Universidade Federal de Minas Gerais
Pós-Graduação
Doutorado em Matemática

Pedro Belchior

Existência, Regularidade e Decaimento de Soluções para uma Classe de Problemas Elípticos envolvendo os operadores Laplaciano Fracionário e *p*-Laplaciano Fracionário

Belo Horizonte
2017

Pedro Belchior

Existência, Regularidade e Decaimento de Soluções para uma Classe de Problemas Elípticos envolvendo os operadores Laplaciano Fracionário e p-Laplaciano Fracionário

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática, área de concentração : Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Hamilton Prado Bueno - (UFMG)
Co-orientador: Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki - (UFJF)

Belo Horizonte
2017

ATA DA CENTÉSIMA TERCEIRA DEFESA DE TESE DO ALUNO PEDRO BELCHIOR, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 11 DE DEZEMBRO DE 2017.

Aos onze dias do mês de dezembro de 2017, às 14h00, na sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese do aluno **Pedro Belchior**, intitulada: "*Existência, Regularidade e Decaimento de Soluções para uma Classe de Problemas Elípticos Envolvendo os Operadores Laplaciano Fracionário e p-Laplaciano Fracionário*", requisito final para obtenção do Grau de doutor em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Hamilton Prado Bueno, após dar conhecimento aos presentes o teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 11 de dezembro de 2017.

PROF. DR. HAMILTON PRADO BUENO
Orientador (UFMG)

PROF. DR. EDCARLOS DOMINGOS DA SILVA
Examinador (UFG)

DR. GILBERTO DE ASSIS PEREIRA
Examinador (UFMG)

PROF. DR. GREY ERCOLE
Examinador (UFMG)

PROF. DR. PAULO CÉSAR CARRIÃO
Examinador (UFMG)

PROF. DR. RICARDO RUVIARO
Examinador (UnB)

CONFERE COM O ORIGINAL
Belo Horizonte, 11/12/17
Deptº. de Matemática / ICEx / UFMG

Eliane Andréa Barbosa
Secretária do Programa de Pós-Graduação em Matemática - ICEx/UFMG
SIAPE: 0318139

AGRADECIMENTOS

A conquista do grau de Doutor não veio somente por mim. Muitas pessoas trabalharam no processo.Algumas passaram pela minha vida e outras ainda estão nela e outras jamais sairão dela. As vezes um simples conselho, uma palavra de apoio, ajuda financeira, uma oportunidade de tentar de novo e de novo, um simples olhar ou até mesmo uma mão estendida quando tudo parecia perdido. Como um grande edifício não é constituído apenas por tijolos, esta Tese não é o resultado apenas de uma pesquisa. É uma composição do raciocínio lógico-dedutivo, com envolvimento emocional e com elevação espiritual. Um profundo mergulho de corpo, alma e mente na abstração, resultando em uma obra que, nunca poderá ser considerada de uma pessoa só. Todas estas pessoas foram a razão para que tudo chegasse ao término com a satisfação do dever cumprido. Chegou o momento de agradecê-las.

- Primeiramente a Deus, que mesmo não vendo-o ou tocando-o, pude senti-lo, antes, durante e no término deste curso. Principalmente nos momentos difíceis. E foram muitos. Quase a ponto de não resistir. Porém sempre a mão amiga do Pai celestial manifestava em situações muito sutis que revigoravam-me o ânimo e permitiam-me seguir em frente.

- Ao meu orientador, Professor Doutor Hamilton Prado Bueno que, com muita paciência e extrema dedicação conseguiu conduzir-me na execução deste trabalho, tendo da minha parte, profunda admiração pela pessoa que é, como cientista matemático, professor e pessoa humana. Com liderança e perseverança não desistiu de mim. Obrigado professor.

- Ao meu co-orientador, Professor Doutor Olimpio Hiroshi Miyagaki que com muita experiência, competência e principalmente grande conhecimento, mostrou o caminho a percorrer.

- Ao meu amigo Doutor Gilberto de Assis Pereira, que trabalhou conosco na pesquisa de dois artigos que favoreceram na construção desta Tese. Seu trabalho amigo, foi a pedra angular que deu sustentabilidade e motivação para que eu não sucumbisse ao declínio da desistência. A você meu muito obrigado.

- Aos professores, pesquisadores que compuseram a banca: Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva, Prof. Dr. Grey Ercole, Prof. Dr. Paulo César Carrião e Prof. Dr. Ricardo Ruviaro. Agradeço a todos pelas riquíssimas contribuições, sugestões e as correções que refinaram mais ainda este trabalho.

- A CAPES pelo apoio financeiro

- A minha amiga advogada, Maria Diná Gonçalves que, carinhosamente voluntariou-se na revisão ortográfica do texto. Muito obrigado minha cara amiga. Sempre é tempo para se aprender. E através de nossas conversas durante a revisão, aprendi muito.

- As funcionárias da secretaria, Andréa e Kely. Em momentos de tensão, correria e muitas coisas para fazer é muito importante ter pessoas por perto que mantem tudo organizado. Obrigado minhas estimadas amigas. Além da amizade que conquistamos, vocês trabalharam com excelência e sempre atenderam-me com presteza e amabilidade.

- A Dna Ester e Sr Rubens. Ofereceram-me abrigo, segurança, conforto e tranquilidade em seu lar. Isto são os pre requisitos fundamentais para se ter uma boa pesquisa. A vocês meu muito obrigado.

- Minha esposa, Renata Passos Martins que transmitiu-me tanto carinho e compreensão. Na verdade você, minha querida companheira, foi realmente meu alicerce. No último semestre ante a conclusão deste trabalho, tive que abandoná-la, com muito pesar, e você foi muito compreensiva além de auxiliar-me com palavras de apoio e de muita coragem. Essa conquista é sua também. Gostaria muito de agradecê-la.

- Minhas irmãs Soraia, Simone e Silma por terem suportado minha ausência durante todo o processo e principalmente no último semestre, mesmo assim enviando muitas energias positivas, orações e palavras de encorajamento. A vocês meu muito obrigado

- Minha tia Lea que esteve presente na defesa representando meu pai. Tia, isto significou muito para mim. A você meu muito obrigado.

- Minha mãezinha. Eu lamento muito você não ter conseguido chegar até aqui. Mas eu gostaria de expressar-lhe meu mais profundo sentimento de gratidão. A pessoa que me tornei tem raízes bem fundamentadas em seus ensinamentos. Você construiu valores que estão consolidados em minha alma. A alegria de viver foi o seu lema. E esse é o seu legado em minha vida. Eu sou continuação do seu sorriso e da sua respiração.

- E finalmente gostaria de agradecer a ele, o idealizador de todo esse processo: Meu pai Luigi Belchior. Seu sonho fora ver-me estudado. Sempre dedicou toda sua energia a ensinar-me e educar-me nesta filosofia. E a conclusão do doutorado é também a conclusão do trabalho dele. Papai gostaria de dizer que: seu filho tocou as estrelas, não que eu seja grande pra isso, é porque estou apoiado em ombros de gigantes e você foi um deles. Obrigado por dar significado e sentido a minha vida, a única coisa que você não me ensinou foi como te esquecer. Dedico-lhe a honra desta conquista. Agora você pode descansar. Sua missão está cumprida.

RESUMO

Neste trabalho usou-se o método da Variedade de Nehari para se obter através do Teorema do Passo da Montanha, sem a condição de Palais Smaile, soluções de energia mínima para os seguintes problemas elípticos em $\mathbb{R}^N$:

$$\sqrt{-\Delta + m^2}\, u + Vu = [W * F(u)]\, f(u) \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N$$

$$(-\Delta_p)^s u + A|u|^{p-2}u \;=\; \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

para certas condições da função f. Além disso, estudou-se a regularidade da solução encontrada bem como o decaimento exponencial e polinomial dos problemas supra citados respectivamente.

Palavras chave: Energia Mínima, Passo da Montanha, variedade de Nehari, decaimento exponencial, decaimento polinomial.

ABSTRACT

In this work the Nehari manifold method was used to obtain through the Mountain Pass Theorem, without the condition of Palais Smaile, ground state solutions for the following elliptic problems in $\mathbb{R}^N$:

$$\sqrt{-\Delta + m^2}\, u + Vu = [W * F(u)]\, f(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N$$

$$(-\Delta_p)^s u + A|u|^{p-2}u \quad = \quad \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

for certain conditions of the f function. In addition, we studied the regularity of the solution found as well as the exponential and polynomial decay of the abovementioned problems respectively.

Key Words: Ground state, Mountain Pass, Nehari manifold, exponential decay, polynomial decay.

Sumário

Introdução **12**

1 Solução Positiva de Energia Mínima Para a Equação Pseudo-relativística de Hartree **21**

1.1 Colocação do Problema 21
1.2 Formulação Variacional 23
1.3 Resultados Preliminares 27
1.4 Formulação Fraca 31
1.5 A Geometria do Passo da Montanha 34
1.6 A Variedade de Nehari 37
1.7 A Sequência Minimizante 42
1.8 Estudo da Regularidade da Solução 49
1.9 Decaimento Exponencial 61

2 Alguns resultados sobre uma equação de Choquard fracionária **69**

2.1 Colocação do Problema 69
2.2 Preliminares 72
2.3 Demonstração do Teorema 2.1.2 76
2.4 Demonstração do Teorema 2.1.3 82
2.5 Demonstração do Teorema 2.1.4 86

A Resultados Básicos **89**

A.1 Consequências das Hipóteses 89
A.2 Operador Traço 91
A.3 Resultados complementares 91

B O funcional energia e o termo de convolução **97**

B.1 O termo de convolução 97
B.2 Diferenciabilidade de I 101

C Resultados Complementares **106**

Introdução

Esse trabalho nasceu após as leituras de alguns dos artigos de Silvia Cingolani e Simone Secchi, dentre eles o de maior relevância [16]. Em seu artigo estudou-se a existência de uma solução de energia mínima para a equação:

$$\sqrt{-\Delta + m^2}\, u + V(y)u = \left[W * u^\theta\right] |u|^{\theta-2}u \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

Foi levantada a possibilidade de generalização do termo de convolução da equação acima para a elaboração do projeto desta Tese. Naturalmente, alguns questionamentos nortearam a formulação do novo problema, hipóteses necessárias, exemplos, resultados almejados e técnicas a serem adotadas. Foi então que estudou-se o artigo de Coti Zelati e Nolasco [18] cuja proposta atendia as necessidades do projeto em construção e abriu caminho para o desenvolvimento do trabalho. No entanto, a ausência da condição de compacidade era um desafio, pois estava-se trabalhando em domínio ilimitado. Foram estudados outros textos em busca de respostas neste sentido. Um destes trabalhos foi o artigo de Alves e Yang [2] que proporcionou um amadurecimento das ideias iniciais. O artigo de Alves e Yang, essencialmente, trata, em sua primeira parte da existência, regularidade e decaimento polinomial para a equação

$$-\Delta_p u + A|u|^{p-2}u \;=\; \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

o que, para os propósitos deste trabalho, serviu de grande motivação. Analisando este texto, obteve-se várias técnicas importantes e muito interessantes, que se adaptariam ao problema trabalhado inicialmente. No entanto, o estudo desse artigo possibilitou generalizar a equação (2) no contexto do operador p-Laplaciano fracionário, adaptando-se as mesmas técnicas e resultados semelhantes. Neste ponto, teve-se um resultado expressivo e de grande importância: esse trabalho foi submetido, aceito e publicado na revista Nonlinear Anal. **164** (2017), 38-53 com o título:

Remarks about a fractional Choquard equation: Ground state, regularity and polynomial *decay [5]*.

Com mais experiência e embalado pelo trabalho publicado, retornou-se ao problema inicial, aplicando-se e adaptando-se as técnicas que se aprendeu no artigo supra citado. Obteve-se, então, resultados significativos além do que se propunha no começo. Elaborou-se o projeto e sua execução resultou na Tese em questão. O Trabalho foi organizado em duas partes, relacionadas, porém, distintas.

O primeiro capítulo trata de uma equação pseudo-relativística de Hartree, enquanto o segundo capítulo estuda uma equação de Choquard no contexto do operador p-Laplaciano fracionário. Falar-se-á um pouco sobre cada um deles:

O **Capítulo 1** trata da equação pseudo-relativística de Hartree, dada por:

$$\sqrt{-\Delta + m^2}\, u + V(y)u = [W * F(u)]\, f(u) \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N \tag{3}$$

em que $N \geq 2$, $F(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$ e $W * F(u)$ denota a convolução das funções W e $F(u)$, assumindo que a não linearidade f seja uma função de classe C^1, não negativa em $[0, \infty)$, satisfazendo:

(f1) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{|f(t)|}{t} = 0$;

(f2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^{\theta-1}} = 0$ em que $2 < \theta < \frac{2N}{N-1} = 2^\sharp$

(f3) $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$, é crescente $\forall\, t > 0$.

Além disso postularemos:

(V) $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é função limitada e $V(y) + V_0 \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^N$ e algum $V_0 \in (0, m)$.

(W_h) $0 \leq W = W_1 + W_2 \in L^r(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é radial com $r > \frac{N}{N(2-\theta)+\theta}$.

Para mostrar a existência de uma solução positiva de energia mínima, substituiremos a hipótese **(V)** pela hipótese

(V′) $V(y) = V_1 \in (0, m)$ é uma constante.

O problema (3) foi muito estudado. Serão narrados aqui apenas aqueles trabalhos utilizados como referências básicas em nesse texto.

A principal referência foi o artigo de Coti-Zelati e Nolasco [18], no qual a equação

$$\sqrt{-\Delta + m^2}\, u = \mu u + \nu |u|^{p-2}u + \sigma(W * u^2)u$$

é considerada com constantes $\mu < m$ e $\nu, \sigma \geq 0$ (não simultaneamente nulas) e a função $W \in L^r(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $r > N/2$ satisfazendo $W(|x|) \to 0$ quando $|x| \to \infty$.[1]

Essa equação é tratada no contexto variacional, utilizando a sua transformação em um problema com condições de fronteira de Neumann, como no célebre texto de Caffarelli e Silvestre [12].

$$\begin{cases} -\Delta v + m^2 v &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^{N+1}_+ \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x}(0,y) &= \mu u + \nu |u|^{p-2}u + \sigma(W * u^2)u \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{4}$$

No trabalho de Coti-Zelati e Nolasco provou-se a existência de solução *positiva* de energia mínima para aquela equação. Além disso, mostraram que suas soluções u pertencem a $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, são *radialmente simétricas* e possuem um decaimento exponencial.

O passo seguinte foi dado no artigo de Cingolani e Secchi [16], também uma referência básica para esse trabalho, em que a equação

$$\sqrt{-\Delta + m^2}\, u + Vu = \left(W * u^\theta\right) |u|^{\theta-2}u,$$

é considerada com um potencial *contínuo* $V(y)$, satisfazendo a hipótese **(V)** e, adicionalmente, a existência de $R > 0$ e $k \in (0, 2m)$ tais que

$$V(y) \leq V_\infty - e^{-kx}, \quad \forall\, |y| \geq R,$$

em que $V_\infty = \liminf_{|y|\to\infty} V(y) > 0$. Como em Coti-Zelati e Nolasco, supõe-se que $W \in L^r(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $W(|x|) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, agora com $r > N/[N(2-\theta) + \theta]$, para $2 \leq \theta < 2^\sharp = 2N/(N-1)$.

Assim, nossas hipóteses sobre W são basicamente as mesmas de Cingolani e Secchi, mas sem supor o decaimento assintótico de W ou a continuidade de $V(y)$.

Em Cingolani e Secchi, a existência de uma solução *positiva* de energia mínima é feita relacionando os problemas com V variável e o problema com $V(y) = V_\infty$. Naquele artigo, também se transformou a equação em um problema no $\mathbb{R}^{N+1}_+$ com condições de fronteira de Neumann; a existência de uma solução positiva $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^N)$ é *provada*, mas os autores mencionam que argumentos similares aos de Coti-Zelati e Nolasco permitem obter uma solução de classe C^∞ com decaimento exponencial, no caso em que a hipótese **(V)** é substituída pela hipótese **(V')**, com V_1 substituído por V_∞.

A *homogeneidade* do termo de convolução desempenha um papel fundamental no tratamento utilizado: veja o Lema 3.1 daquele artigo e também a equação destacada

[1] Comparando com nossas hipóteses, a diferença no sinal do termo μu é compensada ao se considerar o funcional "energia".

após (4.8) naquele texto.

Nessa Tese foi generalizado o termo de convolução, sem exigir sua homogeneidade, mas assumiu-se que a não linearidade f satisfaça a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

Assim, sob as hipóteses **(f1), (f2),(f3), (V')** e (W_h), mostrou-se a existência de uma solução de energia mínima de (3). Assumindo **(f1), (f2), (V)** e (W_h), obteve-se a regularidade de soluções fracas de (3). E admitindo **(f1), (f2), (V)** e (W_h), conclui-se o decaimento exponencial de qualquer solução *positiva* desse problema. Não foi assumido que o potencial $V(y)$ seja contínuo ou que tenha um comportamento assintótico como aquele previsto no artigo de Cingolani e Secchi.

Assim, as contribuições do Capítulo 1 desta Tese podem ser resumidas da seguinte maneira:

- demonstração da regularidade das soluções de (3) sob condições bem mais gerais do que aquelas tratadas anteriormente.

  A principal dificuldade para se adaptar a demonstração apresentada por Coti Zelati e Nolasco ocorreu no tratamento do termo de convolução levando, principalmente, em conta que não se dispunha da homogeneidade assumida no artigo de Cingolani e Secchi. Resolvida essa questão, adaptou-se o roteiro apresentado por Coti Zelati e Nolasco, mas as condições mais gerais satisfeitas pelo potencial $V(y)$ exigiram a aplicação de resultados mais profundos de regularidade elíptica.

- demonstração do decaimento exponencial da solução positiva de estado fundamental sob hipóteses mais gerais.

  A demonstração do Teorema 1.9.1 dessa Tese sanou pontos obscuros no artigo de Coti Zelati e Nolasco. Além disso, graças à hipótese **(f1)**, a exigência $W(|x|) \to 0$ quando $|x| \to \infty$ pode ser retirada.

- simplificação de várias demonstrações apresentadas nos artigos de Coti Zelati e Nolasco [18] e Cingolani e Secchi [16], adaptando técnicas semelhantes àquelas do artigo de Alves e Yang [2].

Em suma, essa Tese generaliza completamente os resultados de Coti Zelati e Nolasco, no que concerne a regularidade de soluções fracas de (3) e decaimento exponencial de sua solução positiva de energia mínima. É fácil verificar que a demonstração que foi apresentada para a existência de uma solução de energia mínima também mostrou esse resultado no caso do problema estudado por Coti Zelati e Nolasco.

Tomando $f(t) = t\ln(1+t)$, $t > 0$, tem-se um exemplo que generaliza Coti Zelati e Nolasco. Observe que f satisfaz **(f1), (f2)** e **(f3)**.

A principal ausência neste trabalho é a demonstração da existência de uma solução positiva de energia mínima no caso geral da hipótese **(V)** ser satisfeita.

Apesar de ter sido enunciada a existência de uma solução de energia mínima quando $V(y) \equiv V_1 \in (0, m)$, a demonstração apresentada do Teorema 1.7.7 admite uma generalização imediata, se for assumido que, para $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^N$, o potencial V seja 1 periódico em y_i. Não é difícil verificar que os passos utilizados por Willem [56, Seção 6.4] são satisfeitos: o termo de convolução, nessa Tese, satisfaz as condições de periodicidade exigidas naquela seção do livro de Willem.

Conseguiram-se resultados promissores na direção de obter uma solução positiva de energia mínima no caso da hipótese **(V)** ser satisfeita, mas ainda não se obteve uma demonstração completa.

Sumarizar-se-á, agora, o ordenamento e métodos aplicados no Capítulo 1, ao tratar da equação de Hartree.

Na Seção 1.1 introduziu-se a equação pseudo-relativística de Hartree e foram estabelecidas as hipóteses sobre os termos dessa equação. Em seguida, foram dados exemplos de funções satisfazendo essas hipóteses. (Note que o Exemplo 1.1.3 apresenta uma função W satisfazendo $(\boldsymbol{W_h})$, mas não as hipóteses estabelecidas por Coti Zelati e Nolasco [18] ou Cingolani e Secchi [16].)

A Seção 1.2 apresenta uma formulação variacional do problema (3), por meio de uma transformação do problema de Dirichlet original em um problema de Neumann no espaço $\mathbb{R}^{N+1}_+$, como pode-se ver em Cabré e Solà-Morales [10] e também em Caffarelli e Silvestre [12]. Também são introduzidos os espaços adequados ao tratamento do problema variacional, bem como as imersões que serão utilizadas no decorrer dessa Tese.

Resultados preliminares são expostos na Seção 1.3, onde a desigualdade de Hausdorff-Young é enunciada e são estabelecidas algumas desigualdades que assumirão grande importância quando da demonstração da regularidade das soluções fracas de (3).

A Seção 1.4 introduz o funcional energia e mostra sua boa definição, ao utilizar a desigualdade de Lieb. (A diferenciabilidade do funcional energia é provada no Apêndice B.)

A Seção 1.5 mostra que o funcional energia satisfaz a *geometria* do Passo da Montanha, isto é, que satisfaz as condições geométricas estabelecidas no Teorema do Passo da Montanha, mas sem provar a condição de Palais-Smale. Dessa forma, obtêm-se uma sequência minimizante.

Para contornar as dificuldades relacionadas com a demonstração da condição de Palais-Smale, é introduzida a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ na Seção 1.6. Mostra-se também que esse conjunto é uma superfície *fechada* de codimensão 1 em $\mathbb{R}^{N+1}_+$. A geometria da variedade de Nehari é apresentada, bem como é mostrado que uma sequência minimizante na variedade de Nehari $\mathcal{N}$ corresponde ao nível mínimo de energia dado pela geometria do Passo da Montanha.

A Seção 1.7 prova, utilizando a hipótese **(V′)** ao invés da hipótese **(V)**, a existência de uma solução positiva de energia mínima para o problema (3). A demonstração apresentada simplifica os métodos utilizados em nossas referências básicas [16] e [18]. Como anteriormente mencionado, espera-se generalizar esse resultado e obter uma solução utilizando a hipótese **(V)**.

A regularidade das soluções fracas do problema (3) é mostrada na Seção 1.8 sob a hipótese **(V)**. O caminho clássico é utilizado: mostra-se que o traço $\gamma(v)$ da solução $v \in \mathbb{R}^{N+1}_+$ pertence a $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2,\infty)$ utilizando uma argumentação de *bootstrap*. Em seguida, utilizando iteração de Moser, mostra-se que $\gamma(v) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e daí obtêm-se que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$. A teoria de regularidade elíptica então possibilita a conclusão que $v \in C^\alpha([0,\infty) \times \mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

A Seção 1.9 estabelece o decaimento exponencial de uma solução positiva de energia mínima do problema (3) (sob a hipótese **(V)**). Começa esclarecendo uma afirmação do artigo de Coti Zelati e Nolasco, ao apresentar uma demonstração de que pontos críticos do funcional energia para condição de fronteira de Neumann dada por uma função h genérica satisfazem $|v(x,y)|e^{\lambda x} \to 0$ quando $x + |y| \to \infty$ para qualquer $\lambda < m$. Em seguida, passa-se a estudar o decaimento exponencial da solução de energia mínima do problema (3). Para isso, define uma função auxiliar, f_R que satisfaz o decaimento previsto para a solução de energia mínima. Estabelece-se o decaimento desejado, ao compará-la com a solução de energia mínima quando aplica-se a desigualdade de Harnack, Princípio do Máximo e Lema de Hopf.

O **Capítulo 2** estuda a equação de Choquard

$$(-\Delta_p)^s u + A|u|^{p-2}u \quad = \quad \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{5}$$

sendo A uma constante positiva, $0 < \mu < N$, $F(t) = \int_0^t f(r)\mathrm{d}r$, com $(-\Delta_p)^s$ denotando o operador (s,p)-Laplaciano fracionário, definido por

$$(-\Delta_p)^s u(x) = 2 \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}\,\mathrm{d}y.$$

Assume-se que f seja uma função de classe C^1, positiva em $(0,\infty)$, satisfazendo:

(f1) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{|f(t)|}{t^{p-1}} = 0$;

(f2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0$ para algum $p < q < \frac{p_s^*}{2}\left(2 - \frac{\mu}{N}\right)$, em que

$$p_s^* = \frac{Np}{N-sp} \;\text{ se }\; sp < N; \tag{6}$$

(f3) $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t^{p-1}}$ é crescente para todo $t > 0$.

Observa-se que a equação (5), desconsiderando a introdução do operador p-Laplaciano fracionário, pode ser vista como uma simplificação da equação (3), cujo estudo foi posterior ao apresentado no Capítulo 2.

Os resultados obtidos nesse capítulo resultaram na publicação do artigo [5], que tem como referências principais Brasco, Mosconi and Squassina [6] e Alves e Yang [2]. Um resultado fundamental de regularidade foi provado por Brasco e Parini [7, Theorem 3.8, Theorem 3.13] veja também Iannizzotto, Mosconi e Squassina [29]; o resultado de continuidade originalmente provado em Kuusi, Mingione e Sire [31] foi livremente utilizado.

Convém salientar que esse trabalho no que tange ao Capítulo 2 é significativo: provou-se a existência de uma solução positiva de energia mínima, a regularidade de soluções fracas do problema e o decaimento "polinomial" da solução de energia mínima.

Uma recapitulação de resultados relacionados com a equação de Choquard (5) é apresentada no Capítulo 2. Aqui, salientam-se apenas as contribuições mais diretamente relacionadas com esse trabalho, em particular no que diz respeito ao decaimento de soluções. Para isso, começa-se por considerar o problema

$$\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(u) \quad \text{no } \mathbb{R}^N,$$

com $1 < p < N$, $p^* = Np/(N-p)$ e f satisfazendo

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(t)|}{|t|^p} = 0;$$

(f_2) existe uma constante $b \geq 0$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|f(t)|}{|t|^{p^*-1}} = b.$$

De acordo com resultados provados por Gong Bao Li e Shu Sen Yan [33], a solução u tem decaimento exponencial:

$$|u(x)| \leq Ce^{-\mu|x|}, \quad \forall\, |x| > R,$$

em que $C, \mu, R > 0$ são constantes.

O decaimento exponencial não pode ser obtido no caso do operador p-Laplaciano fracionário. Já no caso do operador Laplaciano fracionário, Felmer, Quaas e Tan [25] obtiveram decaimento ótimo da solução positiva do problema

$$(-\Delta)^\alpha u + u = f(x, u) \quad \text{no} \ \mathbb{R}^N,$$

ao provar a existência de constantes $0 < C_1 < C_2$ tais que

$$\frac{C_1}{|x|^{N+2s}} \leq u(x) \leq \frac{C_2}{|x|^{N+2s}}, \quad \forall\, |x| > 1.$$

Para o caso desse Tese, não se conseguiu obter um resultado tão preciso: foi provada a existência de constantes $\rho > 0$ e $C > 0$, de modo que a solução positiva de energia mínima de (5) satisfaz

$$u(x) \leq \frac{C}{|x|^{\frac{N-sp}{p-1}}} \quad \forall\, |x| > \rho.$$

Expor-se-á, brevemente, o roteiro utilizado no Capítulo 2.

Resultados preliminares sobre o operador p-Laplaciano fracionário são expostos na Seção 2.2, na qual são introduzidos os espaços e as imersões pertinentes ao problema, bem como o espaço $D^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, também utilizado por Brasco, Mosconi and Squassina [6]. São obtidas cotas para o termo de convolução ao utilizar a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev.

Na Seção 2.3 é mostrado que o funcional energia satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Como no Capítulo 1, evita-se mostrar a condição de Palais-Smale ao introduzir a variedade de Nehari. A técnica utilizada é basicamente a mesma empregada no Capítulo 1 e é inspirada em Alves e Yang [2].

Após mostrar a limitação do termo de convolução, a regularidade de uma solução fraca do problema (5) é mostrada na Seção 2.4, adaptando-se técnicas utilizadas em Brasco, Mosconi and Squassina [6]. A demonstração da regularidade é obtida ao aplicarmos resultados de Brasco e Parini [7], resultados esses que não são expostos.

Tendo como referências básicas os artigos de Brasco, Mosconi e Squassina [6] e Felmer, Quaas e Tan [25], o decaimento da solução positiva de energia mínima é tratado na Seção 2.5.

Os textos desta Tese são apresentados invertendo a ordem com que foram escritos. O texto sobre a equação de Choquard constituiu, em parte, uma preparação para as dificuldades técnicas que seriam enfrentadas ao tratar da equação pseudo-relativística de Hartree.

Optou-se por iniciar o texto com a equação de Hartree para possibilitar um tratamento mais detalhado desta e sintetizar provas (quando semelhantes àquelas posteriormente apresentadas) no caso da equação de Choquard.

Buscou-se deixar o texto auto-suficiente, apresentando inclusive a demonstração de alguns resultados básicos. Esse procedimento não foi seguido uma única vez: ao demonstrar os resultados de regularidade na equação de Choquard, apenas aplicaram-se resultados provados por Iannizzotto, Mosconi e M. Squassina [29] e Brasco e Parini [7, Teorema 3.8, Teorema 3.13].[2] Decidiu-se, assim, fazê-lo, para evitar que essa Tese ganhasse ainda mais volume.

[2]O resultado de continuidade, *Theorem 3.13* é devido a Kuusi, Mingione e Sire [31].

Capítulo 1

Solução Positiva de Energia Mínima Para a Equação Pseudo-relativística de Hartree

1.1 Colocação do Problema

Neste capítulo estudou-se uma generalização da equação pseudo-relativística de Hartree, dada por:

$$\sqrt{-\Delta + m^2}\, u + Vu = [W * F(u)]\, f(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \tag{1.1}$$

em que $N \geq 2$, $F(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$ e $W * F(u)$ denota a convolução das funções W e $F(u)$. Assumiu-se que a não linearidade de f seja uma função de classe C^1, não negativa em $[0, \infty)$, satisfazendo:

(f1) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{|f(t)|}{t} = 0$;

(f2) $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t^{\theta-1}} = 0$, em que $2 \leq \theta < \frac{2N}{N-1} = 2^\sharp$

(f3) A função $t \mapsto \dfrac{|f(t)|}{t}$ é monótona crescente para $t > 0$.

Além disso, postulou-se:

(V) $V \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é função limitada e $V(y) + V_0 \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^N$ e algum $V_0 \in (0, m)$.

(W_h) $0 \leq W = W_1 + W_2 \in L^r(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é radial com $r > \frac{N}{N(2-\theta)+\theta}$.

O objetivo desse Trabalho é mostrar a regularidade da solução do problema (1.1), bem como o decaimento exponencial de uma solução *positiva* de energia mínima. Mais geralmente, mostra-se que toda solução fraca de (1.1) é uma solução clássica.

Substituindo a hipótese **(V)** pela hipótese

(V′) $V(y) = V_1 \in (0, m)$ é uma constante,

mostrou-se a existência de uma solução *positiva* de energia mínima. Para isso, mostrou-se que o problema (1.1) satisfaz a geometria do Passo da Montanha (Seção 1.5), introduzir-se-á a variedade de Nehari naturalmente associada ao problema, mas só mostrar-se-á a convergência de uma sequência minimizante no caso em que **(V)** é substituida pela hipótese **(V′)**.

O estudo dessa Tese é uma generalização daquele desenvolvido inicialmente por Coti Zelati e Nolasco [18] e depois generalizado por Cingolani e Secchi [16]. A comparação deste estudo com resultados anteriores é feita na Introdução.

É importante destacar algumas consequências imediatas das hipóteses colocadas.

As hipóteses **(f1)** e **(f2)** implicam que, para todo $\xi > 0$ dado, existe $C_\xi > 0$ tal que

$$|f(t)| < \xi t + C_\xi t^{\theta-1}$$

para todo $t > 0$. Analogamente, existe $D_\xi > 0$ tal que

$$|F(t)| \leq \xi t^2 + D_\xi t^\theta, \ \text{ para todo } \ t \geq 0.$$

A hipótese **(f3)** é equivalente a:

$$f'(t)t^2 - f(t)t > 0, \ \forall\, t > 0.$$

E, consequentemente a hipótese de Ambrosetti-Rabinowitz

$$0 < 2F(t) \leq tf(t), \ \text{ para todo } t > 0$$

é satisfeita.

(Para essas afirmações veja os Lemas A.1.1 e A.1.2 no Apêndice A)

A seguir apresentar-se-á exemplos de funções que satisfazem as condições exigidas pelas hipóteses **(f1)-(f3)**.

Exemplo 1.1.1. *A função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t\ln(1+t)$ satisfaz as hipóteses* **(f1)-(f3)**. *De fato:*

- $\lim_{t\to 0} \frac{|f(t)|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \ln(1+t) = 0,$
- $\lim_{t\to +\infty} \frac{|f(t)|}{t^{\theta-1}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{t\ln(1+t)}{t^{\theta-1}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{\theta-2}} = 0$
- $t \mapsto \frac{f(t)}{t} = \frac{t\ln(1+t)}{t} = \ln(1+t)$ *é monótona crescente para* $t > 0$.

Exemplo 1.1.2. *Seja* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(t) = |t|^{q_1-2}t + |t|^{q_2-2}t$, *para* $2 < q_1, q_2 < 2^\sharp$ *e* $q_1, q_2 \leq \theta$. *Mostra-se que* f *satisfaz* **(f1)-(f3)**. *De fato, claramente tem-se:*

- $\lim_{t\to 0} \frac{|f(t)|}{t} = \lim_{t\to 0} \left(|t|^{q_1-2} + |t|^{q_2-2}\right) = 0;$
- $\lim_{t\to +\infty} \frac{f(t)}{t^{\theta-1}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{|t|^{q_1-2}t^2 + |t|^{q_2-2}t^2}{t^\theta} = \lim_{t\to +\infty} \frac{|t|^{q_1} + |t|^{q_2}}{t^\theta} = 0.$
- $t \mapsto \frac{|f(t)|}{t} = \frac{|t|^{q_1-2}t + |t|^{q_2-2}t}{t} = |t|^{q_1-2} + |t|^{q_2-2}$ *é monótona crescente para* $t > 0$, *pois* $q_1, q_2 > 2$.

Exemplo 1.1.3. *Para* $k \in \mathbb{N}$, *a função limitada*

$$W(x) = \frac{|x|^k}{1+|x|^k}$$

claramente satisfaz a hipótese $(\boldsymbol{W_h})$, *com* $W = W_2$ *e* $W_1 \equiv 0$.

1.2 Formulação Variacional

Obter-se-á uma formulação equivalente do problema (1.5), o que possibilitará a utilização de métodos variacionais.

Definição 1.2.1. *Diz-se que uma função* $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ *pertence a classe de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, *se* $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e para todos multi-índice* α, β, *tem-se:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta u(x)| < \infty.$$

Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, *diz-se que* u *possui decaimento rápido.*

Seja $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Existe uma única função $v \in S(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, tal que:

$$\begin{cases} -\Delta v + m^2 v = 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ \\ v(0,y) = u(y), \ \ y \in \mathbb{R}^N = \partial\mathbb{R}^{N+1}_+. \end{cases} \tag{1.2}$$

Define-se

$$Tu(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0, y)$$

e observa-se que

$$w(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

satisfaz

$$\begin{aligned}
\Delta w &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} (\Delta v) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(m^2 v \right) = m^2 \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = m^2 w.
\end{aligned}$$

Portanto, $w(x, y)$ é a (única) solução do problema:

$$\begin{cases} -\Delta w + m^2 w = 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}_+^{N+1}, \\ \\ w(0, y) = Tu(y), \ \ y \in \mathbb{R}^N = \partial \mathbb{R}_+^{N+1} = \{0\} \times \mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.3}$$

Mostra-se assim que, ao substituir $u(y)$ por $-v_x(0, y)$ em (1.2), obtem-se $-v_x(x, y)$ ao invés de $v(x, y)$ como solução de (1.2). Como consequência,

$$T(Tu(y)) = T(-v_x(0, y)) = v_{xx}(0, y).$$

Uma vez que

$$0 = -\Delta v + m^2 v = -\left[\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v(x, y) \right] + m^2 v(x, y), \tag{1.4}$$

conclui-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) &= -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2}(x, y) + m^2 v(x, y) \\
&= -\Delta_y v(x, y) + m^2 v(x, y).
\end{aligned}$$

Em particular, no ponto $(0, y)$ tem-se

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, y) = -\Delta_y v(0, y) + m^2 v(0, y).$$

Como $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,y) = T(Tu(y))$, substituindo na equação anterior decorre que

$$\begin{aligned} T^2 u(y) = T(Tu(y)) &= -\Delta_y v(0,y) + m^2 v(0,y) \\ &= (-\Delta_y + m^2) u(y) \end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^N$. Isso mostra que

$$T = \sqrt{-\Delta_y + m^2}.$$

Assim, o operador T permite reformular o problema (1.1): a equação

$$\sqrt{-\Delta + m^2} u + Vu = [W * F(u)] f(u)$$

pode ser escrita como

$$Tu(y) = -V(y)u(y) + [W * F(u)] f(u),$$

ou seja

$$-\frac{\partial v}{\partial x}(0,y) = -V(y)v(0,y) + [W * F(v)] f(v),$$

em que v é a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta v + m^2 v = 0 \text{ em } \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x}(0,y) = -V(y)v(0,y) + [W * F(v(0,y))] f(v(0,y)), \;\; y \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.5}$$

É natural considerar o problema (1.5) no espaço de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^{N+1}_+) \; : \; \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

dotado da norma

$$\|u\|^2 = \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(|\nabla u|^2 + u^2 \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Notação. Para todo $q \in [1,\infty]$, denota-se por $|\cdot|_q$ a norma no espaço $L^q(\mathbb{R}^N)$ e por $\|\cdot\|_q$ a norma no espaço $L^q(\mathbb{R}^{N+1}_+)$. A norma no espaço $H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ será denotada por $\|\cdot\|$.

É bem conhecido que traços de funções em $H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ estão em $H^{1/2}(\mathbb{R}^N)$ e que cada função em $H^{1/2}(\mathbb{R}^N)$ é o traço de uma função em $H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, como pode-se ver em Tartar [55]. Além disso, resultados básicos sobre o traço de uma função estão expostos no Apêndice A.

Denota-se por $\gamma\colon H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \to H^{1/2}(\mathbb{R}^N)$ a aplicação linear que associa, a cada função $v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, o seu traço $\gamma(v) \in H^{1/2}(\mathbb{R}^N)$. Sabe-se que ker $\gamma = H^1_0(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

As imersões

$$H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^{N+1}_+) \tag{1.6a}$$

$$H^{1/2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \tag{1.6b}$$

são contínuas para todo $q \in [2, 2^*]$ e $[2, 2^\sharp]$, respectivamente, sendo

$$2^* = \frac{2(N+1)}{N-1} \qquad \text{e} \qquad 2^\sharp = \frac{2N}{N-1}. \tag{1.7}$$

O espaço $H^{1/2}(\mathbb{R}^N)$ é usualmente definido por meio da transformada de Fourier. Portanto, não se pode trocar $\mathbb{R}^N$ por um conjunto aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Contudo (veja [21]), $H^{1/2}(\mathbb{R}^N) = W^{1/2,2}(\mathbb{R}^N)$ e $W^{1/2,2}(\Omega)$ está definido para um conjunto aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Recapitulando sua definição: seja $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e Ω a conjunto aberto limitado (que, em todo este texto, supõe-se ter fronteira de Lipschitz); denotando

$$[u]^2_\Omega = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

e

$$W^{1/2,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) \,:\, [u]^2_\Omega < \infty \right\},$$

então $W^{1/2,2}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo (veja, e.g., [21] e [22]) considerado com a norma

$$\|u\|_{W^{1/2,2}(\Omega)} = |u|_2 + [u]_\Omega.$$

Como pode ser visto em [21, Teorema 4.54], a imersão

$$W^{1/2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \tag{1.8}$$

é compacta para todo $q \in \left[1, 2^\sharp\right)$.

Como de costume, a imersão $W^{1/2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^\sharp}(\Omega)$ é contínua, veja [21, Corolário 4.53]. A norma no espaço será denotada por $L^q(\Omega)$ por $|\cdot|_{L^q(\Omega)}$.

Em geral, não se denotarão as variáveis de integração y e x no espaço $\mathbb{R}^{N+1}_+$. Da mesma forma, a variável de integração y frequentemente será suprimida ao integrar-se no $\mathbb{R}^N$. Mas serão utilizadas quando julgar-se que tal uso facilita a compreensão.

1.3 Resultados Preliminares

Proposição 1.3.1. *Para qualquer $v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ tem-se $\gamma(v) \in L^t(\mathbb{R}^N)$ sempre que $t \in [2, 2^\sharp]$. Mais precisamente, para esses valores de t tem-se*

$$|\gamma(v)|_t^t \leq t\, \|v\|_{2(t-1)}^{t-1} \|\nabla v\|_2 . \tag{1.9}$$

Demonstração. Supõe-se inicialmente que $v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$. Então

$$\lim_{x\to\infty} v(x,y) = 0,$$

de modo que

$$\begin{aligned}|v(0,y)|^t &= \lim_{k\to+\infty}(|v(0,y)|^t - |v(k,y)|^t) = \lim_{k\to+\infty} -\int_k^0 \frac{\partial}{\partial x}|v(x,y)|^t \mathrm{d}x \\ &= \lim_{k\to+\infty}\int_0^k t|v(x,y)|^{t-2}v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Integrando e aplicando a desigualdade de Hölder obtêm-se

$$\begin{aligned}|\gamma(v)|_t^t = \int_{\mathbb{R}^N}|v(0,y)|^t \mathrm{d}y &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{+\infty} t|v(x,y)|^{t-1}\,|\nabla v(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leq t\left(\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+}|v|^{2(t-1)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+}|\nabla v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= t\,\|v\|_{2(t-1)}^{t-1}\|\nabla v\|_2 .\end{aligned}$$

A imersão $H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ é contínua para $2 \leq q \leq \frac{2(N+1)}{N-1}$. Assim tem-se que a norma $\|v\|_{2(t-1)}$ é finita se, e somente se, $2 \leq 2(t-1) \leq \frac{2(N+1)}{N-1}$. Ou seja, se

$$2 \leq t \leq \frac{2N}{N-1} = 2^\sharp.$$

Como $H^1(\mathbb{R}^{N+1}) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, a desigualdade (1.9) é válida para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$. □

Corolário 1.3.2. *Se $2 \leq \theta < \frac{2N}{N-1}$, então $F(\gamma(v)) \in L^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. De fato, de acordo com a Proposição A.1.1 tem-se

$$\begin{aligned}|F(\gamma(v))|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |F(\gamma(v))|\mathrm{d}y \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} c(|\gamma(v)|^2 + |\gamma(v)|^\theta)\mathrm{d}y = c\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^2\mathrm{d}y + c\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^\theta\mathrm{d}y \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

□

Corolário 1.3.3. *Para quaisquer $v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ e $t \in [2, 2^\sharp]$ vale*

$$|\gamma(v)|_t \leq C_t \|v\|. \tag{1.10}$$

Demonstração. Decorre da Proposição (1.3.1) que

$$|\gamma(v)|_t \leq \|v\|_{2(t-1)}^{(t-1)/t} \left(t^{1/t}\|\nabla v\|_2^{1/t}\right).$$

Aplicando a desigualdade de Young,[1] obtêm-se

$$\begin{aligned}|\gamma(v)|_t &\leq \frac{1}{t}\left(t^{1/t}\|\nabla v\|_2^{\frac{1}{t}}\right)^t + \frac{t-1}{t}\left(\|v\|_{2(t-1)}^{\frac{t-1}{t}}\right)^{\frac{t}{t-1}} \\ &= \|\nabla v\|_2 + \frac{t-1}{t}\|v\|_{2(t-1)}.\end{aligned}$$

Como a imersão contínua

$$H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^{N+1}_+)$$

é válida para $q \in [2, 2^*]$, pode-se concluir que o afirmado, pois $t < 2^*$. □

Observação 1.3.4. *A aplicação da desigualdade de Young no caso particular de $t = 2$ ao resultado da Proposição 1.3.1 será bastante útil. Para todo $\lambda > 0$ tem-se*

$$\begin{aligned}|\gamma(v)|_2 &\leq (2\|v\|_2\|\nabla v\|_2)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda\|v\|_2 2\frac{\|\nabla v\|_2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\lambda^{\frac{1}{2}}\|v\|_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(2\frac{\|\nabla v\|_2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\lambda\|v\|_2}{2} + 2\frac{\|\nabla v\|_2}{2\lambda} = \frac{\lambda\|v\|_2}{2} + \frac{\|\nabla v\|_2}{\lambda} \\ &< \lambda\|v\|_2 + \frac{\|\nabla v\|_2}{\lambda}.\end{aligned}$$

[1] Na desigualdade $ab \leq \frac{1}{t}a^t + \frac{t}{t-1}b^{t/(t-1)}$, tome $a = t^{1/t}\|\nabla v\|_2^{\frac{1}{t}}$ e $b = \|v\|_{2(t-1)}^{(t-1)/t}$.

Sendo assim, para $\lambda > 0$ tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^2 \leq \lambda \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |v|^2 + \frac{1}{\lambda} \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla v|^2. \tag{1.11}$$

Em particular, escolhendo $\lambda = m$, obtêm-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^2 \leq m \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |v|^2 + \frac{1}{m} \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla v|^2. \tag{1.12}$$

Agora apresentar-se-á um resultado que desempenhará papel importante em nesse trabalho.

Proposição 1.3.5 (Hausdorff-Young)**.** *Assuma que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p, q, s \leq \infty$, sendo*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{s}.$$

Então vale

$$|f * g|_s \leq |f|_p |g|_q.$$

O próximo resultado será útil quando considera-se a regularidade das soluções do problema (1.5). Note que, em particular, isso melhora o Corolário 1.3.2.

Proposição 1.3.6. *Com respeito à hipótese $(\boldsymbol{W_h})$ tem-se:*

(i) Se $r \in \left(\frac{N}{N(2-\theta)+\theta}, \frac{2N}{N(2-\theta)+\theta}\right]$ então existe $p \in \left[1, \frac{2N}{(N-1)\theta}\right)$ tal que

$$|\gamma(v)|^\theta \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{N(2-\theta)+\theta}{2N}. \tag{1.13}$$

Além disso,

$$F(\gamma(v)) \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Denotando $|W_1 * F(\gamma(v))| = g(y)$, tem-se $g \in L^{2N/[N(2-\theta)+\theta]}(\mathbb{R}^N)$.

(ii) Se $r > \dfrac{2N}{N(2-\theta)+\theta}$, então

$$F(\gamma(v)) \in L^{r'}(\mathbb{R}^N) \qquad e \qquad W_1 * F(\gamma(v)) \in L^\infty(\mathbb{R}^N),$$

em que $r' = r/(r-1)$ é o expoente conjugado a r.

Demonstração. Para provar (i), afirma-se inicialmente que, se

$$r \in \left(\frac{N}{N(2-\theta)+\theta}, \frac{2N}{N(2-\theta)+\theta} \right],$$

então (1.13) é satisfeita para $p \in \left[1, \frac{2N}{(N-1)\theta}\right]$.

De fato, se $r > \frac{N}{N(2-\theta)+\theta}$, então $\frac{1}{r} < \frac{N(2-\theta)+\theta}{N}$. Logo, de acordo com (1.13),

$$\begin{aligned} \frac{N(2-\theta)+\theta}{N} > \frac{1}{r} = 1 + \frac{N(2-\theta)+\theta}{2N} - \frac{1}{p} &\Leftrightarrow \frac{1}{p} > \frac{N(2-\theta)+\theta}{2N} + 1 - \frac{N(2-\theta)+\theta}{N} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{p} > \frac{(N-1)\theta}{2N} \\ &\Leftrightarrow p < \frac{2N}{(N-1)\theta}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $r \leq \dfrac{2N}{N(2-\theta)+\theta}$, então

$$\begin{aligned} \frac{N(2-\theta)+\theta}{2N} \leq \frac{1}{r} = 1 + \frac{N(2-\theta)+\theta}{2N} - \frac{1}{p} &\Leftrightarrow \frac{1}{p} \leq 1 + \frac{N(2-\theta)+\theta}{2N} - \frac{N(2-\theta)+\theta}{2N} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{p} \leq 1 \Leftrightarrow p \geq 1. \end{aligned}$$

Como foi visto na Proposição 1.3.3, $|\gamma(v)| \in L^t(\mathbb{R}^N)$ para todo $t \in [2, 2^\sharp]$. Para verificar que $|\gamma(v)|^\theta \in L^p(\mathbb{R}^N)$, basta notar que, se $1 \leq p < \frac{2N}{(N-1)\theta}$, então $2 < \theta \leq \theta p \leq \frac{2N}{N-1} = 2^\sharp$.

Aplicando a Proposição A.2.1, obtêm-se

$$|F(\gamma(v))| \leq \xi |\gamma(v)|^2 + C_\xi |\gamma(v)|^\theta \leq c(|\gamma(v)|^2 + |\gamma(v)|^\theta).$$

Logo, pode-se concluir que $F(\gamma(v)) \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |F(\gamma(v))|^p &\leq \int_{\mathbb{R}^N} c \left(|\gamma(v)|^2 + |\gamma(v)|^\theta \right)^p \\ &\leq c 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\gamma(v)|^{2p} + |\gamma(v)|^{\theta p} \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Decorre então da desigualdade de Hausdorff-Young (Proposição 1.3.5) que

$$|W_1 * F(\gamma(v))|_s \leq |W_1|_r \cdot |F(\gamma(v))|_p < +\infty,$$

pois $\frac{1}{s} = \frac{N(2-\theta)+\theta}{2N}$. Logo $g = |W_1 * F(\gamma(v))| \in L^{2N/[N(2-\theta)-\theta]}(\mathbb{R}^N)$.

Agora considera-se a prova de (ii). Como $W_1 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ para $r = \frac{2N}{N(2-\theta)+\theta}$ e

$$r' = \frac{r}{r-1} = \frac{\frac{2N}{N(2-\theta)+\theta}}{\frac{2N}{N(2-\theta)+\theta} - 1} = \frac{\frac{2N}{N(2-\theta)+\theta}}{\frac{2N-2N+N\theta-\theta}{N(2-\theta)+\theta}} = \frac{2N}{(N-1)\theta},$$

pode-se aplicar o provado em (i), com $p = r'$ e concluir que $F(\gamma(v)) \in L^{r'}(\mathbb{R}^N)$. Como

$$|W_1 * F(\gamma(v))|_s \leq |W_1|_r \cdot |F(\gamma(v))|_{r'}$$

e $s = \infty$, conclui-se que $W_1 * F(\gamma(v)) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. □

Corolário 1.3.7. *Tem-se* $|W * F(\gamma(v))| \leq C + g$, *com* $g \in L^{2N/[N(2-\theta)+\theta]}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Decorre imediatamente do Lema 1.3.6, pois $W_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. □

1.4 Formulação Fraca

Definição 1.4.1. *Diz-se que* $v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ *é solução fraca de* (1.5) *se, e somente se,* v *satisfizer*

$$\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(\nabla v \nabla \varphi + m^2 v \varphi\right) + \int_{\mathbb{R}^N} V(y)\gamma(v)\gamma(\varphi)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} \left[W * F(\gamma(v))\right] f(\gamma(v))\gamma(\varphi)\mathrm{d}y,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

Assim, define-se o funcional energia do problema (1.5) como sendo a aplicação que associa $v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ a um número real $I(v)$ dado por

$$I(v) = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(|\nabla v|^2 + m^2 v^2\right) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(y)|\gamma(v)|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[W * F(\gamma(v))\right] F(\gamma(v))$$

Provar-se-á que o funcional I está bem definido e que seus pontos críticos são soluções fracas para o problema (1.5). Para isso, enunciar-se-á a generalização da desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev devida a Lieb [36]. Denota-se por $L^q_w(\mathbb{R}^N)$ o espaço fraco $L^q(\mathbb{R}^N)$ e por $|\cdot|_{q_w}$ sua norma usual (veja [36]).

Proposição 1.4.1 (Lieb [36])**.** *Suponha que* $p, q, r \in (1, +\infty)$ *e* $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 2$. *Então existe uma constante* $N = N_{p,q,r} > 0$ *tal que, para quaisquer* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ *e* $h \in L^q_w(\mathbb{R}^N)$ *tem-se:*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)h(x-y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le N_{p,q,t}|f|_p|g|_t|h|_{q_w}.$$

Lema 1.4.2. *Existe uma constante positiva C tal que*

$$\left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[W * F(\gamma(v))\right]F(\gamma(v))\right| \le C\left(\|v\|^2+\|v\|^\theta\right)^2.$$

Demonstração. Denotando por

$$\Psi(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[W * F(\gamma(v))\right]F(\gamma(v))\mathrm{d}y, \tag{1.14}$$

o fato de se ter $W = W_1 + W_2$ permite-se escrever:

$$\begin{aligned}\Psi(v) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[W_1 * F(\gamma(v))\right]F(\gamma(v)) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[W_2 * F(\gamma(v))\right]F(\gamma(v))\\ &=: J_1 + J_2.\end{aligned}$$

Tome $t \ge 1$ tal que $|\gamma(v)|^\theta \in L^t(\mathbb{R}^N)$. (Basta escolher $t \ge 1$ tal que $t\theta < 2^\sharp$, veja a Proposição 1.3.1.) Então $|\gamma(v)|^2 \in L^t(\mathbb{R}^N)$ e $F(\gamma(v)) \in L^t(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|F(\gamma(v))|^t &\le \int_{\mathbb{R}^N} c\left(|\gamma(v)|^2+|\gamma(u)|^\theta\right)^t \le c2^{t-1}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\gamma(v)|^{2t}+|\gamma(u)|^{\theta t}\right)\\ &< +\infty,\end{aligned}$$

como consequência do Lema A.1.1.

Decorre então do resultado de Lieb (Proposição 1.4.1) que

$$|J_1| = \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[W_1 * F(\gamma(v))\right]\ F(\gamma(v))\right| \le N\,|W_1|_r|F(\gamma(v))|_t|F(\gamma(v))|_t.$$

Como $\frac{1}{r}+\frac{2}{t} = 2$ implica $t = \frac{2r}{2r-1}$, tem-se

$$|J_1(v)| \le C|F(\gamma(v))|_{\frac{2r}{2r-1}}|F(\gamma(v))|_{\frac{2r}{2r-1}} \le C'\left(\|v\|^2+\|v\|^\theta\right)^2 < \infty. \tag{1.15}$$

(Observe que, para aplicar a imersão $H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, deve-se ter $t\theta < 2N/(N-1)$, ou seja, $r > N/[N(2-\theta)+\theta]$.)

Para estimar J_2, considere a aplicação linear L dada por

$$\begin{aligned}L\colon\quad L^1(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)\\ \xi &\longmapsto W_2 * \xi\,.\end{aligned}$$

Decorre então da desigualdade de Hölder que

$$L(\xi) = W_2 * \xi \leq \int_{\mathbb{R}^N} |W_2(x-y)\xi(y)| \mathrm{d}y \leq |W_2|_\infty |\xi|_1.$$

Portanto, $|L(\xi)|_\infty \leq |W_2|_\infty |\xi|_1$.

$$\begin{aligned} J_2(v) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[W_2 * F(\gamma(v))\right] F(\gamma(v)) = \int_{\mathbb{R}^N} L(F(\gamma(v))F(\gamma(v)) \\ &\leq |W_2|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |F(\gamma(v))|_1 F(\gamma(v)) = |W_2|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} F(\gamma(v))\right)^2 \\ &\leq |W_2|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\gamma(v)|^2 + |\gamma(v)|^\theta\right)\right)^2 = C_1 \left(|\gamma(v)|_2^2 + |\gamma(v)|_\theta^\theta\right)^2. \end{aligned}$$

Como $\theta \in [2, 2^\sharp)$, decorre da imersão (1.6b) a existência de $C_2 > 0$ tal que

$$|\gamma(u)|_2^2 \leq C_2 \|u\|^2 \quad \text{e} \quad |\gamma(u)|_\theta^\theta \leq C_2 \|u\|^\theta.$$

Logo, existe uma constante $C'' > 0$ tal que

$$J_2(u) \leq C''(\|u\|^2 + \|u\|^\theta)^2 < \infty. \tag{1.16}$$

O resultado decorre então de (1.15) e (1.16). □

Proposição 1.4.3. *O funcional I está bem definido.*

Demonstração. Seja $v \in H^1(\mathbb{R}_+^{N+1})$. Então, claramente,

$$\frac{1}{2} I_1(v) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \left(|\nabla v|^2 + m^2 |v|^2\right) \leq \frac{k}{2} \|v\|^2 < \infty,$$

sendo $k = \max\{1, m^2\}$.

De acordo com a hipótese **(V)**, existe $C > 0$ tal que $|V(y)| < C$. Assim, decorre da Proposição 1.3.3 que

$$\frac{1}{2} I_2(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(y) |\gamma(v)|^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^2 = C |\gamma(v)|_2^2 \leq C \|v\| < \infty,$$

em que o valor das constantes pode variar de desigualdade para desigualdade.

Com $\Psi(v)$ definido em (1.14), o fato de se ter

$$I(v) = \frac{1}{2} I_1(v) + \frac{1}{2} I_2(v) - \Psi(v) \tag{1.17}$$

garante que o resultado está demonstrado. □

A diferenciabilidade do funcional I e o fato de pontos críticos de I serem soluções fracas do problema (1.5) são tratados no Apêndice B. Lá mostra-se que

$$\begin{aligned}\langle I'(v),\varphi\rangle = \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(\nabla v \nabla \varphi + m^2 v\varphi\right) + \int_{\mathbb{R}^N} V(y)\gamma(v)\gamma(\varphi) \\ - \int_{\mathbb{R}^N} \left[W * F(\gamma(v))\right] f(\gamma(v))\gamma(\varphi)\end{aligned} \tag{1.18}$$

para todo $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

Observação 1.4.4. *A notação $I = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2 - \Psi$ será repetidas vezes utilizada na sequência deste trabalho.*

1.5 A Geometria do Passo da Montanha

Nesta seção mostra-se que o funcional energia I satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha.

O objetivo final é a obtenção de uma solução fundamental *positiva* de (1.5): uma solução positiva de energia mínima. Não é difícil verificar que, definindo $f_+(t) = f(t)$, se $t \geq 0$ e $f_+(t) = 0$, se $t < 0$, então f_+ satisfaz as mesmas hipóteses da função f e também a geometria do passo da montanha. Uma vez mostrada a existência de uma solução à partir da sequência minimizante produzida por esse resultado, essa solução tem que coincidir com aquela produzida pela função original f.

Assim, em todos os resultados relacionados com a solução positiva de energia mínima, assume-se que $f(t) = 0$ se $t < 0$.

Teorema 1.5.1. *O funcional I satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, isto é,*

(i) existem $\rho, \delta_0 > 0$ tais que $I(v) \geq \delta_0 > 0$ para todo $v \in \left\{w \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \,:\, \|w\| = \rho\right\}$;

(ii) para todo $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ tal que $(v_0)_+ \neq 0$, existe $\tau \in \mathbb{R}$ com $\|\tau v_0\| > \rho$ e $I(\tau v_0) < 0$.

Como consequência, existe uma sequência minimizante $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, com $(v_n)_+ \neq 0$ para todo n, satisfazendo

$$I'(v_n) \to 0 \qquad e \qquad I(v_n) \to \alpha \qquad \text{quando } n \to +\infty,$$

em que

$$0 < \alpha = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max_{t \in [0,1]} I(\lambda(t)),$$

sendo

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in C\left([0,1], H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)\right) \, : \, \lambda(0) = 0 \;\; e \;\; I(\lambda(1)) < 0 \right\}.$$

Demonstração. Como na demonstração da Proposição 1.4.3 , decompõe-se

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(|\nabla v|^2 + m^2 u^2 \right) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(y) |\gamma(v)|^2 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[W * F(\gamma(v)) \right] F(\gamma(v)) \\ &= \frac{1}{2} I_1(v) + \frac{1}{2} I_2(v) - \Psi(v). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Decorre da hipótese $(\boldsymbol{V})$ que

$$\frac{1}{2} I_2(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(y) |\gamma(v)|^2 \leq \frac{C_1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^2 \tag{1.20}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I_2(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V(y) + V_0) |\gamma(v)|^2 - \frac{1}{2} V_0 \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^2 \\ &\geq -\frac{1}{2} V_0 \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^2 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Agora avalia-se $\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^2$. Decorre de (1.12) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^2 \leq m \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |v|^2 + \frac{1}{m} \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla v|^2. \tag{1.22}$$

Substituindo a última desigualdade em (1.21) e então em (1.19), obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(I_1 + I_2 \right)(v) &\geq \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(|\nabla v|^2 + m^2 |v|^2 \right) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V + V_0) |\gamma(v)|^2 - \frac{V_0}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(|\nabla v|^2 + m^2 |v|^2 \right) - \frac{V_0}{2} m \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(|v|^2 + \frac{1}{m} |\nabla v|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{V_0}{m} \right) \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla v|^2 + \frac{m(m - V_0)}{2} \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |v|^2 \\ &\geq K \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(|\nabla v|^2 + |v|^2 \right) = K \|v\|^2, \end{aligned} \tag{1.23}$$

em que $K = \min\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{V_0}{m}\right), \frac{1}{2}m(m-V_0)\right\} > 0$. Aplicando então o Lema 1.4.2, conclui-se que

$$I(v) = \frac{1}{2}\left(I_1(v)+I_2(v)\right) - \Psi(v) \geq K\|v\|^2 - C\left(\|v\|^2 + \|v\|^\theta\right)^2, \tag{1.24}$$

o que implica (i) ao se tomar $\rho > 0$ suficientemente pequeno.

Para provar (*ii*), fixa-se $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \setminus \{0\}$ tal que $v_0^+ = \max\{v, 0\} \neq 0$. Para todo $t > 0$, considere a função $g_{v_0}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g_{v_0}(t) = \Psi\left(\frac{tv_0}{\|v_0\|}\right) > 0,$$

em que (como antes)

$$\Psi(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[W * F(\gamma(v))\right]F(\gamma(v)).$$

Calculando a derivada de g_{v_0} (veja o Apêndice 1.17), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
g'_{v_0}(t) = \Psi'\left(\gamma\left(t\frac{v_0}{\|v_0\|}\right)\right)\frac{v_0}{\|v_0\|} &= \int_{\mathbb{R}^N}\left[W * F\left(\gamma\left(\frac{tv_0}{\|v_0\|}\right)\right)\right] f\left(\gamma\left(\frac{tv_0}{\|v_0\|}\right)\right)\gamma\left(\frac{v_0}{\|v_0\|}\right)\\
&= \frac{2}{t}\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\left[W * F\left(\gamma\left(\frac{tv_0}{\|v_0\|}\right)\right)\right]\frac{1}{2}f\left(\gamma\left(\frac{tv_0}{\|v_0\|}\right)\right)\gamma\left(\frac{tv_0}{\|v_0\|}\right)\right\}\\
&\geq \frac{2}{t}\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\left[W * F\left(\gamma\left(\frac{tv_0}{\|v_0\|}\right)\right)\right] F\left(\gamma\left(\frac{tv_0}{\|v_0\|}\right)\right)\right\}\\
&= \frac{4}{t}g_{v_0}(t),
\end{aligned}$$

a desigualdade sendo consequência da condição de Ambrosetti-Rabinowitz (veja o Lema A.1.2). Observe que $g'_{v_0}(t) > 0$ para $t > 0$.

Logo,

$$\ln g_{v_0}(t)\Big|_1^{\tau\|v_0\|} \geq 4\ln t\Big|_1^{\tau\|v_0\|} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{g_{v_0}(\tau\|v_0\|)}{g_{v_0}(1)} \geq (\tau\|v_0\|)^4,$$

provando que

$$\Psi(\tau v_0) = g_{v_0}(\tau\|v_0\|) \geq D\left(\tau\|v_0\|\right)^4 \tag{1.25}$$

para uma constante $D > 0$.

Reunindo (1.20), (1.22) e (1.25), obtêm-se

$$\begin{aligned} I(\tau u_0) &= \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+}\left(|\nabla \tau v_0|^2 + m^2\tau^2|v_0|^2\right) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(y)|\gamma(\tau v_0)|^2 - \Psi(\tau v_0) \\ &\le \frac{\tau^2}{2}\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+}|\nabla v_0|^2 + \frac{m^2\tau^2}{2}\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} v_0^2 + \frac{C\tau^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\gamma(v)|^2 - \Psi(\tau v_0) \\ &\le C\tau^2\|v_0\|^2 - D\tau^4\|v_0\|^2. \end{aligned}$$

(O valor de C varia de linha para linha.) Assim, basta tomar $e = \tau v_0$ para qualquer v_0 satisfazendo $(v_0)_+ \neq 0$ e τ suficientemente grande.

A afirmação sobre a existência da sequência minimizante decorre então da aplicação do Princípio Variacional de Ekeland: veja Willem [56, Teorema 2.9] para o enunciado do Teorema do Passo da Montanha afirmando explicitamente a existência dessa sequência minimizante. □

1.6 A Variedade de Nehari

A sequência minimizante $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ dada pelo Teorema 1.5.1 pode não satisfazer a condição de Palais-Smale, já que está trabalhando-se em domínio ilimitado. Um conhecido exemplo de uma função que satisfaz a geometria do passo da montanha mas não satisfaz a condição de Palais-Smale é devido a Brézis e Nirenberg: a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por[2]

$$f(x,y) = x^2 + (1-x)^3 y^2.$$

Para contornar essa dificuldade, utilizar-se-á o método da variedade de Nehari.

Definição 1.6.1. *Define-se a variedade de Nehari associada ao funcional I como sendo o conjunto*

$$\mathcal{N} = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \setminus \{0\} \;:\; \langle I'(v), v\rangle = 0 \right\},$$

isto é, $v \neq 0 \in \mathcal{N}$ se, e somente se,

$$\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+}\left(|\nabla v|^2 + m^2|v|^2\right) + \int_{\mathbb{R}^N} V(y)|\gamma(v)|^2 = \int_{\mathbb{R}^N}\left[W * F(\gamma(v))\right] f(\gamma(v))\gamma(v).$$

Note que, se $v \neq 0$ for um ponto crítico de I, isto é, se $I'(v) = 0$, então necessariamente v pertence a $\mathcal{N}$. Assim, $\mathcal{N}$ é uma restrição natural para o problema de encontrar pontos críticos não triviais (isto é, $v \neq 0$) de I. A abordagem utilizando a variedade

[2] Para detalhes, veja [23, Example 6.4.1].

de Nehari transforma um problema de minimização em um problema de minimização com vínculo.

Observação 1.6.1. *Apesar de $\mathcal{N}$ ser chamado de variedade de Nehari, pode ocorrer desse conjunto não ser uma variedade para outros funcionais I. Mostrar-se-á que, para o funcional I, $\mathcal{N}$ realmente é uma variedade.*

Sabe-se que $0 \in \mathbb{R}$ é um valor regular de $\Phi \colon U \subset H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \to \mathbb{R}$ se, para todo $u \in U$ tal que $\Phi(u) = 0$, tiver $\Phi'(u) \neq 0$. Se 0 for um valor regular de Φ, então $\Phi^{-1}(0)$ é uma superfície de codimensão 1 em $H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

No caso em que se está trabalhando, o aberto U é dado por $H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \setminus \{0\}$ e, definindo $\Phi(u) = \langle I'(u), u\rangle$, tem-se $u \in \mathcal{N}$ se, e somente se, $\Phi(u) = 0$. Uma vez que $\langle \Phi'(u), h\rangle = \langle\langle I''(u), h\rangle, u\rangle + \langle I'(u), h\rangle$, tem-se $\langle \Phi'(u), u\rangle = \langle\langle I''(u), u\rangle, u\rangle + \langle I'(u), u\rangle = \langle\langle I''(u), u\rangle, u\rangle$. Assim, se tiver $\langle\langle I''(u), u\rangle, u\rangle \neq 0$, então 0 é valor regular de φ.

Escrevendo, como antes, $I(u) = \frac{1}{2}\left(I_1(u) + I_2(u)\right) - \Psi(u)$ e nota-se que $\langle I_i'(u), u\rangle = I_i(u)$, de modo que $\left\langle\langle I_i''(u), u\rangle, u\right\rangle = 2I_i$ para $i = 1, 2$. Além disso, tem-se

$$\langle \Psi'(u), u\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(u))]\, f(\gamma(u))\gamma(u),$$

de modo que $u \in \mathcal{N}$ implica

$$I_1(u) + I_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(u))]\, f(\gamma(u))\gamma(u). \tag{1.26}$$

Assim, aplicando (1.26) e a desigualdade de Ambrosetti-Rabinowitz, obtêm-se

$$\begin{aligned}
\langle\langle I''(u), u\rangle, u\rangle &= 2\left(I_1(u) + I_2(u)\right) - \left[\int_{\mathbb{R}^N} [W * (f(\gamma(u))\gamma(u))] f(\gamma(u))\gamma(u))\right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(u))] f'(\gamma(u))\gamma(u)^2 + \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(u))] f(\gamma(u))\gamma(u))\right] \\
&\leq \left(I_1(u) + I_2(u)\right) - \left[2\int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(u))] f(\gamma(u))\gamma(u))\right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(u))] f'(\gamma(u))\gamma(u)^2\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(u))] \left[-f(\gamma(u))\gamma(u)) - f'(\gamma(u))\gamma(u)^2\right] \\
&\leq -2\int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(u))] f(\gamma(u))\gamma(u)).
\end{aligned}$$

Observe que, na última desigualdade, utiliza-se a hipótese **(f3)**, isto é,

$$f'(\gamma(u))\gamma(u)^2 > f(\gamma(u))\gamma(u).$$

Tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(u))] f(\gamma(u))\gamma(u)) < 0$$

como consequência da definição da variedade de Nehari $\mathcal{N}$.

Assim, tendo em vista o Lema 1.6.2 (que demonstrar-se-á na sequência), pode-se concluir que $\varphi^{-1}(0) = \mathcal{N}$ é uma superfície *fechada* de codimensão 1 em $H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ e não apenas em $H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \setminus \{0\}$.

Lema 1.6.2. *Existe $M > 0$ tal que:*

$$\|v\| \geq M, \ \ \forall\, v \in \mathcal{N}.$$

Demonstração. Uma vez que $\langle I(v), v\rangle = 0$ se, e somente se,

$$\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(|\nabla v|^2 + m^2 v^2\right) + \int_{\mathbb{R}^N} V(y)|\gamma(v)|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(v))]\, f(\gamma(v))\gamma(v),$$

as estimativas obtidas em (1.23) e no Lema 1.4.2 garantem que, para constantes positivas K e C_2, vale[3]

$$2K\|v\|^2 \leq C_2 \left(\|v\|^2 + \|v\|^\theta\right)^2.$$

Dessa desigualdade decorre o afirmado. □

Na continuação, segue-se como referência a seção 3 do artigo de Rabinowitz [47] e a seção 2 do trabalho de Felmer, Quaas e Tan [25]. Note que, como está supondo-se $f(t) = 0$ se $t < 0$, o Lema 1.6.2 permite concluir que, se $v \in \mathcal{N}$, então $v_+ \neq 0$.

Fixado $v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ tal que $v_+ \neq 0$, defina a função $\beta\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ pondo

$$\beta_v(t) = I(tv).$$

Claramente tem-se $\beta_v(0) = 0$ e, pela geometria do passo da montanha, $\beta_v(t) > 0$ para t suficientemente pequeno e $\beta_v(t) < 0$ para t suficientemente grande. Tem-se que

$$\beta_v(t) = I_1(tv) + I_2(tv) - g_v(tv) = t^2[I_1(v) + I_2(v)] - g_v(t),$$

[3] Observe que está aplicando-se a condição de Ambrosetti-Rabinowitz A.1.2 para se n estar nas hipóteses do Lema 1.4.2.

mantendo a notação do Teorema 1.5.1. Como g_v' é estritamente crescente, $\max_{t\geq 0}\beta_v(t)$ é atingindo em um único ponto $t_v = t(v) > 0$, com $\beta_v'(tv) > 0$ para $t < t_v$ e $\beta_v'(tv) < 0$ para $t > t_u$. Observe que

$$\beta_v'(t_v) = \langle I'(t_v v), v\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad t_v\langle I'(t_v v), v\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle I'(t_v v), t_v v\rangle = 0.$$

Portanto, $t_v v$ é o único ponto no raio $t \mapsto tv$ que intercepta $\mathcal{N}$ para $t > 0$. Ou seja, a variedade de Nehari é descrita como o conjunto dos pontos de máximo do funcional $\beta_v(t) = I(tv)$, isto é,

$$\max_{t\geq 0} I(tv) = I(t_v v).$$

(Esse resultado já era esperado, tendo em vista a Observação 1.6.1.)

Define-se

$$\alpha^* = \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u) \qquad \text{e} \qquad \alpha^{**} = \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I(tu)$$

e relembrando que

$$\Lambda = \left\{\lambda \in C\left([0,1], H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)\right) \,:\, \lambda(0) = 0 \text{ e } I(\lambda(1)) < 0\right\},$$

então

$$0 < \alpha = \inf_{\lambda\in\Lambda}\max_{t\in[0,1]} I(\lambda(t)).$$

Lema 1.6.3. *Vale*

$$\alpha = \alpha^* = \alpha^{**}.$$

Demonstração. Para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ tal que $u_+ \neq 0$ tem-se $\max_{t\geq 0} I(tu) = I(t_u u)$ com $t_u u \in \mathcal{N}$. Tomando o ínfimo em $H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \setminus \{0\}$ na igualdade anterior obtém-se

$$\alpha^{**} = \alpha^*,$$

pois $t_u u \in \mathcal{N}$.

Dado $u \in \mathcal{N}$, tome $T > 0$ suficientemente grande de modo que $I(Tu) < 0$ e considere o caminho $\lambda(t) = t(Tu)$. (Observe que o Teorema 1.5.1 garante que $I(Tu) < 0$

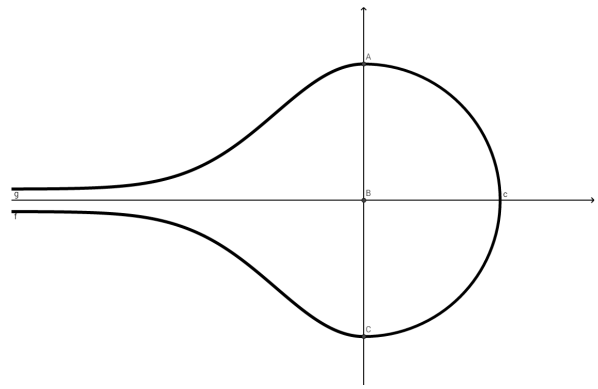

Figura 1.1: Esboço da variedade de Nehari $\mathcal{N}$. O semi-eixo horizontal positivo denota o cone de funções positivas, o semi-eixo negativo o cone das funções negativas.

para T suficientemente grande, pois $(Tu)_+ \neq 0$.) Então $\lambda \in \Lambda$ e $0 < t_{Tu} < 1$. Daí

$$\begin{aligned}
\alpha^{**} = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)\setminus\{0\}} \max_{t \geq 0} I\left(t(Tu)\right) &= \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)\setminus\{0\}} I(\lambda(t_{Tu})) \\
&= \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)\setminus\{0\}} \max_{t \in [0,1]} I(\lambda(t)) \\
&\geq \inf_{\lambda \in \Lambda} \max_{t \in [0,1]} I(\lambda(t)) = \alpha.
\end{aligned}$$

Para provar a desigualdade contrária, afirma-se que todo caminho $\lambda \in \Lambda$ intercepta $\mathcal{N}$, isto é, existe $t \in (0,1)$ tal que $\lambda(t) \in \mathcal{N}$. De fato, suponha que $\langle I'(u), u \rangle > 0$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \setminus \{0\}$. (Essa igualdade é obviamente satisfeita para todo $u \neq 0$ tal que $u_+ = 0$, mas estes pontos não pertencem a $\mathcal{N}$.) Então

$$I_1(u) + I_2(u) > \int_{\mathbb{R}^N} \left[W * F(\gamma(u))\right] f(\gamma(u))\gamma(u).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\left(I_1(u) + I_2(u)\right) - \Psi(u) = \frac{1}{2}\left(I_1(u) + I_2(u)\right) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[W * F(\gamma(u))\right] F(\gamma(u)) \\
&> \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[W * F(\gamma(u))\right] f(\gamma(u))\gamma(u) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[W * F(\gamma(u))\right] F(\gamma(u)) \\
&> \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[W * F(\gamma(u))\right] \left[f(\gamma(u))\gamma(u) - 2F(\gamma(u))\right] \\
&> 0,
\end{aligned}$$

como consequência da desigualdade de Ambrosetti-Rabinowitz (veja o Lema A.1.2). Assim, assumindo que $I'(\lambda(t))\lambda(t) > 0$ para todo $t \in (0,1]$, conclui-se que $I(\lambda(t)) \geq 0$

para todo $t \in (0,1]$, o que contradiz $I(\lambda(1)) < 0$.

Portanto,

$$\max_{t\in[0,1]} I(\lambda(t)) \geq \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u) = \alpha^*,$$

de onde decorre que

$$\alpha \geq \alpha^* = \alpha^{**}.$$

A prova está completa. $\square$

Observação 1.6.4. *Na próxima seção mostrar-se-á que, considerada uma sequência minimizante $v_n \rightharpoonup v$, existe uma outra sequência minimizante $w_n \rightharpoonup w$ tal que $I(w_n) \to I(w)$, com $w \in \mathcal{N}$. Assim, a existência de uma subsequência da sequência minimizante que convirja forte, como exigido pela condição de Palais-Smale, será contornado.*

1.7 A Sequência Minimizante

Lema 1.7.1. *Seja $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ uma sequência tal que*

$$I'(v_n) \to 0 \qquad e \qquad I(v_n) \to \alpha^* = \alpha \qquad \text{quando } n \to +\infty.$$

Então $\{v_n\}$ é limitada.

Demonstração. Como $I(v_n) \to \alpha$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_1$ vale

$$|I(v_n) - \alpha| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad I(v_n) < \alpha + 1. \tag{1.27}$$

Já que $I'(v_n) \to 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_2$ implica

$$-\langle I'(v_n), v_n\rangle \leq \|I'(v_n)\| \, \|v_n\| < 2\|v_n\|. \tag{1.28}$$

Uma vez que

$$\langle I'(v_n), v_n\rangle = I_1(v_n) + I_2(v_n) - \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(v_n))] \, f(\gamma(v_n))\gamma(v_n)$$

e

$$I(v_n) = \frac{1}{2}\left(I_1(v_n) + I_2(v_n)\right) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(v_n))] \, F(\gamma(v_n)),$$

então, aplicando a desigualdade de Ambrosetti-Rabinowitz e posteriormente a desigualdade (1.12) tem-se:

$$
\begin{aligned}
&4I(v_n) - \langle I'(v_n), v_n\rangle \\
&\qquad = \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(|\nabla v_n|^2 + m^2|v_n|^2\right) + \int_{\mathbb{R}^N} (V+V_0)|\gamma(v_n)|^2 - V_0\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^2 \\
&\qquad\quad + \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(v_n))]\,[f(\gamma(v_n))\gamma(v_n) - 2F(\gamma(v_n))] \\
&\qquad \geq \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(|\nabla v_n|^2 + m^2|v_n|^2\right) - V_0\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^2 \\
&\qquad \geq 2K\|v_n\|^2, \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

como consequência da desigualdade (1.23).

Para $N \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, substituindo (1.27) e (1.28) em (1.29), obtém-se

$$4\alpha + 4 + 2\|v_n\| \geq 4I(v_n) - \langle I'(v_n), v_n\rangle \geq 2K\|v_n\|^2.$$

A última desigualdade seria falsa se $\|v_n\|$ pudesse ser tomada suficientemente grande. Isto mostra que $\{v_n\}$ é limitada. □

Uma vez que a sequência minimizante $\{v_n\}$ é limitada, passando a uma subsequência pode-se supor que

$$v_n \rightharpoonup u \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+),$$

pois $H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ é reflexivo.

A demonstração do próximo resultado é canônica, utilizando o fato das imersões

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \qquad (1.30)$$

$$W^{1/2,2}(\Omega') \hookrightarrow L^q(\Omega') \qquad (1.31)$$

serem compactas, respectivamente, para todo $r \in [2, 2^*)$ e $q \in [1, 2^\sharp)$, em que os abertos limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}_+$ e $\Omega' \subset H^{1/2}(\mathbb{R}^N) = W^{1/2,2}(\mathbb{R}^N)$ possuem fronteira de Lipschitz. (Veja [21, Corolário 4.53].) Dado um compacto arbitrário $K \subset \mathbb{R}^{N+1}_+$ (ou $K' \subset \mathbb{R}^N$), basta tomar um aberto com fronteira de Lipschitz $\Omega \supset K$ em $\mathbb{R}^{N+1}_+$ (ou $\Omega' \supset K'$ em $\mathbb{R}^N$), e utilizar a imersão compacta. A obtenção da convergência pontual decorre de resultados clássicos da teoria da medida.

Lema 1.7.2. *Passando a uma subsequência (se necessário), $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ implica*

$$v_n(z) \to v(z) \ \text{q.t.p. em} \ \mathbb{R}^{N+1}_+, \ \ v_n \to v \ \text{em} \ L^r_{loc}(\mathbb{R}^{N+1}_+), \ \forall\, r \in [2, 2^*)$$

e

$$\gamma(v_n(y)) \to \gamma(u(y)) \;\; q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N, \;\; \gamma(v_n) \to \gamma(v) \;\; em \;\; L^q_{loc}(\mathbb{R}^N), \;\; \forall\, q \in [2, 2^\sharp).$$

A demonstração do resultado a seguir pode ser encontrada, por exemplo, em [30, Lema 4.8, Capítulo 1]:

Lema 1.7.3. *Seja $U \subsetneqq \mathbb{R}^N$ um aberto qualquer. Supõe-se que, para $1 < p < \infty$, $\{\xi_n\}$ seja uma sequência limitada em $L^p(U)$ tal que $\xi_n(y) \to \xi(y)$ q.t.p. Então $\xi_n \rightharpoonup \xi$ em $L^p(U)$.*

Lema 1.7.4. *Suponha que a sequência $\{v_n\} \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ seja tal que $v_n \rightharpoonup v$. Se $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(v_n))]\, f(\gamma(v_n)) \gamma\left[(v_n - v)\varphi\right] \to 0 \quad quando \;\; n \to +\infty.$$

Demonstração. Tem-se que $\gamma(v_n) \rightharpoonup \gamma(v)$. Decompondo $W = W_1 + W_2$, considere inicialmente W_1. Decorre da a Proposição 1.3.6 que $F(\gamma(v_n))$ é limitada em $L^p(\mathbb{R}^N)$, com o valor de p dependendo do valor de r da hipótese $(\boldsymbol{W_h})$. Além disso,

$$F(\gamma(v_n(x))) \to F(\gamma(v(x)))$$

q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Conclui-se que $F(\gamma(v_n)) \rightharpoonup F(\gamma(v))$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ ao aplicar o Lema 1.7.3. De acordo com a Proposição 1.3.6, $\zeta \mapsto W_1 * \zeta$ é um operador linear limitado de $L^p(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2N/[N(2-\theta)+\theta]}(\mathbb{R}^N)$ ou em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, no caso $r > \frac{2N}{N(2-\theta)+\theta}$). Consequentemente,

$$W_1 * F(\gamma(v_n)) \rightharpoonup W_1 * F(\gamma(v))$$

em um desses espaços.

Considerando o Lema A.1.1 e imitando a demonstração do Corolário 1.3.2, verifica-se imediatamente que $f(\gamma(v_n))$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. (Então, repetindo a argumentação anterior, conclui-se que $f(\gamma(v_n)) \rightharpoonup f(\gamma(v))$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$.)

Como $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, φ se anula fora de um compacto $K \subset \mathbb{R}^{N+1}_+$. A imersão

$$H^1(K) \hookrightarrow L^q(K)$$

é compacta para $q \in [1, 2^\sharp)$, segundo o Teorema de Rellich-Kondrachov. Portanto, a menos de subsequência, $v_n \to v$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ para $q \in [2, 2^\sharp) \subset [1, 2^*)$.

Agora considere a desigualdade de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(v_n))]\, f(\gamma(v_n)) \gamma\left[(v_n - v)\varphi\right] \le |W * F(\gamma(v_n))|_a\, |f(\gamma(v_n))|_2\, |\gamma((v_n - v)\varphi)|_q$$

no caso em que $a = 2N/[N(2-\theta)+\theta]$. Tem-se

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2} = \frac{N(2-\theta)+\theta}{2N} + \frac{1}{2} = \frac{3N-\theta(N-1)}{2N}.$$

Como $2 \le \theta < 2N/(N-1)$, vale

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2^\sharp},$$

o que mostra que a desigualdade de Hölder colocada acima pode ser aplicada com $q \in [2, 2^\sharp]$. No caso $a = \infty$ basta tomar $q = 2$. Assim, o resultado está provado para W_1.

A demonstração para W_2 é análoga, apenas alterando alguns espaços envolvidos: aplicando o Corolário 1.3.2, obtém-se $F(\gamma(v_n)) \rightharpoonup F(\gamma(v))$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Tem-se que $\xi \longmapsto W_2 * \xi$ estabelece um operador linear contínuo de $L^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (veja o Lema 1.4.2). Conclui-se que

$$W_2 * F(\gamma(v_n)) \rightharpoonup W_2 * F(\gamma(v))$$

em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. O resto da demonstração para W_2 é idêntico ao que foi feito para W_1. □

Observação 1.7.5. *No Lema A.3.1 apresentar-se-á uma demonstração alternativa do Lema 1.7.4, na qual utilizou-se a desigualdade de Lieb (Proposição 1.4.1).*

O próximo resultado é uma ligeira variação sobre um resultado clássico; será apresentada sua demonstração para comodidade do leitor, adaptando aquela apresentada em [56, Lemma 1.21]:

Lema 1.7.6. *Seja $\{v_n\}$ uma sequência minimizante como no Lema 1.7.1. Então existem $R, \delta > 0$ e uma sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ satisfazendo*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |\gamma(v_n)|^2 \ge \delta.$$

Demonstração. Suponha que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |\gamma(v_n)|^2 = 0.$$

Então, dados $R > 0$ e $y \in \mathbb{R}^N$, decorre da desigualdade de Hölder que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $q \in [2, 2^*]$, vale

$$|\gamma(v_n)|_{L^q(B_R(y))} \leq |\gamma(v_n)|^{1-\lambda}_{L^2(B_R(y))}|\gamma(v_n)|^{\lambda}_{L^{2^*}(B_R(y))},$$

em que

$$\frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2^*} = \frac{1}{q}.$$

Cobrindo $\mathbb{R}^N$ com bolas de raio R de maneira que cada ponto do $\mathbb{R}^N$ esteja contido no máximo em $N+1$ bolas, deduz-se que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^q \leq \lim_{n\to\infty} (N+1)|\gamma(v_n)|^{q(1-\lambda)}_{L^2(B_R(y))}|\gamma(v_n)|^{q\lambda}_{L^{2^*}(B_R(y))}.$$

Considerando a imersão compacta $W^{1/2,2}(B_R(y)) \hookrightarrow L^q(B_R(y))$ e as hipóteses postuladas, o lado direito da desigualdade anterior é igual a zero. Portanto, $\gamma(v_n) \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q \in [2, 2^*]$. É fácil então verificar que $W * F(\gamma(v_n))$ é limitada (veja a demonstração do Lema 1.4.2 ou a desigualdade de Hausdorff-Young, Proposição 1.3.5). Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(v_n))]\, f(\gamma(v_n))\gamma(v_n) \to 0.$$

Esse fato gera uma contradição com o Lema 1.7.1, pois $\{v_n\} \subset \mathcal{N}$: para detalhes, veja a demonstração daquele resultado. □

Teorema 1.7.7. *Assumindo as hipóteses* **(f1), (f2),(f3), (V′)** *e* $(\mathbf{W_h})$*, o problema*

$$\begin{cases} -\Delta v + m^2 v = 0 \ \ em \ \ \mathbb{R}^{N+1}_+ \\ \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -V_1 v + [W * F(v)]\, f(v), \ (x,y) \in \{0\} \times \mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.32}$$

possui uma solução não negativa de energia mínima.

Demonstração. Seja $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ uma sequência minimizante. De acordo com o Lema 1.7.6, existem $R, \delta > 0$ e uma sequência $\{y_n\} \in \mathbb{R}^N$ satisfazendo

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |\gamma(v_n)|^2 \geq \delta.$$

Definindo

$$w_n(x,y) = v_n(x, y - y_n),$$

existe $\delta > 0$ de modo que

$$\int_{B_R(0)} |\gamma(w_n)|^2 \geq \frac{1}{2}\delta. \tag{1.33}$$

Observe que I e I' são invariantes por translações, pois por hipótese $V(y) = V_1$. Conclui-se que

$$I'(w_n) \to 0 \qquad \text{e} \qquad I(w_n) \to \alpha.$$

Aplicando o Lema 1.7.1 conclui-se que w_n também é limitada; portanto, a menos de subsequência, vale

$$w_n \rightharpoonup w \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+).$$

Decorre então do Lema 1.7.2 que, passando a uma subsequência, tem-se $w_n \to w$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, $w_n(z) \to w(z)$ q.t.p em $\mathbb{R}^{N+1}_+$, $\gamma(w_n) \to \gamma(w)$ em $L^t_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para todo $t \in [2, \frac{2N}{N-1}]$ e $\gamma(w_n(y)) \to \gamma(w(y))$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, considera-se $\psi_n = (w_n - w)\varphi \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$. Tem-se

$$\begin{aligned}\langle I'(w_n), \psi_n \rangle &= \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \nabla w_n \cdot \nabla \psi_n + \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} m^2 w_n \psi_n + \int_{\mathbb{R}^N} V_1 \gamma(w_n)\gamma(\psi_n) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(w_n)]\, f(\gamma(w_n))\gamma(\psi_n) \\ &=: J_1 + J_2 + J_3 - J_4. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Como consequência do Lema 1.7.4, tem-se

$$J_4(w_n) = \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(w_n))]\, f(\gamma(w_n))\gamma(\psi_n) \to 0 \quad \text{quando } \ n \to \infty.$$

Como $\{w_n\}$ é limitada e $\psi_n \to 0$ quando $n \to \infty$, um simples argumento (já apresentado no Lema 1.7.4) implica:

$$J_2(w_n) = \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} m^2 w_n \psi_n \to 0 \quad \text{quando } \ n \to \infty.$$

O mesmo vale para

$$J_3(w_n) = \int_{\mathbb{R}^N} V_1 \gamma(w_n)\gamma(\psi_n),$$

pois $\gamma(w_n)$ é limitada e $\gamma(\psi_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Agora considera-se J_1:

$$
\begin{aligned}
J_1(w_n) &= \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \nabla w_n \cdot \nabla((w_n - w)\varphi) \\
&= \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \nabla w_n \cdot \varphi \nabla(w_n - w) + \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \nabla w_n \cdot (w_n - w)\nabla\varphi \\
&= \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla(w_n - w)|^2\varphi + \varphi\nabla v \cdot \nabla(w_n - v) + \nabla w_n \cdot (w_n - w)\nabla\varphi.
\end{aligned}
$$

Uma vez que

$$\langle I'(w_n), (w_n - w)\varphi\rangle \to 0,$$

deduz-se que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla(w_n - w)|^2\varphi = -\Bigg(&\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \varphi\nabla w \cdot \nabla(w_n - w) \\
&+ \lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} (w_n - w)\nabla w_n \cdot \nabla\varphi\Bigg). \qquad (1.35)
\end{aligned}
$$

Observe que, para $\phi \in H^1(\mathbb{R}_+^{N+1})$, $\phi \mapsto \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \varphi\nabla w\nabla\phi$ define um funcional linear contínuo. Como $w_n \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}_+^{N+1})$, logo:

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \varphi\nabla w \cdot \nabla(w_n - w) = 0.$$

E

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} (w_n - w)\nabla w_n \cdot \nabla\varphi = 0$$

pois $\{\nabla w_n\}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. De (1.35), conclui-se que:

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla(w_n - w)|^2\varphi = 0,$$

e portanto:

$$\nabla w_n(x,y) \to \nabla w(x,y) \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}_+^{N+1}.$$

Como ∇w_n é limitada em $L^2(\mathbb{R}_+^{N+1})$, aplicando o Lema (1.7.3) obtêm-se:

$$\nabla w_n \rightharpoonup \nabla w \ \text{ em } \ L^2(\mathbb{R}_+^{N+1}).$$

Conclui-se que $\langle I'(w_n), \psi\rangle \to \langle I'(w), \psi\rangle$ quando $n \to \infty$ para toda $\psi \in H^1(\mathbb{R}_+^{N+1})$. Como $\langle I'(w_n), \psi\rangle \to 0$ quando $n \to \infty$, obtêm-se, $\langle I'(w), \psi\rangle = 0$ para toda $\psi \in$

$H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$. Portanto
$$\langle I'(w), w\rangle = 0,$$
mostrando que $w \in \mathcal{N}$. Note que $w \neq 0$ por (1.33).

Para concluir a demonstração resta mostrar que a solução w é não negativa (fato que está implícito nas considerações sobre $\mathcal{N}$). Sabe-se que

$$\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(\nabla w \cdot \nabla \varphi + m^2 w\varphi\right) + \int_{\mathbb{R}^N} V_1 \gamma(w)\gamma(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(w))]\, f(\gamma(w))\gamma(\varphi).$$

Escolhendo $\varphi = w_-$, o lado esquerdo da igualdade é positivo, pois é igual a

$$\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(|\nabla w_-|^2 + m^2 |w_-|^2\right) + \int_{\mathbb{R}^N} V_1 |\gamma(w_-)|^2 \geq K\|w_-\|^2,$$

enquanto
$$\int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(w))]\, f(\gamma(w_-))\gamma(w_-) = 0.$$
Conclui-se assim que $w_- = 0$. □

1.8 Estudo da Regularidade da Solução

Nesta seção provar-se-á que qualquer solução fraca de (1.5) (em particular, aquela obtida na seção anterior) é uma solução clássica. Denota-se por v uma solução fraca qualquer de (1.5).

Será apresentado alguns resultados técnicos que serão úteis na argumentação desta seção. Inicia-se reproduzindo um resultado demonstrado em Coti Zelati e Nolasco em [18]:

Lema 1.8.1. *Para todo $\theta \in [2\,,\, \frac{2N}{N-1})$, tem-se que $|\gamma(v)|^{\theta-2} \leq 1 + g_2$, com $g_2 \in L^N(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Seja χ_A a função indicadora do conjunto A, isto é, $\chi_A(x) = 1$, se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$, se $x \notin A$. Tem-se

$$|\gamma(v)|^{\theta-2} = |\gamma(v)|^{\theta-2}\chi_{\{|\gamma(v)|\leq 1\}} + |\gamma(v)|^{\theta-2}\chi_{\{|\gamma(v)|>1\}} \leq 1 + g_2,$$

em que $g_2 = |\gamma(v)|^{\theta-2}\chi_{\{|\gamma(v)|>1\}}$.

Se $(\theta-2)N \leq 2$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^{(\theta-2)N}\chi_{\{|\gamma(v)|>1\}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^2\chi_{\{|\gamma(v)|>1\}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^2 < \infty.$$

Quando $2 \leq (\theta - 2)N$, então $(\theta - 2)N \in \left(2, \frac{2N}{N-1}\right)$ e $|\gamma(v)|^{\theta-2} \in L^N(\mathbb{R}^N)$ como consequência da Proposição 1.3.1. $\square$

Lema 1.8.2. *Para toda $\theta \in [2\,, \frac{2N}{N-1})$ tem-se $h = g|\gamma(v)|^{\theta-2} \in L^N(\mathbb{R}^N)$, sendo g a função do Lema 1.3.7.*

Demonstração. Pela desigualdade de Hölder, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(g|\gamma(v)|^{\theta-2}\right)^N \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} g^{N\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\gamma(v)|^{(\theta-2)N}\right)^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}.$$

Define-se α de modo que $\alpha N = 2N/[N(2-\theta)+\theta]$. Logo, $\alpha' = 2/[(N-1)(\theta-2)]$ e assim $\alpha' N(2-\theta) = 2N/[N-1]$. Como ambas as integrais do lado direito da última desigualdade são finitas, o resultado decorre daí. $\square$

O próximo resultado adapta argumentos apresentados em [10] e [18].

Lema 1.8.3. *Para todo $\beta > 0$ tem-se:*

$$\begin{aligned}|\gamma(v_+)^{1+\beta}|^2_{2^\sharp} \leq 2C^2_{2^\sharp} C_\beta \Big[&(|V|_\infty + CC_1(2+M))\,|\gamma(v_+)^{1+\beta}|^2_2 \\ &+ C_1 |g|_{2N/[N(2-\theta)+\theta]} |\gamma(v_+)^{1+\beta}|^2_{2^\sharp(2/\theta)} \Big],\end{aligned}$$

em que $C_\beta = \max\{m^{-2}, \left(1+\frac{\beta}{2}\right)\}$, $C, C_1, \tilde{C}$ e $M = M(\beta)$ são constantes positivas e $g = |W_1 * F(\gamma(v))|$ é a função dada pela Proposição 1.3.6, para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

Demonstração. Para $\beta > 0$ arbitrário, ao se definir $\varphi = \varphi_{\beta,T} = v v_T^{2\beta}$, sendo $v_T = \min\{v_+, T\}$, tem-se $0 \leq \varphi_{\beta,T} \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$. Substituindo essa função teste em (1.18) (expressão que define a derivada do funcional energia I), obtêm-se

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \left(\nabla v \cdot \nabla \varphi_{\beta,T} + m^2 v \varphi_{\beta,T}\right) \\ &\qquad = -\int_{\mathbb{R}^N} V(y)\gamma(v)\gamma(\varphi_{\beta,T}) + \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(v))]\, f(\gamma(v))\gamma(\varphi_{\beta,T}). \quad (1.36)\end{aligned}$$

Uma vez que $\nabla\varphi_{\beta,T} = v_T^{2\beta}\nabla v + 2\beta v v_T^{2\beta-1}\nabla v_T$, o lado esquerdo de (1.36) é dado por

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \nabla v \cdot \left(v_T^{2\beta}\nabla v + 2\beta v v_T^{2\beta-1}\nabla v_T\right) + m^2 v \left(v v_T^{2\beta}\right) \\ &\qquad = \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} v_T^{2\beta}\left[|\nabla v|^2 + m^2 v^2\right] + 2\beta \iint_{D_T} v_T^{2\beta} |\nabla v|^2, \quad (1.37)\end{aligned}$$

em que $D_T = \{(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^N : v_T(x,y) \leq T\}$.

Agora expressa-se (1.37) em função de $\|vv_T^\beta\|^2$. Para isso, nota-se que $\nabla(vv_T^\beta) = v_T^\beta \nabla v + \beta v v_T^{\beta-1} \nabla v_T$. Portanto,

$$\iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla(vv_T^\beta)|^2 = \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} v_T^{2\beta}|\nabla v|^2 + (2\beta+\beta^2) \iint_{D_T} v_T^{2\beta}|\nabla v|^2,$$

o que produz

$$\begin{aligned} \|vv_T^\beta\|^2 &= \left(\iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} v_T^{2\beta}|\nabla v|^2 + (2\beta+\beta^2)\iint_{D_T} v_T^{2\beta}|\nabla v|^2\right) + \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} (vv_T^\beta)^2 \\ &= \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} v_T^{2\beta}\left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right) + 2\beta\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\iint_{D_T} v_T^{2\beta}|\nabla v|^2 \\ &\leq C_\beta\left[\iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} v_T^{2\beta}\left(|\nabla v|^2 + m^2|v|^2\right) + 2\beta\iint_{D_T} v_T^{2\beta}|\nabla v|^2\right], \end{aligned} \tag{1.38}$$

com $C_\beta = \max\left\{m^{-2}, \left(1+\frac{\beta}{2}\right)\right\}$. Reunindo (1.36), (1.37) e (1.38), obtêm-se

$$\|vv_T^\beta\|^2 \leq C_\beta\left[-\int_{\mathbb{R}^N} V(y)\gamma(vv_T^\beta)^2 + \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(v))]\, f(\gamma(v))\gamma(v)\gamma(v_T^{2\beta})\right]. \tag{1.39}$$

Agora será tratado o lado direita da desigualdade (1.39). Uma vez que $|f(t)| \leq C_1(|t| + |t|^{\theta-1})$, as hipóteses e o Corolário 1.3.7 garantem que pode-se escrevê-lo como

$$\begin{aligned} \|vv_T^\beta\|^2 \leq& C_\beta\left[|V|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(vv_T^\beta)^2 + \int_{\mathbb{R}^N} (C+g)|f(\gamma(v))|\,|\gamma(v)|\gamma(v_T)^{2\beta}\right] \\ \leq& C_\beta\left[|V|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(vv_T^\beta)^2 + C\int_{\mathbb{R}^N} C_1\left(|\gamma(v)| + |\gamma(v)|^{\theta-1}\right)|\gamma(v)|\gamma(v_T)^{2\beta}\right. \\ &\left. + C_1\int_{\mathbb{R}^N} g\left(|\gamma(v)| + |\gamma(v)|^{\theta-1}\right)|\gamma(v)|\gamma(v_T)^{2\beta}\right] \\ \leq& C_\beta\left[(|V|_\infty + CC_1)\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(vv_T^\beta)^2 + CC_1\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^{\theta-2}\gamma(vv_T^\beta)^2\right. \\ &\left. + C_1\int_{\mathbb{R}^N} g\gamma(vv_T^\beta)^2 + C_1\int_{\mathbb{R}^N} g|\gamma(v)|^{\theta-2}\gamma(vv_T^\beta)^2\right]. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Aplicando os Lemas 1.8.1 e 1.8.2 na desigualdade (1.40), obtêm-se

$$\begin{aligned}
\|vv_T^\beta\|^2 \leq & C_\beta \left[(|V|_\infty + CC_1) \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(vv_T^\beta)^2 + CC_1 \int_{\mathbb{R}^N} (1+g_2)\,\gamma(vv_T^\beta)^2 \right. \\
& \left. + C_1 \int_{\mathbb{R}^N} g\gamma(vv_T^\beta)^2 + C_1 \int_{\mathbb{R}^N} h\gamma(vv_T^\beta)^2 \right] \\
\leq & C_\beta \left[(|V|_\infty + 2CC_1) \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(vv_T^\beta)^2 + CC_1 \int_{\mathbb{R}^N} g\gamma(vv_T^\beta)^2 + CC_1 \int_{\mathbb{R}^N} G\gamma(vv_T^\beta)^2 \right],
\end{aligned} \tag{1.41}$$

em que $G = g_2 + h \in L^N(\mathbb{R}^N)$, admitindo que $CC_1 \geq C_1$.

Uma vez que $|\gamma(u)|_{2^\sharp} \leq C_{2^\sharp}\|u\|$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}_+^{N+1})$ (esse é o Corolário 1.3.3), decorre de (1.39) e (1.41) que

$$\begin{aligned}
|\gamma(vv_T^\beta)|_{2^\sharp}^2 \leq C_{2^\sharp}^2 C_\beta & \left[(|V|_\infty + 2CC_1) \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(vv_T^\beta)^2 + CC_1 \int_{\mathbb{R}^N} g\gamma(vv_T^\beta)^2 \right. \\
& \left. + CC_1 \int_{\mathbb{R}^N} G\gamma(vv_T^\beta)^2 \right].
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Considera-se a última integral no lado direito de (1.42). Para todo $M > 0$, denota-se $A_1 = \{G \leq M\}$ e $A_2 = \{G > M\}$. Então, uma vez que $G \in L^N(\mathbb{R}^N)$, vale

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} G\gamma(vv_T^\beta)^2 \leq & M \int_{A_1} \gamma(vv_T^\beta)^2 + \left(\int_{A_2} G^N \right)^{\frac{1}{N}} \left(\int_{A_2} \gamma(vv_T^\beta)^{2\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{N-1}{N}} \\
\leq & M \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(vv_T^\beta)^2 + \varepsilon(M) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(vv_T^\beta)^{2^\sharp} \right)^{\frac{N-1}{N}} \\
\leq & M \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(vv_T^\beta)^2 + \varepsilon(M) |\gamma(vv_T^\beta)|_{2^\sharp}^2,
\end{aligned}$$

em que $\varepsilon(M) := \left(\int_{A_2} G^N \right)^{1/N} \to 0$ quando $M \to \infty$, pois $|A_2| \to 0$.

Assim, se M for tomado suficientemente grande de forma que $\varepsilon(M) C_{2^\sharp}^2 C_\beta C C_1 < 1/2$, substituindo a estimativa da integral de $G\gamma(vv_T^\beta)^2$ em (1.42) obtêm-se

$$\begin{aligned}
|\gamma(vv_T^\beta)|_{2^\sharp}^2 \leq 2C_{2^\sharp}^2 C_\beta & \left[(|V|_\infty + CC_1(2+M)) \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(vv_T^\beta)^2 \right. \\
& \left. + CC_1 \int_{\mathbb{R}^N} g\gamma(vv_T^\beta)^2 \right].
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Agora estima-se a última integral em (1.43): decorre da desigualdade de Hölder que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g\gamma(vv_T^\beta)^2 \le |g|_{2N/[N(2-\theta)+\theta]} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(vv_T^\beta)^{2\alpha'}\right)^{1/\alpha'},$$

para

$$\alpha' = \frac{\frac{2N}{N(2-\theta)+\theta}}{\frac{2N}{N(2-\theta)+\theta}-1} = \frac{2N}{(N-1)\theta} = \frac{2^\sharp}{\theta}.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} g\gamma(vv_T^\beta)^2 \le |g|_{2N/[N(2-\theta)+\theta]}\, |\gamma(vv_T^\beta)|^2_{2^\sharp(2/\theta)}$$

e a substituição dessa última desigualdade no lado direito de (1.43) produz

$$\begin{aligned}|\gamma(vv_T^\beta)|^2_{2^\sharp} \le 2C^2_{2^\sharp}C_\beta \Big[&(|V|_\infty + CC_1(2+M))\,|\gamma(vv_T^\beta)|^2_2 \\ &+C_1|g|_{2N/[N(2-\theta)+\theta]}|\gamma(vv_T^\beta)|^2_{2^\sharp(2/\theta)}\Big].\end{aligned} \tag{1.44}$$

Uma vez que $vv_T^\beta \to v_+^{1+\beta}$ quando $T \to \infty$, aplicando o lema de Fatou e o Teorema da Convergência Monótona, decorre de (1.44) que

$$\begin{aligned}|\gamma(v_+)^{1+\beta}|^2_{2^\sharp} \le 2C^2_{2^\sharp}C_\beta \Big[&(|V|_\infty + CC_1(2+M))\,|\gamma(v_+)^{1+\beta}|^2_2 \\ &+C_1|g|_{2N/[N(2-\theta)+\theta]}|\gamma(v_+)^{1+\beta}|^2_{2^\sharp(2/\theta)}\Big],\end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração. (Observe, contudo, que M depende de β.) □

Lema 1.8.4. *Para todo $p \in [2,\infty)$ e $v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, tem-se $\gamma(v) \in L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Uma vez que $\frac{2N}{N-1}\frac{2}{\theta} \le 2$ não pode ocorrer, tem-se $2 < \frac{2^\sharp 2}{\theta} = \frac{2N}{N-1}\frac{2}{\theta} < 2^\sharp$.

Decorre da Proposição 1.8.3 que

$$|\gamma(v_+)^{1+\beta}|^2_{2^\sharp} \le \left[D_1|\gamma(v_+)^{1+\beta}|^2_2 + E_1|\gamma(v_+)^{1+\beta}|^2_{2^\sharp(2/\theta)}\right], \tag{1.45}$$

para constantes positivas D_1 e E_1.

Tomando $\beta = \beta_1$ de modo que $\beta_1 + 1 := (\theta/2) \ge 1$, o Corolário 1.3.3 garante que

$$|\gamma(v_+)^{1+\beta}|^2_{2^\sharp(2/\theta)} = |\gamma(v_+)|^\theta_{2^\sharp} < \infty.$$

Assim,

$$|\gamma(v_+)|^{\theta}_{2^\sharp\frac{\theta}{2}} \leq \left[D_1|\gamma(v_+)|^{\theta}_{\theta} + E_1|\gamma(v_+)|^{\theta}_{2^\sharp}\right] < +\infty. \tag{1.46}$$

Conclui-se que $|\gamma(v_+)| \in L^{(2^\sharp\theta/2)}(\mathbb{R}^N) = L^{\frac{2N}{N-1}\frac{\theta}{2}}(\mathbb{R}^N) < \infty$.

Escolha $\beta = \beta_2$ tal que $\beta_2 + 1 = (\theta/2)^2$. Substituindo em (1.45), obtêm-se

$$|\gamma(v_+)|^{\theta^2/2}_{2^\sharp\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} \leq \left[D_1|\gamma(v_+)|^{\theta^2/2}_{\frac{\theta^2}{2}} + E_1|\gamma(v_+)|^{\theta^2/2}_{2^\sharp\frac{\theta}{2}}\right] < +\infty, \tag{1.47}$$

e conclui-se que

$$|\gamma(v_+)| \in L^{\frac{2N}{N-1}\frac{\theta^2}{2^2}}(\mathbb{R}^N).$$

Tomando agora $\beta = \beta_k$ de modo que $\beta_k + 1 = \left(\frac{\theta}{2}\right)^k$, após k iterações deduz-se que

$$|\gamma(v_+)|^{\theta^k/2^{(k-1)}}_{2^\sharp\left(\frac{\theta}{2}\right)^k} \leq \left[D_1|\gamma(v_+)|^{\theta^k/2^{(k-1)}}_{\frac{\theta^k}{2^{(k-1)}}} + E_1|\gamma(v_+)|^{\theta^k/2^{(k-1)}}_{2^\sharp\left(\frac{\theta}{2}\right)^{(k-1)}}\right] < +\infty. \tag{1.48}$$

o que garante que

$$|\gamma(v_+)| \in L^{\frac{2N}{N-1}\frac{\theta^k}{2^k}}(\mathbb{R}^N).$$

Prosseguindo, pode-se concluir que $\gamma(v_+) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2,\infty)$. Já que a mesma argumentação aplica-se a v_-, tem-se $\gamma(v) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2,\infty)$. □

A demonstração do próximo resultado também adapta aquela apresentada em Coti Zelati e Nolasco [18].

Lema 1.8.5. *Seja $v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ uma solução fraca de* (1.5)*. Então $\gamma(v) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2,\infty]$ e $v \in L^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.*

Demonstração. Inicia-se recordando a equação (1.39):

$$\|vv_T^\beta\|^2 \leq C_\beta\left[-\int_{\mathbb{R}^N} V\gamma(vv_T^\beta)^2 + \int_{\mathbb{R}^N}[W * F(\gamma(v))]\,f(\gamma(v))\gamma(v)\gamma(v_T^{2\beta})\right],$$

em que $C_\beta = \max\{m^{-2}, (1+\beta^2)\}$.

Uma vez que, pela Proposição 1.8.4, $\gamma(v) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \geq 2$, pode-se concluir que $W * F(\gamma(v)) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, de acordo com argumentos apresentados na Proposição 1.3.6.

Sabe-se também que $|f(t)| \leq C_1(|t| + |t|^{\theta-1})$ e que V é limitada. Portanto, se $C =$

$\max\{|V|_\infty, C_1|W * F(\gamma)|_\infty\}$, tem-se

$$\|vv_T^\beta\|^2 \leq C_\beta C \left[\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(vv_T^\beta)^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\gamma(v)| + |\gamma(v)|^{\theta-1}\right) \gamma(v)\gamma(v_T)^{2\beta}\right]$$
$$\leq C_\beta \left[2C \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(vv_T^\beta)^2 + C \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v)|^{\theta-2}\gamma(vv_T^\beta)^2\right].$$

Já que $|\gamma(v)|^{p-2} = |\gamma(v)|^{p-2}\chi_{\{|\gamma(v)\leq 1\}} + |\gamma(v)|^{p-2}\chi_{\{|\gamma(v)>1\}}$, o fato que

$$|\gamma(v)|^{p-2}\chi_{\{|\gamma(v)>1\}} =: g_3 \in L^{2N}(\mathbb{R}^N),$$

permite concluir que

$$2C\gamma(vv_T^\beta)^2 + C|\gamma(v)|^{\theta-2}\gamma(vv_T^\beta)^2 \leq (C_3 + g_3)\gamma(vv_T^\beta)^2$$

para uma constante positiva C_3 e uma função positiva $g_3 \in L^{2N}(\mathbb{R}^N)$ que não depende de T e de β.

Portanto,

$$\|vv_T^\beta\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (C_3 + g_3)\gamma(vv_T^\beta)^2.$$

e

$$\|v_+^{1+\beta}\|^2 \leq C_\beta \int_{\mathbb{R}^N} (C_3 + g_3)\gamma(v_+^{1+\beta})^2.$$

Já que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_3\gamma(v_+^{1+\beta})^2 \leq |g_3|_{2N}\, |\gamma(v_+)^{1+\beta}|_2\, |\gamma(v_+)^{1+\beta}|_{2^\sharp}$$
$$\leq |g_3|_{2N} \left(\lambda|\gamma(v_+)^{1+\beta}|_2^2 + \frac{1}{\lambda}|\gamma(v_+)^{1+\beta}|_{2^\sharp}^2\right),$$

tem-se

$$|\gamma(v_+)^{1+\beta}|_{2^\sharp}^2 \leq C_{2^\sharp}^2\|v_+^{1+\beta}\|^2$$
$$\leq C_{2^\sharp}^2 C_\beta \left(C_3 + \lambda\, |g|_{2N}\right) |\gamma(v_+)^{1+\beta}|_2^2 + \frac{C_{2^\sharp}^2 C_\beta\, |g_3|_{2N}}{\lambda}|\gamma(v_+)^{1+\beta}|_{2^\sharp}^2, \quad (1.49)$$

e tomando $\lambda > 0$ tal que

$$\frac{C_{2^\sharp}^2 C_\beta\, |g_3|_{2N}}{\lambda} < \frac{1}{2},$$

obtêm-se

$$
\begin{aligned}
|\gamma(v_+)^{1+\beta}|_{2^\#}^2 &\leq C_{2^\#}^2 \|v_+^{1+\beta}\|^2 \\
&\leq C_{2^\#}^2 C_\beta \left(C_3 + \lambda\, |g|_{2N}\right) |\gamma(v_+)^{1+\beta}|_2^2 + \frac{1}{2}|\gamma(v_+)^{1+\beta}|_{2^\#}^2 .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
|\gamma(v_+)^{1+\beta}|_{2^\#}^2 \leq C_\beta \left(2C_{2^\#}^2 C_3 + 2C_{2^\#}^2 \lambda\, |g_3|_{2N}\right) |\gamma(v_+)^{1+\beta}|_2^2 \leq C_4 C_\beta |\gamma(v_+)^{1+\beta}|_2^2. \quad (1.50)
$$

Afirma-se que

$$
C_4 C_\beta \leq C_4(m^{-2} + 1 + \beta) \leq M^2 e^{2\sqrt{1+\beta}}
$$

para uma constante positiva M.

De fato, considere as funções reais

$$
\varphi(x) = \frac{1}{m^2} + x^2 \qquad \text{e} \qquad \psi(x) = e^{2x}.
$$

Observe que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{m^{-2} + x^2}{e^{2x}} = 0.$

Assim, existe $R > 0$ tal que $(m^{-2} + x^2) < M_1 e^{2x}$. Por outro lado, se $x \in [0, R]$, existe $x_0 \in [0, R]$ tal que $\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} = M_0$. Definindo $M_0 = \max_{x \in [0,R]} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ e escolhendo $M > 0$ tal que $M^2 > \max\{M_0, M_1\}$, tem-se

$$
\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} < M^2, \;\; \forall\, x > 0.
$$

Em particular, tomando $x = \sqrt{1+\beta}$, tem-se o afirmado.

Decorre então de (1.50) que

$$
|\gamma(v_+)|_{2^\sharp(1+\beta)} \leq M^{1/(1+\beta)} e^{1/\sqrt{1+\beta}} |\gamma(v_+)|_{2(1+\beta)}.
$$

Agora, aplicando o argumento de iteração de Moser, tomando $2(1 + \beta_{n+1}) = 2^\sharp(1 +$

β_n). Então

$$
\begin{aligned}
|\gamma(v_+)|_{2^\sharp(1+\beta_n)} &\leq M^{\frac{1}{1+\beta_n}} e^{\frac{1}{\sqrt{1+\beta_n}}} |\gamma(v_+)|_{2(1+\beta_{n-1})} \\
&\leq M^{\frac{1}{1+\beta_n}} e^{\frac{1}{\sqrt{1+\beta_n}}} M^{\frac{1}{1+\beta_{n-1}}} e^{\frac{1}{\sqrt{1+\beta_{n-1}}}} |\gamma(v_+)|_{2(1+\beta_{n-2})} \\
&\ \vdots \\
&\leq M^{\sum_{i=0}^n \frac{1}{1+\beta_i}} e^{\sum_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{1+\beta_i}}} |\gamma(v_+)|_{2(1+\beta_0)}. \qquad (1.51)
\end{aligned}
$$

Iniciando essa iteração em $\beta_0 = 0$ tem-se

$$
\begin{aligned}
2(1+\beta_1) = 2^\sharp(1+\beta_0) \quad &\Rightarrow \quad \beta_1 = \frac{2^\sharp}{2} - 1 \\
2(1+\beta_2) = 2^\sharp(1+\beta_1) \quad &\Rightarrow \quad \beta_2 = \left(\frac{2^\sharp}{2}\right)^2 - 1 \\
&\ \vdots \\
2(1+\beta_n) = 2^\sharp(1+\beta_{n-1}) \quad &\Rightarrow \quad \beta_n = \left(\frac{2^\sharp}{2}\right)^n - 1.
\end{aligned}
$$

Assim

$$(1+\beta_n) = \left(\frac{2^\sharp}{2}\right)^n = \left(\frac{N}{N-1}\right)^n > 1.$$

Portanto

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1+\beta_i} < \infty \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\beta_i}} < \infty.$$

Logo, fazendo $n \to +\infty$ na desigualdade (1.51), tem-se

$$|\gamma(v_+)|_\infty = \lim_{n\to\infty} |\gamma(v_+)|_{2^\sharp(1+\beta_n)} \leq M^{\sum_{i=0}^\infty \frac{1}{1+\beta_i}} e^{\sum_{i=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{1+\beta_i}}} |\gamma(v_+)|_2 < \infty.$$

Segue-se $|\gamma(v_+)|_p < \infty$ para todo $p \in [2,\infty]$. O mesmo argumento aplicado para $\gamma(v_-)$, prova que $\gamma(v) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2,\infty]$.

Ao tomar $\lambda = 1$ em (1.49), uma vez que (como acabou-se de provar) $\gamma(v) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante C_5 tal que $|\gamma(v_+)^{1+\beta}|_p < C_5$ para todo p. Logo, para qualquer $\beta > 0$ pode-se reescrever a desigualdade (1.49) na forma

$$\|v_+^{1+\beta}\|^2 \leq C_\beta \left(C_3 + |g|_{2N}\right) C_5^{2(1+\beta)} + C_\beta\, |g_3|_{2N} C_5^{2(1+\beta)}. \qquad (1.52)$$

Como $\|v_+\|_{2^*(1+\beta)}^{1+\beta} = \|v_+^{1+\beta}\|_{2^*} \leq C_{2^*}\|v_+^{1+\beta}\|$, decorre de (1.52) que, para uma constante positiva $\tilde{c}$, vale

$$\|v_+\|_{2^*(1+\beta)}^{2(1+\beta)} \leq \tilde{c}C_\beta C_5^{2(1+\beta)}.$$

Logo,

$$\|v_+\|_{2^*(1+\beta)} \leq \tilde{c}^{1/2(1+\beta)}C_\beta^{1/2(1+\beta)}C_5,$$

de modo que $\|v_+\|_{2^*(1+\beta)}$ é uniformemente limitado para todo $\beta > 0$. O mesmo argumento se aplica a v_-. Portanto $v \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$, como consequência do próximo resultado. □

Lema 1.8.6. *Suponha que exista uma constante C tal que $|v|_q \leq C$ para todo $q \in [2,\infty)$. Então $v \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$.*

Demonstração. Para $k \in \mathbb{N}$, seja $A = \{z = (x,y) \in \mathbb{R}_+^{N+1} : v(z) > k\}$. Claramente,

$$\iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |v(z)|^p \geq \iint_A |v(z)|^p \geq k^{p-2}\iint_A |v(z)|^2.$$

Portanto,

$$C^p \geq k^{p-2}\iint_A |v(z)|^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{C}{k}\right)^{p-2} \geq \frac{1}{C^2}\iint_A |v(z)|^2, \ \forall\, p \geq 2.$$

Tomando $k > C$ e fazendo $p \to \infty$, conclui-se que

$$\iint_A |v(z)|^p = 0 \quad \Rightarrow \quad |A| = 0 \quad \Rightarrow \quad v \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1}),$$

em que $|A|$ denota a medida de Lebesgue de A. Isso conclui a prova. □

A próxima proposição adapta o resultado de regularidade em Coti Zelati e Nolasco [18, Proposição 3.9] que, por sua vez, adapta aquele de Cabré e Solà-Morales [10].

Proposição 1.8.7. *Suponha que $v \in H^1(\mathbb{R}_+^{N+1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$ seja uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta v + m^2 v = 0, & \text{em } \mathbb{R}_+^{N+1}, \\ -\dfrac{\partial v}{\partial y}(0,y) = h(y) & \text{para todo } y \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.53}$$

em que $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2,\infty]$.

Então $v \in C^\alpha([0,\infty) \times \mathbb{R}^N) \cap W^{1,q}((0,R) \times \mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [2,\infty)$ e $R > 0$.

Adicionalmente, se $h \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$, então $v \in C^{1,\alpha}([0,\infty) \times \mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}_+^{N+1})$ é uma solução clássica de (1.53).

Demonstração. Seja v uma solução fraca de (1.53), quer dizer, para toda função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$ vale

$$\iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \left(\nabla v \cdot \nabla \varphi + m^2 v\varphi\right) = \int_{\mathbb{R}^N} h(y)\varphi(0,y)\mathrm{d}y. \tag{1.54}$$

O primeiro objetivo é transformar o problema (1.53) em um problema com condições de fronteira de Dirichlet. Para isso, define-se

$$w(x,y) = \int_0^x v(t,y)\mathrm{d}t.$$

Observe que $w \in H^1((0,R)\times\mathbb{R}^N)$ para todo $R > 0$. Será mostrado que w é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta w + m^2 w = g, & \text{em } \mathbb{R}_+^{N+1}, \\ \qquad\qquad w = 0 & \text{para } y \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.55}$$

em que $g(x,y) = h(y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{N+1}$. Em outras palavras, mostrar-se-á que w satisfaz:

$$\iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \left(\nabla w \cdot \nabla \phi + m^2 w\phi - g\phi\right) = 0, \ \ \forall\, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1}).$$

Para isso, substitui-se $\varphi_t(x,y) = \phi(x+t,y)$ em (1.54):

$$\iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \left(\nabla v \cdot \nabla \phi(x+t,y) + m^2 v\phi(x+t,y)\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} h(y)\phi(t,y)\mathrm{d}y.$$

Integrando esta última desigualdade de $[0,t]$ e fazendo $t \to +\infty$ obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathrm{d}t \int_0^\infty \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla v \cdot \nabla \phi(x+t,y) + m^2 v\phi(x+t,y)\right)\mathrm{d}y &= \int_0^\infty \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}^N} h(y)\phi(t,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}^N} g(t,y)\phi(t,y)\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\mathbb{R}_+^{N+1}} g\phi\,\mathrm{d}y\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Agora considerando o lado esquerdo da equação, no qual aplica-se a mudança de variável $x + t = s$ e mudança de ordem de integração, tem-se:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t \int_0^\infty \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \cdot \nabla \phi(x+t,y) + m^2 v\phi(x+t,y)\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \mathrm{d}x \int_x^\infty \mathrm{d}s \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla v \cdot \nabla \phi(s,y) + m^2 v\phi(s,y)\Big)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}s \int_0^s \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla v \cdot \nabla \phi(s,y) + m^2 v\phi(s,y)\Big)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}s \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla \left(\int_0^s v(x,y)\mathrm{d}x\right) \cdot \nabla \phi(s,y) + m^2 \left(\int_0^s v(x,y)\mathrm{d}x\right)\phi(s,y)\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}s \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla w(s,y) \cdot \nabla \phi(s,y) + m^2 w(s,y)\phi(s,y)\Big)\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \Big(\nabla w \cdot \nabla \phi + m^2 w\phi\Big).
\end{aligned}
$$

Logo

$$\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \Big(\nabla w \cdot \nabla \phi + m^2 w\phi - g\phi\Big) = 0, \forall\, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+).$$

Agora, considera-se as extensões ímpares na variável x, $\overline{w} \in H^1((-R,R)\times\mathbb{R}^N)$ de w e $\overline{g} \in L^q((-R,R)\times\mathbb{R}^N)$ de g (para todo $q \in [2,+\infty]$ e $R > 0$), definidas por

$$\overline{w}(x,y) = \begin{cases} w(x,y), & \text{se } x \geq 0, \\ -w(x,y), & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \overline{g}(x,y) = \begin{cases} g(x,y) = h(y), & \text{se } x \geq 0, \\ -g(x,y) = -h(y), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Claramente,

$$\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \Big(\nabla \overline{w} \cdot \nabla \phi + m^2 \overline{w}\phi - \overline{g}\phi\Big) = 0, \ \ \forall\, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+),$$

o que mostra que $\overline{w}$ é solução fraca de

$$-\Delta\overline{w} + m^2\overline{w} = \overline{g} \ \text{ em } \ \mathbb{R}^{N+1}_+.$$

Observe que, por hipótese $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2,+\infty]$ e como definiu-se $g(x,y) = h(y)$, então $\overline{g} \in L^q((-R,R)\times\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [2,+\infty]$ e $R > 0$. Da teoria de regularidade elíptica decorre que

$$\overline{w} \in W^{2,q}((-R,R)\times\mathbb{R}^N), \ \ \forall\, q \in (2,+\infty] \ \text{ e } \ R > 0.$$

Mas então os teoremas de imersão de Sobolev garantem que $\overline{w} \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, para todo $\alpha \in (0,1)$, $\overline{w} \in C^{1,\alpha}([0,+\infty]\times\mathbb{R}^N)$ e $v(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}w(x,y) \in C^{0,\alpha}([0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$.

Se $g \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$, pode-se aplicar a regularidade elíptica de fronteira para problemas de Dirichlet e deduzir que $w \in C^{2,\alpha}([0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$ mostrando que $v \in C^{1,\alpha}([0,+\infty)\times\mathbb{R}^N)$. E a última afirmação segue da regularidade elíptica clássica aplicada diretamente a v. $\square$

Teorema 1.8.8. *Assumindo as hipóteses f_1, f_2, f_3, V e W_h, então toda solução v do problema* (1.5) *satisfaz:*

$$v \in C^{\alpha}([0,\infty) \times \mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^{N+1}_+)$$

e portanto é uma solução clássica de (1.5).

Demonstração. Considere a Proposição 1.8.7 com

$$h(y) = -V(y)\frac{\partial w}{\partial x}(0,y) + \left[W * F\left(\frac{\partial w}{\partial x}(0,y)\right)\right] f\left(\frac{\partial w}{\partial x}(0,y)\right).$$

(Observe que não se supôs que V seja contínua.)

Agora reescrevendo a equação na forma

$$-\Delta w + V(y)\frac{\partial w}{\partial x}(0,y) + m^2 w = \left[W * F\left(\frac{\partial w}{\partial x}(0,y)\right)\right] f\left(\frac{\partial w}{\partial x}(0,y)\right).$$

Já que $f \in C^1$ e $v(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x}(x,y)$ é limitado, o lado direito dessa igualdade pertence a $C^{\alpha}(\mathbb{R}^{N+1})$. Assim, a regularidade elíptica clássica permite concluir que

$$w \in C^2(\mathbb{R}^{N+1}).$$

Assim, $v \in C^2(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ e deduz-se que v é solução clássica de (1.5). $\square$

1.9 Decaimento Exponencial

Agora será adaptado o Teorema [18, Theorem 3.14] aos propósitos dessa Tese.

Teorema 1.9.1. *Suponha que $v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ seja um ponto crítico do funcional energia I. Então*

$$|v(x,y)|e^{\lambda x} \to 0$$

quando $x + |y| \to \infty$, para qualquer $\lambda < m$.

Demonstração. Sendo

$$h(y) = -V(y)\frac{\partial w}{\partial x}(0,y) + \left[W * F\left(\frac{\partial w}{\partial x}(0,y)\right)\right] f\left(\frac{\partial w}{\partial x}(0,y)\right) \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

foi visto no Teorema 1.8.8 que v é uma solução clássica do problema

$$\begin{cases} -\Delta v + m^2 v = 0, & \text{em } \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ v(0,y) = h(y) \in L^2(\mathbb{R}^N), & y \in \mathbb{R}^N = \partial\mathbb{R}^{N+1}_+. \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Fourier com relação à variável y a esse problema obtêm-se:

$$\begin{cases} \widehat{v}_{xx} - (4\pi^2|y|^2 + m^2)\widehat{v} = 0, \\ \widehat{v}(0,y) = \widehat{h}(y) \in L^2(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

uma vez que a transformada de Fourier satisfaz

$$\widehat{\partial^\alpha v}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{v}(\xi),$$

cuja solução é dada por:

$$\widehat{v}(x,y) = e^{-x\sqrt{4\pi^2|y|^2+m^2}}\,\widehat{h}(y). \tag{1.56}$$

Afirma-se que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} |v(x,y)| \le C|h|_2 e^{-mx}.$$

Aplicando a transformada inversa em (1.56) obtêm-se, denotando

$$\widehat{u}(x,k) = e^{-x\sqrt{4\pi^2|k|^2+m^2}},$$

que $v(x,y)$ satisfaz

$$v(x,y) = u * h = \int_{\mathbb{R}^N} u(x,y)h(k-y)\mathrm{d}k \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\right)^{1/2} |h|_2,$$

como consequência da desigualdade de Hölder.

Agora estima-se $\widehat{u}(x,k) = e^{-x\sqrt{4\pi^2|k|^2+m^2}}$ para $x \ge 1$. Nesse caso, tem-se

$$\begin{aligned} 3m^2 \le 4\pi^2|k|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4m^2 \le 4\pi^2|k|^2 + m^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2mx \le x\sqrt{4\pi^2|k|^2 + m^2}. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Para que a primeira dessas desigualdades seja válida, nota-se que

$$4\pi^2|k|^2 \ge 3m^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad |k| \ge \sqrt{\frac{3}{4\pi^2}m^2} = \frac{m\sqrt{3}}{2\pi}.$$

Denota-se $R = \frac{m\sqrt{3}}{2\pi}$ e considera-se

$$B_R(0) = \{k \in \mathbb{R}^N \,:\, |k| < R\}.$$

Uma vez que $4\pi^2|k|^2 \leq 4\pi^2|k|^2 + m^2$, também deduz-se que, para $x \geq 1$, vale

$$2\pi|k|x \leq x\sqrt{4\pi^2|k|^2 + m^2}. \tag{1.58}$$

De (1.57) e (1.58) obtêm-se

$$-2x\sqrt{4\pi^2|k|^2 + m^2} \leq -(2xm + 2\pi|k|x) \qquad \text{para } \ |k| \geq R.$$

Assim, decorre da igualdade de Parseval que, a menos de uma constante, para $x \geq 1$ vale

$$\begin{aligned}
|u|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2x\sqrt{4\pi^2|k|^2+m^2}}\mathrm{d}k = \int_{B_R(0)} e^{-2x\sqrt{4\pi^2|k|^2+m^2}}\mathrm{d}k + \int_{B_R^c(0)} e^{-2x\sqrt{4\pi^2|k|^2+m^2}}\mathrm{d}k \\
&\leq \int_{B_R(0)} e^{-2xm}\mathrm{d}k + \int_{B_R^c(0)} e^{-2x\sqrt{4\pi^2|k|^2+m^2}}\mathrm{d}k \\
&\leq Ce^{-2mx} + \int_{B_R^c(0)} e^{-2xm}e^{-2\pi|k|x}\mathrm{d}k \\
&\leq Ce^{-2mx},
\end{aligned}$$

com o valor da constante C variando de linha para linha. Observe que, qualquer que seja o valor de $R > 0$, o máximo na primeira integral acontece $k = 0$, enquanto a segunda integral decresce com R, para $R \geq \frac{m\sqrt{3}}{2\pi}$. Portanto, a constante C independe do valor de R. Assim, mostra-se que

$$v(x,y) \leq Ce^{-mx},$$

resultado do qual decorre a afirmação.

Como a Proposição 1.8.7 garante que $v \in W^{1,q}((0,R) \times \mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [2,\infty)$ e $R > 0$, conclui-se que $|v(x,y)| \to 0$ quando $|y| \to \infty$ para qualquer x. Além disso, como consequência da afirmação feita, tem-se $|v(x,y)|e^{\lambda x} \to 0$ quando $x + |y| \to \infty$ para qualquer $\lambda < m$. $\square$

Agora, será mostrado o decaimento exponencial da solução positiva de energia mínima obtida no Teorema 1.7.7. As principais ferramentas nesse resultado serão o Princípio do Máximo Forte e o Lema de Hopf. Na sequência, adaptou-se a prova apresentada em Coti Zelati e Nolasco [18, Teorema 5.1]. Nesse artigo, é assumido que $W(y) \to 0$ quando $|y| \to \infty$, condição que não é necessária.

Teorema 1.9.2. *Seja w uma solução positiva de energia mínima do problema* (1.1). *Então $w(x,y) > 0$ em $[0,+\infty) \times \mathbb{R}^N$ e, para qualquer $\alpha \in (V_0, m)$ existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$0 < w(x,y) \leq Ce^{-\alpha x} e^{-(m-\alpha)\sqrt{x^2+|y|^2}}.$$

Demonstração. Denota-se

$$K(y) = W * F\left(\frac{\partial w}{\partial x}(0,y)\right).$$

Tem-se que K é limitado, como consequência da Proposição 1.3.6.

A demonstração apresentada no Teorema 1.7.7 garante que $v(x,y) \geq 0$, mesmo considerando a hipótese **(V)** ao invés da hipótese **(V′)**. Aplicando a desigualdade de Harnack pode-se concluir que v é estritamente positivo.

Seguindo [18], para qualquer $R > 0$ denote

$$\begin{aligned}
B_R^+ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \,:\, \sqrt{x^2+|y|^2} < R\right\},\\
\Omega_R^+ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \,:\, \sqrt{x^2+|y|^2} > R\right\},\\
\Gamma_R^+ &= \left\{(0,y) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \,:\, |y| > R\right\}
\end{aligned}$$

e defina

$$f_R(x,y) = C_R e^{-\alpha x} e^{-(m-\alpha)\sqrt{x^2+|y|^2}},$$

com a constante positiva C_R sendo escolhida posteriormente e $\alpha \in (V_0, m)$.

Afirma-se que:

$$\Delta f_R = f_R(x,y)\left(\alpha^2 + \frac{2\alpha(m-\alpha)x}{\sqrt{x^2+|y|^2}} + (m-\alpha)^2 - \frac{N(m-\alpha)}{\sqrt{x^2+|y|^2}}\right).$$

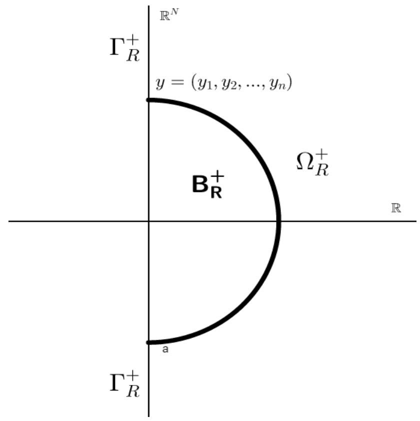

Figura 1.2: Os conjuntos B_R^+, Ω_R^+ e Γ_R^+.

De fato,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_R}{\partial x} &= \left(C_R e^{-\alpha x}(-\alpha)e^{-(m-\alpha)\sqrt{x^2+|y|^2}}\right) + \left(C_R e^{-\alpha x}\frac{-(m-\alpha)x}{\sqrt{x^2+|y|^2}}e^{-(m-\alpha)\sqrt{x^2+|y|^2}}\right)\\ &= f_R(x,y)\left(-\alpha - \frac{(m-\alpha)x}{\sqrt{x^2+|y|^2}}\right), \end{aligned} \tag{1.59}$$

de modo que

$$\frac{\partial^2 f_R}{\partial x^2} = f_R(x,y)\left[\alpha^2 + \frac{2\alpha(m-\alpha)x}{\sqrt{x^2+|y|^2}} + \frac{(m-\alpha)^2x^2}{x^2+|y|^2} - \frac{(m-\alpha)|y|^2}{\left(\sqrt{x^2+|y|^2}\right)^3}\right].$$

Além disso,

$$\frac{\partial f_R}{\partial y_i} = f_R(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\left(-(m-\alpha)\sqrt{x^2+|y|^2}\right) = f_R\left(\frac{-(m-\alpha)y_i}{\sqrt{x^2+|y|^2}}\right),$$

o que implica:

$$\frac{\partial^2 f_R}{\partial y_i^2} = f_R(x,y)\left[\frac{(m-\alpha)^2y_i^2}{x^2+|y|^2} - \frac{(m-\alpha)\left(x^2+|y|^2-y_i^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+|y|^2}\right)^3}\right].$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\Delta f_R = f_R(x,y) & \left[\left(\alpha^2 + \frac{2\alpha(m-\alpha)x}{\sqrt{x^2+|y|^2}} + \frac{(m-\alpha)^2 x^2}{x^2+|y|^2} - \frac{(m-\alpha)|y|^2}{\left(\sqrt{x^2+|y|^2}\right)^3} \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{(m-\alpha)^2|y|^2}{x^2+|y|^2} - \frac{N(m-\alpha)\left(x^2+|y|^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+|y|^2}\right)^3} + \frac{(m-\alpha)|y|^2}{\left(\sqrt{x^2+|y|^2}\right)^3} \right) \right] \\
= f_R(x,y) & \left[\alpha^2 + \frac{2\alpha(m-\alpha)x}{\sqrt{x^2+|y|^2}} + (m-\alpha)^2 - \frac{N(m-\alpha)}{\sqrt{x^2+|y|^2}} \right],
\end{aligned} \tag{1.60}
$$

como afirmado.

Afirma-se que, para qualquer $R > 0$, tem-se:

$$
\begin{cases}
-\Delta f_R + m^2 f_R \geq 0 & \text{em } \Omega_R^+, \\
\dfrac{\partial f_R}{\partial \eta} = -\dfrac{\partial f_R}{\partial x} = \alpha f_R & \text{em } \Gamma_R^+.
\end{cases} \tag{1.61}
$$

De fato, ao examinar o termo entre colchetes no lado direito de (1.60), vê-se que os termos α^2 e $(m-\alpha)^2$ são sempre positivos. Além disso, $x^2 \leq x^2 + |y|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^N$. Assim $x \leq \sqrt{x^2+|y|^2}$ o que implica $\frac{x}{\sqrt{x^2+|y|^2}} \leq 1$. Logo:

$$
\begin{aligned}
\Delta f_R(x,y) &\leq f_R(x,y) \left[\alpha^2 + \frac{2\alpha(m-\alpha)x}{\sqrt{x^2+|y|^2}} + (m-\alpha)^2 \right] \\
&\leq f_R(x,y) \left[\alpha^2 + 2\alpha(m-\alpha) + (m-\alpha)^2 \right] \\
&= f_R(x,y) \left[(\alpha + (m-\alpha))^2 \right] = m^2 f_R(x,y).
\end{aligned}
$$

E isto conclui a prova da afirmação.

Agora considere:

$$
\rho(x,y) = f_R(x,y) - w(x,y).
$$

Claramente vale $-\Delta\rho(x,y) + m^2\rho(x,y) \geq 0$ em Ω_R^+. De fato,

$$
\begin{aligned}
-\Delta\rho(x,y) + m^2\rho(x,y) &= -\Delta f_R + \Delta w + m^2(f_R - w) = -\Delta f_R + m^2 f_R - (-\Delta w + m^2 w) \\
&= -\Delta f_R + m^2 f_R + 0 \geq 0 \ \text{ em } \ \Omega_R^+.
\end{aligned}
$$

Em ∂B_R^+, tem-se duas possibilidades: se $x = 0$ e $|y| \leq R$, então $e^{-\alpha x} e^{-(m-\alpha)\sqrt{x^2+|y|^2}} =$

$e^{-(m-\alpha)|y|}$; se $x^2+|y|^2=R^2$ e $x>0$, então $e^{-\alpha x}e^{-(m-\alpha)\sqrt{x^2+|y|^2}} \le e^0 e^{-(m-\alpha)R}$. De modo que, em ambos os caso, tem-se $\rho(x,y)\ge 0$ em ∂B_R^+ se for escolhido

$$C_R = e^{mR}\max_{\partial B_R^+} w.$$

Note que a definição de f_R garante que $\rho(x,y)\to 0$ quando $x+|y|\to\infty$.

Afirma-se que $\rho(x,y)\ge 0$ em $\overline{\Omega}_R^+$. Suponha, por absurdo, que

$$\inf_{\overline{\Omega}_R^+}\rho(x,y)<0. \tag{1.62}$$

Pelo Princípio do Máximo Forte, existe $(0,y_0)\in\Gamma_R^+$ tal que

$$\rho(0,y_0)=\inf_{\overline{\Omega}_R^+}\rho(x,y)<\rho(x,y)$$

para todo $(x,y)\in\Omega_R^+$. Definindo

$$z(x,y)=e^{\lambda x}\rho(x,y)$$

para algum $\lambda\in(V_0,m)$, afirma-se que

$$-\Delta z+2\lambda\frac{\partial z}{\partial x}+(m^2-\lambda^2)z\ge 0 \quad \text{em } \Omega_R^+.$$

(A escolha de $\lambda\in(V_0,m)$ garante que o Teorema 1.9.1 pode ser aplicado, o que garante o decaimento de z.)

De fato, tem-se

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial x}=-\lambda e^{-\lambda x}+e^{-\lambda x}\frac{\partial z}{\partial x},\\
&\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}=\lambda^2 e^{-\lambda x}z-2\lambda e^{-\lambda x}\frac{\partial z}{\partial x}+e^{-\lambda x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\\
&\Delta\rho=e^{-\lambda x}\Delta_y z.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-\Delta\rho+m^2\rho &= -e^{-\lambda x}\Delta_y z-\lambda^2 e^{-\lambda x}z+2\lambda e^{-\lambda x}\frac{\partial z}{\partial x}-e^{-\lambda x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+m^2 e^{-\lambda x}z\\
&= e^{-\lambda}x\left[-\Delta z+2\lambda\frac{\partial z}{\partial x}+(m^2-\lambda)z\right].
\end{aligned}$$

Como $-\Delta\rho + m^2\rho \geq 0$ em Ω_R^+, conclui-se que $\Delta z + 2\lambda\partial_x z + (m^2 - \lambda^2)z \geq 0$, como afirmado.

Outra aplicação do Princípio do Máximo Forte fornece

$$z(0, y_0) = \inf_{\Gamma_R^+} z = \inf_{\Gamma_R^+} \rho = \rho(0, y_0) < 0.$$

Mas então o Lema de Hopf garante que $\frac{\partial z}{\partial \eta}(0, y_0) < 0$, isto é,

$$-\frac{\partial z}{\partial x}(0, y_0) < 0. \tag{1.63}$$

Uma vez que $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} e^{\lambda x} + \lambda \rho e^{\lambda x}$, tem-se

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, y_0) = \frac{\partial \rho}{\partial x}(0, y_0) + \lambda\rho(0, y_0).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial z}{\partial x}(0, y_0) &= -\frac{\partial f_R}{\partial x}(0, y_0) + \frac{\partial w}{\partial x}(0, y_0) - \lambda f_R(0, y_0) + \lambda w(0, y_0) \\
&= (\alpha - \lambda) f_R(0, y_0) + V(y_0)) w(0, y_0) - K(y_0) f(w(0, y_0)) + \lambda w(0, y_0) \\
&= (\alpha - \lambda) f_R(0, y_0) + (V(y_0) + V_0) w(0, y_0) - K(y_0) f(w(0, y_0)) \\
&\quad + (\lambda - V_0) w(0, y_0).
\end{aligned}$$

Agora, escolha $\alpha = \lambda$. Tomando $\lambda > V_0$ (de modo que o último termo na desigualdade acima seja não negativo), a positividade de $(V(y_0) + V_0)w(0, y_0)$ e hipótese (f_1) garantem que $-\frac{\partial z}{\partial x}(0, y_0) > 0$, pois $\frac{f(w(0,y_0))}{w(0,y_0)}$ tende a zero mais rapidamente do que $w(0, y_0)$ quando $|y_0| \to \infty$. Chega-se a uma contradição com (1.63). $\square$

Capítulo 2

Alguns resultados sobre uma equação de Choquard fracionária

2.1 Colocação do Problema

De acordo com Lieb [35], a equação Choquard

$$-\Delta u + u = \left(\frac{A}{|x|} * |u|^2 \right) u \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \tag{2.1}$$

(A é constante) foi indroduzida por P. Choquard, em 1976, para modelar o chamado plasma de uma componente (“*one-component plasma*”), apesar de estar também relacionada com trabalhos anteriores de H. Fröhlich e S. Pekar.

Desde então, as variações da equação de Choquard descrevem uma série de fenômenos. Por exemplo, quando a atração de partículas é mais fraca e tem um efeito contínuo, que perdura mais do que a da equação não linear de Schrödinger, a equação de evolução $i\partial_t \phi = \Delta\phi + (V * |\phi|^2)\phi$ modela a interação não relativistíca de sistemas de átomos e moléculas bosônicas com grande número de partículas.

A existência de solução não trivial de (2.1) foi considerada por Lions [38, 40, 19]: uma solução $0 \neq u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ foi obtida usando a teoria de pontos críticos. Em [41], Zhao e Ma obtiveram algumas propriedades qualitativas das soluções positivas considerando potências como $|u|^q$. Considerando a equação mais geral

$$-\Delta u + u = (I_\alpha * F(u))\, F'(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

(I_α denota um potencial de Riesz), Moroz e Van Schaftingen [43, 44] (veja também [26]) provaram a existência de uma solução de energia mínima e estudaram suas propriedades de simetria e regularidade.

Quando A é um potencial coercivo, (2.1) foi tratada por meio de métodos variacionais por Cabré e Solà-Morales [14] e também por d'Avenia, Siciliano e Squassina [54], sendo que, respectivamente, a existência de soluções de ondas estacionárias e soluções de energia mínima foram obtidas. Em [1], utilizando o Teorema do Passo da Montanha, Ackermann estudou a equação $-\Delta u + Vu = (W * u^2)u$ no caso de V ser um potencial periódico e W pertencer a uma classe de funções ímpares. Em [2], Alves e Yang trataram de uma forma generalizada da equação Choquard. Um bom panorama de resultados e questões referentes à equação Choquard foi escrito por Moroz e Van Schaftingen, veja [45].

O operador (s,p)-Laplaciano fracionário, $(-\Delta_p)^s$, principalmente no caso $p = 2$, surge em vários contextos: mecânica do contínuo, fenômenos de transição de fase, dinâmica populacional, teoria dos jogos e matemática financeira, veja [4, 13]. Sobre a inexistência de soluções, existência e resultados de regularidade das mesmas, veja [11, 48, 49, 51, 52].

Em anos recentes, a equação de Choquard envolvendo um operador Laplaciano fracionário, tem sido alvo de muitas pesquisa: veja [17, 20, 50] (e referências lá contidas) para vários resultados sobre a existência da solução de energia mínima no caso de A ser uma constante. Em [15] é tratada uma equação de Choquard não autônoma envolvendo um operador Laplaciano fracionário.

Citou-se os artigos [7, 9, 24, 27, 28, 29, 32, 37, 46], para resultados de existência e regularidade envolvendo o operador $(-\Delta_p)^s$.

Neste capítulo considerou-se uma equação do tipo de Choquard no contexto do operador (s,p)-Laplaciano fracionário:

$$(-\Delta_p)^s u + A|u|^{p-2}u \;=\; \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{2.2}$$

sendo A uma constante positiva, $0 < \mu < N$, $F(t) = \int_0^t f(r)\mathrm{d}r$, com $(-\Delta_p)^s$ denotando o operador (s,p)-Laplaciano fracionário, definido por (veja também a Seção 2.2)

$$(-\Delta_p)^s u(x) = 2 \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, \mathrm{d}y.$$

Trocando $(-\Delta_p)^s$ por $-\Delta$, em [53] Souto e de Lima consideraram o potencial $A = A(y,z)$, impondo uma condição de coercividade uniforme na variável y.

Para a equação (2.2), assumiu-se que f seja uma função de classe C^1, positiva em $(0,\infty)$, satisfazendo:

(f1) $\lim_{t\to 0} \dfrac{|f(t)|}{t^{p-1}} = 0$;

(f2) $\lim_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{t^{q-1}} = 0$ para algum $p < q < \frac{p_s^*}{2}\left(2 - \frac{\mu}{N}\right)$, em que

$$p_s^* = \frac{Np}{N - sp} \ \text{ se } \ sp < N; \tag{2.3}$$

(f3) A função $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t^{p-1}}$ é crescente para todo $t > 0$.

Exemplo 2.1.1. *As funções abaixo satisfazem as hipóteses $(f1) - (f3)$:*

a) $f(t) = |t|^{q_1 - 1}t_+ + |t|^{q_2 - 1}t_+$ *, em que* $p < q_1 < q_2 < (1 - \mu/N)p_s^*$ *e* $t_+ = \max\{t, 0\}$.

b) $f(t) = t^{p-1}\ln(1+t)$; $t \geq 0$

Observação 2.1.1. *Decorre de* **(f3)** *que f satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz:*

$$pF(t) < f(t)t, \quad \forall\, t > 0. \tag{2.4}$$

Além disso, para qualquer $\xi > 0$ fixado, existe uma constante $C_\xi > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \xi t^{p-1} + C_\xi t^{q-1}, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{2.5}$$

Uma desigualdade similar pode se obtida com $F(t)$, observe:

$$|F(t)| \leq \xi t^p + D_\xi t^q, \quad \forall\, t \geq 0, \tag{2.6}$$

para uma constante $D_\xi > 0$. Veja os Lemas A.1.1 e A.1.2 para essas afirmativas.

Neste capítulo, provou-se a existência de uma solução *positiva* de energia mínima, seu decaimento polinomial, e regularidade das soluções fracas de (2.2). Condensando os resultados deste Capítulo tem-se:

Teorema 2.1.2. *Suponha que*

$$p < q < (N - \mu)p/(N - sp), \tag{2.7}$$

para $0 < \mu < sp$, e que as condições **(f1)-(f3)** *sejam válidas. Então, para qualquer $A > 0$, o problema* (2.2) *possui uma solução* positiva *de energia mínima v.*

Uma discussão concisa sobre as hipóteses do Teorema 2.1.2 pode ser encontrada na Observação 2.2.3.

Nesse contexto, adaptou-se as ideias de Brasco, Mosconi e Squassina [6, Proposition 3.2] e provou-se adicionalmente que soluções fracas de (2.2) (e, portanto, a solução de energia mínima) são contínuas, ao aplicar-se resultados provados por Brasco e Parini [7, Theorem 3.8, Theorem 3.13] (veja também Iannizzotto, Mosconi e Squassina [29]):

Teorema 2.1.3. *Suponha que as condições* **(f1)-(f3)** *sejam verificadas. Toda solução não negativa* $v \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ *do problema* (2.2) *satisfaz* $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^0(\mathbb{R}^N)$.

Finalmente, provou-se que a solução *positiva* de energia mínima tem decaimento polinomial:

Teorema 2.1.4. *Suponha que as condições* **(f1)-(f3)** *sejam satisfeitas para* $0 < \mu < p < q < \frac{p_s^*}{2}\left(2 - \frac{\mu}{N}\right)$. *Então, existem constantes* $\rho > 0$ *e* $C > 0$ *tais que a solução* v *obtida no Teorema 2.1.2 satisfaz*

$$v(x) \leq \frac{C}{|x|^{\frac{N-sp}{p-1}}} \quad \forall\, |x| > \rho.$$

O Capítulo 2 está organizado da seguinte forma:

- Na Seção 1.3, apresentam-se os espaços de função, lembrando alguns resultados básicos e imersões e obtendo-se cotas para a derivada do termo convolução.
- A Seção 2.3 é dedicada à prova do Teorema 2.1.2: mostrou-se que a geometria do Passo da Montanha é satisfeita e introduziu-se a variedade de Nehari para evitar a demonstração da condição de Palais-Smale. Embora os métodos não sejam novos, a abordagem aplicada no Capítulo 2 simplifica técnicas padrão em configurações semelhantes.
- A continuidade de qualquer solução não negativa é comprovada na Seção 2.4 adaptando ideias de Brasco, Mosconi and Squassina [6] e aplicando resultados de Brasco e Parini [7, Theorem 3.8, Theorem 3.13] (veja também [6]).
- A Seção 2.5 prova que a solução do energia mínima tem decaimento "polinomial". Essa seção tem como referências básicas os artigos de Brasco, Mosconi e Squassina [6] e Felmer, Quaas e Tan [25].

2.2 Preliminares

O operador (s,p)-Laplaciano $(-\Delta_p)^s$ é definido por:

$$(-\Delta_p)^s u(x) = 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}\, \mathrm{d}y,$$

de modo que uma solução fraca de (2.2) satisfaz, para todo $v \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} A\,|u|^{p-2}uv = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u)v,$$

em que

$$\langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle := \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A motivação para a definição de $(-\Delta_p)^s$ pode ser encontrada em Iannizzoto e Squassina [27], artigo no qual os autores também provam que o funcional linear

$$v \mapsto \langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle$$

é contínuo. Denota-se também $\langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle$ por $(-\Delta_p)^s u \cdot v$.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado, com fronteira de Lipschitz, e $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Para quaisquer $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$ denota-se

$$[u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}, \qquad [u]_{s,p} = [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Para $q \in [1,\infty]$, a norma usual do espaço $L^q(\Omega)$ será denotada por $|u|_{L^q(\Omega)}$ e, simplificando a notação, $|u|_q = |u|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$.

No estudo do problema (2.2), é natural considerar o espaço Sobolev fracionário $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ definido por:

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^p(\mathbb{R}^N) \,:\, [u]^p_{s,p} < \infty\right\}$$

munido da norma:

$$\|u\|^p = |u|^p_p + [u]^p_{s,p},$$

que torna $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ um espaço de Banach reflexivo, veja [21]. O termo $[u]_{s,p}$ é a chamado seminorma de Gagliardo de u.

Observação 2.2.1. *Em algumas ocasiões, manter-se-á a notação introduzida, mas considerar-se-á o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ munido da norma equivalente $\|u\| = A|u|_p + [u]_{s,p}$. Espera-se que esse procedimento não cause danos à compreensão do texto, apesar de ocorrer certa ambiguidade.*

Da mesma forma, como Ω é um aberto limitado com fronteira Lipschitz, ao definir

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = [u]_{W^{s,p}(\Omega)},$$

então

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^N) \ : \ [u]^p_{W^{s,p}(\Omega)} < \infty \right\},$$

é um espaço de Banach reflexivo (veja [21] e [22]).

Lembrando que, para $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$ satisfazendo $sp < N$, tem-se

$$\begin{array}{ll} \text{(i) } W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) & \text{é contínua para qualquer } q \in [p, p_s^*]; \\ \text{(ii) } W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) & \text{é compacta para qualquer } q \in [p, p_s^*). \end{array} \tag{2.8}$$

A prova desses resultados pode ser encontrada em Demengel [21, Teorema 4.47 e Teorema 4.54]. Como usual, a imersão $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_s^*}(\Omega)$ é contínua ([21, Corollary 4.53]).

Seguindo Brasco, Mosconi e Squassina, [6], introduz-se também o espaço de Banach

$$D^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N) \ : \ [u]_{s,p} < \infty \right\}.$$

Dado $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, tem-se que $u \in L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)$ por (2.8). Como também tem-se $[u]_{s,p} < \infty$, conclui-se que

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \subset D^{s,p}(\mathbb{R}^N).$$

Uma vez que o funcional energia

$$\begin{aligned} L_A(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} A \, |u|^p \\ - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u) \right) F(u), \end{aligned}$$

tem derivada

$$\begin{aligned} L'_A(u) \cdot \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+sp}} \, (u(x) - u(y)) \, (\varphi(x) - \varphi(y)) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ + \int_{\mathbb{R}^N} A \, |u|^{p-2} u \varphi - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u) \right) f(u) \varphi, \end{aligned} \tag{2.9}$$

vê-se que os pontos críticos de L_A são soluções fracas de (2.2).

O próximo resultado garante que o funcional L_A está bem definido.

Proposição 2.2.2 (Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev)**.**
Sejam $t, r > 1$ e $0 < \mu < N$ satisfazendo

$$\frac{1}{t} + \frac{\mu}{N} + \frac{1}{r} = 2.$$

Então, dado $f \in L^t(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^r(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante $C = C(t, N, \mu, r)$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x)}{|x-y|^\mu} h(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leq C |f|_{L^t(\mathbb{R}^N)} |h|_{L^r(\mathbb{R}^N)}.$$

Observação 2.2.3. *A respeito das hipóteses* **(f1)-(f3)**, *considera-se o caso extremo $F(r) = |r|^q$. Aplicando a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev tem-se que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u) \right) F(u)$$

está bem definida se $F(u) \in L^t(\mathbb{R}^N)$. Na verdade, neste caso,

$$\frac{2}{t} + \frac{\mu}{N} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t} = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\mu}{N}\right).$$

Consequentemente, aplicando a imersão contínua (2.8), *tem-se*

$$\begin{aligned} tq \in [p, p_s^*] \Rightarrow \quad p \leq tq \leq p_s^* \quad &\Rightarrow \quad \frac{p}{t} \leq q \leq \frac{p_s^*}{t} \\ &\Rightarrow \quad \frac{p}{2}\left(2 - \frac{\mu}{N}\right) \leq q \leq \frac{p_s^*}{2}\left(2 - \frac{\mu}{N}\right). \end{aligned}$$

Esta condição (considerando o intervalo aberto satisfeito por q) melhora as hipóteses do Teorema 2.1.2, que foi formulado de forma que o lado direito de (2.7) *seja maior que o lado esquerdo. Observe que esse raciocínio também justifica a hipótese* **(f2)**.

Lema 2.2.4. *Assumindo $(f1), (f2)$ e $(f3)$ vale a estimativa:*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u) \right) f(u) u \right| \leq C \left(\|u\|^{2p} + \|u\|^{2q} \right).$$

Demonstração. Resulta da Observação 2.1.1 que, para qualquer $\xi > 0$ fixado, existem $C_\xi > 0$ e $D_\xi > 0$ tais que

$$|f(t)t| \leq \xi |t|^p + C_\xi |t|^q \qquad \text{e} \qquad |F(t)| \leq \xi |t|^p + D_\xi |t|^q. \tag{2.10}$$

Aplicando a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev e (2.10), conclui-se que:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u) \right) f(u)u \right| &\leq C |F(u)|_{L^t(\mathbb{R}^N)} |f(u)u|_{L^t(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u|^p + |u|^q)^t \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{t}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u|^p + |u|^q)^t \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{t}}.
\end{aligned}$$

Segue-se da Observação 2.2.3 que a imersão do $\mathbb{R}^N$ dada em (2.8) é aplicável:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u|^p + |u|^q)^t \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{t}} \leq C \left(\|u\|^p + \|u\|^q \right),$$

produzindo assim

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u) \right) f(u)u \right| &\leq C \left(\|u\|^p + \|u\|^q \right)^2 \\
&\leq C \left(\|u\|^{2p} + \|u\|^{p+q} + \|u\|^{2q} \right) \\
&\leq C \left(\|u\|^{2p} + \|u\|^{2q} \right),
\end{aligned}$$

sendo que o valor da constante C varia de linha para linha. □

2.3 Demonstração do Teorema 2.1.2

Como se está a procura de soluções positivas, *suponha* $f(t) = 0$ *para* $t \leq 0$. Uma discussão sucinta sobre as consequências dessa hipótese pode ser encontrada no Capítulo 1.

A demonstração do próximo resultado repete argumentos utilizados na prova do Teorema 1.5.1; por esse motivo, ela será apresentada de maneira concisa.

Lema 2.3.1. *O funcional L_A satisfaz a geometria Teorema do Passo da Montanha. Mais precisamente,*

(i) *existem $\rho, \delta > 0$ tais que $L_A|_S \geq \delta > 0$ para todo $u \in S$, em que*

$$S = \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \, : \, \|u\| = \rho\};$$

(ii) *para todo $v_0 \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $(v_0)_+ \neq 0$, existe $\tau \in \mathbb{R}$ com $\|\tau v_0\| > \rho$ e $L_A(\tau v_0) < 0$.*

Demonstração. Decorre do Lema 2.2.4 que:

$$L_A(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - C\left(\|u\|^{2p} + \|u\|^{2q}\right),$$

implicando assim (i) quando escolhe-se $\rho > 0$ suficientemente pequeno.

Para provar que (ii), fixando $u_0 \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ tal que $(u_0)_+ \neq 0$. Considere a função $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(t) = H\left(\frac{tu_0}{\|u_0\|}\right)$$

em que

$$H(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right)F(u)\,\mathrm{d}x$$

e verifica-se que

$$\begin{aligned} g'(t) &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F\left(\frac{tu_0}{\|u_0\|}\right)\right) f\left(\frac{tu_0}{\|u_0\|}\right)\frac{u_0}{\|u_0\|}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2p}{t}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F\left(\frac{tu_0}{\|u_0\|}\right)\right)\frac{1}{p}f\left(\frac{tu_0}{\|u_0\|}\right)\frac{tu_0}{\|u_0\|}\,\mathrm{d}x \\ &> \frac{2p}{t}g(t). \end{aligned}$$

Obtêm-se então que

$$H(\tau u_0) = g(\tau\|u_0\|) > C\left(\tau\|u_0\|\right)^{2p},$$

implicando que

$$L_A(\tau u_0) = \tau^p\|u_0\|^p - H\left(\tau u_0\right) < C_1\tau^p - C_2\tau^{2p}$$

e tem-se $L_A(\tau v_0) < 0$ ao tomar τ suficientemente grande. □

Como consequência do Teorema do Passo da Montanha sem a condição PS (veja [56, Teorema. 1.15]), existe uma sequência minimizante $(u_n) \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$L_A'(u_n) \to 0 \qquad \text{and} \qquad L_A(u_n) \to m_A,$$

em que

$$m_A = \inf_{\alpha\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} L_A(\alpha(t)),$$

e $\Gamma = \left\{\alpha \in C^1\left([0,1], W^{s,p}(\mathbb{R}^N)\right) \,:\, \alpha(0)=0,\, L_A(\alpha(1))<0\right\}$.

Como no Capítulo 1.54, não se mostrará a condição de Palais-Smale, mas será contornado no contexto da variedade de Nehari.

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_A &= \left\{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\} \,:\, L'_A(u)\cdot u = 0\right\}\\ &= \left\{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\} \,:\, \|u\|^p = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u)u\right\}.\end{aligned}$$

Lema 2.3.2. *Existe $\beta > 0$ tal que $\|u\| \geq \beta$ para todo $u \in \mathcal{N}_A$.*

Demonstração. Uma vez que $L'_A(u)\cdot u = 0$ se, e somente se,

$$\|u\|^p = \left|\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u)u\right| \leq C\left(\|u\|^{2p} + \|u\|^{2q}\right),$$

tem-se a afirmação.

Uma caracterização alternativa de m_A em termos da variedade de Nehari $\mathcal{N}_A$ é obtida analogamente à demonstração do Lema 1.6.3. Verifica-se que $m_A = m_A^*$, em que

$$m_A^* = \inf_{u\in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} L_A(tu).$$

Lema 2.3.3. *Seja $\{u_n\} \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que $L_A(u_n) \to m_A$ e $L'_A(u_n) \to 0$, em que*

$$m_A = \inf_{u\in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} L_A(tu).$$

Então $\{u_n\}$ é limitada.

Demonstração. Praticamente idêntica à demonstração do Lema 1.7.1. Visto que

$$L_A(u_n) \to m_A,$$

dado $\epsilon = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|L_A(u_n) - m_A| < 1$ para todo $n \geq n_1$. Assim:

$$L_A(u_n) < 1 + m_A, \quad \forall\, n \geq n_1. \tag{2.11}$$

Por outro lado, como $L'_A(u_n) \to 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|L'_A(u_n)\right\| < 1, \quad \forall\, n \geq n_2.$$

Logo,

$$-L'_A(u_n)\cdot u_n \le \left|L'_A(u_n)\cdot u_n\right| \le \|u_n\|. \tag{2.12}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} L_A(u_n) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} A|u_n|^p \\ -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right)F(u_n)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L'_A(u_n)\cdot u_n = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} + \int_{\mathbb{R}^N} A|u_n|^p \\ -\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right)f(u_n)u_n, \end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned} 2pL_A(u_n) - L'_A(u_n)\cdot u_n = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} + \int_{\mathbb{R}^N} A|u_n|^p \\ -\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right)(pF(u_n)-f(u_n)u_n). \end{aligned}$$

A última integral é positiva, devido à desigualdade Ambrosetti-Rabinowitz. Assim sendo,

$$2pL_A(u_n) - L'_A(u_n)\cdot u_n \ge c\|u_n\|^p.$$

Substituindo a desigualdade (2.11) e (2.12) na última desigualdade, obtêm-se:

$$2p(1+m_A) + \|u_n\| \ge c\|u_n\|^p.$$

Como $p > 1$, a última desigualdade seria falsa se $\|u_n\|$ fosse tomado suficientemente grande. Portanto u_n é uma sequência limitada.

Uma vez que (u_n) é limitada e $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, então, a menos de subsequência, pode-se supor que:

$$u_n \rightharpoonup u.$$

Como no Capítulo 1 tem-se:

Lema 2.3.4. *Passando a subsequência (se necessário), $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ implica*

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{q.t.p. em} \ \mathbb{R}^N \ \text{e} \ u_n \to u \ \text{em} \ L^r_{loc}(\mathbb{R}^N), \ \forall\, r \in [p, p_s^*).$$

Também é análoga a demonstração do próximo resultado (veja o Lema 1.7.6), variação sobre argumentos clássicos de P-L. Lions [39]:

Lema 2.3.5. *Seja $\{u_n\}$ uma sequência minimizante dado pelo Lema 2.3.3. Então, existe $R, \delta > 0$ e uma subsequência $\{z_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(z_n)} |u_n|^p \geq \delta.$$

Relembrando também outro resultado clássico (veja [30, Lema 4.8, Capítulo 1]):

Lema 2.3.6. *Seja $U \subseteqq \mathbb{R}^N$ um aberto. Para $1 < p < \infty$, seja $\{f_n\}$ uma sequência limitada em $L^p(U)$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. Então $f_n \rightharpoonup f$.*

Para provar a existência de uma solução de energia mínima não negativo para o problema (2.2), inicia-se lembrando a desigualdade que será útil mais tarde: se $z^+(x) = \max\{z(x), 0\}$, então tem-se para todo $q \geq 1$,

$$|z(x) - z(y)|^{q-2}\,(z(x) - z(y))\left(z^+(x) - z^+(y)\right) \geq |z^+(x) - z^+(y)|^q.$$

O mesmo resultado não é válido para $z^-(x)$ se for definido $z^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$. No entanto, considerando

$$z^-(x) = \min\{z(x), 0\},$$

então tem-se:

$$|z(x) - z(y)|^{q-2}\,(z(x) - z(y))\left(z^-(x) - z^-(y)\right) \geq |z^-(x) - z^-(y)|^q, \ \forall\, q \geq 1. \quad (2.13)$$

A demonstração do principal resultado desta seção adapta e simplifica aquela apresentada no Teorema 1.7.7.

Demonstração do Teorema 2.1.2. Seja $\{u_n\}$ uma sequência minimizante dada pelo Lema 2.3.1 e $\{z_n\}$ a sequência dada pelo Lema 2.3.5. Defina:

$$v_n(x) = u_n(x - z_n) \quad \text{e} \quad v(x) = u(x - y).$$

Decorre do Lema 2.3.5 que

$$\int_{B_R(0)} |v_n|^r \geq \frac{\delta}{2}, \ \ \forall\, r \in (p, p_s^*).$$

Como L_A e L'_A são ambas invariantes por translações, ocorre que:

$$L'_A(v_n) \to 0 \quad \text{e} \quad L_A(v_n) \to m_A.$$

De $u_n \rightharpoonup u$ segue-se que $v_n \rightharpoonup v$. Aplicando o Lema 2.3.4, conclui-se que:

$$v_n(x) \to v(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \text{ e } v_n \to v \text{ em } L^r_{loc}(\mathbb{R}^N), \ \forall\, r \in [p, p^*_s).$$

Visto que:

$$\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v_n(x))\right) F(v_n(x)) \to \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v(x))\right) F(v(x)) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

E

$$\frac{|v_n(x) - v_n(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+sp}}(v_n(x) - v_n(y)) \to \frac{|v(x) - v(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+sp}}(v(x) - v(y))$$

q.t.p em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Aplicando o Lema 2.3.6 conclui-se que:

$$L'_A(v_n) \cdot \varphi \to L'_A(v) \cdot \varphi, \ \forall\, \varphi.$$

Tem-se que $v \in \mathcal{N}_A$, uma vez que o lado esquerdo da expressão acima tende a zero. Passando o limite na desigualdade $m_A \leq L_A(v_n)$, obtêm-se $m_A \leq L_A(v)$. Mas

$$m_A = \lim L_A(v_n) \geq \frac{1}{p}[v]^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} A|v|^p - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v)\right) F(v)$$

implica a desigualdade oposta.

Afirma-se agora que $v(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. De fato, tomando

$$\varphi = v^- = \min\{v(x), 0\}$$

em (2.9), observa-se que:

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v)\right) f(v)v^- = 0,$$

já que $f(v) = 0$ quando $v(x) \leq 0$.

Portanto, substituíndo $\varphi = v^-$ em (2.9), obtêm-se

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+sp}} (v(x)-v(y)) \left(v^-(x)-v^-(y)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^N} A\,|v^-|^p = 0. \quad (2.14)$$

Aplicando (2.13) na primeira integral, obtêm-se:

$$\|v^-\|^p = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v^-(x)-v^-(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} + A\int_{\mathbb{R}^N} |v^-|^p \leq 0.$$

Conclui-se que $v^- = 0$, provando assim a afirmação e o Teorema. $\square$

2.4 Demonstração do Teorema 2.1.3

Considere

$$D^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N) \,:\, [u]_{s,p}^p = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \right\}$$

e a melhor constante de Sobolev

$$S_{s,p} = \inf\left\{ \frac{[u]^p}{\|u\|_{p_s^*}^p} \,:\, u \in D^{s,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \right\}. \quad (2.15)$$

A demonstração do próximo resultado segue aquela apresentada por Alves e Yang [3].

Lema 2.4.1. *Suponha que* $0 < \mu < p$. *Então existe uma constante* $C > 0$ *tal que:*

$$K(x) := \frac{1}{|x|^\mu} * F(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(v)}{|x-y|^\mu}$$

satisfaz

$$|K(x)| \leq C.$$

Demonstração. Visto que $|F(v)| \leq C\left(|v|^p + |v|^q\right)$ para uma constante C_0, tem-se:

$$\begin{aligned}
|K(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(v)}{|x-y|^\mu}\right| &\leq \left|\int_{|x-y|\leq 1} \frac{F(v)}{|x-y|^\mu}\right| + \left|\int_{|x-y|>1} \frac{F(v)}{|x-y|^\mu}\right| \\
&\leq C_0 \int_{|x-y|\leq 1} \frac{|v|^p + |v|^q}{|x-y|^\mu} + C_0 \int_{\mathbb{R}^N} \left(|v|^p + |v|^q\right) \\
&\leq C_0 \int_{|x-y|\leq 1} \frac{|v|^p + |v|^q}{|x-y|^\mu} + C_1.
\end{aligned}$$

Agora, tome arbitrariamente $t \in \left(\frac{N}{N-\mu}, \frac{N}{N-sp}\right]$ e $\gamma \in \left(\frac{N}{N-\mu}, \frac{Np}{(N-sp)q}\right]$. Então, segue-se da desigualdade de Hölder que:

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|\leq 1} \frac{|v|^p}{|x-y|^\mu} &\leq \left(\int_{|x-y|\leq 1} |v|^{tp}\right)^{\frac{1}{t}} \left(\int_{|x-y|\leq 1} \frac{1}{|x-y|^{t\mu/(t-1)}}\right)^{\frac{t-1}{t}} \\
&\leq C_2 \left(\int_{r\leq 1} r^{N-1-t\mu/(t-1)}\right)^{\frac{t-1}{t}} < \infty,
\end{aligned}$$

pois $N - 1 - t\mu/(t-1) > -1$.

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|\leq 1} \frac{|v|^q}{|x-y|^\mu} &\leq \left(\int_{|x-y|\leq 1} |v|^{\gamma q}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_{|x-y|\leq 1} \frac{1}{|x-y|^{\gamma\mu/(\gamma-1)}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
&\leq C_2 \left(\int_{r\leq 1} r^{N-1-\gamma\mu/(\gamma-1)}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} < \infty.
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. □

Demonstração do Teorema 2.1.3. Seja u uma solução não negativa arbitrária do problema (2.2). Para um $M > 0$ fixo e $\alpha > 1$, defina

$$u_M(x) = \min\{u(x), M\} \qquad \text{e} \qquad g_{\alpha,M}(t) = t\min\{t, M\}^{\alpha-1},$$

de forma que $u_M(x) \leq u(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $g_{\alpha,M}(t) = t^\alpha$, se $t \leq M$ e $g_{\alpha,M}(t) = tM^\alpha$ se $t \geq M$. Claro que $g_{\alpha,M}$ é crescente, lipschitziana e $\varphi = g_{\alpha,M}(u) \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+sp}}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\mathrm{d}x$$
$$+\int_{\mathbb{R}^N}Au(x)^{p-1}\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^N}K(x)f(u(x))\varphi(x)\mathrm{d}x. \quad (2.16)$$

Aplicando (2.5) e o Lema 2.4.1 ao lado direito de (2.16) obtêm-se:

$$\int_{\mathbb{R}^N}K(x)f(u(x))\varphi(x)\leq\int_{\mathbb{R}^N}|K|_\infty\left(\xi u^{p-1}+C_\xi u^{q-1}\right)uu_M^{\alpha-1}$$
$$\leq\xi|K|_\infty\int_{\mathbb{R}^N}u^pu_M^{\alpha-1}+C_\xi|K|_\infty\int_{\mathbb{R}^N}u^qu_M^{\alpha-1}. \quad (2.17)$$

Tomando $\xi>0$ suficientemente, segue-se de (2.16) and (2.17) que:

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+sp}}(u(x)-u(y))\big(g_{\alpha,M}(u(x))-g_{\alpha,M}(u(y))\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leq C_\xi|K|_\infty\int_{\mathbb{R}^N}u^qu_M^{\alpha-1}. \quad (2.18)$$

Denotando

$$G_{\alpha,M}(t)=\int_0^t\left(g'_{\alpha,M}(r)\right)^{1/p}\mathrm{d}r.$$

Aplicando a desigualdade

$$|a-b|^{p-2}(a-b)(g(a)-g(b))\geq|G(a)-G(b)|^p,\quad\forall\, a,b\in\mathbb{R},$$

em (2.18) tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|G_{\alpha,M}(u(x))-G_{\alpha,M}(u(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}}\leq C\left(\int_{\{u\leq T_0\}}u^qu_M^{\alpha-1}+\int_{\{u>T_0\}}u^qu_M^{\alpha-1}\right), \quad (2.19)$$

em que $T_0>1$ será escolhida na sequência e $C=C_\xi|K|_\infty$.

Como $0\leq u_M\leq u$, tem-se

$$\int_{\{u\leq T_0\}}u^qu_M^{\alpha-1}\leq T_0^{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^N}u^q. \quad (2.20)$$

Mas também tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\{u>T_0\}} u^q u_M^{\alpha-1} &\le \int_{\{u>T_0\}} u^{p_s^*} u_M^{\alpha-1} \\ &\le \left(\int_{\{u>T_0\}} u^{p^*}\right)^{\frac{p_s^*-p}{p_s^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(u^p u_M^{\alpha-1}\right)^{\frac{p_s^*}{p}}\right)^{\frac{p}{p_s^*}}. \qquad (2.21)\end{aligned}$$

Da junção de (2.19), (2.20) e (2.21) obtêm-se

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|G_{\alpha,M}(u(x)) - G_{\alpha,M}(u(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}} \\ &\qquad \le C\left[T_0^{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^N} u^q + \left(\int_{\{u>T_0\}} u^{p_s^*}\right)^{\frac{p_s^*-p}{p_s^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(u^p u_M^{\alpha-1}\right)^{\frac{p_s^*}{p}}\right)^{\frac{p}{p_s^*}}\right]. \qquad (2.22)\end{aligned}$$

Visto que $G_{\alpha,M}(t) \ge \frac{p}{p+\alpha+1} t \min\{t, M\}^{\frac{\alpha-1}{p}}$ e levando em conta (2.22) e (2.15), chega-se a

$$\begin{aligned}&S_{s,p}\left(\frac{p}{p+\alpha-1}\right)^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(u^p u_M^{\alpha-1}\right)^{\frac{p_s^*}{p}}\right)^{\frac{p}{p_s^*}} \\ &\qquad \le C\left[T_0^{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^N} u^q + \left(\int_{\{u>T_0\}} u^{p_s^*}\right)^{\frac{p_s^*-p}{p_s^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(u^p u_M^{\alpha-1}\right)^{\frac{p_s^*}{p}}\right)^{\frac{p}{p_s^*}}\right]. \qquad (2.23)\end{aligned}$$

Agora, escolha os parâmetros apropriados: tome $T_0 = T_0(\alpha, u) > 1$ tal que

$$C\left(\int_{\{u>T_0\}} u^{p_s^*} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p_s^*-p}{p_s^*}} \le \frac{S_{s,p}}{2}\left(\frac{p}{p+\alpha-1}\right)^p. \qquad (2.24)$$

Substituindo (2.24) em (2.23) tem-se:

$$S_{s,p}\left(\frac{p}{p+\alpha-1}\right)^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(u^p u_M^{\alpha-1}\right)^{\frac{p_s^*}{p}}\right)^{\frac{p}{p_s^*}} \le 2CT_0^{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^N} u^q.$$

Agora escolha $\alpha > 1$ tal que $p_s^* + (\alpha-1)p_s^*/p = r(p_s^*-1)$, em que $r > \frac{N}{sp}$. Então, quando $M \to \infty$, $\left(u^p u_M^{\alpha-1}\right)^{\frac{p_s^*}{p}} \to u^{r(p_s^*-1)}$ e $u \in L^{r(p_s^*-1)}$ (por exemplo, pelo lema de

Fatou). Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^{r(p_s^*-1)} \leq \left(\frac{2CT_0^{\alpha-1}}{S_{s,p}} \|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)} \left(\frac{p+\alpha-1}{p} \right)^p \right)^{\frac{p_s^*}{p}}.$$

Uma vez que $r > \frac{N}{sp}$ e $u \in L^{r(p_s^*-1)}$, tem-se $u^{p-1},\ u^{q-1} \in L^r(\mathbb{R}^N)$.

De $u \in L^{r(p_s^*-1)}$ segue-se que $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ao aplicar diretamente o resultado de Brasco e Parini [7, Teorema 3.8]. A continuidade de u também decorre de Brasco e Parini [7, Teorema 3.13], resultado originalmente provado por Kuusi, Mingione e Sire [31]. □

2.5 Demonstração do Teorema 2.1.4

Seja $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^0(\mathbb{R}^N)$ a solução positiva de energia mínima dada pelo Teorema 2.1.2.

Denotando

$$K(x) = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right),$$

de acordo com o Lema 2.4.1 tem-se $|K(x)|$ limitada por uma constante C quando $\mu < p$.

Demonstração do Teorema 2.1.4. Uma vez que $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = 0$, segue-se da hipótese **(f1)** que:

$$\left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right) \frac{f(v)}{v^{p-1}} \leq \frac{1}{2}A, \qquad \forall\ |x| \geq \rho_0.$$

Portanto, para todo $|x| \geq \rho_0$,

$$(-\Delta_p)^s v + \frac{A}{2} v^{p-1} = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(v) \right) f(v(x)) - \frac{A}{2} v^{p-1} \leq 0. \tag{2.25}$$

Defina $\Gamma(x) = |x|^{-\frac{N-sp}{p-1}}$ e tome $\gamma > 0$ suficientemente grande tal que $\tilde{\Gamma} = \gamma\Gamma$ satisfaz $v(x) \leq \tilde{\Gamma}(x)$ para todo x tal que $|x| = \rho_0$. Como $\tilde{\Gamma}$ é solução fraca de

$$(-\Delta_p)^s v = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus B_r, \quad \forall\ r > 0$$

(veja Brasco, Mosconi e Squassina [6, Teorema A.4]), $\tilde{\Gamma}$ é solução fraca de

$$(-\Delta_p)^s\tilde{\Gamma} + \frac{A}{2}\tilde{\Gamma}^{p-1} = \frac{A}{2}\tilde{\Gamma}^{p-1} \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus B_r \quad \forall\, r > 0. \tag{2.26}$$

Decorre então de (2.25) que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+sp}}\,(v(x)-v(y))\,(\varphi(x)-\varphi(y)) \\ + \frac{A}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[v(x)]^{p-1}\varphi(x) \le 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{s,p}(\{|x|>\rho_0\}), \tag{2.27}$$

enquanto (2.26) produz

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\tilde{\Gamma}(x)-\tilde{\Gamma}(y)|^{p-2}}{|x-y|^{N+sp}}\,\big(\tilde{\Gamma}(x)-\tilde{\Gamma}(y)\big)\,(\varphi(x)-\varphi(y)) \\ + \frac{A}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[\tilde{\Gamma}(x)]^{p-1}\varphi(x) \ge 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{s,p}(\{|x|>\rho_0\}). \tag{2.28}$$

Tomando $\varphi = \max\{-\tilde{\Gamma}, 0\} \in W_0^{s,p}(\{|x|>\rho_0\})$ e denotando $v_x = u(x)$, $v_y = u(y)$ etc, obtêm-se:

$$\begin{aligned} 0 &\ge \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v_x-v_y|^{p-2}}{|x-y|^{N+sp}}\,\big(v_x-v_y\big)\,\big(\varphi_x-\varphi_y\big) \\ &\quad + \frac{A}{2}\int_{\mathbb{R}^N} v_x\varphi_x \\ &\ge \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v_x-v_y|^{p-2}\big(v_x-v_y\big) - |\tilde{\Gamma}_x-\tilde{\Gamma}_y|^{p-2}\big(\tilde{\Gamma}_x-\tilde{\Gamma}_y\big)}{|x-y|^{N+sp}}(\varphi_x-\varphi_y) \\ &\quad + \frac{A}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Big[v_x^{p-1}-\tilde{\Gamma}_x^{p-1}\Big]\,\varphi_x. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Afirma-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v_x-v_y|^{p-2}\big(v_x-v_y\big) - |\tilde{\Gamma}_x-\tilde{\Gamma}_y|^{p-2}\big(\tilde{\Gamma}_x-\tilde{\Gamma}_y\big)}{|x-y|^{N+sp}}(\varphi_x-\varphi_y) \ge 0.$$

Provada essa afirmação, segue-se de (2.29) que

$$0 \ge \frac{A}{2}\int_{\{u\ge\tilde{\Gamma}\}}\Big[v_x^{p-1}-\tilde{\Gamma}_x^{p-1}\Big]\,(u-\tilde{\Gamma}) \ge 0,$$

obtendo-se, assim, que $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \ge \rho_0 \text{ and } u(x) \ge \tilde{\Gamma}(x)\} = \emptyset$.

Para provar a afirmação, relembre que:

$$|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}b = (p-1)(b-a)\int_0^1 |a+t(b-a)|^{p-2}\mathrm{d}t, \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}.$$

Tomando $b = b(x,y) = v_x - v_y$ e $a = a(x,y) = \tilde{\Gamma}_x - \tilde{\Gamma}_y$, conclui-se que:

$$|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}b = (p-1)Q(x,y)(b-a)$$

com $Q(x,y) \geq 0$ representando a integral. Além disso,

$$\begin{aligned}
(b-a)(\varphi_x - \varphi_y) &= \left[(v_x - v_y) - (\tilde{\Gamma}_x - \tilde{\Gamma}_y)\right]\left[(u-\tilde{\Gamma})_x^+ - (u-\tilde{\Gamma})_y^+\right] \\
&= \left[(u-\Gamma)_x - (u-\Gamma)_y\right]\left[(u-\tilde{\Gamma})_x^+ - (u-\tilde{\Gamma})_y^+\right] \\
&\geq \left|(u-\tilde{\Gamma})_x^+ - (u-\tilde{\Gamma})_y^+\right|^2
\end{aligned}$$

como consequência de (2.13) for $q = 2$, provando a afirmação. □

Observação 2.5.1. *Considerando o caso $p = 2$, Felmer, Quaas e Tan* [25] *obtiveram decaimento ideal, provando a existência de constantes $0 < C_1 \leq C_2$ tais que:*

$$\frac{C_1}{|x|^{N+2s}} \leq u(x) \leq \frac{C_2}{|x|^{N+2s}}, \quad \forall\, |x| > 1.$$

Apêndice A

Resultados Básicos

A.1 Consequências das Hipóteses

Lema A.1.1. *As hipóteses* **(f1)** *e* **(f2)** *garantem que, para todo $\xi > 0$ dado, existe $C_\xi > 0$ tal que*

$$f(t) < \xi t + C_\xi t^{\theta-1}, \quad \forall\, t > 0.$$

Analogamente, existe $D_\xi > 0$ tal que

$$F(t) < \xi t^2 + D_\xi t^{\theta}, \quad \forall\, t > 0.$$

Demonstração. Decorre da hipótese **(f1)** que, dado $\xi > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para cada $|t| < \delta$ tem-se $|f(t)| < \xi|t|$.

Mas então a hipótese **(f2)** garante que $f(t) < t^{\theta-1}$ para todo $t > M$.

Como a função f é positiva e $[\delta, M]$ é compacto, então, existe $c > 0$ tal que $f(t) < c$ para todo $t \in [\delta, M]$. Portanto:

$$f(t) \leq \begin{cases} \xi t, & \text{se} \quad t \in (0,\delta) \\ c, & \text{se} \quad t \in [\delta, M] \\ t^{\theta-1}, & \text{se} \quad t \in [M,\infty). \end{cases}$$

Tomando $C_\xi = \max\{1, c\}$, decorre que

$$f(t) < \xi t + C_\xi t^{\theta-1},$$

para todo $t \geq 0$.

A demonstração da afirmativa sobre a primitiva F é análoga. $\square$

Lema A.1.2. *A função* $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ *para* $t > 0$ *é crescente se, e somente se,*

$$t^2 f'(t) - f(t)t > 0; \ \ \textit{para} \ \ t > 0.$$

E em caso afirmativo, satisfaz a hipótese de Ambrosetti-Rabinowitz:

$$0 < 2F(t) < tf(t), \ \ \textit{para todo } t > 0.$$

Demonstração. Suponha que:

$$g(t) = \frac{f(t)}{t},$$

crescente para $t > 0$. Então:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{tf'(t) - f(t)}{t^2} \\ &= \frac{f'(t)t^2 - f(t)t}{t^3}. \end{aligned}$$

Como $g(t)$ é estritamente crescente, logo $g'(t) > 0$. Como $t > 0$ então $t^2 f'(t) - f(t)t > 0$.

Além disso, para $t > 0$ vale

$$t^2 f'(t) - tf(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(t) < f'(t)t.$$

Integrando a última desigualdade em $[0, t]$ e aplicando integração por partes, obtêm-se

$$\begin{aligned} \int_0^t f(r)\mathrm{d}r &< \int_0^t rf'(r)\mathrm{d}r \\ &= tf(t) - \int_0^t f(r)\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

mostrando que $2F(t) < tf(t)$.

Reciprocamente, se $t^2 f(t) - f(t)t > 0$ para $t > 0$, então:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{tf'(t) - f(t)}{t^2} \\ &= \frac{f'(t)t^2 - f(t)t}{t^3} > 0, \end{aligned}$$

e portanto, $g(t)$ é crescente. $\square$

A.2 Operador Traço

O objetivo do operador traço é dar significado para a restrição de uma função $u : \Omega \to \partial\Omega$. No contexto desta Tese o domínio $\Omega = \mathbb{R}^{N+1}_+$ e $\partial\Omega = \mathbb{R}^N \simeq \{0\} \times \mathbb{R}^N$. A seguir apresentar-se-á resultados importantes que serão úteis na próxima seção.

Proposição A.2.1. *Existe um único operador linear contínuo*

$$\gamma : H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+) \to L^2(\mathbb{R}^N),$$

tal que para todo $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+}) \bigcap H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ *tem-se:*

$$\gamma(v) = v \mid_{\partial\mathbb{R}^{N+1}_+} = v \mid_{\mathbb{R}^N} = v(0, y).$$

Observação A.2.2. *O operador* γ *citado na supra proposição, é chamado operador traço.*

Proposição A.2.3. *A imagem* $R(\gamma)$ *e o núcleo* $N(\gamma)$ *do operador traço* γ *da proposição anterior são tais que:*

$$R(\gamma) = H^{1/2}(\mathbb{R}^N) \text{ e } N(\gamma) = H^1_0(\mathbb{R}^{N+1}_+).$$

A.3 Resultados complementares

Lema A.3.1. *Seja* $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ *uma sequência tal que* $v_n \rightharpoonup v$. *Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (W * F(\gamma(v_n)) f(\gamma(v_n)) \gamma((v_n - v)\varphi) \to 0,$$

para toda função $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

Demonstração. Considere $W = W_1 + W_2 \in L^r(\mathbb{R}^N) + L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para a função W_1 analisa-se duas situações. Primeiro suponha que $r \in \left(\frac{N}{N(2-\theta)+\theta}, \frac{2N}{N(2-\theta)+\theta} \right]$. Aplicando a desigualdade de Lieb (Proposição 1.4.1) tem-se:

$$\int_{\mathbb{R}^N} W_1 * F(\gamma(v_n)) f(\gamma(v_n))\gamma(v_n - v)\varphi \leq |W_1|_r |F(\gamma(v_n))|_t |f(\gamma(v_n))\gamma(v_n - v)\varphi|_s$$

em que $\frac{1}{r} + \frac{1}{t} + \frac{1}{s} = 2$. Pelo crescimento da função F pode-se tomar $t = \frac{2^\sharp}{\theta}$ (pois, $|F(t)|^t \leq C(|t|^2 + |t|^\theta)^t \leq 2^{t-1}C(|t|^{2t} + |t|^{\theta t})$. Assim, $\int_{\mathbb{R}^N} |F(\gamma(v))|^t < \infty$ se, e somente se, $2 \leq \theta t \leq 2^\sharp$). Portanto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} = 2 - \frac{\theta}{2^\sharp} - \frac{1}{r} > 2 - \frac{\theta}{2^\sharp} - \frac{N(2-\theta)+\theta}{N} \\
= 2 - \frac{\theta}{2^\sharp} - \frac{2N}{N} + \frac{\theta(N-1)}{N} \\
= -\frac{\theta}{2^\sharp} + \frac{2\theta(N-1)}{2N} \\
= -\frac{\theta}{2^\sharp} + \frac{2\theta}{2^\sharp} = \frac{\theta}{2^\sharp}.
\end{aligned}$$

Logo $s < \frac{2^\sharp}{\theta}$ ou equivalentemente $s\theta < 2^\sharp$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} = 2 - \frac{\theta}{2^\sharp} - \frac{1}{r} < 2 - \frac{\theta}{2^\sharp} - \frac{N(2-\theta)+\theta}{2N} \\
= 2 - \frac{\theta}{2^\sharp} - \frac{2N}{2N} + \frac{\theta(N-1)}{2N} \\
= 1 - \frac{\theta}{2^\sharp} + \frac{\theta(N-1)}{2N} \\
= 1 - \frac{\theta}{2^\sharp} + \frac{\theta}{2^\sharp} = 1.
\end{aligned}$$

Assim, $s > 1$. Estima-se agora o termo

$$|f(\gamma(v_n))\gamma(v_n - v)\varphi|_s.$$

Tem-se que:

$|f(\gamma(v_n))\gamma(v_n - v)\varphi|_s$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\gamma(v_n)|+|\gamma(v_n)|^{\theta-1}|\gamma(v_n-v)\varphi|\right)^s\right)^{1/s}\\
&= C\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\gamma(v_n)||\gamma(v_n-v)\varphi|+|\gamma(v_n)|^{\theta-1}|\gamma(v_n-v)\varphi|\right)^s\right)^{1/s}\\
&\leq C2^{s-1}\left(\int_{\mathbb{R}^N}(|\gamma(v_n)||\gamma(v_n-v)\varphi|)^s+(|\gamma(v_n)|^{\theta-1}|\gamma(v_n-v)\varphi|)^s\right)^{1/s}.
\end{aligned}
$$

Aplicando a desigualdade de Hölder ao lado direito da desigualdade anterior tem-se

$$
\begin{aligned}
|f(\gamma(v_n))\gamma(v_n-v)\varphi|_s \leq C_s &\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\gamma(v_n)|^{2s}\right)^{1/2s}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\gamma(v_n-v)\varphi|^{2s}\right)^{1/2s}\right.\\
&\left.+\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\gamma(v_n)|^{s(\theta-1)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{\frac{\theta-1}{s\theta}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\gamma(v_n-v)\varphi|^{\theta s}\right)^{\frac{1}{\theta s}}\right]\\
= C_s &\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\gamma(v_n)|^{2s}\right)^{1/2s}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\gamma(v_n-v)\varphi|^{2s}\right)^{1/2s}\right.\\
&\left.+\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\gamma(v_n)|^{s\theta}\right)^{\frac{\theta-1}{s\theta}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\gamma(v_n-v)\varphi|^{\theta s}\right)^{\frac{1}{\theta s}}\right].
\end{aligned}
$$

Observe que a integral $\int_{\mathbb{R}^N}|\gamma(v_n)|^{2s}<\infty$, pois $s>1$ e assim $2s>2$. Como $\theta s<2^\sharp$ e $\theta>2$ então $2s\in[2,2^\sharp]$. E, é claro, $\int_{\mathbb{R}^N}|\gamma(v_n)|^{s\theta}<\infty$, pois $s\theta\in[2,2^\sharp]$. Basta agora garantir que $\int_{\mathbb{R}^N}(|\gamma(v_n-v)\varphi|)^{2s}\to 0$ e $\int_{\mathbb{R}^N}(|\gamma(v_n-v)\varphi|)^{s\theta}\to 0$. De fato, como $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$, então φ se anula fora de um compacto. Seja $K\subset\mathbb{R}_+^{N+1}$ um compacto. A imersão

$$H^1(K)\hookrightarrow L^q(K)$$

é compacta para $q\in[1,2^*)$, segundo o Teorema de Rellich-Kondrachov. Então, a menos de subsequência, $v_n\to v$ em $L^q(\mathbb{R}_+^{N+1})$ para $q\in[2,2^*)\subset[1,2^*)$. Portanto:

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\gamma(v_n-v)\varphi|)^{2s}\to 0 \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^N}(|\gamma(v_n-v)\varphi|)^{s\theta}\to 0,$$

pois, conforme foi mostrado, $2s\in[2,2^\sharp]\subset[1,2^*)$ e $\theta s\in[2,2^\sharp]\subset[1,2^*)$. Conclui-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(W_1*F(\gamma(v_n))f(\gamma(v_n))\gamma((v_n-v)\varphi)\to 0.$$

Suponha agora que $r>\frac{2N}{N(2-\theta)+\theta}$. Tem-se $F(\gamma(v_n))\in L^{r'}(\mathbb{R}^N)$ como consequência da Proposição 1.3.6(ii), sendo r' o expoente conjugado de r e $W_1 * F(\gamma(v_n)) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que $|W_1 * F(\gamma(v_n))| < C$. Assim:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} & W_1 * F(\gamma(v_n)) f(\gamma(v_n))\gamma(v_n - v)\varphi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |f(\gamma(v_n))\gamma(v_n - v)\varphi| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\gamma(v_n)| + |\gamma(v_n)|^{\theta-1}|\gamma(v_n - v)\varphi|\Big) \\
&= C \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\gamma(v_n)||\gamma(v_n - v)\varphi| + |\gamma(v_n)|^{\theta-1}|\gamma(v_n - v)\varphi|\Big).
\end{aligned}$$

Aplicando novamente a desigualdade de Hölder ao lado direito da desigualdade anterior tem-se:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} W_1 * F(\gamma(v_n)) f(\gamma(v_n))\gamma(v_n - v) \\
&\leq C \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n - v)\varphi|^2\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^{(\theta-1)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n - v)\varphi|^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \right] \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n - v)\varphi|^2\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^{\theta}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n - v)\varphi|^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}.
\end{aligned}$$

Observe que $\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^2 < \infty$, pois $[2, 2^\sharp]$ e $\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^\theta < \infty$, pois $\theta \in [2, 2^\sharp]$. Similarmente ao caso anterior, tome um compacto $K \subset \mathbb{R}^{N+1}_+$ e aplique novamente a imersão compacta de Rellich-Kondrachov para então obter-se as convergências:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\gamma(v_n - v)\varphi|)^{2s} \to 0 \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^N} (|\gamma(v_n - v)\varphi|)^{s\theta} \to 0,$$

Conclui-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} (W_1 * F(\gamma(v_n)) f(\gamma(v_n))\gamma((v_n - v)\varphi) \to 0,$$

para $W_1 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ e $r > \frac{N}{N(2-\theta)+\theta}$ e $\theta \in [2, 2^\sharp]$.

Será mostrado agora a última convergência considerando o termo $W_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Observe que $F(\gamma(v_n))$ é limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Provou-se que $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Assim, por continuidade $F(\gamma(v_n(x)) \to F(\gamma(v(x))$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Logo pelo Lema 1.7.3 tem-se:

$$F(\gamma(v_n)) \rightharpoonup F(\gamma(v)) \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Defina o operador:

$$\begin{array}{rccc} L: & L^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{R}^N) \\ & \xi & \longmapsto & W_2 * \xi \end{array}.$$

Mostrou-se na Proposição 1.4.3 que L está bem definido, é linear e contínuo. Pela continuidade de L tem-se que $L(F(\gamma(v_n(x)) \to L(F(\gamma(v(x))$ q.t.p. Logo

$$L(F(\gamma(v_n)) \rightharpoonup L(F(\gamma(v)) \text{ em } L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Ou seja,

$$W_2 * F(\gamma(v_n)) \rightharpoonup W_2 * F(\gamma(v)) \text{ em } L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Logo $W_2 * F(\gamma(v_n))$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$]W_2 * F(\gamma(v_n)) < C.$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} W_2 * F(\gamma(v_n)) f(\gamma(v_n))\gamma(v_n - v)\varphi \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |f(\gamma(v_n))\gamma(v_n - v)\varphi| \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\gamma(v_n)| + |\gamma(v_n)|^{\theta-1}|\gamma(v_n - v)\varphi|\right) \\ &= C \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\gamma(v_n)||\gamma(v_n - v)\varphi| + |\gamma(v_n)|^{\theta-1}|\gamma(v_n - v)\varphi|\right). \end{aligned}$$

Aplicando novamente a desigualdade de Hölder ao lado direito da desigualdade anterior tem-se:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} W_2 * F(\gamma(v_n)) f(\gamma(v_n))\gamma(v_n - v)\varphi \\ &\leq C \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n - v)\varphi|^2\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^{(\theta-1)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n - v)\varphi|^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \right] \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n - v)\varphi|^2\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^\theta\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n - v)\varphi|^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Observe que a integral $\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^2 < \infty$ pois $[2, 2^\sharp]$ e a integral $\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(v_n)|^\theta < \infty$ pois $\theta \in [2, 2^\sharp]$. Similarmente ao caso anterior, tome um compacto $K \subset \mathbb{R}^{N+1}_+$ e aplique novamente a imersão compacta de Rellich-Kondrachov para então obtêm-se as convergências:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\gamma(v_n - v)\varphi|)^{2s} \to 0 \;\text{ e }\; \int_{\mathbb{R}^N} (|\gamma(v_n - v)\varphi|)^{s\theta} \to 0,$$

Conclui-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} (W_2 * F(\gamma(v_n)) f(\gamma(v_n)) \gamma((v_n - v)\varphi) \to 0,$$

para $W_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. E isto prova o resultado.

Apêndice B

O funcional energia e o termo de convolução

B.1 O termo de convolução

Seja
$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(u))]\, F(\gamma(u))\mathrm{d}y.$$

Lema B.1.1. *O funcional Ψ é Gateaux diferenciável.*

Demonstração. Tem-se
$$\begin{aligned}\frac{\Psi(u+tv)-\Psi(u)}{t} = \frac{1}{2t}\Bigg(&\int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(u)+t\gamma(v))]\, F(\gamma(u)+t\gamma(v)) \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(u))]\, F(\gamma(u))\Bigg).\end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo $[W * F(\gamma(u))]\, F(\gamma(u+tv))$ no lado direito da igualdade anterior, obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Psi(u+tv)-\Psi(u)}{t}\\
=&\frac{1}{2t}\Bigg(\int_{\mathbb{R}^N}\left[W*F(\gamma(u)+t\gamma(v))\right]F(\gamma(u)+t\gamma(v))-\left[W*F(\gamma(u))\right]F(\gamma(u+tv))\\
&\quad+\left[W*F(\gamma(u))\right]F(\gamma(u+tv))-\left[W*F(\gamma(u))\right]F(\gamma(u)))\mathrm{d}y\Bigg)\\
=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Bigg(\left[W*\frac{F(\gamma(u+tv)-F(\gamma(u))}{t}\right]F(\gamma(u+tv))\\
&\quad+\left[W*F(\gamma(u))\right]\frac{F(\gamma(u+tv)-F(\gamma(u))}{t}\Bigg)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

O Teorema do Valor Médio garante, então, a existência de um número $\eta\in(0,1)\subset\mathbb{R}$ tal que

$$
\frac{F(\gamma(u+tv))-F(\gamma(u))}{t}=\frac{D(F(\gamma(u+t\eta v))t\gamma(v)}{t}=f(\gamma(u+t\eta v))\gamma(v).
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{\Psi(u+tv)-\Psi(u)}{t}=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[W*f(\gamma(u+t\eta v))\right]F(\gamma(u+tv))\gamma(v)\\
&+\int_{\mathbb{R}^N}\left[W*F(\gamma(u))\right]f(\gamma(u+t\eta v))\gamma(v).
\end{aligned}\tag{B.1}
$$

Será mostrado que as integrais em (B.1) são finitas. De fato, decorre da desigualdade de Lieb (Proposição 1.4.1) que existe uma constante N tal que

$$
\begin{aligned}
\Big|\left[W*f(\gamma(u+t\eta v))\right]F(\gamma(u+tv))\gamma(v)\Big|&\le N|W|_r|f(\gamma(u+t\eta v))|_p|F(\gamma(u+tv))\gamma(v)|_q\\
&\le N|W|_r|f(\gamma(u+t\eta v))|_p|F(\gamma(u+tv))|_q|\gamma(v)|_{\frac{q}{q-1}},
\end{aligned}
$$

em que $\frac{1}{r}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=2$.

Tomando $r>\frac{2N}{N(2-\theta)+\theta}$ e $p=q=r'$ segue-se daí que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r'}=1-\frac{1}{2r}\ge 1-\frac{N(2-\theta)+\theta}{2N}&\\
=\frac{2N-(N(2-\theta)+\theta)}{2N}&\\
=\frac{N\theta-\theta}{2N}=\frac{\theta(N-1)}{2N}&.
\end{aligned}
$$

Assim $r' < \frac{2N}{(N-1)}\frac{1}{\theta} \leq 2^\sharp$, o que permite aplicar a Proposição 1.3.3 e obter

$$
\begin{aligned}
&|W * f(\gamma(u+t\eta v))F(\gamma(u+tv))\gamma(v)| \\
&\leq N|W|_r|f(\gamma(u+t\eta v))|_{r'}|F(\gamma(u+tv))\gamma(v)|_{r'} \\
&\leq C|W|_r(|\gamma(u+t\eta v)|_{r'} + |\gamma(u+t\eta v)^{\theta-1}|_{r'})(|\gamma(u+tv)^2|_{r'} + |\gamma(u+tv)^\theta|_{r'}|)|\gamma(v)|_{\frac{r'}{r'-1}} \\
&\leq C(\|u+t\eta v\| + \|u+t\eta v\|^{\theta-1})(\|u+tv\|^2 + \|u+tv\|^\theta)\,\|v\| \\
&\leq C(\|u+v\| + \|u+v\|^{\theta-1})(\|u+v\|^2 + \|u+\|^\theta)\,\|v\| < +\infty.
\end{aligned}
$$

De modo análogo é possível mostrar que

$$|\,[W * F(\gamma(u))]\, f(\gamma(u+t\eta v))\gamma(v)|$$

Agora, aplicando o Teorema da Convergência Dominada tem-se:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{\Psi(u+tv)-\Psi(u)}{t} &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\lim_{t\to 0}\Big[(W * f(\gamma(u+t\eta v)\gamma(v))F(\gamma(u)) \\
&\qquad + (W * F(\gamma(u))f(\gamma(u+t\eta v)\gamma(v))\Big] \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[W * f(\gamma(u))\gamma(v)]F(\gamma(u)) + [W * F(\gamma(u))]f(\gamma(u))\gamma(v)).
\end{aligned}
$$

A hipótese do termo W ser radial permite obter uma expressão mais simples:

$$
\begin{aligned}
\langle \Psi'(u(y)), v\rangle &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[W * f(\gamma(u))\gamma(v))]F(\gamma(u)) + \int_{\mathbb{R}^N}[W * F(\gamma(u))]f(\gamma(u)\gamma(v)) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}[W(y-z)f(\gamma(u(z))\gamma(v(z)))]\,F(\gamma(u(y)))\mathrm{d}z\mathrm{d}y + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}[W(y-z)F(\gamma(u(z)))]\,f(\gamma(u(y))\gamma(v(y)))\mathrm{d}z\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Trocando as variáveis y por z e z por y na primeira parcela dessa soma, obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
\langle \Psi'(u(y)), v\rangle &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}[W(z-y)f(\gamma(u(y)))\gamma(v(y))]\,F(\gamma(u(z)))\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}[W(y-z)F(\gamma(u(z))]\,f(\gamma(u(y))\gamma(v(y)))\mathrm{d}z\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Como W é radial, tem-se $W(y-z) = W(z-y)$. Aplicando o Teorema de Fubini na primeira parcela conclui-se que

$$\begin{aligned}
\langle \Psi'(u(y)), v\rangle &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} [W(z-y)f(\gamma(u(y))\gamma(v(y)))]\, F(\gamma(u(z)))\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} [W(y-z)F(\gamma(u(z)))]\, f(\gamma(u(y))\gamma(v(y)))\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} [W(y-z)F(\gamma(u(z)))]\, f(\gamma(u(y))\gamma(v(y)))\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [W * F(\gamma(u))]\, f(\gamma(u))\gamma(v).
\end{aligned}$$

Será mostrado agora que a derivada de Gateaux

$$\Psi' : H^1(\mathbb{R}_+^{N+1}) \to H^1(\mathbb{R}_+^N)^*,$$

é contínua.

Seja $\{u_n\} \in H^1(\mathbb{R}_+^{N+1})$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}_+^{N+1})$. Então pela imersão contínua $H^1(\mathbb{R}_+^{N+1}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ com $2 < p < 2^*$ tem-se que $\gamma(u_n) \to \gamma(u)$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Como f é uma função de classe C^1 por hipótese, tem-se que $f(\gamma(u_n)) \to f(\gamma(u))$ em $L^q(\mathbb{R}_+^{N+1})$ e $F(\gamma(u_n)) \to F(\gamma(u))$ em $L^q(\mathbb{R}_+^{N+1})$ onde $q = \frac{p}{p-1}$. Assim aplicando a desigualdade de Lieb,

$$\begin{aligned}
|\langle \Psi'(u_n) - \Psi'(u), v\rangle| &= 2\left|\int_{\mathbb{R}^N} [W * (F(\gamma(u_n))]\, f(\gamma(u_n)\gamma(v)) - F(\gamma(u)))f(\gamma(u)\gamma(v)))\,\mathrm{d}y\right| \\
&\le 2\int_{\mathbb{R}^N} |[W * (F(\gamma(u_n))]\, f(\gamma(u_n) - F(\gamma(u)))f(\gamma(u)))|\,|\gamma(v)|\mathrm{d}y \\
&\le C|W|_r|F(\gamma(u_n))f(\gamma(u_n)) - F(\gamma(u))f(\gamma(u))|_s|\gamma(v)|_t,
\end{aligned}$$

em que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 2$. Agora observe que:

$$\begin{aligned}
&|F(\gamma(u_n))f(\gamma(u_n)) - F(\gamma(u))f(\gamma(u))|_s \\
&\quad = |F(\gamma(u_n))f(\gamma(u_n)) - F(\gamma(u))f(\gamma(u_n)) + F(\gamma(u))f(\gamma(u_n)) - F(\gamma(u))f(\gamma(u))|_s \\
&\quad = |(F(\gamma(u_n)) - F(\gamma(u)))f(\gamma(u_n)) - F(\gamma(u))(f(\gamma(u_n)) - f(\gamma(u)))|_s \\
&\quad \le |(F(\gamma(u_n)) - F(\gamma(u)))f(\gamma(u_n))|_s - |F(\gamma(u))(f(\gamma(u_n)) - f(\gamma(u)))|_s.
\end{aligned}$$

Fazendo $\frac{1}{s} = \frac{a}{p} + \frac{1-a}{q}$, decorre da desigualdade de Hölder e do Teorema da interpolação que o termo do lado direito da última desigualdade satisfaz

$$\begin{aligned}
&|F(\gamma(u_n))f(\gamma(u_n)) - F(\gamma(u))f(\gamma(u))|_s \\
&\le |(F(\gamma(u_n)) - F(\gamma(u))|_q^a|f(\gamma(u_n))|_p^{1-a} - |F(\gamma(u))|_p^a|(f(\gamma(u_n)) - f(\gamma(u)))|_q^{1-a} \to 0.
\end{aligned}$$

Portanto $\Psi'(u_n) \to \Psi(u)$ e então Ψ é contínua. □

B.2 Diferenciabilidade de I

A seguir será provado que o funcional I é de classe C^1 e calcular sua derivada.

Lema B.2.1. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $2 < p < +\infty$. Então o funcional*

$$J(u) = \int_\Omega |u|^p$$

é de classe $C^1(L^2(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\langle J'(u), v \rangle = p \int_\Omega |u|^{p-2} uv.$$

Demonstração. Inicia-se mostrando que J é Gateaux diferenciável. Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio tem-se a existência de $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{|u(x) + tv(x)|^p - |u(x)|^p}{|t|} &= p|u(x) + \theta t v(x)|^{p-2}(u(x) + \theta t v(x))v(x) \\ &\leq p[u(x) + v(x)]^{p-1}|v(x)|. \end{aligned}$$

Se tomar q satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, decorre da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|)^{p-1}|v(x)| &\leq \left(\int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |v(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|)^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |v(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= ||u| + |v||_p^{p-1} \, |v|_p \\ &\leq (|u|_p + |v|_p)_p^{p-1} |v|_p \\ &\leq 2^{p-2}(|u|_p^{p-1} + |v|_p^{p-1})|v|_p < +\infty. \end{aligned}$$

Logo $||u(x)| + |v(x)||^{p-1}|v(x)| \in L^1(\Omega)$. Assim pelo Teorema da Convergência Dominada tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\langle J'(u), v\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\int_\Omega |u+tv|^p - \int_\Omega |u|^p}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{|u+tv|^p-|u|^p}{t}\\
&= \int_\Omega \lim_{t\to 0}\frac{|u+tv|^p-|u|^p}{t}\\
&= \int_\Omega \lim_{t\to 0} p|u(x)+\theta tv(x)|^{p-2}(u(x)+\theta tv(x))v(x)\\
&= \int_\Omega p|u(x)|^{p-2}u(x)v(x).
\end{aligned}
$$

Agora mostra-se a continuidade da derivada de Gateaux.

Para isso, defina $g(u) = p|u|^{p-2}u$. Tome uma sequência $u_n \to u \in L^p(\Omega)$. Claramente $g(u_n) \to g(u)$ em $L^q(\Omega)$ para $q = \frac{p}{p-1}$.

Como $u \in L^p(\Omega)$, aplicando a desigualdade de Hölder, tem-se:

$$
\begin{aligned}
|\langle J'(u_n) - J'(u), v\rangle| &= \left|\int_\Omega p|u_n|^{p-2}u_n v - p|u|^{p-2}uv\right|\\
&= \left|\int_\Omega (p|u_n|^{p-2}u_n - p|u|^{p-2}u)v\right|\\
&= \left|\int_\Omega (g(u_n)-g(u))v\right|\\
&\leq \int_\Omega |(g(u_n)-g(u))v|\\
&\leq \left(\int_\Omega |(g(u_n)-g(u))|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega |v|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= |(g(u_n)-g(u))|_q |v|_p.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\|J'(u_n) - J'(u)\| \leq |(g(u_n)-g(u))|_q \to 0 \ \text{ quando } \ n \to +\infty.
$$

Com isto conclui-se que J' é contínua. Logo a função $J \in C^1(\Omega)$.

Lema B.2.2. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $2 < p < +\infty$. Então o funcional*

$$K(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p$$

é de classe $C^1(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\langle K'(u), v\rangle = p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v.$$

Demonstração. Mostra-se inicialmente a existência da derivada de Gateaux.

Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$. Dado $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, tem-se que, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{|t|} &= p|\nabla u(x) + \theta t \nabla v(x)|^{p-2}(\nabla u(x) + \theta t\nabla v(x))\nabla v(x) \\ &\leq p[\nabla u(x) + \nabla v(x)]^{p-1}|\nabla v(x)|. \end{aligned}$$

Se tomar q tal que: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow p = q(p-1)$. Assim usando a desigualdade de Hölder obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int_\Omega (|\nabla u(x)| + |\nabla v(x)|)^{p-1}|\nabla v(x)| &\leq \left(\int_\Omega (|\nabla u(x)| + |\nabla v(x)|)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_\Omega (|\nabla u(x)| + |\nabla v(x)|)^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= ||\nabla u| + |\nabla v||_p^{p-1}|\nabla v|_p \\ &\leq (|\nabla u|_p + |\nabla v|_p)^{p-1}|\nabla v|_p \\ &\leq 2^{p-2}(|\nabla u|_p^{p-1} + |\nabla v|_p^{p-1})|\nabla v|_p < +\infty. \end{aligned}$$

Logo $||\nabla u(x)| + |\nabla v(x)||^{p-1}|\nabla v(x)| \in L^1(\Omega)$. Assim pelo Teorema da Convergência Dominada tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\langle K'(u), v\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^p - \int_\Omega |\nabla u|^p}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t}\\
&= \int_\Omega \lim_{t\to 0}\frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t}\\
&= \int_\Omega \lim_{t\to 0} p|\nabla u(x) + \theta t\nabla v(x)|^{p-2}(\nabla u(x) + \theta t \nabla v(x))\nabla v(x)\\
&= \int_\Omega p|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla v(x).
\end{aligned}
$$

Mostra-se agora a continuidade da derivada de Gateaux.

Defina $g(u) = p|\nabla u|^{p-2}\nabla u$. Tome uma sequência $\nabla u_n \to \nabla u \in L^p(\Omega)$. Claramente tem-se que $g(u_n) \to g(u)$ em $L^q(\Omega)$ para $q = \frac{p}{p-1}$.

Como $\nabla v \in L^p(\Omega)$, aplicando a desigualdade de Hölder, tem-se:

$$
\begin{aligned}
|\langle K'(u_n) - K'(u), v\rangle| &= \left|\int_\Omega p|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n v - p|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\right|\\
&= \left|\int_\Omega (p|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - p|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla v\right|\\
&= \left|\int_\Omega (g(u_n) - g(u))\nabla v\right|\\
&\le \int_\Omega |(g(u_n) - g(u))\nabla v|\\
&\le \left(\int_\Omega |(g(u_n) - g(u))|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= |(g(u_n) - g(u))|_q |\nabla v|_p.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\left\|K'(u_n) - K'(u)\right\| \le |(g(u_n) - g(u))|_q \to 0 \ \text{ quando } \ n \to +\infty.
$$

Com isto conclui-se que K' é contínua. Logo, $K \in C^1(\Omega)$. $\square$

Proposição B.2.3 (diferenciabilidade de I). *O funcional I é de classe C^1 e*

$$\langle I'(u), v\rangle = \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \Big(\nabla u \nabla v + m^2 uv\Big) + \int_{\mathbb{R}^N} V(y)\gamma(u)\gamma(v)\mathrm{d}y$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N} (W * F(\gamma(u)))f(\gamma(u))\gamma(v)\mathrm{d}y \tag{B.2}$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

Demonstração. Como antes, escreva $I = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2 - \Psi$:

$$I(u) = \frac{1}{2}I_1(u) + \frac{1}{2}I_2(u) - \Psi(u),$$

em que

$$I_1(u) = \iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla u|^2 + m^2|u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} V(y)|\gamma(u)|^2\mathrm{d}y$$

e

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (W * F(\gamma(u)))F(\gamma(u))\mathrm{d}y.$$

Aplicando Lema B.2.1 e B.2.2 fazendo $\Omega = \mathbb{R}^{N+1}_+$ tem-se:

$$\langle I_1'(u), \varphi\rangle = 2\iint_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \Big(\nabla u \nabla \varphi + m^2 u\varphi\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

E aplicando o Lema B.2.1 para $\Omega = \mathbb{R}^N$ obtêm-se:

$$\langle I_2'(u), \varphi\rangle = 2\int_{\mathbb{R}^N} V(y)\gamma(u)\gamma(\varphi)\mathrm{d}y.$$

Tendo em conta o Lema B.1.1, a prova está completa. □

Apêndice C

Resultados Complementares

A seguir será enunciado dois resultados, sendo o primeiro deles devido à Kuusi, Mingione e Sire [31]), referidos em Brasco e Parini [7, Theorem 3.13, Theorem 3.8] adaptados à essa Tese.

Teorema C.0.4. *Sejam* $1 < p < \infty$ *(com* $p \leq N$*) e* $0 < s < 1$ *Seja* $F \in L^q(\Omega)$ *para* $q > \frac{N}{sp}$ *e seja* $v = g(u)$ *uma subsolução, isto é uma função satisfazendo*

$$\langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} A\,|u|^{p-2}uv \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u)v,$$

com g *convexa e Lipschitz. Tomando* $0 < r_0 < r_0$ *tal que* $B_{R_0}(x_0) \subset \Omega$*, e suponha que*

$$v \geq 0 \ \ em \ \ B_{R_0}(x_0).$$

Então a seguinte estimativa é invariante por escala:

$$\|v\|_{L^\infty(B_{R_0})} \leq C\left[\left(\int_{B_{R_0}} v^p\right)^{1/p} + \left(\frac{R_0}{r_0}\right)^{\frac{sp}{p-1}} Tail(v, x_0, r_0) + L(R_0)^{sp-\frac{N}{q}}\, \|F\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^q(B_{R_0})}\right],$$

em que

$$C = C_0\left(\frac{R_0}{r_0}\right)^{\frac{N}{p}}\left(\frac{R_0}{R_0 - r_0}\right)^{(N+sp+p)\frac{N}{sp^2}}$$

e

$$C_0 = C_0(N, s, p, q) > 0.$$

Teorema C.0.5. *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $0 < s < 1$*. Se* $H \in L^q(\Omega)$ *com* $q > N/sp$*, então a solução* $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ *de*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}(\varphi(x)-\varphi(y))dxdy=\int_{\Omega}H\varphi dy,$$

é contínua.

Este resultado será aplicado ao considerar-se $H=-A|u|^{p-2}u+\left(\frac{1}{|x|^{\mu}}*F(u)\right)f(u)$.

Referências Bibliográficas

[1] N. Ackermann: *On a periodic Schrödinger equation with nonlocal superlinear part*, Math. Z. **248** (2004), 423-443.

[2] C. O. Alves e M. Yang: *Existence of semiclassical ground state solutions for a generalized Choquard equation,* J. Differential Equations **257** (2014), 4133-4164.

[3] C.O. Alves e M. Yang: *Investigating the multiplicity and concentration behaviour of solutions for a quasi-linear Choquard equation via the penalization method*, Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A **146** (2016), 23-58.

[4] D. Applebaum: *Lévy processes, from probability fo finance and quantum groups*, Notices Amer. Math. Soc. **51** (2004), 1336-1347.

[5] P. Belchior, H. Bueno, O.H. Miyagaki e G.A. Pereira: *Remarks about a fractional Choquard equation: Ground state, regularity and polynomial decay*, Nonlinear Anal. **164** (2017), 38-53.

[6] L. Brasco, S. Mosconi e M. Squassina: *Optimal Decay of extremals for the fractional Sobolev Inequality*, Calc. Var. **55** (2016): 23. doi:10.1007/s00526-016-0958-y

[7] L. Brasco e E. Parini: *The second eigenvalue of the fractional p-Laplacian*, Advances in Calculus of Variations **9** 4, 323-355, ISSN (Online) 1864-8266, ISSN (Print) 1864-8258, doi:10.1515/acv-2015-0007

[8] H. Brézis: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, New York, 2011.

[9] C. Bucur e E. Valdinoci: Nonlocal diffusion and applications, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana 20, Springer International Publishing (ISBN 978-3-319-28738-6), Bologna, 2016.

[10] X. Cabré e J. Solà-Morales, *Layer solutions in a half-space for boundary reactions*, Comm. Pure Appl. Math. **58 (12)** (2005), 1678-1732.

[11] X. Cabré e Y. Sire: *Nonlinear equations for fractional Laplacians I: regularity, maximum principles, and Hamiltonian estimates*, Ann. Inst. Henri Poincaré Nonlinear Anal. **31** (2014), 23-53.

[12] L. Caffarelli e L. Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations **32** (7-9) (2007), 1245-1260.

[13] L.A. Caffarelli: *Nonlocal equations, drifts and games*, Non. Partial Diff. Eq. Abel Symposia **7** (2012), 37-52

[14] P. Cao, J. Wang e W. Zou: *On the standing waves for nonlinear Hartree equation with confining potential*, J. Math. Phys. **53** (2012), 003702-27.

[15] Y-H. Chen e C-G. Liu: *Ground state solutions for non-autonomous fractional Choquard equations*, Nonlinearity **29** (2016), no. 6, 1827-1842.

[16] S. Cingolani e S. Secchi: *Ground State for the pseudo-relativistic Hartree equation with external potential*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **145** (2015), no. 1, 73-90.

[17] S. Cingolani e S. Secchi : *Semiclassical analysis for pseudo-relativistic Hartree equations*, J. Differential Equations **258** (2015), no. 12, 4156-4179.

[18] V. Coti Zelati e M. Nolasco, *Existence of ground states for nonlinear, pseudo-relativistic Schrödinger equations*, Rend. Lincei Mat. Appl. **22** (2011), 51-72.

[19] V. Coti Zelati e M. Nolasco, *Ground states for pseudo-relativistic Hartree equations of critical type*, Rev. Mat. Iberoam. **22** (2013), 1421-1436.

[20] P. d'Avenia, G. Siciliano e M. Squassina: *On fractional Choquard equations*, Math. Models Methods Appl. Sci. **25** (2015), no. 8, 1447-1476.

[21] F. Demengel e G. Demengel: Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations, Springer, London, 2012.

[22] E. Di Nezza, G. Palatucci e E. Valdinoci: *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. **136** (2012), no. 5, 521-573.

[23] P Drábek e J. Milota: Methods of Nonlinear Analysis - Applications to Differential Equations, Birkhäuser, Basel, 2007.

[24] G. Franzina e G. Palatucci: *Fractional p-eigenvalues*, Riv. Mat. Univ. Parma **5** (2014), 315-328.

[25] P. Felmer, A. Quaas e J. Tan: *Positive solutions of the nonlinear Schrödinger equation with the fractional Laplacian*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **142** (2012), no. 6, 1237-1262.

[26] M. Ghimenti, V. Moroz e J. Van Schaftingen: *Least action nodal solutions for the quadratic Choquard equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), 737-747.

[27] A. Iannizzotto e M. Squassina: *Weyl-type laws for fractional p-eigenvalue problems*, Asymptotic Analysis **88** (2014), 233-245.

[28] A. Iannizzotto, S. Liu, K. Perera e M. Squassina: *Existence results for fractional p-Laplacian problems via Morse theory*, Adv. Calc. Var. **9** (2016), 101-125.

[29] A. Iannizzotto, S. Mosconi e M. Squassina: *Global Hölder regularity for the fractional p-Laplacian*, Rev. Mat. Iberoam. **32** (2016), no. 4, 1353-1392.

[30] O. Kavian: Introduction à la Théorie des Points Critiques, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[31] T. Kuusi, G. Mingione e Y. Sire: *Nonlocal equations with measure data*, Comm. Math. Phys. **337** (2015), 1317-1368.

[32] R. Lehrer, L. A. Maia e M. Squassina: *On fractional p-Laplacian problems with weight*, Differential Integral Equations **28** (2015), no. 1-2, 15-28.

[33] Gong Bao Li e Shu Sen Yan: *Eigenvalue problems for quasilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations **14** (1989), no. 8-9, 1291–1314.

[34] E.H. Lieb, Michael Loss: Analysis, American Mathematical Soc., 2001

[35] E.H. Lieb: *Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation*, Studies in Appl. Math. **57** (1976/77), no. 2, 93-105.

[36] E.H. Lieb, *Sharp constants in the Hardy–Littlewood–Sobolev and related inequalities*, Annals Math. **118** (1983), 349-374.

[37] E. Lindgren e P. Lindqvist: *Fractional eigenvalues,* Calc. Var. PDE **49** (2014), 795-826.

[38] P.L. Lions: *The Choquard equation and related questions*, Nonlin. Analysis **4** (1980), 1063-1072.

[39] P.L. Lions: *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), no. 1, 145-201.

[40] P.L. Lions: *Compactness and topological methods for some nonlinear variational problems of mathematical physics*, Nonlinear problems: present and future 17-34(1982).

[41] L. Ma e L. Zhao: *Classification of positive solitary solutions of the nonlinear Choquard equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **195** (2010), 455-467.

[42] G.P. Menzala: *On regular solutions of a nonlinear equation of Choquard's type*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **86** (1980), 291-301.

[43] V. Moroz e J. Van Schaftingen: *Ground states of nonlinear Choquard equations: existence, qualitative properties and decay asymptotics*, J. Funct. Anal. **265** (2013), 153-184.

[44] V. Moroz e J. Van Schaftingen: *Existence of groundstates for a class of nonlinear Choquard equations*, Trans. Am. Math. Soc. **367** (2015), 6557-6579.

[45] V. Moroz e J. Van Schaftingen: *A guide to the Choquard equation*, J. Fixed Point Theory Appl. (2016). doi:10.1007/s11784-016-0373-1.

[46] S. Mosconi, K. Perera, M. Squassina e Y. Yang: *The Brezis-Nirenberg problem for the fractional p-Laplacian*, Calc. Var. PDE **55**(2016), 105 25pp.

[47] P.H. Rabinowitz: *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), no. 2, 270-291.

[48] X. Ros-Oton e J. Serra: *The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary*, J. Math. Pures Appl. **101** (2014), 275-302.

[49] X. Ros-Oton e J. Serra: *The Pohozaev identity for the fractional Laplacian*, Arch. Rat. Mech. Anal. **213** (2014), 587-628.

[50] Z-F. Shen, F-S. Gao e M-B. Yang: *Ground states for nonlinear fractional Choquard equations with general nonlinearities,* Math. Methods Appl. Sci. **39** (2016), no. 14, 4082-4098.

[51] R. Servadei e E. Valdinoci: *Mountain pass solutions for non-local elliptic operators*, J. Math. Anal. Appl. **389** (2012), 887-898.

[52] R. Servadei e E. Valdinoci: *The Brezis-Nirenberg result for the fractional Laplacian*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), 67-102.

[53] M. A. Souto e R. N. de Lima: *Choquard equations with mixed potential*. arxiv:1506.08179.

[54] J. Van Schaftingen e J. Xia: *Choquard equations under confining external potentials*, Nonlinear Diff. Equa. Appl. (2016) doi: 10.1007/s00030-016-0424-8.

[55] L. Tartar, An introduction to Sobolev spaces. Springer, 2007.

[56] M. Willem: Minimax Theorems. Birkhäuser Boston, Basel, Berlin, 1996.