UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Corpos de definição de grupos hiperbólicos complexos em dimensão 3

Victor Mielly Oliveira Batista

Belo Horizonte - MG
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Victor Mielly Oliveira Batista

Orientador: Nikolai Alexandrovitch Goussevskii

Corpos de definição de grupos hiperbólicos complexos em dimensão 3

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEX) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção de título de Doutor em Matemática.

Belo Horizonte - MG
2018

Dedico este trabalho à minha amada esposa, Leila Batista,
sua presença me impulsionou.
E ao nosso filho, Davi Batista,
minha maior conquista.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

Ao meu orientador, Nikolai Alexandrovitch Goussevskii, pelo incentivo, paciência e por todo suporte que foi dado a este trabalho.

À minha esposa, Leila Santos Freitas Batista e ao nosso filho Davi Freitas Batista, que sempre estiveram me apoiando em todos os momentos, muito obrigado! A presença de vocês sempre me motivou ao êxito.

Aos meus pais, Messias Batista dos Santos e Valdelice Santos Oliveira Batista, e irmão Myller Oliveira Batista, pela compreensão, apoio e por entenderem que os momentos distantes foram necessários para chegar a este objetivo.

Aos meus amigos que contribuíram direta ou indiretamente neste trabalho e em minha formação acadêmica.

Agradeço à Universidade Federal de Minas Gerais pela oportunidade de fazer o curso e ao CNPq pela bolsa concedida.

Resumo

Seja Γ um subgrupo de $\mathrm{SU}(n,1)$. Seja F um subcorpo de $\mathbb{C}$, o corpo de números complexos. O corpo F é chamado corpo de definição para Γ se Γ é conjugado em $\mathrm{SU}(n,1)$ a um subgrupo em $\mathrm{SU}(n,1,F)$.

O resultado principal deste trabalho é o seguinte teorema.

Teorema. Seja Γ um subgrupo totalmente irredutível de $\mathrm{SU}(3,1)$. Então, Γ contém um elemento A loxodrômico com todos os autovalores distintos, tal que o grupo Γ é conjugado em $\mathrm{SU}(3,1)$ a um subgrupo de $\mathrm{SU}(3,1,\mathbb{Q}(\Gamma,E(A)))$, onde $\mathbb{Q}(\Gamma,E(A))$ é o corpo gerado pelo corpo de traços $\mathbb{Q}(\Gamma)$ de Γ e o conjunto de todos os autovalores de A.

Como corolários deste teorema, temos os seguintes resultados:

Teorema. Seja Γ um subgrupo totalmente irredutível de $\mathrm{SU}(3,1)$. Então, o corpo de autovalores $\mathbb{Q}(\Gamma,E)$ de Γ, isto é, o corpo gerado pelos autovalores de todos os elementos de Γ sobre os números racionais $\mathbb{Q}$, é um corpo de definição de Γ.

Teorema. Seja Γ um reticulado em $\mathrm{SU}(3,1)$. Então, $\mathbb{Q}(\Gamma,E)$ é um corpo de definição de Γ.

Palavras-chave: Geometria Hiperbólica Complexa. Corpo de traços. Grupos totalmente irredutíveis.

Abstract

Let Γ be a subgroup of $\mathrm{SU}(n,1)$. Let F be a subfield of $\mathbb{C}$, the field of complex numbers. The field F is called a spliting field for Γ if Γ is conjugate in $\mathrm{SU}(n,1)$ to a subgroup in $\mathrm{SU}(n,1,F)$.

The main result of this work is the following theorem.

Theorem. Let Γ be a totally irreducible subgroup of $\mathrm{SU}(3,1)$. Then there exists a loxodromic element $A \in \Gamma$ with all its eigenvalues distinct such that Γ is conjugate in $\mathrm{SU}(3,1)$ to a subgroup of $\mathrm{SU}(3,1,\mathbb{Q}(\Gamma, E(A)))$, where $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ is the field generated by the trace field $\mathbb{Q}(\Gamma)$ of Γ and the set of all eigenvalues of A.

This theorem implies the following:

Theorem. Let Γ be a totally irreducible subgroup of $\mathrm{SU}(3,1)$. Then the eigenvalue field $\mathbb{Q}(\Gamma, E)$ of Γ, the field generated over $\mathbb{Q}$ by the eigenvalues of all the elements of Γ, is a splitting field of Γ.

Theorem. Let Γ be a lattes in $\mathrm{SU}(3,1)$. Then $\mathbb{Q}(\Gamma, E)$ is a splitting field of Γ.

Keywords: Complex hyperbolic geometry; Trace field; totally irreducible groups.

Sumário

Introdução

Alguns dos principais invariantes associados a um grupo Kleiniano, ou seja, subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, são os corpos de traços e a álgebra de quatérnios, [9]. O motivo pelo qual este tema faz-se importante é que sob certas hipóteses o corpo de traços de um subgrupo Γ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ estendido pelos autovalores de alguns elementos de Γ pode classificar sua classe de conjugação em $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. No caso da geometria hiperbólica complexa, ou seja, no caso de subgrupos de $\mathrm{SU}(n,1)$ pouco se sabe sobre esse objeto. Um problema importante aqui é saber quando um subgrupo de $\mathrm{SU}(n,1)$ pode ser realizado sobre o corpo gerado pelos autovalores de seus elementos. Em [4] foi provado que qualquer subgrupo $\mathbb{C}$-irredutível Γ de $\mathrm{SU}(2,1)$ contendo um elemento loxodrômico A pode ser realizado sobre o corpo gerado pelo corpo de traços de Γ e os autovalores de A. Mais especificamente, foi provado o seguinte

Teorema. Seja Γ um subgrupo $\mathbb{C}$-irredutível de $\mathrm{SU}(2,1)$ e $A \in \Gamma$ loxodrômico com autovalores $\lambda_1 = \lambda e^{i\varphi}$, $\lambda_2 = e^{-2i\varphi}$, $\lambda_3 = \lambda^{-1}e^{i\varphi}$. Então, Γ é conjugado em $\mathrm{SU}(2,1)$ a um subgrupo de $\mathrm{SU}(2,1,\mathbb{Q}(\Gamma,\lambda))$, onde $\mathbb{Q}(\Gamma,\lambda)$ é o corpo gerado pelo corpo de traços $\mathbb{Q}(\Gamma)$ de Γ e λ.

Contudo, nosso objetivo principal é estender este resultado para o grupo $\mathrm{SU}(3,1)$.

Neste trabalho foram mostrados os seguintes resultados:

Teorema 1. Seja Γ um subgrupo totalmente irredutível de $\mathrm{SU}(3,1)$. Então, Γ contém um elemento A loxodrômico com todos os autovalores distintos, tal que o grupo Γ é conjugado em $\mathrm{SU}(3,1)$ a um subgrupo de $\mathrm{SU}(3,1,\mathbb{Q}(\Gamma,E(A)))$, onde $\mathbb{Q}(\Gamma,E(A))$ é o corpo gerado pelo corpo de traços $\mathbb{Q}(\Gamma)$ de Γ e o conjunto de todos os autovalores de A.

Teorema 2. Seja Γ um subgrupo totalmente irredutível de $\mathrm{SU}(3,1)$. Então, o corpo de autovalores $\mathbb{Q}(\Gamma,E)$ de Γ, isto é, o corpo gerado pelos autovalores de todos os elementos de Γ sobre os números racionais $\mathbb{Q}$, é um corpo de definição de Γ.

Teorema 3. Seja Γ um reticulado em $\mathrm{SU}(3,1)$. Então, $\mathbb{Q}(\Gamma,E)$ é um corpo de definição de Γ.

A prova do Teorema 1 é baseada em resultados fundamentais sobre grupos de Lie semi-simples e subgrupos de Lie de grupos de isometrias de espaços simétricos de curvatura negativa. Um momento importante na prova deste resultado é o uso do teorema de densidade de Tits [12].

Também neste trabalho foram usados os teoremas de densidade de Burnside [2] e Borel [1].

A tese está organizada em dois capítulos. No primeiro capítulo apresentamos conceitos básicos de geometria hiperbólica complexa. No segundo capítulo provamos os resultados principais da tese.

Capítulo 1

Geometria Hiperbólica Complexa

1.1 Espaço hiperbólico complexo

Seja $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, de dimensão $n+1$, munido com uma forma hermitiana $\langle\ ,\ \rangle$ de assinatura $(n,1)$. Uma forma hermitiana é uma aplicação $\langle\ ,\ \rangle : V_{\mathbb{C}}^{n,1} \times V_{\mathbb{C}}^{n,1} \to \mathbb{C}$ sesquilinear, ou seja, dados z, v e w vetores em $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle z+v, w\rangle &= \langle z, w\rangle + \langle v, w\rangle \\ \langle \lambda z, w\rangle &= \lambda\langle z, w\rangle \\ \langle z, w\rangle &= \overline{\langle w, z\rangle}. \end{aligned}$$

Definição 1.1. *Uma base $e = \{e_1, ..., e_{n+1}\}$ de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ é dita ortonormal se, e somente se, a matriz de Gram $G(e) = (\langle e_i, e_j\rangle)$ é dada por*

$$G(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Então, se $v = (v_1, ..., v_{n+1})^T$ e $w = (w_1, ..., w_{n+1})^T$ são dados em coordenadas nessa base, temos que

$$\langle v, w\rangle = v_1\overline{w}_1 + v_2\overline{w}_2 + ... + v_n\overline{w}_n - v_{n+1}\overline{w}_{n+1}$$

Definição 1.2. *Seja $v \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}$, então*

- *v é dito positivo se* $\langle v, v \rangle > 0$.
- *v é dito negativo se* $\langle v, v \rangle < 0$.
- *v é dito isotrópico se* $\langle v, v \rangle = 0$.

Definição 1.3. *Denotemos os conjuntos dos vetores positivos, negativos e isotrópicos respectivamente por:*

$$\begin{aligned} V_+ &= \{v \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}; \langle v, v \rangle > 0\} \\ V_- &= \{v \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}; \langle v, v \rangle < 0\} \\ V_0 &= \{v \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}; \langle v, v \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

Proposição 1.4. *[11] Seja W um subespaço de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$. Então:*

(i) Se W é um subespaço positivo, ou seja, todo vetor não nulo em W é positivo, então $dim_{\mathbb{C}} W \leq n$.

(ii) Se W é um subespaço negativo, ou seja, todo vetor não nulo em W é negativo, então $dim_{\mathbb{C}} W = 1$.

(iii) Se W é um subespaço isotrópico, ou seja, todo vetor não nulo em W é isotrópico, então $dim_{\mathbb{C}} W = 1$.

Corolário 1.5. *Sejam $v, w \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ linearmente independentes, então*

(i) Se v e w são isotrópicos, então $\langle v, w \rangle \neq 0$.

(ii) Se v e w são negativos, então $\langle v, w \rangle \neq 0$.

Definição 1.6. *Seja $V_{\mathbb{C}}^{k+1}$ um subespaço de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$.*

(i) $V_{\mathbb{C}}^{k+1}$ é hiperbólico (ou indefinido) se, e somente se, $\langle\ ,\ \rangle |_{V_{\mathbb{C}}^{k+1}}$ tem assinatura $(k, 1)$.

(ii) $V_{\mathbb{C}}^{k+1}$ é elíptico (ou positivo) se, e somente se, $\langle\ ,\ \rangle |_{V_{\mathbb{C}}^{k+1}} > 0$.

(iii) $V_{\mathbb{C}}^{k+1}$ é parabólico se, e somente se, existe um vetor não nulo $v \in V_{\mathbb{C}}^{k+1}$ tal que para qualquer $w \in V_{\mathbb{C}}^{k+1}$, $\langle v, w \rangle = 0$.

1.2 Modelos do espaço hiperbólico complexo

Seja $V = V_{\mathbb{C}}^{n,1}$. Em V definimos uma relação, dada por

$$x, y \in V,\ x \sim y \iff \exists\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ tal que } x = \lambda y.$$

Seja $\mathbb{P}(V) = V/\sim$ a projetivização complexa de V. Denotamos por $\mathbb{P} : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ a projeção canônica que associa a cada $v \in V \setminus \{0\}$ a sua classe de equivalência $[v]$ em $\mathbb{P}(V)$.

Fixemos uma base para V. O espaço projetivo $\mathbb{P}(V)$ pode ser coberto por abertos $U_i = \{[(v_1, ..., v_{n+1})];\ v_i \neq 0\},\ i = 1, ..., n+1$. Se $p = [(v_1, ..., v_{n+1})],\ v_1, ..., v_{n+1}$ são chamadas coordenadas homogêneas de p.

Para cada U_i definimos o homeomorfismo $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ dado por

$$\varphi_i([v]) = \left(\frac{v_1}{v_i}, ..., \frac{v_{i-1}}{v_i}, \frac{v_{i+1}}{v_i}, ..., \frac{v_{n+1}}{v_i}\right).$$

Os números $w_j = \dfrac{v_j}{v_i}, j \neq i, j = 1, ..., n+1$, são chamados coordenadas não-homogêneas definidas por U_i.

1.2.1 Modelo projetivo e modelo da bola

O **modelo projetivo** do espaço hiperbólico complexo de dimensão n, denotado por $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, é a coleção de linhas negativas em V, ou seja, $\mathbb{P}(V_-) = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Sua fronteira é definida como a coleção de linhas isotrópicas em V, ou seja, $\mathbb{P}(V_0) = \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.

Considerando a base ortonormal $e = \{e_1, ..., e_{n+1}\}$ de V, tomemos o aberto U_{n+1} cujos elementos possuem a $(n+1)$-ésima coordenada homogênea diferente de zero. É claro que $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \subset U_{n+1}$.

Agora, dado $v = (v_1, ..., v_{n+1})^T \in V_-$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle v, v\rangle &= v_1\overline{v}_1 + ... + v_n\overline{v}_n - v_{n+1}\overline{v}_{n+1} < 0 \\
&\iff \frac{v_1\overline{v}_1}{v_{n+1}\overline{v}_{n+1}} + ... + \frac{v_n\overline{v}_n}{v_{n+1}\overline{v}_{n+1}} < 1 \\
&\iff |w_1|^2 + ... + |w_n|^2 < 1, \text{ onde } w_i = \frac{v_i}{v_{n+1}},\ i = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Portanto, o espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \mathbb{P}(V_-)$ é homeomorfo a bola unitária $B^n = \{w \in \mathbb{C}^n;\ |w| < 1\}$ e sua fronteira $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ é homeomorfa à esfera S^{2n-1}. Este é o **modelo da bola** do espaço hiperbólico complexo.

1.2.2 Modelo do domínio de Siegel

Proposição 1.7. *Existe uma base $f = \{f_1, ..., f_{n+1}\}$ de V tal que a matriz de Gram dessa base é*

$$G(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Sejam v e w vetores isotrópicos linearmente independentes. Já sabemos pelo Corolário 1.5 que $\langle v, w\rangle \neq 0$. Tomemos $f_1 = \dfrac{v}{\langle v, w\rangle}$ e $f_{n+1} = w$. Seja $W = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{f_1, f_{n+1}\}$ o subespaço gerado por f_1 e f_{n+1}. Assim, W é hiperbólico e $W^{\perp}$ é elíptico, onde $dim_{\mathbb{C}}\ W^{\perp} = n - 1$. Agora, aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para $W^{\perp}$, obtemos uma base ortonormal $\{f_2, ..., f_n\}$ para $W^{\perp}$. Portanto, construimos uma base de V tal que

$$\langle f_i, f_i\rangle = \begin{cases} 1, & \text{se i} = 2, ..., \text{n} \\ 0, & \text{se i} = 1 \text{ ou i} = \text{n} + 1 \end{cases},\ \langle f_1, f_{n+1}\rangle = 1,\ \langle f_i, f_j\rangle = 0,\ i \neq j,\ i, j \neq 1, n+1.$$

Logo, obtemos a base f como queríamos. □

Considere os vetores $v = (v_1, ..., v_{n+1})^T$ e $w = (w_1, ..., w_{n+1})^T$ em V dados pelas suas coordenadas na base $f = \{f_1, ..., f_{n+1}\}$ construida anteriormente. Então, o produto hermitiano entre v e w tem a seguinte expressão

$$\langle v, w\rangle = v_1\overline{w}_{n+1} + v_2\overline{w}_2 + v_3\overline{w}_3 + ... + v_n\overline{w}_n + v_{n+1}\overline{w}_1$$

Novamente, considere a carta de $\mathbb{P}(V)$ definida em U_{n+1}. Daí, V_- está contido em U_{n+1} e dado $v = (v_1, ..., v_{n+1})^T \in V_-$, temos que

$$\begin{aligned} \langle v, v\rangle &= v_1\overline{v}_{n+1} + v_2\overline{v}_2 + ... + v_n\overline{v}_n + v_{n+1}\overline{v}_1 < 0 \\ &\Rightarrow \frac{v_1}{v_{n+1}} + \frac{v_2\overline{v}_2}{v_{n+1}\overline{v}_{n+1}} + ... + \frac{v_n\overline{v}_n}{v_{n+1}\overline{v}_{n+1}} + \frac{\overline{v}_1}{\overline{v}_{n+1}} < 0 \\ &\Rightarrow 2Re(w_1) + w_2\overline{w}_2 + ... + w_n\overline{w}_n < 0, \end{aligned}$$

onde $w_j = \dfrac{v_j}{v_{n+1}}$, $j = 1, ..., n$.

Assim, podemos identificar o espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ como

$$\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} = \{(w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n;\ 2Re(w_1) + \sum_{j=2}^{n} |w_j|^2 < 0\}.$$

Este é chamado o **modelo do domínio de Siegel** para o espaço hiperbólico complexo.

Neste modelo, qualquer ponto $p \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, admite um único levantamento para V, da seguinte forma, chamado levantamento padrão

$$v_p = \begin{bmatrix} (-|z|^2 - u + it)/2 \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \in V.$$

onde $(z, t, u) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Os elementos (z, t, u) são chamados de coordenadas horoesféricas de p. A fronteira de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ é o conjunto de nível $\{u = 0\}$, compactificada a um ponto, $q_\infty \in \partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, chamado ponto ideal, representado por

$$v_\infty = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então, a fronteira do espaço hiperbólico complexo em coordenadas horoesféricas é dada por

$$\partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} = \{(z, t) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}\} \cup \{q_\infty\}.$$

1.2.3 Isometrias

Distância em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$: Sejam p, $q \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ e v_p, v_q seus respectivos levantamentos, ou seja, $\mathbb{P}(v_p) = p$, $\mathbb{P}(v_q) = q$ e v_p, $v_q \in V_-$. A métrica de Bergman em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ é definida pela função distância d dada por

$$\cosh^2\left(\frac{d(p,q)}{2}\right) = \frac{\langle v_p, v_q\rangle\langle v_q, v_p\rangle}{\langle v_p, v_p\rangle\langle v_q, v_q\rangle}. \tag{1.1}$$

É claro que a parte direita desta fórmula independe dos levantamentos de p e q. Portanto, a função distância determina uma função em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

Seja

$$\mathrm{U}(V) = \{A \in GL(V) : \ \langle Az, Aw\rangle = \langle z, w\rangle, \forall\ z, w \in V\}.$$

Seja $\mathrm{U}(n, 1)$ a representação de $\mathrm{U}(V)$ dada por matrizes em uma base, por exemplo, na base $f = \{f_1, ..., f_{n+1}\}$ construida na Proposição 1.7.

Em $\mathrm{U}(n, 1)$ definimos a seguinte relação de equivalência:

$$A, B \in \mathrm{U}(n, 1),\ A \sim B \iff \exists\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1,\ \text{tal que } A = \lambda B.$$

Seja $\mathrm{PU}(n,1) = \mathrm{U}(n,1)/\sim$. Temos que qualquer elemento $g \in \mathrm{PU}(V) = \mathrm{PU}(n,1)$ é uma isometria em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ com a métrica de Bergman.

É fácil ver que o grupo $\mathrm{PU}(V)$ é o grupo de isometrias holomorfas de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, e o grupo completo de isometrias é gerado por $\mathrm{PU}(n,1)$ e uma isometria anti-holomorfa induzida pela conjugação em V.

Seja

$$\mathrm{SU}(n,1) = \{A \in U(n,1);\ det\ A = 1\}.$$

Temos que a projetivização do grupo $\mathrm{SU}(n,1)$ coincide com $\mathrm{PU}(n,1)$ e $\mathrm{SU}(n,1)$ é um recobrimento de $(n+1)$-folhas de $\mathrm{PU}(n,1)$:

$$\mathrm{PU}(n,1) = \mathrm{SU}(n,1)/\{I, wI, w^2 I, ..., w^{n-1} I, w^n I\}$$

onde w é uma raíz $(n+1)$-ésima da unidade.

Teorema 1.8 (Teorema de Witt, [11])**.** *Seja W um subespaço de $V^{n,1}_{\mathbb{C}}$ e $f : W \to V^{n,1}_{\mathbb{C}}$ uma isometria. Então, f pode ser estendida a uma isometria global $g : V^{n,1}_{\mathbb{C}} \to V^{n,1}_{\mathbb{C}}$.*

O próximo resultado é conhecido e pode ser encontrado em [3] e [5], no entanto vamos apresentar uma outra demonstração.

Proposição 1.9. *Consideremos o grupo* $\mathrm{PU}(n,1)$*:*

(i) $\mathrm{PU}(n,1)$ *age transitivamente em* $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

(ii) $\mathrm{PU}(n,1)$ *age duplamente transitivamente em pares de pontos* $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ *com a mesma distância.*

(iii) $\mathrm{PU}(n,1)$ *age duplamente transitivamente na fronteira* $\partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

Demonstração.

(i) Sejam $p, q \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ distintos, consideremos v_p e v_q os respectivos levantamentos. Tomemos $f : v_p \mapsto v_q$. Assim, f pode ser estendida a uma aplicação linear $\widehat{f} : \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_p\} \to \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_q\}$.

Vamos calcular a matriz de Gram de v_p e v_q. Após uma normalização temos que

$$G(v_p) = (-1) = G(v_q)$$

portanto, $\widehat{f}$ é uma isometria. Pelo teorema de Witt temos que $\widehat{f}$ pode ser estendida a uma isometria global $g : V^{n,1}_{\mathbb{C}} \to V^{n,1}_{\mathbb{C}}$, tal que $g\,|_{\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_p\}} = \widehat{f}$.

Projetivizando g temos uma isometria que leva p para q.

(ii) Sejam p_1, p_2, q_1 e q_2 pontos distintos de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, tais que $d(p_1,p_2)=d(q_1,q_2)$. Considere v_1, v_2, w_1 e w_2 os respectivos levantamentos de p_1, p_2, q_1 e q_2. Tomando representantes adequados, podemos supor

$$\langle v_2,v_2\rangle=\langle v_1,v_1\rangle=\langle w_1,w_1\rangle=\langle w_2,w_2\rangle=-1,\ \langle v_1,v_2\rangle\in\mathbb{R},\ \langle w_1,w_2\rangle\in\mathbb{R}.$$

Seja

$$f:\begin{cases} v_1 & \longmapsto & w_1 \\ v_2 & \longmapsto & w_2 \end{cases}$$

então, como $\{v_1,v_2\}$ e $\{w_1,w_2\}$ são conjuntos linearmente independentes, f pode ser estendida a uma aplicação linear $\widehat{f}:\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_1,v_2\}\to\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{w_1,w_2\}$

Desde que $d(p_1,p_2)=d(q_1,q_2)$, temos

$$\langle v_1,v_2\rangle^2=\langle w_1,w_2\rangle^2\Rightarrow\langle v_1,v_2\rangle=\langle w_1,w_2\rangle,$$

pois, se $\langle v_1,v_2\rangle=-\langle w_1,w_2\rangle$, podemos aplicar uma rotação em $\langle w_1,w_2\rangle$ de modo que temos a igualdade $\langle v_1,v_2\rangle=\langle w_1,w_2\rangle$.

Calculando a matriz de Gram de $\{v_1,v_2\}$ e $\{w_1,w_2\}$, temos que

$$G(v_1,v_2)=\begin{pmatrix}-1 & \langle v_1,v_2\rangle\\ \langle v_2,v_1\rangle & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \langle w_1,w_2\rangle\\ \langle w_2,w_1\rangle & -1\end{pmatrix}=G(w_1,w_2).$$

Assim, $\widehat{f}$ é uma isometria. Pelo teorema de Witt temos que $\widehat{f}$ pode ser estendida a uma isometria global $g:V^{n,1}_{\mathbb{C}}\to V^{n,1}_{\mathbb{C}}$, tal que $g\,|_{\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_1,v_2\}}=\widehat{f}$.

Projetivizando g temos uma isometria que leva (p_1,p_2) para (q_1,q_2).

(iii) É análoga ao caso anterior, basta notar que o produto hermitiano de vetores isotrópicos linearmente independentes é diferente de zero (Corolário 1.5) e portanto podemos tomar levantamentos v_1, v_2, w_1 e w_2 tais que $\langle v_1,v_2\rangle=1=\langle w_1,w_2\rangle$. □

1.2.4 Classificação das isometrias

Como toda isometria holomorfa de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ age em $\overline{\mathbb{H}}^n_{\mathbb{C}}=\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}\cup\partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, pelo teorema do ponto fixo de Brower, todo elemento de $\mathrm{PU}(n,1)$ possui pelo menos um ponto fixo em $\overline{\mathbb{H}}^n_{\mathbb{C}}$. Portanto, a classificação das isometrias em $\mathrm{PU}(n,1)$ é dada a partir da quantidade e localização dos pontos fixos.

Definição 1.10. *Seja f um elemento não trivial de* $\mathrm{PU}(n,1)$. *Dizemos que f é:*

- *Elíptico, se f tem pelo menos um ponto fixo em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.*

- *Parabólico, se f tem um único ponto fixo na fronteira de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.*

- *Loxodrômico, se f tem exatamente dois pontos fixos na fronteira de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.*

Seja $\pi : \mathrm{SU}(n,1) \to \mathrm{PU}(n,1)$ a projeção natural. Dizemos que um elemento $A \in \mathrm{SU}(n,1)$ é loxodrômico (elíptico, parabólico) se sua projetivização $\pi(A)$ é loxodrômico (elíptico, parabólico).

1.2.5 A fronteira do domínio de Siegel e o grupo de Heisenberg

Seja $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ dado no modelo de Siegel.

O conjunto $\partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \setminus \{q_\infty\}$ é uma cópia do grupo de Heisenberg de dimensão $2n-1$, com produto dado em coordenadas (z,t) por

$$(z,t)\cdot(w,s) = (z+w, t+s+2Im(\langle\langle z, \overline{w}\rangle\rangle)).$$

onde $z = (z_1, .., z_{n-1})$ e $w = (w_1, .., w_{n-1})$ estão em $\mathbb{C}^{n-1}$ e $\langle\langle , \rangle\rangle$ é o produto canônico hermitiano em $\mathbb{C}^{n-1}$.

O estabilizador em $\mathrm{SU}(n,1)$ da reta complexa gerada pelo vetor v_∞, que representa q_∞, consiste de matrizes triangulares superiores, e é gerado por três tipos de isometrias:

(i) translações de Heisenberg $T(z,t)$ $((z,t) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R})$

(ii) rotações de Heisenberg $R(\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

(iii) dilatações de Heisenberg D_r $(r > 0, r \neq 1)$

onde

$$T(z,t) = \begin{pmatrix} 1 & -\overline{z}_1 & -\overline{z}_2 & \cdots & -\overline{z}_{n-1} & (-||z||^2+it)/2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & z_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n+1} \end{pmatrix},$$

onde $\lambda_1 = e^{i\theta}, \lambda_{n+1} = e^{i\theta}, \lambda_2 = e^{i\theta_1}, \lambda_3 = e^{i\theta_2}, ..., \lambda_n = e^{i\theta_{n-1}}, \theta_1 + ... + \theta_{n-1} = -2\theta.$

$$D_r = \begin{pmatrix} r & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & Id_{n-1} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & \frac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que as aplicações $T(z,t)$ são parabólicas, $R(\theta)$ são elípticas e D_r são loxodrômicas.

Em coordenadas de Heisenberg, essas transformações correspondem às respectivas transformações no grupo de Heisenberg

- $T(z,t)$ dada por $(w,s) \longmapsto (z+w, t+s+2Im(\langle\langle z, \overline{w}\rangle\rangle))$.
- $R(\theta)$ dada por $(w,s) \longmapsto (Aw, s)$, onde $A \in \mathrm{U}(n-1)$.
- D_r dada por $(w,s) \longmapsto (rw, r^2 s)$.

É fácil ver que $R(\theta)$ e D_r deixam invariantes as retas complexas geradas por $v_0 = (0,...,0,1)^T$ e v_∞. Portanto, suas projetivizações fixam $\mathbf{0} = \pi(v_0)$ e q_∞.

Proposição 1.11. *Qualquer elemento loxodrômico $A \in \mathrm{SU}(n,1)$ é conjugado a um elemento da seguinte forma*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$$

onde $\lambda_1 = \lambda e^{i\theta}$, $\lambda_{n+1} = \lambda^{-1}e^{i\theta}$, $\lambda_2 = e^{i\theta_1}, \lambda_3 = e^{i\theta_2}, ..., \lambda_n = e^{i\theta_{n-1}}$, onde $\theta_1 + ... + \theta_{n-1} = -2\theta$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ e $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Demonstração. Seja $A \in \mathrm{SU}(n,1)$ um elemento loxodrômico e $\pi(A)$ sua projetivização. Então, $\pi(A)$ tem exatamente dois pontos fixos p e q na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Pela Proposição 1.9 $\pi(A)$ é conjugado em $\mathrm{PU}(n,1)$ a um elemento com pontos fixos $\mathbf{0}$ e q_∞. Isto implica que a menos dessa conjugação A é produto de $R(\theta)$ e D_r. E portanto, na base $f = \{f_1, ..., f_{n+1}\}$ (Proposição 1.7) é dado pela matriz desejada. □

Quando $\theta = \theta_1 = ... = \theta_{n-1} = 0$, o elemento é dito hiperbólico. Então, a dilatação de Heisenberg D_r determina um elemento hiperbólico.

1.3 Subespaços totalmente geodésicos de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$

O espaço hiperbólico complexo munido da métrica de Bergman é uma variedade com curvatura seccional variando entre -1 e $-\frac{1}{4}$ e de curvatura seccional holomorfa constante igual a -1. Assim, dados dois pontos distintos em $\overline{\mathbb{H}}^n_{\mathbb{C}}$ existe uma única geodésica que os liga.

Definição 1.12. *Uma subvariedade complexa de dimensão k em $\mathbb{P}(V)$ é a projetivização de um subespaço em V de dimensão $k+1$.*

Seja $V^{k+1}_{\mathbb{C}}$ um subespaço hiperbólico (indefinido) em $V^{n,1}_{\mathbb{C}}$. Então, $\mathbb{P}(V^{k+1}_{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \neq \emptyset$. Seja $W^k = \mathbb{P}(V^{k+1}_{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

A subvariedade W^k também é chamada $\mathbb{C}^k$-plano em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. A fronteira de um $\mathbb{C}^k$-plano, $\partial(W^k)$, é chamada $\mathbb{C}^k$-cadeia. W^1 é dito geodésica complexa em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. A fronteira de uma geodésica complexa é chamada simplesmente de cadeia.

Definição 1.13. *Um k-plano real em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ é a projetivização de um subespaço $V^{k+1}_{\mathbb{R}}$ totalmente real de dimensão $k+1$ real de $V^{n,1}_{\mathbb{C}}$. Um subespaço $V^{k+1}_{\mathbb{R}}$ é dito totalmente real se, e somente se, $\langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ para quaisquer $v, w \in V^{k+1}_{\mathbb{R}}$.*

Teorema 1.14. *[3] Seja W uma subvariedade de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Então, W é totalmente geodésica em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ se, e somente se, quando W é um $\mathbb{C}^k$-plano ou um k-plano real, $1 \leq k \leq n$.*

Capítulo 2

Corpos de definição de subgrupos em $\mathrm{SU}(n,1)$

2.1 Resultados principais

Definição 2.1. *Seja F um subcorpo de $\mathbb{C}$. Então,* $\mathrm{SU}(n,1,F)$ *denota o subgrupo de matrizes em* $\mathrm{SU}(n,1)$ *com entradas em F.*

Definição 2.2. *Seja Γ um subgrupo de* $\mathrm{SU}(n,1)$. *Seja F um subcorpo de $\mathbb{C}$, o corpo de números complexos. O corpo F é chamado corpo de definição para Γ se Γ é conjugado em* $\mathrm{SU}(n,1)$ *a um subgrupo em* $\mathrm{SU}(n,1,F)$.

Notamos que qualquer corpo de definição de Γ contém traços de todos os elementos de Γ.

Definição 2.3. *Seja Γ um subgrupo de* $\mathrm{SU}(n,1)$. *Dizemos que*

- *Γ é $\mathbb{C}$-irredutível se ele não deixa invariante nenhum subespaço próprio complexo de V.*
- *Γ é $\mathbb{R}$-irredutível se ele não deixa invariante nenhum subespaço totalmente real em V.*
- *Γ é totalmente irredutível se ele é $\mathbb{C}$-irredutível e $\mathbb{R}$-irredutível.*

É claro que a definição anterior equivale a Γ, por sua ação em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, não ter subvariedades totalmente geodésicas invariantes em $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

Definição 2.4. *Seja* Γ *um subgrupo de* $\mathrm{SU}(n,1)$. *O corpo de traços de* Γ *é o corpo gerado pelos traços de todos os elementos de* Γ *sob os racionais* $\mathbb{Q}$, *denotado por* $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$, *ou simplesmente por* $\mathbb{Q}(\Gamma)$.

Definição 2.5. *Seja* Γ *um subgrupo de* $\mathrm{SU}(n,1)$ *que contém um elemento loxodrômico* A. *Então,* $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ *denota o corpo gerado pelo corpo de traços* $\mathbb{Q}(\Gamma)$ *de* Γ *e o conjunto de todos os autovalores de* A.

O resultado principal deste trabalho é o seguinte:

Teorema 2.6. *Seja* Γ *um subgrupo totalmente irredutível de* $\mathrm{SU}(3,1)$. *Então,* Γ *contém um elemento* A *loxodrômico com todos os autovalores distintos, tal que o grupo* Γ *é conjugado em* $\mathrm{SU}(3,1)$ *a um subgrupo de* $\mathrm{SU}(3,1,\mathbb{Q}(\Gamma, E(A)))$, *onde* $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ *é o corpo gerado pelo corpo de traços* $\mathbb{Q}(\Gamma)$ *de* Γ *e o conjunto de todos os autovalores de* A.

Em outras palavras o corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ é um corpo de definição de Γ.

Para $n = 2$ este resultado foi provado em [4].

Por enquanto nós não conseguimos mostrar este resultado para qualquer n.

2.1.1 Sobre o grupo $\mathrm{SU}(n,1)$

Nesta seção apresentamos resultados básicos sobre o grupo $\mathrm{SU}(n,1)$.

Daqui para frente consideremos a base f construida na Proposição 1.7 e vamos supor que $\mathrm{SU}(n,1)$ é apresentado por matrizes nesta base. Também vamos usar o modelo de Siegel para o espaço hiperbólico complexo.

Proposição 2.7. *Seja* $B = (b_{ij}) \in \mathrm{SU}(n,1)$. *Então,* B^{-1} *é dada por*

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{(n+1)(n+1)} & \bar{b}_{2(n+1)} & \bar{b}_{3(n+1)} & \dots & \bar{b}_{n(n+1)} & \bar{b}_{1(n+1)} \\ \bar{b}_{(n+1)2} & \bar{b}_{22} & \bar{b}_{32} & \dots & \bar{b}_{2n} & \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{(n+1)3} & \bar{b}_{23} & \bar{b}_{33} & \dots & \bar{b}_{3n} & \bar{b}_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{b}_{(n+1)1} & \bar{b}_{21} & \bar{b}_{31} & \dots & \bar{b}_{n1} & \bar{b}_{11} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. A prova segue imediatamente da fórmula $\overline{B}^T G(f) B = G(f)$, onde $G(f)$ é a matriz de Gram de f. $\square$

Corolário 2.8. *Seja* $B \in \mathrm{SU}(n,1)$. *Então,* $tr(B^{-1}) = \overline{tr(B)}$.

Proposição 2.9. *Seja* $B = (b_{ij})$ *um elemento de* $\mathrm{SU}(n,1)$, v_i *a i-ésima linha de* B *e* w_i *a i-ésima coluna de* B*, ou seja,*

$$v_i = (b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{i(n+1)}) \text{ e } w_i = (b_{1i}, b_{2i}, ..., b_{(n+1)i}).$$

Então,

- $\langle v_i, v_i \rangle = \langle w_i, w_i \rangle = 1, \mathrm{se\ i = 2, ..., n}$
- $\langle v_i, v_i \rangle = \langle w_i, w_i \rangle = 0, \mathrm{se\ i = 1\ ou\ i = n+1}$
- $\langle v_1, v_{n+1} \rangle = \langle w_1, w_{n+1} \rangle = 1$
- $\langle v_i, v_j \rangle = \langle w_i, w_j \rangle = 0,\ i \neq j\ i, j \neq 1, n+1.$

Demonstração. A prova segue da definição de $\mathrm{SU}(n,1)$. □

Observação. Se $b_{ij} = x_{ij} + iy_{ij}$, com $x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{R}$, então, estas igualdades representam equações polinomiais em x_{ij} e y_{ij}.

Considerando somente multiplicações por escalares reais, podemos identificar o espaço vetorial complexo $V_{\mathbb{C}}^{n+1}$ com o espaço vetorial real $V_{\mathbb{R}}^{2n+2}$.

Observação. Seja $A = (a_{ij})$ um elemento de $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$. Escrevemos $a_{ij} = x_{ij} + iy_{ij}$, com $x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{R}$ e associamos com a_{ij} a matriz

$$\widehat{a}_{ij} = \begin{pmatrix} x_{ij} & y_{ij} \\ -y_{ij} & x_{ij} \end{pmatrix}.$$

Agora, trocando cada entrada a_{ij} da matriz A por $\widehat{a}_{ij}$, temos a aplicação

$$\varphi : \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(2n+2, \mathbb{R}).$$

É fácil ver que esta aplicação é um monomorfismo de grupos. Isto implica que podemos considerar o grupo $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$ como subgrupo de $\mathrm{GL}(2n+2, \mathbb{R})$.

Corolário 2.10. $\mathrm{SU}(n,1)$ *é um grupo de Lie real.* $\mathrm{SU}(n,1)$ *é um grupo algébrico real.*

Este resultado é uma consequência da Proposição 2.9 e dois fatos fundamentais sobre subgrupos de Lie e subgrupos algébricos de grupos algébricos seguintes:

- Seja G um grupo de Lie real e H um subgrupo de G. Então, H é subgrupo de Lie de G se, e somente se, H é fechado em G.

- Seja G um grupo algébrico real e H um subgrupo de G. Então, H é um subgrupo algébrico de G se, e somente se, H é fechado na topologia de Zariski de G.

Um resultado clássico de grupos de Lie, veja [3], implica o seguinte teorema:

Teorema 2.11. $\mathrm{SU}(n,1)$ *é um grupo de Lie real simples.*

O próximo resultado é de extrema importância para nosso trabalho.

Teorema 2.12. *Seja* Γ *um subgrupo de* $\mathrm{SU}(n,1)$*. Então,* Γ *é totalmente irredutível se, e somente se,* Γ *é Zariski denso em* $\mathrm{SU}(n,1)$*.*

Este resultado é uma consequência do seguinte teorema fundamental:

Teorema 2.13 (Karpelevich [7], Mostow [10])**.** *Seja* M *um espaço Riemanniano simétrico de curvatura negativa* $k \leq -1$*. Então, qualquer subgrupo conexo semi-simples* $G \subset Isom(M)$ *tem uma órbita* $G(p) \subset M$ *totalmente geodésica.*

Uma prova geométrica deste resultado pode ser encontrada em [6].

Assim, seja Γ um subgrupo de $\mathrm{SU}(n,1)$. Vamos supor que Γ não seja Zariski denso. Se Γ é conexo na topologia de Lie, passamos ao fecho de Zariski $\overline{\Gamma}$ (grupo algébrico) que é fechado na topologia de Zariski e portanto fechado na topologia de Lie, assim $\overline{\Gamma}$ é um subgrupo de Lie conexo semi-simples. Então, pelo Teorema anterior, temos uma órbita $\overline{\Gamma}(p)$ totalmente geodésica e portanto, Γ não seria totalmente irredutível. Se Γ é discreto na topologia de Lie, passamos ao fecho de Zariski $\overline{\Gamma}$, que é um grupo algébrico (fechado na topologia de Zariski), então $\overline{\Gamma}$ tem um número finito de componentes conexas e portanto, se $\overline{\Gamma}$ é discreto, temos que $\overline{\Gamma}$ é finito, onde cada ponto representa uma componente conexa. Então, por um fato geral em [3], existe um subespaço de dimensão 1 invariante.

O seguinte exemplo mostra a diferença entre subgrupos de $\mathrm{SU}(n,1)$ totalmente irredutíveis e $\mathbb{C}$-irredutíveis.

Exemplo 2.14. *Apresentamos os elementos de* $\mathrm{SU}(n,1)$ *como matrizes em uma base, por exemplo, na base ortonormal. É fácil ver que o grupo* $\mathrm{SO}(n,1)$ *pode ser identificado com subconjunto de* $\mathrm{SU}(n,1)$ *formado por todas as matrizes com entradas reais. Considerando esta identificação, temos que o grupo* $\mathrm{SO}(n,1)$ *deixa invariante o espaço hiperbólico real* $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ *considerado como uma subvariedade totalmente geodésica em* $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$*. Seja* Γ *um subgrupo de* $\mathrm{SO}(n,1)$ *Zariski-denso em* $\mathrm{SO}(n,1)$*. É fácil ver que* Γ *é* $\mathbb{C}$*-irredutível. Mas,* Γ *deixa invariante* $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ *e, portanto, não é totalmente irredutível.*

De fato, temos que o fecho de Zariski de Γ *em* $\mathrm{SU}(n,1)$ *é igual a* $\mathrm{SO}(n,1)$.

Também vamos precisar do teorema de densidade de Burnside [2], [8].

Teorema 2.15 (Teorema de Burnside). *Seja* G *um subgrupo de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. *Então,* G *não tem subespaços invariantes em* $\mathbb{C}^n$ *não triviais se, e somente se,* G *contém* n^2 *matrizes linearmente independentes, ou seja, se e somente se, os elementos de* G *geram* $M(n,\mathbb{C})$, *onde* $M(n,\mathbb{C})$ *é o espaço de matrizes de tamanho* $n \times n$ *com entradas complexas.*

Como consequência, temos o seguinte teorema

Teorema 2.16. *Seja* Γ *um subgrupo de* $\mathrm{SU}(n,1)$ $\mathbb{C}$*-irredutível. Então,* Γ *contém uma base de* $M(n,\mathbb{C})$.

Definição 2.17. *Um elemento* $g \in \mathrm{SU}(n,1)$ *se chama semi-simples se ele é diagonalizável em uma base.*

Por exemplo, os elementos loxodrômicos em $\mathrm{SU}(n,1)$ são semi-simples (ver Proposição 1.11) e os elementos parabólicos de $\mathrm{SU}(n,1)$ não são semi-simples.

Definição 2.18. *Um elemento* $g \in \mathrm{SU}(n,1)$ *se chama semi-simples regular, se ele é semi-simples e tem número máximo possível de autovalores distintos.*

Por exemplo, os elementos loxodrômicos em $\mathrm{SU}(n,1)$ com todos os autovalores distintos são semi-simples regulares. Vamos chamar estes elementos de elementos loxodrômicos regulares.

É claro que os elementos hiperbólicos em $\mathrm{SU}(n,1)$, com $n > 2$ não são regulares.

Precisaremos ainda do notável teorema de Tits [12].

Teorema 2.19. *Seja* G *um grupo não trivial algébrico semi-simples sobre um corpo* k *de característica* 0. *Seja* Γ *um subgrupo de* G *Zariski-denso em* G. *Então,* Γ *contém um conjunto enumerável de elementos* F *tal que qualquer par de elementos de* F *gera um subgrupo livre Zariski-denso em* G.

Observação 1. Este teorema é o Teorema 3 em [12].

Observação 2. No caso em que $G = \mathrm{SU}(n,1)$, os elementos do conjunto F construídos na prova deste teorema são elementos semi-simples regulares, veja p. 267 em [12].

Como um corolário deste último teorema temos o seguinte resultado:

Teorema 2.20. *Seja* Γ *um subgrupo de* $\mathrm{SU}(n,1)$ *totalmente irredutível. Então,* Γ *contém um subgrupo* $\Gamma_0 = \langle A, B \rangle$ *tal que* A *e* B *são loxodrômicos regulares e* Γ_0 *é Zariski-denso em* $\mathrm{SU}(n,1)$.

Este resultado é crucial na prova do resultado principal deste trabalho.

2.2 Prova do teorema principal

Nesta seção $n = 3$.

Lema 2.21. *Seja* Γ *um subgrupo de* $\mathrm{SU}(3,1)$ *contendo um elemento loxodrômico* $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$*, onde* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *para quaisquer* i, j*. Então, para todo elemento* $B = (b_{ij}) \in \Gamma$*, os elementos diagonais de* B *estão em* $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$.

Demonstração. Sejam $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ e $B = (b_{ij})$. Então,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(B) &= b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44} = t_1 \\
\mathrm{tr}(AB) &= \lambda_1 b_{11} + \lambda_2 b_{22} + \lambda_3 b_{33} + \lambda_4 b_{44} = t_2 \\
\mathrm{tr}(A^2 B) &= \lambda_1^2 b_{11} + \lambda_2^2 b_{22} + \lambda_3^2 b_{33} + \lambda_4^2 b_{44} = t_3 \\
\mathrm{tr}(A^3 B) &= \lambda_1^3 b_{11} + \lambda_2^3 b_{22} + \lambda_3^3 b_{33} + \lambda_4^3 b_{44} = t_4
\end{aligned}
$$

Primeiro notamos que $t_i \in \mathbb{Q}(\Gamma)$ e consideremos essas igualdades como um sistema de equações lineares em variáveis b_{ii}. Para mostrar que este sistema possui uma solução, basta provar que a matriz L deste sistema é não-singular. Seja

$$
L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{bmatrix}.
$$

a matriz deste sistema.

Esta é uma matriz de Vandermonde e como os autovalores λ_i são todos distintos, temos que $det\ L \neq 0$. Resolvendo este sistema pela regra de Cramer, concluímos que $b_{ii} \in \mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. □

Como um corolário deste lema temos a seguinte proposição

Proposição 2.22. *O corpo* $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ *é invariante por conjugação.*

Demonstração. Considere $B = A^{-1}$ no lema anterior. Então, temos que os elementos diagonais de A^{-1}, $\overline{\lambda}_1, ..., \overline{\lambda}_4 \in \mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$.

Agora, o resultado segue do Corolário 2.8. □

Lema 2.23. *Seja Γ um subgrupo de $\mathrm{SU}(3,1)$ contendo um elemento loxodrômico $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, onde todos os λ_i são todos distintos. Então, para todo elemento $B = (b_{ij}) \in \Gamma$, os produtos $b_{12}b_{21}$, $b_{13}b_{31}$, $b_{14}b_{41}$, $b_{23}b_{32}$, $b_{24}b_{42}$, $b_{34}b_{43}$ estão em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$.*

Demonstração. Seja $C = BAB$. Vamos calcular a diagonal c_{ii} de C. Daí, um cálculo mostra que

$$\begin{aligned}
c_{11} &= b_{11}^2\lambda_1 + b_{12}b_{21}\lambda_2 + b_{13}b_{31}\lambda_3 + b_{14}b_{41}\lambda_4 \\
c_{22} &= b_{21}b_{12}\lambda_1 + b_{22}^2\lambda_2 + b_{23}b_{32}\lambda_3 + b_{24}b_{42}\lambda_4 \\
c_{33} &= b_{31}b_{13}\lambda_1 + b_{32}b_{23}\lambda_2 + b_{33}^2\lambda_3 + b_{34}b_{43}\lambda_4 \\
c_{44} &= b_{41}b_{14}\lambda_1 + b_{42}b_{24}\lambda_2 + b_{43}b_{34}\lambda_3 + b_{44}^2\lambda_4.
\end{aligned}$$

Pelo Lema anterior, c_{ii} e b_{ii} pertencem ao corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Assim, podemos reescrever as igualdades acima da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
t_1 &= b_{12}b_{21}\lambda_2 + b_{13}b_{31}\lambda_3 + b_{14}b_{41}\lambda_4 \\
t_2 &= b_{21}b_{12}\lambda_1 + b_{23}b_{32}\lambda_3 + b_{24}b_{42}\lambda_4 \\
t_3 &= b_{31}b_{13}\lambda_1 + b_{32}b_{23}\lambda_2 + b_{34}b_{43}\lambda_4 \\
t_4 &= b_{41}b_{14}\lambda_1 + b_{42}b_{24}\lambda_2 + b_{43}b_{34}\lambda_3,
\end{aligned}$$

onde t_i pertence ao corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$.

Vamos calcular o elemento diagonal d_{11} de $D = BA^2B$,

$$d_{11} = b_{11}^2\lambda_1^2 + b_{12}b_{21}\lambda_2^2 + b_{13}b_{31}\lambda_3^2 + b_{14}b_{41}\lambda_4^2.$$

Desde que o elemento b_{11} está no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, podemos reescrever esta igualdade da seguinte forma

$$u_1 = b_{12}b_{21}\lambda_2^2 + b_{13}b_{31}\lambda_3^2 + b_{14}b_{41}\lambda_4^2,$$

onde $u_1 \in \mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$.

Vamos calcular o elemento diagonal e_{11} de $E = BA^3B$,

$$e_{11} = b_{11}^2\lambda_1^3 + b_{12}b_{21}\lambda_2^3 + b_{13}b_{31}\lambda_3^3 + b_{14}b_{41}\lambda_4^3.$$

Desde que o elemento b_{11} está no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, podemos reescrever esta igualdade da seguinte forma

$$s_1 = b_{12}b_{21}\lambda_2^3 + b_{13}b_{31}\lambda_3^3 + b_{14}b_{41}\lambda_4^3,$$

onde $s_1 \in \mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$.

Iremos considerar as equações definidas por C e as equações acima que envolvem u_1 e s_1 de D e E respectivamente. Assim, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
t_1 &= b_{12}b_{21}\lambda_2 + b_{13}b_{31}\lambda_3 + b_{14}b_{41}\lambda_4 \\
t_2 &= b_{21}b_{12}\lambda_1 + b_{23}b_{32}\lambda_3 + b_{24}b_{42}\lambda_4 \\
t_3 &= b_{31}b_{13}\lambda_1 + b_{32}b_{23}\lambda_2 + b_{34}b_{43}\lambda_4 \\
t_4 &= b_{41}b_{14}\lambda_1 + b_{42}b_{24}\lambda_2 + b_{43}b_{34}\lambda_3 \\
s_1 &= b_{12}b_{21}\lambda_2^3 + b_{13}b_{31}\lambda_3^3 + b_{14}b_{41}\lambda_4^3 \\
u_1 &= b_{12}b_{21}\lambda_2^2 + b_{13}b_{31}\lambda_3^2 + b_{14}b_{41}\lambda_4^2.
\end{aligned}$$

Estas igualdades determinam um sistema linear nas variáveis $x_1 = b_{12}b_{21}$, $x_2 = b_{13}b_{31}$, $x_3 = b_{14}b_{41}$, $x_4 = b_{23}b_{32}$, $x_5 = b_{24}b_{42}$ e $x_6 = b_{34}b_{43}$. A matrix L deste sistema é

$$L = \begin{bmatrix}
\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \\
0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_4 \\
0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\
\lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

Para resolver este sistema, mostraremos inicialmente que x_1, x_2 e x_3 está no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Sendo assim, vamos calcular o determinante do seguinte bloco L_1 da matriz L:

$$L_1 = \begin{bmatrix}
\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\
\lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\
\lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3
\end{bmatrix}.$$

Denotamos por l_i a i-ésima linha de L_1. Modificamos L_1 usando as seguintes operações elementares:

$$
\begin{aligned}
l_1' &= l_1\\
l_2' &= l_2 - \lambda_2 l_1\\
l_3' &= l_3 - \lambda_2^2 l_1
\end{aligned}
$$

A matriz modificada L_1' é a seguinte matriz:

$$
L_1' = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_3^2 - \lambda_2\lambda_3 & \lambda_4^2 - \lambda_4\lambda_2 \\ 0 & \lambda_3^3 - \lambda_2^2\lambda_3 & \lambda_4^3 - \lambda_4\lambda_2^2 \end{bmatrix}.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
det\ L_1 = det\ L_1' &= \lambda_2\left[(\lambda_3^2 - \lambda_2\lambda_3)(\lambda_4^3 - \lambda_4\lambda_2^2) - (\lambda_4^2 - \lambda_4\lambda_2)(\lambda_3^3 - \lambda_2^2\lambda_3)\right]\\
&= \lambda_2\left[\lambda_3\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2) - \lambda_4\lambda_3(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\right]\\
&= \lambda_2\lambda_3\lambda_4\left[(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2) - (\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\right]\\
&= \lambda_2\lambda_3\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)\left[(\lambda_4 + \lambda_2) - (\lambda_3 + \lambda_2)\right]\\
&= \lambda_2\lambda_3\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)
\end{aligned}
$$

Então, pelas condições do Lema, o determinante de L_1 é diferente de zero. Portanto, resolvendo este sistema pela regra de Cramer, temos que x_1, x_2 e x_3 estão em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$.

Para mostrar que x_4, x_5 e x_6 estão no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, vamos calcular e determinante do seguinte bloco L_2 da matriz L:

$$
L_2 = \begin{bmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}.
$$

Temos que

$$
detL_2 = -2\lambda_2\lambda_3\lambda_4.
$$

Este determinante é diferente de zero, pois λ_2, λ_3 e λ_4 são distintos de zero. Portanto, x_4, x_5 e x_6 estão no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ □

Lema 2.24. *Seja* Γ *um subgrupo de* $\mathrm{SU}(3,1)$ *contendo um elemento* $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ *com os* λ_i *todos distintos. Então, para todo elemento* $B = (b_{ij}) \in \Gamma$ *os produtos* $b_{12}\overline{b}_{42}$, $b_{13}\overline{b}_{43}$, $b_{14}\overline{b}_{41}$, $b_{24}\overline{b}_{21}$ *e* $b_{34}\overline{b}_{31}$ *estão em* $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$.

Demonstração. Seja $C = BAB^{-1}$. Vamos calcular a diagonal c_{ii} da matriz C,

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \lambda_1 b_{11}\overline{b}_{44} + \lambda_2 b_{12}\overline{b}_{42} + \lambda_3 b_{13}\overline{b}_{43} + \lambda_4 b_{14}\overline{b}_{41} \\
c_{22} &= \lambda_1 b_{21}\overline{b}_{24} + \lambda_2 b_{22}\overline{b}_{22} + \lambda_3 b_{23}\overline{b}_{23} + \lambda_4 b_{24}\overline{b}_{21} \\
c_{33} &= \lambda_1 b_{31}\overline{b}_{34} + \lambda_2 b_{32}\overline{b}_{32} + \lambda_3 b_{33}\overline{b}_{33} + \lambda_4 b_{34}\overline{b}_{31} \\
c_{44} &= \lambda_1 b_{41}\overline{b}_{14} + \lambda_2 b_{42}\overline{b}_{12} + \lambda_3 b_{43}\overline{b}_{13} + \lambda_4 b_{44}\overline{b}_{11}
\end{aligned}$$

Já sabemos que c_{ii} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ e como este corpo é invariante por conjugação temos que $b_{11}\overline{b}_{44}$, $b_{22}\overline{b}_{22}$, $b_{33}\overline{b}_{33}$ e $b_{44}\overline{b}_{11}$ estão todos em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Contudo, podemos reescrever estas igualdades da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
t_1 &= \lambda_2 b_{12}\overline{b}_{42} + \lambda_3 b_{13}\overline{b}_{43} + \lambda_4 b_{14}\overline{b}_{41} \\
t_2 &= \lambda_1 b_{21}\overline{b}_{24} + \lambda_3 b_{23}\overline{b}_{23} + \lambda_4 b_{24}\overline{b}_{21} \\
t_3 &= \lambda_1 b_{31}\overline{b}_{34} + \lambda_2 b_{32}\overline{b}_{32} + \lambda_4 b_{34}\overline{b}_{31} \\
t_4 &= \lambda_1 b_{41}\overline{b}_{14} + \lambda_2 b_{42}\overline{b}_{12} + \lambda_3 b_{43}\overline{b}_{13}
\end{aligned}$$

onde os t_i são elementos em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$.

Consideremos agora $D = B^{-1}AB$. Calculando a diagonal d_{ii} dessa matriz teremos

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \lambda_1 \overline{b}_{44} b_{11} + \lambda_2 \overline{b}_{24} b_{21} + \lambda_3 \overline{b}_{34} b_{31} + \lambda_4 \overline{b}_{14} b_{41} \\
d_{22} &= \lambda_1 \overline{b}_{42} b_{12} + \lambda_2 \overline{b}_{22} b_{22} + \lambda_3 \overline{b}_{32} b_{32} + \lambda_4 \overline{b}_{12} b_{42} \\
d_{33} &= \lambda_1 \overline{b}_{43} b_{13} + \lambda_2 \overline{b}_{23} b_{23} + \lambda_3 \overline{b}_{33} b_{33} + \lambda_4 \overline{b}_{13} b_{43} \\
d_{44} &= \lambda_1 \overline{b}_{41} b_{14} + \lambda_2 \overline{b}_{21} b_{24} + \lambda_3 \overline{b}_{31} b_{34} + \lambda_4 \overline{b}_{11} b_{44}
\end{aligned}$$

Aplicando o mesmo argumento acima, podemos reescrever estas igualdades como segue

$$\begin{aligned}
s_1 &= \lambda_2 \overline{b}_{24} b_{21} + \lambda_3 \overline{b}_{34} b_{31} + \lambda_4 \overline{b}_{14} b_{41} \\
s_2 &= \lambda_1 \overline{b}_{42} b_{12} + \lambda_3 \overline{b}_{32} b_{32} + \lambda_4 \overline{b}_{12} b_{42} \\
s_3 &= \lambda_1 \overline{b}_{43} b_{13} + \lambda_2 \overline{b}_{23} b_{23} + \lambda_4 \overline{b}_{13} b_{43} \\
s_4 &= \lambda_1 \overline{b}_{41} b_{14} + \lambda_2 \overline{b}_{21} b_{24} + \lambda_3 \overline{b}_{31} b_{34}
\end{aligned}$$

onde os s_i são elementos em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$.

Seja agora $D^2 = B^{-1}A^2B$. Vamos calcular o elemento k_{11} da diagonal dessa matriz

$$k_{11} = \lambda_1^2\overline{b}_{44}b_{11} + \lambda_2^2\overline{b}_{24}b_{21} + \lambda_3^2\overline{b}_{34}b_{31} + \lambda_4^2\overline{b}_{14}b_{41}.$$

Consideremos $C^2 = BA^2B^{-1}$ e calculemos o elemento j_{11} dessa matriz

$$j_{11} = \lambda_1^2 b_{11}\overline{b}_{44} + \lambda_2^2 b_{12}\overline{b}_{42} + \lambda_3^2 b_{13}\overline{b}_{43} + \lambda_4^2 b_{14}\overline{b}_{41}.$$

Seja agora $C^3 = BA^3B^{-1}$. Vamos calcular o elemento w_{11} da diagonal dessa matriz

$$w_{11} = \lambda_1^3 b_{11}\overline{b}_{44} + \lambda_2^3 b_{12}\overline{b}_{42} + \lambda_3^3 b_{13}\overline{b}_{43} + \lambda_4^3 b_{14}\overline{b}_{41}.$$

Novamente pelo Lema acima temos que k_{11} e j_{11} são elementos do corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ e $\overline{b}_{44}b_{11}$ também está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, pois este corpo é invariante por conjugação. Podemos daí reescrever essas igualdades respectivamente como segue

$$\begin{aligned}
u_1 &= \lambda_2^2\overline{b}_{24}b_{21} + \lambda_3^2\overline{b}_{34}b_{31} + \lambda_4^2\overline{b}_{14}b_{41}\\
v_1 &= \lambda_2^2 b_{12}\overline{b}_{42} + \lambda_3^2 b_{13}\overline{b}_{43} + \lambda_4^2 b_{14}\overline{b}_{41}\\
d_1 &= \lambda_2^3 b_{12}\overline{b}_{42} + \lambda_3^3 b_{13}\overline{b}_{43} + \lambda_4^3 b_{14}\overline{b}_{41}
\end{aligned}$$

onde u_1, v_1 e d_1 são elementos de $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$.

Iremos considerar as equações definidas por t_1, d_1, v_1, $\overline{s}_1$ e $\overline{u}_1$. Assim, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
t_1 &= \lambda_2 b_{12}\overline{b}_{42} + \lambda_3 b_{13}\overline{b}_{43} + \lambda_4 b_{14}\overline{b}_{41}\\
d_1 &= \lambda_2^3 b_{12}\overline{b}_{42} + \lambda_3^3 b_{13}\overline{b}_{43} + \lambda_4^3 b_{14}\overline{b}_{41}\\
v_1 &= \lambda_2^2 b_{12}\overline{b}_{42} + \lambda_3^2 b_{13}\overline{b}_{43} + \lambda_4^2 b_{14}\overline{b}_{41}\\
\overline{s}_1 &= \overline{\lambda}_2 b_{24}\overline{b}_{21} + \overline{\lambda}_3 b_{34}\overline{b}_{31} + \overline{\lambda}_4 b_{14}\overline{b}_{41}\\
\overline{u}_1 &= \overline{\lambda}_2^2 b_{24}\overline{b}_{21} + \overline{\lambda}_3^2 b_{34}\overline{b}_{31} + \overline{\lambda}_4^2 b_{14}\overline{b}_{41}
\end{aligned}$$

Estas igualdades definem um sistema linear nas variáveis $y_1 = b_{12}\overline{b}_{42}$, $y_2 = b_{13}\overline{b}_{43}$, $y_3 = b_{14}\overline{b}_{41}$, $y_4 = b_{24}\overline{b}_{21}$ e $y_5 = b_{34}\overline{b}_{31}$. A matrix L deste sistema é

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 & 0\\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & 0 & 0\\ \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \overline{\lambda}_4 & \overline{\lambda}_2 & \overline{\lambda}_3\\ 0 & 0 & \overline{\lambda}_4^2 & \overline{\lambda}_2^2 & \overline{\lambda}_3^2 \end{bmatrix}.$$

Para resolver este sistema, primeiro mostraremos que y_1, y_2 e y_3 estão no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Para isto, vamos calcular o determinante do seguinte bloco da matriz L:

$$L_1 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{bmatrix}.$$

Já foi mostrado no Lema anterior que $det\ L_1 \neq 0$ e portanto os elementos y_1, y_2 e y_3 estão no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$.

Finalmente, para concluir que y_4 e y_5 estão no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, vamos calcular o determinante do seguinte bloco da matriz L:

$$L_2 = \begin{bmatrix} \overline{\lambda}_2 & \overline{\lambda}_3 \\ \overline{\lambda}_2^2 & \overline{\lambda}_3^2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} det L_2 &= \overline{\lambda}_2 \overline{\lambda}_3^2 - \overline{\lambda}_3 \overline{\lambda}_2^2 \\ &= \overline{\lambda}_2 \overline{\lambda}_3 (\overline{\lambda}_3 - \overline{\lambda}_2). \end{aligned}$$

Note que este determinante é diferente de zero, pois os autovalores λ_i, $i = 1, ..., 4$ são todos distintos. Logo, temos que y_4 e y_5 estão no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. $\square$

Proposição 2.25 (Normalização básica)**.** *Seja* $\Gamma = \langle A, B \rangle$ *subgrupo de* $\mathrm{SU}(n,1)$ $\mathbb{C}$-*irredutível, onde*

$$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_{n+1}).$$

Então, Γ *é conjugado em* $\mathrm{SU}(n,1)$ *a* $\Gamma' = \langle A, B' \rangle$*, onde a primeira coluna* B_1' *de* B' *é*

$$B_1' = \begin{bmatrix} b_{11}' \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. A conta direta, mostra que

$$v = B(v_\infty) = (b_{11}, b_{21}, ..., b_{(n+1)1})^T.$$

Escrevemos o vetor v como

$$v = \begin{bmatrix} (-|z|^2 + it)/2 \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

onde $(z,t) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$ (veja Seção 1.2.2).

Se $z = (0,...,0)^T$, então o grupo Γ deixa invariante o subespaço complexo gerado por vetores $v_0 = (0,...,0,1)^T$ e v_∞. Isso contradiz que o grupo Γ é $\mathbb{C}$-irredutível. Portanto, $|z| \neq 0$. Então, existem uma dilatação de Heisenberg e uma rotação de Heisenberg (as quais obviamente comutam com A) que transformam z em $(1,1,...,1)^T$. Conjugando o grupo Γ por estas aplicações, temos que $v = (b'_{11}, 1, 1, ..., 1)^T$. □

Proposição 2.26. *Seja* $\Gamma = \langle A, B\rangle$ *um subgrupo* $\mathbb{C}$*-irredutível de* $\mathrm{SU}(3,1)$*, onde o elemento* $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$*. Então,* Γ *é conjugado em* $\mathrm{SU}(3,1)$ *a um subgrupo de* $\mathrm{SU}(3,1,\mathbb{Q}(\Gamma,\mathrm{E(A)}))$.

Demonstração. Primeiro, usando a normalização básica (Proposição anterior), podemos supor que

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 1 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 1 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 1 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix},$$

Sejam $v_1 = (b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14})^T$, $v_2 = (b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24})^T$, $v_3 = (b_{31}, b_{32}, b_{33}, b_{34})^T$, $v_4 = (b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{44})^T$, $w_1 = (b_{11}, 1, 1, 1)^T$, $w_2 = (b_{12}, b_{22}, b_{32}, b_{42})^T$, $w_3 = (b_{13}, b_{23}, b_{33}, b_{43})^T$ e $w_4 = (b_{14}, b_{24}, b_{34}, b_{44})^T$ os vetores que representam as linhas e as colunas da matriz B respectivamente.

Na prova, vamos usar os Lemas anteriores que afirmam que b_{ii}, $b_{12}b_{21}$, $b_{13}b_{31}$, $b_{14}b_{41}$, $b_{23}b_{32}$, $b_{24}b_{42}$, $b_{34}b_{43}$, $b_{12}\overline{b}_{42}$, $b_{13}\overline{b}_{43}$, $b_{14}\overline{b}_{41}$, $b_{24}\overline{b}_{21}$, $b_{34}\overline{b}_{31}$ pertencem ao corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ e as igualdades da Proposição 2.9.

Desde que $b_{21} = 1$, $b_{31} = 1$ e $b_{41} = 1$ podemos concluir diretamente que b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{24}, b_{34} pertencem ao corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, basta usar respectivamente que $b_{12}b_{21}$, $b_{13}b_{31}$, $b_{14}b_{41}$, $b_{21}\overline{b}_{24}$ e $b_{31}\overline{b}_{34}$ pertencem ao referido corpo. Daí, nos resta mostrar que as entradas b_{23}, b_{32}, b_{42} e b_{43} estão em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$.

Vamos assumir inicialmente que todas as entradas de B são distintas de zero.

Desde que b_{12} e b_{13} estão no corpo, usando respectivamente que $b_{12}\overline{b}_{42}$ e $b_{13}\overline{b}_{43}$ pertencem ao corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, temos que b_{42} e b_{43} também estão no corpo, pois o corpo é invariante por conjugação.

Desde que os vetores w_1 e w_2 são ortogonais, temos que $\langle w_1, w_2\rangle = b_{11}\overline{b}_{42} + \overline{b}_{22} + \overline{b}_{32} + \overline{b}_{12} = 0$ e podemos concluir que b_{32} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Analogamente, considerando a igualdade $\langle w_1, w_3\rangle = b_{11}\overline{b}_{43} + \overline{b}_{23} + \overline{b}_{33} + \overline{b}_{13} = 0$, concluimos que b_{23} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Portanto, todas as entradas da matriz B estão no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ e segue a proposição para este caso.

Vamos assumir agora que uma das entradas b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{24}, b_{34} seja igual a zero, digamos que seja $b_{13} = 0$. Trabalharemos com as entradas b_{23}, b_{32}, b_{42} e b_{43}. Se todas elas forem iguais a zero não há o que provar e segue o resultado.

Suponhamos primeiro que todas estas entradas sejam diferentes de zero.

Se $b_{24} = b_{34} = 0$, usando que os vetores w_3 e w_4 são ortogonais, segue que $b_{43}\overline{b}_{14} = 0$. Daí $b_{43} = 0$ ou $b_{14} = 0$. Como já estamos supondo $b_{43} \neq 0$ devemos ter $b_{14} = 0$. Note que não podemos ter $b_{14} = 0$, caso contrário Γ deixaria o subespaço gerado por $(0, 0, 0, 1)^T$ invariante, contrariando o fato de Γ ser $\mathbb{C}$-irredutível. Logo, não podemos ter simultaneamente $b_{24} = 0$ e $b_{34} = 0$.

Se $b_{24} \neq 0$ e $b_{34} \neq 0$, então como $b_{24}b_{42}$ e $b_{34}b_{43}$ pertencem ao corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, temos que b_{42} e b_{43} pertencem a este corpo. Usando que os vetores w_1 e w_2 são ortogonais, a igualdade $\langle w_1, w_2\rangle = b_{11}\overline{b}_{42} + \overline{b}_{22} + \overline{b}_{32} + \overline{b}_{12} = 0$ implica que a entrada b_{32} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E)$. Analogamente, usando que os vetores w_1 e w_3 são ortogonais, temos que b_{23} pertence a $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Portanto, para este caso o resultado segue.

Seja agora $b_{24} = 0$ e $b_{34} \neq 0$. Usando que $b_{34}b_{43}$ está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, concluímos que b_{43} está no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Como os vetores w_1 e w_3 são ortogonais, temos $\langle w_1, w_3\rangle = b_{11}\overline{b}_{43} + \overline{b}_{23} + \overline{b}_{33} = 0$, donde concluímos que b_{23} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Além disso, como $b_{23}b_{32}$ está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, temos que b_{32} também está neste corpo. Por outro lado, desde que os vetores v_3 e v_4 são ortogonais, a igualdade $\langle v_3, v_4\rangle = \overline{b}_{44} + b_{32}\overline{b}_{42} + b_{33}\overline{b}_{43} + b_{34} = 0$ implica que a entrada b_{42} está no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Portanto, segue o resultado para este caso.

Se $b_{24} \neq 0$ e $b_{34} = 0$, desde que $b_{24}b_{42}$ está no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, temos que b_{42} também está neste corpo. Como os vetores w_1 e w_2 são ortogonais, segue que $\langle w_1, w_2\rangle = b_{11}\overline{b}_{42} + \overline{b}_{22} + \overline{b}_{32} + \overline{b}_{12} = 0$, daí, b_{32} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ e consequentemente b_{23} também está neste corpo, pois $b_{23}b_{32}$ está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Como os vetores v_2 e v_4 são ortogonais e $b_{23} \neq 0$, a igualdade $\langle v_2, v_4\rangle = \overline{b}_{44} + b_{22}\overline{b}_{42} + b_{23}\overline{b}_{43} + b_{24} = 0$, nos dá que b_{43} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Logo, todas entradas da matriz B estão no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ e para este caso também segue o resultado.

Suponhamos agora que uma das entradas b_{23}, b_{32}, b_{42} e b_{43} seja igual a zero e as demais diferentes de zero, digamos que seja $b_{23} = 0$.

Note que a entrada b_{33} é diferente de zero, pois o vetor w_3 é positivo, ou seja, $\langle w_3, w_3 \rangle > 0$.

Se $b_{12} \neq 0$, temos que b_{42} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, pois o produto $b_{12}\overline{b}_{42}$ está no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Desde que os vetores v_1 e v_3 são ortogonais, temos que $\langle v_1, v_3 \rangle = b_{11}\overline{b}_{34} + b_{12}\overline{b}_{32} + b_{14} = 0$. Assim, como $b_{12} \neq 0$ segue que b_{32} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Como os vetores v_3 e v_4 são ortogonais, temos $\langle v_3, v_4 \rangle = \overline{b}_{44} + b_{32}\overline{b}_{42} + b_{33}\overline{b}_{43} + b_{34} = 0$ e desde que b_{33} é diferente de zero, temos que b_{43} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Logo, para este caso segue o resultado.

Agora, vamos supor que $b_{12} = 0$.

Se $b_{22} \neq 0$, como os vetores v_2 e v_3 são ortogonais, a igualdade $\langle v_2, v_3 \rangle = \overline{b}_{34} + b_{22}\overline{b}_{32} + b_{24} = 0$ implica que b_{32} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Analogamente, como os vetores v_2 e v_4 são ortogonais, temos que, $\langle v_2, v_4 \rangle = \overline{b}_{44} + b_{22}\overline{b}_{42} + b_{24} = 0$ e usando que $b_{22} \neq 0$ temos que b_{42} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Agora usando que os vetores w_1 e w_3 são ortogonais e a entrada $b_{11} \neq 0$, a igualdade $\langle w_1, w_3 \rangle = b_{11}\overline{b}_{43} + \overline{b}_{33} = 0$ implica que b_{43} está no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Portanto, segue o resultado neste caso.

Se $b_{22} = 0$, como os vetores w_1 e w_3 são ortogonais, temos que $\langle w_1, w_3 \rangle = b_{11}\overline{b}_{43} + \overline{b}_{33} = 0$ e como $b_{11} \neq 0$ segue que b_{43} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Desde que o vetor v_2 é positivo, temos que $b_{24} \neq 0$. Daí, b_{42} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, pois o produto $b_{24}b_{42}$ está no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Por outro lado, como os vetores w_1 e w_2 são ortogonais, temos que $\langle w_1, w_2 \rangle = b_{11}\overline{b}_{42} + \overline{b}_{32} = 0$, donde desta igualdade a entrada b_{32} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Portanto, novamente todas as entradas da matriz B estão no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ e segue o resultado.

Se uma das entradas b_{23}, b_{32}, b_{42} e b_{43} é igual a zero e as demais diferentes de zero, então o resultado segue usando um raciocínio análogo.

Agora trataremos o caso em que pelo menos duas destas entradas são distintas de zero e duas outras iguais a zero. Se $b_{23} = b_{43} = 0$ e $b_{42} \neq 0$, $b_{32} \neq 0$, o subgrupo Γ deixaria o espaço gerado pelo vetor $(0, 0, 1, 0)^T$ invariante, contrariando o fato de ser $\mathbb{C}$-irredutível, logo excluímos esta possibilidade.

Agora consideremos o caso $b_{32} = b_{42} = 0$, $b_{23} \neq 0$ e $b_{43} \neq 0$.

Se $b_{34} \neq 0$, então b_{43} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, pois o produto $b_{34}b_{43}$ pertence a este corpo. Desde que os vetores v_2 e v_4 são ortogonais e $b_{43} \neq 0$, a igualdade $\langle v_2, v_4 \rangle = \overline{b}_{44} + b_{23}\overline{b}_{43} + b_{24} = 0$, nos fornece que a entrada b_{23} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Logo, segue o resultado neste caso.

Se $b_{34} = 0$ então $b_{33} \neq 0$, pois o vetor v_3 é positivo. Assim, como os vetores v_3 e v_4 são ortogonais, a igualdade $\langle v_3, v_4 \rangle = \bar{b}_{44} + b_{33}\bar{b}_{43} = 0$ implica que b_{43} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Daí, desde que os vetores v_2 e v_4 são ortogonais e $b_{43} \neq 0$, podemos concluir que a entrada b_{23}. Portanto, neste caso a proposição está provada.

Assumimos agora que $b_{23} = b_{42} = 0$, $b_{32} \neq 0$ e $b_{43} \neq 0$.

Novamente, se $b_{34} \neq 0$, então b_{43} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, pois $b_{34}b_{43}$ pertence a este corpo. E como os vetores w_2 e w_4 são ortogonais, temos que, $\langle w_2, w_4 \rangle = b_{12}\bar{b}_{44} + b_{22}\bar{b}_{24} + b_{32}\bar{b}_{34}$, e assim a entrada b_{32} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Portanto, segue o resultado.

Se $b_{34} = 0$, desde que os vetores w_3 e w_4 são ortogonais, temos que, $\langle w_3, w_4 \rangle = b_{43}\bar{b}_{14} = 0$, e como estamos supondo $b_{43} \neq 0$, segue que $b_{14} = 0$. No entanto, já que o vetor v_1 é isotrópico, temos que $b_{12} = 0$. Por outro lado, como os vetores v_1 e v_2 são ortogonais, temos que, $\langle v_1, v_2 \rangle = b_{11}\bar{b}_{24} = 0$, mas desde que a entrada $b_{11} \neq 0$, temos $b_{24} = 0$, isto é uma contradição, pois o subgrupo Γ teria o subespaço gerado por $(0, 0, 0, 1)^T$ invariante. Logo, isto implica que a entrada $b_{34} \neq 0$.

Se duas das entradas b_{23}, b_{32}, b_{42} e b_{43} são iguais zero e as outras duas distintas de zero, então o resultado segue usando um raciocínio análogo.

Estamos supondo desde o início da demonstração que a entrada b_{13} é igual a zero. O caso b_{13} igual a zero e b_{12} diferente de zero e o caso em que b_{13} e b_{12} são diferentes de zero, segue usando um raciocínio semelhante.

Para finalizar, vamos supor que b_{13} e b_{12} são ambas iguais a zero.

Se $b_{24} \neq 0$ e $b_{34} \neq 0$, então as entradas b_{42} e b_{43} estão no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, pois os produtos $b_{24}b_{42}$ e $b_{34}b_{43}$ estão neste corpo respectivamente. Agora, desde que os vetores w_1 e w_2 são ortogonais e os vetores w_1 e w_3 são ortogonais, as igualdades $\langle w_1, w_2 \rangle = b_{11}\bar{b}_{42} + \bar{b}_{22} + \bar{b}_{32} = 0$ e $\langle w_1, w_3 \rangle = b_{11}\bar{b}_{43} + \bar{b}_{23} + \bar{b}_{33} = 0$, nos fornecem que as entradas b_{32} e b_{23} estão no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ respectivamente. Portanto, o resultado segue neste caso.

Se as entradas b_{24} e b_{34} forem ambas iguais a zero, inicialmente note que $b_{14} \neq 0$, caso contrário, o subgrupo Γ deixaria o subespaço gerado por $(0, 0, 0, 1)^T$ invariante, contrariando o fato de ser $\mathbb{C}$-irredutível. Agora, como os vetores w_3 e w_4 são ortogonais, temos que $\langle w_3, w_4 \rangle = b_{43}\bar{b}_{14} = 0$ e consequentemente devemos ter $b_{43} = 0$. Analogamente, desde que os vetores w_2 e w_4 são ortogonais, temos que, $\langle w_2, w_4 \rangle = b_{42}\bar{b}_{14} = 0$ e daí, $b_{42} = 0$. Mas sob todos estes fatos, note que o subgrupo Γ deixaria o subespaço gerado pelo vetor $(0,1,1,0)^T$ invariante, o que é uma contradição. Logo, um dos números b_{24} e b_{34} é diferente zero.

Se a entrada $b_{24} \neq 0$ e a entrada $b_{34} = 0$, temos que b_{42} está no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$, pois o produto $b_{24}b_{42}$ está neste corpo. Agora, como os vetores v_1 e v_3 são ortogonais, temos que $b_{14} = 0$. Desde que os vetores w_1 e w_2 são ortogonais, a igualdade $\langle w_1, w_2 \rangle = b_{11}\bar{b}_{42} + \bar{b}_{22} + \bar{b}_{32} = 0$ nos fornece que a entrada b_{32} está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Já que os vetores w_3 e w_4 são ortogonais e a entrada $b_{24} \neq 0$, temos que $b_{23} = 0$. Por fim, como os vetores w_1 e w_3 são ortogonais e $b_{11} \neq 0$, a igualdade $\langle w_1, w_3 \rangle = b_{11}\bar{b}_{43} + \bar{b}_{33} = 0$ implica que a entrada b_{43} está no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Logo, todas as entradas da matriz B estão no corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ e o resultado segue. □

Agora estamos em condições de provar nosso resultado principal.

Teorema 2.27. *Seja* Γ *um subgrupo totalmente irredutível de* $\mathrm{SU}(3,1)$*. Então,* Γ *contém um elemento* A *loxodrômico com todos os autovalores distintos, tal que o grupo* Γ *é conjugado em* $\mathrm{SU}(3,1)$ *a um subgrupo de* $\mathrm{SU}(3,1,\mathbb{Q}(\Gamma, E(A)))$*, onde* $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ *é o corpo gerado pelo corpo de traços* $\mathbb{Q}(\Gamma)$ *de* Γ *e o conjunto de todos os autovalores de* A*.*

Demonstração. Usando o Teorema 2.20, temos que Γ contém um subgrupo $\Gamma_0 = \langle A, B \rangle$ tal que A e B são loxodrômicos regulares e Γ_0 é Zariski-denso em $\mathrm{SU}(3,1)$.

Conjugando, se for necessário, o grupo Γ_0 em $\mathrm{SU}(3,1)$, podemos supor que $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Agora, aplicando a Proposição 2.26, temos que existe $f \in \mathrm{SU}(3,1)$ tal que $\Gamma_0^* = f\Gamma_0 f^{-1}$ é um subgrupo de $\mathrm{SU}(3,1,\mathbb{Q}(\Gamma, E(A)))$.

Seja $\Gamma^* = f\Gamma f^{-1}$, assim Γ_0^* é um subgrupo de Γ^*. Desde que Γ_0^* é Zariski-denso, aplicando o Teorema 2.12, temos que Γ_0^* é totalmente irredutível, portanto $\mathbb{C}$-irredutível. Aplicando o Teorema 2.16, temos que Γ_0^* contém uma base de $\mathrm{M}(4,\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$. Seja $S = \{S_1, S_2, ..., S_{16}\}$ uma tal base. Então, segue que para qualquer elemento $\gamma \in \Gamma^*$ existem números complexos $c_1, ..., c_{16}$ tais que

$$\gamma = c_1 S_1 + ... + c_{16} S_{16}.$$

Seja $(A, B) = \mathrm{tr(AB)}$ a forma do traço em $\mathrm{M}(4,\mathbb{C})$. Sabe-se que a forma de traço é uma forma bilinear simétrica não-degenerada. Segue da igualdade acima que

$$(\gamma, S_i) = c_1(S_1, S_i) + ... + c_{16}(S_{16}, S_i), \quad i = 1, ..., 16.$$

Consideremos essas igualdades como um sistema de equações lineares nas variáveis $c_1, ..., c_{16}$. Temos que para quaisquer $i, j = 1, ..., 16$, o produto (S_i, S_j) está em $\mathbb{Q}(\Gamma_0, E(A))$ e o produto (γ, S_i) está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Contudo, isto implica que todo coeficiente do sistema está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Desde que, a forma do traço é não-degenerada, este sistema é não-singular. Resolvendo este sistema pela regra de Cramer, concluímos que todo c_i está em $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$. Isto implica que $\gamma \in \Gamma^*$ está em $\mathrm{SU}(3, 1, \mathbb{Q}(\Gamma, E(A)))$. Portanto, concluímos que Γ^* é um subgrupo de $\mathrm{SU}(3, 1, \mathbb{Q}(\Gamma, E(A)))$. $\square$

Definição 2.28. *Seja Γ um subgrupo de $\mathrm{SU}(n, 1)$. Então, o corpo de autovalores de Γ, denotado por $\mathbb{Q}(\Gamma, E)$, é o corpo gerado pelos autovalores de todos os elementos de Γ sobre os números racionais $\mathbb{Q}$.*

É claro que o corpo de autovalores $\mathbb{Q}(\Gamma, E)$ de Γ é invariante por conjugação em $\mathrm{SU}(n, 1)$.

Como um corolário do Teorema 2.27 temos

Teorema 2.29. *Seja Γ subgrupo de $\mathrm{SU}(3, 1)$ totalmente irredutível. Então, o corpo $\mathbb{Q}(\Gamma, E)$ é um corpo de definição de Γ.*

Demonstração. A prova segue do fato que, para qualquer elemento A de Γ, temos que $\mathbb{Q}(\Gamma, E(A))$ é subconjunto de $\mathbb{Q}(\Gamma, E)$. $\square$

Teorema 2.30 (Teorema de densidade de Borel)**.** *Seja G um grupo algébrico real semi-simples conexo sem fatores compactos e $\Gamma < G$ um reticulado. Então, Γ é Zariski denso em G.*

Como uma consequência do Teorema 2.29 e do Teorema de densidade de Borel, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.31. *Seja Γ um reticulado em $\mathrm{SU}(3, 1)$. Então, $\mathbb{Q}(\Gamma, E)$ é um corpo de definição de Γ.*

Referências Bibliográficas

[1] BOREL, A. *Density properties for certain subgroups of semi-simple groups without compact components.* Ann. of Math. (2) **72** (1960), 179-188.

[2] BURNSIDE, W. *On the condition of reducibility of any group of linear substitutions.* Proc. London Math. Soc. **3** (1905), 430-434.

[3] CHEN, S. S; GREENBERG, L.. *Hyperbolic Spaces.* In Contributions to Analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers), Academic Press, New York (1974), 49-87.

[4] CUNHA, H.; GUSEVSKII, N. *A note on trace fields of complex hyperbolic groups.* Groups Geom. Dyn. 8 (2014), 355-374.

[5] GOLDMAN, W. M. *Complex Hyperbolic Geometry.* Oxford Math. Monogr., Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York 1999.

[6] SCALA, A. J. Di; OLMOS, C. *A geometric proof of the Karpelevich-Mostow theorem.* Bull London Math. Soc. 41 (2009), 634-638.

[7] KARPELEVICH, F.I. *Surfaces of transitivity of semisimple group of motions of a symmetric space.* Soviet Math. Dokl. 93 (1953), 401-404.

[8] LAM, T. Y. *A Theorem of Burnside on Matrix Rings.* The American Math. Monthly, vol. 105, no. 7 (1998), pp. 651-653.

[9] MACLACHLAN, C.; REID, A. W.*The Arithmetic of hyperbolic 3-manifolds.* Grad. Texts in Math. 219, Springer-Verlag, New York 2003.

[10] MOSTOW, G. *Some new decomposition theorems for semi-simple groups.* Mem. Amer. Math. Soc. 14 (1955), 31-54.

[11] SCHARLAU, W. *Quadratic and Hermitian Forms.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Vol. 270, Springer-Verlag, Berlin, (1985), x+421 pp.

[12] TITS, J. *Free Subgroups in Linear Groups.* Journal of Algebra 20, (1972), 250-270.

[13] VINBERG, E. B. *Ring of definition of dense subgroups of semisimple linear groups.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **35** (1971), 45-55 (in Russian).

[14] ———. *The smallest field of definition of a subgroup of the group.* PSL2. (Russian) Mat.Sb.184 (1993), no. 10, 53-66; English transl.Russian Acad.Sci.Sb.Math. 80 (1995), no.1, 179-190.