linear $F : \mathbf{Mod}\text{-}\mathbf{A} \xrightarrow{\cong} \mathbf{Rep}_k(Q, I)$ e sua restrição

$F|_{\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}} : \mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A} \xrightarrow{\cong} \mathbf{rep}_k(Q, I)$. Em particular, podemos estudar os módulos indecomponíveis pelas representações indecomponíveis. Dentre os módulos indecomponíveis, destacamos os módulos projetivos indecomponíveis. Tomando $\mathbf{A} = kQ/I$ e o conjunto de caminhos triviais $\{\varepsilon_i + I \mid i \in Q_0\}$, podemos ver $\mathbf{A}_\mathbf{A}$ em $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$ e decompor como soma de projetivos indecomponíveis, conforme abaixo:

$$\mathbf{A}_\mathbf{A} = 1_\mathbf{A} \mathbf{A}_\mathbf{A} = \left(\sum_{i \in Q_0} \varepsilon_i \right) \mathbf{A}_\mathbf{A} = \sum_{i \in Q_0} \varepsilon_i \mathbf{A}_\mathbf{A},$$

Denotamos cada um destes projetivo indecomponíveis não isomorfos por $P_i = \varepsilon_i \mathbf{A}_\mathbf{A}$. Destacamos que os elementos de P_i são combinações lineares de caminhos w_k com início

$s(w_k) = i$. Cada caminho não nulo c de início $s(c) = j$ e final $t(c) = i$ induz um homomorfismo entre projetivos $c : P_i \longrightarrow P_j$, definido nos elementos de P_i por:

$$c \left(\sum_{k=1}^n x_k w_k \right) = \sum_{k=1}^n x_k c w_k, \text{ em que } x_k \in \mathbf{k}.$$

1.2 Álgebras Mansas e Selvagens

Distinguimos os diversos tipos de representações de álgebras, pelos seus módulos indecomponíveis na categoria de módulos. Mais precisamente, pelo comportamento "quantitativo" dos módulos indecomponíveis. Conforme Simson e Skowroński em [SS07] e Erdmann em [Erd90], definimos as álgebras de representação finita, mansa e selvagem como a seguir:

Definição 1.5. *Seja \mathbf{A} uma álgebra de dimensão finita.*

1. \mathbf{A} é de representação finita se a quantidade de classes de isomorfismos de módulos indecomponíveis em $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$ é finita;
2. \mathbf{A} é de representação infinita se a quantidade de classes de isomorfismos de módulos indecomponíveis em $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$ é infinita;
3. \mathbf{A} é mansa se em cada dimensão $d > 0$, existir uma quantidade finita de $\mathbf{k}[x]\text{-}\mathbf{A}$ -bimódulos M_i tais que:
 - (a) cada M_i é finitamente gerado como $\mathbf{k}[x]$ -módulo,
 - (b) exceto por uma quantidade finita, todo módulo indecomponível N de dimensão d é isomorfo a $\frac{\mathbf{k}[x]}{(x-\lambda)} \otimes_{\mathbf{k}[x]} M_i$ para algum $\lambda \in \mathbf{k}$;
4. \mathbf{A} é selvagem se existe um $\mathbf{k}\langle x, y \rangle\text{-}\mathbf{A}$ -bimódulo M tal que:
 - (a) M é finitamente gerado como $\mathbf{k}\langle x, y \rangle$ -módulo;
 - (b) o funtor ${}_-\otimes_{\mathbf{K}\langle x, y \rangle} M : \mathbf{fin mod}\text{-}\mathbf{k}\langle x, y \rangle \longrightarrow \mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$ preserva classes de isomorfismo e módulos indecomponíveis, em que $\mathbf{fin mod}\text{-}\mathbf{k}\langle x, y \rangle$ é a subcategoria plena dos módulos indecomponíveis de $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{k}\langle x, y \rangle$.

Segue da definição, que as álgebras de representação finita são mansas, mas as de representação infinita podem ser mansas ou selvagens. A grosso modo, dizemos que em uma álgebra mansa, podemos classificar os módulos indecomponíveis, visto que estes ocorrem parametrizados por uma quantidade finita de famílias a um parâmetro. Drozd em [Dro79] demonstrou que as álgebras de dimensão finita são divididas em duas classes disjuntas, as mansas e as selvagens.

Teorema 1.6. *Toda álgebra de dimensão finita é mansa ou selvagem, mas não ambas.*

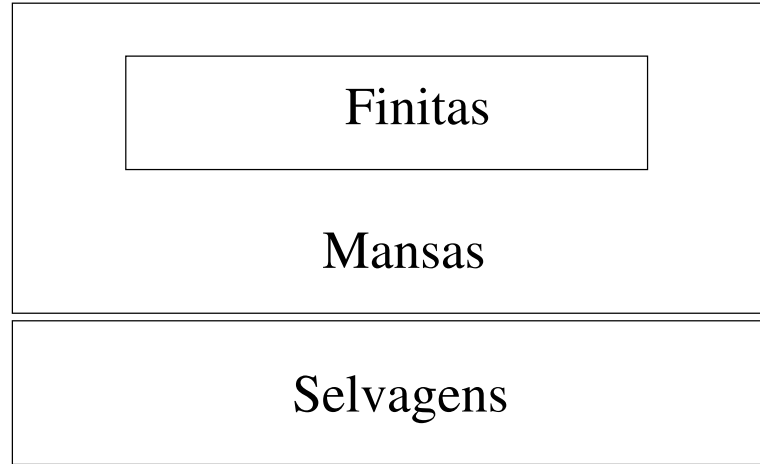


Figure 1.1: Tipos de Representação

Pela equivalência entre as categorias $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$ e $\mathbf{rep}_{\mathbf{k}}(Q, I)$, podemos quantificar os módulos indecomponíveis via representações indecomponíveis. Conseqüentemente, podemos determinar o tipo de representação de uma álgebra, estudando suas representações indecomponíveis. Nos próximos exemplos, determinamos seu tipo de representação, estudando e quantificando suas representações indecomponíveis. Maiores detalhes para obtenção destas representações indecomponíveis podem ser vistos em [Bar15].

Exemplo 8. *Vimos o quiver da álgebra $T_2(\mathbf{k})$ no Exemplo 4. Suas representações indecomponíveis são as seguintes:*

$$\mathbf{k} \longrightarrow 0, \quad \mathbf{k} \xrightarrow{I_1} \mathbf{k}, \quad 0 \longrightarrow \mathbf{k}$$

em que I_1 é a matriz identidade de ordem 1×1 .

Portanto, a álgebra $T_2(\mathbf{k})$ é de representação finita

Para os próximos exemplos, denotamos por $J(n, \lambda)$ a matriz de Jordan que é a soma das matrizes $\lambda I_n + J(n, 0)$, em que I_n é a matriz identidade de ordem $n \times n$ e $J(n, 0)$ é a matriz triangular superior com entradas:

$$J(n, 0)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j - 1, \\ 0 & \text{se } i \neq j - 1 \end{cases}$$

Exemplo 9. *Detalhamos o quiver das álgebras $\frac{\mathbf{k}[x]}{(x^2)}$ e $\frac{\mathbf{k}[x]}{(x^3)}$ no Exemplo 6. As representações indecomponíveis de $\frac{\mathbf{k}[x]}{(x^2)}$ são as seguintes:*

$$\mathbf{k} \curvearrowright 0, \quad \mathbf{k}^2 \curvearrowright J(2, 0).$$

As representações indecomponíveis de $\frac{\mathbf{k}[x]}{(x^3)}$ são as seguintes:

$$\mathbf{k}, \curvearrowright 0, \quad \mathbf{k}^2 \curvearrowright J(2, 0), \quad \mathbf{k}^3 \curvearrowright J(3, 0).$$

Portanto, $\frac{\mathbf{k}[x]}{(x^2)}$ e $\frac{\mathbf{k}[x]}{(x^3)}$ são álgebras de representação finita.

Exemplo 10. Definimos a álgebra de Kronecker no Exemplo 5. Suas representações indecomponíveis em dimensões pares e ímpares são as seguintes:

Dimensões ímpares iguais a $2n + 1$

$$\mathbf{k}^n \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}} \end{array} \mathbf{k}^{n+1}, \quad \mathbf{k}^{n+1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}} \end{array} \mathbf{k}^n.$$

e as dimensões pares iguais a $2n$

$$\mathbf{k}^n \begin{array}{c} \xrightarrow{I_n} \\ \xrightarrow{J(n,\lambda)} \end{array} \mathbf{k}^n, \quad \mathbf{k}^n \begin{array}{c} \xrightarrow{J(n,0)} \\ \xrightarrow{I_n} \end{array} \mathbf{k}^n.$$

Observa-se que nas dimensões pares, temos uma série de infinitos módulos indecomponíveis, mas que são parametrizados por um único parâmetro λ . Portanto, a álgebra de Kronecker não é de representação finita, mas é mansa.

Exemplo 11. No Exemplo 5 definimos a álgebra Três-Kronecker. Observa-se que obtemos pelo menos uma família de representações indecomponíveis de dimensão 3 parametrizada por dois parâmetros, como a seguir:

$$\mathbf{k} \begin{array}{c} \xrightarrow{T_1} \\ \xrightarrow{T_2} \\ \xrightarrow{T_3} \end{array} \mathbf{k}^2, \text{ em que } T_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } T_3 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Portanto, a álgebra Três-Kronecker é selvagem.

A álgebra do Exemplo 11 é uma das álgebras selvagens listadas por Erdmann em [[Erd90], I.9.0, I.10.8]. Listamos algumas destas álgebras nos Lemas 1.7 e 1.8, que são úteis nas nossas demonstrações.

Lema 1.7. Seja $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}Q$ uma álgebra, em que Q é um dos quivers listados abaixo. Então \mathbf{A} é selvagem.

$$1 \begin{array}{c} \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \end{array} 2, \quad 1 \longrightarrow 2 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} 3.$$

Lema 1.8. Suponha que o quiver de Gabriel de uma álgebra \mathbf{A} contenha um dos quivers listados abaixo ou um dos seus duais. Então \mathbf{A} é selvagem.

$$1 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} 2 \longleftarrow 3, \quad \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array} 1 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} 2.$$

No mesmo trabalho [Erd90], Erdmann relaciona o tipo de representação da álgebra com seus quocientes e suas subálgebras plenas, conforme o Lema 1.9.

Lema 1.9. *Seja \mathbf{A} uma álgebra de dimensão finita. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se $\frac{\mathbf{A}}{I}$ é selvagem, em que I é um ideal não necessariamente admissível, então \mathbf{A} é selvagem;*
2. *se $\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon$ é selvagem para algum idempotente ε , então \mathbf{A} é selvagem.*

O item 2 do Lema 1.9, cuja demonstração pode ser vista em [Bon80], afirma que basta termos uma subálgebra plena selvagem para que a álgebra também seja. Consequentemente, pelo Teorema 1.6, toda subálgebra plena de uma álgebra mansa também é mansa. Do item 1 do Lema 1.9, concluímos que se $\mathbf{k}Q$ é mansa, $\mathbf{k}Q/I$ também é. Desta maneira, o quiver de Gabriel de uma álgebra pode determinar o seu tipo de representação. Em particular, os diagramas de Dynkin e Dynkin estendidos, listado abaixo, determinam o tipo de representação de todos os quivers acíclicos, conforme Teorema 1.10 enunciado a seguir:

Diagramas de Dynkin:

$$A_n : \quad 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } \dots \text{ --- } n-1 \text{ --- } n \quad n \geq 1$$

$$D_n : \quad \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 3 \text{ --- } \dots \text{ --- } n-1 \text{ --- } n \\ \diagup \\ 2 \end{array} \quad n \geq 4$$

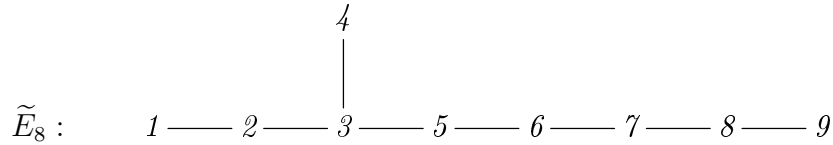
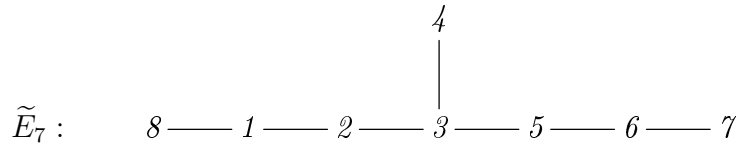
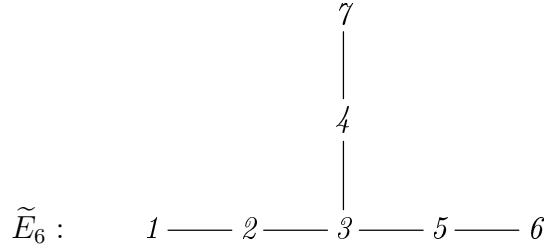
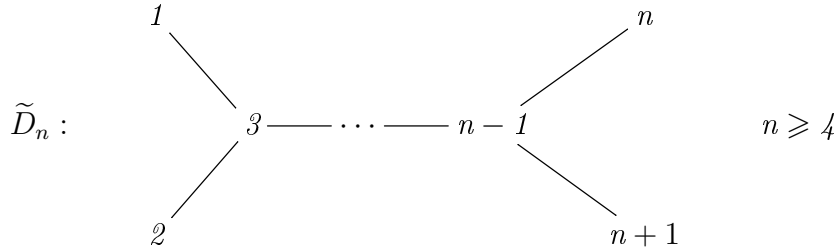
$$E_6 : \quad \begin{array}{c} 4 \\ | \\ 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 5 \text{ --- } 6 \end{array}$$

$$E_7 : \quad \begin{array}{c} 4 \\ | \\ 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 5 \text{ --- } 6 \text{ --- } 7 \end{array}$$

$$E_8 : \quad \begin{array}{c} 4 \\ | \\ 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 5 \text{ --- } 6 \text{ --- } 7 \text{ --- } 8 \end{array}$$

Diagramas de Dynkin estendidos:

$$\tilde{A}_n : \quad \begin{array}{c} n+1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } \dots \text{ --- } n-1 \text{ --- } n \end{array} \quad n \geq 1$$



Para um quiver Q , definimos seu *grafo ou grafo subjacente* \overline{Q} , desconsiderando a orientação das flechas de Q . Pelos trabalhos de Nazarova [Naz67], Gabriel [Gab72], Donovan e Freislich [DF73], obtemos o teorema abaixo:

Teorema 1.10. *Sejam $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q$ uma álgebra hereditária. Valem as seguintes afirmações:*

1. \mathbf{A} é de representação finita se, e somente se, \overline{Q} é um diagrama de Dynkin;
2. \mathbf{A} é mansa se, e somente se, \overline{Q} é um diagrama de Dynkin ou um Diagrama de Dynkin estendido.

Dizemos que uma álgebra de dimensão finita $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q$ é igual a $\mathbf{k}D_n$, $\mathbf{k}E_6$, $\mathbf{k}E_8$ ou $\mathbf{k}A_n$, se \overline{Q} é o grafo de Dynkin D_4 , E_6 , E_8 ou A_n , respectivamente. Nestes casos, dizemos que $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q$ é do tipo *Dynkin* e que Q é igual a D_n , E_6 , E_8 ou A_n , respectivamente. De maneira análoga, definimos e denotamos as *álgebras do tipo Dynkin estendidas* por $\mathbf{k}\tilde{D}_n$, $\mathbf{k}\tilde{E}_6$, $\mathbf{k}\tilde{E}_8$ e $\mathbf{k}\tilde{A}_n$. Usamos esta notação, quando a orientação não faz diferença nos resultados obtidos.

1.3 Produto Tensorial de quivers com relações

Leszczyński discutiu a importância do produto tensorial $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ em [Les94], por alguns exemplos que citamos a seguir:

Exemplo 12. A álgebra de Grupo $\mathbf{B}[G]$ de um grupo finito G com coeficientes em uma álgebra \mathbf{B} é isomorfa ao produto tensorial $\mathbf{B}[G] \cong \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[G]$;

Exemplo 13. A álgebra das matrizes triangulares inferiores de ordem $n \times n$ com entradas em \mathbf{B}

$$T_n(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \dots & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

é isomorfa ao produto tensorial $T_n(\mathbf{B}) \cong \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{k}} T_n(\mathbf{k})$;

Exemplo 14. Álgebras envelopentes $\mathbf{A}^e = \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}^{op}$.

Exemplo 15. A álgebra de caminhos $\mathbf{B}Q$ de um quiver Q com coeficientes em \mathbf{B} , que em particular é o produto $\mathbf{B}Q = \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}Q$.

A próxima definição descreve a construção do quiver com relações $(Q \otimes Q', I \square I')$, cuja álgebra é isomorfa ao produto tensorial $\mathbf{k}Q/I \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}Q'/I'$.

Definição 1.11. Sejam (Q, I) e (Q', I') quivers com relações, em que $Q = (Q_0, Q_1)$ e $Q' = (Q'_0, Q'_1)$. O produto tensorial entre (Q, I) e (Q', I') é o quiver com relações $(Q \otimes Q', I \square I')$, em que os conjuntos de vértices, flechas e o ideal admissível $I \square I'$ são definidos abaixo:

1. $(Q \otimes Q')_0 = Q_0 \times Q'_0$,
2. $(Q \otimes Q')_1 = (Q_0 \times Q'_1) \cup (Q_1 \times Q'_0)$,
3. $I \square I'$ é gerado por $(Q_0 \times I') \cup (I \times Q'_0)$ e as relações $(\alpha, m)(j, \beta) - (i, \beta)(\alpha, n)$, em que $\alpha : i \longrightarrow j$ e $\beta : m \longrightarrow n$ são flechas de Q_1 e Q'_1 , respectivamente.

Segue direto da definição, que se $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ e $\mathbf{B} = \mathbf{k}Q'/I'$ são álgebras não semissimples, o ideal $I \square I'$ é não nulo mesmo que I e I' sejam triviais. A existência das relações $(\alpha, m)(j, \beta) - (i, \beta)(\alpha, n)$ na definição de $I \square I'$ faz todo sentido, quando comparamos com a igualdade do produto entre os elementos da base de $\mathbf{k}Q/I \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}Q'/I'$ abaixo:

$$(\alpha \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon_m) \cdot (\varepsilon_j \otimes_{\mathbf{k}} \beta) = \alpha \cdot \varepsilon_j \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon_m \cdot \beta = \alpha \otimes_{\mathbf{k}} \beta = \varepsilon_i \cdot \alpha \otimes_{\mathbf{k}} \beta \cdot \varepsilon_n = (\varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} \beta) \cdot (\alpha \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon_n)$$

Em grande parte dos exemplos e demonstrações, abrimos mão da notação das flechas (α, j) , (i, β) e dos vértices (i, j) , pelas respectivas notações α_m , β_i e ij , ou por simplesmente α , β , i ou j , em busca de uma notação mais conveniente e menos carregada para cada caso.

Exemplo 16. Tomando $Q = A_2$ e $I = \{0\}$, como abaixo:

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2.$$

Obtemos o produto tensorial $(Q \otimes Q, I \square I)$, em que $I \square I = \langle \alpha\beta - \beta\alpha \rangle$ e $Q \otimes Q = A_2 \otimes A_2$ é o quiver abaixo:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta \\ 3 & \xrightarrow{\alpha} & 4. \end{array}$$

Mantendo $Q = A_2$, $I = 0$ e considerando o quiver com relações (Q', I') , em que $I' = \langle \gamma^2 \rangle$ e Q' é o quiver abaixo:

$$1 \curvearrowright \gamma.$$

Obtemos o produto tensorial $(Q \otimes Q', I \square I')$, em que $I \square I' = \langle \gamma^2, \gamma\alpha - \alpha\gamma \rangle$ e $Q \otimes Q'$ é o quiver abaixo:

$$\gamma \curvearrowleft 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \curvearrowright \gamma.$$

A Proposição 1.12 foi enunciada e demonstrada por Leszczyński em [[Les94], 1.3], fornecendo uma maneira prática de se obter o quiver de Gabriel do produto tensorial de duas álgebras. Enquanto que o Corolário 1.13 mostra como os idempotentes e as subálgebras plenas são preservados pelo produto tensorial.

Proposição 1.12. Para quaisquer quivers com relações (Q, I) e (Q', I') , existe um isomorfismo entre as álgebras $\mathbf{k}(Q \otimes Q')/I \square I'$ e $\mathbf{k}Q/I \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}Q'/I'$.

Segue do isomorfismo $\mathbf{k}(Q \otimes Q')/I \square I' \cong \mathbf{k}Q/I \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}Q'/I'$, que $\{\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon_j\}_{(i,j) \in Q_0 \times Q'_0}$ é um conjunto completo de ortogonais primitivos do produto tensorial $\mathbf{k}Q/I \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}Q'/I'$. Facilmente, vemos que se $\varepsilon \in \mathbf{A}$ e $\varepsilon' \in \mathbf{B}$ são idempotentes, $\varepsilon \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon'$ também é. Consequentemente, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 1.13. Sejam $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}Q/I$, $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}Q'/I'$ e duas subálgebras plenas $\varepsilon \mathbf{A} \varepsilon$ e $\varepsilon' \mathbf{B} \varepsilon'$. Então $\varepsilon \mathbf{A} \varepsilon \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon' \mathbf{B} \varepsilon'$ é uma subálgebra plena de $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ isomorfa a $(\varepsilon \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon')(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B})(\varepsilon \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon')$.

Dois resultados de Leszczyński [[Les94], 1.5 e 2,1] estão enunciados nos Lemas 1.14 e 1.15, os quais são úteis na classificação dos tipos de representações dos produtos tensoriais de álgebras não semissimples.

Lema 1.14. Para qualquer \mathbf{k} -álgebra $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$, existe um isomorfismo entre as álgebras $T_n(\mathbf{A})$ e $\mathbf{k}A_n \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}Q/I$.

Lema 1.15. Sejam \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} álgebras não semissimples. Valem as seguintes afirmações:

1. $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{C}$ é mansa se, e somente se, $\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \cong \mathbf{C} \cong \mathbf{k}A_2$;
2. se $\mathbf{k}A_n \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é de representação finita, então $n \leq 4$;
3. se $\mathbf{k}A_n \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é mansa, então $n \leq 5$.

1.4 Álgebras de Grupo

Como já citamos no Exemplo 12 da Seção 1.3, as álgebras de grupo são isomorfas a produtos tensoriais, cuja classificação tem um longo histórico de trabalhos envolvidos. De acordo com Skowroński e Leszczyński, as álgebras de grupo $\mathbf{k}[G]$ de representação finita foram classificadas a mais de sessenta anos por Higman [Hig54]. Já as de representação infinita e mansa foram classificadas por Bondarenko e Drozd [BD77]. O caso $\mathbf{A}[G]$ de representação finita foi classificado por Meltzer e Skowroński [MS83][MS84], conforme o próximo Teorema 1.16. Em 2003 Leszczyński e Skowroński classificaram as álgebras de grupo de representação infinita e mansa [LS03], conforme o Teorema 1.17.

Para a classificação das álgebras de grupo mansas, definimos algumas álgebras de quiver com relações, utilizando as mesmas notações de [LS03]. Definimos L_n e C_n com $n \geq 1$, pelos quivers a seguir:

$$L_n : \quad 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \longrightarrow n \xrightarrow{\alpha_n} n+1$$

$$C_n : \quad \begin{array}{c} \phantom{\xrightarrow{\alpha_1}} \phantom{\xrightarrow{\alpha_2}} \phantom{\xrightarrow{\alpha_n}} \\ \phantom{\xrightarrow{\alpha_1}} \phantom{\xrightarrow{\alpha_2}} \phantom{\xrightarrow{\alpha_{n-2}}} \\ \phantom{\xrightarrow{\alpha_1}} \phantom{\xrightarrow{\alpha_2}} \phantom{\xrightarrow{\alpha_{n-2}}} \end{array}$$

Alertamos, que embora $\overline{C_n} = \tilde{A}_{n-1}$ para $n \geq 2$, há o caso C_1 abaixo:

$$C_1 : 1 \curvearrowright^{\alpha_1} .$$

Dizemos que \mathbf{A} é uma *álgebra de Nakayama* se os módulos projetivos à esquerda e à direita têm uma única decomposição como série de potências. É conhecido que uma álgebra é de Nakayama se, e somente se, seu quiver de Gabriel é igual a L_n ou C_n .

Para $n \geq 2$ e inteiros $1 \leq n_i \leq n-1$, tais que $n_i + 1 < n_{i+1}$, definimos as seguintes álgebras de quiver com relações:

1. $A^n = \mathbf{k}L_n/I^n$, com $I^n = \langle \alpha_i \alpha_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1 \rangle$;
2. $A^n_{(n_1, \dots, n_s)} = \mathbf{k}L_n/I^n_{(n_1, \dots, n_s)}$, com $I^n_{(n_1, \dots, n_s)} = \langle \alpha_i \alpha_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1 \text{ e } i \neq n_1, \dots, n_s \rangle$;
3. $B^n = \mathbf{k}C_n/J^n$, com $J^n = \langle \alpha_i \alpha_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n \rangle$;
4. $B^n_{(n_1, \dots, n_s)} = \mathbf{k}C_n/J^n_{(n_1, \dots, n_s)}$, com $J^n_{(n_1, \dots, n_s)} = \langle \alpha_i \alpha_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n \text{ e } i \neq n_1, \dots, n_s \rangle$.

Na definição de J^n e $J^n_{(n_1, \dots, n_s)}$, consideramos $\alpha_{n+1} = \alpha_1$.

Destacamos o *grupo cíclico* $\mathbb{Z}_m = \langle g \mid g^m = 1 \rangle$ e alguns 2-grupos de ordem 2^{m+1} definidos abaixo:

1. *grupo diedral* $D_{(m)} = \langle g, h \mid g^2 = h^{2^m} = 1, hg = gh^{-1} \rangle$, em que $m \geq 1$;
2. *grupo semidiedral* $S_{(m)} = \langle g, h \mid g^2 = h^{2^m} = 1, hg = gh^{2^{m-1}-1} \rangle$, em que $m \geq 3$;

3. grupo dos quatérnios $Q_{(m)} = \langle g, h \mid g^2 = h^{2m-1}, g^4 = 1, hg = gh^{-1} \rangle$, com $m \geq 2$.

Teorema 1.16. *Sejam G um grupo finito, \mathbf{k} um corpo de característica \mathbf{p} e \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita. A álgebra de grupo $\mathbf{B}[G]$ é de representação finita se, e somente se, satisfaz um dos seguintes casos:*

1. \mathbf{p} não divide a ordem de G e \mathbf{B} é de representação finita;

2. \mathbf{p} divide a ordem de G e ocorre um dos seguintes casos:

(a) $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$ e um \mathbf{p} -subgrupo de Sylow de G é cíclico;

(b) $\mathbf{p} = 3$, um 3-subgrupo de Sylow de G é isomorfo a \mathbb{Z}_3 e $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}A_2$;

(c) $\mathbf{p} = 2$, um 2-subgrupo de Sylow de G é isomorfo a \mathbb{Z}_2 e \mathbf{B} é isomorfo a $\mathbf{k}A_2$, $A_{(n_1)}^n$, A^n ou uma das álgebras abaixo:

i. $\mathbf{k}Q$ em que Q é um dos quiver abaixo;

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3, \quad 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3;$$

ii. $\mathbf{k}Q/I$ em que (Q, I) é um dos quivers com relações abaixo;

$$1 \longrightarrow 2 \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} 3 \longleftarrow 4, \quad 1 \longleftarrow 2 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 3 \longrightarrow 4;$$

Teorema 1.17. [[LS03], Teorema 5.2] *Sejam G um grupo finito, \mathbf{k} um corpo de característica \mathbf{p} e \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita. Então a Álgebra de Grupo $\mathbf{B}[G]$ é de representação infinita e mansa se, e somente se, satisfaz um dos seguintes casos:*

1. \mathbf{p} não divide a ordem de G e \mathbf{B} é de representação infinita e mansa;

2. \mathbf{p} divide a ordem de G e ocorre um dos seguintes casos:

(a) $\mathbf{p} = 3$, um 3-subgrupo Sylow de G é isomorfo a \mathbb{Z}_3 e \mathbf{B} é isomorfo a álgebra de quiver com relações A^2 ;

(b) $\mathbf{p} = 2$ e ocorre um dos seguintes casos:

i. $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$ e um 2-subgrupo de Sylow de G é isomorfo a um dos grupos $D_{(m)}$, $S_{(m)}$ ou $Q_{(m)}$,

ii. $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}A_2$ e um 2-subgrupo de Sylow de G é isomorfo a \mathbb{Z}_4 ,

iii. um 2-subgrupo de Sylow de G é isomorfo a \mathbb{Z}_2 e \mathbf{B} é isomorfo a uma das álgebras de quiver com relações $A_{(n_1, \dots, n_s)}^n$, A^n , $B_{(n_1, \dots, n_s)}^n$ ou B^n .

Nos Teoremas 1.16 e 1.17, os casos em que \mathbf{p} divide a ordem de G são tratados separadamente. Por volta de 1898-1899, Heinrich Maschke (1853-1908) demonstrou que estes casos são equivalentes a $\mathbf{k}G$ ser uma álgebra não semissimples, conforme o Teorema 1.18 a seguir:

Teorema 1.18. *Sejam G um grupo finito e \mathbf{k} um corpo de característica \mathbf{p} . A álgebra de grupo $\mathbf{k}G$ é semissimples se, e somente se, \mathbf{p} não divide a ordem de G .*

Na classificação dos tipos de representação das álgebras de grupo, a relevância dos \mathbf{p} -subgrupos de Sylow é notória, conforme os Teoremas 1.16 e 1.17. Segundo Skowroński em [Sko87], obtemos a partir dos trabalhos de Bodarenko e Drozd [[BD77], Seção 1] e [Dro79], a relação entre o tipo de representação da álgebra de grupo e de um dos seus \mathbf{p} -subgrupos de Sylow, enunciada no Lema 1.19.

Lema 1.19. *Sejam \mathbf{B} uma álgebra sobre um corpo \mathbf{k} de característica \mathbf{p} , G um grupo finito e H um \mathbf{p} -subgrupo de Sylow de G . Valem as seguintes afirmações:*

1. $\mathbf{B}[G]$ é mansa se, e somente se, $\mathbf{B}[H]$ também é.
2. $\mathbf{B}[G]$ é de representação finita se, e somente se, $\mathbf{B}[H]$ também é.

Pela importância do tipo de representação das álgebras de grupos dos \mathbf{p} -subgrupos de Sylow, é natural que se estude seus respectivos quivers de Gabriel. Segundo Erdmann em [[Erd90], III.13], para um corpo de característica 2, as álgebras de grupo dos grupos diedral, semidiedral e quaternions têm o mesmo quiver de Gabriel, cujas respectivas álgebras de quiver com relações estão descritas no Lema 1.20.

Lema 1.20. *Sejam \mathbf{k} um corpo de característica 2, $q = 2^{m-1}$ e Q o quiver abaixo:*

$$\beta \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} 1 \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} \alpha.$$

Temos os seguintes isomorfismos:

1. $\mathbf{k}D_{(m)} \cong \mathbf{k}Q/I$, em que $I = \langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^q - (\beta\alpha)^q \rangle$;
2. $\mathbf{k}S_{(m)} \cong \mathbf{k}Q/I'$, em que I' é o ideal $\langle (\alpha\beta)^q - (\beta\alpha)^q, \alpha^2 - (\beta\alpha)^{q-1}\beta - c(\alpha\beta)^q, \beta^2 - b(\alpha\beta)^q, (\alpha\beta)^q\alpha \rangle$, para quaisquer $c, b \in \mathbf{k}$;
3. $\mathbf{k}Q_{(m)} \cong \mathbf{k}Q/I''$, em que I'' é o ideal $\langle (\alpha\beta)^q - (\beta\alpha)^q, \alpha^2 - (\beta\alpha)^{q-1}\beta - c(\alpha\beta)^q, \beta^2 - (\alpha\beta)^{q-1}\alpha - b(\alpha\beta)^q, (\alpha\beta)^q\alpha, (\beta\alpha)^q\beta \rangle$, para quaisquer $c, b \in \mathbf{k}$.

O Lema 1.21 fornece as álgebras de quiver com relações dos grupos cíclicos de ordem \mathbf{p}^n , obtidas por um conhecido isomorfismo de álgebras.

Lema 1.21. *Sejam \mathbf{k} um corpo de característica \mathbf{p} e G um grupo cíclico de ordem \mathbf{p}^n para algum natural n . Então $\mathbf{k}[G] \cong \mathbf{k}[x]/\langle x^{\mathbf{p}^n} \rangle$. Isto é, $\mathbf{k}[G] \cong \mathbf{k}Q/I$, em que $I = \langle \alpha^{\mathbf{p}^n} \rangle$ e Q é o quiver abaixo:*

$$1 \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} \alpha.$$

Demonstração. Seja $G = \langle g \rangle$. Tomamos o epimorfismo de álgebras $\varphi : \mathbf{k}[x] \longrightarrow \mathbf{k}[G]$, definido por $\varphi(x) = g$. Segue que um polinômio $f(x) \in \text{Ker}(\varphi)$ se, e somente se, $f(x) \in \langle x^{\mathbf{p}^n} - 1 \rangle$. Além disso, pela característica \mathbf{p} de \mathbf{k} , $x^{\mathbf{p}^n} - 1 = (x - 1)^{\mathbf{p}^n}$. Portanto, fazendo as devidas mudanças de variáveis, obtemos:

$$\mathbf{k}[G] \cong \mathbf{k}[x]/\langle x^{\mathbf{p}^n} - 1 \rangle \cong \mathbf{k}[x]/\langle (x - 1)^{\mathbf{p}^n} \rangle \cong \mathbf{k}[y + 1]/\langle y^{\mathbf{p}^n} \rangle \cong \mathbf{k}[y]/\langle y^{\mathbf{p}^n} \rangle.$$

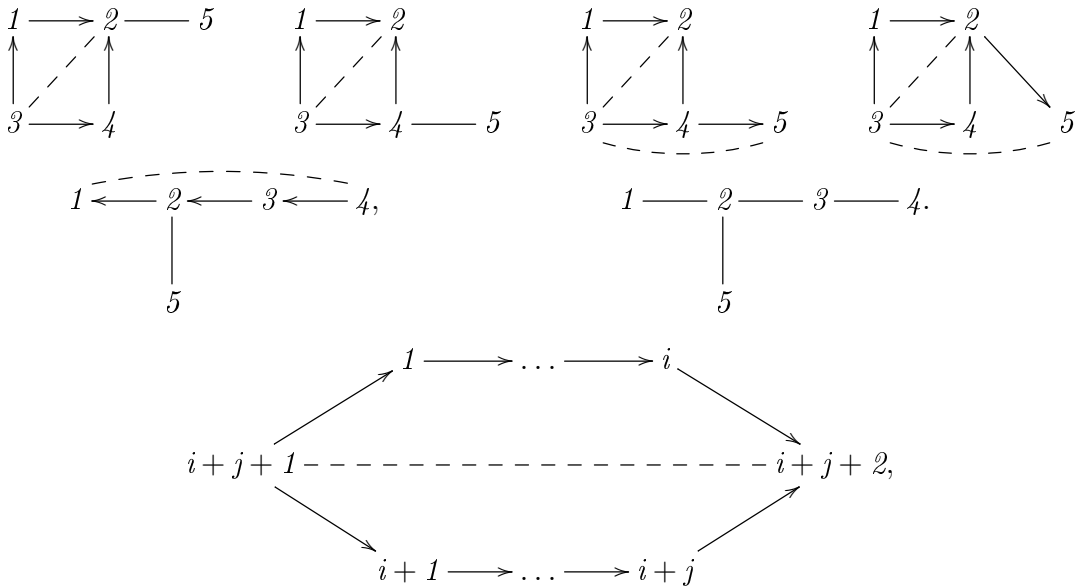
□

1.5 Álgebras de Matrizes e Álgebras Envolventes

Nesta seção, trabalhamos com as álgebras das matrizes triangulares inferiores $T_n(\mathbf{B})$ e as álgebras envolventes \mathbf{A}^e , que estão definidas nos Exemplos 13 e 14, respectivamente.

Leszczyński e Skowroński classificaram casos particulares de álgebras do tipo $T_2(\mathbf{B})$ selvagens [[LS00], lista W]. Seleccionamos alguns destes casos no Lema 1.22. A omissão do sentido nas flechas, indica que devemos considerar todos os quivers com os dois sentidos.

Lema 1.22. *Se $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ for uma das álgebras listadas abaixo, então a álgebra de matrizes triangulares inferiores $T_2(\mathbf{A})$ é selvagem.*



em que $i, j \geq 1$ e $i + j \geq 3$;

Em 2003 [LS03], Leszczyński e Skowroński classificaram as álgebras de matrizes triangulares inferiores $T_n(\mathbf{A})$ com $n \geq 3$. Enunciamos esta classificação nos teoremas a seguir:

Teorema 1.23. *Sejam $n \geq 3$ e \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita. $T_n(\mathbf{B})$ é de representação finita se, e somente se, ocorre um dos casos abaixo:*

1. $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$;
2. $n = 3$ e a álgebra \mathbf{B} é isomorfa a uma das álgebras de Nakayama de radical quadrado igual a zero A^m ou B^m .

Teorema 1.24. *Sejam $n \geq 3$ e \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita. $T_n(\mathbf{B})$ é de representação infinita e mansa se, e somente se, ocorre um dos casos abaixo:*

1. $n = 5$ e $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}A_2$;

2. $n = 4$ e a álgebra \mathbf{B} é isomorfa a uma das álgebras de Nakayama de radical quadrado igual a zero A^m ou B^m ;

3. $n = 3$ e ocorre um dos seguintes casos:

(a) \mathbf{B} ou \mathbf{B}^{op} é isomorfa a álgebra de caminhos $\mathbf{k}Q$, em que Q é o quiver abaixo:

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3,$$

(b) \mathbf{B} é isomorfa a uma das álgebras $B_{(m_1, \dots, m_s)}^m$ ou $A_{(m_1, \dots, m_s)}^m$.

No mesmo trabalho [LS03], Leszczyński e Skowroński classificaram as álgebras envelopentes $\mathbf{A}^e = \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}^{op}$ mansas e as de representação finita, que enunciamos nos Teoremas 1.25 e 1.26. Dizemos que uma álgebra \mathbf{A} é *simplesmente conexa* se o grupo fundamental $\Pi_1(Q, I)$ é trivial, para qualquer apresentação $\mathbf{k}Q/I$ de \mathbf{A} . Segue de [[Les94], 2.3], que as álgebras de Nakayama $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ são simplesmente conexas se, e somente se, $Q = L_n$. Caso contrário, $Q = C_n$. Para maiores detalhes sobre álgebras simplesmente conexas, recomendamos [Ass99].

Teorema 1.25. *Seja \mathbf{A} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa, não simples de dimensão finita. \mathbf{A}^e é de representação finita se, e somente se, \mathbf{A} é uma álgebra de Nakayama simplesmente conexa de radical quadrado igual a zero. Isto é, $\mathbf{A} \cong A^n$.*

Teorema 1.26. *Seja \mathbf{A} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa, não simples de dimensão finita. \mathbf{A}^e é de representação infinita e mansa se, e somente se, ocorre um dos seguintes casos:*

1. \mathbf{A} ou \mathbf{A}^{op} é isomorfa a álgebra de um dos seguintes quivers com relações:

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3, \quad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3, \quad 1 \longrightarrow 2 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 3 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 4,$$

2. \mathbf{A} é isomorfa a uma álgebra de Nakayama de radical quadrado igual a zero, que não é simplesmente conexa, isto é, $\mathbf{A} \cong B^n$.

1.6 Categoria Triangulada e Categoria Derivada

Sejam \mathcal{C} uma categoria aditiva e T um automorfismo de \mathcal{C} , usualmente chamado de *functor translação*, com inversa T^{-1} . Um *triângulo* (X, Y, Z, u, v, w) em \mathcal{C} é definida por três objetos $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ e três morfismos $u : X \longrightarrow Y$, $v : Y \longrightarrow Z$ e $w : Z \longrightarrow T(X)$. Além da notação (X, Y, Z, u, v, w) , usamos:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X),$$

ou

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ w \swarrow & & \nwarrow v \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

Um *morfismo de triângulos* de (X, Y, Z, u, v, w) para (X', Y', Z', u', v', w') é uma tripla (f, g, h) de morfismos que comutam o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(X) \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow T(f) \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & T(X') \end{array}$$

Se f, g e h são isomorfismos, dizemos que (f, g, h) é um *isomorfismo de triângulos*.

Uma *triangulação* τ é uma coleção de triângulos em \mathcal{C} , chamados *distinguidos*, que satisfazem as hipóteses TR1, TR2, TR3 e TR4, listadas a seguir.

(TR1) Todo triângulo isomorfo a um triângulo distinguido, também é distinguido. Para cada objeto $X \in \mathcal{C}$, o triângulo $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X)$ é distinguido e para cada morfismo $u : X \longrightarrow Y$, existem morfismos v e w e um objeto Z , tais que o triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ é distinguido;

(TR2) se (X, Y, Z, u, v, w) é distinguido, então $(Y, Z, T(X), v, w, -T(u))$ também é;

(TR3) se existem dois triângulos distinguidos (X, Y, Z, u, v, w) e (X', Y', Z', u', v', w') , e dois morfismos $f : X \longrightarrow X'$ e $g : Y \longrightarrow Y'$, tais que $g \circ u = u' \circ f$, então existe um morfismo $h : Z \longrightarrow Z'$, tal que (f, g, h) é um morfismo de triângulos, conforme diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(X) \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow T(f) \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & T(X') \end{array};$$

(TR4) Sejam $u : X \longrightarrow Y$ e $v : Y \longrightarrow Z$ dois morfismos em \mathcal{C} , que por (TR1) garantem a existência dos triângulos distinguidos abaixo:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{i} Z' \xrightarrow{i'} T(X),$$

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{j'} T(Y),$$

$$X \xrightarrow{v \circ u} Z \xrightarrow{k} Y' \xrightarrow{k'} T(X).$$

Existem morfismos $f : Z' \longrightarrow Y'$ e $g : Y' \longrightarrow X'$ em \mathcal{C} , tais que o triângulo

$Z' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{T(i) \circ j'} T(X)$ é distinguido e comuta o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 T^{-1}(Y') & \xrightarrow{T^{-1}(k')} & X & \xrightarrow{1_X} & X & & \\
 \downarrow g & & \downarrow u & & \downarrow v \circ u & & \\
 T^{-1}(X') & \xrightarrow{T^{-1}(j')} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{j} & X' \xrightarrow{j'} T(Y) \\
 & & \downarrow i & & \downarrow k & & \downarrow 1_{X'} \quad \downarrow T(i) \\
 & & Z' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & X' \xrightarrow{T(i) \circ j'} T(Z') \\
 & & \downarrow i' & & \downarrow k' & & \\
 & & T(X) & \xrightarrow{1_{T(X)}} & T(X) & &
 \end{array}$$

A hipótese (TR4) é conhecida como *Axioma do Octaedro*.

Uma categoria aditiva \mathcal{C} , um funtor translação T e uma triangulação τ definem uma *categoria triangulada* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, T, \tau)$.

Sejam $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, T, \tau)$ e $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}', T', \tau')$ categorias trianguladas. Dizemos que um funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é *exato*, se existe uma transformação natural invertível $\alpha : F \circ T \longrightarrow T' \circ F$, tal que $(F(X), F(Y), F(Z), F(u), F(v), \alpha_X \circ F(w)) \in \tau'$ sempre que $(X, Y, Z, u, v, w) \in \tau$. Dizemos que um funtor exato $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é uma *equivalência triangulada*, se é um quase isomorfismo. Nesta caso, dizemos que as categorias $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, T, \tau)$ e $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}', T', \tau')$ são *equivalentes como categorias trianguladas*.

Um subconjunto $S \subset \mathcal{C}$ gera \mathcal{C} como categoria triangulada, se \mathcal{C} é a menor categoria triangulada que contém S .

Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana, que em particular, pode ser **mod**-**A**. Um *complexo* $X^\bullet = (X^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sobre \mathcal{C} é uma coleção de objetos $X^i \in \mathcal{C}$ e morfismos $d^i : X^i \longrightarrow X^{i+1}$, tais que $d^{i+1} \circ d^i = 0$ para qualquer i . Usualmente, descrevemos um complexo como uma seqüência, conforme abaixo:

$$\dots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \longrightarrow \dots$$

Um complexo $X^\bullet = (X^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ é *limitado inferiormente* se existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $X^k = 0$ para qualquer $k < i$, de maneira análoga, é *limitado superiormente* se existe $j \in \mathbb{Z}$, tal que $X^k = 0$ para qualquer $k > j$. Se satisfaz ambas as condições, dizemos apenas que é *limitado*. $X^\bullet = (X^i, d^i)$ é um *complexo stalk*, se existe k tal que $X^j = 0$ para qualquer $j \neq k$.

Dados dois complexos $X^\bullet = (X^i, d^i)$ e $Y^\bullet = (Y^i, d^i)$, definimos um *morfismo de complexos* $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$, por uma seqüência de morfismos $f^i : X^i \longrightarrow Y^i$, tais que $f^{i+1} \circ d^i = d^i \circ f^i$ para qualquer i , comutando os diagramas abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & X^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d^i} & X^{i+1} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} \\
 \dots & \longrightarrow & Y^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d^i} & Y^{i+1} \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Os complexos e os morfismos de complexos definem a categoria $C(\mathcal{C})$, que trivialmente contém uma cópia de \mathcal{C} , tomando os complexos stalks na posição $k = 0$. Para um objeto $Z \in \mathcal{C}$, denotamos por Z^\bullet , o complexo stalk com $X^0 = Z$. Denotamos as subcategorias plenas dos complexos limitados inferiormente, superiormente e limitados, por $C^+(\mathcal{C})$, $C^-(\mathcal{C})$ e $C^b(\mathcal{C})$, respectivamente.

Dizemos que dois morfismos $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ e $g^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ são *homotopicamente equivalentes* $f^\bullet \stackrel{H}{\sim} g^\bullet$, se existe uma sequência de morfismos $s^i : X^i \longrightarrow Y^{i-1}$, tais que $f^i - g^i = d^{i-1} \circ s^i + s^{i+1} \circ d^i$, conforme diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d^i} & X^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^{i-1} - g^{i-1} & & \downarrow f^i - g^i & & \downarrow f^{i+1} - g^{i+1} & & \\ & & Y^{i-1} & \xleftarrow{d^{i-1}} & Y^i & \xleftarrow{d^i} & Y^{i+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Dizemos que um morfismo de complexos $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ é *homotópico a zero* se f^\bullet é homotopicamente equivalente ao morfismo nulo. Segue da definição que $f^\bullet \stackrel{H}{\sim} g^\bullet$ se, e somente se, $f^\bullet - g^\bullet$ é homotópico a zero. A *categoria homotópica* $K(\mathcal{C})$ é a categoria cujos objetos são os mesmos de $C(\mathcal{C})$ e os morfismos são os morfismos de complexos módulo os homotópicos a zero. Isto é, f^\bullet e g^\bullet são iguais em $K(\mathcal{C})$ sempre que $f^\bullet \stackrel{H}{\sim} g^\bullet$. De maneira análoga, definimos as subcategorias plenas $K^+(\mathcal{C})$, $K^-(\mathcal{C})$ e $K^b(\mathcal{C})$, inserindo a relação de equivalência homotópica nos morfismos das subcategorias plenas $C^+(\mathcal{C})$, $C^-(\mathcal{C})$ e $C^b(\mathcal{C})$, respectivamente.

Para cada $i \in \mathbb{Z}$, definimos o i -ésimo *functor cohomologia* $H^i : C(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$, que leva cada complexo X^\bullet na i -ésima *cohomologia* $H^i(X^\bullet) = \text{Ker}(d^i) / \text{Im}(d^{i-1})$ e cada morfismo $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ no morfismo $H^i(f^\bullet) : H^i(X^\bullet) \longrightarrow H^i(Y^\bullet)$, definido pela igualdade $H^i(f^\bullet)(\bar{x}) = \overline{f^i(x)}$. O functor H^i está bem definido em $K(\mathcal{C})$, pois a equivalência homotópica $f^\bullet \sim g^\bullet$ implica na igualdade das cohomologias $H^i(f^\bullet) = H^i(g^\bullet)$, cuja demonstração pode ser vista em [Pic10]. Um complexo X^\bullet tem *cohomologia limitada* se $H^i(X^\bullet) \neq 0$ somente para uma quantidade finita de índices i . Denotamos por, $C^{+,b}(\mathcal{C})$, $C^{-,b}(\mathcal{C})$, $K^{+,b}(\mathcal{C})$ e $K^{-,b}(\mathcal{C})$ as subcategorias de complexos com cohomologia limitada de $C^+(\mathcal{C})$, $C^-(\mathcal{C})$, $K^+(\mathcal{C})$ e $K^-(\mathcal{C})$, respectivamente.

Um morfismo entre complexos $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ é um *quase isomorfismo* se $H^i(f^\bullet)$ é um isomorfismo para qualquer i . O conjunto *Quis* de todos os quase isomorfismos de $C(\mathcal{C})$ é um conjunto multiplicativo na categoria $K(\mathcal{C})$, e em especial, chamamos sua localização $D(\mathcal{C}) := K(\mathcal{C})[\text{Quis}^{-1}]$ de *categoria derivada* de \mathcal{C} . De maneira análoga, definimos $D^-(\mathcal{C})$, $D^+(\mathcal{C})$ e $D^b(\mathcal{C})$.

A partir de um morfismo de complexos $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$, definimos outro complexo $C_f^\bullet = (X^{i+1} \oplus Y^i, d_{C_f}^i)$, chamado de *complexo cone*, conforme sequência a seguir:

$$\dots \longrightarrow X^{i+1} \oplus Y^i \xrightarrow{\begin{bmatrix} -d^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d^i \end{bmatrix}} X^{i+2} \oplus Y^{i+1} \longrightarrow \dots$$

Fixado $j \in \mathbb{Z}$, o automorfismo $T[j] : K(\mathcal{C}) \longrightarrow K(\mathcal{C})$, leva o complexo $X^\bullet = (X^i, d^i)$ e o morfismo f^\bullet nos respectivos $X^\bullet[j] = (X^i[j], d^i[j])$ e $f^\bullet[j]$, em que $X^i[j] = X^{i+j}$, $d^i[j] = d^{i+j}$ e $f^i[j] = f^{i+j}$. A categoria homotópica $K(\mathcal{C}) = (K(\mathcal{C}), T[1], \tau)$ é triangulada, em que os triângulos distinguidos em τ , são os triângulos isomorfos aos seguintes:

$$X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{\alpha(f^\bullet)} C^\bullet \xrightarrow{\beta(f^\bullet)} X^\bullet[1],$$

em que $\alpha(f^\bullet)^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1_{Y^i} \end{bmatrix}$ e $\beta(f^\bullet)^i = [1_{X^{i+1}} \ 0]$. Esta triangulação de $K(\mathcal{C})$ induz uma triangulação em $D(\mathcal{C})$ via localização, que se encontra mais detalhada em [Fre16]. Dizemos que duas categorias aditivas \mathcal{C} e \mathcal{B} são *derivadamente equivalentes* se $D^b(\mathcal{C})$ e $D^b(\mathcal{B})$ são equivalentes como categorias trianguladas.

Neste trabalho, focamos nas categorias de complexos, homotópica e derivada de $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$, que usualmente são denotadas por simplesmente $C(\mathbf{A})$, $K(\mathbf{A})$ e $D(\mathbf{A})$, respectivamente. Usamos uma notação análoga para a subcategoria plena $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$ dos módulos projetivos de $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$. Em geral, descrever os morfismos ou identificar os indecomponíveis em $D^b(\mathbf{A})$ não é tão simples. O Lema 1.27 minimiza estas dificuldades, obtendo informações de $D^b(\mathbf{A})$ via $K^{-,b}(\mathbf{A})$. Este resultado está demonstrado no trabalho de König e Zimmermann [KZ98].

Lema 1.27. *Seja \mathbf{A} uma álgebra. A categoria $D^-(\mathbf{A})$ é equivalente a categoria $K^-(\mathbf{P}_{\mathbf{A}})$. Em particular, $D^b(\mathbf{A})$ é equivalente a $K^{-,b}(\mathbf{P}_{\mathbf{A}})$.*

Se adicionarmos a hipótese de dimensão global finita, obtemos uma equivalência entre $D^b(\mathbf{A})$ e $K^b(\mathbf{P}_{\mathbf{A}})$. Um *complexo minimal* $P^\bullet = (X^i, d^i)$ em $C(\mathbf{P}_{\mathbf{A}})$, é um complexo tal que $d^i(X^i) \subset \text{rad}(X^{i+1})$. Chamamos a subcategoria plena dos complexos minimais de *categoria minimal* de \mathbf{A} e a denotamos por $P_{\min}^\bullet(\mathbf{A})$. Em [GM09], Giraldo e Merklen demonstraram o Lema 1.28 atribuído a Drozd.

Lema 1.28. *Todo complexo $P^\bullet \in C(\mathbf{P}_{\mathbf{A}})$ é isomorfo a um complexo minimal em $K(\mathbf{P}_{\mathbf{A}})$.*

1.7 Equivalência Derivada

Morita em [Mor58], deu as condições necessárias e suficientes para que duas categorias de módulos $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$ e $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{B}$ sejam equivalentes. Nestes casos, dizemos que \mathbf{A} e \mathbf{B} são *Morita equivalentes*. A equivalência entre as categorias de módulos preserva o tipo da representação.

Dizemos que duas álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} são *derivadamente equivalentes* se suas categorias derivadas $D^b(\mathbf{A})$ e $D^b(\mathbf{B})$ são equivalentes como categorias trianguladas. Denotamos a equivalência derivada entre \mathbf{A} e \mathbf{B} por $\mathbf{A} \simeq_d \mathbf{B}$. Um complexo $P^\bullet \in K^b(\mathbf{P}_{\mathbf{A}})$ é dito *inclinante* se satisfaz as seguintes condições:

1. $\text{Hom}_{K^b(\mathbf{P}_{\mathbf{A}})}(P^\bullet, P^\bullet[i]) = 0$ para $i \neq 0$,

2. $\text{add}(P^\bullet)$ gera $K^b(\mathbf{P}_A)$ como categoria triangulada,

em que $\text{add}(P^\bullet)$ é a subcategoria plena das somas diretas finitas dos somandos diretos de P^\bullet .

Rickard demonstrou um resultado similar ao de Morita, dando as condições necessárias e suficientes para que se tenha uma equivalência derivada [[Ric89], Teorema 6.4]. Este resultado é conhecido como o *Teorema de Rickard*. O Teorema 1.29 é um dos resultados enunciados no Teorema de Rickard.

Teorema 1.29. *Duas álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} são derivadamente equivalentes se, e somente se, existe um complexo inclinante $P^\bullet \in K^b(\mathbf{P}_A)$, tal que $\mathbf{B} \cong \text{End}_{K^b(\mathbf{P}_A)}(P^\bullet)$.*

Uma das vantagens do Teorema 1.29 é que o complexo inclinante depende exclusivamente dos morfismos em $K^b(\mathbf{P}_A)$. Conforme discutido na Seção 1.6, em geral, preferimos trabalhar em $K^b(\mathbf{P}_A)$ a detalhar os morfismos de $D^b(\mathbf{P}_A)$. O próximo Lema 1.30 também é um dos resultados enunciados em outro teorema demonstrado por Rickard, desta vez em [Ric91].

Lema 1.30. *Sejam \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} álgebras de dimensão finita. Se \mathbf{B} e \mathbf{C} são derivadamente equivalentes, então os produtos tensoriais $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{C}$ também são.*

Exemplo 17. *O produto tensorial $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$ é derivadamente equivalente a álgebra de Dynkin $\mathbf{k}D_4$.*

De fato, conforme Exemplo 16 da Seção 1.3, $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$ é isomorfo a álgebra de quiver com relações $\mathbf{k}(A_2 \otimes A_2)/I \square I$, em que $I \square I = \langle \alpha\beta - \beta\alpha \rangle$ e $A_2 \otimes A_2$ é o quiver abaixo:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta \\ 3 & \xrightarrow{\alpha} & 4. \end{array}$$

Mantemos a notação da Seção 1.1 dos projetivos indecomponíveis $P_i = \varepsilon_i \mathbf{A}_A$. Seja T_i^\bullet o complexo com entradas iguais a zero nas posições diferentes de $-1, 0$ e 1 , e nestas posições as entradas a seguir:

$$T_i^\bullet = \begin{cases} 0 \longrightarrow P_i \longrightarrow 0, & \text{se } i \neq 1, \\ 0 \longrightarrow P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}} P_1, & \text{se } i = 1. \end{cases}$$

Definimos o complexo

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=1}^4 T_i^\bullet.$$

Afirmamos que T^\bullet é um complexo inclinante. De fato, é óbvio que para $k \neq -1, 0, 1$, $\text{Hom}_{K^b(\mathbf{P}_A)}(T^\bullet, T^\bullet[k]) = 0$. Além disso, $\text{Hom}_{K^b(\mathbf{P}_A)}(T_i^\bullet, T_j^\bullet[k]) = 0$, para quaisquer $i, j \neq 1$ e $k \in \{-1, 1\}$, conforme diagramas abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P_i & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P_j & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P_i & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_i \end{array}$$

Restando os casos que envolvem T_1^\bullet . Segue que, $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_1^\bullet, T_i^\bullet[-1])$ e $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_i^\bullet, T_1^\bullet[1])$ são iguais a zero para qualquer $i \neq 1$, conforme os diagramas abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P_i & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} P_i & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 \end{array}$$

Segue também, que $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_1^\bullet, T_i^\bullet[1]) = 0$ para qualquer i , por não existir nenhum caminho no quiver $A_2 \otimes A_2$, que tenha final em 1 e início em $i \neq 1$, ficando mais evidente nos diagramas abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_i \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 \end{array}$$

Já nos casos $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_i^\bullet, T_1^\bullet[-1])$ para $i = 2, 3$ e 4 , temos os respectivos três diagramas abaixo, em que $x, y, z \in \mathbf{k}$:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & P_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & P_3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & P_4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} \nearrow r_0 \\ \searrow x\alpha \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow s_0 \\ \searrow y\beta \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow t_0 \\ \searrow z\alpha\beta \end{array} \end{array}$$

Definimos nos três diagramas acima, as três respectivas seqüências de morfismos $\{r_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $\{s_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ e $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ iguais a:

1. $r_0 = \begin{bmatrix} x\varepsilon_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $r_i = 0$, para $i \neq 0$;
2. $s_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ y\varepsilon_3 \end{bmatrix}$ e $s_i = 0$, para $i \neq 0$;
3. $t_0 = \begin{bmatrix} z\beta \\ 0 \end{bmatrix}$ e $t_i = 0$, para $i \neq 0$.

Compondo $[\alpha \ \beta]$ com os morfismos r_0, s_0 e t_0 , obtemos $x\alpha, y\beta$ e $z\alpha\beta$, respectivamente. Logo, os três morfismos de complexos dos diagramas anteriores são homotópicos a zero, implicando em $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_i^\bullet, T_1^\bullet[-1]) = 0$, para $i = 2, 3$ e 4 . De maneira análoga,

$\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_1^\bullet, T_1^\bullet[-1]) = 0$, conforme o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \xrightarrow{\quad} & P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \begin{bmatrix} x\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & y\varepsilon_3 \end{bmatrix} & & \\
 & & \downarrow & & \\
 P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 0 & &
 \end{array}$$

Logo, $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T^\bullet, T^\bullet[k]) = 0$ para $k \neq 0$. Restando provar que $\text{add}(T^\bullet)$ gera $\mathbf{K}^b(P_A)$ como categoria triangulada. De fato, basta provar que o complexo $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow 0$ é gerado pelos complexos de $\text{add}(T^\bullet)$.

Seja $g^\bullet = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ o morfismo entre os complexos T_1^\bullet e $T_2^\bullet \oplus T_3^\bullet$ em $\text{add}(T^\bullet)$, dado nas posições $-1, 0$ e 1 por:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \xrightarrow{\quad} & P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 \\
 \downarrow g_{-1}=0 & & \downarrow g_0 = \begin{bmatrix} 1_{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & 1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix} & & \downarrow g_1=0 \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{\quad} & 0
 \end{array}$$

Obtemos o complexo cone C_g^\bullet , detalhado abaixo nas posições $-2, -1, 0$ e 1 :

$$0 \longrightarrow P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1_{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & 1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix}} P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \longrightarrow 0$$

Afirmamos que o complexo cone C_g^\bullet é isomorfo a $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow 0$ em $\mathbf{K}^b(P_A)$. De fato,

tomamos os morfismos de complexos $f^\bullet = (f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e $h^\bullet = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, dados por:

$$\begin{array}{ccccc}
 P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1_{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & 1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix}} & P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow f_0 = \begin{bmatrix} 1_{\mathbf{A}} & \alpha & \beta \end{bmatrix} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & 0 \\
 \\
 0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow h_0 = \begin{bmatrix} 1_{\mathbf{A}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & & \downarrow \\
 P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1_{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & 1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix}} & P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Diretamente da composição dos morfismos de complexos, obtemos que $f^\bullet \circ h^\bullet$ é o morfismo identidade. Enquanto que $h^\bullet \circ f^\bullet$ é igual a:

$$(h \circ f)_k = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & , \text{ se } k = -1, \\ \begin{bmatrix} 1_{\mathbf{A}} & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & , \text{ se } k = 0, \\ 0 & , \text{ se } k \notin \{-1, 0\}. \end{cases}$$

Definimos a sequência de morfismos $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, em que

$$s_k = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -1_{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & 0 & -1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix} & , \text{ se } k = 0, \\ 0 & , \text{ se } k \neq 0. \end{cases}$$

Pelo diagrama abaixo e a composição dos morfismos, $h^\bullet \circ f^\bullet \stackrel{H}{\sim} 1_{C_g^\bullet}$:

$$\begin{array}{ccc}
 P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1_A & 0 \\ 0 & 1_A \end{bmatrix}} & P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \\
 \downarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_A \end{bmatrix} & \swarrow s_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1_A & 0 \\ 0 & 0 & -1_A \end{bmatrix} & \downarrow \begin{bmatrix} 1_A & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1_A & 0 & 0 \\ 0 & 1_A & 0 \\ 0 & 0 & 1_A \end{bmatrix} \\
 P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1_A & 0 \\ 0 & 1_A \end{bmatrix}} & P_1 \oplus P_2 \oplus P_3
 \end{array}$$

Com isto, concluímos que $\text{add}(T^\bullet)$ gera $K^b(P_A)$ como categoria triangulada. Portanto, T^\bullet é um complexo inclinante. Pelo Teorema 1.29, o produto tensorial $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$ é derivadamente equivalente a álgebra de endomorfismos $\text{End}_{K^b(P_A)}(T^\bullet)$.

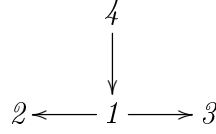
Afirmamos que $\text{End}_{K^b(P_A)}(T^\bullet) \cong \mathbf{k}D_4$. De fato, os morfismos identidades entre os complexos indecomponíveis T_i^\bullet formam um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de $\text{End}_{K^b(P_A)}(T^\bullet)$, fazendo com que seu quiver de Gabriel Q tenha quatro vértices, identificados por i para cada T_i^\bullet . Consequentemente, as flechas de Q de início i e final j estão em bijeção com os morfismos de qualquer base fixada de $\text{Hom}_{K^b(P_A)}(T_i^\bullet, T_j^\bullet)$.

Para $i, j \in \{2, 3, 4\}$, as bases de $\text{Hom}_{K^b(P_A)}(T_i^\bullet, T_j^\bullet)$ repetem o comportamento das flechas de $A_2 \otimes A_2$ invertendo o sentido. Enquanto que os morfismos entre complexos não nulos que envolvem T_1^\bullet , são múltiplos escalares dos listados abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
 P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} P_1 & P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} P_1 & P_4 \longrightarrow 0 \\
 \downarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_2 & 0 \end{bmatrix} & \downarrow \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} & \downarrow \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} \\
 P_2 \longrightarrow 0 & P_3 \longrightarrow 0 & P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} P_1
 \end{array}$$

Finalmente, temos que os morfismos de complexos de $\text{Hom}_{K^b(P_A)}(T_4^\bullet, T_2^\bullet)$ são múltiplos escalares das composições do terceiro diagrama acima com o primeiro, enquanto que os morfismos de $\text{Hom}_{K^b(P_A)}(T_4^\bullet, T_3^\bullet)$ são múltiplos escalares das composições do terceiro diagrama acima com o segundo. Segue que $\text{End}_{K^b(P_A)}(T^\bullet)$ é isomorfo a $\mathbf{k}Q$ em que Q é o

quiver abaixo:

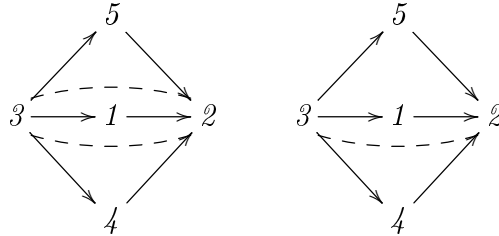


Portanto, $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \simeq_d \mathbf{k}D_4$.

A equivalência derivada do Exemplo 17, obtida via Teorema de Rickard, também é uma consequência dos Lemas 1.31 e 1.36, demonstrados por Ladkani [[Lad13], Corolário 1.2] e por Happel e Seidel [[HS10], Teorema Principal], respectivamente. Nestes resultados, são estabelecidas equivalências derivadas envolvendo as álgebras de Nakayama $A(m, n)$, definidas pela álgebra de quiver com relações $\mathbf{k}L_{m-1}/R_{L_{m-1}}^n$, em que L_{m-1} é o quiver definido na Seção 1.4 e $R_{L_{m-1}}^n$ é o ideal gerado pelos caminhos de comprimento n . O Lema 1.36 também indica quais destas álgebras são ditas *hereditárias por partes*, objeto de estudo da Seção 1.8. A equivalência derivada do Lema 1.32 é garantida pelo trabalho sobre álgebras de poset de Ladkani [Lad08].

Lema 1.31. *Sejam $m, n \geq 1$. As álgebras $\mathbf{k}A_m \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_n$ e $A(m \cdot n, n+1)$ são derivadamente equivalentes. Consequentemente, $A(m \cdot n, n+1)$ e $A(m \cdot n, m+1)$ são derivadamente equivalentes.*

Lema 1.32. *Sejam $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ e $\mathbf{B} = \mathbf{k}Q'/I'$, tais que (Q, I) e (Q', I') são os quiver com as relações de comutatividade abaixo. Então $\mathbf{A} \simeq_d \mathbf{B}$.*

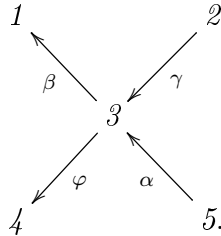


No Corolário 1.34, listamos as álgebras de quiver com relações derivadamente equivalentes a $\mathbf{k}A_n$, devido ao protagonismo das mesmas no Teorema Principal. Esta lista é uma consequência direta do Lema 1.33, cuja demonstração pode ser vista em [[Hap88], IV 6.7].

Lema 1.33. *Uma álgebra de quiver com relações $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_n$ se, e somente se, satisfaz todas as cinco condições a seguir:*

1. Q é uma árvore com exatamente n vértices;
2. I pode ser gerado por caminhos de comprimento dois;
3. todo vértice tem no máximo quatro vértices vizinhos;

4. se um vértice tem quatro vizinhos, então $\mathbf{k}Q'/I'$ é uma subálgebra plena de $\mathbf{k}Q/I$, em que $I' = \langle \alpha\beta, \gamma\varphi \rangle$ e Q' é o quiver abaixo:



5. se um vértice tem três vizinhos, então $\mathbf{k}Q''/I''$ é uma subálgebra plena de $\mathbf{k}Q/I$, em que $I'' = \langle \alpha\beta \rangle$ e Q'' é um dos quivers abaixo:



A omissão da orientação de uma flecha na lista de quivers do Corolário 1.34 indica que se deve considerar todos os quivers com os dois sentidos em cada flecha não orientada.

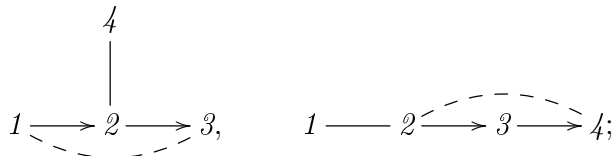
Corolário 1.34. *Seja $n \leq 5$. Uma álgebra \mathbf{A} é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_n$ se, e somente se, é isomorfa a $\mathbf{k}Q/I$, em que (Q, I) é um dos quivers com relações listados abaixo:*

1. A_1 ;

2. A_2 ;

3. $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$, $1 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 2 \longrightarrow 3$;

4. $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4$, $1 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4$, $1 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 2 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 3 \longrightarrow 4$,



5. $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$,

$1 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$,

$1 \longrightarrow 2 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$,

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 4 \longrightarrow 5$,

$1 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 2 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$,

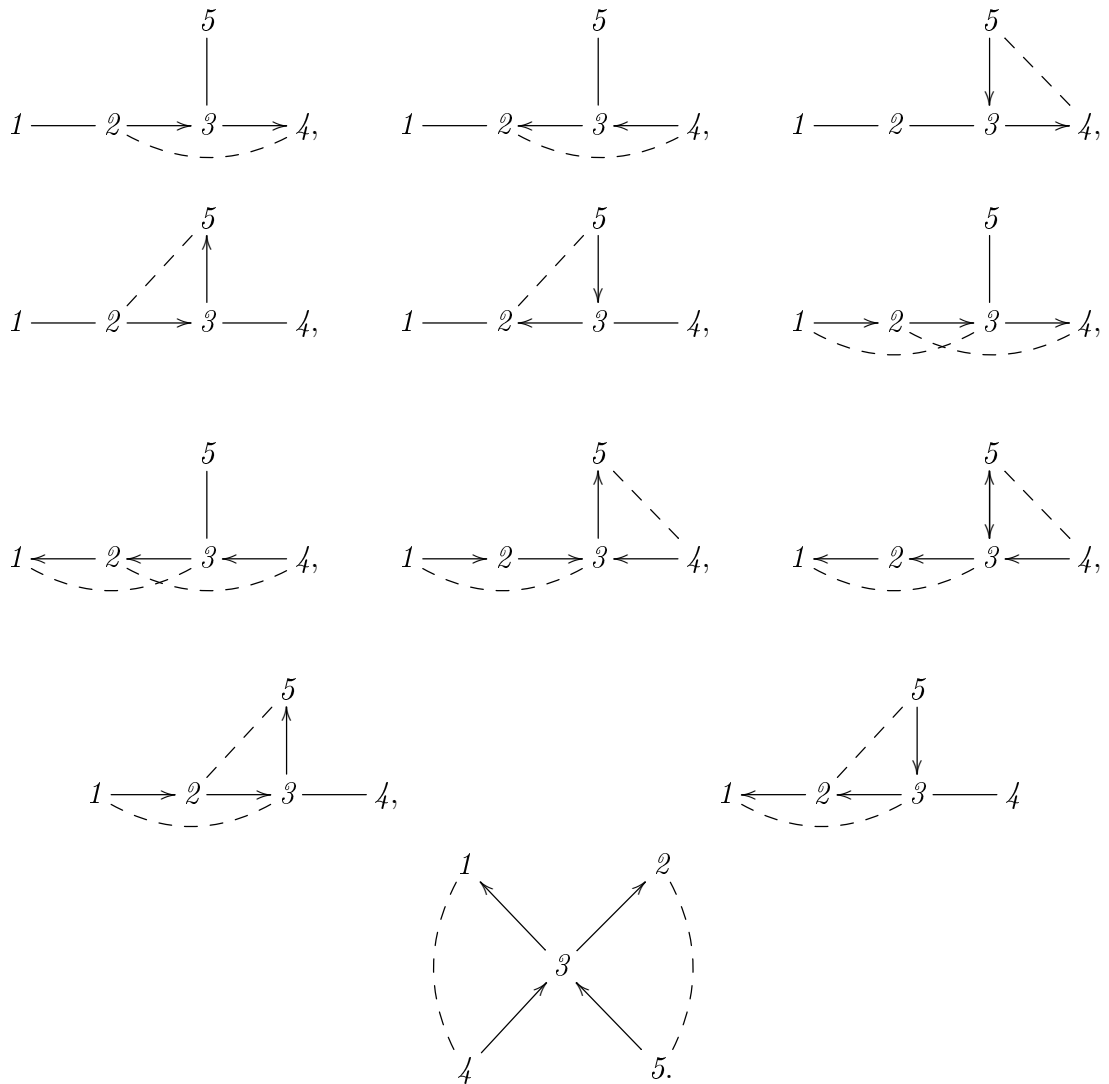
$1 \longrightarrow 2 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 3 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 4 \longrightarrow 5$,

$1 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$,

$1 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow 4 \longleftarrow 5$

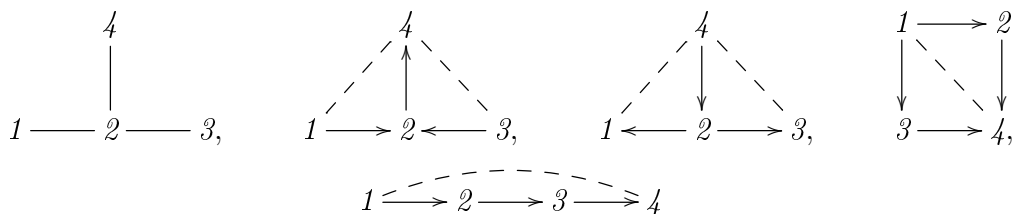
$1 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$,

$1 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 2 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 3 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 4 \longrightarrow 5$,



As álgebras derivadamente equivalentes a $\mathbf{k}D_4$ estão classificadas na Proposição 1.35, conforme artigo de B. Keller [Kel91]. Veja também o trabalho de Assem e Skowroński [[AS88], Lema 4.10 (F1)-(F5)].

Proposição 1.35. *Uma álgebra é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}D_4$ se, e somente se, é isomorfa a $\mathbf{k}Q/I$, em que (Q, I) é um dos quivers com relações listados abaixo:*



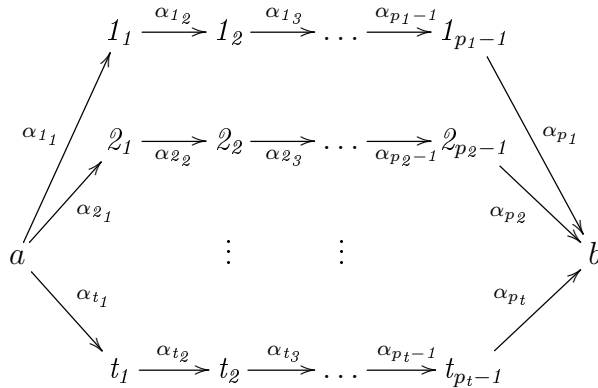
A lista das álgebras derivadamente equivalentes as álgebras de Dynkin $\mathbf{k}E_6$ e $\mathbf{k}E_8$ é consideravelmente extensa. A saber, considerando somente as álgebras do tipo árvore, Barot, Brüstle e de la Peña classificaram todas as 208 classes não isomorfas de álgebras derivadamente equivalentes a $\mathbf{k}E_6$ [[BBdlPn00], 3].

Tabela 1.1: Tabela de Happel e Seidel das álgebras $A(m, n)$ hereditárias por partes

$n \setminus m$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	...
3		D_4	D_5	E_6	E_7	E_8	\tilde{E}_8	\mathbb{X}_{236}	\mathbb{X}_{237}	—	—	...
4			D_5	E_6	E_7	\tilde{E}_7	\mathbb{X}_{244}	\mathbb{X}_{245}	—	—	—	...
5				D_6	E_7	E_8	\tilde{E}_8	\mathbb{T}_{237}	—	—	—	...
6					D_7	E_8	\tilde{E}_8	\mathbb{X}_{236}	\mathbb{X}_{237}	—	—	...
7						D_8	\tilde{E}_8	\mathbb{T}_{237}	\mathbb{X}_{237}	—	—	...
8							D_9	\mathbb{T}_{237}	\mathbb{T}_{238}	\mathbb{X}_{238}	—	...
9							

1.9 Álgebras Canônicas e Retas Projetivas com Pesos

Para $t \geq 2$ e $p = (p_1 \dots p_t)$ com $p_i \geq 2$ para $1 \leq i \leq t$, definimos $Q_p = Q(p_1 \dots p_t)$ pelo quiver abaixo:



Definimos λ por:

$$\lambda = \begin{cases} (\lambda_3, \dots, \lambda_t) \in \mathbf{k}^{t-2}, & \text{se } t \geq 3, \\ 0, & \text{se } t = 2, \end{cases}$$

em que $\lambda_i \neq 0 \forall i$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\lambda_3 = 1$.

A álgebra canônica $\mathbf{C}(p, \lambda)$ é a álgebra de quiver com relações $\mathbf{k}Q_p/I_p$, em que I_p é o ideal gerado pelas relações $\alpha_{11} \dots \alpha_{p_1} + \lambda_i \alpha_{21} \dots \alpha_{p_2} - \alpha_{i1} \dots \alpha_{p_i}$ para qualquer $3 \leq i \leq t$. Segue da definição, que para $t = 2$, temos $\mathbf{C}(p, \lambda) = \mathbf{k}Q_p$.

Definimos \mathcal{X}_p , pela fórmula abaixo:

$$\mathcal{X}_p = 2 \sum_{i=1}^t \left(1 - \frac{1}{p_i} \right).$$

A Proposição 1.37 relaciona o valor de \mathcal{X}_p com o tipo de representação da álgebra. Além disso, se $\mathcal{X}_p = 0$, $\mathbf{C}(p, \lambda)$ é uma álgebra tubular, cuja definição e resultados podem ser vistos em [SS07] e [Rin84]. Happel e Ringel demonstraram em [[HR86], 1], que uma

álgebra tubular é derivadamente equivalente a uma álgebra canônica, conforme o Lema 1.38. Maiores detalhes e resultados envolvendo álgebras canônicas estão em [Rin90].

Proposição 1.37. *Seja $\mathbf{A} = \mathbf{C}(p, \lambda)$ uma álgebra canônica. \mathbf{A} é mansa se, e somente se, $\mathcal{X}_p \geq 0$. Em particular, é uma álgebra tubular se, e somente se, $\mathcal{X}_p = 0$*

Lema 1.38. *Dada uma álgebra tubular \mathbf{A} , existe uma álgebra canônica tubular $\mathbf{C}(p, \lambda)$, tal que \mathbf{A} e $\mathbf{C}(p, \lambda)$ são derivadamente equivalentes.*

Mantendo propositalmente a notação usada na definição das álgebras canônicas, seja $t \geq 3$. Uma reta projetiva com pesos $\mathbb{X} = \mathbb{X}(p, \lambda)$ é definida por uma sequência de pesos $p = (p_1, \dots, p_t)$ e uma sequência de parâmetros $\lambda = (\lambda_3, \dots, \lambda_t) \in \mathbf{k}^{t-2}$, tais que $p_i \in \mathbb{Z}$, $\lambda_i \in \mathbf{k}$, $p_i \geq 2$, $\lambda_i \neq 0$ e os λ_i 's são distintos entre si. Novamente, sem perda da generalidade, supomos que $\lambda_3 = 1$.

Seja $\mathbb{L} = \mathbb{L}(p, \lambda)$ o grupo abeliano gerado por elementos x_1, \dots, x_t com as relações $p_i x_i = p_j x_j$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq t$. Chamamos $c = p_i x_i$ de elemento canônico de \mathbb{L} . Definimos o mapa grau $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{Z}$, dado por $\delta(x_i) = m/p_i$, em que m é o mínimo múltiplo comum de p_1, \dots, p_t .

Seja $S = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_t]/I$, em que $I = \langle X_1^{p_1} + \lambda_i X_2^{p_2} - X_i^{p_i} \mid 3 \leq i \leq t \rangle$. Segue que S é \mathbb{L} -graduada, em que X_i tem grau x_i . Seja $\mathbf{mod}^{\mathbb{L}}(S)$ a categoria dos S -módulos \mathbb{L} -graduados finitamente gerados e $\mathbf{mod}_0^{\mathbb{L}}(S)$ a subcategoria de Serre de $\mathbf{mod}^{\mathbb{L}}(S)$ dos submódulos de dimensão finita. Definimos a categoria dos feixes coerentes de uma reta projetiva com pesos \mathbb{X} , por $\mathbf{coh}(\mathbb{X}) = \mathbf{mod}^{\mathbb{L}}(S)/\mathbf{mod}_0^{\mathbb{L}}(S)$. Em especial, $\mathbf{coh}(\mathbb{X})$ é uma \mathbf{k} -categoria noetheriana, conexa e abeliana, dando sentido à categoria derivada $D^b(\mathbf{coh}(\mathbb{X}))$.

Segue de [GL87] e [GL91] a seguinte equivalência derivada:

Teorema 1.39. *As categorias $D^b(\mathbf{coh}(\mathbb{X}(p, \lambda)))$ e $D^b(\mathbf{mod}(\mathbf{C}(p, \lambda)))$ são equivalentes.*

Dentre as categorias de feixes coerentes de uma reta projetiva com pesos, destacamos \mathbb{X}_{333} . Pelo Teorema 1.39, ela é derivadamente equivalente a álgebra canônica \mathbf{C}_{333} , que por sua vez, é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$, conforme [[Len99], Exemplo 18.6.2]. Enunciamos este resultado no Lema 1.40.

Lema 1.40. *A álgebra $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$ é derivadamente equivalente a categoria de feixes coerentes da reta projetiva com pesos \mathbb{X}_{333} .*

1.10 Tipos de Representações da Categoria Derivada

Definimos a *dimensão cohomológica* de um complexo de \mathbf{A} -módulos $X^\bullet \in D^b(\mathbf{A})$, pelo vetor $h\text{-dim}(X^\bullet) = (\dim_{\mathbf{k}}(H^i(X^\bullet)))_{i \in \mathbb{Z}}$, em que $\dim_{\mathbf{k}}(H^i(X^\bullet))$ é a dimensão da i -ésima cohomologia de X^\bullet .

Definição 1.41. *Seja \mathbf{A} uma álgebra de dimensão finita.*

1. \mathbf{A} é derivadamente finita se a menos de automorfismos $T[i]$ e de isomorfismos, existe somente uma quantidade finita de complexos indecomponíveis em $D^b(\mathbf{A})$;
2. \mathbf{A} é derivadamente discreta se para cada vetor com entradas naturais $\vec{n} = (n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, a menos de automorfismos $T[i]$ e de isomorfismos, existe somente uma quantidade finita de complexos indecomponíveis $X^\bullet \in D^b(\mathbf{A})$, tais que $h\text{-dim}(X^\bullet) = \vec{n}$;
3. \mathbf{A} é derivadamente mansa se para cada vetor com entradas naturais $\vec{n} = (n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, existe uma localização $R = \mathbf{k}[t]_f$ para algum $f \in \mathbf{k}[t]$, e um número finito de complexos limitados de R - \mathbf{A} -bimódulos X_j^\bullet , tais que:
 - (a) cada X_j^\bullet é finitamente gerado e livre como R -módulo à esquerda,
 - (b) a menos de uma quantidade finita, todo complexo indecomponível $X^\bullet \in D^b(\mathbf{A})$ com dimensão cohomológica $h\text{-dim}(X^\bullet) = \vec{n}$ é isomorfo a um complexo da forma $S \otimes_R X_j^\bullet = (S \otimes_R X_j^\bullet, 1_S \otimes_R d^i)$ para algum j e algum R -módulo simples S ;
4. \mathbf{A} é derivadamente selvagem se existe $P^\bullet \in P_{\min}^\bullet(\mathbf{k}\langle x, y \rangle \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A})$, tal que o funtor $-\otimes_{\mathbf{k}\langle x, y \rangle} P^\bullet : \text{fin mod-}\mathbf{k}\langle x, y \rangle \longrightarrow D^b(\mathbf{A})$ preserva classes de isomorfismos e objetos indecomponíveis, em que $L \otimes_{\mathbf{k}\langle x, y \rangle} P^\bullet = (L \otimes_{\mathbf{k}\langle x, y \rangle} P^i, 1_L \otimes_{\mathbf{k}\langle x, y \rangle} d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$

Segundo Geiß e Krause em [GK02], a grosso modo, uma álgebra é derivadamente mansa, se para cada vetor com entradas naturais $\vec{n} = (n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, os complexos indecomponíveis com $h\text{-dim}(X^\bullet) = \vec{n}$ ocorrem parametrizados por uma quantidade finita de famílias a um parâmetro contínuo. Segue da definição que as álgebras derivadamente finitas são derivadamente discretas e que as derivadamente discretas são derivadamente mansas. Bekkert e Drozd demonstraram em [BD03], que as álgebras são divididas em duas classes disjuntas, as derivadamente mansas e as derivadamente selvagens, conforme Teorema 1.42 enunciado a seguir:

Teorema 1.42. *Toda álgebra de dimensão finita é derivadamente mansa ou derivadamente selvagem, mas não ambas.*

Exemplo 19. *Conforme Happel [Hap88], se \mathbf{A} é uma álgebra do tipo Dynkin, então \mathbf{A} é derivadamente finita.*

Exemplo 20. *Seja $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{k}[x]}{(x^2)}$ descrita no Exemplo 6, que é isomorfa a $\mathbf{k}Q/I$, em que $I = \langle \alpha^2 \rangle$ e Q é o quiver abaixo:*

$$1 \curvearrowright \alpha.$$

Pelo Exemplo 9, \mathbf{A} é de representação finita. Mas segundo o trabalho de Vossieck [Vos01], \mathbf{A} é derivadamente discreta, cujos complexos indecomponíveis são da forma:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

e

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha} P_1 \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} P_1 \xrightarrow{\alpha} P_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots,$$

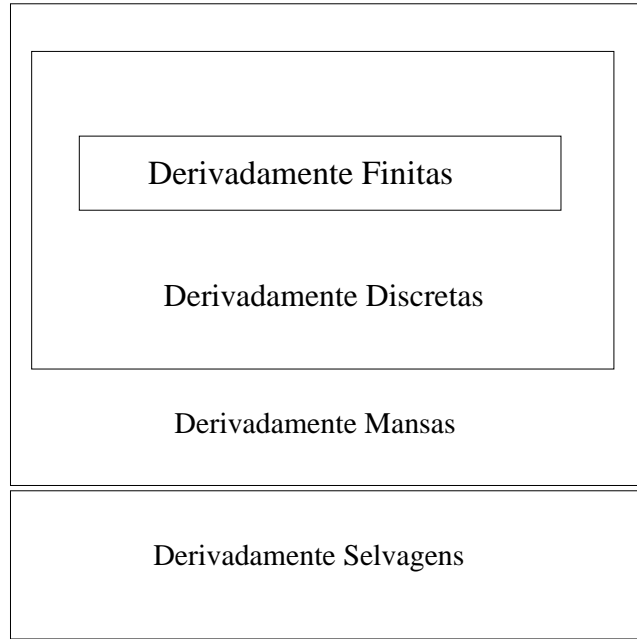


Figure 1.2: Tipos de Representação Derivada

Exemplo 21. Seja $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}[x]}{(x^3)}$. Pelo Exemplo 9, \mathbf{B} é de representação finita, com apenas três classes não isomorfas de módulos indecomponíveis. Mas segundo o trabalho de Bekkert, Drozd e Futorny [BDF09], \mathbf{B} é derivadamente selvagem.

Observamos nos exemplos anteriores, que mesmo nos casos em que uma álgebra \mathbf{A} é de representação finita não podemos afirmar o tipo da representação derivada. Mesmo tendo uma quantidade finita de módulos indecomponíveis, podemos perder o controle da quantidade de indecomponíveis na categoria derivada. Outra curiosidade é que \mathbf{A} pode ser derivadamente mansa, mas \mathbf{A}/I pode ser derivadamente selvagem para algum ideal I . A equivalência derivada preserva o tipo da representação derivada, conforme o enunciado do Lema 1.43. O caso em que a equivalência derivada preserva álgebras derivadamente mansas foi demonstrado por Geiß e Krause em [[GK02], Teorema 1.1]. Enquanto que o caso derivadamente discreto foi demonstrado por Vossieck [[Vos01], Proposição 1.1].

Lema 1.43. Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} álgebras derivadamente equivalentes. Valem as seguintes afirmações:

1. \mathbf{A} é derivadamente discreta se, e somente se, \mathbf{B} também é.
2. \mathbf{A} é derivadamente mansa se, e somente se, \mathbf{B} também é.

A Proposição 1.44, relaciona o tipo de representação na categoria de módulos com o da categoria derivada, e o tipo de representação derivada da álgebra com o tipo de uma de suas subálgebras plenas. Nesta Proposição, o item 1 foi demonstrado por Vossieck em [Vos01]. Os itens 3 e 4 estão no trabalho de Bekkert, Drozd e Futorny [BDF09]. Enquanto

que os itens 2 e 5 seguem do Teorema 1.42. O item 2 também está demonstrado com mais detalhes na tese de Freitas [Fre16].

Proposição 1.44. *Seja \mathbf{A} uma \mathbf{k} -álgebra. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se \mathbf{A} é derivadamente discreta, então \mathbf{A} é de representação finita;*
2. *Se \mathbf{A} é derivadamente mansa, então \mathbf{A} é mansa;*
3. *Se \mathbf{A} é selvagem, então \mathbf{A} é derivadamente selvagem;*
4. *Se ε é um idempotente de \mathbf{A} e a subálgebra plena $\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon$ é derivadamente selvagem, então \mathbf{A} também é derivadamente selvagem;*
5. *Se ε é um idempotente de \mathbf{A} e \mathbf{A} é derivadamente mansa, então a subálgebra plena $\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon$ também é derivadamente mansa.*

Os dois próximos teoremas fazem parte dos principais resultados de [BDF09], quando restringimos às álgebras de dimensão finita. O primeiro classifica o tipo de representação derivada das álgebras locais, enquanto que o segundo classifica as álgebras de dois pontos.

Teorema 1.45. *Seja \mathbf{A} uma \mathbf{k} -álgebra local, associativa, básica, conexa de dimensão finita. Então \mathbf{A} é derivadamente mansa se, e somente se, \mathbf{A} é isomorfa a uma das seguintes álgebras:*

1. $\mathbf{L}_1 = \mathbf{k}$
2. $\mathbf{L}_2 = \mathbf{k}[x]/(x^2)$

■

Teorema 1.46. *Seja $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ uma \mathbf{k} -álgebra conexa de dimensão finita, em que Q tem exatamente dois vértices. \mathbf{A} é derivadamente mansa se, e somente se, $\mathbf{k}Q/I$ é isomorfa a uma das seguintes álgebras de quiver com relações:*

1. $1 \xrightarrow{\alpha} 2, I = 0;$
2. $1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 2, I = 0;$
3. $1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2, I = \langle \alpha\beta \rangle \text{ ou } I = \langle \alpha\beta, \beta\alpha \rangle;$

4. $1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{array} 2, \text{ em que } I = \langle \alpha\gamma, \gamma\beta \rangle;$

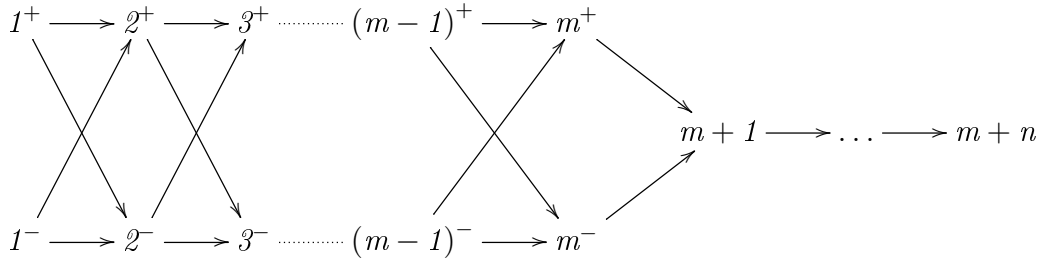
$$5. \alpha \circlearrowleft 1 \xrightarrow{\beta} 2, I = \langle \alpha^2 \rangle;$$

$$6. 1 \xrightarrow{\beta} 2 \circlearrowright \alpha, I = \langle \alpha^2 \rangle;$$

$$7. \alpha \circlearrowleft 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{array} 2, \text{ em que } I = \langle \alpha^2, \gamma\beta, \beta\gamma \rangle;$$

$$8. \alpha \circlearrowleft 1 \xrightarrow{\beta} 2 \circlearrowright \gamma, I = \langle \alpha^2, \gamma^2 \rangle.$$

Thomas Brüstle classificou as álgebras do tipo árvore derivadamente mansas, a menos de equivalência derivada [[Bru01], Teorema 1.2]. Enunciamos este resultado no teorema 1.47, que envolve álgebras tubulares, hereditárias por partes do tipo E_p e \tilde{E}_p , e as álgebras de semicadeia $S(n, m)$, definidas pela álgebra de poset do quiver abaixo, em que todos os quadrados comutam.



Teorema 1.47. *Seja \mathbf{A} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa, não simples de dimensão finita. Se \mathbf{A} é uma álgebra do tipo árvore derivadamente mansa, então \mathbf{A} é derivadamente equivalente a uma álgebra tubular, ou a uma das álgebras hereditária dos tipos E_p ou \tilde{E}_p ($p = 6, 7, 8$), ou a uma das álgebras de semicadeia $S(n, m)$.*

Os casos das álgebras dos tipos E_p , \tilde{E}_p e tubulares estão caracterizados na Proposição 1.48, enunciada por Castonguay em [[Cas05], Proposição 2.6].

Proposição 1.48. *Seja \mathbf{A} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa, não simples de dimensão finita. Se \mathbf{A} é uma álgebra do tipo árvore derivadamente mansa, então as afirmações abaixo são equivalentes:*

1. \mathbf{A} é derivadamente equivalente a uma álgebra tubular ou a uma das álgebras hereditárias dos tipos E_p ou \tilde{E}_p ($p = 6, 7, 8$).
2. \mathbf{A} tem uma subcategoria plena derivadamente equivalente a álgebra hereditária do tipo E_6 .

Lema 1.49. *As álgebras tubulares são derivadamente mansas. Consequentemente, as álgebras canônicas tubulares \mathbf{C}_{236} , \mathbf{C}_{244} e \mathbf{C}_{333} são derivadamente mansas.*

Bekkert e Drozd classificaram as álgebras com radical quadrado igual zero derivadamente mansas em [[BD09], Teorema 3.1]. O Lema 1.50 reproduz este resultado limitando-se às álgebras de dimensão finita.

Lema 1.50. *Uma álgebra $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ de dimensão finita, conexa, com radical quadrado igual a zero é derivadamente mansa se, e somente se, \bar{Q} é um dos grafos de Dynkin ou Dynkin estendidos.*

Capítulo 2

A Categoria Derivada de $A \otimes_{\mathbf{k}} B$

Todas as álgebras deste capítulo são associativas, básicas, conexas de dimensão finita, que pelo Teorema 1.3, são isomorfas a álgebras de quivers com relações $\mathbf{k}Q/I$. Para evitar conflitos nas notações, denotamos por $\{\varepsilon_i \mid i \in Q_0\}$, $\{\varepsilon'_i \mid i \in Q'_0\}$ e $\{\varepsilon''_i \mid i \in Q''_0\}$ os conjuntos dos caminhos triviais das álgebras de quiver com relações $\mathbf{k}Q/I$, $\mathbf{k}Q'/I'$ e $\mathbf{k}Q''/I''$, respectivamente. Conforme a Seção 1.1, estes conjuntos são exemplos de conjuntos completos de idempotentes ortogonais primitivos.

2.1 Álgebras $A \otimes_{\mathbf{k}} B$ Derivadamente Selvagens

Nesta seção, demonstramos que algumas álgebras são derivadamente selvagens. Estas álgebras foram estrategicamente escolhidas para facilitar a demonstração do Teorema Principal.

Lema 2.1. *A álgebra $\mathbf{k}A_3 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_4$ é selvagem e derivadamente selvagem.*

Demonstração. Conforme a Proposição 1.12, a álgebra $\mathbf{k}A_3 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_4$ é isomorfa a álgebra de quiver com relações $\mathbf{k}(A_3 \otimes A_4)/I \square I'$, em que $I \square I' = \langle \alpha\beta - \beta\alpha \rangle$ e $A_3 \otimes A_4$ é o quiver abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 & \xrightarrow{\alpha} & 3 & \xrightarrow{\alpha} & 4 \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ 5 & \xrightarrow{\alpha} & 6 & \xrightarrow{\alpha} & 7 & \xrightarrow{\alpha} & 8 \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ 9 & \xrightarrow{\alpha} & 10 & \xrightarrow{\alpha} & 11 & \xrightarrow{\alpha} & 12 \end{array}$$

Seja \mathbf{B} , a subálgebra plena de $\mathbf{k}A_3 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_4$ com vértices $2, 5, 6, 7, 8$ e 10 . Então a subálgebra plena \mathbf{B} é isomorfa a álgebra de quiver sem relações $\mathbf{k}Q$, em que Q é o quiver

acíclico abaixo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & & \\
 & & \downarrow \beta & & \\
 5 & \xrightarrow{\alpha} & 6 & \xrightarrow{\alpha} & 7 \xrightarrow{\alpha} 8 \\
 & & \downarrow \beta & & \\
 & & 10 & &
 \end{array}$$

Pelo Teorema 1.4, \mathbf{B} é uma álgebra hereditária. Além disso, \overline{Q} não é um grafo de Dynkin nem Dynkin estendido. Pelo Teorema 1.10, $\mathbf{k}Q$ é selvagem. Mas segundo o item 2 do Lema 1.9, se uma subálgebra plena é selvagem, então a álgebra também é. Portanto, $\mathbf{k}A_3 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_4$ é selvagem.

Finalmente, pelo item 3 da Proposição 1.44, toda álgebra selvagem é derivadamente selvagem. Portanto, $\mathbf{k}A_3 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_4$ é derivadamente selvagem. \square

Corolário 2.2. *Sejam m e n naturais tais que $m \geq 3$ e $n \geq 4$. A álgebra $\mathbf{k}A_m \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_n$ é selvagem e derivadamente selvagem.*

Demonstração. Temos que $\mathbf{k}A_3$ e $\mathbf{k}A_4$ são subálgebras plenas de $\mathbf{k}A_m$ e $\mathbf{k}A_n$, respectivamente. Consequentemente, pelo Corolário 1.13, $\mathbf{k}A_3 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_4$ é uma subálgebra plena de $\mathbf{k}A_m \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_n$. Além disso, pelo Lema 2.1, $\mathbf{k}A_3 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_4$ é selvagem. Mas segundo o item 2 do Lema 1.9, se uma subálgebra plena é selvagem, então a álgebra também é. Portanto, $\mathbf{k}A_m \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_n$ é selvagem,

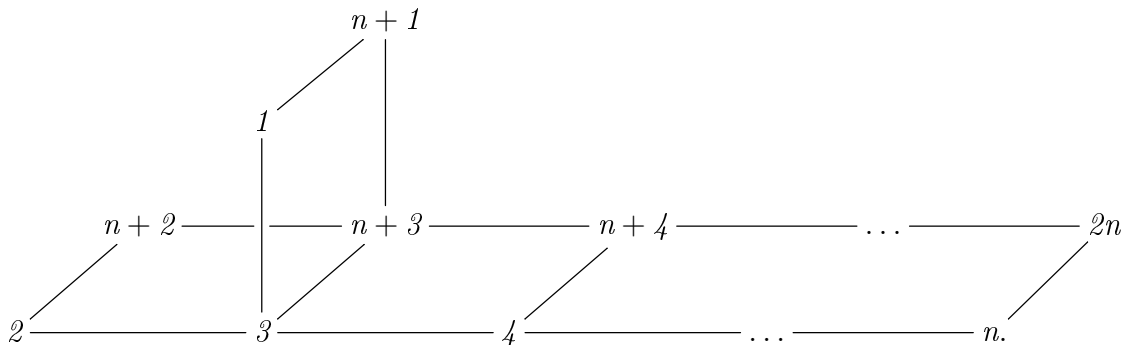
Finalmente, pelo item 3 da Proposição 1.44, toda álgebra selvagem é derivadamente selvagem. Portanto, $\mathbf{k}A_m \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_n$ é derivadamente selvagem. \square

Lema 2.3. *Seja \mathbf{B} uma álgebra não semissimples. A álgebra $\mathbf{k}A_n \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem, para qualquer $n \geq 6$.*

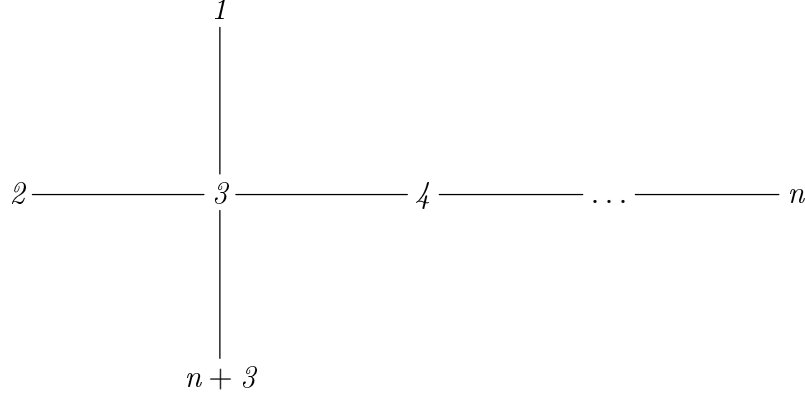
Demonstração. Suponha que $n \geq 6$. Pelo item 3 do Lema 1.15, $\mathbf{k}A_n \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é selvagem para qualquer \mathbf{B} não semissimples, que consequentemente é derivadamente selvagem, conforme o item 3 da Proposição 1.44. \square

Lema 2.4. *A álgebra do produto tensorial $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}D_n$ é derivadamente selvagem, para qualquer $n \geq 5$.*

Demonstração. Seja $n \geq 5$. Segue que o grafo subjacente $\overline{A_2 \otimes D_n}$ do quiver de Gabriel de $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}D_n$ é o descrito abaixo:



Tomando o subquiver pleno Q' dos vértices $1, 2, \dots, n$ e $n+3$, obtemos a subálgebra plena sem relações $\mathbf{k}Q'$, em que $\overline{Q'}$ é o grafo abaixo:



Pelo Teorema 1.4, $\mathbf{k}Q'$ é uma álgebra hereditária. Além disso, como $n \geq 5$, $\overline{Q'}$ não é um grafo de Dynkin nem Dynkin estendido. Pelo Teorema 1.10, $\mathbf{k}Q'$ é selvagem. Mas segundo o item 2 do Lema 1.9, se uma subálgebra plena é selvagem, então a álgebra também é. Portanto, $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}D_n$ é selvagem.

Finalmente, pelo item 3 da Proposição 1.44, toda álgebra selvagem é derivadamente selvagem. Portanto, $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}D_n$ é derivadamente selvagem. \square

Lema 2.5. *A álgebra $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}E_6$ é derivadamente selvagem.*

Demonstração. Pelos Lemas 1.36 e 1.31, obtemos as seguintes equivalências derivadas:

$$\mathbf{k}E_6 \simeq_d A(6, 3) \simeq_d \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_3.$$

Logo, pelo Lema 1.30, obtemos:

$$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}E_6 \simeq_d \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_3.$$

Mas pelo item 1 do Lema 1.15, $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_3$ é selvagem. Finalmente, pelo item 3 da Proposição 1.44, toda álgebra selvagem é derivadamente selvagem. Portanto, $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}E_6$ é derivadamente selvagem. \square

Corolário 2.6. *Se \mathbf{B} é uma álgebra hereditária por partes do tipo E_p ou \tilde{E}_p ($p = 6, 7, 8$), então $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem.*

Demonstração. Temos que $\mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}Q$, em que Q é igual a E_p ou \tilde{E}_p ($p = 6, 7, 8$). Logo, $\mathbf{k}Q$ tem uma subálgebra plena isomorfa a $\mathbf{k}E_6$, isto é, existe idempotente $\varepsilon \in \mathbf{k}Q$ tal que $\mathbf{k}E_6 \cong \varepsilon \mathbf{k}Q \varepsilon$. Pelo isomorfismo proposto no Corolário 1.13, temos que:

$$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}E_6 \cong \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon \mathbf{k}Q \varepsilon \cong (1_{\mathbf{k}A_2} \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon) (\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}Q) (1_{\mathbf{k}A_2} \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon).$$

Pelo isomorfismo descrito acima e o Lema 2.5, obtemos que $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}Q$ tem um subálgebra plena derivadamente selvagem. Pelo item 4 da Proposição 1.44, concluímos que $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}Q$

é derivadamente selvagem. Além disso, a hipótese $\mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}Q$ e o Lema 1.30 fornecem a seguinte equivalência derivada:

$$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}Q \simeq_d \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}.$$

Finalmente, pela equivalência derivada preservar o tipo de representação derivada, concluímos que $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem. \square

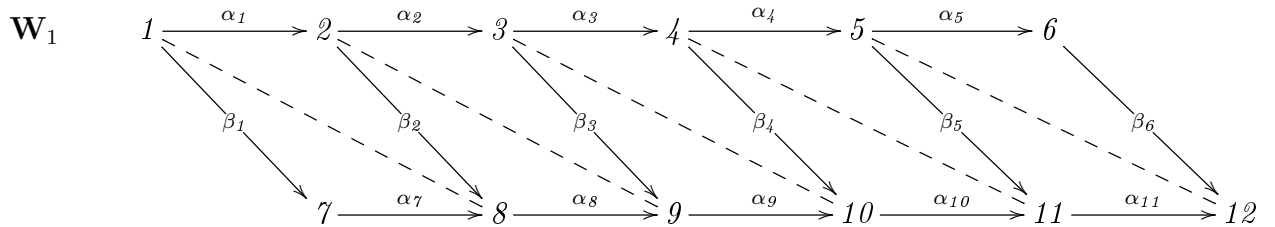
Lema 2.7. *O produto tensorial da Álgebra de Kronecker com qualquer álgebra não semissimples é selvagem e derivadamente selvagem.*

Demonstração. Seja $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}Q/I$ uma álgebra não semissimples. Pela não semissimpliidade de \mathbf{A} , garantimos a existência de pelo menos uma flecha $\alpha \in Q_1$. Segue da Proposição 1.12, que o quiver de Gabriel do produto tensorial de \mathbf{A} com a álgebra de Kronecker contém pelo menos um dos subquivers (não necessariamente plenos) abaixo:

$$1 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} 2 \xleftarrow{\alpha} 3 \quad \alpha \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} 1 \longrightarrow 2.$$

Consequentemente, pelo Lema 1.8, este produto tensorial é selvagem. Além disso, pelo item 3 da Proposição 1.44, toda álgebra selvagem é derivadamente selvagem. Portanto, o produto tensorial de uma álgebra não semissimples com a álgebra de Kronecker é derivadamente selvagem. \square

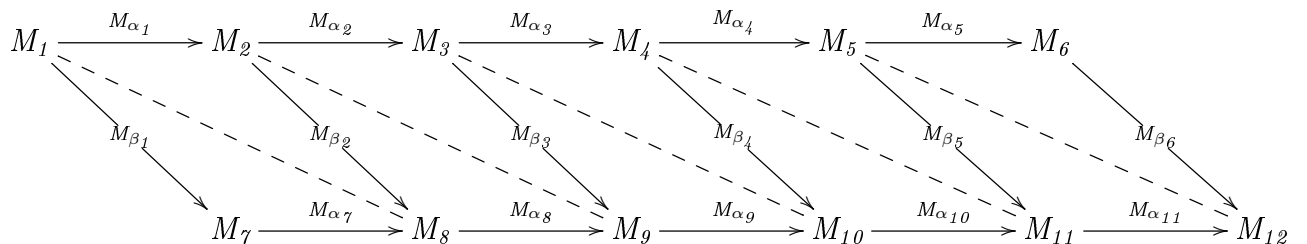
Consideremos a álgebra $\mathbf{k}\mathbf{W}_1 = \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_6$. Logo \mathbf{W}_1 é o quiver com relações abaixo:



Pelo item 3 do Lema 1.15, $\mathbf{k}\mathbf{W}_1$ é selvagem. Portanto, existe um $\mathbf{k}\langle x, y \rangle$ - $\mathbf{k}\mathbf{W}_1$ -bimódulo $M(\mathbf{W}_1)$ que satisfaz o item 4 da Definição 1.5. Isto é, $M(\mathbf{W}_1)$ é finitamente gerado como $\mathbf{k}\langle x, y \rangle$ -módulo e o funtor induzido abaixo preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos.

$$- \otimes_{\mathbf{k}\langle x, y \rangle} M(\mathbf{W}_1) : \text{fin mod-}\mathbf{k}\langle x, y \rangle \longrightarrow \text{mod-}\mathbf{k}\mathbf{W}_1$$

Pela equivalência entre as categorias de módulos e de representações, citada na Seção 1.1, tomamos o bimódulo $M(\mathbf{W}_1)$ como a $\mathbf{k}\langle x, y \rangle$ -representação abaixo:



Nas demonstrações dos Lemas 2.8 e 2.9, utilizamos o bimódulo $M(\mathbf{W}_1)$ para obtermos um complexo de bimódulos que satisfaz o item 4 da Definição 1.41 tornando a álgebra derivadamente selvagem.

Lema 2.8. *Seja $B^2 = \mathbf{k}C_2/J^2$ a álgebra de Nakayama com dois vértices, não simplesmente conexa, com radical quadrado igual a zero. Então $B^2 \otimes_{\mathbf{k}} B^2$ é derivadamente selvagem.*

Demonstração. Conforme já definimos na Seção 1.4, $J^2 = \langle \beta\gamma, \gamma\beta \rangle$ e C_2 é o quiver abaixo;

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{array} 2$$

Pela Proposição 1.12, obtemos que $B^2 \otimes_{\mathbf{k}} B^2 = \mathbf{k}(C_2 \otimes C_2)/J^2 \square J^2$, em que $J^2 \square J^2$ é o ideal dado por $\langle \psi\gamma, \gamma\psi, \tau\varphi, \varphi\tau, \psi\tau - \tau\psi, \gamma\varphi - \varphi\gamma \rangle$ e $C_2 \otimes C_2$ é o quiver abaixo:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{array} & 2 \\ \varphi \uparrow & \tau & \varphi \downarrow \tau \\ 3 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{array} & 4 \end{array}$$

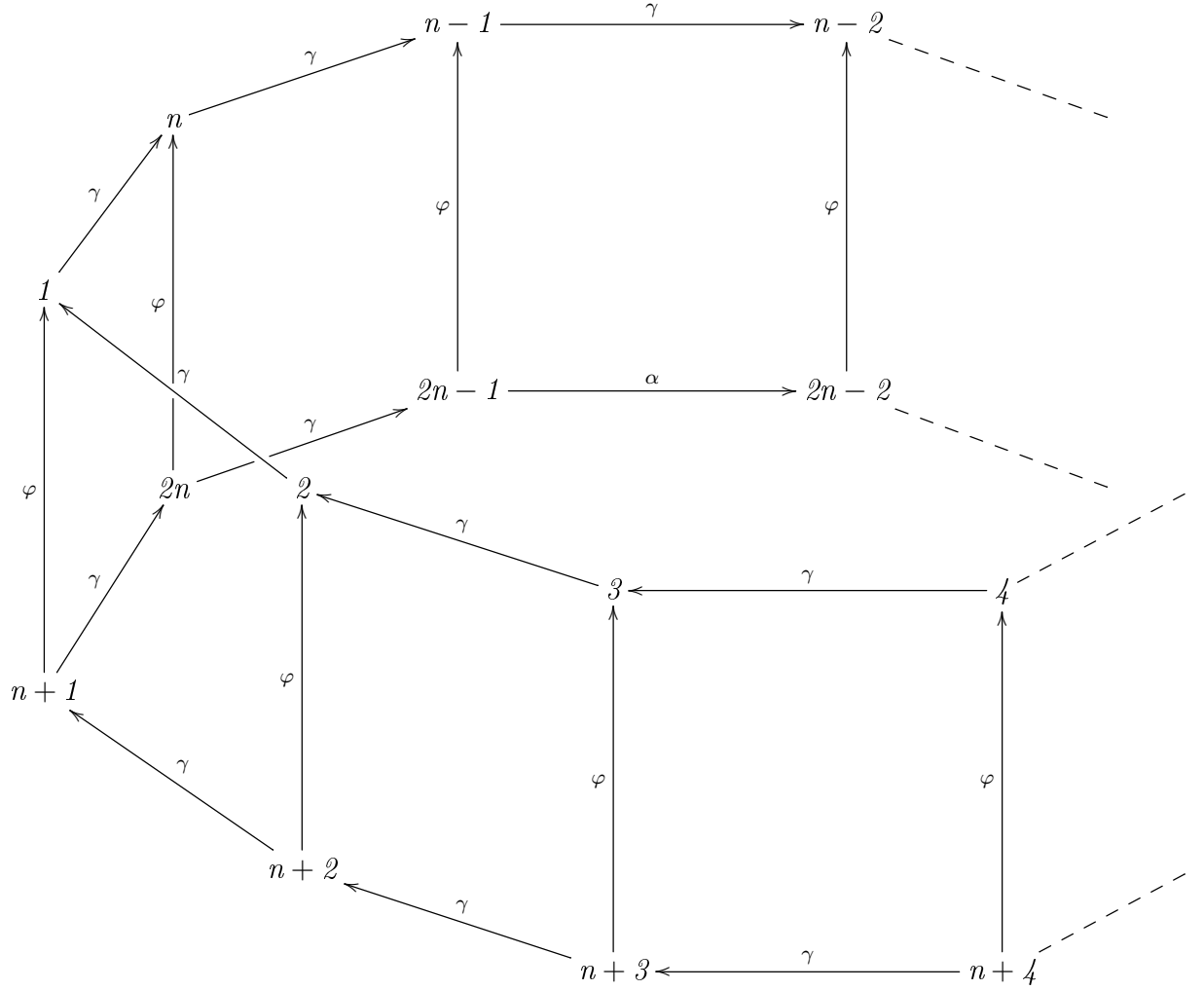
A partir do $\mathbf{k}\langle x, y \rangle$ - $\mathbf{k}\mathbf{W}_1$ -bimódulo $M(\mathbf{W}_1)$ e dos $B^2 \otimes_{\mathbf{k}} B^2$ -módulos projetivos indecomponíveis P_i , definimos os $\mathbf{k}\langle x, y \rangle - B^2 \otimes_{\mathbf{k}} B^2$ -bimódulos $\tilde{P}_i^{d_j}$ e os morfismos de bimódulos $M_w c$, como a seguir:

$$\tilde{P}_i^{d_j} = \left(\bigoplus_{k=1}^{d_j} \mathbf{k}\langle x, y \rangle \right) \otimes_{\mathbf{k}} P_i \quad \text{e} \quad M_w c = M_w \otimes_{\mathbf{k}} c,$$

em que d_j é posto de M_j como $\mathbf{k}\langle x, y \rangle$ -módulo, $w \in \{\alpha_i, \beta_i\}$ é uma flecha de \mathbf{W}_1 e c é um caminho do quiver $C_2 \otimes C_2$.

Em seguida, a partir do diagrama abaixo, definimos o complexo $P_{\mathbf{W}_1}^\bullet$, descrito logo em seguida:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \tilde{P}_1^{d_1} & \xrightarrow{M_{\alpha_1\gamma}} & \tilde{P}_2^{d_2} & \xrightarrow{M_{\alpha_2\psi}} & \tilde{P}_1^{d_3} & \xrightarrow{M_{\alpha_3\gamma}} & \tilde{P}_2^{d_4} & \xrightarrow{M_{\alpha_4\psi}} & \tilde{P}_1^{d_5} & \xrightarrow{M_{\alpha_5\gamma}} & \tilde{P}_2^{d_6} & & \\ & \searrow M_{\beta_1\varphi} & & \searrow -M_{\beta_2\varphi} & & \searrow M_{\beta_3\varphi} & & \searrow -M_{\beta_4\varphi} & & \searrow M_{\beta_5\varphi} & & \searrow -M_{\beta_6\varphi} & \\ & & \tilde{P}_3^{d_7} & \xrightarrow{M_{\alpha_7\gamma}} & \tilde{P}_4^{d_8} & \xrightarrow{M_{\alpha_8\psi}} & \tilde{P}_3^{d_9} & \xrightarrow{M_{\alpha_9\gamma}} & \tilde{P}_4^{d_{10}} & \xrightarrow{M_{\alpha_{10}\psi}} & \tilde{P}_3^{d_{11}} & \xrightarrow{M_{\alpha_{11}\gamma}} & \tilde{P}_4^{d_{12}} \end{array}$$



Definimos os $\mathbf{k}\langle x, y \rangle$ - $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} B^n$ -bimódulos $\tilde{P}_i^{d_j}$ e os morfismos de bimódulos $M_{\alpha_j}c$, com a mesma construção da demonstração do Lema 2.8, dada por:

$$\tilde{P}_i^{d_j} = \left(\bigoplus_{k=1}^{d_j} \mathbf{k}\langle x, y \rangle \right) \otimes_{\mathbf{k}} P_i \quad \text{e} \quad M_{\alpha_j}c = M_{\alpha_j} \otimes_{\mathbf{k}} c,$$

em que $d_j = \dim_{\mathbf{k}\langle x, y \rangle} M_j$ e c é um caminho do quiver $A_2 \otimes C_n$.

Supondo $n \geq 6$, definimos o complexo $P_{\mathbf{W}_1}^\bullet$ a partir do diagrama abaixo:

$$\begin{array}{cccccccc} \tilde{P}_1^{d_1} & \xrightarrow{M_{\alpha_1}\gamma} & \tilde{P}_2^{d_2} & \xrightarrow{M_{\alpha_2}\gamma} & \tilde{P}_3^{d_3} & \xrightarrow{M_{\alpha_3}\gamma} & \tilde{P}_4^{d_4} & \xrightarrow{M_{\alpha_4}\gamma} & \tilde{P}_5^{d_5} & \xrightarrow{M_{\alpha_5}\gamma} & \tilde{P}_6^{d_6} \\ & \searrow M_{\beta_1}\varphi & & \searrow -M_{\beta_2}\varphi & & \searrow M_{\beta_3}\varphi & & \searrow -M_{\beta_4}\varphi & & \searrow M_{\beta_5}\varphi & & \searrow -M_{\beta_6}\varphi \\ & & \tilde{P}_{n+1}^{d_7} & \xrightarrow{M_{\alpha_7}\gamma} & \tilde{P}_{n+2}^{d_8} & \xrightarrow{M_{\alpha_8}\gamma} & \tilde{P}_{n+3}^{d_9} & \xrightarrow{M_{\alpha_9}\gamma} & \tilde{P}_{n+4}^{d_{10}} & \xrightarrow{M_{\alpha_{10}}\gamma} & \tilde{P}_{n+5}^{d_{11}} & \xrightarrow{M_{\alpha_{11}}\gamma} & \tilde{P}_{n+6}^{d_{12}} \end{array}$$

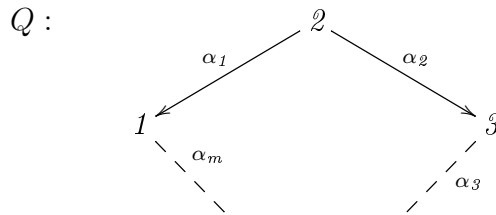
Nos casos em que $n \leq 5$, obtemos o mesmo complexo repetindo os projetivos de maneira análoga à construção do complexo da demonstração do Lema 2.8.

De maneira análoga ao Lema 2.8, o funtor $_{-} \otimes_{\mathbf{k}\langle x,y \rangle} P_{\mathbf{W}_1}^{\bullet}$ preserva indecomponíveis e classes de isomorfismo. Portanto, $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} B^n$ é derivadamente selvagem. \square

Lema 2.10. *Se $\mathbf{B} = \mathbf{k}Q/I$ é uma álgebra do tipo \tilde{A}_n com radical quadrado igual a zero, então a álgebra $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem.*

Demonstração. Os casos em que \mathbf{B} é a álgebra de Kronecker ou Q é um ciclo orientado estão demonstrados nos Lemas 2.7 e 2.9, respectivamente. Logo, podemos supor que Q é um ciclo não orientado com pelo menos 3 vértices.

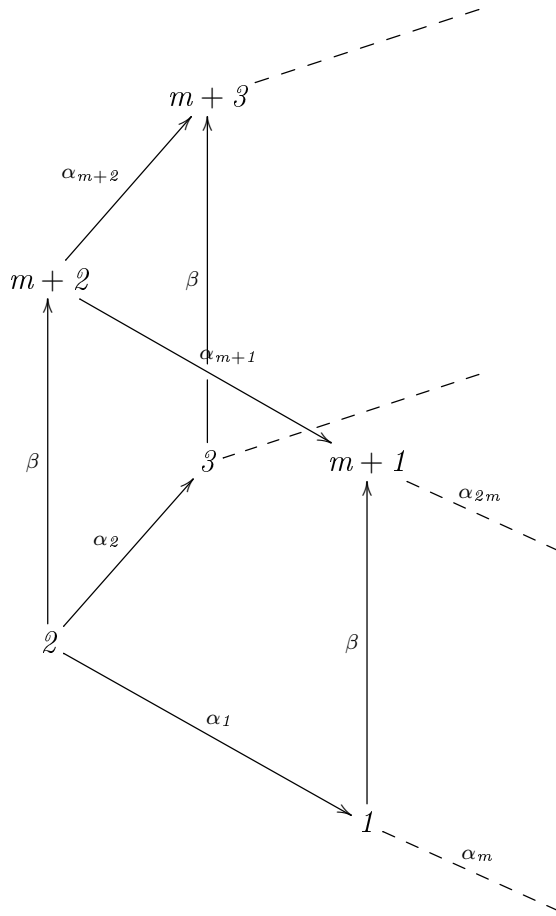
Seja m a quantidade de vértices de Q . Sem perda de generalidade, supomos que no vértice 2, há uma mudança de orientação no quiver Q , conforme abaixo:



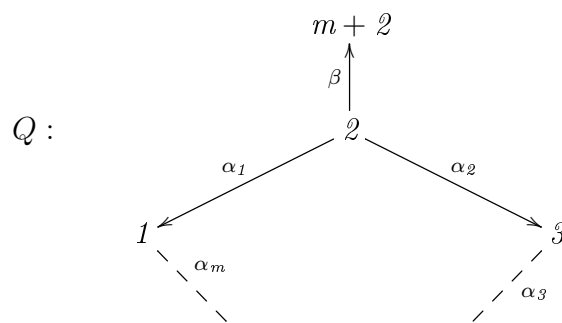
Tomamos o quiver da álgebra $\mathbf{k}A_2$, abaixo:

$$1 \xrightarrow{\beta} 2.$$

Obtemos o quiver $A_2 \otimes Q$, abaixo:



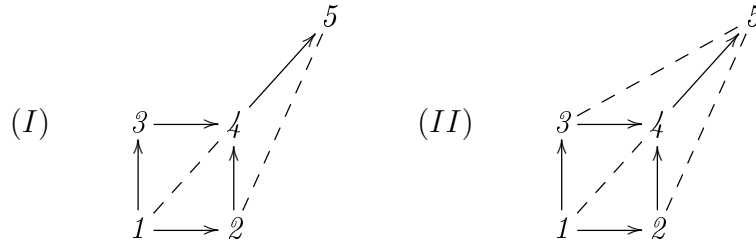
Tomamos a subálgebra plena \mathbf{A} de $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{B}$, com vértices $1, 2, 3, \dots, m$ e $m+2$, em que $m+2$ é o único vértice que é final de uma flecha β , conforme o quiver abaixo:



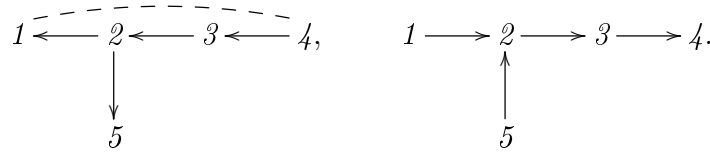
Como \mathbf{B} tem radical ao quadrado igual a zero e β composto com qualquer flecha desta subálgebra é igual a zero, concluímos que a subálgebra plena \mathbf{A} também tem radical ao quadrado igual a zero. Mas pelo Lema 1.50, uma álgebra com radical ao quadrado igual a zero é derivadamente mansa se, e somente se, é do tipo Dynkin ou Dynkin estendido. Logo \mathbf{A} é derivadamente selvagem. Pelo item 4 da Proposição 1.44, se uma subálgebra plena é derivadamente selvagem, então a álgebra também é. Portanto, $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem.

□

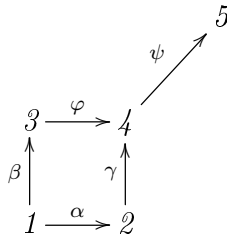
Lema 2.11. *Seja $\mathbf{B} = \mathbf{k}Q/I$ uma álgebra, tal que (Q, I) é um dos dois quivers com relações abaixo. O produto tensorial $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem.*



Demonstração. Afirmamos que as álgebras de quiver com relações (I) e (II) são derivadamente equivalentes as álgebras de quiver com relações abaixo, respectivamente:



De fato, para demonstrarmos esta afirmação, nomeamos as flechas dos quivers de (I) e (II) como abaixo, diferenciando na demonstração por Caso (I) e Caso (II):



Sejam T_i^\bullet os complexos com entradas iguais a zero nas posições diferentes de $-1, 0$ ou 1 , e nestas posições temos as seguintes entradas:

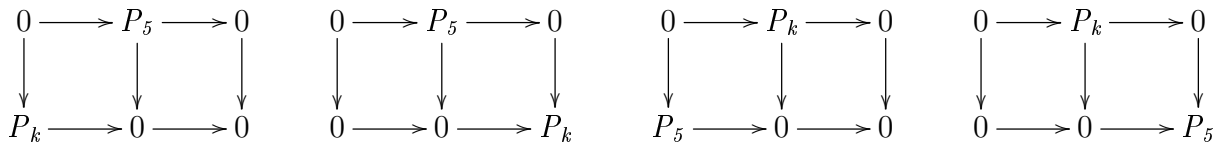
$$T_i^\bullet = \begin{cases} 0 \longrightarrow P_i \longrightarrow 0, & \text{se } i \neq 1, \\ 0 \longrightarrow P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}} P_1, & \text{se } i = 1. \end{cases}$$

Definimos o complexo

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=1}^5 T_i^\bullet.$$

Afirmamos que T^\bullet é um complexo inclinante de ambos os casos. De fato, observamos que em ambos os casos, a subálgebra plena dos vértices $1, 2, 3$ e 4 é a álgebra $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{k}A_2$. Segue do complexo inclinante do Exemplo 17, feito de maneira análoga ao desta demonstração, que basta verificar os morfismos envolvendo T_5^\bullet para termos $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T^\bullet, T^\bullet[k]) = 0$.

É óbvio que $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T^\bullet, T^\bullet[k]) = 0$ para $k \neq -1, 0, 1$. Nos casos que envolvem T_5^\bullet e T_k^\bullet , com $k \neq 1$, teremos:



Restando os casos que envolvem T_1^\bullet e T_5^\bullet . Mas pelos diagramas abaixo, recebemos $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_1^\bullet, T_5^\bullet[-1]) = 0$ e $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_5^\bullet, T_1^\bullet[1]) = 0$.

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 P_5 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 P_5 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1
 \end{array}$$

Como não há caminhos não triviais com início em 5, concluímos que $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_1^\bullet, T_5^\bullet[1])$ também é igual a zero, restando apenas verificar $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_5^\bullet, T_1^\bullet[-1])$. Mas em ambos os casos, não há caminhos do vértice 1 para 5 que não pertencem a I , que implica em $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_5^\bullet, T_1^\bullet[-1]) = 0$. Logo, $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T^\bullet, T^\bullet[k]) = 0$ para $k \neq 0$. Restando provar que $\text{add}(T^\bullet)$ gera $\mathbf{K}^b(P_A)$ como categoria triangulada. De fato, basta provar que o complexo $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow 0$ é gerado pelos complexos de $\text{add}(T^\bullet)$. Mas este complexo é isomorfo ao complexo cone C_g^\bullet em $\mathbf{K}^b(P_A)$, em que $g^\bullet = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é o morfismo de complexos descrito abaixo. A demonstração detalhada desta afirmação está no Exemplo 17, que independe de T_5^\bullet .

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 \\
 \downarrow g_{-1}=0 & & \downarrow g_0 = \begin{bmatrix} 1_{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & 1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix} & & \downarrow g_1=0 \\
 0 & \longrightarrow & P_2 \oplus P_3 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Concluímos que $\text{add}(T^\bullet)$ gera $\mathbf{K}^b(P_A)$ como categoria triangulada. Portanto, T^\bullet é um complexo inclinante. Pelo Teorema 1.29, \mathbf{B} é derivadamente equivalente a álgebra de endomorfismos $\text{End}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T^\bullet)$.

Para $i, j \in \{2, 3, 4, 5\}$, as bases de $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_i^\bullet, T_j^\bullet)$ repetem o comportamento das flechas invertendo o sentido, mas mantendo as relações. Enquanto que os morfismos entre complexos não nulos que envolvem T_1^\bullet , são múltiplos escalares dos listados abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
 (1^\circ) & (2^\circ) & (3^\circ) \\
 \begin{array}{ccc}
 P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 \\
 \downarrow [\varepsilon_2 \ 0] & & \downarrow \\
 P_2 & \longrightarrow & 0
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1 \\
 \downarrow [0 \ \varepsilon_2] & & \downarrow \\
 P_3 & \longrightarrow & 0
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 P_4 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \begin{bmatrix} \gamma \\ -\varphi \end{bmatrix} & & \downarrow \\
 P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{[\alpha \ \beta]} & P_1
 \end{array}
 \end{array}$$

(4°) Caso (I)

$$\begin{array}{ccc}
 P_5 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \left[\begin{array}{c} 0 \\ \varphi\psi \end{array} \right] & & \downarrow \\
 P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{\left[\begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \right]} & P_1
 \end{array}$$

(5°) Caso (II)

$$\begin{array}{ccc}
 P_5 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] & & \downarrow \\
 P_2 \oplus P_3 & \xrightarrow{\left[\begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \right]} & P_1
 \end{array}$$

Em ambos os Casos (I) e (II), os morfismos de $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_4^\bullet, T_2^\bullet)$ são múltiplos escalares da composição do terceiro com o primeiro diagrama acima, enquanto que os morfismo de $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_4^\bullet, T_3^\bullet)$ são múltiplos escalares da composição do terceiro e o segundo diagrama acima. No Caso (I), os morfismos de $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_5^\bullet, T_1^\bullet)$ são múltiplos escalares do quarto diagrama acima, os de $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_5^\bullet, T_3^\bullet)$ são múltiplos escalares da composição do quarto com o segundo diagrama acima, enquanto que $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_5^\bullet, T_2^\bullet)$ só tem o morfismo nulo. No Caso (II), $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T_5^\bullet, T_1^\bullet)$ só tem o morfismo nulo, conforme o quinto diagrama acima. Obtemos, respectivamente, para os Casos (I) e (II), que $\text{End}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T^\bullet)$ é isomorfo a $\mathbf{k}Q'/I'$ e $\mathbf{k}Q''/I''$, em que (Q', I') e (Q'', I'') são os quivers com relações abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{(I)} & \begin{array}{c} 5 \\ \swarrow \text{---} \downarrow \\ 4 \\ \downarrow \\ 2 \longleftarrow 1 \longrightarrow 3 \end{array} & \text{(II)} & \begin{array}{c} 5 \\ \downarrow \text{---} \swarrow \\ 4 \\ \downarrow \\ 2 \longleftarrow 1 \longrightarrow 3 \end{array}
 \end{array}$$

Isto completa a equivalência derivada do Caso (I). Mas para o Caso (II), nomeamos as flechas como abaixo e chamamos de $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q''/I''$ a álgebra de quiver com relações desta álgebra derivadamente equivalente a álgebra do Caso (II).

$$\begin{array}{c}
 5 \\
 \alpha \downarrow \text{---} \swarrow \\
 4 \\
 \beta \downarrow \text{---} \swarrow \\
 2 \xleftarrow{\varphi} 1 \xrightarrow{\gamma} 3
 \end{array}$$

Sejam T_i^\bullet os complexos com entradas iguais a zero nas posições diferentes de $-1, 0$ ou 1 , e nestas posições temos as seguintes entradas:

$$T_i^\bullet = \begin{cases} 0 \longrightarrow P_i \longrightarrow 0, & \text{se } i \neq 5, \\ 0 \longrightarrow P_4 \xrightarrow{\alpha} P_5, & \text{se } i = 5. \end{cases}$$

Definimos o complexo

$$T^\bullet = \bigoplus_{i=1}^5 T_i^\bullet.$$

De maneira análoga aos complexos anteriores. Basta analisar os casos que envolvem T_5^\bullet .

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & P_4 \xrightarrow{\alpha} P_5 \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\
 P_i & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 P_i & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_4 \xrightarrow{\alpha} P_5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & P_4 \xrightarrow{\alpha} P_5 \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow P_i
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 P_4 & \xrightarrow{\alpha} & P_5 \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow 0 \quad \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_4 \xrightarrow{\alpha} P_5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & P_4 \\
 \downarrow & \nearrow x\varepsilon_4 & \downarrow x\alpha \\
 P_4 & \xrightarrow{\alpha} & P_5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & P_4 \xrightarrow{\alpha} P_5 \\
 \downarrow & \nearrow 0 & \downarrow y\alpha \quad \downarrow y\varepsilon_5 \\
 P_4 & \xrightarrow{\alpha} & P_5 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Logo, $\text{Hom}_{\mathbf{K}^b(P_A)}(T^\bullet, T^\bullet[k]) = 0$ para $k \neq 0$. Restando provar que $\text{add}(T^\bullet)$ gera $\mathbf{K}^b(P_A)$ como categoria triangulada. De fato, basta provar que o complexo $0 \longrightarrow P_5 \longrightarrow 0$ é gerado pelos complexos de $\text{add}(T^\bullet)$.

Seja $g^\bullet = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ o morfismo entre os complexos T_5^\bullet e T_4^\bullet em $\text{add}(T^\bullet)$, dado nas posições $-1, 0$ e 1 por:

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & P_4 \xrightarrow{\alpha} P_5 \\
 \downarrow g_{-1}=0 & & \downarrow g_0=1_{\mathbf{A}} \quad \downarrow g_1=0 \\
 0 & \longrightarrow & P_4 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Obtemos o complexo cone C_g^\bullet , detalhado abaixo nas posições $-2, -1, 0$ e 1 :

$$0 \longrightarrow P_4 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\alpha \\ 1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix}} P_5 \oplus P_4 \longrightarrow 0$$

Afirmamos que o complexo cone C_g^\bullet é isomorfo a $0 \longrightarrow P_5 \longrightarrow 0$ em $\mathbf{K}^b(P_A)$. De fato,

tomamos os morfismos de complexos $f^\bullet = (f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e $h^\bullet = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, dados por:

$$\begin{array}{ccccc}
 P_4 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\alpha \\ 1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix}} & P_5 \oplus P_4 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow f_0 = \begin{bmatrix} 1_{\mathbf{A}} & \alpha \end{bmatrix} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_5 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & P_5 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow h_0 = \begin{bmatrix} 1_{\mathbf{A}} \\ 0 \end{bmatrix} & & \downarrow \\
 P_4 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\alpha \\ 1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix}} & P_5 \oplus P_4 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Diretamente da composição dos morfismos de complexos, obtemos que $f^\bullet \circ h^\bullet$ é o morfismo identidade. Enquanto que $h^\bullet \circ f^\bullet$ é igual a:

$$(h \circ f)_k = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1_{\mathbf{A}} & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & , \text{ se } k = 0, \\ 0 & , \text{ se } k \neq 0. \end{cases}$$

Definimos a sequência de morfismos $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, em que

$$s_k = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix} & , \text{ se } k = 0, \\ 0 & , \text{ se } k \neq 0. \end{cases}$$

Pela composição de morfismos, segue que $h^\bullet \circ f^\bullet \stackrel{H}{\sim} 1_{C_g^\bullet}$:

$$\begin{array}{ccccc}
 P_4 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\alpha \\ 1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix}} & P_5 \oplus P_4 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow 1_{\mathbf{A}} - 0 & & \downarrow \begin{bmatrix} 1_{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & 1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1_{\mathbf{A}} & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & \downarrow \\
 P_4 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} -\alpha \\ 1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix}} & P_5 \oplus P_4 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

$s_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1_{\mathbf{A}} \end{bmatrix}$

Concluimos que $\text{add}(T^\bullet)$ gera $K^b(P_A)$ como categoria triangulada. Portanto, T^\bullet é um complexo inclinante. Pelo Teorema 1.29, \mathbf{A} é derivadamente equivalente a álgebra de endomorfismos $\text{End}_{K^b(P_A)}(T^\bullet)$.

Analisando os morfismos que envolvem o complexo T_5^\bullet , obtemos:

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{ccc} P_4 & \xrightarrow{\alpha} & P_5 \\ \downarrow 0 & & \downarrow \\ P_1 & \longrightarrow & 0 \end{array} &
 \begin{array}{ccc} P_4 & \xrightarrow{\alpha} & P_5 \\ \downarrow 0 & & \downarrow \\ P_2 & \longrightarrow & 0 \end{array} &
 \begin{array}{ccc} P_4 & \xrightarrow{\alpha} & P_5 \\ \downarrow 0 & & \downarrow \\ P_3 & \longrightarrow & 0 \end{array} &
 \begin{array}{ccc} P_4 & \xrightarrow{\alpha} & P_5 \\ \downarrow 1_{\mathbf{A}} & & \downarrow \\ P_4 & \longrightarrow & 0 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} P_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \beta & & \downarrow \\ P_4 & \xrightarrow{\alpha} & P_5 \end{array} &
 \begin{array}{ccc} P_2 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \beta\varphi & & \downarrow \\ P_4 & \xrightarrow{\alpha} & P_5 \end{array} &
 \begin{array}{ccc} P_3 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \beta\gamma & & \downarrow \\ P_4 & \xrightarrow{\alpha} & P_5 \end{array} &
 \begin{array}{ccc} P_4 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow 0 & & \downarrow \\ P_4 & \xrightarrow{\alpha} & P_5 \end{array}
 \end{array}$$

Observamos que os morfismos de T_2^\bullet e T_3^\bullet para T_5^\bullet , fatoram-se por T_1^\bullet . Além disso, os morfismos para T_4^\bullet , fatoram-se por T_5^\bullet . Segue que \mathbf{A} é derivadamente equivalente a álgebra de quiver sem relações $\mathbf{k}D_5$, descrita abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 2 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 4 \\
 & & \uparrow & & & & \\
 & & 3 & & & &
 \end{array}$$

Concluimos que em ambos os casos, \mathbf{B} é derivadamente equivalente a uma álgebra \mathbf{A} , que está listada no Lema 1.22. Mas isto implica que em ambos os casos, $T_2(\mathbf{A})$ é selvagem, que por sua vez é isomorfa a $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$, conforme o Lema 1.14. Segue que $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$, conforme o Lema 1.30. Além disso, o item 3 da Proposição 1.44 diz que toda álgebra selvagem também é derivadamente selvagem. Finalmente, utilizando o Lema 1.43, que diz que equivalência derivada preserva o tipo da representação derivada, obtemos que $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem. \square

Alertamos que as álgebras do Lema 2.11 são derivadamente equivalentes a álgebras selvagens, mas isto não implica que as álgebras deste lema são selvagens. Uma equivalências derivada nem sempre preserva o tipo da representação da categoria de módulos.

2.2 A Álgebra $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$

Nesta seção, demonstramos que a não mansidão da categoria derivada de $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ implica na retirada de \mathbf{B} da lista de álgebras $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ derivadamente mansas. Além disso, demonstramos que se $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é uma álgebra derivadamente mansa, então \mathbf{A} e \mathbf{B} também

são. Ressaltamos que em nossos resultados as álgebras são sempre associativas, básicas, conexas de dimensão finita, que pelo Teorema 1.3, são isomorfas a álgebras de quivers com relações $\mathbf{k}Q/I$. Para evitar conflitos nas notações, denotamos por $\{\varepsilon_i \mid i \in Q_0\}$, $\{\varepsilon'_i \mid i \in Q'_0\}$ e $\{\varepsilon''_i \mid i \in Q''_0\}$ os conjuntos dos caminhos triviais das álgebras de quiver com relações $\mathbf{k}Q/I$, $\mathbf{k}Q'/I'$ e $\mathbf{k}Q''/I''$, respectivamente. Conforme a Seção 1.1, estes conjuntos são exemplos de conjuntos completos de idempotentes ortogonais primitivos.

Lema 2.12. *Uma álgebra local derivadamente mansa não é isomorfa ao produto tensorial de duas álgebras não semissimples.*

Demonstração. Vamos supor por absurdo, que $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B} = \mathbf{k}(Q \otimes Q')/I \square I'$ é uma álgebra local derivadamente mansa, em que $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ e $\mathbf{B} = \mathbf{k}Q'/I'$ são álgebras não semissimples. Pela construção de $Q \otimes Q'$, descrita na Definição 1.11, Q e Q' tem somente um vértice. Além disso, a não semissimplicidade de $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ e $\mathbf{B} = \mathbf{k}Q'/I'$ implica na existência de laços α e β em Q e Q' , respectivamente. Consequentemente, $Q \otimes Q'$ tem pelo menos dois laços. Mas pelo Lema 1.45, a menos de isomorfismo, \mathbf{k} e $\mathbf{k}[x]/(x^2)$ são as únicas álgebras locais derivadamente mansas e ambas não tem mais que um laço nos seus respectivos quivers de Gabriel. \square

Lema 2.13. *Uma álgebra derivadamente mansa cujo quiver de Gabriel tem exatamente dois vértices não é isomorfa ao produto tensorial de duas álgebras não semissimples.*

Demonstração. Vamos supor por absurdo, que existem álgebras $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ e $\mathbf{B} = \mathbf{k}Q'/I'$ não semissimples, tais que o produto tensorial $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B} = \mathbf{k}(Q \otimes Q')/I \square I'$ é uma álgebra derivadamente mansa, em que $Q \otimes Q'$ tem exatamente dois vértices. Pela construção de $Q \otimes Q'$, descrita na Definição 1.11, podemos supor sem perda de generalidade, que Q tem somente um vértice e Q' tem exatamente dois. A não semissimplicidade de $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ implica na existência de um laço α em Q , enquanto que a conexidade de $\mathbf{B} = \mathbf{k}Q'/I'$ implica na existência de uma flecha β em Q' que liga seus dois vértices. Consequentemente, $Q \otimes Q'$ tem pelo menos uma flecha ligando seus dois vértices e um laço em cada vértice. Mas pelo Lema 1.46, a menos de isomorfismo, a única álgebra de quiver com relações derivadamente mansa com estas hipóteses é a álgebra $\mathbf{k}Q''/I''$, em que $I'' = \langle \varphi^2, \tau^2 \rangle$ e Q'' é o quiver abaixo:

$$\varphi \curvearrowright 1 \xrightarrow{\gamma} 2 \curvearrowright \tau$$

Segue da unicidade do quiver de Gabriel, que $Q'' = Q \otimes Q'$. Logo Q e Q' são os quivers abaixo, respectivamente:

$$\alpha \curvearrowright 1, \quad 1 \xrightarrow{\beta} 2.$$

Isto implica que $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}A_2$ e $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}[x]/(x^n)$ para algum n . Além disso, pelo isomorfismo proposto no Corolário 1.13, \mathbf{A} é uma álgebra local não semissimples isomorfa a uma subálgebra plena de $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$, conforme a descrição abaixo:

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cong (\varepsilon_1 \mathbf{A} \varepsilon_1) \otimes_{\mathbf{k}} (\varepsilon'_1 \mathbf{B} \varepsilon'_1) \cong (\varepsilon_1 \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon'_1) (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}) (\varepsilon_1 \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon'_1).$$

Pelo item 5 da Proposição 1.44, uma subálgebra plena de uma álgebra derivadamente mansa também é derivadamente mansa. Então \mathbf{A} é uma álgebra local não semissimples que é derivadamente mansa. Segue que \mathbf{A} é isomorfa a $\mathbf{k}[x]/(x^2)$, conforme o Lema 1.45.

Concluimos que $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}[x]/(x^2)$ e $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}A_2$. O que é um absurdo, pois a dimensão de $\mathbf{k}[x]/(x^2) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$ é igual a 6, enquanto que a dimensão de $\mathbf{k}Q''/I''$ é igual a 8. \square

Lema 2.14. *Sejam $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ e $\mathbf{B} = \mathbf{k}Q'/I'$ álgebras não semissimples. Se $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é uma álgebra derivadamente mansa, então $\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i \cong \mathbf{k}$ e $\varepsilon'_j \mathbf{B} \varepsilon'_j \cong \mathbf{k}$ para quaisquer $i \in Q_0$ ou $j \in Q'_0$.*

Demonstração. Vamos supor por absurdo que existe $i \in Q_0$ tal que $\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i \not\cong \mathbf{k}$, isto é, $\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i$ é uma álgebra local não semissimples. Trataremos primeiro o caso em que Q'_0 tem apenas um vértice e em seguida o caso em que tem pelo menos dois.

Se $Q'_0 = \{j\}$, então $\mathbf{B} = \varepsilon'_j \mathbf{B} \varepsilon'_j$ é uma álgebra local não semissimples. Pelo isomorfismo citado no Corolário 1.13, obtemos:

$$(\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B} \cong (\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i) \otimes_{\mathbf{k}} (\varepsilon'_j \mathbf{B} \varepsilon'_j) \cong (\varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon'_j)(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B})(\varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon'_j).$$

Logo $(\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é isomorfa a uma subálgebra plena local de $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$, que consequentemente é derivadamente mansa, conforme item 5 da Proposição 1.44. Mas isto contradiz o Lema 2.12 que confirma o absurdo.

Se Q'_0 tem pelo menos dois vértices, pela conexidade de \mathbf{B} , existe uma flecha $\alpha \in Q'_1$ entre vértices distintos $j, k \in Q'_0$. Segue que $(\varepsilon'_j + \varepsilon'_k) \mathbf{B} (\varepsilon'_j + \varepsilon'_k)$ é uma álgebra conexa, não semissimples e com exatamente dois vértices. Novamente pelo isomorfismo citado no Corolário 1.13, obtemos:

$$(\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i) \otimes_{\mathbf{k}} (\varepsilon'_j + \varepsilon'_k) \mathbf{B} (\varepsilon'_j + \varepsilon'_k) \cong (\varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon'_j + \varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon'_k)(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B})(\varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon'_j + \varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon'_k).$$

Logo $(\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i) \otimes_{\mathbf{k}} (\varepsilon'_j + \varepsilon'_k) \mathbf{B} (\varepsilon'_j + \varepsilon'_k)$ é isomorfa a uma subálgebra plena de $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ com exatamente dois vértices, que consequentemente é derivadamente mansa, conforme item 5 da Proposição 1.44. Mas isto contradiz o Lema 2.13 que confirma o absurdo.

Portanto, $\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i \cong \mathbf{k}$. De maneira análoga, $\varepsilon'_j \mathbf{B} \varepsilon'_j \cong \mathbf{k}$ para qualquer $j \in Q'_0$. \square

Os isomorfismos $\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i \cong \mathbf{k}$ e $\varepsilon'_j \mathbf{B} \varepsilon'_j \cong \mathbf{k}$ são equivalentes a inexistência de ciclos em Q ou Q' que não pertencem a I ou I' , respectivamente. Uma das consequências deste Lema é que \mathbf{A} e \mathbf{B} também são derivadamente mansas, conforme o Corolário 2.15 a seguir.

Corolário 2.15. *Sejam $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ e $\mathbf{B} = \mathbf{k}Q'/I'$ álgebras não semissimples. Se $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa, então \mathbf{A} e \mathbf{B} também são.*

Demonstração. Seja $i \in Q_0$. Temos que a subálgebra plena $(\varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} 1_{\mathbf{B}})(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B})(\varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} 1_{\mathbf{B}})$ é derivadamente mansa, conforme o item 5 da Proposição 1.44. Usando o Lema 2.14 e o isomorfismo do Corolário 1.13, obtemos:

$$(\varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} 1_{\mathbf{B}})(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B})(\varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} 1_{\mathbf{B}}) \cong (\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i) \otimes_{\mathbf{k}} (1_{\mathbf{B}} \mathbf{B} 1_{\mathbf{B}}) \cong (\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B} \cong \mathbf{k} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B} \cong \mathbf{B}.$$

De maneira análoga, $(1_{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon_j)(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B})(1_{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon_j) \cong \mathbf{A}$, para qualquer $j \in Q'$. Portanto, \mathbf{A} e \mathbf{B} são derivadamente mansas. \square

Lema 2.16. *Sejam $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ e $\mathbf{B} = \mathbf{k}Q'/I'$ álgebras não semissimples, i e j vértices distintos de Q . Se a álgebra do produto tensorial $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa, então a subálgebra plena $(\varepsilon_i + \varepsilon_j)\mathbf{A}(\varepsilon_i + \varepsilon_j)$ é isomorfa a $\mathbf{k}A_2$ ou \mathbf{k}^2 . Em particular, a menos de isomorfismo, $\mathbf{k}A_2$ é a única subálgebra plena de $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ não semissimples com exatamente dois vértices.*

Demonstração. Pelo Lema 2.14, $\varepsilon_i\mathbf{A}\varepsilon_i \cong \varepsilon_j\mathbf{A}\varepsilon_j \cong \mathbf{k}$. Logo, se não existe caminho $c \notin I$ entre os vértices i e j , temos que $(\varepsilon_i + \varepsilon_j)\mathbf{A}(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \cong \mathbf{k}^2$.

Suponhamos que existe um caminho $c \notin I$ entre os vértices i e j . Pelo Lema 2.14, $(\varepsilon_i + \varepsilon_j)\mathbf{A}(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \cong \mathbf{k}Q''/I''$ é uma subálgebra plena não semissimples de \mathbf{A} , em que Q'' tem exatamente dois vértices e qualquer ciclo pertence a I'' . Além disso, pelo Corolário 2.15 e o item 5 da Proposição 1.44, $(\varepsilon_i + \varepsilon_j)\mathbf{A}(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \cong \mathbf{k}Q''/I''$ também é derivadamente mansa. Segue do Lema 1.46, que a menos de isomorfismo, as únicas possibilidades para $\mathbf{k}Q''/I''$ são quando Q'' e I'' são iguais a um dos seguintes casos:

1. o quiver $i \xrightarrow{\alpha} j$ e o ideal $\langle 0 \rangle$;
2. o quiver $i \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} j$ e o ideal $\langle 0 \rangle$;
3. o quiver $i \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} j$ e o ideal $\langle \alpha\beta, \beta\alpha \rangle$.

Pelo Lema 2.14 e a não semissimplicidade de $\mathbf{B} = \mathbf{k}Q'/I'$, existe uma flecha $\gamma \in Q'$ que liga dois pontos distintos k e l . De maneira análoga a $(\varepsilon_i + \varepsilon_j)\mathbf{A}(\varepsilon_i + \varepsilon_j)$, a subálgebra plena $(\varepsilon'_k + \varepsilon'_l)\mathbf{B}(\varepsilon'_k + \varepsilon'_l)$ é isomorfa a $\mathbf{k}Q'''/I'''$, em que Q''' e I''' também são iguais a uma das três possibilidades listadas para Q'' e I'' . A primeira possibilidade é $\mathbf{k}A_2$, a segunda é a álgebra de Kronecker e a terceira é a álgebra de Nakayama B^2 .

Tomando os idempotentes $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon'_k$, $\varepsilon_{il} = \varepsilon_i \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon'_l$, $\varepsilon_{jk} = \varepsilon_j \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon'_k$ e $\varepsilon_{jl} = \varepsilon_j \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon'_l$ em $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$, obtemos via o isomorfismo proposto no Corolário 1.13, a subálgebra plena abaixo:

$$(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{il} + \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{jl})(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{il} + \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{jl}) \cong \mathbf{k}Q''/I'' \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}Q'''/I'''.$$

Esta subálgebra plena é derivadamente mansa, conforme item 5 da Proposição 1.44. Mas demonstramos nos Lemas 2.9, 2.8 e 2.7, que $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} B^2$, $B^2 \otimes_{\mathbf{k}} B^2$ e qualquer produto tensorial com a álgebra de Kronecker são derivadamente selvagens. Portanto, $(\varepsilon_i + \varepsilon_j)\mathbf{A}(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \cong \mathbf{k}A_2$. \square

Se $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa, o Lema 2.16 garante a inexistência de mais de uma flecha entre quaisquer dois pontos do quiver de $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ ou de qualquer subálgebra plena de \mathbf{A} . Neste caso, \overline{Q} e qualquer grafo de uma das suas subálgebras plenas não podem coincidir com \widetilde{A}_1 .

$$1 \text{ --- } 2.$$

Lema 2.17. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} álgebras não semissimples. Se a álgebra do produto tensorial $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa, então valem as seguintes afirmações:*

1. \mathbf{A} e qualquer uma das suas subálgebras plenas não semissimples não são álgebras locais.
2. \mathbf{A} tem uma subálgebra plena isomorfa a $\mathbf{k}A_2$.

Demonstração. Seja Q o quiver de Gabriel de \mathbf{A} , isto é, $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$. Demonstramos cada afirmação acima separadamente a seguir:

1. Suponhamos por absurdo que \mathbf{A} tem uma subálgebra plena local não semissimples. Isto é, existe um vértice i em Q_0 tal que $\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i$ é uma álgebra local não semissimples. Mas isto contradiz o isomorfismo $\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i \cong \mathbf{k}$ garantido pelo Lema 2.14. Portanto, \mathbf{A} não tem subálgebras plenas locais não semissimples. Consequentemente, \mathbf{A} não é uma álgebra local.
2. \mathbf{A} não semissimples implica na existência de pelo menos uma flecha $\alpha \in Q_1$. Pelo Lema 2.14, $(s(\alpha)) \mathbf{A} (s(\alpha)) \cong \mathbf{k}$. Por sua vez, $(s(\alpha)) \mathbf{A} (s(\alpha)) \cong \mathbf{k}$ implica em $s(\alpha) \neq t(\alpha)$. Isto é, existem pelo menos dois vértices distintos $s(\alpha) = i$ e $t(\alpha) = j$ em Q . Finalmente, pelo Lema 2.16 e a existência de α em $(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \mathbf{A} (\varepsilon_i + \varepsilon_j)$, concluímos que $(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \mathbf{A} (\varepsilon_i + \varepsilon_j) \cong \mathbf{k}A_2$.

□

Lema 2.18. *Seja \mathbf{B} uma álgebra não semissimples. Se a álgebra $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem, então $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem para qualquer álgebra não semissimples \mathbf{A} .*

Demonstração. Por contraposição, suponhamos que existe uma álgebra não semissimples $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$, tal que $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa. Pelo item 2 do Lema 2.17, \mathbf{A} tem uma subálgebra plena isomorfa a $\mathbf{k}A_2$. Usando o isomorfismo proposto no Corolário 1.13, obtemos que $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é isomorfa a uma subálgebra plena de $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$. Finalmente, pelo item 5 da Proposição 1.44, que diz que uma subálgebra plena de uma álgebra derivadamente mansa também é derivadamente mansa, obtemos que $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa. □

Corolário 2.19. *Seja $\mathbf{B} = \mathbf{k}Q/I$, tal que uma de suas subálgebras plenas é derivadamente equivalente a uma das álgebras listadas abaixo. Então $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem, para qualquer álgebra não semissimples \mathbf{A} .*

1. álgebra local não semissimples;
2. álgebra do tipo \tilde{A}_n com radical quadrado igual a zero;
3. álgebra do tipo E_p ou \tilde{E}_p ($p = 6, 7, 8$);
4. álgebra do tipo D_n com $n \geq 5$.

Demonstração. Suponhamos que $\varepsilon\mathbf{B}\varepsilon$ é derivadamente equivalente a uma das quatro álgebras listadas acima. Demonstramos nos Lemas 2.17, 2.10, 2.6 e 2.4 que $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon\mathbf{B}\varepsilon$ é derivadamente selvagem em ambos os casos. Segue do Lema 2.18, que $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon\mathbf{B}\varepsilon$ é derivadamente selvagem para qualquer \mathbf{A} não semissimples. Além disso, pelo Corolário 1.13, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon\mathbf{B}\varepsilon$ é uma subálgebra plena de $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$. Pelo item 4 da Proposição 1.44, se uma subálgebra plena é derivadamente selvagem, então a álgebra também é. Portanto, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem. \square

2.3 Álgebras do tipo Árvore

Nesta seção, mostramos que se $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa, então as álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} são álgebras do tipo árvore ou uma delas é isomorfa a $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$. Ressaltamos que em nossos resultados as álgebras são sempre associativas, básicas, conexas de dimensão finita, que pelo Teorema 1.3, são isomorfas a álgebras de quivers com relações $\mathbf{k}Q/I$. Para evitar conflitos nas notações, denotamos por $\{\varepsilon_i \mid i \in Q_0\}$, $\{\varepsilon'_i \mid i \in Q'_0\}$ e $\{\varepsilon''_i \mid i \in Q''_0\}$ os conjuntos dos caminhos triviais das álgebras de quiver com relações $\mathbf{k}Q/I$, $\mathbf{k}Q'/I'$ e $\mathbf{k}Q''/I''$, respectivamente. Conforme a Seção 1.1, estes conjuntos são exemplos de conjuntos completos de idempotentes ortogonais primitivos.

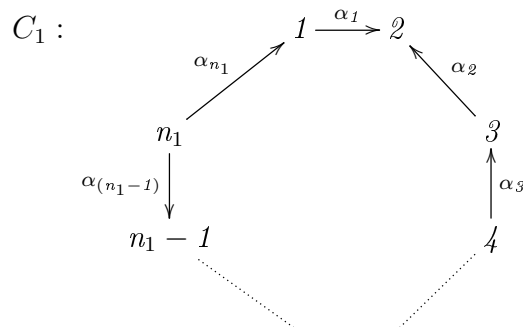
Lema 2.20. *Seja $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ uma álgebra não semissimples, que não é do tipo árvore, tal que para quaisquer vértices distintos $i, j \in Q$, tenhamos as seguintes hipóteses:*

1. $\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i \cong \mathbf{k}$,
2. $(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \mathbf{A} (\varepsilon_i + \varepsilon_j)$ isomorfo a \mathbf{k}^2 ou $\mathbf{k}A_2$.

Então \mathbf{A} tem uma subálgebra plena do tipo \tilde{A}_n com pelo menos 3 vértices.

Demonstração. Pela não semissimplicidade de \mathbf{A} , existe uma flecha $\alpha \in Q$. Pela hipótese 1, $s(\alpha) \neq t(\alpha)$, que garante a existência de pelo menos dois vértices em Q . Mas, pela hipótese 2, não podemos ter um ciclo não orientado com somente dois vértices. Portanto, Q tem pelo menos três vértices.

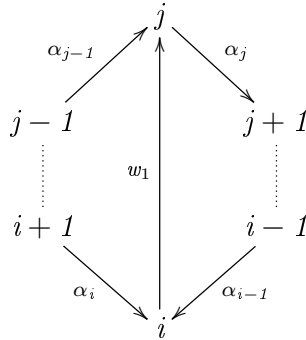
Se \mathbf{A} não é do tipo árvore, então existe um subquiver $Q_{C_1} \subset Q$, com vértices $\{1, 2, \dots, n_1\}$, não necessariamente pleno, cujo grafo subjacente \overline{Q}_{C_1} é um ciclo, conforme abaixo:



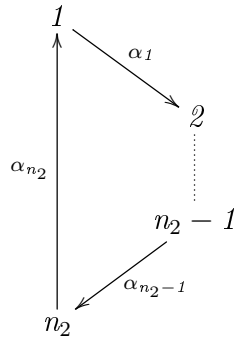
Se o quiver da subálgebra plena $(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n_1})\mathbf{A}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n_1})$ coincide com Q_{C_1} , está demonstrado, caso contrário, existe um caminho $w_1 \in (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n_1})\mathbf{A}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n_1})$, que não pertence a Q_{C_1} nem a I . Sejam i e j , os vértices $s(w_1)$ e $t(w_1)$, que pertencem à $\{1, 2, \dots, n_1\}$.

$$i \xrightarrow{w_1} j$$

Para facilitar nossa notação, identificamos os vértices k e $k + n_1$. Pelas hipóteses 1 e 2, concluímos que $i \neq j$, $i \neq j - 1$ e $i \neq j + 1$. Desta maneira, o caminho w_1 divide Q_{C_1} em dois subquivers, cujos grafos também são ciclos no grafo subjacente de Q , com pelo menos três vértices, conforme abaixo:



Excluimos um dos lados, definindo Q_{C_2} o subquiver com vértices $\{j, j + 1, \dots, i - 1, i\}$ e flechas $\{\alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{i-1}, w_1\}$, que para facilitar a notação, renomeamos seus vértices e flechas por $\{1, 2, \dots, n_2 - 1, n_2\}$ e $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_2-1}, \alpha_{n_2}\}$, respectivamente. Segue da construção de Q_{C_2} , que $3 \leq n_2 < n_1$ e que cada α_k não é combinação linear de outras flechas do quiver da subálgebra plena $(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n_1})\mathbf{A}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n_1})$ nem de outras flechas de $(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n_2})\mathbf{A}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n_2})$, conforme abaixo:

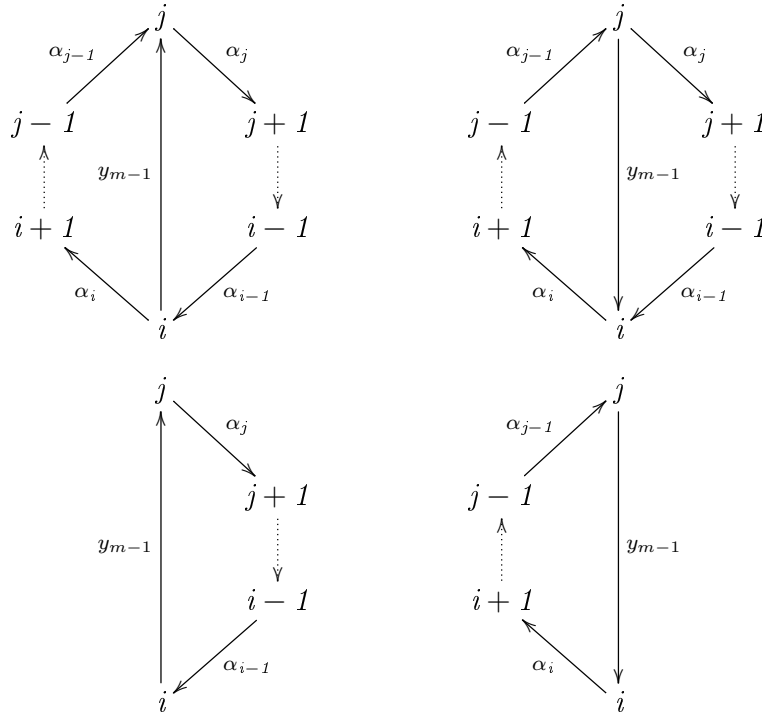


Se o quiver da subálgebra plena $(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n_2})\mathbf{A}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n_2})$ coincide com Q_{C_2} , está demonstrado, caso contrário, repetimos o processo, que a cada passagem diminui a quantidade de vértices, obtendo um subquiver Q_{C_k} cujo quiver subjacente tem pelo menos três vértices.

Pela finitude de n_1 , obtemos um subquiver pleno Q_{C_n} de vértices $\{1, 2, \dots, n\}$, tal que $\overline{Q_{C_n}} = \tilde{A}_{n-1}$, com pelo menos três vértices. \square

Observamos, que no processo de demonstração do Lema 2.20, se o subquiver inicial Q_{C_1} for um ciclo orientado, é possível escolher cada Q_{C_m} de maneira que ainda tenhamos

um ciclo orientado.



Lema 2.21. *Seja $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ uma álgebra não semissimples, que não é do tipo árvore, tal que para quaisquer vértices distintos $i, j \in Q$, tenhamos as seguintes hipóteses:*

1. $\varepsilon_i \mathbf{A} \varepsilon_i \cong \mathbf{k}$,
2. $(\varepsilon_i + \varepsilon_j) \mathbf{A} (\varepsilon_i + \varepsilon_j)$ isomorfo a \mathbf{k}^2 ou $\mathbf{k}A_2$.

Então \mathbf{A} tem uma subálgebra plena do tipo \tilde{A}_n com pelo menos três vértices e radical quadrado igual a zero, ou uma subálgebra plena igual a $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$.

Demonstração. Pelo Lema 2.20, \mathbf{A} tem uma subálgebra plena $\varepsilon \mathbf{A} \varepsilon$ do tipo \tilde{A}_n com pelo menos 3 vértices. Supomos primeiro, que o quiver de Gabriel $\varepsilon \mathbf{A} \varepsilon$ é um ciclo orientado, isto é, igual a C_m da definição da álgebra de Nakayama $B^m = C_m/J^m$, conforme o quiver abaixo:

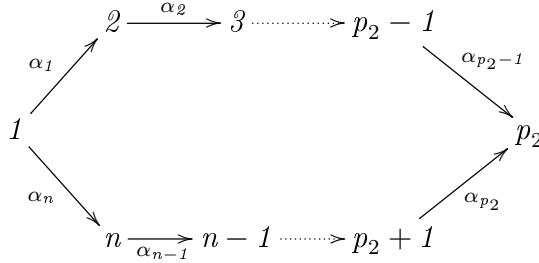
$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_1} \\ \xleftarrow{\alpha_m} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_2} \\ \xleftarrow{\alpha_{m-1}} \end{array} \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_{m-1}} \\ \xleftarrow{\alpha_2} \end{array} m$$

Para facilitar a notação, identificamos os vértices k e $m+k$. Pela hipótese 1, escolhendo um vértice aleatório $i \in C_m$, existe o caminho $\beta = \alpha_i \dots \alpha_{j-1}$ que não pertence a I , tal que $\beta \alpha_j \in I$. Em seguida, novamente pela hipótese 1, existe caminho $\beta_k = \alpha_k \dots \alpha_{i-1} \beta \notin I$ tal que $\alpha_{k-1} \beta_k \in I$. Ao retirarmos os vértices $k+1, \dots, j-1$, obtemos uma subálgebra plena, cujo quiver de Gabriel é um ciclo C_{m_2} com pelo menos três vértices, garantidos pelas hipóteses 1 e 2. Renumerando os índices, fazendo $k=1$, temos que C_{m_2} é o quiver abaixo, em que $\alpha_{m_2} \beta, \beta \alpha_2 \in I$

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_1} \\ \xleftarrow{\alpha_{m_2}} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_2} \\ \xleftarrow{\alpha_{m_2-1}} \end{array} \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_{m_2-1}} \\ \xleftarrow{\beta_1} \end{array} m_2$$

Em seguida, iniciamos o processo a partir de 2. Repetindo quantas vezes for necessário, obtemos uma subálgebra plena do tipo \tilde{A}_n , com pelo menos 3 vértices e radical quadrado igual a zero.

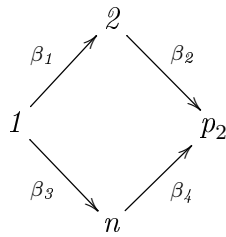
Supomos que há exatamente dois sentidos entre as flechas de $\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon$, conforme o quiver abaixo.



Se não houver relações em $\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon$, a subálgebra plena dos vértices 1 e p_2 é a álgebra de Kronecker, que contradiz a hipótese 2. Concluimos que o quiver de $\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon$ tem uma das seguintes relações:

1. $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{p_2-1} \in I$,
2. $\alpha_n\alpha_{n-1} \dots \alpha_{p_2} \in I$,
3. $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{p_2-1} \notin I$ e $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{p_2-1} = \lambda\alpha_n\alpha_{n-1} \dots \alpha_{p_2}$, para algum $\lambda \neq 0$ em \mathbf{k} .

Nos dois primeiros casos, repetimos o processo do caso C_m nos dois sentidos, que obtemos uma subálgebra plena do tipo \tilde{A}_n , com pelo menos 3 vértices e radical quadrado igual a zero. No terceiro caso, renomeamos os caminhos $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_3 = \alpha_n$, $\beta_2 = \alpha_2 \dots \alpha_{p_2-1}$, $\beta_4 = \alpha_{n-1} \dots \alpha_{p_2}$ e tomamos a subálgebra plena $\mathbf{B} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_{p_2} + \varepsilon_n)\mathbf{A}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_{p_2} + \varepsilon_n)$, que tem o quiver $A_2 \otimes A_2$ com relações $I = \langle \beta_1\beta_2 - \lambda\beta_3\beta_4 \rangle$, conforme abaixo:



Neste caso, por uma simples mudança de base, obtemos $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$.

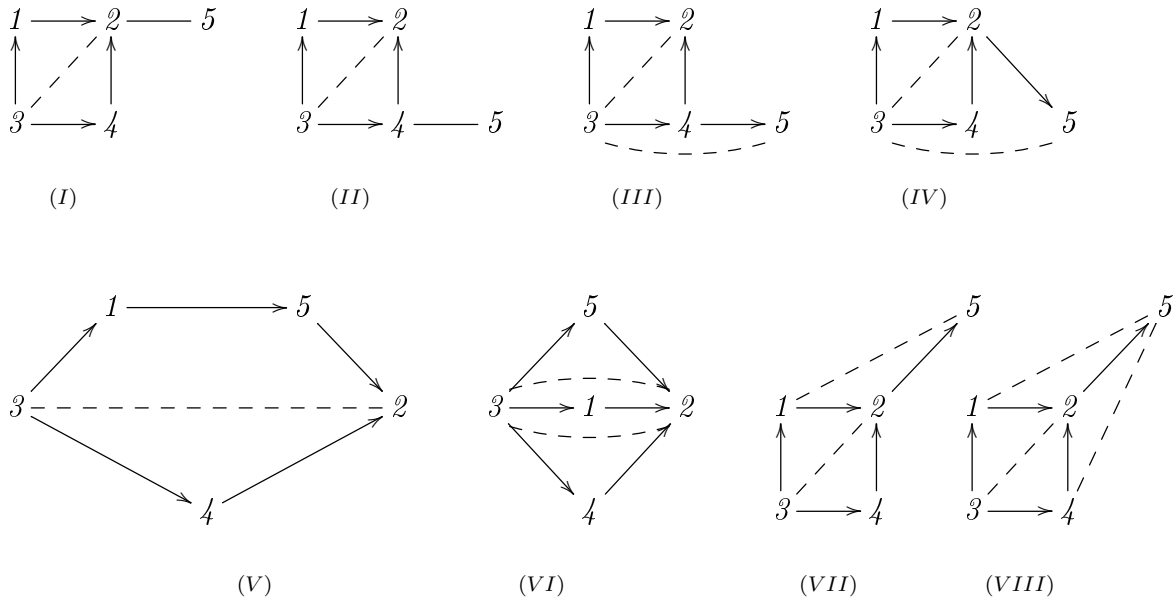
Finalmente, nos casos com mais de dois sentidos, repetimos a estratégia realizada no caso C_m em cada sentido. No fim do processo, obtemos uma subálgebra plena do tipo \tilde{A}_n com pelo menos 3 vértices e radical ao quadrado igual a zero. \square

Lema 2.22. *Sejam $\mathbf{A} = \mathbf{k}Q/I$ e \mathbf{B} álgebras não semissimples. Se $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa, então \mathbf{A} é uma álgebra do tipo árvore ou é isomorfa a $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$. Em particular, se $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$, então $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}A_2$.*

Demonstração. Suponhamos que \mathbf{A} não é do tipo árvore.

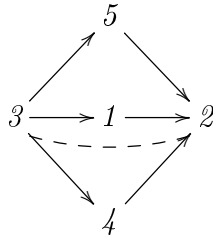
Então \overline{Q} possui ciclos. Pelos Lemas 2.14 e 2.16, a álgebra \mathbf{A} satisfaz as hipótese 1 e 2 do Lema 2.20. Segue do Lema 2.21, que \mathbf{A} tem uma subálgebra plena do tipo \tilde{A}_n com $n \geq 2$ e radical quadrado igual a zero, ou uma subálgebra plena igual a $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$. Mas pelo item 2 do Corolário 2.19, \mathbf{A} não pode ter uma subálgebra plena do tipo \tilde{A}_n com radical quadrado igual a zero. Concluimos que \mathbf{A} tem uma subálgebra plena isomorfa a $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$.

Afirmamos que $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$. De fato, suponhamos que existe vértice $k \in Q$, tal que $k \notin A_2 \otimes A_2$. Tomando a subálgebra plena dos vértices do quiver $A_2 \otimes A_2$ com o vértice k , obtemos uma subálgebra plena $\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon = \mathbf{k}Q'/I'$. Para atender os Lemas 2.14, 2.16 e o item 2 do Corolário 2.19, $\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon = \mathbf{k}Q'/I'$ é isomorfo a um dos quiver com relações abaixo ou seus duais.



Se $\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon$ é uma das cinco primeiras álgebras de quiver com relações acima, então $\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon$ é uma das álgebras listadas no Lema 1.22. Isto é, $T_2(\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon)$ é uma álgebra selvagem. Consequentemente, pelo item 3 da Proposição 1.44, $T_2(\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon)$ é derivadamente selvagem. Além disso, o isomorfismo $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon\mathbf{A}\varepsilon \cong T_2(\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon)$ garante que $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon\mathbf{A}\varepsilon$ é derivadamente selvagem. Finalmente, pelo Lema 2.18, $\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem.

Se $\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon$ é a sexta álgebra de quiver com relações acima, então o Lema 1.32 garante que $\varepsilon\mathbf{A}\varepsilon$ é derivadamente equivalente a álgebra de quiver com relações a seguir:



Mas este quiver com relações contradiz o Lema 2.7, pois a subálgebra plena de vértices 3 e 2 é isomorfa a álgebra de Kronecker.

Desta maneira, restam apenas a sétima e oitava álgebras de quiver com relações. Mas demonstramos no Lema 2.11, que em ambas, $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \varepsilon \mathbf{A} \varepsilon$ é derivadamente selvagem. Pelo Lema 2.18, $\varepsilon \mathbf{A} \varepsilon \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem. Portanto, não existe $k \notin A_2 \otimes A_2$ e $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$.

Em particular, $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$ faz com que tenhamos $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B} \cong \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$. Mas pelo item 1 do Lema 1.15, se \mathbf{B} não é isomorfo a $\mathbf{k}A_2$, então $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é selvagem. Por outro lado, pelos Lemas 1.40 e 1.49, se \mathbf{B} é isomorfo a $\mathbf{k}A_2$, então $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa. Portanto, $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}A_2$. \square

Capítulo 3

O Teorema Principal e Suas Consequências

3.1 Demonstração do Teorema Principal

Teorema Principal. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} duas \mathbf{k} -álgebras associativas, básicas, conexas, não simples de dimensão finita. As afirmações abaixo são equivalentes:*

1. $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa.
2. as álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} satisfazem um dos seguintes casos:
 - (a) uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}D_4$;
 - (b) uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}A_n$, em que $2 \leq n \leq 5$;
 - (c) ambas são derivadamente equivalentes a $\mathbf{k}A_3$.
3. $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente equivalente a uma das álgebras de Dynkin $\mathbf{k}D_4$, $\mathbf{k}E_6$ ou $\mathbf{k}E_8$, ou a uma das categorias de feixes coerentes das retas projetivas com pesos \mathbb{X}_{236} , \mathbb{X}_{244} ou \mathbb{X}_{333} .

Nestes casos, a álgebra $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é hereditária por partes.

Nesta seção, demonstramos o Teorema Principal, seguindo a ordem abaixo:

$$\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2}.$$

Dividimos a demonstração do primeiro caso, Afirmação 2 implica na Afirmação 3, nas Subseções 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3, analisando cada um dos três itens 2a, 2b e 2c, separadamente. Em seguida, na Subseção 3.1.4, demonstramos que a Afirmação 3 implica na Afirmação 1. Encerramos a demonstração na Subseção 3.1.5, onde demonstramos que a Afirmação 1 implica na Afirmação 2. Lembramos que as hipóteses do Teorema Principal são que as álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} são associativas, básicas, conexas, não simples de dimensão finita.

(2 \Rightarrow 3)

3.1.1 $\mathbf{A} \simeq_d \mathbf{k}A_2$ e $\mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}D_4$

Se \mathbf{A} e \mathbf{B} satisfazem o item 2a, então

$$\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}D_4.$$

Pelos Lemas 1.36 e 1.31, temos que

$$\mathbf{k}D_4 \simeq_d A(4, 3) \simeq_d \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2.$$

Consequentemente, pelo Lema 1.30

$$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}D_4 \simeq_d \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2.$$

Finalmente, pelo Lema 1.40

$$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \simeq_d \mathbb{X}_{333}.$$

3.1.2 $\mathbf{A} \simeq_d \mathbf{k}A_2$ e $\mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}A_n$, em que $2 \leq n \leq 5$

Se \mathbf{A} e \mathbf{B} satisfazem o item 2b, então $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente equivalente a uma das álgebras abaixo:

$$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2, \quad \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_3, \quad \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_4, \quad \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_5.$$

Pelos Lemas 1.31 e 1.36, temos as seguintes equivalências derivadas:

$$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \simeq_d A(4, 3) \simeq_d \mathbf{k}D_4,$$

$$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_3 \simeq_d A(6, 3) \simeq_d \mathbf{k}E_6,$$

$$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_4 \simeq_d A(8, 3) \simeq_d \mathbf{k}E_8,$$

$$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_5 \simeq_d A(10, 3) \simeq_d \mathbb{X}_{236}.$$

3.1.3 $\mathbf{A} \simeq_d \mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}A_3$

Se \mathbf{A} e \mathbf{B} satisfazem o item 2c, então $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente equivalente a álgebra abaixo:

$$\mathbf{k}A_3 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_3.$$

Pelos Lemas 1.31 e 1.36, temos as seguintes equivalências derivadas:

$$\mathbf{k}A_3 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_3 \simeq_d A(9, 4) \simeq_d \mathbb{X}_{244}.$$

(3 \Rightarrow 1)

3.1.4 Feixes Coerentes e Álgebras de Dynkin

Pelo Lema 1.43, a equivalência derivada preserva o tipo de representação derivada. Consequentemente, se $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente equivalente a uma das álgebras de Dynkin $\mathbf{k}D_4$, $\mathbf{k}E_6$ ou $\mathbf{k}E_8$, ou a uma das categorias de feixes coerentes das retas projetivas com pesos \mathbb{X}_{236} , \mathbb{X}_{244} ou \mathbb{X}_{333} , então $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ herdará o tipo da representação derivada da respectiva categoria. Afirmamos que ambas são derivadamente mansas.

De fato, no Exemplo 19, vimos que as álgebras de Dynkin são derivadamente mansas, conforme Happel em [Hap88]. Enquanto que no Teorema 1.39, vimos que a categoria de feixes coerentes das retas projetivas com pesos \mathbb{X}_{236} , \mathbb{X}_{244} e \mathbb{X}_{333} são derivadamente equivalentes as categorias de módulos das álgebras canônicas \mathbf{C}_{236} , \mathbf{C}_{244} e \mathbf{C}_{333} , respectivamente. Que por sua vez, são álgebras tubulares canônicas derivadamente mansas, conforme o Lema 1.49.

Portanto, a Afirmação 3 do Teorema Principal implica que $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa.

(1 \Rightarrow 2)

3.1.5 $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ Derivadamente Mansa

Seja $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ derivadamente mansa. Pelo Corolário 2.15, \mathbf{A} e \mathbf{B} também são álgebras derivadamente mansas. Além disso, pelo Lema 2.22, \mathbf{A} e \mathbf{B} são álgebras do tipo árvore ou uma delas é isomorfa a $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}A_2$.

No segundo caso, sem perda de generalidade, supomos que $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$. Pelos Lemas 1.31 e 1.36, temos que:

$$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \simeq_d A(4, 3) \simeq_d \mathbf{k}D_4.$$

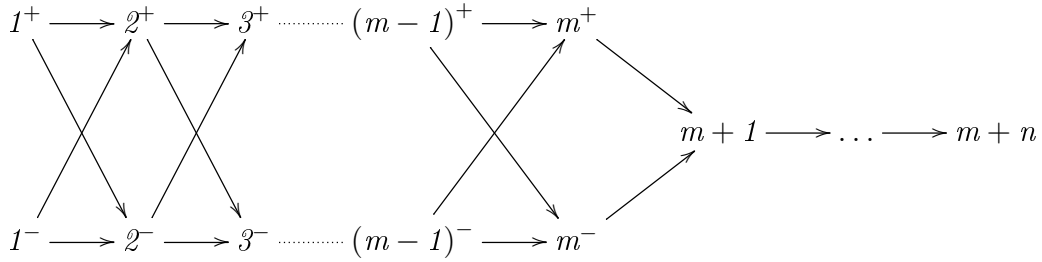
Portanto, \mathbf{A} e \mathbf{B} são derivadamente equivalentes a $\mathbf{k}D_4$ e $\mathbf{k}A_2$, respectivamente. Isto implica no item 2a da Afirmação 2.

Desta maneira, restam os casos em que \mathbf{A} e \mathbf{B} são álgebras derivadamente mansas do tipo árvore. Pelo Teorema 1.47, uma álgebra derivadamente mansa do tipo árvore é derivadamente equivalente a uma álgebra tubular, ou a uma álgebra hereditária por partes do tipo E_p ou \tilde{E}_p ($p = 6, 7, 8$), ou a uma álgebra de semicadeias $S(n, m)$. Afirmamos que os dois primeiros casos não ocorrem. De fato, supomos por absurdo que estes casos ocorrem nos dois itens abaixo:

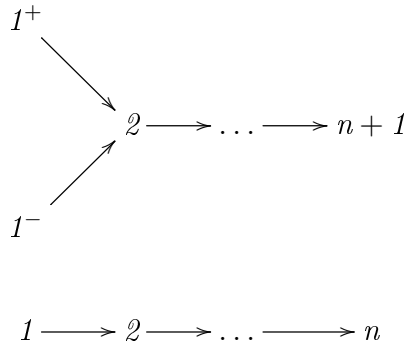
1. Se \mathbf{A} é uma álgebra tubular, pelo Lema 1.38, $\mathbf{A} \simeq_d \mathbf{C}(p, \lambda)$, em que $\mathbf{C}(p, \lambda)$ é uma álgebra tubular canônica, cujos possíveis quivers de Gabriel estão definidos na Seção 1.9. Mas pelo Lema 2.22, o grafo subjacente \overline{Q} de \mathbf{A} é uma árvore e não pode ser igual a um quiver de uma álgebra canônica;

2. se \mathbf{A} é uma álgebra hereditária por partes do tipo do tipo E_p ou \tilde{E}_p ($p = 6, 7, 8$), então $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente selvagem, conforme item 3 do Corolário 2.19, que é uma contradição.

Com isto, restam apenas os casos que \mathbf{A} e \mathbf{B} são derivadamente equivalentes a álgebras de semicadeias $S(n, m)$.



Seja $\mathbf{A} \simeq_d S(n, m)$. Se $m > 1$, o quiver de $S(n, m)$ não será uma árvore, contradizendo o Lema 2.22. Portanto, $m \leq 1$ e $S(n, m)$ é a álgebra $\mathbf{k}D_{n+2}$ ou $\mathbf{k}A_n$.



Mas pelo Lema 2.3 e o item 4 do Corolário 2.19, \mathbf{A} e \mathbf{B} não são derivadamente equivalentes a $\mathbf{k}A_m$ nem $\mathbf{k}D_n$, para $m \geq 6$ e $n \geq 5$. Restando somente os casos $\mathbf{k}A_2$, $\mathbf{k}A_3$, $\mathbf{k}A_4$, $\mathbf{k}A_5$ e $\mathbf{k}D_4$. Mas a álgebra $\mathbf{k}D_4 \simeq_d \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$ já foi tratada no início desta seção, implicando no item 2a da Afirmação 2.

Finalmente, restam somente os casos em que \mathbf{A} e \mathbf{B} são derivadamente equivalentes as álgebras $\mathbf{k}A_2$, $\mathbf{k}A_3$, $\mathbf{k}A_4$ ou $\mathbf{k}A_5$, os quais analisamos separadamente a seguir:

$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_n$ com $2 \leq n \leq 5$

Conforme a Subseção 3.1.2, as álgebras $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_n$ com $2 \leq n \leq 5$ são derivadamente mansas. Confirmando o item 2b da Afirmação 2.

$\mathbf{k}A_3 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_3$

Conforme a Subseção 3.1.3, a álgebra $\mathbf{k}A_3 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_3$ é derivadamente mansa. Confirmando o item 2c da Afirmação 2.

$\mathbf{k}A_3 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_4$, $\mathbf{k}A_3 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_5$, $\mathbf{k}A_4 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_4$, $\mathbf{k}A_4 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_5$ e $\mathbf{k}A_5 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_5$

Demonstramos no Corolário 2.2, que $\mathbf{k}A_m \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_n$ é derivadamente selvagem para qualquer par m e n , em que $m \geq 3$ e $n \geq 4$, impossibilitando estes casos.

Portanto, a Afirmação 1 implica na Afirmação 2. E assim, encerramos a demonstração do Teorema Principal.

3.1.6 Corolários do Teorema Principal

Corolário 1. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} duas \mathbf{k} -álgebras associativas, básicas, conexas, não simples de dimensão finita. O produto tensorial das álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} é derivadamente discreto se, e somente se, uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}A_n$, em que $2 \leq n \leq 4$. Nestes casos, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}D_4$, $\mathbf{k}E_6$ ou $\mathbf{k}E_8$.*

Demonstração. Inicialmente, supomos que $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente discreta. Pela definição 1.41, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa. Além disso, pelo item 1 da Proposição 1.44, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é de representação finita. Logo, a álgebra $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é de representação finita e derivadamente mansa. Mas pelo Teorema Principal, os únicos casos em que $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é de representação finita derivadamente mansas são as derivadamente equivalentes as listadas a seguir:

$$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \simeq_d \mathbf{k}D_4, \quad \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_3 \simeq_d \mathbf{k}E_6, \quad \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_4 \simeq_d \mathbf{k}E_8.$$

Para a recíproca, se uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}A_n$, em que $2 \leq n \leq 4$, então $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}D_4$, $\mathbf{k}E_6$ e $\mathbf{k}E_8$, conforme as equivalências derivadas acima. Que por sua vez, são derivadamente discretas. \square

Corolário 2. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} duas \mathbf{k} -álgebras associativas, básicas, conexas, não simples de dimensão finita. A álgebra $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente discreta se, e somente se, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente finita.*

Demonstração. Inicialmente, supomos que $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente discreta. Pelo Corolário 1, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}D_4$, $\mathbf{k}E_6$ ou $\mathbf{k}E_8$. Por sorte, $\mathbf{k}D_4$, $\mathbf{k}E_6$ e $\mathbf{k}E_8$ são álgebras do tipo Dynkin. Portanto, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente finita.

A recíproca é uma consequência imediata da Definição 1.41. \square

Corolário 3. *Dados um número natural $n \geq 3$ e n álgebras $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ associativas, básicas, conexas, não simples de dimensão finita. A álgebra $\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}} \dots \otimes_{\mathbf{k}} \Lambda_n$ é derivadamente mansa se, e somente se, $n = 3$ e $\Lambda_1 \cong \Lambda_2 \cong \Lambda_3 \cong \mathbf{k}A_2$. Neste caso, o produto tensorial $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2$ é derivadamente equivalente a categoria de feixes coerentes da reta projetiva com pesos \mathbb{X}_{333} .*

Demonstração. Suponhamos que $n = 3$ e $\Lambda_1 \cong \Lambda_2 \cong \Lambda_3 \cong \mathbf{k}A_2$. Pelos Lemas 1.31 e 1.36, temos que

$$\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}} \dots \otimes_{\mathbf{k}} \Lambda_n \cong \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \simeq_d \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} A(4, 3) \simeq_d \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}D_4.$$

Por sorte, $\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}D_4$ é derivadamente mansa, conforme o Teorema Principal. Portanto, $\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}} \dots \otimes_{\mathbf{k}} \Lambda_n$ é derivadamente mansa.

Suponhamos que a álgebra $\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}} \dots \otimes_{\mathbf{k}} \Lambda_n$ é derivadamente mansa. Pelo item 2 da Proposição 1.44, a álgebra $\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}} \dots \otimes_{\mathbf{k}} \Lambda_n$ também é mansa. Mas pelo item 1 do Lema 1.15, $\Lambda_1 \otimes_{\mathbf{k}} \dots \otimes_{\mathbf{k}} \Lambda_n$ é mansa se, e somente se, $n = 3$ e $\Lambda_1 \cong \Lambda_2 \cong \Lambda_3 \cong \mathbf{k}A_2$.

Finalmente, pelo Lema 1.40,

$$\mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \simeq_d \mathbb{X}_{333}.$$

□

3.2 Álgebras de Grupo Derivadamente Mansas

Na Seção 1.4 discutimos a importância das álgebras de grupo e o longo histórico da classificação de suas categorias de módulos. Uma das consequências do Teorema Principal é a classificação das álgebras de grupo derivadamente mansas.

Lema 3.1. *Seja G um grupo finito, \mathbf{k} um corpo de característica \mathbf{p} e \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita. Então a álgebra de grupo $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente mansa se, e somente se, ocorre um dos seguintes casos:*

1. \mathbf{B} é derivadamente mansa e $\mathbf{k}[G]$ é semissimples;
2. \mathbf{B} é semissimples e $\mathbf{k}[G]$ é derivadamente mansa.

Demonstração. Seja $\mathbf{B}[G]$ uma álgebra derivadamente mansa. Supomos por absurdo que ambas as álgebras \mathbf{B} e $\mathbf{k}[G]$ não são semissimples. Do isomorfismo $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[G] \cong \mathbf{B}[G]$ segue que $\mathbf{B}[G]$ é um produto tensorial de duas álgebras não semissimples. Pelo Teorema Principal, $\mathbf{k}[G]$ é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}D_4$ ou a $\mathbf{k}A_n$, em que $2 \leq n \leq 5$. Segue da Proposição 1.35 e do Corolário 1.34 que $\mathbf{k}[G]$ é uma álgebra cujo quiver de Gabriel é acíclico. Mas isto é um absurdo, pois segundo [Erd90], as álgebras de grupo $\mathbf{k}[G]$ são álgebras simétricas cujos quivers de Gabriel possuem ciclos. Portanto, pelo menos uma das álgebras \mathbf{B} ou $\mathbf{k}[G]$ é semissimples.

A recíproca é imediata. □

Teorema 1. *Sejam G um grupo finito, \mathbf{k} um corpo de característica \mathbf{p} e \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita. A álgebra de grupo $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente mansa se, e somente se, ocorre um dos seguintes casos:*

1. \mathbf{p} não divide a ordem de G e \mathbf{B} é derivadamente mansa;
2. \mathbf{p} divide a ordem de G , $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$ e $\mathbf{k}[G]$ é derivadamente mansa.

Demonstração. Suponhamos que $\mathbf{B}[G]$ é uma álgebra de grupo derivadamente mansa. Dividimos a demonstração nos dois casos distintos a seguir:

1. Se \mathfrak{p} não divide a ordem de G , então $\mathbf{k}G$ é semissimples, conforme o Teorema 1.18 (Maschke). Mas pelo item 1 do Lema 3.1, a álgebra \mathbf{B} é derivadamente mansa. Portanto, \mathfrak{p} não divide a ordem de G e \mathbf{B} é derivadamente mansa.
2. Se \mathfrak{p} divide a ordem de G , então $\mathbf{k}G$ não é semissimples, conforme o Teorema 1.18 (Maschke). Segue do item 2 do Lema 3.1 que a álgebra B é semissimples e $\mathbf{k}G$ é derivadamente mansa. Além disso, a hipótese de $\mathbf{B}[G]$ ser derivadamente mansa implica que $\mathbf{B}[G]$ é uma álgebra mansa, conforme o item 2 da Proposição 1.44. Mas pelos Teoremas 1.16 e 1.17, os únicos casos com as hipóteses $\mathbf{B}[G]$ mansa, \mathfrak{p} divide a ordem de G e \mathbf{B} semissimples ocorrem com $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$. Portanto, \mathfrak{p} divide a ordem de G , $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$ e $\mathbf{k}[G]$ é derivadamente mansa.

Reciprocamente, segue do Teorema 1.18 (Maschke) que os casos 1 e 2 deste Teorema implicam nos casos 1 e 2 do Lema 3.1, respectivamente. Portanto, $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente mansa. \square

Para classificar melhor as álgebras do item 2 do Teorema 1, mantemos as hipóteses do Teorema 1, supomos que $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente mansa e que \mathfrak{p} divide a ordem de G . Segue do item 2 do Teorema 1 que $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$. Além disso, sabemos que se $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente mansa, então $\mathbf{B}[G]$ é uma álgebra mansa. Logo, $\mathbf{B}[G]$ é uma álgebra mansa, \mathfrak{p} divide a ordem de G e $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$. Segue diretamente dos Teoremas 1.16 e 1.17, que \mathfrak{p} e G satisfazem um dos dois casos abaixo:

- Um \mathfrak{p} -subgrupo de Sylow de G é cíclico;
- $\mathfrak{p} = 2$ e um 2-subgrupo de Sylow de G é isomorfo a um dos grupos $D_{(m)}$, $S_{(m)}$ ou $Q_{(m)}$.

Entretanto, nos Corolários 4 e 5 a seguir, provamos que existem álgebras que satisfazem um dos casos acima e são derivadamente selvagens.

Corolário 4. *Sejam \mathbf{k} um corpo de característica 2 e \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita. Se G é um dos grupos listados abaixo, então $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente selvagem.*

1. grupo diedral $D_{(m)} = \langle g, h \mid g^2 = h^{2^m} = 1, hg = gh^{-1} \rangle$, em que $m \geq 1$;
2. grupo semidiedral $S_{(m)} = \langle g, h \mid g^2 = h^{2^m} = 1, hg = gh^{2^{m-1}-1} \rangle$, em que $m \geq 3$;
3. grupo dos quatérnios $Q_{(m)} = \langle g, h \mid g^2 = h^{2^{m-1}}, g^4 = 1, hg = gh^{-1} \rangle$, com $m \geq 2$.

Demonstração. De fato, a característica de \mathbf{k} é igual a 2 e divide a ordem de todos estes três grupos. Além disso, o Lema 1.20 diz que o quiver de Gabriel de $\mathbf{k}[G]$ em todos os três casos é o seguinte:

$$\beta \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \\ \curvearrowleft \end{array} 1 \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \text{---} \\ \curvearrowright \end{array} \alpha$$

Mas conforme o Lema 1.45, $\mathbf{k}[G]$ é uma álgebra local que não é derivadamente mansa. Portanto, pelo Teorema 1, $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente selvagem. \square

Corolário 5. *Sejam \mathbf{k} um corpo de característica \mathbf{p} , G um grupo cíclico de ordem \mathbf{p}^n e \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita. A álgebra de grupo $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente mansa se, e somente se, $\mathbf{p} = 2$, $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$ e G é o grupo cíclico de ordem 2. Neste caso, $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente discreta.*

Demonstração. De fato, \mathbf{p} divide a ordem de G . Pelo Teorema 1, $\mathbf{B}[G]$ é derivadamente mansa se, e somente se, $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$ e $\mathbf{k}[G]$ é derivadamente mansa. Além disso, o Lema 1.21 diz que $\mathbf{k}[G] \cong \mathbf{k}Q/I$, em que $I = \langle \alpha^{\mathbf{p}^n} \rangle$ e Q é o quiver abaixo:

$$1 \curvearrowright \alpha$$

Segue que $\mathbf{k}[G]$ é uma álgebra local não semissimples. Finalmente, pelo Lema 1.45, a álgebra local $\mathbf{k}Q/I$ é derivadamente mansa se, e somente se, $\mathbf{p}^n = 2$. Como queríamos demonstrar.

Neste caso, conforme vimos no Exemplo 20, $\mathbf{k}Q/I$ é derivadamente discreta. \square

3.3 Álgebras Envolventes Derivadamente Mansas

Nesta seção, descrevemos as álgebras envolventes $\mathbf{A}^e = \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}^{op}$ derivadamente discretas e derivadamente mansas.

Teorema 2. *Seja \mathbf{A} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa, não simples de dimensão finita. A álgebra envolvente \mathbf{A}^e é derivadamente discreta se, e somente se, \mathbf{A} é isomorfa a $\mathbf{k}A_2$. Neste caso, \mathbf{A}^e é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}D_4$.*

Demonstração. Pelo Corolário 1, a álgebra $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente discreta se, e somente se, $\mathbf{A} \simeq_d \mathbf{k}A_2$ e $\mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}A_n$ para $2 \leq n \leq 4$. Logo, o único caso em que $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}^{op}$ é derivadamente discreta ocorre quando $\mathbf{A} \simeq_d \mathbf{k}A_2$. Mas $\mathbf{A} \simeq_d \mathbf{k}A_2$ se, e somente se, $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}A_2$. Portanto $\mathbf{A} \cong \mathbf{k}A_2$

Neste caso, $\mathbf{A}^e \cong \mathbf{k}A_2 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}A_2 \simeq_d \mathbf{k}D_4$. \square

Teorema 3. *Seja \mathbf{A} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa, não simples de dimensão finita. A álgebra envolvente \mathbf{A}^e é derivadamente mansa se, e somente se, \mathbf{A} é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ ou $\mathbf{k}A_3$. Nestes casos, \mathbf{A}^e é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}D_4$ ou \mathbb{X}_{244} .*

Demonstração. Segue do Teorema Principal, que $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}^{op}$ é derivadamente mansa se, e somente se, \mathbf{A} é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ ou $\mathbf{k}A_3$. Nestes casos, pelas equivalências derivadas demonstradas nas Subseções 3.1.2 e 3.1.3, \mathbf{A}^e é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}D_4$ ou \mathbb{X}_{244} . \square

Em que pese a importância, observamos que embora tenhamos infinitas classes não isomorfias de \mathbf{A} , em que a álgebra envolvente \mathbf{A}^e é de representação finita, há apenas uma quantidade finita de álgebras não isomorfas cujas respectivas álgebras envolventes são derivadamente mansas.

3.4 Álgebras de Matrizes Triangulares Inferiores

Conforme o Lema 1.14, uma álgebra de matrizes triangulares inferiores com coeficientes em uma álgebra \mathbf{B} é isomorfa ao seguinte produto tensorial:

$$T_n(\mathbf{B}) \cong \mathbf{k}A_n \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}.$$

Tendo em mente este isomorfismo e o resultado do Teorema Principal, obtemos a classificação das álgebras de matrizes triangulares inferiores derivadamente discretas e derivadamente mansas, nos teoremas a seguir;

Teorema 4. *Sejam $n > 1$, \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita e $T_n(\mathbf{B})$ a álgebra de matrizes triangulares inferiores de ordem $n \times n$ com coeficientes em \mathbf{B} . $T_n(\mathbf{B})$ é derivadamente discreta se, e somente se, ocorre um dos seguintes casos:*

1. $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$;
2. $n = 2$ e \mathbf{B} é derivadamente equivalente a $T_m(\mathbf{k})$, em que $2 \leq m \leq 4$;
3. $n = 3$ e $\mathbf{B} \cong T_2(\mathbf{k})$;
4. $n = 4$ e $\mathbf{B} \cong T_2(\mathbf{k})$.

Demonstração. De fato, $T_n(\mathbf{B}) \cong \mathbf{k}A_n \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$.

Inicialmente, supomos que \mathbf{B} não é semissimples. Pelo Corolário 1, temos os casos:

- (i) $n = 2$ e $\mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}A_m$, em que $2 \leq m \leq 4$;
- (ii) $n = 3$ e $\mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}A_2$;
- (iii) $n = 4$ e $\mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}A_2$.

Pelo isomorfismo $T_m(\mathbf{k}) \cong \mathbf{k}A_m$ e o Corolário 1.34, os Casos (i), (ii) e (iii) são equivalentes aos Casos 2, 3 e 4, respectivamente.

Finalmente, se \mathbf{B} é semissimples, então $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$. Portanto, ocorre o Caso 1. \square

Teorema 5. *Sejam $n > 1$, \mathbf{B} uma \mathbf{k} -álgebra associativa, básica, conexa de dimensão finita e $T_n(\mathbf{B})$ a álgebra de matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ com coeficientes em \mathbf{B} . A álgebra $T_n(\mathbf{B})$ é derivadamente mansa se, e somente se, ocorre um dos seguintes casos:*

1. $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$;
2. $n = 2$ e \mathbf{B} é derivadamente equivalente a um dos casos abaixo;
 - (a) $T_m(\mathbf{k})$, em que $2 \leq m \leq 5$,

- (b) $T_2(T_2(\mathbf{k}))$;
3. $n = 3$ e \mathbf{B} é derivadamente equivalente a $T_m(\mathbf{k})$, em que $m = 2$ ou $m = 3$;
 4. $n = 4$ e $\mathbf{B} \cong T_2(\mathbf{k})$;
 5. $n = 5$ e $\mathbf{B} \cong T_2(\mathbf{k})$.

Demonstração. De fato, $T_n(\mathbf{B}) \cong \mathbf{k}A_n \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$.

Inicialmente, supomos que \mathbf{B} não é semissimples. Pelo Teorema Principal, temos os casos:

- (i) $n = 2$ e $\mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}A_m$, em que $2 \leq m \leq 5$;
- (ii) $n = 2$ e $\mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}D_4$;
- (iii) $n = 3$ e $\mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}A_m$, em que $m = 2$ ou $m = 3$;
- (iv) $n = 4$ e $\mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}A_2$;
- (v) $n = 5$ e $\mathbf{B} \simeq_d \mathbf{k}A_2$.

Pelo Corolário 1.34 e os isomorfismos $T_m(\mathbf{k}) \cong \mathbf{k}A_m$, os Casos (iii), (iv), (v), (i) e (ii) são equivalentes aos Casos 3, 4, 5 e os itens (a) e (b) do Caso 2, respectivamente.

Finalmente, se \mathbf{B} é semissimples, então $\mathbf{B} \cong \mathbf{k}$. Portanto, ocorre o Caso 1. □

3.5 Listas das Álgebras $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ Derivadamente Mansas

Pelo Corolário 1.34 e a Proposição 1.35, listamos os pares de álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} do Teorema Principal a menos de isomorfismo nas Tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4. Na Tabela 3.1, listamos os pares de álgebras derivadamente equivalentes as álgebras $\mathbf{k}A_2$ e a $\mathbf{k}A_n$, em que $2 \leq n \leq 4$. Na Tabela 3.2, listamos os pares de álgebras em que uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}A_5$. Na Tabela 3.3, listamos os pares de álgebras em que ambas são derivadamente equivalentes a $\mathbf{k}A_3$. Na Tabela 3.4, listamos os pares de álgebras em que uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}D_4$.

Teorema 6. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} duas \mathbf{k} -álgebras associativas, básicas, conexas, não simples de dimensão finita. A álgebra $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa se, e somente se, o par de álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} é isomorfo a um dos pares de álgebras listados nas Tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4.*

Demonstração. Pelo Teorema Principal, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente mansa se, e somente se, o par de álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} satisfazem um dos seguintes casos:

- (i) uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}A_n$, em que $2 \leq n \leq 4$;
- (ii) uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}A_5$;
- (iii) ambas são derivadamente equivalentes a $\mathbf{k}A_3$;
- (iv) uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}D_4$.

Mas as álgebras dos Casos (i), (ii), (iii) e (iv) são exatamente as álgebras listadas a menos de isomorfismos nas Tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, respectivamente.

□

Corolário 6. *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} duas \mathbf{k} -álgebras associativas, básicas, conexas, não simples de dimensão finita. As afirmações abaixo são equivalentes:*

1. $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente finita.
2. $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente discreta.
3. O par de álgebras \mathbf{A} e \mathbf{B} é isomorfo a um dos pares de álgebras da Tabela 3.1.

Demonstração. Pelo Corolário 2, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ é derivadamente finita se, e somente se, é derivadamente discreta. Além disso, pelo Corolário 1, o produto tensorial de duas álgebras é derivadamente discreto se, e somente se, uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}A_n$, em que $2 \leq n \leq 4$. Mas estas são exatamente as álgebras listadas a menos de isomorfismos na Tabela 3.1.

Portanto, as três afirmações são equivalentes.

□

Tabela 3.1: Uma é derivadamente equivalente a $\mathbf{k}A_2$ e a outra a $\mathbf{k}A_n$, em que $2 \leq n \leq 4$

$1 \text{ — } 2$	$1 \text{ — } 2$	$1 \text{ — } 2$	$1 \text{ — } 2 \text{ — } 3$
$1 \text{ — } 2$	$1 \xrightarrow{\text{---}} 2 \xrightarrow{\text{---}} 3$	$1 \text{ — } 2$	$1 \text{ — } 2 \text{ — } 3 \text{ — } 4$
$1 \text{ — } 2$	$1 \xrightarrow{\text{---}} 2 \xrightarrow{\text{---}} 3 \text{ — } 4$	$1 \text{ — } 2$	$1 \xrightarrow{\text{---}} 2 \xrightarrow{\text{---}} 3 \xrightarrow{\text{---}} 4$
$1 \text{ — } 2$	$1 \text{ — } 2 \xrightarrow{\text{---}} 3 \xrightarrow{\text{---}} 4$	$1 \text{ — } 2$	$1 \xrightarrow{\text{---}} 2 \xrightarrow{\text{---}} 3$ $\begin{array}{c} 4 \\ \\ 2 \end{array}$

Tabela 3.2: Uma é derivadamente equivalente a \mathbf{kA}_2 e a outra a \mathbf{kA}_5

$1 \text{ --- } 2$	$1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 4 \text{ --- } 5$	$1 \text{ --- } 2$	$1 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 2 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 3 \text{ --- } 4 \text{ --- } 5$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \text{ --- } 2 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 3 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 4 \text{ --- } 5$	$1 \text{ --- } 2$	$1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 4 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 5$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 2 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 3 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 4 \text{ --- } 5$	$1 \text{ --- } 2$	$1 \text{ --- } 2 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 3 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 4 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 5$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 2 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 3 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 4 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 5$	$1 \text{ --- } 2$	$1 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 2 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 3 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 4 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 5$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 2 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 3 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 4 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 5$	$1 \text{ --- } 2$	$1 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 2 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 3 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 4 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 5$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \text{ --- } 2 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 3 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 4$ $5 \downarrow$	$1 \text{ --- } 2$	$1 \text{ --- } 2 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 3 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 4$ $5 \downarrow$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 4$ $5 \downarrow$	$1 \text{ --- } 2$	$1 \text{ --- } 2 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 3 \text{ --- } 4$ $5 \uparrow$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \text{ --- } 2 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 3 \text{ --- } 4$ $5 \downarrow$	$1 \text{ --- } 2$	$1 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 2 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 3 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 4$ $5 \uparrow$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 2 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 3 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 4$ $5 \downarrow$	$1 \text{ --- } 2$	$1 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 2 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 3 \text{ --- } 4$ $5 \downarrow$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 2 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 3 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 4$ $5 \uparrow$	$1 \text{ --- } 2$	$1 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 2 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 3 \text{ --- } 4$ $5 \uparrow$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 2 \overset{\curvearrowleft}{\leftarrow} 3 \text{ --- } 4$ $5 \downarrow$	$1 \text{ --- } 2$	$1 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 2 \overset{\curvearrowright}{\rightarrow} 3 \text{ --- } 4$ $5 \downarrow$

Tabela 3.3: Ambas são derivadamente equivalentes a \mathbf{kA}_3

$1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3$	$1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3$
$1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3$	$1 \xrightarrow{\text{---}} 2 \xrightarrow{\text{---}} 3$
$1 \xrightarrow{\text{---}} 2 \xrightarrow{\text{---}} 3$	$1 \xrightarrow{\text{---}} 2 \xrightarrow{\text{---}} 3$

Tabela 3.4: Uma é derivadamente equivalente a \mathbf{kA}_2 e a outra a \mathbf{kD}_4

$1 \text{ --- } 2$	$1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \xrightarrow{\text{---}} 2 \xleftarrow{\text{---}} 3$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \xleftarrow{\text{---}} 2 \xrightarrow{\text{---}} 3$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \xrightarrow{\text{---}} 2$ $1 \downarrow \text{---} 3 \xrightarrow{\text{---}} 4$ $2 \downarrow \text{---} 4$
$1 \text{ --- } 2$	$1 \xrightarrow{\text{---}} 2 \xrightarrow{\text{---}} 3 \xrightarrow{\text{---}} 4$

Referências Bibliográficas

- [AR76] Maurice Auslander and Idun Reiten, *On the representation type of triangular matrix rings*, J. London Math. Soc. (2) **12** (1975/76), no. 3, 371–382. MR 0399174
- [AS88] Ibrahim Assem and Andrzej Skowroński, *Algebras with cycle-finite derived categories*, Math. Ann. **280** (1988), no. 3, 441–463. MR 936322
- [Ass99] Ibrahim Assem, *Simply connected algebras*, Resenhas **4** (1999), no. 2, 93–125. MR 1751552
- [ASS06] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, Techniques of representation theory. MR 2197389
- [Bar15] Michael Barot, *Introduction to the representation theory of algebras*, Springer, Cham, 2015. MR 3309698
- [BBD82] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, pp. 5–171. MR 751966
- [BBdIPn00] Michael Barot, Thomas Brüstle, and José Antonio de la Peña, *Derived-tame tree algebras of type E*, Forum Math. **12** (2000), no. 6, 713–721. MR 1790110
- [BD77] V. M. Bondarenko and Yu. A. Drozd, *The representation type of finite groups*, Zap. Nauv. cn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **71** (1977), 24–41, 282, Modules and representations. MR 0472984
- [BD03] Viktor Bekkert and Yuriy Drozd, *Tame-wild dichotomy for derived categories*, arXiv:math/0310352 (2003).
- [BD09] ———, *Derived categories for algebras with radical square zero*, Algebras, representations and applications, Contemp. Math., vol. 483, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 55–62. MR 2497950
- [BDF09] Viktor Bekkert, Yuriy Drozd, and Vyacheslav Futorny, *Derived tame local and two-point algebras*, J. Algebra **322** (2009), no. 7, 2433–2448. MR 2553688

- [Bon80] Klaus Bongartz, *Zykellose Algebren sind nicht zügellos*, Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), Lecture Notes in Math., vol. 832, Springer, Berlin, 1980, pp. 97–102. MR 607150
- [Bre71] Sheila Brenner, *Large indecomposable modules over a ring of 2×2 triangular matrices*, Bull. London Math. Soc. **3** (1971), 333–336. MR 0294386
- [Bru01] Thomas Brustle, *Derived-tame tree algebras*, Compositio Math. **129** (2001), no. 3, 301–323. MR 1868357
- [Cas05] Diane Castonguay, *Derived-tame blowing-up of tree algebras*, J. Algebra **289** (2005), no. 1, 20–41. MR 2139090
- [DF73] Peter Donovan and Mary Ruth Freislich, *The representation theory of finite graphs and associated algebras*, Carleton University, Ottawa, Ont., 1973, Carleton Mathematical Lecture Notes, No. 5. MR 0357233
- [dlPn98] J. A. de la Peña, *Algebras whose derived category is tame*, Trends in the representation theory of finite-dimensional algebras (Seattle, WA, 1997), Contemp. Math., vol. 229, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 117–127. MR 1676214
- [Dro79] Yu. A. Drozd, *Tame and wild matrix problems*, Representations and quadratic forms (Russian), Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 1979, pp. 39–74, 154. MR 600111
- [Erd90] Karin Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1428, Springer-Verlag, Berlin, 1990. MR 1064107
- [Fre16] Adriana Xavier Freitas, *álgebras derivadamente mansas com três módulos simples*, Ph.D. thesis, UFMG, 2016.
- [Gab72] Peter Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen. I*, Manuscripta Math. **6** (1972), 71–103; correction, *ibid.* **6** (1972), 309. MR 0332887
- [GK02] Christof Geiß and Henning Krause, *On the notion of derived tameness*, J. Algebra Appl. **1** (2002), no. 2, 133–157. MR 1913081
- [GL87] Werner Geigle and Helmut Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras*, Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1273, Springer, Berlin, 1987, pp. 265–297. MR 915180
- [GL91] ———, *Perpendicular categories with applications to representations and sheaves*, J. Algebra **144** (1991), no. 2, 273–343. MR 1140607
- [GM09] Hernán Giraldo and Héctor Merklen, *Irreducible morphisms of categories of complexes*, J. Algebra **321** (2009), no. 10, 2716–2736. MR 2512623

- [Gro57] Alexander Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. (2) **9** (1957), 119–221. MR 0102537
- [Hap88] Dieter Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 119, Cambridge University Press, Cambridge, 1988. MR 935124
- [Hap01] ———, *A characterization of hereditary categories with tilting object*, Invent. Math. **144** (2001), no. 2, 381–398. MR 1827736
- [Har66] Robin Hartshorne, *Residues and duality*, Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966. MR 0222093
- [Hig54] D. G. Higman, *Indecomposable representations at characteristic p* , Duke Math. J. **21** (1954), 377–381. MR 0067896
- [HR86] Dieter Happel and Claus Michael Ringel, *The derived category of a tubular algebra*, Representation theory, I (Ottawa, Ont., 1984), Lecture Notes in Math., vol. 1177, Springer, Berlin, 1986, pp. 156–180. MR 842465
- [HS10] Dieter Happel and Uwe Seidel, *Piecewise hereditary Nakayama algebras*, Algebr. Represent. Theory **13** (2010), no. 6, 693–704. MR 2736030 (2011k:16032)
- [Ive86] Birger Iversen, *Cohomology of sheaves*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1986. MR 842190
- [Kel91] Bernhard Keller, *Algèbres héréditaires par morceaux de type D_n* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** (1991), no. 7, 483–486. MR 1099676
- [KZ98] Steffen König and Alexander Zimmermann, *Derived equivalences for group rings*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1685, Springer-Verlag, Berlin, 1998, With contributions by Bernhard Keller, Markus Linckelmann, Jeremy Rickard and Raphaël Rouquier. MR 1649837
- [Lad08] Sefi Ladkani, *Which canonical algebras are derived equivalent to incidence algebras of posets?*, Comm. Algebra **36** (2008), no. 12, 4599–4606. MR 2473349
- [Lad13] ———, *On derived equivalences of lines, rectangles and triangles*, J. Lond. Math. Soc. (2) **87** (2013), no. 1, 157–176. MR 3022711
- [Len99] Helmut Lenzing, *Coxeter transformations associated with finite-dimensional algebras*, Computational methods for representations of groups and algebras (Essen, 1997), Progr. Math., vol. 173, Birkhäuser, Basel, 1999, pp. 287–308. MR 1714618
- [Les94] Zbigniew Leszczyński, *On the representation type of tensor product algebras*, Fund. Math. **144** (1994), no. 2, 143–161. MR 1273693

- [LS00] Zbigniew Leszczyński and Andrzej Skowroński, *Tame triangular matrix algebras*, Colloq. Math. **86** (2000), no. 2, 259–303. MR 1808681
- [LS03] ———, *Tame tensor products of algebras*, Colloq. Math. **98** (2003), no. 1, 125–145. MR 2032076
- [Mor58] Kiiti Morita, *Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A **6** (1958), 83–142. MR 0096700
- [MS83] Hagen Meltzer and Andrzej Skowroński, *Group algebras of finite representation type*, Math. Z. **182** (1983), no. 1, 129–148. MR 686893
- [MS84] ———, *Correction to: “Group algebras of finite representation type” [Math. Z. **182** (1983), no. 1, 129–148; MR0686893 (84d:16028)]*, Math. Z. **187** (1984), no. 4, 563–569. MR 760056
- [Naz67] L. A. Nazarova, *Representations of a tetrad*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **31** (1967), 1361–1378. MR 0223352
- [Pic10] Rogério Picanço, *Morfismos irredutíveis na categoria derivada de álgebras gentle*, Ph.D. thesis, UFMG, 2010.
- [Ric89] Jeremy Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), no. 3, 436–456. MR 1002456 (91b:18012)
- [Ric91] ———, *Derived equivalences as derived functors*, Journal of the London Mathematical Society **s2-43** (1991), no. 1, 37–48.
- [Rin84] Claus Michael Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1099, Springer-Verlag, Berlin, 1984. MR 774589
- [Rin90] ———, *The canonical algebras*, Topics in algebra, Part 1 (Warsaw, 1988), Banach Center Publ., vol. 26, PWN, Warsaw, 1990, With an appendix by William Crawley-Boevey, pp. 407–432. MR 1171247
- [Sko87] Andrzej Skowroński, *Group algebras of polynomial growth*, Manuscripta Math. **59** (1987), no. 4, 499–516. MR 916000
- [SS07] Daniel Simson and Andrzej Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 3*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 72, Cambridge University Press, Cambridge, 2007, Representation-infinite tilted algebras. MR 2382332
- [Thr47] Robert M Thrall, *On ahdir algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), no. 1, 49–50. MR 1564910
- [Vos01] Dieter Vossieck, *The algebras with discrete derived category*, J. Algebra **243** (2001), no. 1, 168–176. MR 1851659

Índice Remissivo

- add(P^\bullet), 28
- álgebra
 - $\mathbf{k}A_n$, 16
 - $\mathbf{k}D_n$, 16
 - $\mathbf{k}E_6$, 16
 - $\mathbf{k}E_8$, 16
 - canônica, 37
 - de caminhos, 9
 - de representação finita, 12
 - de representação infinita, 12
 - semicadeia, 42
 - de matrizes triangulares inferiores, 9
 - de quiver com relações, 9
 - derivadamente equivalentes, 27
 - do tipo árvore, 10
 - do tipo Dynkin, 16
 - do tipo Dynkin estendidos, 16
 - hereditária, 10
 - hereditária por partes, 36
 - do tipo Q , 36
 - Kronecker, 9
 - mansa, 12
 - Nakayama, 19
 - selvagem, 12
 - simplesmente conexa, 23
 - três-Kronecker, 9
- Axioma do Octaedro, 25
- caminho, 8
 - comprimento, 8
 - trivial ou estacionário, 8
- categoria
 - derivadamente equivalentes, 27
 - derivada, 26
 - dos feixes coerentes, 38
 - homotópica, 26
 - das representações de dimensão finita de
 - um quiver, 11
 - das representações de um quiver, 11
 - minimal, 27
 - triangulada, 25
 - ciclo, 8
 - ciclo não orientado, 8
 - cohomologia, 26
 - cohomologia limitada, 26
 - complexo, 25
 - cone, 26
 - limitado, 25
 - limitado inferiormente, 25
 - limitado superiormente, 25
 - inclinante, 27
 - minimal, 27
 - stalk, 25
 - dimensão cohomológica, 38
 - elemento canônico, 38
 - equivalência triangulada, 25
 - equivalentes como categorias trianguladas, 25
 - flecha, 7
 - funtor cohomologia, 26
 - funtor exato, 25
 - funtor translação, 23
 - gera como categoria triangulada, 25
 - grupo
 - quatérnios, 3, 20, 73
 - cíclico, 19
 - diedral, 3, 19, 73
 - semidiedral, 3, 19, 73
 - hereditária por partes do tipo feixe, 36
 - homotópico a zero, 26
 - homotopicamente equivalentes, 26
 - ideal
 - admissível, 9

- de flechas, 9
- isomorfismo de triângulos, 24
- laço, 8
- morfismo de complexos, 25
- morfismo de triângulos, 24
- morfismo entre representações, 10
- Morita equivalentes, 27

- passeio, 8
- presentação, 10
- produto tensorial
 - entre quivers com relações, 17

- quase isomorfismo, 26
- quiver, 7
 - árvore, 8
 - conexo, 8
 - de Gabriel, 10
 - finito, 8
 - acíclico, 8
 - com relações, 9
 - grafo ou grafo subjacente, 16
 - Kronecker, 9
 - três-Kronecker, 9

- relação, 9
- representação de um quiver, 10
 - com relações, 11
 - dimensão, 10
 - dimensão finita, 10
 - indecomponível, 11
 - satisfaz relações, 11
- reta projetiva com pesos, 38

- sequência de parâmetros, 38
- sequência de pesos, 38

- Teorema de Rickard, 28
- tipos de representação, 12
 - finita, 12
 - infinita, 12
 - mansa, 12
 - selvagem, 12
- tipos de representação derivada
 - derivadamente discreta, 39
 - derivadamente finita, 39
 - derivadamente mansa, 39
 - derivadamente selvagem, 39
- triângulo, 23
- triângulos distinguidos, 24
- triangulação, 24

- vértice, 7
- vértices
 - vizinhos, 7