Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Hipersuperfícies Estáveis CMC com Fronteira Livre numa Bola Euclidiana

por

Zulema Katherine Gutierrez Ttamiña

Belo Horizonte

2019

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de matemática

Hipersuperfícies Estáveis CMC com Fronteira Livre numa Bola Euclidiana

por

Zulema Katherine Gutierrez Ttamiña *

Trabalho de Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Belo Horizonte, 8 de Março de 2018

Comissão Examinadora:

Ezequiel Rodrigues Barbosa - Orientador(UFMG)

Emerson Alves Mendoça de Abreu (UFMG)

Marcos da Silva Montenegro(UFMG)

*O autor foi bolsista da Cnpq durante a elaboração deste trabalho.

Dedicado a meus pais, Edgar Gutierrez Altamirano e Toribia Ttamiña Huaman, minha fonte de amor incondicional.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força, coragem e saude nos momentos de dificultade.

Aos meus pais Edgar e Toribia pelo amor e carinho estiveram dando força e incentivo para chegar até o final, a meus irmãos Jan e Helen pelo carinho e as noites de fim de semana engraçadas pelo telefone.

A meu tio Elias(em memória), a meu avô Constatino(em memória) sempre presentes.

A meu orientador Ezequiel Rodrigues Barbosa, pelos ensinamentos.

Ao CNPq pelo apoio.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos o resultado obtido por Ezequiel Barbosa que afirma que se B é uma bola em um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, com dimensão $n \geq 3$, então a hipersuperfície CMC estável com fronteira livre $\Sigma \subset B$ satisfaz

$$nA \leq L \leq nA\left(\frac{1+\sqrt{1+4(n+1)H^2}}{2}\right),$$

onde L denota o comprimento da fronteira de Σ, A denota a área de Σ e H denota a curvatura média de Σ. Consequentemente, se a fronteira de Σ é mergulhada, então Σ é totalmente geodésica, ou estrelada com respeito ao centro da bola. Esse resultado é uma melhoria de um Teorema mostrado por Ros e Vergasta em [4].

Palavras-Chaves: Estabilidade, Hipersuperfíes CMC , fronteira livre.

Abstract

In this work, we will study the result obtained by Ezequiel Barbosa which states that if B is a ball in a Euclidean space $\mathbb{R}^n$,with dimension $n \geq 3$, then the stable CMC hypersurface free boundary $\Sigma \subset B$ suit

$$nA \leq L \leq nA \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4(n+1)H^2}}{2} \right),$$

where L denotes the border length of Σ, A denotes the area of ??Σ and H denotes the mean curvature of Σ. Consequently, if the Σ border is dipped, then Σ is fully geodesic, or starred with respect to the center of the ball. This result is an improvement of a Theorem shown by Ros and Vergasta in [4].

Key-Words: Estability, Hypersurfaces CMC, Free boundary.

Sumário

Introdução

Em 1958, Aleksandrov mostrou que a esfera é a única hipersuperfície conexa, compacta e mergulhada com curvatura média constante no espaço Euclidiano. Em 1984, J. Lucas Barbosa e Manfredo do Carmo forneceram uma noção de estabilidade para hipersuperfícies de Curvatura Media Constante (CMC) no espaço $\mathbb{R}^{n+1}$, e foi provado que as esferas redondas (esferas com métrica Euclidiana) são as únicas hipersuperfícies compactas CMC em $\mathbb{R}^{n+1}$ que são estáveis. Com uma definição similar a deles, em 1995, Ros-Vergasta provaram que uma superfície CMC compacta orientável imersa Σ com fronteira livre em uma bola fechada $B \subset \mathbb{R}^3$ deve de ser ou um disco plano, ou uma calota esférica, ou uma superfície de gênero 1, cuja fronteira tem duas componentes.

Daqui em diante, consideraremos um domínio suave, compacto e convexo B em $\mathbb{R}^{n+1}$, e denotaremos por ∂B e $\text{int}B$ a fronteira e o interior de B, respectivamente.

Definição 0.1. *Uma hipersuperfície de fronteira livre CMC em B é uma hipersuperfície de curvatura media constante tal que $\Sigma \subset B$ intersecta ∂B ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma$.*

Estes tipos de hipersuperfícies são pontos críticos do funcional área dentre todas as hipersuperfícies compactas $\Sigma \subset B$ com $\partial\Sigma \subset \partial B$ as quais dividem B em dois subconjuntos de volumes prescritos. Se uma hipersuperfície $\Sigma \subset B$ com fronteira livre CMC tem segunda variação de área não-negativa, para toda variação que preserva volume, dizemos que ela é uma hipersuperfície CMC *estável* com fronteira livre.

Em Maio de 2016, Ivaldo Nunes mostrou um caso particular do teorema acima, usando um resultado de estabilidade estendido, e um argumento modificado de balanceamento do tipo Hersch, tendo assim um melhor controle sobre o gênero. No mesmo ano, Junho de 2016, Ezequiel Barbosa usa o Lema de Estabilidade tipo Nunes e um importante resultado de Ros-Vergasta [4] para obter o seguinte resultado.

Teorema 0.2 (E. Barbosa). *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, uma bola fechada. Seja $\Sigma \subset B$ uma hipersuperfície CMC estável com fronteira livre tal que a fronteira está mergulhada em B.*

Então $L \geq nA$. *Em particular,* Σ *é totalmente geodésica, ou é estrelada em relação ao centro da bola. Se* $n = 2$*, então* Σ *é um disco totalmente geodésico ou uma calota esférica.*

O presente trabalho tem como objetivo mostrar o resultado obtido por Ezequiel Barbosa usando como ferramenta a técnica utilizada na demonstração do Lema de Estabilidade do tipo Nunes.

O trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, introduzimos alguns conceitos básicos de Variedades Diferenciáveis e Variedades Riemannianas. Em seguida, dedicamos o segundo capítulo ao estudo dos conceitos de variação de área, e demonstramos as fórmulas de primeira e segunda variação de área, com a finalidade de introduzir de maneira natural a definição de estabilidade de uma Hipersuperfície. Por fim, no terceiro capítulo, faremos a demonstração do Lema de Estabilidade tipo Nunes para finalmente mostrarmos o teorema de Ezequiel Barbosa.

Capítulo 1

Preliminares

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e resultados conhecidos no ambiente da Geometria Riemanniana com o objetivo de fixar a notação que utilizaremos ao longo desta dissertação. Por esse motivo, algumas demonstrações serão simplesmente referenciadas.

1.1 Definições e resultados de Geometria Riemanniana

Inicialmente, vamos definir o conceito de variedade diferenciável.

Seja M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável. Um *atlas* de dimensão n para M é uma família

$$\{\phi_\alpha : U_\alpha \to M\}_{\alpha \in L}$$

de aplicações contínuas tais que para cada $\alpha \in L$, $\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha)$ é um homeomorfismo de um aberto $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ sobre um aberto $\phi_\alpha(U_\alpha)$ de M satisfazendo as seguintes condições:

(i) Os abertos $\phi_\alpha(U_\alpha)$ formam uma cobertura de M, isto é,

$$\bigcup_{\alpha \in L} \phi_\alpha(U_\alpha) = M$$

(ii) Para todos índices α, $\beta \in L$, tais que $V_{\alpha\beta} = \phi_\alpha(U_\alpha) \bigcap \phi_\beta(U_\beta)$, as aplicações

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta} &= \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta : \phi_\beta^{-1}(V_{\alpha\beta}) \to \phi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta}), \\ \phi_{\beta\alpha} &= \phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha : \phi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta}) \to \phi_\beta^{-1}(V_{\alpha\beta}), \end{aligned}$$

são diferenciáveis de classe C^∞.

Cada aplicação ϕ_α é chamada uma *parametrização* ou *carta local* de uma vizinhança de M e $\phi_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma *vizinhança coordenada.*

Se $p = \phi_\alpha(x_1, \cdots, x_n)$, então $x_1, \cdots, x_n$ são chamadas as coordenadas de p na parametrização ϕ_α.

Por este motivo, a aplicação ϕ_α também é chamada de um *sistema de coordenadas locais*, e o atlas $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to M\}_{\alpha \in L}$ é também chamado de um *sistema de coordenadas* para M.

Uma *estrutura diferenciável* para M é um atlas maximal.

Definição 1.1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável munido de uma estrutura diferenciável.*

Dados dois sistemas de coordenadas locais $x : U \to M$ e $y : V \to M$ no espaço topológico M, tais que $W = x(U) \cap x(V) \neq \emptyset$, cada $p \in x(U) \cap x(V)$ tem coordenadas $x^i = x^i(p)$ no sistema x e coordenadas $y^i = y^i(p)$ no sistema y. A correspondência $(x^1(p), ..., x^m(p)) \to (y^1(p), ..., y^m(p))$ estabelece um homeomorfismo

$$\phi_{xy} = y^{-1} \circ x : x^{-1}(W) \to y^{-1}(W)$$

chamado *mudança de coordenadas.*

Um atlas $\mathcal{A}$ sobre um espaço topológico M diz-se diferenciável, de classe $C^k, (k \geq 1)$, se todas as mudanças de coordenadas $\phi_{xy}, x, y \in \mathcal{A}$ são aplicações de classe C^k. Escreve-se então $\mathcal{A} \in C^k$. Como $\phi_{yx} = (\phi_{xy})^{-1}$, segue-se que as aplicações ϕ_{xy} são, de fato, difeomorfismos de classe C^k. Em particular, se escrevemos $\phi_{xy} : (x^1, ..., x^m) \to (y^1, ..., y^m)$, então o determinante jacobiano det $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ é não-nulo em todo ponto de $x(U \cap V)$.

Dado um atlas $\mathcal{A} \in C^k$ de dimensão m em um espaço topológico M, dizemos que um sistema de coordenadas $z : W \to M$ é *admissível* relativamente ao atlas $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A} \cup \{z\}$ ainda é um atlas de classe C^k em M. Um atlas $\mathcal{A}$ de dimensão m e classe C^k sobre M se diz *maximal* quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a $\mathcal{A}$. Todo atlas de classe C^k sobre M pode ser estendido, de modo único, até se tornar um atlas maximal de classe C^k, para isso basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

Exemplo 1.1. *O espaço $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞ e dimensão n.*

Exemplo 1.2. *A esfera $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sqrt{x_1^2 + ... + x_{n+1}^2} = 1\}$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞ e dimensão n.*

Exemplo 1.3. *O espaço projetivo real $P^n(\mathbb{R})$, isto é, o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pela relação de equivalência:*

$$(x_1, ..., x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, ..., \lambda x_{n+1}) \;\; \lambda \in \mathbb{R}, \;\; \lambda \neq 0$$

é uma variedade diferenciável de classe C^∞ e dimensão n.

Definição 1.1.2. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação $F : M \to N$ é diferenciável em $p \in M$ se existem parametrizações $\phi : U \to M$ de uma vizinhança de p e $\psi : V \to N$ de uma vizinhança de $F(p)$ tais que $(F(\phi(U)) \subset \psi(V)$ e*

$$\psi^{-1} \circ F \circ \phi : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

é uma aplicação diferenciável de classe C^∞. Se f for diferenciável em todo ponto $p \in M$, diremos simplesmente que F é uma aplicação diferenciável. Uma aplicação diferenciável $F : M \to N$ é chamada um difeomorfismo se F é bijetiva e F^{-1} também é diferenciável.

Agora introduziremos o conceito de Espaço Tangente.

Definição 1.1.3. *Seja $\gamma : I \to M$ uma curva diferenciável com $\gamma(t_0) = p$. Denotemos por*

$$D_p(M) = \{f : M \to R : f\,\textit{é diferenciável em}\;\; p\}$$

o espaço vetorial das funções reais em M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva γ em p é a função $\gamma'(t_0) : D_p(M) \to \mathbb{R}$ definida por $\gamma'(t_0)f = (f \circ \gamma)'(t_0)$.

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM.

Observação 1.1.1. *Pode-se mostrar que se M é uma variedade diferenciável de dimensão n, então T_pM é um espaço vetorial n-dimensional.*

Uma base para T_pM pode ser dada escolhendo uma carta local $x : U \to x(U)$ em p e considerando as aplicações $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(p) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ definidas por,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p)f = \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ x(x^{-1}(p))$$

Assim, as aplicações $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(p)$ de acordo com a definição, são vetores tangentes a M em p e o conjunto $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ forma uma base para T_pM.

Proposição 1.1.1. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e seja $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \phi \circ \alpha$. A aplicação $d\phi_p : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ definida por $d\phi_p(v) = \beta'(0)$ não depende da escolha de α.*

Definição 1.1.4. *A aplicação linear $d\phi_p$ dada pela proposição anterior é chamada diferencial de ϕ em p.*

Podemos ver os vetores tangentes a M em p de outro modo:

Definição 1.1.5. *Seja M uma variedade suave e $p \in M$. A aplicação linear $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, definida no conjunto de todas as funções infinitamente diferenciáveis em uma vizinhança de p é chamada de derivação em p se satisfaz a regra do produto,*

$$X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$$

para toda f, $g \in C^\infty(M)$ e X_p é chamado um vetor tangente a M em p.

O conjunto de todas as derivações de em p possui estrutura de espaço vetorial, e pode ser mostrado que este conjunto coincide com T_pM chamado *espaço tangente* a M em p, denotado por T_pM.

O *fibrado tangente* TM é definido por $TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$. É possível mostrar que TM possui estrutura de variedade diferenciável de dimensão $2n$.

Definição 1.1.6. *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$, em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. O campo X é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável.*

O conjunto de todos os campos diferenciáveis sobre M será denotado por $\mathcal{T}(M)$.

Definição 1.1.7. *Dadas duas variedades diferenciáveis M e N, um ponto $p \in M$, e uma aplicação diferenciável $f : M \to N$, a derivada de f em p, denotada por df_p, é a aplicação linear de T_pM em $T_{f(p)}N$ que, para cada $X_p \in T_pM$ e $g \in D_{f(p)}(N)$ é definida por*

$$(df_p \cdot X_p)(g) = X_p(g \circ f).$$

Também podemos denotar a derivada de f em p por f'.

Definição 1.1.8. *Um ponto $p \in M$ é chamado um ponto regular de $f : M \longrightarrow N$ quando a derivada $f'(p) : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ é injetiva. Caso contrário, p é chamado um ponto singular ou crítico de f.*

Definição 1.1.9. *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow N$ é uma imersão se $f'(p) : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset N$, donde $f(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que f é um mergulho.*

Exemplo 1.1.1. *A curva* $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ *é uma imersão* $\alpha : R \longrightarrow R^2$ *que possui uma auto-intersecção para* $t = 0$. *Portanto* α *não é um mergulho.*

Na maior parte das questões puramente locais de Geometria é indiferente tratar com imersões ou mergulhos. Isto provém da seguinte proposição que mostra ser toda imersão localmente um mergulho.

Proposição 1.1.2. *Sejam* $f : M_1 \to M_2$, $n \leq m$, *uma imersão da variedade* M_1 *na variedade* M_2. *Para todo ponto* $p \in M_1$, *existe uma vizinhança* $V \subset M_1$ *de* p *tal que a restrição* $f\mid_V \to M_2$ *é um mergulho.*

Definição 1.1.10. *Dados dois campos* $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, *o campo vetorial* $[X, Y]$ *definido por,*

$$[X, Y]_p f = (XY - YX)f = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

é chamado colchete.

Agora vamos definir a noção de métrica em uma variedade diferenciável.

Definição 1.1.11. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável* M *é uma correspondência que associa a cada ponto de* p *de* M *um produto interno* $\langle , \rangle_p$ *no espaço tangente* T_pM. *Por conveniência denotaremos algumas vezes como* $g\langle , \rangle = g\langle , \rangle_p$ *para a métrica Riemanniana.*

A definição acima exige que a métrica $\langle , \rangle_p$ varie diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \to x(U)$ é um sistema de coordenadas locais em $p \in x(U)$, para cada $q = x(x_1, ..., x_m) \in x(U)$, devemos ter que a função $g_{ij} : x(U) \to R$ dada por $g_{ij}(x_1, \ldots, x_m) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$ seja uma função diferenciável para todo $i, j = \{1, \ldots, m\}$.

Definição 1.1.12. *As funções* $g_{ij}(x_1, ..., x_m) = \left\langle \frac{\partial(q)}{\partial x_i}, \frac{\partial(q)}{\partial x_j} \right\rangle_q$ *são chamadas expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas* x. *Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana é chamada variedade Riemanniana .*

Proposição 1.1.3. *Toda variedade diferenciável* M *(de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

Demonstração. Veja [9], p. 47. □

Definição 1.1.13. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$$

denotada por $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ *e que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

em que $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$. O símbolo $\nabla_X Y$ lê-se: derivada covariante de Y na direção de X.

Definição 1.1.14. *Quando a conexão afim satisfaz as propriedades:*

(i) $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$,

(ii) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,

dizemos que a conexão ∇ é uma conexão de Levi-Civita (ou Rimanniana).

Teorema 1.1 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão de Levi-Civita em M.*

Demonstração. Veja [9] p. 61. □

Observação 1.1.2. *Dado um sistema de coordenadas (U, x), o item (ii) da definição 1.1.14 implica que para ∇ ser simétrica implica que para todo $i, j = 1, ..., n$ temos,*

$$\nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i = [X_i, X_j] = 0, \qquad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Definição 1.1.15. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ dada por,*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \qquad Z \in \mathcal{T}(M)$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Observação 1.1.3. *Se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$. De fato, consideremos $\{e_1, ..., e_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$, dados $X, Y, Z \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$, podemos escrever*

$$X = \sum_{i=1}^n X_i e_i, Y = \sum_{i=1}^n Y_i e_i, Z = \sum_{i=1}^n Z_i e_i\,,$$

então

$$\nabla_Y Z \;=\; \nabla_Y\left(\sum_{i=1}^n Z_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n Z_i\nabla_Y e_i + \sum_{i=1}^n [Y(Z_i)]\, e_i = \sum_{i=1}^n [Y(Z_i)]\, e_i$$

onde usamos que a derivada covariante de um campo constante na direcção de qualquer campo é nula. Segue que,

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \left\{ \sum_{i=1}^{n} [Y(Z_i)]\, e_i \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} Y(Z_i) \nabla_X e_i + \sum_{i=1}^{n} X[Y(Z_i)] e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} X[Y(Z_i)] e_i \,.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \sum_{i=1}^{n} Y[X(Z_i)] e_i \,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &= \sum_{i=1}^{n} X[Y(Z_i)] e_i - \sum_{i=1}^{n} Y[X(Z_i)] e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{X[Y(Z_i)] - Y[X(Z_i)]\} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{[X,Y](Z_i)\} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{[X,Y](Z_i)\} e_i + \sum_{i=1}^{n} Z_i \nabla_{[X,Y]} e_i \\ &= \nabla_{[X,Y]} Z \,.\end{aligned}$$

Segue que,

$$0 = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = R(X,Y)Z.$$

Esta observação ilustra que, intuitivamente a curvatura R mede o quanto uma variedade Riemanniana M deixa de ser euclidiana.

Proposição 1.1.4. *A curvatura R em M tem as seguintes propriedades;*

1. *R é tensorial em $\mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M)$, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

para todo $f, g \in C^\infty$, *e* $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{T}(M)$

2. *Para todo par* $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, *o operador curvatura* $R(X,Y) : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ *é tensorial, isto é,*

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W$$

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$$

com $f \in C^\infty(M)$, $Z, W \in \mathcal{T}(M)$

3. *(Primeira identidade de Bianchi)*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

Demonstração. Veja [9] pág. 100 e 101 □

Dada uma variedade Riemanniana (M, g) com uma curvatura R, usaremos a notação $(X, Y, Z, T) = g(R(X,Y)Z, T)$, além disso se $p \in M$ e $\{e_1, \ldots, e_m\}$ uma base ortonormal de T_pM denotaremos $R_{ijkl} = g(R(e_i, e_j)e_k, e_l)$

Proposição 1.1.5. *Para quaisquer campos* $X, Y, Z, T \in \mathcal{T}(M)$ *temos as seguintes propriedades:*

1. $(X,Y,Z,T) + (Y,Z,X,T) + (Z,X,Y,T) = 0$
2. $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$
3. $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$
4. $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$

Demonstração. Veja [9] pág. 102 □

Proposição 1.1.6. *Seja* $\sigma \subset T_pM$ *um subespaço bi-dimensional do espaço* T_pM *e sejam* $X, Y \in \sigma$ *dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(X,Y) = \frac{(X,Y,X,Y)}{|X \wedge Y|^2},$$

onde $|X \wedge y|^2 = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - g(X,Y)^2}$, *é independente da escolha dos vetores* $X, Y \in \sigma$

Demonstração. Veja [9] pág. 104. □

Definição 1.1.16. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real $K(X,Y) = K(\sigma)$, onde $\{X,Y\}$ é uma base qualquer de σ é chamado curvatura seccional de σ em p.*

Definição 1.1.17. *Seja M uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura de Ricci de M (ou tensor de Ricci) denotado por Ric, é o campo tensorial covariante de ordem 2 definido como o traço em relação à métrica do tensor curvatura no seu primeiro e último índices. Portanto, as componentes da curvatura de Ricci são dadas por*

$$R_{ij} = \sum_{k,m=1}^{n} g^{km} R_{kijm}$$

Note que, pelas simetrias de tensor curvatura, mudanças de traços só alteram o sinal da curvatura de Ricci.

Definição 1.1.18. *Seja M uma variedade Riemanniana. A curvatura escalar de M, denotada por S, é a função real $S : M \longrightarrow R$ definida como o traço em relação à métrica do tensor de Ricci:*

$$S = tr_g Ric = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ij}$$

Definição 1.1.19. *Sejam M^n e $\overline{M}^{n+k}$ $(k \geq 1)$ variedades Riemannianas. Uma imersão $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é dita isométrica se $\langle d\phi_p(v), d\phi_p(w)\rangle_{\overline{M}} = \langle v, w\rangle_M, \forall v, w \in T_pM$.*

Dada uma imersão isométrica $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$, podemos estabelecer relações entre objetos definidos em ambas as variedades. Recordemos que, se $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é uma imersão, então ϕ é localmente um mergulho. Nestas condições, podemos identificar um aberto U de M com $\phi(U)$, e dizer que ϕ é localmente a aplicação de inclusão. Mais ainda, podemos considerar U como uma subvariedade de M. Em particular, estamos identificando $p \in U$ com $\phi(p) \in \phi(U)$.

Consequentemente, para cada $p \in M$, o espaço tangente T_pM é considerado um subespaço vetorial de $T_p\overline{M}$ de dimensão n, como acima.

Assim, se considerarmos o espaço k-dimensional $T_pM^{\perp} = \{v \in T_p\overline{M} : \langle u, v\rangle = 0, \ \forall u \in T_pM\}$, podemos escrever

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}.$$

O espaço $T_pM^{\perp}$ é chamado de espaço normal à M em p. assim, podemos definir, o fibrado normal como segue

$$TM^{\perp} = \{(p, N_p)\,|\, p \in M,\ N_p \in T_pM^{\perp}\} = \bigcup_{p\in M} T_pM^{\perp}.$$

Um campo de vetores normal N é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um vetor em $T_pM^{\perp}$. Dizemos que $N \in TM^{\perp}$ é diferenciável se ele for localmente a restrição à $TM^{\perp}$ de algum campo de vetores diferenciável em $\overline{M}$. Indicaremos por $\mathcal{T}(M)^{\perp}$ os campos de vetores diferenciáveis normais à M.

Se $\phi|_U$ é um mergulho, sejam X e Y campos de vetores tangentes em $U \subset M$, como $\phi|_U$ é mergulho tomemos extensões locais $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ de X e Y em $\overline{M}$, respectivamente, numa vizinhança de $U \subset \overline{M}$. Assim, se $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$, faz sentido calcularmos $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$. Pode-se mostrar que $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ não depende das extensões $\overline{X}$, $\overline{Y}$ de X e Y respectivamente, portanto, por simplicidade denotaremos $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ por $\overline{\nabla}_XY$. Assim, podemos escrever

$$\overline{\nabla}_XY = (\overline{\nabla}_XY)^{\top} + (\overline{\nabla}_XY)^{\perp}.$$

No entanto, é possível verificar que $(\overline{\nabla}_{.}.)^{\top}$ é a própria conexão de Levi-Civita de M (que denotaremos por ∇), isto é, $(\overline{\nabla}_XY)^{\top} = \nabla_XY$.
Denotemos por $\mathcal{T}(M^n)^{\perp}$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis normais à M^n. A *segunda forma fundamental* da imersão ϕ é a aplicação $II : \mathcal{T}(M^n)\times\mathcal{T}(M^n) \to \mathcal{T}(M^n)^{\perp}$, definida por

$$II(X,Y) = \overline{\nabla}_XY - \nabla_XY, \quad \forall X, Y \in \mathcal{T}(M^n).$$

Uma vez que, para todo $p \in M^n$, II é uma aplicação bilinear simétrica, então, para cada vetor unitário N normal à M^n em p, podemos associá-la a uma aplicação linear auto-adjunta $S_N : T_pM^n \to T_pM^n$, dada por

$$\langle S_N(X), Y\rangle = \langle II(X,Y), N\rangle, \ \ \forall X, Y \in T_pM^n.$$

Daí, vamos definir a *curvatura média* H da imersão $\phi : M^n \to \mathbb{R}$ por

$$H = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(S_N).$$

Aqui $\mathrm{tr}(S_N)$ significa o traço da matriz da aplicação S_N.

Sejam $N \in \mathcal{T}(M^n)^{\perp}$ e X, $Y \in \mathcal{T}(M^n)$. Então $\langle N, Y\rangle = 0$. Isto implica que

$$\langle\overline{\nabla}_XY, N\rangle = \langle-\overline{\nabla}_XN, Y\rangle.$$

Daí

$$\langle S_N(X), Y\rangle = \langle II(X,Y), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle = \langle -\overline{\nabla}_X N, Y\rangle, \tag{1.1}$$

pois $\langle II(X,Y), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - (\nabla_X Y)^T, N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle$.

Agora, sabendo que $nH = \mathrm{tr}(S_N)$ e que cada entrada da matriz S_N é dada por

$$\langle S_N(e_i), e_j\rangle = \langle II(e_i, e_j), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, N\rangle,$$

podemos escrever nH da seguinte forma:

$$nH = \sum_{i=1}^{n} \langle S_N(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N\rangle. \tag{1.2}$$

Apresentaremos agora uma ferramenta muito importante para o estudo das hipersuperfícies estáveis com curvatura média constante conhecido por Primeira formula de Minkowski. Antes, porém, fixemos algumas notações.

Proposição 1.1.7. *Seja M uma variedade diferenciável munida de uma conexão ∇. Então existe uma única conexão*

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}_l^k(M) \longrightarrow \mathcal{T}_l^k(M)$$

em cada $\mathcal{T}_l^k(M)$ tal que:

1. *Em $\mathcal{T}_1(M) = \mathcal{T}(M)$ coincide com a conexão dada.*
2. *Em $\mathcal{T}_0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$,*
$$\nabla_X f = X(f)$$
3. *∇ satisfaz a regra do produto com relação a produtos tensoriais :*
$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$$
4. *∇ comuta com todos os traços: se tr denota o traço com relação a qualquer par de índices, então*
$$\nabla_X(trF) = tr(\nabla_X F)$$

Além disso, esta conexão satisfaz também as propriedades adicionais:

(a) Para todo $Y \in \mathcal{T}(M)$ e $\mathcal{T}^1(M)$ vale

$$\nabla_X[w(Y)] = (\nabla_X w)(Y) + w(\nabla_X Y)$$

.

(b) Para todo $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$*,* $X_i \in \mathcal{T}(M)$ *e* $w^j \in \mathcal{T}^1(M)$ *vale*

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)(X_1, ..., X_k, w^1, ..., w^l) &= X(T(X_1, ..., X_k, w^1, .., w^l)) \\ &- \sum_{i=1}^{k} T((X_1, ..., \nabla_X X_i, \ldots, X_k, w^1, \ldots, w^l)) \\ &- \sum_{j=1}^{l} T((X_1, ..., X_k, w^1, ..., \nabla_X w^j, ..., w^l))\end{aligned}$$

Definição 1.1.20. *Seja* M *uma variedade diferenciável munida de uma conexão* ∇*. Dado um campo* (k,l)*-tensorial* $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$*, a derivada covariante total de* T *é o campo* $(k+1,l)-$ *tensorial*

$$\nabla T : \underbrace{\mathcal{T}_1(M) \times \ldots \times \mathcal{T}_1(M)}_{(k+1)-vezes} \times \underbrace{\mathcal{T}^1(M) \times \ldots \times \mathcal{T}^1(M)}_{l-vezes} \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

definido por

$$\nabla T(Y_1, ..., Y_k, w^1, ..., w^l) = \nabla_X T(Y_1, ..., Y_k, w^1, ..., w^l).$$

Definição 1.1.21. *Seja* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$*. O campo tensorial (ou tensor) covariante de ordem 2,* $\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$ *em* M*, dado por* $\nabla(\nabla f)(X,Y) = Y((\nabla f)(Y)) - \nabla f(\nabla_Y X)$*,* $\forall X, Y \in \mathcal{T}(M)$ *é chamado de Hessiana de f.*

Definição 1.1.22. *Seja* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$*. O laplaciano de* f *é a função real definida por:*

$$\Delta f = tr_g \nabla^2 f.$$

Proposição 1.1.8. *Seja* M *uma variedade riemanniana e* ∇ *a sua conexão de Levi-Civita (riemanniana). Então*

$$\nabla^2 f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle \tag{1.3}$$

onde ∇f *do lado direito da equação é o campo vetorial identificado com a 1-forma* ∇f*.*

Definição 1.1.23. *Seja* $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$*;* $\varphi(M) \subset \overline{M}$ *é então denominada uma hipersuperfície.*

Dada uma hipersuperfície $\varphi : M \to R^{n+1}$ vamos denotar por ∇ e $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de M e R^{n+1}, respectivamente. Do mesmo modo, denotaremos a diferencial covariante de uma função (ou gradiente) definida em M por ∇ e para uma função definida em R^{n+1} por $\overline{\nabla}$. Nestas condições, também será denotado por ∇^2 e $\overline{\nabla}^2$ o hessiano e por Δ e $\overline{\Delta}$ o laplaciano de uma função. O gradiente ∇ de uma função diferenciável f denotará tanto a 1-forma como o campo de vetores identificado a ∇f, e o significado de ∇f ficará claro no contexto.

Seja F uma função diferenciável definida sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $M \subset U$ uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$. Associe a $p \in M$, uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n, N\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, de modo que N seja normal a M em p. Se considerarmos $f = F|_M$, então $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e assim ∇f coincide com a componente tangencial do campo $\overline{\nabla} f$, ou seja, para cada ponto $p \in M$ temos

$$\nabla f(p) = \overline{\nabla} F(p) - \langle F(p), N(p) \rangle N(p), \tag{1.4}$$

e assim pela equação (1.1) para quaisquer X, $Y \in T_pM$, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X,Y) &= \langle \overline{\nabla}_X \nabla f, Y \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla} F, Y \rangle - \langle \overline{\nabla}_X \langle \overline{\nabla} F, N \rangle N, Y \rangle \\ &= \overline{\nabla}^2 F(X,Y) - \langle X(\langle \overline{\nabla} F, N \rangle) N + \langle \overline{\nabla} F, N \rangle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle \\ &= \overline{\nabla}^2 F(X,Y) + \langle \overline{\nabla} F, N \rangle \langle S_N(X), Y \rangle. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Na penúltima igualdade usamos que X, Y são normais a N.

Exemplo 1.1.2. *Dado $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ considere a função $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(y) = \frac{1}{2} ||y - c||^2$$

note que

$$\overline{\nabla} F(y) = y - c$$

e

$$\overline{\nabla}^2 F(w, v) = v(\overline{\nabla} F(w)) - \overline{\nabla}(\overline{\nabla}_v w) = \langle w, v \rangle, \qquad \forall\, y, v, w \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dada hipersuperfície $\phi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, considere $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = F|_M(p) = \frac{1}{2}||p - c||^2$. Aqui estamos identificando M com $\phi(M)$ e p com $\phi(p) \in \mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $f(p) = F(\phi(p))$. As equações (1.4) e (1.5)implicam :

$$\nabla f = (p - c) - \langle p - c, N \rangle N = (p - c)^\top$$

e

$$\nabla^2 f(X,Y) = \langle X,Y\rangle + \langle S_N(X),Y\rangle\langle p-c,N\rangle,\ \forall X,\ Y\ \in\ T_pM.$$

Teorema 1.1.1 (Primeira Formula de Minkowski)**.** *Seja $\phi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície mergulhada, compacta e orientada. Então*

$$\int_M (1+H\langle p,N\rangle)dS = \frac{1}{n}\int_{\partial M}\frac{\partial f}{\partial \nu}$$

onde $p=\phi(p)$ e H é a curvatura média de ϕ.

Demonstração. Considere $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \frac{1}{2}||\phi(p)||^2$ e uma base de T_pM formada por direções principais $\{e_1,...,e_n\}_p$. Então, pelo Exemplo 1.1.2, temos que

$$\nabla^2 f(e_i,e_i) = \langle e_i,e_i\rangle - \langle S_N(e_i),e_i\rangle\langle p,N\rangle = 1 + k_i\langle x,N\rangle \tag{1.6}$$

onde k_i são as curvaturas principais de M em p. Mostremos que $\Delta f = n(1+H\langle p,N\rangle)$. Somando em $i=1,\ldots,n$ na equação (1.6) temos

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{i=1}^{n}(1+k_i\langle p,N\rangle)\\ &= n + \textstyle\sum_{i=1}^{n} k_i\langle p,N\rangle\\ &= n + nH\langle p,N\rangle\\ &= n(1+H\langle p,N\rangle).\end{aligned}$$

agora integrando ambos os lados,

$$\int_M \Delta f\cdot 1\mathrm{dvol}_{R^{n+1}} = n\int_M (1+H\langle p,N\rangle)\,\mathrm{dvol}_{R^{n+1}}$$

e usando a Fórmula de Green

$$-\int_M \nabla f\cdot\nabla 1\mathrm{dvol}_{R^{n+1}} + \int_{\partial M}\frac{\partial f}{\partial\nu} = n\int_M (1+H\langle p,N\rangle)\,\mathrm{dvol}_{R^{n+1}}$$

entao,

$$\begin{aligned}\int_{\partial M}\frac{\partial f}{\partial\nu} &= n\int_M (1+H\langle p,N\rangle)\,\mathrm{dvol}_{R^{n+1}}\\ \frac{1}{n}\int_{\partial M}\frac{\partial f}{\partial\nu} &= \int_M (1+H\langle p,N\rangle)\,\mathrm{dvol}_{R^{n+1}}\end{aligned}$$

□

Definição 1.1.24. *Seja M uma hipersuperfície do $\mathbb{R}^{n+1}$ e $p\in M$, dizemos que p é um ponto umbílico de M se toda as curvaturas principais em p são iguais.*

Definição 1.1.25. *Seja M uma hipersuperfície do $\mathbb{R}^{n+1}$, dizemos que M é uma hipersuperfície umbílica se todo ponto $p \in M$ for um ponto umbílico.*

Teorema 1.1.2. *Seja $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica umbílica de uma variedade Riemanniana conexa M^n em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então, $\phi(M)$ esta contida em um hiperplano ou, $\phi(M)$ esta contida em uma esfera. Além disso, se a hipersuperfície for compacta, ela é igual à esfera .*

Capítulo

2

Variações de área e estabilidade

Neste capítulo, expressaremos as fórmulas de primeira e segunda variação de área. Nosso objetivo é obter, a partir destas fórmulas, consequências geométricas e assim definir de maneira natural a noção de estabilidade de uma hipersuperfície.

Seja $\Sigma \subset B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável e $\varphi : \Sigma \to B$ uma imersão. A segunda forma fundamental A de Σ, é o endomorfismo $A(X,Y) = -(\nabla_X Y)^N$, com $X, Y \in T\Sigma$. O vetor curvatura média de Σ é definida por $H = \dfrac{1}{n}\mathrm{Tr}A$.

Definição 2.0.26. *Uma variação de $\Sigma \subset B$ é uma família de imersões $\phi : \Sigma \times [0, \epsilon) \to B$ tal que $\phi(x, 0) = x$ para todo $x \in \Sigma$ satisfazendo $\phi(\partial\Sigma, \cdot) = \phi(\Sigma, \cdot) \cap \partial B$. Dizemos que a variação é própria (ou de bordo fixo) se $\phi(x, \cdot) = x$ para todo $x \in \partial\Sigma$.*
Um campo $X \in (T\Sigma)$ dado por $X(x) = d\varphi_{(x,0)}\dfrac{d}{dt}$ é chamado campo variacional da variação ϕ.
Se $\phi(x, \cdot) = x$ para todo $x \in K^c$ onde, $K \subset\subset \Sigma$ é um conjunto compacto, dizemos que a variação tem suporte compacto.

Uma variação é dita normal quando o campo variacional é da forma $\xi = f(p)N(p)$, para alguma função $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ suave, onde $N(p)$ é o vetor normal a Σ em $\phi(p, 0)$. Então é natural considerar as seguinte funções:

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_\Sigma \mathrm{dvol}_{\Sigma_t} \\ V(t) &= \int_{\Sigma\times[0,t]} \phi^*\mathrm{dvol}_{\mathbb{R}^{n+1}} \end{aligned}$$

onde dvol_{Σ_t} é o elemento volume de Σ_t na métrica inducida por ϕ_t e $\mathrm{dvol}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ é o elemento volume canônico de $\mathbb{R}^{n+1}$. $V(t)$ representa o volume com sinal delimitado pelas hipersuperfícies $\phi(\cdot,0)$ e $\phi(\cdot,t)$. Dizemos que a variação ϕ preserva volume se $V(t)\equiv V(0)$, $\forall t\in(0,\epsilon)$.

2.1 Primeira Variação de Área

Teorema 2.1 (Primeira Variação de Área)**.** *Seja $\phi:\Sigma\times(0,\epsilon)\to M$ uma variação de $\Sigma\subset M$ cujo campo variacional será denotado por X. Suponhamos que Σ é orientável e compacta Então*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} A(t) = -\int_\Sigma g(X,H)\mathrm{dvol}_{\Sigma_0} + \int_{\partial\Sigma} g(X,\nu)ds,$$

em que ν é o campo normal exterior ao bordo de Σ e tangente a Σ, caso $\partial\Sigma\neq\emptyset$; dvol_{Σ_0} *é o elemento de volume de Σ e ds é o elemento de área de $\partial\Sigma$.*

Demonstração. Seja (x_i) uma carta local sobre Σ e nesta carta definamos $g_{ij}(t)=g(\phi_{x_i},\phi_{x_j})$, $\phi_{x_i}:=d\phi_{(x,t)}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Denote o elemento de volume de $\phi(\Sigma,t)$ por $\mathrm{dvol}_{\Sigma_t}:=\sqrt{\det(g_{ij}(t))}dx$. Faça $\nu_t=\sqrt{\det(g_{ij}(t))}\sqrt{\det(g^{ij}(0))}$, se $\hat{g}_{ij}$ são os coeficientes da métrica de Σ induzidas pela carta $\hat{x}_i$, então pelo lema A.7 temos que .

$$\det(g_{ij}(t))\det(g^{ij}(0)) = \det(\hat{g}_{ij}(t))\det(\hat{g}^{ij}(0))$$

Daí,

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_\Sigma \mathrm{dvol}_{\Sigma_t} \\ &= \int_\Sigma \sqrt{\det(g_{ij}(t))}\sqrt{\det(g^{ij}(0))\det(g_{ij}(0))}dx \\ &= \int_\Sigma \nu_t\sqrt{\det(g_{ij}(0))}dx \\ &= \int_\Sigma \nu_t \mathrm{dvol}_{\Sigma_0} \end{aligned}$$

Assim para calcular $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(t)$, basta calcular $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}\nu_t$, pois

$$\frac{d}{dt}A(t) = \int_\Sigma \frac{d}{dt}\nu_t\sqrt{\det(g^{ij}(0))}dx.$$

Agora, para calcular $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}\nu_t$ em algum ponto $x\in\Sigma$, escolhemos uma carta em Σ de modo que, em x, tenha-se $g_{ij}(0)=\delta_{ij}$ e portanto $\sqrt{\det(g_{ij}(0))}=\sqrt{\det(g^{ij}(0))}=1$; temos que, $\nabla_{\phi_t}\phi_{x_i} - \nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t = [\phi_t, \phi_{x_i}] = 0$. Com isso obtemos, em x, que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \nu_t &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sqrt{\det(g_{ij}(t))}\sqrt{\det(g^{ij}(0))} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij}(0))}} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det(g_{ij}(t)) \\
&= \frac{1}{2}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det(g_{ij}(t)) \\
&= \frac{1}{2} tr(g'_{ij}(0)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(\phi_{x_i}, \phi_{x_i}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} 2g(\nabla_{\phi_t}\phi_{x_i}, \phi_{x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} g(\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_{x_t}, \phi_{x_i})
\end{aligned}$$

Em $t = 0$, $\phi_t = X$, assim

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \nu_t &= \sum_{i=1}^{k} g(\nabla_{\phi_{x_i}} X, \phi_{x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} g(\nabla_{\phi_{x_i}} X^T, \phi_{x_i}) + \sum_{i=1}^{k} g(\nabla_{\phi_{x_i}} X^N, \phi_{x_i}) \\
&= div_\Sigma X^T + div_\Sigma X^N \\
&= div_\Sigma X^T - g(X, H)
\end{aligned}$$

Pelo Teorema A.4 no apêndice , temos

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(t) &= \int_\Sigma div_\Sigma X^T - g(X,H)\mathrm{dvol}_{\Sigma_0} \\
&= \int_\Sigma div_\Sigma X^T \mathrm{dvol}_{\Sigma_0} - \int_\Sigma g(X,H)\mathrm{dvol}_{\Sigma_0} \\
&= \int_{\partial\Sigma} g(\nu, X^T) ds - \int_\Sigma g(X,H)\mathrm{dvol}_{\Sigma_0} \\
&= \int_{\partial\Sigma} g(\nu, X) ds - \int_\Sigma g(X,H)\mathrm{dvol}_{\Sigma_0}
\end{aligned}$$

Onde usamos que $g(\nu, X^T) = g(\nu, X)$ pois, ν é um campo tangente a Σ e portanto $g(\nu, X^N) = 0$. $\square$

Corolário 2.1. *Se Σ é compacta (se ela tiver bordo, suponha que a variação seja própria) ou se a variação tem suporte compacto, então*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(t) = -\int_{\Sigma} g(X,H)\mathrm{dvol}_{\Sigma_0}$$

Definição 2.1. *Uma subvariedade imersa, $\Sigma^k \subset M^n$, é dita de mínima, se seu campo de curvatura média é identicamente nulo. De outro modo, Σ é mínima se, e somente se, ela for um ponto crítico do funcional volume, para qualquer variação de suporte compacto.*

Observação 2.1. *Se $\Sigma^k \subset M^n$ é uma subvariedade imersa e orientada, então $\int_\Sigma div_\Sigma X = 0$ para todo campo vetorial, X, ao longo de Σ, com suporte compacto ou tal que $X \mid_{\partial\Sigma} \equiv 0$ (caso $\partial\Sigma \neq \emptyset$) se, e somente se, Σ é subvariedade mínima.*

Demonstração. Tem-se

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma div_\Sigma X \mathrm{dvol}_{\Sigma_t} &= \int_\Sigma div_\Sigma X^T \mathrm{dvol}_{\Sigma_t} + \int_\Sigma div_\Sigma X^N \mathrm{dvol}_{\Sigma_t} \\
&= \int_{\partial\Sigma} g(X^T,\nu)\mathrm{dvol}_{\Sigma_t} - \int_\Sigma g(X,H)\mathrm{dvol}_{\Sigma_t} \\
&= -\int_\Sigma g(X,H)\mathrm{dvol}_{\Sigma_t}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\int_\Sigma div_\Sigma X \mathrm{dvol}_{\Sigma_t} = 0$ para todo X nas hipóteses se, somente se, $H = 0$. □

Observação 2.2. *Suponha que $\Sigma^k \subset M^n$ esteja imersa e seja X um campo vetorial sobre M, então*

$$\begin{aligned}
div_\Sigma X &= div_\Sigma X^T + div_\Sigma X^N \\
&= div_\Sigma X^T - g(X,H).
\end{aligned}$$

Portanto, $div_\Sigma X = div_\Sigma X^T$ para todos os campos vetoriais sobre M se, e somente se, Σ é mínima.

Corolário 2.2 (Harmonicidade das funções coordenadas)**.** *$\Sigma^k \subset \mathbb{R}^n$ será mínima se, e somente se, as restrições das funções coordenadas de $\mathbb{R}^n$ sobre Σ forem funções harmônicas.*

Demonstração. Seja $\eta \in C_0^\infty(\Sigma)$, então ηe_i é um campo sobre Σ com suporte compacto

2.1, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Sigma div_\Sigma(\eta e_i) \\
&= \int_\Sigma \langle \nabla_\Sigma \eta, e_i\rangle + \eta div_\Sigma e_i \\
&= \int_\Sigma \langle \nabla_\Sigma \eta, e_i\rangle \\
&= \int_\Sigma \langle \nabla_\Sigma \eta, \nabla_{\mathbb{R}^n} x_i\rangle \\
&= \int_\Sigma \langle \nabla_\Sigma \eta, (\nabla_{\mathbb{R}^n} x_i)^T + (\nabla_{\mathbb{R}^n} x_i)^N\rangle \\
&= \int_\Sigma \langle \nabla_\Sigma \eta, (\nabla_{\mathbb{R}^n} x_i)^T\rangle \\
&= \int_\Sigma \langle \nabla_\Sigma \eta, \nabla_\Sigma x_i\rangle.
\end{aligned}$$

Pela primeira fórmula de Green,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial\Sigma} \eta\langle \nabla_\Sigma x_i, \nu\rangle - \int_\Sigma \eta \Delta_\Sigma x_i \\
&= -\int_\Sigma \eta\Delta_\Sigma x_i.
\end{aligned}$$

Como η é qualquer, $\Delta_\Sigma x_i = 0$. $\square$

2.2 Segunda variação de área

Teorema 2.2 (Segunda Variação de Área)**.** *Suponha que $\Sigma^k \subset M^n$ seja uma subvariedade mínima. Seja ϕ uma variação normal de Σ com suporte compacto e cujo campo variacional seja X, então*

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} A(t) &= -\sum_{i,j=1}^{k}\int_\Sigma g(A(\partial_i,\partial_j),X)^2 \mathrm{dvol}_{\Sigma_0} \\
&+\int_\Sigma |\nabla_\Sigma^N X|^2 \mathrm{dvol}_{\Sigma_0} \\
&-\sum_{i=1}^{k}\int_\Sigma g(R_M(X,\partial_i)\partial_i, X)\mathrm{dvol}_{\Sigma_0}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Como antes, sejam (x_i) coordenadas locais sobre Σ, $g_{ij}(t) = g(\phi_{x_i}, \phi_{x_j})$ e $\nu_t = \sqrt{\det(g_{ij}(t))}\sqrt{\det(g^{ij}(0))}$. Então,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} A(t) &= \int_\Sigma \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \nu_t \sqrt{\det(g_{ij}(0))}dx \\ &= \int_\Sigma \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \nu_t \mathrm{dvol}_{\Sigma_0} \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Pelo lema (A.1.1)do apêndice e a regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sqrt{\det g(t)} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\det g(t)}}\frac{d}{dt}\det g(t) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\det g(t)}} tr[g'_{ij}(t)g^{lm}(t)].\end{aligned}$$

Daí, multiplicando os dois lados por $\sqrt{\det(g^{ij}(0))}$ temos

$$2\frac{d}{dt}\nu_t = tr(g'_{ij}(t)g^{lm}(t))\nu_t.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}2\frac{d^2}{dt^2}\nu_t &= \frac{d}{dt}\{tr[g'_{ij}(t)g^{lm}(t)]\nu_t\} \\ &= \frac{d}{dt}\{tr[g'_{ij}(t)g^{lm}(t)]\}\nu_t + tr[g'_{ij}(t)g^{lm}(t)]\frac{d}{dt}\nu_t \\ &= tr[g''_{ij}(t)g^{lm}(t) + g'_{ij}(t)(g^{lm})'(t)]\nu_t + tr[g'_{ij}(t)g^{lm}(t)]\frac{d}{dt}\nu_t \\ &= tr[g''_{ij}(t)g^{lm}(t) + g'_{ij}(t)(g^{lm})'(t)]\nu_t + tr[g'_{ij}(t)g^{lm}(t)]\frac{1}{2}tr[g'_{ij}(t)g^{lm}(t)]\frac{d}{dt}\nu_t \\ &= tr[g''_{ij}(t)g^{lm}(t) + g'_{ij}(t)(g^{lm})'(t)]\nu_t + \frac{1}{2}\{tr[g'_{ij}(t)g^{lm}(t)]\}^2\nu_t \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Para avaliar $\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0}\nu_t$ em algum ponto $x \in \Sigma$, pode-se escolher o sistema de coordenadas (x_i) ortonormal em x. Diferenciando $g^{lk}(t)g_{km}(t) = \delta_{lm}$, obtém-se $(g^{lk})'(t)g_{km}(t) + g^{lk}(t)g'_{km}(t) = 0$, daí, $(g^{lk})'(0) = -\delta_{lk}g'_{km}(0)$ e portanto, $(g^{lk})'(0) = -\delta_{lm}g'_{lm}(0)$. Usando (2.2). tem-se

$$2\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0}\nu_t = tr[g''_{ij}(0)] - tr[g'_{ij}(0)g'_{lm}(0)] + \frac{1}{2}\{tr[g'_{ij}(0)]\}^2. \qquad (2.3)$$

Por outro lado, usando que

$$\nabla_{\phi_t}\phi_{x_i} - \nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t = [\phi_t, \phi_{x_i}] = 0, \tag{2.4}$$

que a variação é normal e que a segunda forma fundamental é simétrica, encontra-se

$$\begin{aligned}
g'_{ij}(0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(\phi_{x_i}, \phi_{x_j}) \\
&= \phi_t g(\phi_{x_i}, \phi_{x_j}) \\
&= g(\nabla_{\phi_t}\phi_{x_i}, \phi_{x_j}) + g(\phi_{x_i}, \nabla_{\phi_t}\phi_{x_j}) \\
&= g(\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t, \phi_{x_j}) + g(\phi_{x_i}, \nabla_{\phi_{x_j}}\phi_t) \\
&= \phi_{x_i} g(\phi_t, \phi_{x_j}) - g(\phi_t, \nabla_{\phi_{x_i}}\phi_{x_j}) + \phi_{x_j} g(\phi_{x_i}, \phi_t) - g(\nabla_{\phi_{x_j}}\phi_{x_i}, \phi_t) \\
&= -g(\phi_t, \nabla_{\phi_{x_i}}\phi_{x_j}) - g(\nabla_{\phi_{x_j}}\phi_{x_i}, \phi_t) \\
&= -g(\phi_t, (\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_{x_j})^N) - g((\nabla_{\phi_{x_j}}\phi_{x_i})^N, \phi_t) \\
&= -g(\phi_t, A(\phi_{x_i}, \phi_{x_j})) - g(A(\phi_{x_j}, \phi_{x_i}), \phi_t) \\
&= -2g(\phi_t, A(\phi_{x_i}, \phi_{x_j})). \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
tr[g'_{ij}(0)] &= \sum_i g'_{ii}(0) \\
&= \sum_i -2g(\phi_t, A(\phi_{x_i}, \phi_{x_j})) \\
&= -2g\left(\phi_t, \sum_i A(\phi_{x_i}, \phi_{x_i})\right) \\
&= -2g(\phi_t, H) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois Σ é mínima. Usando isso em (2.3) obtém-se

$$2\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \nu_t = tr[g''_{ij}(0)] - tr[g'_{ij}(0) g'_{lm}(0)] \tag{2.6}$$

Note que, em x, tem-se

$$\begin{aligned}
tr[g''_{ij}(0)] &= \sum_{i=1}^{k} g''_{ii}(0) \\
&= \sum_{i=1}^{k} 2g(\phi_{x_i tt}, \phi_{x_i}) + 2g(\phi_{x_i t}, \phi_{x_i t}) \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Usando (2.4), tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} g(\phi_{x_i tt}, \phi_{x_i}) &= \sum_{i=1}^{k} g(\nabla_{\phi_t}\nabla_{\phi_t}\phi_{x_i}, \phi_{x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} g(\nabla_{\phi_t}\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t, \phi_{x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} g(\nabla_{\phi_t}\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t - \nabla_{\phi_{x_i}}\nabla_{\phi_t}\phi_t - \nabla_{[\phi_t,\phi_{x_i}]}\phi_t, \phi_{x_i}) + \sum_{i=1}^{k} g(\nabla_{\phi_{x_i}}\nabla_{\phi_t}\phi_t, \phi_{x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} g(R_M(\phi_t, \phi_{x_i})\phi_t, \phi_{x_i}) + div_\Sigma(\phi_{tt}).
\end{aligned}$$

Substituindo em (2.7),

$$\begin{aligned}
tr[g''_{ij}(0)] &= 2\sum_{i=1}^{k} g(R_M(\phi_t, \phi_{x_i})\phi_t, \phi_{x_i}) + 2div_\Sigma(\phi_{tt}) + 2\sum_{i=1}^{k} g(\phi_{x_i t}, \phi_{x_i t}) \\
&= 2\sum_{i=1}^{k} g(R_M(\phi_t, \phi_{x_i})\phi_t, \phi_{x_i}) + 2div_\Sigma(\phi_{tt}) \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{k} g(\phi^T_{x_i t}, \phi^T_{x_i t}) + 2\sum_{i=1}^{k} g(\phi^N_{x_i t}, \phi^N_{x_i t}) \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Usando (2.4) e que a variação é normal, em x, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} g(\phi_{x_it}^T, \phi_{x_it}^T) &= \sum_{i=1}^{k} g((\nabla_{\phi_t}\phi_{x_i})^T, (\nabla_{\phi_t}\phi_{x_i})^T) \\
&= \sum_{i=1}^{k} g((\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t)^T, (\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t)^T) \\
&= \sum_{i=1}^{k} g\left(\sum_{j=1}^{k} g(\nabla_{\phi_{x_i}})\phi_t, \phi_{x_j})\phi_{x_j}, \sum_{i=1}^{k} g(\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t, \phi_{xl})\phi_{xl}\right) \\
&= \sum_{i,j,l=1}^{k} g(\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t, \phi_{x_j}) g(\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t, \phi_{x_l}) g(\phi_{x_j}, \phi_{x_l}) \\
&= \sum_{i,j,l=1}^{k} g(\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t, \phi_{x_j}) g(\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t, \phi_{x_l}) \delta_{jl} \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} g(\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t, \phi_{x_j})^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \{\phi_{x_i} g(\phi_t, \phi_{x_j}) - g(\phi_t, \nabla_{\phi_{x_i}}\phi_{x_j})\}^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \{g(\phi_t, \nabla_{\phi_{x_i}}\phi_{x_j})\}^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} g(\phi_t, (\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_{x_j})^N)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} g(A(\phi_{x_i}, \phi_{x_j}), \phi_t)^2 \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Também note, usando (2.4), que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} g(\phi_{x_it}^N, \phi_{x_it}^N) &= \sum_{i=1}^{k} g((\nabla_{\phi_t}\phi_{x_i})^N, (\nabla_{\phi_t}\phi_{x_i})^N) \\
&= \sum_{i=1}^{k} g((\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t)^N, (\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t)^N) \\
&= \sum_{i=1}^{k} |(\nabla_{\phi_{x_i}}\phi_t)^N|^2 \\
&= |(\nabla_{\Sigma}^N\phi_t)^N|^2 \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.9) e (2.10) em (2.8), tem-se

$$\begin{aligned} tr[g''_{ij}(0)] &= 2div_\Sigma(\phi_{tt}) + 2\sum_{i=1}^{k} g(R_M(\phi_t, \phi_{x_i})\phi_t, \phi_{x_i}) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{k} g(A(\phi_{x_i}, \phi_{x_j}), \phi_t)^2 + 2|\nabla_\Sigma^N \phi_t|^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Usando (2.5)

$$\begin{aligned} tr(g'_{ij}(0)g'_{lm}(0)) &= \sum_{i,j=1}^{k} g'_{ij}(0)g'_{ji}(0) \\ &= \sum_{i,j=1}^{k} g'_{ij}(0)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{k} [-2g(A(\phi_{x_i}, \phi_{x_j}), \phi_t]^2 \\ &= 4\sum_{i,j=1}^{k} g(A(\phi_{x_i}, \phi_{x_j}), \phi_t)^2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Substituindo (2.11) e (2.12) em (2.6) encontra-se

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \nu_t &= -\sum_{i,j=1}^{k} g(A(\phi_{x_i}, \phi_{x_j}), \phi_t)^2 + |\nabla_\Sigma^N \phi_t|^2 \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} g(R_M(\phi_t, \phi_{x_i})\phi_{x_i}, \phi_t) + div_\Sigma(\phi_{tt}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Substituindo (2.13) em (2.1) e usando a observação 2.1,

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} A(t) &= -\sum_{i,j=1}^{k} \int_\Sigma g(A(\phi_{x_i}, \phi_{x_j}), \phi_t)^2 \mathrm{dvol}_{\Sigma_0} \\ &\quad + \int_\Sigma |\nabla_\Sigma^N \phi_t|^2 \mathrm{dvol}_{\Sigma_0} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} \int_\Sigma g(R_M(\phi_t, \phi_{x_i})\phi_{x_i}, \phi_t) \mathrm{dvol}_{\Sigma_0}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Denotando por $\phi_t = X$ e $\phi_{x_i} = \partial_i$ em $t = 0$ concluímos o Teorema. $\square$

Definição 2.2 (Estabilidade)**.** *Dizemos que uma hipersuperfície mínima,* $\Sigma_k \subset B^n$, *é* *estável se, para todas as variações próprias* ϕ *de* Σ*, tem-se* $A''(0) \geq 0$.

Capítulo

3

Hipersuperfícies estáveis CMC com fronteira livre sobre uma bola euclidiana

Seja B um domínio compacto convexo com $\mathbb{R}^{n+1}$, com fronteira ∂B não vazia. Seja Σ uma hipersuperfície compacta com fronteira $\partial\Sigma$ não vazia. Seja $\varphi : \Sigma^n \to B$ uma imersão de uma variedade orientável suave Σ tal que $\varphi(\partial\Sigma) = \varphi(\Sigma) \cap \partial B$.
Fixando um campo de vetores unitários normais da hipersuperfície Σ por N, e denotando por A como a segunda forma fundamental de Σ sendo o endomorfismo $A(X) = -\nabla_X N$ donde $X \in T\Sigma$. Além disso, vamos denotar por ν como o vetor normal exterior de $\partial\Sigma$ em Σque aponta para fora de Σ. A curvatura media de Σ é dada por $H = \dfrac{1}{n} TrA$.

Definição 3.0.1. *Uma hipersuperfície $\Sigma \subset B$ é de fronteira livre se Σ intersecta ∂B ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma$.*

A seguir alguns exemplos de hipersuperfícies de curvatura media constante (CMC), com fronteira livre, (aqui escrever os EXEMPLOS....)

Agora apresentaremos ás noções de estabilidade para hipersuperfícies de curvatura media constante (CMC) com fronteira livre. Lembrando a definição 2.0.26 consideramos a variação suave $\phi : \Sigma \times [0, \epsilon) \to B$ tal que $\phi(x, 0) = x$ para todo $x \in \Sigma$, podemos definir a seguintes funções:

$$A(t) = \int_\Sigma dvol_{\Sigma_t}$$

e

$$V(t) = \int_{\Sigma \times [0,t)} \phi^* dvol_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

onde $V(t)$ representa o volume delimitado pelas hipersuperfícies φ e ϕ_t. Além disso, vamos dizer que ϕ é de volume preservado quando $V(t) \equiv V(0)$, para todo t.
Seja

$$\xi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x)\bigg|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,0)$$

como o vetor variação de ϕ e definamos a função f por

$$f(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,0), N(x) \right\rangle \quad , \quad x \in \Sigma$$

Denotando ν como a norma exterior ao longo de $\partial\Sigma$ e por ds como o elemento volume de $\partial\Sigma$ induzido por φ. Fixando um campo de vetores unitarios normais da hipersuperfícies Σ por N, e denotando por A como a segunda forma fundamental de Σ sendo o endomorfismo $A(x) = -\nabla_X N$, $X \in T\Sigma$, e a curvatura media de Σ é dada por $H = \frac{1}{n}TrA$.
Então como foi feito no capítuo 2 e em [4], as fórmulas de primeira variação podem ser escritas como segue:

$$A'(0) = -n\int_{\Sigma} Hf dvol_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} f\langle N, \nu\rangle ds$$

e

$$V'(0) = \int_{\Sigma} f dvol_{\Sigma}$$

onde $dvol_{\Sigma} = dvol_{\Sigma_0}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Segue que a imersão φ é ponto crítico do funcional área $A(t)$ para variações que preservam volume constante, serão as hipersuperfícies Σ de curvatura media constante com fronteira livre. Para cada função $f \in C^{\infty}(\Sigma)$ sob Σ com $\int_{\Sigma} f dvol_{\Sigma} = 0$. Fazendo como no capítulo anterior e em [4] para qualquer variação de volume preservado, temos que a fórmula da segunda variação de área é dada por :

$$I(f,f) = \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 - |A_{\Sigma}|^2 f^2 dvol_{\Sigma} - \int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) f^2 ds \geq 0.$$

Em [4], Ros e Vergasta estudaram hipersuperfícies CMC estáveis com fronteira livre quando B é uma bola, e mostraram o seguinte resultado:

Teorema 3.1 (Ros - Vergasta). *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ uma bola fechada, com $n \geq 3$. Seja $\Sigma \subset B$ uma hipersuperfície estável de fronteira livre CMC cuja fronteira está mergulhada em B. Se L denota o comprimento da fronteira de $\partial\Sigma$, A é a área de Σ e vale $L \geq nA$, então Σ é totalmente geodésica ou estrelada com respeito ao centro da bola.*

Para melhorar o resultado acima, E. Barbosa usou um lema de estabilidade tipo Nunes para mostrar que a desigualdade $L \geq nA$ é sempre satisfeita. Mais precisamente, ele obteve o seguinte resultado:

Teorema 3.2 (Ezequiel Barbosa). *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, uma bola fechada. Seja $\Sigma \subset B$ uma hipersuperfície estável de fronteira livre CMC em B, então*

$$nA \leq L \leq nA\left(\frac{1+\sqrt{1+4(n+1)H^2}}{2}\right).$$

Em particular, se $\partial\Sigma$ está mergulhado, temos que Σ é totalmente geodésica ou estrelada com respeito ao centro da bola.

Como uma consequência direta deste teorema, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 3.1. *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, uma bola fechada. Se $\Sigma \in B$ é uma hipersuperfície estável CMC com fronteira livre mergulhada em B e $0 \in \Sigma$, então Σ é totalmente geodésica.*

Note que para $n = 3$ obtemos uma classificação topológica completa para superfícies de fronteira livre cuja fronteira está mergulhada (ver teorema 11 em [4]).

Corolário 3.2. *Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola fechada. Se $\Sigma \in B$ é uma superfície estável de fronteira livre CMC, então Σ é um disco totalmente geodésico ou uma calota esférica.*

É importante mencionar que o corolário 3.2 foi mostrado por I. Nunes [5] usando um importante resultado de estabilidade e um argumento de balanceamento tipo Hersch modificado para obter um melhor controle sobre o gênero e o número de componentes conexas da fronteira da superfície. De fato, I. Nunes provou um resultado mais geral que, junto com o teorema 11 em [4], nós dá o resultado acima como corolário.

Teorema 3.3 (I. Nunes). *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^3$ um domínio convexo, compacto e suave. Suponha que a segunda forma fundamental $\Pi^{\partial\Omega}$ de $\partial\Sigma$ satisfazendo a condição de pinzada*

$$kh \geq \Pi^{\partial\Omega} \geq \left(\frac{3}{2}\right) kh,$$

para alguma constante $k > 0$, onde h denota a métrica de $\mathbb{R}^3$ induzida sobre $\partial\Omega$. Se $\Sigma \subset \Omega$ é uma superfície estável CMC compacta orientável, e mergulhada de fronteira livre, então Σ tem gênero zero e Σ tem no máximo duas componentes conexas.

A fim de provar o teorema 3.2, E. Barbosa usou a mesma ideia que foi aplicada por I. Nunes na prova do resultado principal para o caso de superfícies com fronteira livre em [5]. I. Nunes mostrou que a estabilidade de uma superfície CMC de fronteira livre implica que a forma quadrática dada pela segunda variação de área é não-negativa para toda função f tal que $f = 0$ sobre $\partial\Sigma$ independentemente de ser satisfeita a condição $\int_\Sigma f \mathrm{dvol}_\Sigma = 0$ ou não. É esse resultado que chamamos o Lema de Estabilidade de tipo Nunes.

Então I. Nunes foi capaz de aplicar o argumento de balanceamento tipo Herch para obter um melhor controle sobre o gênero de Σ. E. Barbosa usa essa mesma ideia para dimensão maior ou igual a 3, combinada com alguns resultados de Ros-Vergasta.

3.1 Lema de Estabilidade do tipo Nunes

Lema 3.4 (**Lema de Estabilidade tipo Nunes**). *Seja Σ uma hipersuperfície estável imersa em B, com uma curvatura média constante e com fronteira livre.*

Se $f \in C^\infty(\Sigma)$ é tal que $f(x) = 0, \ \forall \ x \in \partial\Sigma$, então

$$I(f,f) = \int_\Sigma |\nabla f \ |^2 - \ |A_\Sigma \ |^2 f^2 dvol_\Sigma \geq \frac{1}{n+1}\left(\frac{\int_\Sigma f dvol_\Sigma}{A}\right)^2 \int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) ds$$

Em particular, se $f \in C^\infty(\Sigma)$ é tal que $f(x) = 0$, então

$$I(f,f) = \int_\Sigma |\nabla f \ |^2 - \ |A_\Sigma \ |^2 f^2 dvol_\Sigma \geq 0$$

Demonstração. Seja f_i uma função teste, tal que $f_i = \langle e_i, N\rangle$ donde $\{e_i\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\Delta f_i + |A_\Sigma|^2 f_i = 0 \tag{3.1}$$

Como Σ é estável, sustituir em

$$I(f,f) = \int_\Sigma | \ \nabla f \ |^2 - | \ A_\Sigma \ |^2 \ f^2 dvol_\Sigma - \int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) f^2 ds$$

então, temos

$$I(f_i,f_i) = \int_\Sigma | \ \nabla f_i \ |^2 - | \ A_\Sigma \ |^2 \ f_i^2 dvol_\Sigma - \int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) f_i^2 ds$$

daí somando em i

$$\sum_{i=1}^{n+1} I(f_i,f_i) = \int_\Sigma \sum_{i=1}^{n+1} |\nabla f_i|^2 - |A_\Sigma|^2 f_i^2 dvol_\Sigma - \int_{\partial\Sigma} \sum_{i=1}^{n+1} \Pi(N,N) f_i^2 ds$$

Por outro lado, usando a afirmação 3.1

$$0 = \int_{\Sigma} (f_i \Delta f_i + |A_\Sigma|^2 f_i^2) dvol_\Sigma$$

Daí usando a fórmula de Green

$$0 = -\int_{\Sigma} |\nabla f_i|^2 dvol_\Sigma + \int_{\partial\Sigma} f_i \frac{\partial f_i}{\partial \nu} ds + \int_{\Sigma} |A_\Sigma|^2 f_i^2 dvol_\Sigma$$

então,temos

$$\int_{\Sigma} |\nabla f_i|^2 dvol_\Sigma - \int_{\Sigma} |A_\Sigma|^2 f_i^2 dvol_\Sigma = \int_{\partial\Sigma} f_i \frac{\partial f_i}{\partial \nu} ds$$

logo somando em i e somando ambos os lados $-\int_{\partial\Sigma} \sum_{i=1}^{n+1} \Pi(N,N) f_i^2 ds$

$$\int_{\Sigma} \sum_{i=1}^{n+1} |\nabla f_i|^2 - |A_\Sigma|^2 f_i^2 dvol_\Sigma - \int_{\partial\Sigma} \sum_{i=1}^{n+1} \Pi(N,N) f_i^2 ds = \int_{\partial\Sigma} \sum_{i=1}^{n+1} \left(f_i \frac{\partial f_i}{\partial \nu} - \Pi(N,N) \right) ds$$

então

$$\sum_{i=1}^{n+1} I(f_i, f_i) = \int_{\partial\Sigma} \sum_{i=1}^{n+1} f_i \frac{\partial f_i}{\partial \nu} - \Pi(N,N) f_i^2 ds \tag{3.2}$$

como $\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 = |N|^2 = 1$, ($f_i = \langle e_i, N \rangle$ se e somente se $N = f_1 e_1 + \cdots + f_{n+1} e_{n+1}$),

$$\frac{\partial}{\partial \nu} 1 = \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 \right)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial \nu} (f_i^2) = \sum_{i=1}^{n+1} 2 f_i \frac{\partial}{\partial \nu} f_i$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial \nu} (f_i^2) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \frac{\partial}{\partial \nu} f_i$$

daí 3.2 fica como segue

$$\sum_{i=1}^{n+1} I(f_i, f_i) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial \nu} (f_i)^2 ds - \int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) f_i^2 ds$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} I(f_i, f_i) &= -\int_{\partial\Sigma} \sum_{i=1}^{n+1} \Pi(N,N) f_i^2 ds \\ &= -\int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) f_i ds\end{aligned}$$

Afirmamos que dado $f \in C^{\infty}(\Sigma)$ tal que $f(x) = 0, \forall x \in \partial\Sigma$ então existe $i \in \{1, \cdots, n+1\}$ tal que

$$I(f_i, f_i) \leq -\frac{1}{n+1} \int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) ds \quad e \quad f_i \neq f \tag{3.3}$$

De fato, suponhamos que a afirmação é falsa , isto é $\forall i \in \{1, \cdots, n+1\}$ temos

$$I(f_i, f_i) > -\frac{1}{n+1} \int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) ds \quad e \quad f_i = f \tag{3.4}$$

Somando $I(f_i, f_i)$ de 1 até $n+1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} I(f_i, f_i) = I(f_1, f_1) + \cdots + I(f_{n+1}, f_{n+1})$$

Suponhamos, sem perda de generalidade que a condição 3.4 é válida para m elementos, onde m são os m primeiros

$$\sum_{i=1}^{n+1} I(f_i, f_i) = I(f_1, f_1) + \cdots + I(f_m, f_m) + I(f_{m+1}, f_{m+1}) + \cdots + I(f_{n+1}, f_{n+1})$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} I(f_i, f_i) > -\frac{m}{n+1} \int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) ds \quad , \quad m \leq n+1$$

e os $I(f_i, f_i)$ com $i = m+1, \cdots, n+1$ são zero, por cálculos feitos anteriormente

$$-\int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) ds = \sum_{i=1}^{n+1} I(f_i, f_i) > -\frac{m}{n+1} \int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) ds$$

$$-\int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) ds > -\frac{m}{n+1} \int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) ds$$

$$\left(\frac{m}{n+1} - 1\right) \int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N) ds > 0$$

$\dfrac{m}{n+1} > 1$ implica $m > n+1$ o que é uma contradição poi $m \leq n+1$.
Portanto, seja f_i satisfazendo a condição 3.3. Note-se que a estabilidade de Σ implica que

$\int_\Sigma f_i dvol_\Sigma \neq 0$.
Caso contrario teriamos que $\int_\Sigma f_i dvol_\Sigma = 0$ daí $I(f_i, f_i) \geq 0$.
Suponha que $\int_\Sigma f dvol_\Sigma \neq 0$ e considere a função $\overline{f} = c \cdot f$ donde

$$c = \frac{\int_\Sigma f_i dvol_\Sigma}{\int_\Sigma f dvol_\Sigma}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq I(\overline{f} - f_i, \overline{f} - f_i) \\ &\leq I(\overline{f}, \overline{f}) - 2I(\overline{f}, f_i) + I(f_i, f_i) \\ &= c^2 I(f, f) - 2I(\overline{f}, f_i) + I(f_i, f_i) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} I(\overline{f}, f_i) &= I(c \cdot f, f_i) \\ &= c \cdot I(f, f_i) \\ &= c \cdot \left(\int_\Sigma \nabla f \cdot \nabla f_i - A_\Sigma^2 \cdot f \cdot f_i dvol_\Sigma - \int_{\partial\Sigma} \Pi(N, N) f \cdot f_i ds \right) \\ &= c \cdot \left(-\int_\Sigma (\Delta f_i) f + \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \nu} \right) f - \int_\Sigma A_\Sigma^2 \cdot f \cdot f_i dvol_\Sigma - \int_{\partial\Sigma} \Pi(N, N) f \cdot f_i ds \right) \\ &= c \cdot \left(-\int_\Sigma \left((\Delta f_i) f + A_\Sigma^2 \cdot f \cdot f_i \right) dvol_\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \nu} \right) f - \int_{\partial\Sigma} \Pi(N, N) f \cdot f_i ds \right) \\ &= c \cdot \left(-\int_\Sigma f \left((\Delta f_i) + A_\Sigma^2 \cdot f_i \right) dvol_\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \nu} \right) f - \int_{\partial\Sigma} \Pi(N, N) f \cdot f_i ds \right) \\ &= 0 \\ &= I(\overline{f}, f_i) \end{aligned}$$

Usando em 3.5 tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\leq c^2 I(f, f) + I(f_i, f_i) \\ &< c^2 I(f, f) - \frac{1}{n+1} \int_{\partial\Sigma} \Pi(N, N) ds \end{aligned}$$

Então

$$\frac{\frac{1}{n+1} \int_{\partial\Sigma} \Pi(N, N) ds}{c^2} < I(f, f) \tag{3.6}$$

reemplazando o valor de c em 3.6

$$\frac{\frac{1}{n+1}\int_{\partial\Sigma}\Pi(N,N)ds}{\left(\frac{\int_\Sigma f_i dvol_\Sigma}{\int_\Sigma f dvol_\Sigma}\right)^2} < I(f,f)$$

daí

$$I(f,f) > \left(\frac{\int_\Sigma f_i dvol_\Sigma}{\int_\Sigma f dvol_\Sigma}\right)^2 \frac{1}{n+1}\int_{\partial\Sigma}\Pi(N,N)ds \tag{3.7}$$

Usando a Desigualdade de Holder com $p = 2 = q$ e $\sum_i^{n+1} f_i^2 = |N|^2 = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Sigma f_i dvol_\Sigma\right)^2 &= \left|\int_\Sigma f_i dvol_\Sigma\right|^2 \leq \left(\int_\Sigma |f_i| dvol_\Sigma\right)^2 \\
&\leq \left[\left(\int_\Sigma |f_i|^2 dvol_\Sigma\right)^{1/2}\left(\int_\Sigma 1^2 dvol_\Sigma\right)^{1/2}\right]^2 \\
&= \left(\int_\Sigma |f_i|^2 dvol_\Sigma\right)\cdot A \\
&\leq A\cdot A \\
&= A^2
\end{aligned}$$

então

$$\left(\int_\Sigma f_i dvol_\Sigma\right)^2 \leq A^2$$

reemplazando a desigualdade em 3.7, obtemos

$$I(f,f) \geq \frac{1}{n+1}\left(\frac{\int_\Sigma f dvol_\Sigma}{A}\right)^2 \int_{\partial\Sigma}\Pi(N,N)ds$$

o que finaliza a prova.

□

3.2 Demonstração do teorema principal

Teorema 3.5 (Ezequiel Barbosa). *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, uma bola fechada. Seja $\Sigma \subset B$ uma hipersuperfície estável com fronteira livre CMC em B, então*

$$nA \leq L \leq nA\left(\frac{1+\sqrt{1+4(n+1)H^2}}{2}\right)$$

Em particular, se $\partial\Sigma$ está mergulhado, então Σ é totalmente geodésica ou estrelada com respeito ao centro da bola.

Demonstração. Suponhamos que $\Sigma \subset B$ é uma hipersuperfície estável de fronteira livre, e seja $u = \langle \psi, N \rangle$ a função suporte de Σ, onde ψ é uma imersão de Σ em B, $|\sigma|^2$ é o quadrado da norma da segunda forma fundamental de Σ com respeito a N o que satisfaz a seguinte equação,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u + |\sigma|^2 u & = & -nH, & \Sigma \\ u & = & 0, & \partial\Sigma \end{array} \right. . \tag{3.8}$$

Além disso, tomando a divergência da componente tangente $\psi - uN$

$$div(\psi - uN) = n + nHu \tag{3.9}$$

integrando ambos os lados temos

$$\int_{\partial\Sigma} div(\psi - uN) ds = \int_{\Sigma} (n + nHu) dvol_{\Sigma}$$

$$\int_{\partial\Sigma} \langle \psi - uN, \nu \rangle ds = n \int_{\Sigma} (1 + Hu) dvol_{\Sigma}$$

ν é a normal a $\partial\Sigma$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \langle \psi, \nu \rangle ds &= n \int_{\Sigma} (1 + Hu) dvol_{\Sigma} \\ &= n \left(A + \int_{\Sigma} Hudvol_{\Sigma} \right) \end{aligned}$$

segue do teorema da divergência A.4, que

$$L = n \left(A + \int_{\Sigma} Hudvol_{\Sigma} \right) \tag{3.10}$$

Desde que $u = 0$ em $\partial\Sigma$ e pela estabilidade de Σ. Primeiro , multiplicando por u à primeira equação de 3.8

$$-nHu = u\Delta u + |\sigma|^2 u^2$$

agora integrando e usando Green

$$\begin{aligned} -\int_\Sigma nHudvol_\Sigma &= \int_\Sigma u\Delta u + |\sigma|^2u^2dvol_\Sigma \\ &= \int_{\partial\Sigma}\frac{\partial u}{\partial\nu}\cdot uds - \int_\Sigma |\nabla u|^2dvol_\Sigma + \int_\Sigma |\sigma|^2u^2dvol_\Sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\Sigma nHudvol_\Sigma &= \int_\Sigma |\nabla u|^2dvol_\Sigma - \int_\Sigma |\sigma|^2u^2dvol_\Sigma \\ &= I(u,u) \end{aligned}$$

e pelo Lema de estabilidade de tipo Nunes

$$I(u,u) \geq 0$$

isto é

$$nH\cdot\int_\Sigma udvol_\Sigma = \int_\Sigma |\nabla_\Sigma u|^2 - |\sigma|^2u^2dvol_\Sigma \geqslant 0$$

Note que se $H=0$ então $L=nA$.
Primeiro como foi feito por Ros- Vergasta em [4] mostraremos que $u\geqslant 0$ ou $u\leqslant 0$ sobre Σ.
Suponhamos por contradição que u muda de sinal. Consideremos Σ^+ e Σ^- subconjuntos de Σ onde u é positivo e definimos $u^+, u^- \in H^1(\Sigma)$ por

$$u^+(p) = \begin{cases} u(p) & se \quad p\in\Sigma^+ \\ 0 \quad se & p\in\Sigma\setminus\Sigma^+ \end{cases}.$$

e

$$u^-(p) = \begin{cases} u(p) & se \quad p\in\Sigma^- \\ 0 \quad se & p\in\Sigma\setminus\Sigma^- \end{cases}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
I(u^+,u^+) &= \int_\Sigma \langle \nabla_\Sigma u^+, \nabla_\Sigma u^+\rangle - |\sigma|^2 (u^+)^2 dvol_\Sigma \\
&= \int_\Sigma \langle \nabla_\Sigma u, \nabla_\Sigma u^+\rangle - |\sigma|^2 u \cdot u^+ dvol_\Sigma \\
&= -\int_\Sigma \Delta u \cdot u^+ dvol_\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u^+ ds - \int_\sigma |\sigma|^2 u \cdot u^+ dvol_\Sigma \\
&= -\int_\Sigma \left(\Delta u + |\sigma|^2 u\right) u^+ dvol_\Sigma \\
&= -\int_\Sigma (-nH)\, u^+ dvol_\Sigma \\
&= nH \int_\Sigma u^+ dvol_\Sigma
\end{aligned}$$

então, tem-se

$$I(u^+,u^+) = nH \int_\Sigma u^+ dvol_\Sigma$$

e analogamente

$$I(u^-,u^-) = nH \int_\Sigma u^- dvol_\Sigma$$

Agora definamos $\tilde{u} = u^+ + au^-$, onde a é uma constante positiva tal que $\int_\Sigma \tilde{u} dvol_\Sigma = 0$ e além disso $\tilde{u}$ não é identicamente nula e

$$\begin{aligned}
I(\tilde{u},\tilde{u}) &= I(u^+ + au^-, u^+ + au^-) \\
&= I(u^+,u^+) + aI(u^-,u^+) + aI(u^+,u^-) + a^2 I(u^-,u^-) \\
&= I(u^+,u^+) + 2aI(u^-,u^+) + a^2 I(u^-,u^-) \\
&= nH \int_\Sigma u^+ dvol_\Sigma + 2a \int_\Sigma \langle \nabla u^-, \nabla u^+\rangle - |A_\Sigma|^2 u^- u^+ dvol_\Sigma + a^2 nH \int_\Sigma u^- dvol_\Sigma \\
&= a\left(\frac{1}{a} nH \int_\Sigma u^+ dvol_\Sigma + nH \int_\Sigma au^- dvol_\Sigma\right) \\
&= a\left(\frac{1}{a} nH \int_\Sigma u^+ dvol_\Sigma - nH \int_\Sigma u^+ dvol_\Sigma\right) \\
&= a\left(-nH \int_\Sigma u^- dvol_\Sigma - nH \int_\Sigma u^+ dvol_\Sigma\right) \\
&= -anH \int_\Sigma u^- + u^+ dvol_\Sigma \\
&= -anH \int_\Sigma u dvol_\Sigma
\end{aligned}$$

Como em Ros-Vergasta em [4], obtemos isso ou $u \geq 0$ ou $u \leq 0$ sobre Σ. Podemos escolher

a orientação em Σ tal que $u \geq 0$.
Desde que $H \neq 0$ e $\int_\Sigma HudA \geq 0$ nós conseguimos que $H > 0$. Portanto, u satisfaz: $u \geq 0, u = 0$ em $\partial\Sigma$ e $\Delta u = |\sigma|^2 u - nH < 0$. Pelo principio do máximo para funções subarmônicas, obtemos que u é estrictamente positiva no $int\Sigma$. Então $\int_\Sigma udvol_\Sigma \neq 0$. Resulta do Lema de Estabilidade de Nunes, que

$$\begin{aligned}\int_\Sigma |\nabla_{\Sigma u}|^2 - |A_\Sigma|^2 u^2 dvol_\Sigma &\geq \frac{1}{n+1}\left(\frac{\int_\Sigma udvol_\Sigma}{A}\right)^2 \int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N)ds \\ &= \frac{L}{n+1}\left(\frac{\int_\Sigma udvol_\Sigma}{A}\right)^2\end{aligned}$$

Daqui obtemos

$$n\int_\Sigma Hudvol_\Sigma \geq \frac{L}{n+1}\left(\frac{\int_\Sigma udvol_\Sigma}{A}\right)^2 \tag{3.11}$$

desde que $n\int_\Sigma Hudvol_\Sigma = \int_\Sigma |\nabla_\Sigma u|^2 - |A_\Sigma|^2 u^2 dvol_\Sigma$. De (3.10) temos que

$$\frac{\int_\Sigma udvol_\Sigma}{A} = \frac{L - nA}{nHA}$$

Então, de (3.10) e (3.11), concluimos que

$$L = nA + nH\int_\Sigma udvol_\Sigma \geq nA + \frac{L}{n+1}\left(\frac{\int_\Sigma udvol_\Sigma}{A}\right)^2 = nA + \frac{L}{n+1}\left(\frac{L-nA}{nHA}\right)^2$$

Isto implica que,

$$L - nA \geq \frac{L}{n+1}\left(\frac{L-nA}{nHA}\right)^2$$

Portanto

$$L^2 - nAL - n^2A^2(n+1)H^2 \leq 0$$

O que implica

$$L \leq nA\left(\frac{1+\sqrt{1+4(n+1)H^2}}{2}\right)$$

□

Apêndice

$\mathcal{A}$

Apêndice

A.1 A derivada do determinante

Lema A.1. *Seja* $X(t) = (a_{ij}(t))$ *com,* $t \in I$*, uma família suave de matrizes* $n \times n$*, tais que* $X(0) = Id$*. Então*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det(X(t)) = tr(X'(0))$$

Demonstração. Seja

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

e

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Usando o desenvolvimento de Laplace para o determinante, temos

$$\det(X(t)) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} x_{1j}(t) X_{[1,j]}(t)$$

onde x_{1j} são os cofactores da matriz $X(t)$, e $X_{[1,j]}$ a matriz cofactor, para $j = 1, ..., n$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det(X(t)) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} x'_{1j}(0) X_{[1,j]}(0) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} x_{1j}(0) X'_{[1,j]}(0) \\
&= x'_{11}(0) + X'_{[1,1]}(0)
\end{aligned}$$

prosseguindo indutivamente

$$\begin{aligned}
&= x'_{11}(0) + x'_{22}(0) + X'_{[2,2]}(0) \\
&\vdots \\
&= x'_{11}(0) + x'_{22}(0) + \ldots + x'_{nn}(0) \\
&= Tr(X'(0))
\end{aligned}$$

□

Segue deste Lema o seguinte resultado.

Corolário A.1.1. *Seja $B(t) = (b_{ij}(t))$ uma família suave de matrizes invertíveis $n \times n$. Então para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$,*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} \det(B(t)) = tr(B'(s)B^{-1}(s)) \det(B(s))$$

Demonstração. Seja $X(t) = B(t)B^{-1}(s)$, e com $X(s) = Id$. Pelo lema de acima temos que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} \det(X(t)) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} \det(B(t)B^{-1}(s)) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} \det(B(t)) \det(B^{-1}(s)) \\
&= \det B^{-1}(s) \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} \det(B(t)) \\
&= [\det B(s)]^{-1} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} \det(B(t))
\end{aligned}$$

$$Tr(X'(s) = [\det B(s)]^{-1} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} \det(B(t))$$

Então

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} \det(B(t)) = Tr(B'(s)B^{-1}(s) \det B(s))$$

□

A.2 Resultados Auxiliares

Definição A.1. *Dizemos que o conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ é J-mensurável (mensurável segundo Jordan) quando, tomando um bloco $A \subset \mathbb{R}^n$ que contenha X, a função característica $\chi_X : A \to \mathbb{R}$ é integrável. Quando X é J-mensurável, seu volume (vol X) é, por definição, a integral de sua função característica:*

$$volX = \int_A \chi_X(x)dx.$$

Uma importante caracterização dos conjuntos J-mensuráveis é dada por:

Teorema A.2. *Um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ é J-mensurável se, e somente se, sua fronteira ∂X tem medida nula.*

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [11] p.364.

Teorema A.3 (Fórmula de Mudança de variáveis). *Sejam $h : U \to V$ um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^1$ entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$, $X \subset U$ um compacto J-mensurável e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det h'(x)|dx$$

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrado em [11], p.386.

Teorema A.4 (Teorema de Stokes). *Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional orientada, com fronteira ∂M, e seja w uma $(n-1)$-forma suave sobre M com suporte compacto. Então:*

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w.$$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [10], p.359. Os dois Teoremas abaixo são casos particulares do Teorema de Stokes.

Seja $\phi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta. Seja Ω uma região limitada de $\mathbb{R}^{n+1}$ cuja fronteira é M.

O elemento volume de $\mathbb{R}^{n+1}$ será denotado por $dvol_{\mathbb{R}^{n+1}}$ e o elemento de volume de M será denotado por ds.

Teorema A.5 (Teorema da Divergência). *Seja X um campo de vetores diferenciável no domínio compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e considere $M = \partial\Omega$ a hipersuperfície compacta formada pela fronteira de Ω. Então:*

$$\int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle ds = \int_{\Omega} divX dvol_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

Onde N é o campo normal exterior de M.

Teorema A.6 (Fórmulas de Green). *Sejam $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$, então:*

(i) $\int_\Omega \Delta f \mathrm{dvol}_{R^{n+1}} = \int_{\partial\Omega} \dfrac{\partial f}{\partial \nu} ds$

(ii) $\int_\Omega \nabla g \cdot \nabla f \mathrm{dvol}_{R^{n+1}} = -\int_\Omega f \Delta g \mathrm{dvol}_{R^{n+1}} + \int_{\partial\Omega} \dfrac{\partial g}{\partial \nu} \cdot f ds$

(iii) $\int_\Omega f\Delta g - g\Delta f \mathrm{dvol}_{R^{n+1}} = \int_{\partial\Omega} f\dfrac{\partial g}{\partial \nu} - g\dfrac{\partial f}{\partial \nu} ds$

Lema A.7. *Sejam (φ, U) e (ψ, V) cartas locais sobre Σ, com $U \cap V \neq \emptyset$.*

Escreva $\psi \circ \varphi^{-1}(x) = (\hat{x^1}(x), \ldots, \hat{x^k}(x))$. Da regra da cadeia, temos

$$(\psi \circ \varphi^{-1}) * e_j = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^i} e_i$$

Disso,

$$\begin{aligned}
g_{jl} &= g(\phi * \partial_j, \phi * \partial_l) \\
&= g(\phi * (\varphi^{-1}) * e_j, \phi * (\varphi^{-1}) * e_l) \\
&= g(\phi * (\psi^{-1}) * (\psi \circ \varphi^{-1}) * e_j, \phi * (\psi^{-1}) * (\psi \circ \varphi^{-1}) * e_l) \\
&= g\left(\phi * (\psi^{-1}) * \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} e_i, \phi * (\psi^{-1}) * \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^l} e_k\right) \\
&= \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} g(\phi * (\psi^{-1}) * e_i, \phi * (\psi^{-1}) * e_k) \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^l} \\
&= \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} g(\phi * \hat{\partial}_i, \phi * \hat{\partial}_k) \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^l} \\
&= \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} \hat{g}_{ik} \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^l}
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\det(g_{jl}) &= \det\left(\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}\hat{g}_{ik}\frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^l}\right) \\
&= \det(J\xi)^t \det(\hat{g}_{ik}) det(J\xi) \\
&= \det(J\xi)^2 \det(\hat{g}_{ik}).
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] J. L. Barbosa and M. do Carmo - **Stability of hypersurfaces of constant mean curvature**, Math. Zeitschrift, **185** (1984), 339-353.

[2] M. Dajczer - **Submanifolds and Isometric Immersions**, Mathematics Lecture Series **13**, Publish or Perish Inc. Houston, (1990).

[3] J. L. Barbosa, M. do Carmo and J. Eschenburg - **Stability of hypersurface of constant mean curvature in Riemannian manifolds**, Mathematische Zeitschrift **197**, (1988), 123-138.

[4] A. Ros and E. Vergasta - **Stability for Hypersurfaces of Constant Mean Curvature with Free Boundary**, Geometriae Dedicata, **56** (1995), 19-33.

[5] I. Nunes - **On stable constant mean curvature surfaces with free-boundary**, **2016**, (arXiv:1605,09625v1).

[6] Ezequiel Barbosa - **On stable CMC hypersurfaces with free-boundary in a euclidean ball,2016**, (arXiv:1607,00038v1).

[7] A. D. Aleksandrov (A. D. Alexandrow) - *A characteristic property of spheres*, Annali Mat Pura Appl. **58** (1962), 303-315.

[8] A. D. Aleksandrov (A. D. Alexandrow) - *Uniqueness theorems for surfaces in the large*, V, Vestnik Leningrad Univ. **13** (1958), 5-8; English transi, Amer. Math. Soc. Transi. (2) **21** (1962), pp. 412-416

[9] M. do Carmo - **Geometria Riemanniana**. 5 ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011.

[10] John M. LEE - **Introduction to Smooth Manifolds**, 2 ed. Graduate Texts in Mathematics 218. New York, Springer, 2012.

[11] E. L Lima, - **Curso de Análise**, Volume 2. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

[12] Munkres J. R., *Topology: a first course*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1975.

[13] Robert G. Bartle, - **The Elementos of Integration**, New York, J. Wiley, 1966.