UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS (ICEx)
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

POS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FUNÇÕES DE GREEN E APLICAÇÕES A PROBLEMAS ELÍPTICOS

ROY PERCY TOCTO GUARNIZ
Tese de Doutorado

BELO HORIZONTE,
8 de agosto de 2018.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS (ICEx)
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ROY PERCY TOCTO GUARNIZ

FUNÇÕES DE GREEN E APLICAÇÕES A PROBLEMAS ELÍPTICOS

Trabalho apresentado ao Programa de Pos-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: EMERSON ALVES MENDONÇA DE ABREU.

Belo Horizonte,
8 de agosto de 2018.

Agradecimentos

A minha mãe, pela ajuda e o apoio que sempre depositou em mim.

Ao meu orientador Emerson pela confiança desde o primeiro semestre de mestrado na matéria de *Análise no* $\mathbb{R}^N$, e logo pela disposição, paciência e o jeito eficaz de me orientar até a conclusão da minha dissertação de mestrado e agora minha tese de doutorado.

Aos professores que compartilharam os seus conhecimentos nas matérias que cursei, dos quais gostaria destacar: Marcos Montenegro, Luis Gustavo Farah e Rodney.

À CAPES pela bolsa de estudos.

“No final de nossos dias um acaba se arrependendo mais daquilo que não fez que daquilo que fez errado”.

Leonard Hofstadter

Resumo

Neste trabalho estudamos alguns problemas associados aos operadores elípticos laplaciano $(-\Delta)$ e poli-harmônico ($(-\Delta)^m$, $m \in \mathbb{N}$). No caso dos operadores poli-harmônico estamos interessados em problemas do tipo não homogêneos, cuja existência de soluções será provada mediante o estudo de suas respectivas funções de Green e argumentos de ponto fixo. Algumas características especificas destes problemas também serão exploradas.

No caso do operador laplaciano, estamos interessados em generalizações da desigualdade de Faber-Krahn com condições de fronteira do tipo Neumann. Esta desigualdade é bem conhecida no caso em que as condições de fronteira são do tipo Dirichlet. Mais precisamente, para qualquer domínio limitado de volume fixado, o menor autovalor possível para o problema de Dirichlet ocorre quando o domínio for uma bola.

Para problemas envolvendo o operador poli-harmônico, encontraremos uma solução no espaço anisotrópico $L^{\overrightarrow{r_0}}(\mathbb{R}^N)$ e mostraremos como o espaço muda segundo as mudanças das funções envolvidas no problema. Além disso, iremos falar de algumas propriedades qualitativas da solução, entre elas a positividade e simetria.

No caso do sistema de duas (resp. de n) equações iremos estudar a existência de uma solução no espaço $E = L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_0}(\mathbb{R}^N)$ (resp. $E = \underbrace{L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \times \cdots \times L^{r_0}(\mathbb{R}^N)}_{n-vezes}$ e algumas propriedades dessas soluções, como o fato das componentes da solução serem funções pares, positivas ou radiais, dependendo do comportamento das funções envolvidas no problema.

Palavras-chave: Funções de Green, Teorema do ponto fixo, espaços anisotrópicos.

Abstract

In this work we have studied some problems associated with the laplacian $(-\Delta)$, and poly-harmonic elliptic operators $((-\Delta)^m, m \in \mathbb{N})$. In the case of the poly-harmonic operators we are interested in problems of the non-homogeneous type, whose existence of solutions will be proved by the study of their respective Green functions and fixed-point arguments. Some specific characteristics of these problems will also be explored.

In the case of the Laplacian operator, we are interested in generalizations of the Faber-Krahn inequality with Neumann-type boundary conditions. This inequality is well known in the case where the boundary conditions are of the Dirichlet type. More precisely, for any bounded domain with fixed volume, the smallest possible eigenvalue for the Dirichlet problem occurs when the domain is a ball.

In the case of the poly-harmonic equation we will find a solution in the anisotropic space $L^{\overrightarrow{r_0}}(\mathbb{R}^N)$ and show how the space changes according to the changes of the functions involved in the problem, besides we will speak of some qualitative properties of the solution between them the positivity and symmetry.

For the case of system of two (resp. of n) equations we will study the existence of a solution in space $E = L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_0}(\mathbb{R}^N)$ (resp. $E = \underbrace{E = L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \times \cdots \times L^{r_0}(\mathbb{R}^N)}_{n-times}$ and some properties of these solutions as the fact that the components of the solution are even, positive or radial functions depending on the behavior of the functions involved in the problem.

Keywords: Green functions, fixed-point theorem, anisotropic spaces.

Sumário

Introdução

Um dos problemas clássicos na teoria das equações diferenciais parciais é o estudo do problema de autovalor para o operador Laplaciano. Neste tipo de problemas existem alguns tipos de condições de fronteira, uma das mais conhecidas sendo a condição de Neumann

$$(N_1)\ \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave,η o vetor normal exterior unitário na fronteira $\partial\Omega$.

Na primeira parte deste trabalho iremos abordar o seguinte problema

$$(N_2)\ \begin{cases} -\Delta u = V(x)u, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

com Ω e η como em (N_1) e $V \in L^\infty(\Omega)$.

O problema (N_2) é uma generalização do problema de autovalor (N_1). Quando Ω for aberto, limitado e convexo Bebendorf estabeleceu em [31, Teorema 3.2] que o primeiro autovalor não nulo do problema (N_1) satisfaz

$$\lambda_1^N(\Omega) > \left(\frac{\pi}{\mathrm{diam}(\Omega)}\right)^2.$$

Iremos mostrar que (N_2) possui solução não trivial desde que

$$\|V\|_\infty > \left(\frac{\pi}{\mathrm{diam}(\Omega)}\right)^2 C(N,\Omega).$$

Em alguns casos, obteremos o valor explícito da constante $C(N,\Omega)$. Faremos também uma aplicação deste resultado no estudo da existência e não existência de soluções do seguinte problema

$$\begin{cases} \varepsilon\Delta w - w + w^p = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\varepsilon > 0$, Ω é um subconjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$, e com fronteira suave $\partial\Omega$ e $p > 1$ se $N = 2$ ou $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ para $N \geq 3$.

Na segunda parte do trabalho estudaremos a função de Green associada ao operador poli-harmônico $((-\Delta)^m$, $m \in \mathbb{N})$, bem como como suas propriedades, e faremos uso disto para resolver problemas no semi-espaço $\mathbb{R}^N_+$ e no espaço $\mathbb{R}^N$.

Lembramos que uma função de Green $G(x,y)$ de um operador diferencial linear $L = L_x$ (dependendo apenas de x), é qualquer solução de

$$LG(x,s) = \delta(x-s), \tag{1}$$

onde δ é a função delta de Dirac. Esta propriedade da função de Green pode ser utilizada para resolver equações diferenciais da forma

$$Lu(x) = f(x). \tag{2}$$

Se o núcleo de L for não-trivial, então a função de Green não é única. No entanto, se L for simétrico, uma combinação de condições de contorno e, ou outros critérios impostos a priori produzirá uma função de Green única. Se o operador é invariante por translações, o que ocorre quando L tem coeficientes constantes em relação a x, então a função de Green pode ser considerada como um operador de convolução, ou seja,

$$G(x,s) = G(x-s).$$

A grosso modo, se tal função G puder ser encontrada para o operador L, então se multiplicarmos a equação (1) por $f(s)$ e em seguida realizarmos uma integração na variável s, obtemos;

$$\int LG(x,s)f(s)ds = \int \delta(x-s)f(s)ds = f(x).$$

Daí, pela equação (2), tem-se

$$Lu(x) = \int LG(x,s)f(s)ds.$$

Assim como L é linear e age somente sobre a variável x, obtemos

$$Lu(x) = L\Big(\int G(x,s)f(s)ds\Big),$$

de onde concluímos que

$$u(x) = \int G(x,s)f(s)ds. \tag{3}$$

Em outras palavras, a solução $u(x)$ da equação (2), pode ser determinada pela integral dada na equação (3). Assim, procuramos encontrar a função de Green G solução da equação (1). Por esta razão, a função de Green é chamada, às vezes, de solução fundamental associada ao operador L.

Nem todo operador L admite uma função de Green. Uma função de Green também pode ser pensada como sendo um inverso à direita de L. Além das dificuldades de encontrar-se uma função de Green para um determinado operador, a integral na equação (3) pode ser bastante difícil de se calcular. No entanto, o método fornece um resultado teoricamente exato.

Neste trabalho vamos fazer uso das funções de Green associadas aos operadores

$$L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N}$$

ou

$$L = \Delta^m = \underbrace{\Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{m-vezes} \quad m \in \mathbb{N},$$

no espaço $\mathbb{R}^N$, com $N > 2m$. Nesses casos, as expressões para as funções de Green associadas a esses problemas são bem conhecidas. Vamos usá-las para estudar os seguintes problemas:

Problema 1.

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = 0, & x \in \mathbb{R}^N_+ \\ \lambda(-\Delta)^j u + \frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^j u = u|u|^{\rho-1} + f_j, & x \in \partial\mathbb{R}^N_+, \ j = 0,1,\cdots,m-1, \end{cases}$$

em que, $m \in \mathbb{N}$, $N > 2m$, $\lambda > 0$, $\rho > 1$, η é o vetor normal unitário apontando para fora do semi-espaço e $f_j \not\equiv 0$.

O Problema 1 é uma generalização daquele estudado por Ferreira, Montenegro e Medeiros em [14]. Além disso, após apresentar o nosso resultado de existência, seremos capazes de expor uma generalização natural da condição de fronteira. Os resultados que conseguimos para esse problema coincidem com os já estabelecidos por esses autores no caso $m = 1$. Utilizamos uma condição de fronteira que é uma generalização natural da condição de Robin. Estas condições de fronteira sugerem um espaço natural para trabalharmos, o qual denotaremos por $E^{k,p}$:

Definição 1. *Seja $1 < p < N$ e $k \geq 1$. Os espaços $E^{k,p}$ são definidos por*

$$E^{k,p} = \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N_+) \ : \ |D^\alpha u| \in L^p(\mathbb{R}^N_+) \text{ para } 1 \leq |\alpha| \leq k \text{ e } p^* = \frac{Np}{N-p}\},$$

com a norma $\|\cdot\|_{E^{k,p}}$, dada por

$$\|u\|_{E^{k,p}} = \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N_+)} + \sum_{1\leq|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Mostraremos:

Teorema 1. *Seja $N > 2m$, $\frac{N+2(m-1)}{N-1} < \rho < \infty$ e $r_0^k = \frac{(\rho-1)N}{\rho+2(m-k)+1-|\beta|}$, seja E definido por*

$$E = E^{m,r_0^1} \cap E^{m,r_0^m},$$

com a norma dada por

$$\|u\|_E = \|u\|_{L^{(r_0^1)^*}(\mathbb{R}^N_+)} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} \|D^\beta u\|_{L^{r_0^1}(\mathbb{R}^N_+)} + \|u\|_{L^{(r_0^m)^*}(\mathbb{R}^N_+)} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} \|D^\beta u\|_{L^{r_0^m}(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Suponha que $0 \not\equiv f_{m-k} \in L^{\overline{d}_k^1}(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^{\overline{d}_k^m}(\mathbb{R}^{N-1})$, em que $\overline{d}_k^j = \frac{(N-1)r_0^j}{N+\left(2(m-k)+1-|\beta|\right)r_0^j}$.

Definindo $X_k = L^{\overline{d}_k^1}(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^{\overline{d}_k^m}(\mathbb{R}^{N-1})$ com a norma associada

$$\|\cdot\|_{X_k} = \|\cdot\|_{\overline{d}_k^1} + \|\cdot\|_{\overline{d}_k^m}.$$

Então, as seguintes afirmações são válidas:

1. *Existe um $\varepsilon > 0$ de modo que, se $\sum_{k=1}^m \|f_{m-k}\|_{X_k} \leq \frac{\varepsilon}{K}$, então a equação integral associada ao Problema 1 tem uma única solução $u \in E$ satisfazendo $\|u\|_E \leq 2\varepsilon$.*

2. *Sejam u_1 e u_2 soluções como aquelas do item anterior correspondentes as condições iniciais $(f_0,\cdots,f_{m-1},\varepsilon_1)$ e $(g_0,\cdots,g_{m-1},\varepsilon_2)$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, respetivamente. Então,*

$$\|u_1 - u_2\|_E \leq \frac{L}{1-2^\rho Mm\varepsilon^{\rho-1}} \sum_{k=1}^m \|f_k - g_k\|_{X_{m-k}} \tag{4}$$

Problema 2.
$$\begin{cases} \Delta^m u + V(x)u + b(x)h(u) + g(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \Delta^j u \to 0, \ |x| \to \infty, \ j = 0, \cdots, m-1, \end{cases}$$

em que $m \in \mathbb{N}$, $N > 2m$, $\rho > \max\{\frac{N}{N-2}, 2\}$. $V \in L^{\overrightarrow{s}}(\mathbb{R}^N)$ *e* $b \in L^{\overrightarrow{q}}(\mathbb{R}^N)$ *para* $\overrightarrow{s} = (s_1, \cdots, s_N)$ *e* $\overrightarrow{q} = (q_1, \cdots, q_N)$ *tais que*
$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{s_i} = 2m \quad e \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} = \theta < 2m,$$

$\overrightarrow{r_0} = (r_{0,1}, \cdots, r_{0,N})$ *e* $\overrightarrow{\delta} = (\delta_1, \cdots, \delta_N)$ *satisfazendo*[1]
$$\overrightarrow{1} < \overrightarrow{\delta} < \overrightarrow{r_0}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_{0,i}} = \alpha_0 = \frac{2m-\theta}{\rho-1}, \tag{5}$$

e h é uma função real de variável real com as seguintes propriedades:

h1) $h(0) = 0$,

h2) $|h(u) - h(v)| \leq C|u-v|(|u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1})$ *para* $\rho > 1$.

O Problema 2 é uma generalização daquele estudado por Ferreira, Montenegro e Medeiros em [15]. Os resultados que apresentaremos para este problema generalizam em algum sentido, inclusive os já estabelecidos no caso $m = 1$. Por exemplo, a função $h(u)$ é um pouco mais geral. Com essas considerações mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 2. *Sejam* $0 \leq \theta < 2m < N$, $\frac{N-\theta}{N-2m} < \rho < \infty$, *e sejam* $\overrightarrow{r}_0$, $\overrightarrow{r}_1^k$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{1} < \overrightarrow{s} < \overrightarrow{\infty}$, $\overrightarrow{1} \leq \overrightarrow{q} \leq \overrightarrow{\infty}$, $\overrightarrow{\delta}$ *e* $\overrightarrow{l}$ *satisfazendo:*
$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{s_i} = 2m \quad e \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} = \theta < 2m,$$
$$\overrightarrow{1} < \overrightarrow{\delta} < \overrightarrow{r_0}, \qquad \overrightarrow{r_1} < \overrightarrow{\infty}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_{0,i}} = \alpha_0 = \frac{2m-\theta}{\rho-1},$$
$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\delta_i} = \alpha_h = \alpha_0 + 2m, \qquad e \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_{1,i}^k} = \alpha_0 + k, \ para\ k = 1, \cdots, m.$$
$$\frac{1}{\overrightarrow{s}} = \frac{\rho-1}{\overrightarrow{r}_0} + \frac{1}{\overrightarrow{q}} \qquad e \qquad \frac{1}{\overrightarrow{\delta}} = \frac{\rho}{\overrightarrow{r}_0} + \frac{1}{\overrightarrow{q}} \leq \overrightarrow{1}. \tag{6}$$
e
$$\overrightarrow{1} < \overrightarrow{l} < \overrightarrow{r}_2 < \overrightarrow{\infty} \ \text{tal que} \ \frac{1}{\overrightarrow{r}_2} = \frac{1}{\overrightarrow{l}} - \frac{1}{\overrightarrow{s}}. \tag{7}$$

Então, se $V \in L^{\overrightarrow{s}}(\mathbb{R}^N)$, $b \in L^{\overrightarrow{q}}(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^{\overrightarrow{\delta}}(\mathbb{R}^N)$ *e h satisfaz as propriedades* $(h1)$ *e* $(h2)$, *as seguintes afirmações são verdadeiras*

1. *Existe* $\varepsilon > 0$ *tal que se* $\eta = C_1\|V\|_{\overrightarrow{s}} < 1$ *e* $\|h\|_{\overrightarrow{\delta}} \leq \frac{\varepsilon}{C_1}$, *então a equação integral associada ao Problema 2 tem uma única solução* $u \in L^{\overrightarrow{r}_0}(\mathbb{R}^N)$ *satisfazendo* $\|u\|_{\overrightarrow{r}_0} \leq \frac{2\varepsilon}{1-\eta}$. *Além disso,* $\nabla^k u \in L^{\overrightarrow{r}_1^k}(\mathbb{R}^N)$, *para* $k = 1, \cdots, m$.

[1] $\overrightarrow{a} \leq \overrightarrow{b}$, se $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, \cdots, N$.

2. *Sejam $\overrightarrow{1} < \overrightarrow{l} < \overrightarrow{r}_2 < \infty$ satisfazendo (7). Assumindo que $g \in L^{\overrightarrow{\delta}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\overrightarrow{l}}(\mathbb{R}^N)$ e $\overline{\eta} = C_3\|V\|_{\overrightarrow{s}} < 1$.Existe $0 < \overline{\varepsilon} \leq \varepsilon$ tal que se $\|g\|_{\overrightarrow{\delta}} \leq \frac{\overline{\varepsilon}}{C_1}$, então $u \in L^{\overrightarrow{r}_0}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\overrightarrow{r}_2}(\mathbb{R}^N)$.*

3. *Sejam u_1 e u_2 duas soluções associadas com as condições (V_1, g_1) e (V_2, g_2) respetivamente. Sejam (ε_1, η_1) e (ε_2, η_2) os seus parâmetros. Denotando por $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ e $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\}$ tais que $\eta + K_1 \frac{2\varepsilon^\rho}{(1-\eta)^{\rho-1}}\|b\|_{\overrightarrow{q}} < 1$, então a seguinte estimativa é válida*

$$\|u_1 - u_2\|_{r_0} \leq \frac{1}{1 - \eta - \frac{2^\rho K_1 \varepsilon^{\rho-1}}{(1-\eta)^{\rho-1}}\|b\|_{\overrightarrow{q}}}\left(\frac{2\varepsilon C_1}{1-\eta}\|V_1 - V_2\|_{\overrightarrow{s}} + C_1\|g_1 - g_2\|_{\overrightarrow{\delta}}\right).$$

Problema 3.

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u + \omega K_1(x)u\varphi = a(x)h(u) + f(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta \varphi + V_2(x)\varphi + \omega K_2(x)u\varphi = b(x)h(\varphi) + g(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

em que $a, b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, ω uma constante positiva, $f, g \in L^\theta(\mathbb{R}^N)$ são não nulas e $K_1, K_2 \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para

$$\theta = \frac{N(\rho-1)}{2\rho} \quad e \quad q = \frac{N(\rho-1)}{2\rho - 4},$$

sendo f e g funções com norma $\|\cdot\|_\theta$ suficientemente pequena, pesos V_i com norma $\|\cdot\|_{\frac{N}{2}}$ pequena. e h uma função real de variável real satisfazendo

h1) $h(0) = 0$,

h2) $\Big|h(u) - h(v)\Big| \leq C|u - v|\Big(|u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1}\Big)$.

O problema 3 é inspirado naquele estudado por Ferreira, Montenegro e Medeiros no artigo [16]. Aqui, novamente conseguimos obter resultados um pouco melhores. De fato, no nosso problema iremos trocar a restrição do peso V_i, $(i = 1, 2)$, ser não negativo pela condição dele ter norma suficientemente pequena no espaço $L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$. Obteremos o seguinte resultado:

Teorema 3. *Seja $N > 2$, $\rho > \frac{N}{N-2}$, $\rho > 2$ e sejam $k = \frac{2}{\rho-1}$, $r_0 = \frac{N}{k} = \frac{N(\rho-1)}{2}$ e $r_1 = \frac{N(\rho-1)}{\rho+1}$. Se $f, g \in L^\theta(\mathbb{R}^N)$ são não nulas, $V_1, V_2 \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e $K_1, K_2 \in L^q(\mathbb{R}^N)$, onde*

$$\theta = \frac{N(\rho-1)}{2\rho} \quad e \quad q = \frac{N(\rho-1)}{2\rho - 4}.$$

Então, se $a, b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e h satisfaz as propriedades $(h1)$ e $(h2)$, as seguintes afirmações são verdadeiras

1. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\|f\|_\theta \leq \frac{\varepsilon}{4C_1}$, $\|g\|_\theta \leq \frac{\varepsilon}{4C_1}$, $\|V_1\| \leq \frac{\varepsilon}{L_3}$ e $\|V_2\| \leq \frac{\varepsilon}{L_3}$, então o sistema integral associado ao Problema 3 possui uma única solução.*

$$(u, \varphi) \in E = L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_0}(\mathbb{R}^N),$$

satisfazendo $\|(u, \varphi)\|_E \leq \varepsilon$.

2. *O par (u, φ) é uma solução no sentido das distribuições e satisfaz*

$$|\nabla u| \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N) \quad e \quad |\nabla \varphi| \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N).$$

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iremos falar dos conceitos e resultados básicos mais relevantes que serão uteis na elaboração deste trabalho. As provas dos resultados enunciados neste capítulo são bem conhecidas. Porém, para os mais relevantes serão indicadas algumas referências onde é possível encontrar as demonstrações.

Análise funcional

Definição 2. *Seja E um espaço vetorial, um funcional $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ é uma norma sobre o espaço vetorial E, se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

O par $(E, \|\cdot\|)$ é chamado de espaço normado.

Observação 1. *Toda norma gera uma métrica, ao tomar $d(x,y) = \|x-y\|$.*

Definição 3. *Seja o espaço normado $(E, \|\cdot\|_E)$. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, é uma sequência de Cauchy se, $\forall\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\|_E < \varepsilon$ sempre que $m, n > N_0$.*

Definição 4. *Seja o espaço normado $(E, \|\cdot\|_E)$. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, converge para $x \in E$ se, $\forall\varepsilon > 0$, existe um $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\|_E < \varepsilon$ para todo $n > N_0$.*

Definição 5. *Um espaço normado $(E, \|\cdot\|_E)$ é completo, se toda sequência de Cauchy em E converge para algum elemento de E.*

Definição 6. *Um espaço normado $(E, \|\cdot\|_E)$ é chamado de espaço de Banach, se ele é completo com a norma $\|\cdot\|_E$.*

Observação 2. *Se $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ forem espaços de Banach, então o espaço produto $E\times F$ é um espaço de Banach com as seguintes três normas:*

- $\|(e,f)\|_{E\times F} = \|e\|_E + \|f\|_F$,
- $\|(e,f)\|_{E\times F} = \sqrt{\|e\|_E + \|f\|_F}$,

- $\|(e,f)\|_{E\times F} = \max\{\|e\|_E, \|f\|_F\}$.

Definição 7. *Um espaço normado $(E,\|\cdot\|_E)$ é separável, se E possui um subconjunto denso e enumerável.*

Definição 8. *Seja $(E,\|\cdot\|_E)$ um espaço vetorial normado, e seja $E^* = \{f \ : \ f: E \to \mathbb{R}\}$ o dual de E. Defina-se o operador canônico de injeção J por*

$$\begin{aligned} J :& E \to E^{**} \\ & x \to Jx : E^* \to \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad f \to \langle Jx, f\rangle_{E^{**},E^*} = \langle f, x\rangle_{E^*,E}. \end{aligned}$$

Definição 9. *Seja $(E,\|\cdot\|_E)$ um espaço de Banach e seja $J : E \to E^{**}$ o operador canônico de injeção. Então, o espaço E é reflexivo, se o operador canônico J é sobrejetivo, isto e, $J(E) = E^{**}$.*

Definição 10. *Sejam $(E,\|\cdot\|_E),(F,\|\cdot\|_F)$ espaços de Banach. Uma aplicação $T : E \to F$ é uma contração se satisfazer a seguinte desigualdade*

$$\|Tx - Ty\| \leq \lambda \|x-y\|, \ \textit{para quaisquer } x,y \in E, \textit{ com } 0 < \lambda < 1.$$

Definição 11. *Seja $T : E \to E$. Um ponto $x \in E$ é um ponto fixo de T se for invariante por T, isto é, se $Tx = x$.*

Teorema 4 (Teorema do Ponto fixo de Banach)**.** *Seja (E,d) um espaço métrico completo e seja $T : E \to E$ uma contração em E. Então T possui um único ponto fixo x^*. Além disso, para qualquer $x \in E$, a sequência $(x, Tx, T^2x, \cdots)$ converge para o ponto fixo x^*.*

Demonstração. Veja Brezis[4, Teorema 5.7]. □

Definição 12. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções reais p-integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\},$$

dotado da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},$$

e o espaço $L^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções reais mensuráveis limitadas, isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : u \textit{ é mensurável e } : \sup_\Omega |u(x)| < \infty\},$$

dotado da norma

$$\|u\|_\infty = \sup_\Omega |u| = \inf\{c \ : \ |f(x)| \leq c \ q.t.p.\}.$$

Teorema 5. *Seja $1 \leq p \leq \infty$, então o espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach.*

Teorema 6 (Convergência Dominada)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis, tais que $f_n \to f$ q.t.p. Se existir uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Teorema 7 (Hölder)**.** *Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema 8 (Desigualdade de interpolação)**.** *Sejam $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Então $f \in L^r(\Omega)$. Além disso, a seguinte estimativa é válida*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^t_{L^p(\Omega)}\|f\|^{1-t}_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema 9 (Desigualdade Integral de Minkoswski)**.** *Sejam (X,M,μ) e (Y,N,υ) dois espaços de medida. Se $p \geq 1$ e $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ é mensurável, então:*

$$\left(\int_Y \left|\int_X f(x,y)d\mu(x)\right|^p d\upsilon(y)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^p d\upsilon(y)\right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x).$$

Demonstração. Veja Hardy, Littlewood and Polya [7, Teorema 202]. □

Teorema 10 (Hardy-Littlewood-Sobolev)**.** *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $0 < \alpha < N$ e $1 < p < \infty$. Então o potencial de Riesz, definido por*

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{c_\alpha}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}dy,$$

satisfaz

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

para $C = C(p)$ uma constante e $q = \frac{Np}{N-\alpha p}$.

Demonstração. Veja Stein [5, Capítulo 5, §1.3]. □

Equações diferenciais

Um equação diferencial parcial de segunda ordem tem a forma

$$Lu(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

em que L é um operador diferencial dado por

$$L = \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c. \tag{1.2}$$

Em (1.1) u é uma função a ser determinada e f é dada.

Observação 3.

- *O exemplo mais conhecido de operador L é dado pelo operador laplaciano, Δ, definido por*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}.$$

- *Partindo desse operador é possível definir o seguinte operador poli-harmônico* $(-\Delta)^m$ *dado por*
$$(-\Delta)^m = \underbrace{(-\Delta)\circ\cdots\circ(-\Delta)}_{m-vezes}.$$

- *No caso* $m=0$, *teremos* $(-\Delta)^0 = I$, *em que* I *é o operador identidade.*

Definição 13. *Dado o inteiro* $m \geq 1$, *a solução poli-harmônica (ou fundamental) do operador* $(-\Delta)^m$ *é definida por*
$$\phi(x,y) = \begin{cases} C_{N,m}|x-y|^{2m-N}, & N > 2m, \\ C_m \ln \frac{1}{|x-y|}, & N = 2m. \end{cases} \tag{1.3}$$

Observação 4. *As constantes* $C_{N,m}$ *e* C_m *são escolhidas de modo que*
$$(-1)^m \int\limits_{\partial B_r(0)} \frac{\partial}{\partial \eta}\Delta^{m-1}\phi(x,0)dS_x = 1, \tag{1.4}$$
isto é,
$$C_{N,m} = \frac{1}{2^{2m-1}\prod_{i=0}^{m-1}\left(\frac{N}{2}-m+i\right)(m-1)!\sigma_N} = \frac{2\Gamma(\frac{N}{2}-m)}{2^{2m}(m-1)!\Gamma(\frac{N}{2})\sigma_N}, \quad N > 2m, \tag{1.5}$$
e
$$C_m = \frac{1}{\left(2^{m-1}(m-1)!\right)^2\sigma_{2m}}, \qquad N = 2m. \tag{1.6}$$
Veja Futoshi[13].

Definição 14. *Seja* L *dado por (1.2).* L *é elíptico num ponto* $x \in \Omega$ *se a matriz de coeficientes* $(a^{ij}(x))$ *é positiva, isto é, se* $\lambda(x)$ *e* $\Lambda(x)$ *são o mínimo e máximo dos autovalores de* $(a^{ij}(x))$, *então*
$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2$$
para todo $\xi = (\xi_1,\cdots,\xi_N) \in \mathbb{R}^N - \{0\}$. *Se* $\lambda > 0$ *em* Ω, *então* L *é chamado de elíptico, e estritamente elíptico se* $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ *para alguma constante* λ_0. *Se o quociente* $\frac{\Lambda}{\lambda}$ *é limitado, então dizemos que* L *é uniformemente elíptico.*

Teorema 11 (Princípio do máximo fraco)**.** *Seja* L *elíptico num domínio limitado* Ω. *Suponha que*
$$Lu \geq 0, \quad c = 0,$$
com $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$. *Então o máximo de* u *em* Ω *é atingido no bordo, isto é,*
$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Demonstração. Veja Trudinger [3, Teorema 3.1]. □

Teorema 12 (Lema de Hopf)**.** *Seja* L *uniformemente elíptico,* $c = 0$ *e* $Lu \geq 0$ *em* Ω. *Seja* $x_0 \in \partial\Omega$ *tal que*

1. u *é continua em* x_0,

2. *$u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$,*

3. *$\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior em x_0.*

Então, a derivada normal exterior de u em x_0 se existir satisfaz a seguinte desigualdade estrita

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0.$$

Demonstração. Veja Trudinger [3, Lema 3.4]. □

Teorema 13 (Identidades de Green). *Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, então as seguintes identidades são válidas.*

$$\int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} dS_x, \tag{1.7}$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} dS_x, \tag{1.8}$$

$$\int_{\Omega} u\Delta v - v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta} dS_x. \tag{1.9}$$

Definição 15. *Seja u uma função localmente integrável em Ω , $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ um multi-índice, isto é, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ para cada $i = 1, \cdots, N$ e seja $|\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_N|$. Então uma função localmente integrável v é chamada da α-ésima derivada fraca de u se satisfazer*

$$\int_{\Omega} \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$.

Definição 16. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Os espaços de Sobolev são dados por*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ : \ D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k \text{ em que } D^{\alpha}u \text{ é dada no sentido fraco}\},$$

com a norma definida por

$$\begin{cases} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{\infty}. \end{cases}$$

Além disso, defina-se

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C^{\infty}(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Observação 5.

- *Os espaços $W^{k,p}(\Omega)$ são Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*
- *Os espaços $W^{k,p}(\Omega)$ são separáveis para $1 \leq p < \infty$.*
- *Os espaços $W^{k,p}(\Omega)$ são reflexivos para $1 < p < \infty$.*

Observação 6.

- *No caso $p = 2$ é comum denotar por $H^k(\Omega)$ o espaço $W^{k,2}(\Omega)$.*
- *Lembrando que uma identidade válida para funções suficientemente suaves pode ser estendida a espaços de Sobolev desde que ambos lados sejam contínuos com respeito à norma do espaço Sobolev, então as identidades no Teorema 13 são válidas para funções em $H^1(\Omega)$.*

O espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$

As provas dos resultados expostos nesta seção podem-se ver no artigo Naoum, Troestler e Willem [17].

Definição 17. *Seja $1 < p < N$. O espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ é definido por*

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) = \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N_+) : |\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^N_+) \;\; \textit{sendo } p^* = \frac{Np}{N-p}\},$$

com a norma

$$\|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} = \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Também definimos

$$D^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+) = \overline{C^\infty_0(\mathbb{R}^N_+)}^{D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Teorema 14. *Seja $1 < p < N$, os espaços $D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ e $D^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ são espaços de Banach e reflexivos.*

Teorema 15. *A seguinte afirmação é válida*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \subsetneq D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+).$$

Observação 7. *$W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ é um subespaço própio de $D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$. Para ver isto basta notar que a função*

$$u(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad \alpha \in (\frac{N}{p^*}, \frac{N}{p}),$$

pertence a $D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \diagdown W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.

Teorema 16. *Seja $\Omega_1 \subseteq \Omega$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}^N_+$. Se $u \in D^{1,p}(\Omega)$, então $u|_{\Omega_1} \in D^{1,p}(\Omega_1)$ e*

$$\partial_i(u|_{\Omega_1}) = (\partial_i u)|_{\Omega_1}.$$

Além disso, a imersão $D^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow D^{1,p}(\Omega_1) : u \to u|_{\Omega_1}$ é contínua.

Teorema 17. *Seja $1 < p < N$ e $1 < p_* < \infty$ com*

$$\frac{N-1}{p_*} = \frac{N}{p} - 1,$$

então

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \hookrightarrow L^{p_*}(\mathbb{R}^{N-1}).$$

Demonstração. Vamos provar no caso que $u \geq 0$.

$$\begin{aligned} u^{p_*}(x,0) &= -\int_0^\infty \frac{\partial u^{p_*}}{\partial s}(x,s)ds = -\int_0^\infty p_* u^{p_*-1}\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)ds \leq \int_0^\infty u^{p_*-1}(x,s)\Big|\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)\Big|ds \\ &\leq \Big(\int_0^\infty u^{(p_*-1)\frac{p}{p-1}}(x,s)ds\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_0^\infty \Big|\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)\Big|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{p-1}{p}\Big(\int_0^\infty u^{(p_*-1)\frac{p}{p-1}}(x,s)ds\Big)^{\frac{p-1}{p}} + \frac{1}{p}\Big(\int_0^\infty \Big|\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)\Big|^p ds\Big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Assim

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} u^{p_*}(x,0)dx \leq C(p)\Big\{ \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \int\limits_0^\infty u^{(p_*-1)\frac{p}{p-1}} dsdx + \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \int\limits_0^\infty \Big|\frac{\partial u}{\partial s}\Big|^p dsdx \Big\}$$
$$\leq C(p)\Big\{ \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p^*} dz + \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u|^p dz \Big\}.$$

Daí segue-se o resultado. □

Outras definições

Definição 18. *Seja $GL(N,\mathbb{R})$ o grupo linear geral de grau N, ou seja, o grupo formado pelas matrizes $N\times N$ inversíveis sobre $\mathbb{R}$, com a operação de multiplicação de matrizes. Definamos o grupo das matrizes ortogonais por*

$$O(N) = \{Q \in GL(N,\mathbb{R}) \ : \ QQ^\perp = Q^\perp Q = I\}$$

sendo $Q^\perp$ a matriz transposta de Q e I a matriz identidade.

Definição 19. *Seja $G \subset O(N)$ e uma função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, dizemos que*

1. *u é simétrica pela ação de G, se $u(x) = u(Ax)$ para qualquer $A \in G$,*
2. *u é antissimétrica pela ação de G, se $u(x) = -u(A^{-1}x)$ para qualquer $A \in G$.*
3. *u é radial pela ação de G, se $u(x) = u(Ax)$ para qualquer $A \in G$.*

Definição 20. *Seja Ω um espaço dotado da uma métrica d e seja $U \subset \Omega$ definimos o diâmetro de U por*

$$\operatorname{diam}(U) = \sup\{d(x,y) \ : \ x,y \in U\}.$$

Além disso, definimos

$$H^N_\delta(U) = 2^{-N}\frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)} \inf\{\sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}^N(U_i) \ : \ \bigcup_{i=1}^\infty U_i \supset U, \ \operatorname{diam}(U_i) < \delta.\},$$

e finalmente a medida de Hausdorff N-dimensional por

$$\mathscr{H}^N(U) := \sup_\delta H^N_\delta(U) = \lim_{\delta\to 0} H^N_\delta(U)$$

Capítulo 2

Desigualdades de Faber-Krahn para problemas de Neumann

Introdução

Em 2012, S. M. Hudson e L. De Carli estabeleceram condições necessárias para a existência de soluções do problema de autovalor com peso e condição de fronteira do tipo Dirichlet dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = V(x)u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Utilizando soluções radiais e funções de Morse, conseguiram estabelecer que se a equação mencionada tem solução não trivial, então o peso V tem uma certa estimativa inferior que, no caso particular $V = \lambda$, oferece uma cota inferior para o primeiro autovalor do problema de Dirichlet (o qual denotaremos por λ_1^D) generalizando a famosa desigualdade de Faber-Krahn (veja [18]):

Teorema 18 (Desigualdade de Faber-Krahn)**.** *Seja $c > 0$ e B a bola de $\mathbb{R}^N$ com volume $|B| = c$. Então,*

$$\lambda_1^D(B) = \min\{\lambda_1^D(\Omega) \ : \ \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ com}^1 \ |\Omega| = c\}.$$

Demonstração. Veja Henrot [6, Teorema 3.2.1]. □

Neste trabalho vamos considerar o problema de autovalor com peso e condição de fronteira do tipo Neumann dado por

Problema 4 (Problema de autovalor com peso)**.**

$$\begin{cases} -\Delta u = V(x)u, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e com fronteira suave, η o vetor normal exterior unitário na fronteira $\partial\Omega$ e $V \in L^\infty(\Omega)$.

Nosso objetivo é estabelecer, no caso $N \geq 2$, uma estimativa inferior para a norma L^∞ do peso V, a qual dependa do conjunto Ω e de constantes dependendo da fronteira ou parte dela, obtendo assim condições necessárias para a existência de soluções do problema de autovalor com peso e condição de fronteira do tipo Neumann, em função desses valores.

Para conseguir alcançar esse objetivo vamos começar com uma estimativa inferior para $\lambda_1^M(\Gamma_0)$, o primeiro autovalor do problema misto (também chamado de problema de Dirichlet-Neumann ou problema de Zaremba) dado por

Problema 5 (Problema de Zaremba)**.**

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \Gamma_0 \subset \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega - \Gamma_0, \end{cases}$$

em que a medida de Lebesgue $|\Gamma_0| > 0$*.*

Em [25, Cor. 7.11] Yehuda e Tiferet estabeleceram que $\lambda_0^N(\Omega) \leq \lambda_1^M(\Omega) \leq \lambda_1^D(\Omega)$, independentemente da fronteira de Ω para $\lambda_0^N(\Omega)$, $\lambda_1^M(\Omega)$ e $\lambda_1^D(\Omega)$ denotando respetivamente o primeiro autovalor do problema de tipo Neumann, Zaremba e Dirichlet. Vamos mostrar no Lema 1, mediante o argumento do mini-max, a seguinte generalização desse resultado

$$\lambda_{j-1}^N(\Omega) \leq \lambda_j^M(\Gamma_0) \leq \lambda_j^D(\Omega),$$

para todo $j \geq 1$. Posteriormente vamos aplicar esse resultado e as estimativas relacionando os primeiros autovalores do problema de Zaremba feitas por Ashbaugh (baseadas nos argumentos de α-simetrização, veja [20]) além das estimativas integrais de Kovařík (veja [26]) para conseguir uma cota inferior para a norma L^∞ do peso V. Como consequência desses resultados, obteremos condições necessárias para a existência de solução do problema de autovalor com peso dado no Problema 4. Ao fim deste capítulo vamos aplicar os resultados enunciados nos Teoremas 20 e 21, no estudo da existência e não existência de soluções positivas não constantes para o seguinte problema:

Problema 6.

$$\begin{cases} \varepsilon\Delta w - w + w^p = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

para $\varepsilon > 0$*,* $p > 1$ *e* Ω *um subconjunto aberto e limitado em* $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ *com fronteira suave* $\partial\Omega$*.*

Esta aplicação, além de teoricamente interessante, tem grande importância principalmente porque as soluções do Problema 6 estão diretamente relacionadas com as soluções do sistema estacionário de Keller-Segel, o qual descreve a locomoção orientada e unidirecional ao longo de um gradiente químico, causado pela diferença de concentração de determinadas substâncias denominadas quimioatratores ou agentes quimiotáticos, que podem ser liberadas por tecidos lesados, geradas por sistemas enzimáticos presentes no plasma. Por exemplo, o modelo sugere que é possível para as amebas formarem quimioatratores se ε estiver próximo de 0, mas não é possível se ε for grande; conforme o bem conhecido artigo de Lin, Ni e Takagi (veja [28]).

Estimativas para o autovalor do problema de Zaremba

Nesta seção estabeleceremos alguma estimativas para os autovalores dos problemas de Neumann e Zaremba. O Objetivo desta seção é produzir uma cota não nula por baixo para λ_1^M, o primeiro autovalor do problema de Zaremba, a qual será utilizada nas seções posteriores como ferramenta para conseguir estabelecer condições necessárias para a existência de soluções do Problema 4.

Lema 1. *Seja Ω um aberto limitado com fronteira suave. Sejam*

$$0 < \lambda_1^D(\Omega) < \lambda_2^D(\Omega) \leq \cdots \leq \lambda_k^D(\Omega) \leq \cdots,$$

os autovalores do laplaciano com condição de Dirichlet,

$$0 \leq \lambda_1^M(\Gamma_0) < \lambda_2^M(\Gamma_0) \leq \cdots \leq \lambda_k^M(\Gamma_0) \leq \cdots,$$

os autovalores do problema de Zaremba, sendo $\Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega \, : \, u(x) = 0\}$ e

$$0 = \lambda_0^N(\Omega) < \lambda_1^N(\Omega) \leq \cdots \leq \lambda_k^N(\Omega) \leq \cdots,$$

os autovalores do laplaciano com condição Neumann. Então

$$\lambda_{j-1}^N(\Omega) \leq \lambda_j^M(\Gamma_0) \leq \lambda_j^D(\Omega), \tag{2.1}$$

para todo $j \geq 1$.

Demonstração. Denotando por $W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega)$ o espaço de Hilbert naturalmente associado ao problema de autovalor misto dado por:

$$W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) \, : \, u = 0, \; x \in \Gamma_0\}$$

com o produto interno associado

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

e os seguintes conjuntos

$$\mathscr{L}_j\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big) = \Big\{H \subset W_0^{1,2}(\Omega) : H \text{ é um subespaço vetorial de dimensão } j\Big\},$$

$$\mathscr{L}_j\big(W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega)\big) = \Big\{H \subset W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega) : H \text{ é um subespaço vetorial de dimensão } j\Big\},$$

$$\mathscr{L}_j\big(W^{1,2}(\Omega)\big) = \Big\{H \subset W^{1,2}(\Omega) : H \text{ é um subespaço vetorial de dimensão } j\Big\},$$

como $W_0^{1,2}(\Omega) \subset W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$, teremos

$$\mathscr{L}_j\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big) \subset \mathscr{L}_j\big(W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega)\big) \subset \mathscr{L}_j\big(W^{1,2}(\Omega)\big).$$

Em particular, o mínimo sobre $\mathscr{L}_j\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)$ não pode ser menor que o mínimo sobre $\mathscr{L}_j\big(W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega)\big)$ e este por vez não pode ser menor que o mínimo sobre $\mathscr{L}_j\big(W^{1,2}(\Omega)\big)$. Assim, utilizando as caracterizações dos autovalores e repetindo os raciocínios de Bieznur em [11, Teorema 1.16 e Corolario 1.17] segue

$$\begin{aligned} \lambda_{j-1}^N(\Omega) &= \min_{L \in \mathscr{L}_j\left(W^{1,2}(\Omega)\right)} \left(\max_{u \in L, \; \|u\|=1} \langle \nabla u, \nabla u \rangle \right) \leq \min_{L \in \mathscr{L}_j\left(W_{\Gamma_0}^{1,2}(\Omega)\right)} \left(\max_{u \in L, \; \|u\|=1} \langle \nabla u, \nabla u \rangle \right) \\ &= \lambda_j^M(\Gamma_0) \leq \min_{L \in \mathscr{L}_j\left(W_0^{1,2}(\Omega)\right)} \left(\max_{u \in L, \; \|u\|=1} \langle \nabla u, \nabla u \rangle \right) = \lambda_j^D(\Omega). \end{aligned}$$

□

O caso de um domínio convexo

No caso convexo, é bem conhecido que o primeiro autovalor não nulo do Laplaciano com condição de Neumann sobre um domínio aberto e limitado, satisfaz a seguinte desigualdade

$$\lambda_1^N(\Omega) > \left(\frac{\pi}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^2.$$

De (2.1) concluímos que

$$\lambda_2^M(\Gamma_0) \geq \lambda_1^N(\Omega) > \left(\frac{\pi}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^2.$$

Definição 21. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e conexo com fronteira Lipschitz dada como a união $\partial\Omega = \overline{\Gamma_0 \cup \Gamma_1}$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, Γ_0 e Γ_1 abertos, em que Γ_0 tem medida de Hausdorff $(N-1)-$dimensional positiva, então denotando por $|E|$ a medida de Lebesgue de um conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, definimos a constante isoperimétrica de Ω com respeito a Γ_1 por*

$$Q(\Gamma_1, \Omega) = \sup_{E \in \mathscr{E}} \frac{|E|^{1-\frac{1}{N}}}{P_\Omega(E)},$$

em que

$$\mathscr{E} = \{E \subset \Omega \ : \ \text{para todo } A \subset \partial E \cap \Gamma_0 \text{ tem-se}^{2}\ \mathscr{H}^{N-1}(A) = 0\},$$

$$P_\Omega(E) = \sup_{\psi} \left\{ \int_E \operatorname{div}\psi \ : \ \psi \in \left(C_0^\infty(\Omega)\right)^N, \ |\psi| \leq 1 \right\}.$$

$P_\Omega(E)$ é o perímetro de De Giorgi de E em Ω (veja De Giorgi [22]).

Observação 8. *Pacella e Tricarico em [24, Seção 3] calcularam explicitamente o valor de $Q(\Gamma_1, \Omega)$ para um setor circular, um retângulo e um anel no $\mathbb{R}^2$.*

Definição 22. *Seja $X \subset \mathbb{R}^N$ e $\Gamma_1 \subset \partial X$ com medida de Hausdorff positiva. Definiremos a seguinte constante*

$$C(N, \Gamma_1, X) = \left(1 + \left(\frac{\omega_N}{\alpha_N^X}\right)^{\frac{2}{N}} \left(\frac{j^2_{\frac{N}{2},1}}{j_{\frac{N}{2}-1,1}} - 1\right)\right)^{-1} \tag{2.2}$$

para $\alpha_N^X = \left(N \cdot Q(\Gamma_1, X)\right)^{-N}$, ω_N o volume da bola unitária e $j_{\nu,k}$ o k-ésimo zero da função de Bessel J_ν.

Observação 9. *Seja $X \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial X = \overline{\Gamma_0 \cup \Gamma_1}$ (como acima) e seja $Y \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto tal que $X \subset Y$ com a parte Γ_1 da fronteira sendo mantida. Então,*

$$Q(\Gamma_1, X) \leq Q(\Gamma_1, Y).$$

Consequentemente,

$$C(N, \Gamma_1, X) \geq C(N, \Gamma_1, Y).$$

[2] $\mathscr{H}^{N-1}$ é a medida de Hausdorff (N-1)-dimensional

Lema 2. *Consideremos o problema de Zaremba dado no Problema 5, com Ω aberto, limitado, convexo e com fronteira Lipschitz $\partial\Omega = \overline{\Gamma_0 \cup \Gamma_1}$, com $\mathscr{H}^{N-1}(\Gamma_0) > 0$ e $\mathscr{H}^{N-1}(\Gamma_1) > 0$ e sejam $\omega_N = |B_1|$ o volume da bola unitária no $\mathbb{R}^N$, e $\alpha_N^\Omega = \big(N \cdot Q(\Gamma_1, \Omega)\big)^{-N}$. Então temos a seguinte estimativa*

$$\lambda_1^M(\Gamma_0) > \left(\frac{\pi}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^2 \cdot C(N, \Gamma_1, \Omega). \tag{2.3}$$

Demonstração. Dado Ω aberto, limitado e convexo. Pelo Lema 1, tem-se

$$\lambda_2^M(\Gamma_0) \geq \lambda_1^N(\Omega) > \left(\frac{\pi}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^2.$$

Além disso, já que o domínio tem fronteira Lipschitz, das ideias de Ashbaugh tem-se a seguinte desigualdade (veja [20, Equação 1.2]).

$$\lambda_1^M(\Gamma_0) \cdot \left(1 + \left(\frac{\omega_N}{\alpha_N}\right)^{\frac{2}{N}} \left(\frac{j^2_{\frac{N}{2},1}}{j_{\frac{N}{2}-1,1}} - 1\right)\right) \geq \lambda_2^M(\Gamma_0).$$

Consequentemente, obtém-se o resultado. □

O caso de um domínio qualquer

Para o nosso conhecimento, em domínios não convexos, os resultados apresentados a seguir são novos e nos mostram claramente o impacto da falta de convexidade nos resultados.

Teorema 19. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ aberto e limitado, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ um subconjunto de medida positiva. A seguinte desigualdade é válida para o primeiro autovalor do problema de Zaremba 5:*

$$\lambda_1^M(\Gamma_0) \geq \left(\frac{2N-3}{4d}\right)^2 - \frac{2N-3}{2(d+d_0)} \|u_1\|^2_{L^2(\partial\Omega \setminus \Gamma_0)}, \tag{2.4}$$

onde u_1 é a primeira autofunção normalizada[3] *do problema de Zaremba, $d = \operatorname{diam}(\Omega)$ e $d_0 = d(z, \Gamma_1)$ onde $z \in \Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega \,:\, u(x) = 0\}$.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \sigma > 0$ as serem fixados posteriormente, e sejam $u, v \in H^1(\Omega)$. Tem-se

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla u - \frac{\alpha\sigma u}{v+\alpha} \nabla v|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{(\alpha\sigma u)^2 |\nabla v|^2}{(v+\alpha)^2} - 2\frac{\alpha\sigma u}{v+\alpha} \nabla u \cdot \nabla v dx. \tag{2.5}$$

Aplicando a 2ª identidade de Green[4], tem-se

$$\int_\Omega f \nabla g \cdot \nabla h dx = -\int_\Omega h \nabla f \cdot \nabla g dx - \int_\Omega h f \Delta g dx + \int_{\partial\Omega} f h \frac{\partial g}{\partial \eta} ds_x.$$

[3] $\|u_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$

[4] $\int_\Omega \nabla a \cdot \nabla b dx = -\int_\Omega a \Delta b dx + \int_{\partial\Omega} a \frac{\partial b}{\partial \eta} dS_x$ com $a = hf$ e $b = g$.

Assim, para $f = \frac{u}{v+\alpha}$, $g = v$ e $h = u$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{u}{v+\alpha}\nabla u\cdot\nabla v dx &= -\int_\Omega u\nabla\left(\frac{u}{v+\alpha}\right)\cdot\nabla v + \frac{u^2}{v+\alpha}\Delta v dx + \int_{\partial\Omega}\frac{u^2}{v+\alpha}\frac{\partial v}{\partial\eta}ds_x\\ &= -\int_\Omega \frac{u}{v+\alpha}\nabla u\cdot\nabla v dx + \int_\Omega \frac{u^2}{(v+\alpha)^2}|\nabla v|^2 dx\\ &\quad -\int_\Omega \frac{u^2\Delta v}{v+\alpha}dx + \int_{\partial\Omega}\frac{u^2}{v+\alpha}\frac{\partial v}{\partial\eta}ds_x.\end{aligned}$$

Daí,

$$2\int_\Omega \frac{u}{v+\alpha}\nabla u\cdot\nabla v dx = \int_\Omega \frac{u^2|\nabla v|^2}{(v+\alpha)^2}dx - \int_\Omega \frac{u^2\Delta v}{v+\alpha}dx + \int_{\partial\Omega}\frac{u^2}{v+\alpha}\frac{\partial v}{\partial\eta}ds_x. \tag{2.6}$$

Logo, substituindo (2.6) em (2.5), tem-se

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx &\geq 2\alpha\sigma\int_\Omega \frac{u\nabla u\cdot\nabla v}{v+\alpha}dx - \int_\Omega \frac{\alpha^2\sigma^2u^2|\nabla v|^2}{(v+\alpha)^2}dx\\ &\geq \alpha\sigma\int_\Omega \frac{u^2|\nabla v|^2}{(v+\alpha)^2}dx - \alpha\sigma\int_\Omega \frac{u^2\Delta v}{v+\alpha}dx\\ &\quad + \alpha\sigma\int_{\partial\Omega}\frac{u^2}{v+\alpha}\frac{\partial v}{\partial\eta}ds_x - \int_\Omega \frac{\alpha^2\sigma^2u^2}{(v+\alpha)^2}|\nabla v|^2 dx\\ &\geq \alpha\sigma(1-\alpha\sigma)\int_\Omega \frac{u^2|\nabla v|^2}{(v+\alpha)^2}dx - \alpha\sigma\int_\Omega \frac{u^2\Delta v}{v+\alpha}dx\\ &\quad + \alpha\sigma\int_{\partial\Omega}\frac{u^2}{v+\alpha}\frac{\partial v}{\partial\eta}ds_x.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \alpha\sigma(1-\alpha\sigma)\int_\Omega \frac{u^2|\nabla v|^2}{(v+\alpha)^2}dx - \alpha\sigma\int_\Omega \frac{u^2\Delta v}{v+\alpha}dx + \alpha\sigma\int_{\partial\Omega}\frac{u^2}{v+\alpha}\frac{\partial v}{\partial\eta}ds_x. \tag{2.7}$$

Agora considere a função $v_1(x) = \frac{1}{|x-z|+d}$ sendo $d = \mathrm{diam}(\Omega)$ e $z \in \Gamma_0$. Definimos $d_0 = d(z,\Gamma_1) \leq |z-s|$ para $s \in \Gamma_1$. Então temos:

$$\nabla v_1 = \frac{-(x-z)}{|x-z|\Big(|x-z|+d\Big)^2},$$

$$\Delta v_1 = \frac{|x-z|\big(|x-z|+d\big)\Big((3-N)|x-z|+(1-N)d\Big)}{|x-z|^2\big(|x-z|+d\big)^4}.$$

Daí,

$$|\nabla v_1|^2 = \frac{1}{\big(|x-z|+d\big)^4} \quad e \quad \Delta v_1 \leq 0 \quad \text{para } x\in\Omega,\ N\geq 2, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \eta}(s) = -\frac{(s-z)\cdot\eta(s)}{|s-z|\big(|s-z|+d\big)^2} \quad \text{para } s \in (\partial\Omega - \Gamma_0). \tag{2.9}$$

Logo, substituindo u_1 a primeira autofunção (normalizada, $\|u_1\|_2 = 1$) associada ao problema de Zaremba e v_1 dada acima, de (2.8) e (2.9) e a caracterização variacional de $\lambda_1^M(\Gamma_0)$

$$\begin{aligned}
\lambda_1^M(\Gamma_0) &\geq \alpha\sigma(1-\alpha\sigma)\int_\Omega \frac{u_1^2|\nabla v_1|^2}{(v_1+\alpha)^2}dx - \alpha\sigma\int_\Omega \frac{u_1^2 \Delta v_1}{v_1+\alpha}dx + \alpha\sigma\int_{\partial\Omega}\frac{u_1^2}{v_1+\alpha}\frac{\partial v_1}{\partial\eta}ds_x \\
&\geq \alpha\sigma(1-\alpha\sigma)\int_\Omega \frac{u_1^2\frac{1}{(|x-z|+d)^4}}{\left(\frac{1}{|x-z|+d}+\alpha\right)^2}dx \\
&\quad + \alpha\sigma\int_\Omega u_1^2\frac{(N-3)|x-z|+(N-1)d}{|x-z|(|x-z|+d)^3}\frac{|x-z|+d}{1+\alpha(d+|x-z|)}dx \\
&\quad - \alpha\sigma\int_{\partial\Omega-\Gamma_0}\frac{u_1^2(s-z)\cdot\eta(s)}{\big(1+\alpha(|s-z|+d)\big)|s-z|\big(|s-z|+d\big)}ds_x \\
&\geq \alpha\sigma(1-\alpha\sigma)\int_\Omega \frac{u_1^2}{\Big(1+\alpha\big(|x-z|+d\big)\Big)^2(|x-z|+d)^2}dx \\
&\quad + \alpha\sigma\int_\Omega u_1^2\frac{(N-3)|x-z|+(N-1)d}{|x-z|(|x-z|+d)^2\big(1+\alpha(d+|x-z|)\big)}dx \\
&\quad - \alpha\sigma\int_{\partial\Omega-\Gamma_0}\frac{u_1^2(s-z)\cdot\eta(s)}{\big(1+\alpha(|s-z|+d)\big)|s-z|\big(|s-z|+d\big)}ds_x \\
&\geq \frac{\alpha\sigma(1-\alpha\sigma)}{4d^2(1+2d\alpha)^2}\int_\Omega u_1^2dx + \alpha\sigma\int_\Omega u_1^2\frac{(N-2)(d+|x-z|)}{d(|x-z|+d|)^2(1+\alpha(2d))}dx \\
&\quad - \frac{\alpha\sigma}{\big(1+\alpha(d+d_0)\big)(d_0+d)}\int_{\partial\Omega-\Gamma_0}u_1^2ds_x \\
&\geq \frac{\alpha\sigma(1-\alpha\sigma)}{4d^2(1+2d\alpha)^2}\int_\Omega u_1^2dx + \alpha\sigma\frac{(N-2)}{2d^2(1+2\alpha d)}\int_\Omega u_1^2dx \\
&\quad - \frac{\alpha\sigma}{\big(1+\alpha(d+d_0)\big)(d_0+d)}\int_{\partial\Omega-\Gamma_0}u_1^2ds_x \\
&= \left(\frac{\alpha\sigma(1-\alpha\sigma)}{4d^2(1+2\alpha d)^2}+\frac{\alpha\sigma(N-2)}{2d^2(1+2\alpha d)}\right) - \frac{\alpha\sigma}{\big(1+\alpha(d+d_0)\big)(d_0+d)}\int_{\partial\Omega-\Gamma_0}u_1^2ds_x,
\end{aligned}$$

isto é

$$\lambda_1^M(\Gamma_0) \geq \left(\frac{\alpha\sigma(1-\alpha\sigma)}{4d^2(1+2\alpha d)^2}+\frac{\alpha\sigma(N-2)}{2d^2(1+2\alpha d)}\right) - \frac{\alpha\sigma}{\big(1+\alpha(d+d_0)\big)(d_0+d)}\int_{\partial\Omega-\Gamma_0}u_1^2ds_x. \tag{2.10}$$

Certamente até aqui σ e α foram quaisquer números positivos. Assim, maximizando a função

$$f(\alpha) = \left(\frac{\alpha\sigma(1-\alpha\sigma)}{4d^2(1+2\alpha d)^2}+\frac{\alpha\sigma(N-2)}{2d^2(1+2\alpha d)}\right),$$

obteremos
$$\alpha = \alpha_{\max}(\sigma) = \frac{2N-3}{2\sigma + 10d - 4Nd}.$$
Daí, observando que
$$\alpha_{\max}(\sigma)\cdot\sigma \to \frac{2N-3}{2}, \quad \text{e} \quad \alpha_{\max}(\sigma) \to 0, \quad \text{quando} \ \ \sigma \to +\infty,$$
de (2.10) tem-se:
$$\begin{aligned}
\lambda_1^M(\Gamma_0) &\geq \frac{1}{4d^2}\frac{2N-3}{2}\left(1-\frac{2N-3}{2}\right) + \frac{2N-3}{2}\cdot\frac{(N-2)}{2d^2} - \frac{2N-3}{2(d+d_0)}\int\limits_{\partial\Omega-\Gamma_0} u_1^2 ds \\
&= \frac{1}{2d^2}\frac{2N-3}{2}\left(\frac{5-2N}{4} + N - 2\right) - \frac{2N-3}{2(d+d_0)}\int\limits_{\partial\Omega-\Gamma_0} u_1^2 ds \\
&= \frac{(2N-3)^2}{16d^2} - \frac{2N-3}{2(d+d_0)}\int\limits_{\partial\Omega-\Gamma_0} u_1^2 ds,
\end{aligned}$$
isto é
$$\lambda_1^M(\Gamma_0) \geq \frac{(2N-3)^2}{16d^2} - \frac{2N-3}{2(d+d_0)}\int\limits_{\partial\Omega-\Gamma_0} u_1^2 ds.$$

□

Observação 10. *Quando* $|\Gamma_0| \to 0$*, temos* $d_0 \to 0$ *e como consequência de (2.4), observando que nesse caso,* $u_1 = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$*, teremos*
$$0 \geq \frac{(2N-3)^2}{16d^2} - \frac{2N-3}{2d}\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|},$$
ou equivalentemente
$$|\Omega| \leq \frac{8\operatorname{diam}(\Omega)}{2N-3}|\partial\Omega|.$$

Corolário 1. *Considere o problema de autovalor do tipo Zaremba em* $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$*, definido no Problema 5. Então vale*
$$\lambda_1^M(\Gamma_0) \geq \left(\frac{2N-3}{4d}\right)^2 \frac{2S_2(d+d_0)}{2N-3+2S_2(d+d_0)}, \tag{2.11}$$
sendo S_2 *a constante ótima na desigualdade de Friedrichs (veja [12], Teorema 1.9)*
$$S_2 = \inf_{u\in W^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Gamma_0)}}{\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}} \leq \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Gamma_0)}}{\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}},$$
a qual satisfaz $S_2 \leq \frac{|\Gamma_0|}{|\partial\Omega|}$ *(utilize a função* $u \equiv 1$*) e* $d = \operatorname{diam}(\Omega)$ *é o diâmetro de* Ω*.*

Demonstração. Da desigualdade de Friedrichs, com a primeira autofunção ($\|u_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$) do problema de autovalor misto, tem-se

$$\lambda_1^M(\Gamma_0) \geq \Big(\frac{2N-3}{4d}\Big)^2 - \frac{2N-3}{2(d+d_0)}\|u_1\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq \Big(\frac{2N-3}{4d}\Big)^2 - \frac{2N-3}{2S_2(d+d_0)}\lambda_1^M(\Gamma).$$

Daí,

$$\Big(\frac{2S_2(d+d_0)+2N-3}{2S_2(d+d_0)}\Big)\lambda_1^M(\Gamma_0) \geq \Big(\frac{2N-3}{4d}\Big)^2.$$

Em consequência,

$$\lambda_1^M(\Gamma_0) \geq \Big(\frac{2N-3}{4d}\Big)^2 \frac{2S_2(d+d_0)}{2N-3+2S_2(d+d_0)}.$$

□

Observação 11.

- *Se a porção Γ_0 reduz-se, então $S_2 \to 0$. Logo $\lambda_1^M(\Gamma_0) \geq \Big(\frac{2N-3}{4d}\Big)^2 \frac{2S_2(d+d_0)}{2N-3+2S_2(d+d_0)} \to 0$, isto é o caso Neumann.*

- *Se a porção Γ_0 aumenta, então $S_2 \leq \frac{|\Gamma_0|}{|\partial\Omega|} \leq 1$. Logo $\Big(\frac{2N-3}{4d}\Big)^2 \frac{2S_2(d+d_0)}{2N-3+2S_2(d+d_0)} \leq \frac{N^2}{16d^2} \leq \frac{N^2}{4d^2} \leq \lambda_1^D(\Omega)$, isto é o caso Dirichlet.*

- *Em geral, neste tipo de problema pede-se que o domínio Ω seja convexo. Esta hipótese não foi necessária nestas estimativas.*

Condições necessárias para existência de soluções

Agora vamos aplicar as estimativas feitas na seção anterior no estudo do problema de autovalor com peso e assim estabelecer condições necessárias para a existência de soluções do Problema 4.

Teorema 20. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ um domínio limitado e com fronteira Lipschitz. Sejam $u \in H^1(\Omega)$ uma solução não trivial[5] do Problema 4 e $V \in L^\infty(\Omega)$, com $V \not\equiv 0$. Então a seguinte desigualdade é válida*

$$\|V\|_{\infty,\Omega} \geq \Big(\frac{\pi}{\text{diam}(\Omega)}\Big)^2 \cdot C(N,\Gamma_1,\Omega). \tag{2.12}$$

Demonstração. Sobre a solução u temos as seguintes possibilidades:

1) $u(x) > 0, \;\; \forall x \in \Omega,$

2) $\overline{\{u(x)=0,\ x\in\Omega\}} \subset\subset \Omega,$

3) $\overline{\{u(x)=0,\ x\in\Omega\}} \cap \partial\Omega \neq \emptyset.$

Caso 1) Seja φ_1 a primeira autofunção não constante do problema de Neumann em Ω. Desde que $u \in H^1(\Omega)$, temos o seguinte:

$$\|V\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \frac{\int_\Omega Vu^2}{\int_\Omega u^2} = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \geq \inf_{w\in H^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla w|^2}{\int_\Omega w^2} = \frac{\int_\Omega |\nabla \varphi_1|^2}{\int_\Omega \varphi_1^2} = \lambda_1^N(\Omega).$$

[5] dizemos que u é não trivial se $u \neq 0$ quando $V \neq 0$ e $u \neq 0$ ou $u \neq 1$ se $V \equiv 0$.

Agora, se Ω não for convexo, então tome a envoltória convexa de Ω, a qual denotaremos por $co(\Omega)$. Daí,

$$\begin{aligned}
\lambda_1^N(co(\Omega)) &= \inf_{w\in H^1(co(\Omega))} \frac{\int_{co(\Omega)} |\nabla w|^2}{\int_{co(\Omega)} w^2} = \inf_{w\in H^1(co(\Omega))} \frac{\int_\Omega |\nabla \varphi_1|^2 + \int_{co(\Omega)\setminus\Omega} |\nabla w|2}{\int_\Omega w^2 + \int_{co(\Omega)\setminus\Omega} w^2} \\
&\leq \inf_{w\in H^1(co(\Omega))} \frac{\int_\Omega |\nabla w|^2}{\int_\Omega w} + \inf_{w\in H^1(co(\Omega))} \frac{\int_{co(\Omega)\setminus\Omega} |\nabla w|^2}{\int_{co(\Omega)\setminus\Omega} w^2} \\
&\leq \inf_{w\in H^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla w|^2}{\int_\Omega w^2} + \inf_{w\in H^1(co(\Omega)\setminus\Omega)} \frac{\int_{co(\Omega)\setminus\Omega} |\nabla w|^2}{\int_{co(\Omega)\setminus\Omega} w^2} \\
&\leq \lambda_1^N(\Omega) + \lambda_1^N(co(\Omega)\setminus\Omega).
\end{aligned}$$

Pelos resultados de Weinberg [32], Payne e Weinberg [33] (veja também- [21], seção 3); para um domínio simplesmente conexo $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n$, temos

$$\lambda_1^N(\mathscr{U}) \leq \left(\frac{|\omega_n|}{|\mathscr{U}|}\right)^{2/N} j^2_{\frac{n}{2},1} = \lambda_1^N(\mathscr{U}^\star),$$

onde ω_n representa a bola unitária em dimensão N, e $j_{\frac{n}{2},1}$ denota o primeiro zero positivo da derivada da função de Bessel $t^{1-n/2}J_{n/2}(t)$, e $\mathscr{U}^\star$ denota a simetrização de $\mathscr{U}$, isto é, a bola cujo volume $|\mathscr{U}^\star| = |\mathscr{U}|$. Tomando a bola $(co(\Omega)\setminus\Omega)^\star$ (simetrização de $(co(\Omega)\setminus\Omega)$), cujo volume $|(co(\Omega)\setminus\Omega)^\star| = |(co(\Omega)\setminus\Omega)|$, obteremos

$$\lambda_1^N(co(\Omega)) \leq \lambda_1^N(\Omega) + \lambda_1^N((co(\Omega)\setminus\Omega)^\star) \leq \lambda_1^N(\Omega) + \left(\frac{|\omega_N|}{|(co(\Omega)\setminus\Omega)^\star|}\right)^{2/N} j^2_{\frac{n}{2},1},$$

relacionada a bola $(co(\Omega)\setminus\Omega)^\star$. Portanto,

$$\lambda_1^N(\Omega) \geq \lambda_1^N(co(\Omega)) - \left(\frac{|\omega_N|}{|(co(\Omega)\setminus\Omega)^\star|}\right)^{2/N} j^2_{\frac{n}{2},1} \geq \left(\frac{\pi}{\operatorname{diam}(co(\Omega))}\right)^2 - \left(\frac{|\omega_N|}{|(co(\Omega)\setminus\Omega)^\star|}\right)^{2/N} j^2_{\frac{n}{2},1}.$$

Em qualquer situação, temos

$$\|V\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \lambda_1^N(\Omega).$$

Antes de prosseguir necessitamos

Definição 23. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $u \in H^1(\Omega)$ solução não trivial do Problema 4, a qual muda de sinal em Ω. Defina a parte positiva de Ω com respeito a u por:*

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega \;:\; u(x) > 0\},$$

e então

$$\Gamma_0^+ = \{x \in \Omega \cap \partial\Omega_+ \;:\; u(x) = 0\} \subset \Omega$$

e

$$\Gamma_1^+ = \partial\Omega_+ - \Gamma_0^+ \subset \partial\Omega.$$

Caso 2) ($\Omega_+ \subset \Omega$ tal que $\partial\Omega_+ \subset \Omega$):

Neste caso $u = 0$ para cada $x \in \partial\Omega_+$. Considere ϕ a autofunção associada ao primeiro autovalor do problema de Dirichlet em Ω_+. Multiplicando a equação $-\Delta u = Vu$ por ϕ e integrando em Ω_+ tem-se

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega_+} V(x)u\phi dx = -\int\limits_{\Omega_+} \phi \Delta u dx = \int\limits_{\Omega_+} \nabla\phi \cdot \nabla u dx - \int\limits_{\partial\Omega_+} \phi \frac{\partial u}{\partial \eta} ds_x \\
= \int\limits_{\Omega_+} \nabla\phi \cdot \nabla u dx = -\int\limits_{\Omega_+} u\Delta\phi dx + \int\limits_{\partial\Omega_+} u \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds_x \\
= \int\limits_{\Omega_+} \lambda_1^D(\Omega_+) u\phi dx.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\int\limits_{\Omega_+} \big(V(x) - \lambda_1^D(\Omega_+)\big) u\phi dx = 0.$$

Em consequência,

$$\|V\|_{\infty,\Omega_+} \geq \lambda_1^D(\Omega_+).$$

Portanto, da monotonicidade com respeito ao domínio para o primeiro autovalor do problema de Dirichlet, tem-se

$$\|V\|_{\infty,\Omega} \geq \|V\|_{\infty,\Omega_+} \geq \lambda_1^D(\Omega_+) \geq \lambda_1^D(\Omega).$$

Logo, para $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, do Lema 1 e Pólya [34]($\lambda_1^D(\Omega) > \lambda_1^N(\Omega)$) segue que:

$$\|V\|_{\infty,\Omega} \geq \|V\|_{\infty,\Omega_+} \geq \lambda_1^D(\Omega_+) \geq \lambda_1^D(\Omega) \geq \min\left\{\lambda_1^M(\Omega),\ \lambda_1^N(\Omega)\right\}.$$

Como acima, caso Ω não seja convexo, podemos obter uma estimativa em função da envoltória convexa.

Caso 3 ($\Omega_+ \subsetneq \Omega$, tal que $\partial\Omega_+ \cap \partial\Omega \neq \emptyset$):

Nesse caso então $\partial\Omega_+ = \Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^+$, onde $\Gamma_0^+ = \partial\Omega_+ \cap \Omega$ e $\Gamma_1^+ = \partial\Omega_+ - \Gamma_0^+$. Seja ϕ autofunção associada ao primeiro autovalor do problema de Zaremba sobre Ω_+

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v, & x \in \Omega_+, \\ v = 0, & x \in \Gamma_0^+, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, & x \in \Gamma_1^+. \end{cases}$$

Então multiplicando ϕ na equação $-\Delta u = Vu$ sobre Ω_+ e integrando com ajuda da segunda identidade de Green, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega_+} V(x)u\phi dx = -\int\limits_{\Omega_+} \phi \Delta u dx = \int\limits_{\Omega_+} \nabla\phi \cdot \nabla u dx - \int\limits_{\Gamma_0^+} \phi \frac{\partial u}{\partial \eta} ds_x - \int\limits_{\Gamma_1^+} \phi \frac{\partial u}{\partial \eta} ds_x \\
= \int\limits_{\Omega_+} \nabla\phi \cdot \nabla u dx = -\int\limits_{\Omega_+} u\Delta\phi dx + \int\limits_{\Gamma_0^+} u \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds_x + \int\limits_{\Gamma_1^+} u \frac{\partial \phi}{\partial \eta} ds_x \\
= \int\limits_{\Omega_+} \lambda_1^M(\Gamma_0^+) u\phi dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|V\|_{\infty,\Omega_+} \geq \lambda_1^M(\Gamma_0^+). \tag{2.13}$$

Por outro lado, dada a função ϕ definida sobre Ω_+ podemos construir a seguinte extensão

$$\Phi = \begin{cases} \phi, & x \in \Omega_+, \\ 0, & x \in \overline{\Omega} - \Omega_+. \end{cases}$$

A função $\Phi \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)$ sendo $\Gamma_0 = \partial\Omega - \Gamma_1^+$ já que $\phi \in W^{1,2}_{\Gamma_0^+}(\Omega_+)$, além disso

$$\lambda_1^M(\Gamma_0) = \inf_{u \in W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla \Phi|^2 dx}{\int_\Omega \Phi^2 dx} = \frac{\int_{\Omega_+} |\nabla \phi|^2 dx}{\int_{\Omega_+} \phi^2 dx},$$

em consequência,

$$\lambda_1^M(\Gamma_0) \leq \lambda_1^M(\Gamma_0^+). \tag{2.14}$$

Daí juntando (2.13) e (2.14) ao Lema 1, tem-se

$$\|V\|_{\infty,\Omega} \geq \|V\|_{\infty,\Omega_+} \geq \lambda_1^M(\Gamma_0^+) \geq \lambda_1^M(\Gamma_0) \geq \left(\frac{\pi}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^2 C(N,\Gamma_1,\Omega).$$

□

Relação com o núcleo do calor

Iremos supor em toda esta subseção que a solução do Problema 4 muda de sinal em Ω.

Teorema 21. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ um domínio convexo, limitado e con fronteira Lipschitz e $u \in H^1(\Omega)$ uma solução não trivial do Problema 4. Então para $R = |\Gamma_0^+|$, tem-se*

$$\|V\|_{\infty,\Omega} \geq \min\left\{c_2(\Omega)\frac{R^{\frac{N-2}{N-1}}}{|\Omega|}, \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^2\right\}. \tag{2.15}$$

Demonstração. Pelas estimativas anteriores temos:

$$\|V\|_{\infty,\Omega_+} \geq \lambda_1(\Gamma_0^+). \tag{2.16}$$

Por outro lado, para $E(x,y,t)$ o núcleo de calor, o qual é solução de:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}E(x,y,t) = \Delta E(x,y,t) \text{ para quaisquer } t > 0 \text{ e } x,y \in \Omega_+, \\ \frac{\partial}{\partial \eta}E(x,y,t) = 0, \text{ para } x \in \partial\Omega_+ \text{ ou } y \in \partial\Omega_+, \end{cases}$$

e $\overline{E} := E - \frac{1}{|\Omega_+|}$ o núcleo reduzido e seja W dado por

$$W(\zeta) = \frac{|\Gamma_0^+|^2}{\zeta|\Omega_+|} + \int_0^\infty e^{\zeta t} \int_{\Gamma_0^+} \int_{\Gamma_0^+} \overline{E}(x,y,t) dS_x dS_y dt \tag{2.17}$$

De Denzler [19, Teorema 1] temos que ζ_1, o primeiro zero de $W(\zeta)$, é uma cota inferior para o primeiro autovalor do problema de Zaremba. Isto é

$$\lambda_1(\Gamma_0^+) \geq \zeta_1. \tag{2.18}$$

Daí, decorre de Denzler [19, Equaçõ 13] a seguir

$$\frac{|\Gamma_0^+|^2}{\zeta|\Omega_+|} \leq \int_0^T e^{\zeta t} \int_{\Gamma_0^+}\int_{\Gamma_0^+} E(x,y,t)dS_x dS_y dt + |\Gamma_0^+|^2 c_1(T)\int_T^\infty e^{(\zeta-\lambda_1)t}dt.$$

Consequentemente, utilizando as equações 13, 14, 15 e 16 de Denzler (veja [19]) tem-se

$$\begin{aligned}
|\Gamma_0^+|^2\Big(\frac{1}{|\Omega_+|\zeta} - \frac{c_1(T)e^{-(\lambda_1-\zeta)T}}{\lambda_1-\zeta}\Big) &\leq c_0(T)\int_0^T e^{\zeta t}\int_{\Gamma_0^+}\int_{\Gamma_0^+} t^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{5t}} dS_x dS_y dt \\
&\leq c_0(T)e^{\lambda_1 T}\int_0^\infty t^{-\frac{N}{2}}\int_0^1 \mu(\{(x,y)\in\Gamma_0^+\times\Gamma_0^+ | e^{-\frac{|x-y|^2}{5t}} \geq h\})dhdt \\
&= c_0(T)e^{\lambda_1 T}\int_0^\infty t^{-\frac{N}{2}}\int_0^\infty \frac{2l}{5t}e^{-\frac{l^2}{5t}}\mu(\{(x,y)\in\Gamma_0^+\times\Gamma_0^+ | |x-y|\leq l\})dldt \\
&\leq c_0(T)e^{\lambda_1 T}\int_0^\infty t^{-\frac{N}{2}}\int_0^\infty \frac{2l}{5t}e^{-\frac{l^2}{5t}}\mu(\Gamma)h_{N-1}\min(l,l_{\Gamma_0^+})^{N-1}dldt \\
&\leq \frac{2}{5}c_0(T)e^{\lambda_1 T}h_{N-1}\Big[\int_0^{\frac{l_\Gamma^2}{5}} t^{-\frac{N}{2}-1}\int_0^\infty l^N e^{\frac{l^2}{5t}}dldt + \int_{\frac{l_\Gamma^2}{5}}^\infty t^{-\frac{N}{2}-1} l_\Gamma^{N-1}\int_0^\infty l e^{-\frac{l^2}{5t}}dldt\Big] \\
&\leq \frac{2}{5}c_0(T)e^{\lambda_1 T}h_{N-1}c_\Gamma l_\Gamma = \frac{2}{5}c_0(T)e^{\lambda_1 T}c_{\Gamma_0^+}h_{N-1}^{\frac{N-2}{N-1}}|\Gamma_0^+|,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

em que h_{N-1} é a área da metade da bola unitária de $\mathbb{R}^N$ e $l_{\Gamma_0^+}$ é definido para satisfazer

$$h_{N-1}l_{\Gamma_0^+}^{N-1} = |\Gamma_0^+|.$$

Vamos obter uma estimativa inferior para ζ_1. Para isso vamos supor que $\zeta_1 \leq \frac{\lambda_1}{2}$ (pois em outro caso já teríamos uma estimativa por baixo para ζ_1) tomando T suficientemente grande de modo que $c_1(T)e^{-\frac{\lambda_1 T}{2}} \leq \frac{1}{2|\Omega_+|}$, tem-se

$$\zeta_1 \geq \frac{5|\Gamma_0^+|^{\frac{N-2}{N-1}}}{4c_0(T)e^{\lambda_1 T}c_{\Gamma_0^+}h_{N-1}^{\frac{N-2}{N-1}}|\Omega_+|}. \tag{2.20}$$

Logo, de (2.16), (2.18), (2.20) e $\Omega_+ \subset \Omega$ segue-se

$$\begin{aligned}
\|V\|_{\infty,\Omega} \geq \|V\|_{\infty,\Omega_+} \geq \lambda_1(\Gamma_0) &\geq \min\Big\{c_2(\Omega)\frac{R^{\frac{N-2}{N-1}}}{|\Omega_+|}, \frac{\lambda_1^N(\Omega_+)}{2}\Big\} \\
&\geq \min\Big\{c_2(\Omega)\frac{R^{\frac{N-2}{N-1}}}{|\Omega|}, \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{\text{diam}(\Omega)}\Big)^2\Big\},
\end{aligned}$$

em que $c_2(\Omega) = \frac{5}{4c_0(T)e^{\lambda_1 T}c_\Gamma h_{N-1}^{\frac{N-2}{N-1}}}$.

□

Aplicação do resultado

No que segue aplicaremos os Teoremas 20 e 21 no estudo da não existência de soluções ($u \in H^1(\Omega)$) positivas não constantes para o Problema 6, descrito no início deste capítulo. Alguns resultados já estabelecidos nesta direção foram mostrados por Lin, Ni e Takagi em [28] e [29]. Dentre esses resultados o mais relevante que eles estabeleceram foi o seguinte:

Proposição 1. *Seja $p > 1$, se $N = 1$ ou $N = 2$, e seja $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$, então a seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, Problema 6 tem uma solução positiva não constante w.*

2. *Existe uma constante C independente de ε tal que $\sup_{x\in\Omega} w(x) \leq C$ para qualquer solução positiva do Problema 6.*

Quando mencionarmos o Problema 6 , vamos fazer referência à seguinte, dada no formato do problema 4, isto é:

$$\begin{cases} -\Delta w = V_\varepsilon w, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.21}$$

em que $\varepsilon > 0$ e $V_\varepsilon = \frac{w^{p-1}-1}{\varepsilon}$.

Lema 3. *Suponha que w é limitada e não negativa, não necessariamente solução do Problema (2.21). Então*

$$\|w-1\|_{\infty,\Omega} = \max\{\|w\|_{\infty,\Omega} - 1, 1 - \inf_{x\in\Omega} w\} = \begin{cases} \|w\|_{\infty,\Omega} - 1, \text{ se } \|w\|_{\infty,\Omega} + \inf_{x\in\Omega} w \geq 2, \\ 1 - \inf_{x\in\Omega} w, \text{ se } \|w\|_{\infty,\Omega} + \inf_{x\in\Omega} w \leq 2. \end{cases}$$

Demonstração. Se $\|w-1\|_{\infty,\Omega} = a$ então $\sup_{x\in\Omega} |w(x) - 1| = a$. Ou seja para todo $\varepsilon > 0$ existe $x_0 \in \Omega$ tal que $a - \varepsilon < |w(x_0) - 1|$.

Caso 1 (se $w(x_0) > 1$): Temos $a - \varepsilon < w(x_0) - 1$ portanto $a + 1 - \varepsilon < w(x_0)$, isto é, $\sup_{x\in\Omega} |w| = a + 1$. Em consequência, $a = \|w\|_{\infty,\Omega} - 1$.

Caso 2 (se $w(x_0) < 1$): Temos que $a - \varepsilon < 1 - w(x_0)$, portanto $w(x_0) < 1 - a + \varepsilon$, isto é, $\inf_{x\in\Omega} w = 1 - a$. Em consequência $a = 1 - \inf_{x\in\Omega} w$.

Decorre que $\|w-1\|_{\infty,\Omega} = \max\{\|w\|_{\infty,\Omega} - 1, 1 - \inf_{x\in\Omega} w\}$. Finalmente, para mostrar a outra igualdade, basta perceber que $\|w\|_{\infty,\Omega} + \inf_{x\in\Omega} w \geq 2$ implica em $\|w\|_{\infty,\Omega} - 1 \geq 1 - \inf_{x\in\Omega} w$, isto é, $\max\{\|w\|_{\infty,\Omega} - 1, 1 - \inf_{x\in\Omega} w\} = \|w\|_{\infty,\Omega} - 1$. Em forma análoga, se $\|w\|_{\infty,\Omega} + \inf_{x\in\Omega} w \leq 2$ tem-se $\max\{\|w\|_{\infty,\Omega} - 1, 1 - \inf_{x\in\Omega} w\} = 1 - \inf_{x\in\Omega} w$

□

Lema 4. *Seja w uma solução positiva não constante do Problema 6, temos que $\inf_{x\in\Omega} w$ e $\sup_{x\in\Omega} w$ são atingidos no interior de Ω.*

Demonstração. De Lin, Ni e Takagi em [28, Observação 1.3], suponha que exista um $x_0 \in \partial\Omega$ que atinge o supremo de w em $\overline{\Omega}$ e definamos $v = \sup_{x\in\Omega} w - w$, segue que $v \geq 0$ e $v(x_0) = 0$. Além disso, para alguma bola $B(y,r) \subset \Omega$ satisfazendo $B(y,r) \cap (\mathbb{R}^N \backslash \Omega) = \{x_0\}$, tem-se $\Delta v = -\Delta w = V_\varepsilon w \geq 0$ em $B(y,r)$, (onde $V_\varepsilon = \frac{w^{p-1}-1}{\varepsilon}$); portanto, do lema de Hopf, segue-se $\frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) = -\frac{\partial w}{\partial \eta}(x_0) < 0$; isto contradiz a condição de fronteira. De forma análoga, definindo $v = w - \inf_{x\in\Omega} w$ monstra-se que o $\inf_{x\in\Omega} w$ é atingido no interior.

□

Lema 5. *Dada w, uma solução positiva e não constante do Problema 6, tem-se* $\inf_{x\in\Omega} w < 1 < \sup_{x\in\Omega} w$*, a menos que* $w \equiv 1$.

Demonstração. De fato, seja $x_0 \in \Omega$ tal que $w(x_0) = \inf_\Omega w$. Então,

$$0 \geq -\Delta w(x_0) = \frac{(w^{p-1}(x_0) - 1)}{\varepsilon} w(x_0).$$

Daí, $w(x_0)^{p-1} \leq 1$, isto é, $w(x_0) \leq 1$. Se $w(x_0) = 1$, então defina a função $v = w - 1$. Segue-se que

$$-\Delta v = -\Delta w = w^p - w \geq 0, \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad \text{sobre} \;\; \partial\Omega.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \Delta v = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

De onde concluímos que v é harmônica, $v \geq 0$ e $v(x_0) = 0$. Pelo princípio do máximo para funções harmônicas temos que $v \equiv 1$. Contradição. Assim, $\inf_{x\in\Omega} w < 1$. Analogamente, se w tem máximo em $x_0 \in \Omega$. Então $\sup_{x\in\Omega} w > 1$. □

Lema 6. *Seja $w \geq 0$ uma solução positiva não constante do Problema 6 e $q > 0$. Então*

1. $\inf_{x\in\Omega} w^q = \left(\inf_{x\in\Omega} w\right)^q$.
2. $\sup_{x\in\Omega} w^q = \left(\sup_{x\in\Omega} w\right)^q$.

Demonstração. Pelo Lema 4 temos que o ínfimo e o supremo de w são atingidos no interior de Ω. Logo, para demonstrar a primeira afirmação tomaremos $x_0 \in \Omega$ for tal que $\inf_{x\in\Omega} w = w(x_0) = a \geq 0$, então $w^q(x_0) = a^q$, portanto, $\inf_{x\in\Omega} w^q \leq a^q$. Por outro lado, $w(x) \geq a$ implica $w^q(x) \geq a^q$ e, consequentemente, $\inf_{x\in\Omega} w^q \geq a^q$. Daí segue-se que $\inf_{x\in\Omega} w^q = a^q = (\inf_{x\in\Omega} w)^q$.

Para demonstrar a segunda afirmação bastaria tomar $x_1 \in \Omega$ tal que $\sup_{x\in\Omega} w = w(x_1) = b$, então $w^q(x_1) = b^q$, portanto, $\sup_{x\in\Omega} w^q \geq b^q$. Por outro lado, $w(x) \leq b$ implica $w^q(x) \leq b^q$ e, consequentemente $\sup_{x\in\Omega} w^q \leq b^q$. Daí, segue-se que $\sup_{x\in\Omega} w^q = b^q = (\sup_{x\in\Omega} w)^q$.

□

Observação 12.

- *Dos Lemas 3 e 6 podemos concluir*

$$\|w^{p-1} - 1\|_{\infty,\Omega} = \begin{cases} \|w\|_\infty^{p-1} - 1, \text{se } \|w\|_{\infty,\Omega}^{p-1} + (\inf_{x\in\Omega} w)^{p-1} \geq 2, \\ 1 - (\inf_{x\in\Omega} w)^{p-1}, \text{se } \|w\|_{\infty,\Omega}^{p-1} + (\inf_{x\in\Omega} w)^{p-1} \leq 2, \end{cases}$$

para $p > 1$

- *Se ε for suficientemente grande, então* $\frac{\|w^{p-1}-1\|_{\infty,\Omega}}{\varepsilon} < \left(\frac{\pi}{\text{diam}(\Omega)}\right)^2 \cdot C(N, \Gamma_1, \Omega)$*. Daí o Teorema 20 mostra que, para $\varepsilon > \varepsilon^*$ suficientemente grande, o problema não tem solução não constante. Esta observação é importante, já que em [28] tal resultado é obtido após contas.*

No próximo teorema vamos estabelecer uma melhor cota para ε^* em função de Ω e p. Definamos $M = \max\{A,B\} > 0$ onde A e B são dados por

$$A = \Big(\frac{\pi}{\mathrm{diam}(\Omega)}\Big)^2 \cdot C(N,\Gamma_1,\Omega),$$
$$B = \min\Big\{c_2(\Omega)\frac{R^{\frac{N-2}{N-1}}}{|\Omega|}, \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{\mathrm{diam}(\Omega)}\Big)^2\Big\}.$$

Teorema 22. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 3$ um domínio convexo, limitado e Lipschitz, com $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$. Seja ε^* dado por*

$$\varepsilon^* = \max\{\frac{C^{p-1}-1}{M}, \frac{1}{M}\}.$$

Então, se w for uma solução positiva não constante do Problema 6, tem-se que $\varepsilon < \varepsilon^*$, sendo C uma constante independente de ε dada na Proposição 1.

Observação 13. *O resultado é valido para o caso $N = 2$ com $p > 1$, trocando ε^* do teorema por*

$$\varepsilon^* = \max\{\frac{C^{p-1}-1}{A}, \frac{1}{A}\},$$

já que a desigualdade com B é so válida para $N \geq 3$.

Demonstração do teorema: Seja a função w uma solução não trivial do Problema 6 no formato (2.21), então $V_\varepsilon = \frac{w^{p-1}-1}{\varepsilon}$ satisfaz

$$\|V_\varepsilon\|_{\infty,\Omega} = \frac{\|w^{p-1}-1\|_{\infty,\Omega}}{\varepsilon} = \frac{\max\{\|w\|_\infty^{p-1}-1, 1-\inf w\}}{\varepsilon}$$
$$= \begin{cases} \frac{\|w\|_\infty^{p-1}-1}{\varepsilon}, \text{se } \|w\|_\infty^{p-1} + (\inf_{x\in\Omega} w)^{p-1} \geq 2, \\ \frac{1-(\inf_{x\in\Omega} w)^{p-1}}{\varepsilon}, \text{se } \|w\|_\infty^{p-1} + (\inf_{x\in\Omega} w)^{p-1} \leq 2. \end{cases}$$

<u>Caso 1:</u> (Se $\|w\|^{p-1} + (\inf_{x\in\Omega} w)^{p-1} \geq 2$) Pelo Teorema 20, tem-se

$$\|V_\varepsilon\|_{\infty,\Omega} = \frac{\|w\|_\infty^{p-1}-1}{\varepsilon} \geq M.$$

Consequentemente,

$$\frac{C^{p-1}-1}{\varepsilon} \geq M.$$

Daí, para $\varepsilon > \varepsilon_1 = \frac{C^{p-1}-1}{M}$, não existe solução para o Problema 6.
<u>Caso 2:</u> (Se $\|w\|^{p-1} + (\inf_{x\in\Omega} w)^{p-1} \leq 2$) Tem-se

$$\|V\|_{\infty,\Omega} = \frac{1-(\inf_{x\in\Omega} w)^{p-1}}{\varepsilon} \geq M.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{\varepsilon} \geq M.$$

Daí, para $\varepsilon > \varepsilon_2 = \frac{1}{M}$ não existe solução para o Problema 6. Portanto bastaria pegar $\varepsilon^* = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Assim, para $\varepsilon > \varepsilon^*$ o Problema 6 não possui solução.

$\square$

Capítulo 3

Equação poli-harmônica com condição de Robin no semi-espaço $\mathbb{R}_+^N$

Neste capítulo iremos estudar o seguinte problema:
Problema 7.

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = 0, & x \in \mathbb{R}_+^N \\ \lambda(-\Delta)^j u + \frac{\partial}{\partial\eta}(-\Delta)^j u = u|u|^{\rho-1} + f_j, & x \in \partial\mathbb{R}_+^N, \ j = 0, 1, \cdots, m-1, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $N > 2m$, $\lambda > 0$, $\rho > 1$, $f_j \not\equiv 0$ e η é o vetor normal unitário apontando para fora do semi-espaço $\mathbb{R}_+^d$.

Esse problema foi motivado por:

$$\begin{cases} (-\Delta)u = 0, & x \in \mathbb{R}_+^N \\ \lambda(-\Delta)u + \frac{\partial}{\partial\eta}(-\Delta)u = u|u|^{\rho-1} + f, & x \in \partial\mathbb{R}_+^N, \end{cases} \tag{3.2}$$

em que $N > 2$, $\lambda > 0$, $\rho > 1$ e η é o vetor normal unitário apontando para fora do semi-espaço.

Ferreira, Montenegro e Medeiros, no artigo [14], mostraram que para $f \not\equiv 0$ o problema citado na equação (3.2) possui uma única solução u no espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$ a qual possui a propriedade de ficar dentro da bola de raio 2ε do espaço. A técnica deles está baseada na construção da função de Green associada com esse problema e conseguir estimativas a seguir de aplicações da desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev.

Iremos mostrar que tais resultados são possíveis de ser estendidos para o caso de trocar o Laplaciano, pelo operador poli-harmônico, e considerando uma generalização da condição de fronteira dada na segunda equação de (3.1).

Vamos dividir o capítulo em quatro seções. Na primeira iremos colocar os conceitos preliminares e algumas estimativas envolvendo a função de Green do problema acima. Na segunda seção iremos utilizar as contas feitas na primeira seção para mediante argumentos de ponto fixo expor os resultados de existência da solução para o Problema 7 sendo o mais relevante deles o Teorema 23,enunciado como Teorema 1 na introdução, posteriormente, falaremos de algumas situações mais gerais, e finalmente, faremos uma seção na qual iremos expor algumas propriedades qualitativas da solução.

Preliminares

Nesta seção vamos introduzir resultados importantes com o intuito de conseguir uma expressão para a função de Green do operador poli-harmônico. Assim, começaremos a estudar a função de Green para o problema seguinte:

$$(-\Delta)^m u = f, \qquad x \in \mathbb{R}^N_+,$$

sendo $m \geq 1$, $N \geq 2m$, $m, N \in \mathbb{N}$ e $(-\Delta)^m = \underbrace{(-\Delta) \circ \cdots \circ (-\Delta)}_{m \text{ vezes}}$.

Observação 14. *No caso $m = 0$, teremos $(-\Delta)^0 = I$, sendo I é o operador identidade.*

Posteriormente vamos fazer uso da função de Green para construir uma solução do Problema 7. Começaremos utilizando as condições de fronteira associadas ao problema para conseguir uma única expressão para a função de Green do problema e com isto conseguiremos uma expressão para a solução. Logo enunciaremos nos Lemas 7 e 8 abaixo algumas estimativas desta função de Green, as quais irão ser uteis na próxima seção para estabelecer o resultado principal deste capítulo.

Definição 24. *Dado o inteiro $m \geq 1$ a solução poli-harmônica (ou fundamental) para o operador $(-\Delta)^m$, é definida por*

$$\phi(x-y) = \begin{cases} C_{N,m}|x-y|^{2m-N}, & N > 2m, \\ C_m \ln \frac{1}{|x-y|}, & N = 2m. \end{cases} \tag{3.3}$$

Observação 15. *A solução fundamental para o operador $(-\Delta)^m$ dada por (3.3), coincide com a solução fundamental do operador de Laplace quando $m = 1$.*

Observação 16. *As constantes $C_{N,m}$ e C_m são escolhidas de modo que:*

$$(-1)^m \int_{\partial B_r(0)} \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta^{m-1} \phi(x,0) dS_x = 1,$$

isto é,

$$C_{N,m} = \frac{1}{2^{2m-1} \prod_{i=0}^{m-1} \left(\frac{N}{2} - m + i\right)(m-1)!\sigma_N} = \frac{2\Gamma(\frac{N}{2} - m)}{2^{2m}(m-1)!\Gamma(\frac{N}{2})\sigma_N}, \quad N > 2m, \tag{3.4}$$

e

$$C_m = \frac{1}{\left(2^{m-1}(m-1)!\right)^2 \sigma_{2m}}, \qquad N = 2m.$$

Definição 25. *Seja ϕ a solução fundamental do problema poli-harmônico, e seja $H(x,y)$ uma função tal que $\Delta_x^m H(\cdot, y) = 0$, então definimos a função de Green por:*

$$G(x,y) = \phi(x-y) - H(x,y). \tag{3.5}$$

Definição 26. *Para $j = 0, \cdots, m-1$, defina a função*

$$\overline{G}_j(x,y) = (-\Delta_x)^j G(x,y) \qquad, j = 0, \cdots, m-1. \tag{3.6}$$

Claramente, no Problema 7, as funções $\overline{G}_j$ precisam satisfazer as seguintes equações:

$$\begin{cases} -\Delta_x \overline{G}_j = \overline{G}_{j+1}, & x \in \mathbb{R}^N_+,\ j = 0, \cdots, m-2, \\ -\Delta_x \overline{G}_{m-1} = \delta_y, & x \in \mathbb{R}^N_+, \\ \lambda \overline{G}_j + \frac{\partial}{\partial \eta} \overline{G}_j = 0, & x \in \mathbb{R}^{N-1},\ j = 0, \cdots, m-1. \end{cases} \tag{3.7}$$

Logo, substituindo as funções $\overline{G}_j$ associadas ao Problema 7 na equação (B.18) no apêndice B, temos

$$\begin{aligned} u(y) &= -\sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{m-k} u(x) \frac{\partial \overline{G}_{k-1}}{\partial \eta}(x,y) - \frac{\partial (-\Delta)^{m-k} u}{\partial \eta}(x) \overline{G}_{k-1}(x,y) dS_x \\ &= \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial (-\Delta)^{m-k} u}{\partial \eta}(x) \overline{G}_{k-1}(x,y) - (-\Delta)^{m-k} u(x) \frac{\partial \overline{G}_{k-1}}{\partial \eta}(x,y) dS_x \\ &= \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \overline{G}_{k-1}(x,y) \Big(\frac{\partial (-\Delta)^{m-k} u}{\partial \eta}(x) + \lambda (-\Delta)^{m-k} u(x) \Big) dS_x. \end{aligned}$$

Portanto, podemos expressar u da seguinte forma

$$u(x) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \overline{G}_{k-1}(x,y) \Big(u|u|^{\rho-1} + f_{m-k} \Big)(y) dy. \tag{3.8}$$

No espirito do artigo de Ferreira, Montenegro e Medeiros [14], isto sugere considerarmos os operadores $H_k(h)$, definidos a continuação.

Definição 27. *Se $h \in L^p(\mathbb{R}^{N-1})$. Então, para cada $k = 1, \cdots, m$ definimos os operadores*

$$H_k(h)(x) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \overline{G}_{k-1}(x,y) h(y) dy,$$

em que $\overline{G}_k$ é dada pela equação (3.6).

Observação 17. *Na sequência, comentaremos mais detalhadamente esta definição, além de mencionar quais são os valores adequados de p para que (por causa da desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev) a definição acima faça sentido.*

Daí, a equação (3.8) poderia ser escrita como

$$u(x) = \sum_{k=1}^{m} H_k(u|u|^{\rho-1} + f_{m-k})(x). \tag{3.9}$$

Para continuar nesta linha, precisamos de encontrar a expressão para a função de Green do problema poli-harmônico dado por (3.1) e, posteriormente, encontrar o espaço adequado onde as funções H_k estejam bem definidas.

Pela definição da função de Green temos que $G(x,y) = \phi(x-y) - H(x,y)$. Além disso, da terceira equação em (3.7) temos que a igualdade $\lambda \overline{G}_j + \frac{\partial}{\partial \eta} \overline{G}_j = 0$; deve ser satisfeita. Assim, denotando por e_N ao $N-$ésimo vetor canônico no $\mathbb{R}^N$, isto é, $e_N = (0, \cdots, 0, 1)$, tem-se para cada $x \in \partial \mathbb{R}^N_+$ e $y = (y_1, \cdots, y_N)$

$$\lambda H(x,y) + \frac{\partial}{\partial \eta} H(x,y) = \lambda \phi(x-y) + \frac{\partial}{\partial \eta} \phi(x-y) = \lambda \phi(x-\overline{y}) - \frac{\partial}{\partial \eta} \phi(x-\overline{y}),$$

isto é

$$\lambda H(x,y) - \frac{\partial}{\partial x_N} H(x,y) = \lambda \phi(x-\overline{y}) + \frac{\partial}{\partial x_N}\phi(x-\overline{y}).$$

Por outro lado, considerando a função $H(x,s,y)$ por

$$H(x,s,y) = H(x+se_N,y),$$

temos que

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{ds}\Big(e^{-\lambda s} H(x,s,y)\Big)\bigg|_{s=0} &= \lambda H(x,0,y) - \frac{\partial}{\partial x_N}H(x,0,y) = \lambda H(x,y) - \frac{\partial}{\partial x_N}H(x,y) \\
&= \lambda\phi(x-\overline{y}) + \frac{\partial}{\partial x_N}\phi(x-\overline{y}) \\
&= \lambda\phi(x+se_N-\overline{y}) + \frac{\partial}{\partial x_N}\phi(x+se_N-\overline{y})\Big|_{s=0}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Suponha que a desigualdade (3.10) seja válida para cada $s \geq 0$. Então, tem-se

$$\begin{aligned}
H(x,y) = H(x,0,y) &= -\int_0^\infty \frac{d}{ds}\big(e^{-\lambda s}H(x,s,y)\big)ds \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s}\phi(x+se_N-\overline{y}) + e^{-\lambda s}\frac{\partial\phi}{\partial x_N}(x+se_N-\overline{y})ds \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s}\phi(x+se_N-\overline{y})ds + \int_0^\infty e^{-\lambda s}\frac{\partial\phi}{\partial x_N}(x+se_N-\overline{y})ds \\
&= -e^{-\lambda s}\phi(x+se_N-\overline{y})\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda s}\frac{\partial\phi}{\partial x_N}(x+se_N-\overline{y})ds + \int_0^\infty e^{-\lambda s}\frac{\partial\phi}{\partial x_N}(x+se_N-\overline{y})ds \\
&= \phi(x-\overline{y}) + 2\int_0^\infty e^{-\lambda s}\frac{\partial\phi}{\partial x_N}(x+se_N-\overline{y})ds.
\end{aligned}$$

Como consequência, a expressão para a função de Green seria

$$G(x,y) = \phi(x-y) - \phi(x-\overline{y}) - 2\int_0^\infty e^{-\lambda s}\frac{\partial\phi}{\partial x_N}(x+se_N-\overline{y})ds. \tag{3.11}$$

Na sequência, vamos usar a seguintes notações[1]

$$\Omega_\lambda(x,y) = -2\int_0^\infty e^{-\lambda s}\frac{\partial\phi}{\partial x_N}(x+se_N-\overline{y})ds$$

e

$$G(x,y) = \phi(x-y) - \phi(x-\overline{y}) + \Omega_\lambda(x,y).$$

Evidentemente, a função de Green deveria ser denotada por G_λ; mas, dado que vamos precisar das iterações dela, vamos omitir esse parâmetro assumindo que ele já foi fixado desde o início para não sobrecarregar a notação. No entanto, vamos manter esse parâmetro na notação de Ω_λ.

[1] A justificativa da integrabilidade de $\int_0^\infty e^{-\lambda s}\frac{\partial\phi}{\partial x_N}(x+se_N-\overline{y})ds$ será exposta na Observação 19 abaixo.

Observação 18. *Observe que $G(x,y) = \Omega_\lambda(x,y)$ se $y \in \mathbb{R}^{N-1}$.*

Daqui em diante vamos assumir que $N > 2m$. Vamos começar por simplificar algumas expressões dadas acima.

Seja $\xi = \frac{x-\overline{y}}{|x-\overline{y}|}$. Tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_N}(x+se_N-\overline{y}) = C_{N,m}\frac{\partial}{\partial x_N}|x+se_N-\overline{y}|^{2m-N} = C_{N,m}(2m-N)\frac{x_N+y_N+s}{|x+se_N-\overline{y}|^{N-2(m-1)}}.$$

Portanto, se denotamos por $\overline{C_{N,m}} = -2C_{N,m}(2m-N)$, substituindo a expressão da N-ésima derivada parcial na definição de Ω_λ já que $|\xi+se_N|^{N-2(m-1)} = (\xi\cdot\xi+2se_N\cdot\xi+s^2e_N\cdot e_N)^{\frac{N-2(m-1)}{2}} = (1+2s\xi_N+s^2)^{\frac{N-2(m-1)}{2}}$ tem-se

$$\begin{aligned}
\Omega_\lambda(x,y) &= -2\int_0^\infty e^{-\lambda s}\frac{\partial \phi}{\partial x_N}(x+se_N-\overline{y})ds = \overline{C_{N,m}}\int_0^\infty e^{-\lambda s}\frac{x_N+y_N+s}{|x+se_N-\overline{y}|^{N-2(m-1)}}ds \\
&= \overline{C_{N,m}}\int_0^\infty e^{-\lambda|x-\overline{y}|w}\frac{(x_N+y_N+|x-\overline{y}|w)|x-\overline{y}|}{|x-\overline{y}+|x-\overline{y}|we_N|^{N-2(m-1)}}dw \\
&= \overline{C_{N,m}}\int_0^\infty e^{-\lambda|x-\overline{y}|w}\frac{(\xi_N+w)|x-\overline{y}|^2}{\big||x-\overline{y}|(\xi+we_N)\big|^{N-2(m-1)}}dw \\
&= \frac{\overline{C_{N,m}}}{|x-\overline{y}|^{N-2m}}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda|x-\overline{y}|s}(\xi_N+s)}{|\xi+se_N|^{N-2(m-1)}}ds \\
&= \frac{\overline{C_{N,m}}}{|x-\overline{y}|^{N-2m}}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda|x-\overline{y}|s}(\xi_N+s)}{(1+2s\xi_N+s^2)^{\frac{N-2(m-1)}{2}}}ds.
\end{aligned}$$

Observação 19. *Dado que $\frac{\xi_N+s}{(1+2s\xi_N+s^2)^{\frac{N-2(m-1)}{2}}}$ é limitada em qualquer intervalo compacto $[0,a]$ e, além disso,*

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\xi_N+s}{(1+2s\xi_N+s^2)^{\frac{N-2(m-1)}{2}}} = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^{N-2m+1}} = 0,$$

temos que essa função é limitada para $s \geq 0$. Daí é facil ver que, pelo teorema da convergencia dominada e estimativas no apêndice B, tem-se

$$|\nabla^k\Omega_\lambda(x,y)| \leq \frac{C}{|x-\overline{y}|^{N-2m+k}}.$$

Observação 20. *Dado que $|x-y| \leq |x-\overline{y}|$ para $x,y \in \overline{\mathbb{R}^N_+}$, então temos as seguintes estimativas:*

$$0 \leq G(x,y) \leq \frac{C}{|x-y|^{N-2m}} \qquad e \qquad |\nabla\Omega_\lambda(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{N-2m+1}}.$$

Observação 21. *Seja $\beta = (\beta_1,\cdots,\beta_N)$, observe que $D^\beta H_k(h) = 0$ para $|\beta| > 2(m-k+1)$ pois $(-\Delta)^m\Omega_\lambda = 0$. De fato*

$$\begin{aligned}
D^\beta H_k(h) &= D^\beta\int_{\mathbb{R}^{N-1}}(-\Delta)^{k-1}G(x,y)h(y)dy = (-1)^{k-1}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}D^{\beta+2k-2}G(x,y)h(y)dy \\
&= (-1)^{k-1}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}D^{\beta+2k-2}\Omega_\lambda(x,y)h(y)dy.
\end{aligned}$$

Daí, $D^\beta H_k = 0 \iff |\beta| + 2k - 2 > 2m$ *isto é* $|\beta| > 2(m-k+1)$.

Na sequência enunciaremos alguns lemas apresentando estimativas para os operadores H_k e suas derivadas.

Observação 21 será utilizada para afirmar trivialmente as desigualdades nos lemas a continuação no caso $2(m-k+1) < |\beta| \leq m$ para o qual não é possível aplicar a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev.

Lema 7. *Seja* $N > 2m$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_N)$, *então existem constantes* $C_1^k(N,m,q)$ *e* $C_2^k(N,m,q)$ *tais que*

1.
$$\|H_k(h)\|_{L^q(\mathbb{R}^N_+)} \leq C_1^k \|h\|_{L^{s_k}(\mathbb{R}^{N-1})}, \tag{3.12}$$
para $\frac{N}{N-2\big((m-k)+1\big)} < q < \infty$ *e* $s_k = \frac{(N-1)q}{N+\big(2(m-k)+1\big)q}$.

2.
$$\|D^\beta H_k(h)\|_{L^q(\mathbb{R}^N_+)} \leq C_2^k \|h\|_{L^{l_k}(\mathbb{R}^{N-1})}, \tag{3.13}$$
para $\frac{N}{N-1-\big(2(m-k)+1-|\beta|\big)} < q < \infty$ *e* $l_k = \frac{(N-1)q}{N+\big(2(m-k)+1-|\beta|\big)q}$.

Demonstração.

Prova de 1: Se $2(m-k+1) < |\beta| \leq m$, então a desigualdade é trivial e segue da Observação 21. Por outro lado, se $1 \leq |\beta| \leq 2(m-k+1)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|H_k(h)\|_{L^q(\mathbb{R}^N_+)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |H_k(h)(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} \Big| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \overline{G}_{k-1}(x,y)h(y)dy \Big|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Big| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \overline{G}_{k-1}(x,y)h(y)dy \Big|^q dx' dx_N \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^\infty \Big| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \overline{G}_{k-1}(x,y)h(y)dy \Big|^q dx_N dx' \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\Big| \int_0^\infty \Big\| H_k(h) \Big\|^q dx_N \Big|^{\frac{1}{q}} \right)^q dx' \right)^{\frac{1}{q}} = \Big\| \|H_k(h)\|_{L^q(dx_N)} \Big\|_{L^q(dx')}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Por outro lado, pela desigualdade integral de Minkowsky (veja Preliminares: Teorema 9), tem-se

$$\begin{aligned}
\|H_k(h)\|_{L^q(dx_N)} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \overline{G}_{k-1}(x', x_N, y)h(y)dy \right\|_{L^q(dx_N)} \leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left\| \overline{G}_{k-1}(x', x_N, y)h(y) \right\|_{L^q(dx_N)} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left\| \overline{G}_{k-1}(x', x_N, y) \right\|_{L^q(dx_N)} |h(y)| dy.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left\|\overline{G}_{k-1}(x',x_N,y)\right\|^q_{L^q(dx_N)} &\le C\int_0^\infty \frac{dx_N}{\big(|x'-y|+x_N\big)^{(N-2(m-k)-2)q}} \\ &= C\int_{|x'-y|}^\infty \frac{dw}{w^{(N-2(m-k)-2)q}} = \frac{C}{|x'-y|^{\big(N-2(m-k)-2\big)q-1}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Portanto, substituindo (3.15) e (3.16) em (3.14), tem-se

$$\begin{aligned} \|H_k(h)\|_{L^q(\mathbb{R}^N_+)} &= \Big\| \|H(h)\|_{L^q(dx_N)} \Big\|_{L^q(dx')} \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \|\overline{G}_{k-1}(x',x_N,y)\|_{L^q(dx_N)} |h(y)|dy \right\|_{L^q(dx')} \\ &\le C\left\| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|h(y)|dy}{|x'-y|^{\big(N-2(m-k)-2\big)-\frac{1}{q}}} \right\|_{L^q(dx')} \le C\|h\|_{L^{s_k}(dx')}. \end{aligned}$$

Essa última desigualdade é válida como consequência da desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev para $\alpha_k = 2(m-k)+\frac{1}{q}+1$. Além disso q e s_k mantém a seguinte relação

$$q = \frac{(N-1)r}{(N-1)-(2m-2k+1+\frac{1}{q})r},$$

a qual implica em

$$s_k = \frac{(N-1)q}{N+(2(m-k)+1)q},$$

e, já que $s_k > 1$, tem-se

$$\frac{N}{N-2\big((m-k)+1\big)} < q < \infty.$$

Prova de 2: Se $2(m-k+1) < |\beta| \le m$, então a desigualdade é trivial e segue da Observação 21. Por outro lado, se $1 \le |\beta| \le 2(m-k+1)$, tem-se

$$D^\beta H_k(h)(x) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D^\beta_x \overline{G}_{k-1}(x,y)h(y)dy.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|D^\beta H_k(h)\|_{L^q(\mathbb{R}^N_+)} &= \Bigg(\int_{\mathbb{R}^N_+} |D^\beta H_k(h)(x)|^q dx\Bigg)^{\frac{1}{q}} = \Bigg(\int_{\mathbb{R}^N_+} \Big|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} D^\beta \overline{G}_{k-1}(x,y)h(y)dy\Big|^q dx\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Bigg(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Big|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} D^\beta \overline{G}_{k-1}(x,y)h(y)dy\Big|^q dx' dx_N\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Bigg(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^\infty \Big|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} D^\beta \overline{G}_{k-1}(x,y)h(y)dy\Big|^q dx_N dx'\Bigg)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Bigg(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Bigg(\Big|\int_0^\infty \Big\|D^\beta H_k(h)\Big\|^q dx_N\Big|^{\frac{1}{q}}\Bigg)^q dx'\Bigg)^{\frac{1}{q}} = \Big\|\|D^\beta H_k(h)\|_{L^q(dx_N)}\Big\|_{L^q(dx')}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Por outro lado, pela desigualdade integral de Minkowsky, tem-se

$$\begin{aligned}
\|D^\beta H_k(h)\|_{L^q(dx_N)} &= \Bigg\|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} D^\beta \overline{G}_{k-1}(x',x_N,y)h(y)dy\Bigg\|_{L^q(dx_N)} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Big\|D^\beta \overline{G}_{k-1}(x',x_N,y)h(y)\Big\|_{L^q(dx_N)} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \|D^\beta \overline{G}_{k-1}(x',x_N,y)\|_{L^q(dx_N)} |h(y)|dy.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|D^\beta \overline{G}_{k-1}(x',x_N,y)\|^q_{L^q(dx_N)} &\leq C\int_0^\infty \frac{dx_N}{\big(|x'-y|+x_N\big)^{(N-2m+2(k-1)+|\beta|)q}} \\
&= C\int_{|x'-y|}^\infty \frac{dw}{w^{(N-2m+2(k-1)+|\beta|)q}} = \frac{C}{|x'-y|^{\big(N-2m+2(k-1)+|\beta|\big)q-1}}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Portanto, substituindo (3.18) e (3.19) em (3.17), tem-se

$$\begin{aligned}
\|D^\beta H_k(h)\|_{L^q(\mathbb{R}^N_+)} &= \Big\|\|D^\beta H(h)\|_{L^q)(dx_N)}\Big\|_{L^q(dx')} \\
&= \Bigg\|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \|D^\beta \overline{G}_{k-1}(x',x_N,y)\|_{L^q(dx_N)} |h(y)|dy\Bigg\|_{L^q(dx')} \\
&\leq C\Bigg\|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|h(y)|dy}{|x'-y|^{\big(N-2m+2(k-1)+|\beta|\big)-\frac{1}{q}}}\Bigg\|_{L^q(dx')} \leq C\big\|h\big\|_{L^{l_k}(dx')}.
\end{aligned}$$

Essa última desigualdade é válida como consequência da desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev para $\alpha_k = 2(m-k)+1-|\beta|+\frac{1}{q}$. Além disso q e l_k mantém a seguinte relação

$$q = \frac{(N-1)l_k}{(N-1)-(2(m-k)+1-|\beta|+\frac{1}{q})l_k},$$

a qual implica em

$$l_k = \frac{(N-1)q}{N + \big(2(m-k)+1-|\beta|\big)q},$$

e, já que $l_k > 1$, tem-se

$$\frac{N}{N-1-\big(2(m-k)+1-|\beta|\big)} < q < \infty.$$

$\square$

Lema 8. *Seja $N > 2m$, $1 \le k \le m$, $\frac{N+2(m-1)}{N-1} < \rho < \infty$ e $r_0^k = \frac{(\rho-1)N}{\rho+2(m-k)+1-|\beta|}$ e sejam*

$$\frac{N}{N-1-\big(2(m-k)+1-|\beta|\big)} < b_0 < N \text{ e } \frac{N}{N-2(m-k+1)} < b_1 < \infty$$

tais que

$$\frac{1}{b_0} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{N}. \tag{3.20}$$

Então, existem constantes M_1^k e M_2^k tais que

1.
$$\begin{aligned}\|D^\beta H_k(u|u|^{\rho-1}) - D^\beta H_k(v|v|^{\rho-1})\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)} &\le M_2^k \|Du - Dv\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)} \\ &\times \Big(\|Du\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)} + \|Dv\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)}\Big),\end{aligned} \tag{3.21}$$

2.
$$\begin{aligned}\|H_k(u|u|^{\rho-1}) - H_k(v|v|^{\rho-1})\|_{L^{b_1}(\mathbb{R}^N_+)} &\le M_1^k \|Du - Dv\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)} \\ &\times \Big(\|Du\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)} + \|Dv\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)}\Big).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Demonstração.

Prova de 1: Seja $1 < l_k < b_0$ satisfazendo

$$\frac{1}{b_0} = \frac{1}{l_k} - \frac{\Big(2(m-k)+1-|\beta|\Big)b_0 + 1}{b_0(N-1)}, \tag{3.23}$$

a qual é verdadeira pela restrição de b_0. Logo, de (3.23) pode-se obter

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_k} &= \frac{1}{b_0} + \frac{\Big(2(m-k)+1-|\beta|\Big)b_0+1}{b_0(N-1)} = \frac{N-b_0}{(N-1)b_0} + \frac{b_0 + \big(2(m-k)+1-|\beta|\big)b_0}{b_0(N-1)} \\ &= \frac{1}{z_1} + \frac{\rho-1}{z_2},\end{aligned} \tag{3.24}$$

para z_1 e z_2 satisfazendo

$$\frac{N-1}{z_1} = \frac{N}{b_0} - 1, \qquad \frac{N-1}{z_2} = \frac{N}{r_0^k} - 1. \tag{3.25}$$

Note que $\frac{z_1}{l_k}$ e $\frac{z_2}{(\rho-1)l_k}$ são expoentes conjugados. Assim, fazendo uso da seguinte desigualdade

$$|a|a|^{\rho-1}-b|b|^{\rho-1}|\leq M|a-b|\left(|a|^{\rho-1}+|b|^{\rho-1}\right), \tag{3.26}$$

a qual é válida para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$. Aplicando (3.13) com $b_0=q$ e usando (3.26), tem-se

$$\begin{aligned}
\|D^\beta H_k(u|u|^{\rho-1})-D^\beta H_k(v|v|^{\rho-1})\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)} &= \|D^\beta H_k(u|u|^{\rho-1}-v|v|^{\rho-1}\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)}\\
&\leq M\|u|u|^{\rho-1}-v|v|^{\rho-1}\|_{L^{l_k}(\mathbb{R}^{N-1})}\leq M\|(u-v)\left(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1}\right)\|_{L^{l_k}(\mathbb{R}^{N-1})}\\
&= M\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(|u-v|(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1})\right)^{l_k}dy\right)^{\frac{1}{l_k}}\\
&= M\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}}|u-v|^{l_k\frac{z_1}{l_k}}dy\right)^{\frac{l_k}{z_1 l_k}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1}\right)^{\frac{z_2}{\rho-1}}dy\right)^{\frac{\rho-1}{z_2}}\\
&\leq M\|u-v\|_{L^{z_1}(\mathbb{R}^{N-1})}\left(\|u\|^{\rho-1}_{L^{z_2}(\mathbb{R}^{N-1})}+\|v\|^{\rho-1}_{L^{z_2}(\mathbb{R}^{N-1})}\right).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Logo, pela desigualdade (3.25), podemos aplicar o Teorema 17 com $p_*=z_1$ e $p=b_0$. Assim

$$\|u-v\|_{L^{z_1}(\mathbb{R}^N_+)}\leq M_1\|Du-Dv\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)}, \tag{3.28}$$

e novamente pelo Teorema 17 com $p_*=z_2$ e $p=r_0^k$ obtém-se

$$\|u\|^{\rho-1}_{L^{z_2}(\mathbb{R}^{N-1})}+\|v\|^{\rho-1}_{L^{z_2}(\mathbb{R}^{N-1})}\leq M_2\left(\|Du\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^{N-1})}+\|Dv\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^{N-1})}\right). \tag{3.29}$$

Substituindo (3.28) e (3.29) em (3.27) obtém-se

$$\begin{aligned}
\|D^\beta H_k(u|u|^{\rho-1})-D^\beta H_k(v|v|^{\rho-1})\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)} &\leq M_2^k\|Du-Dv\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)}\\
&\times\left(\|Du\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)}+\|Dv\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)}\right).
\end{aligned}$$

Prova de 2: Agora seja $1<s_k<b_1$ satisfazendo $\frac{1}{b_1}=\frac{1}{s_k}-\frac{1+(2(m-k)+2-|\beta|)b_1}{(N-1)b_1}$. Logo, por (3.20) e (3.24) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s_k} &= \frac{1}{b_1}+\frac{1+b_1(2(m-k)+2-|\beta|)}{(N-1)b_1}=\frac{N-1+(2(m-k)+2-|\beta|)b_1}{(N-1)b_1}\\
&= \frac{N+2(m-k)b_0}{(N-1)b_0}=\frac{1}{z_1}+\frac{\rho-1}{z_2},
\end{aligned}$$

para z_1 e z_2 satisfazendo (3.25). Decorre de (3.12) com $b_1=q$ e a desigualdade em (3.26) o seguinte

$$\begin{aligned}
\|H_k(u|u|^{\rho-1})-H_k(v|v|^{\rho-1})\|_{L^{b_1}(\mathbb{R}^N_+)} &= \|H_k(u|u|^{\rho-1}-v|v|^{\rho-1}\|_{L^{b_1}(\mathbb{R}^N_+)}\\
&\leq M\|u|u|^{\rho-1}-v|v|^{\rho-1}\|_{L^{s_k}(\mathbb{R}^{N-1})}\leq M\|(u-v)\left(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1}\right)\|_{L^{s_k}(\mathbb{R}^{N-1})}\\
&= M\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(|u-v|(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1})\right)^{s_k}dy\right)^{\frac{1}{s_k}}\\
&= M\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}}|u-v|^{s_k\frac{z_1}{s_k}}dy\right)^{\frac{s_k}{z_1 s_k}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1}\right)^{\frac{z_2}{\rho-1}}dy\right)^{\frac{\rho-1}{z_2}}\\
&\leq M\|u-v\|_{L^{z_1}(\mathbb{R}^{N-1})}\left(\|u\|^{\rho-1}_{L^{z_2}(\mathbb{R}^{N-1})}+\|v\|^{\rho-1}_{L^{z_2}(\mathbb{R}^{N-1})}\right).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Assim, de (3.28) e (3.29) em (3.30) obtém-se

$$\|H_k(u|u|^{\rho-1}) - H_k(v|v|^{\rho-1})\|_{L^{b_1}(\mathbb{R}^N_+)} \leq M_1^k \|Du - Dv\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)} \times \left(\|Du\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)} + \|Dv\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)} \right).$$

□

Observação 22. *Denotando por* $\omega_k = \frac{N}{N-1-\left(2(m-k)+1-\beta\right)}$ *temos que:*

$$\omega_m \leq \cdots \leq \omega_1 < r_0^1 \leq \cdots \leq r_0^m.$$

Consequentemente, podemos escolher r_0^k *e aplicar o Lema 8 para cada* $k = 1, \cdots, m$.

Contrações

Agora chamando de $\phi_k(u) = H_k(u|u|^{\rho-1} + f_{m-k})$ e substituindo em (3.9) tem-se:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{m} \phi_k(u)(x).$$

Na sequência construiremos um espaço E com uma norma associada $\|\cdot\|_E$ e mostraremos que $\Phi = \sum_{k=1}^m \phi_k$ é uma contração com ponto fixo $\overline{u} = \sum_{k=1}^m \phi_k(\overline{u})$.

As estimativas feitas na seção anterior serão aplicadas na prova dos resultados desta seção. Aplicando argumento de ponto fixo, provaremos a existência da solução para a equação poli-harmônica.

Definição 28. *Seja* $1 < p < N$, *e* $k \geq 1$. *Definiremos os espaços* $E^{k,p}$ *por*

$$E^{k,p} = \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N_+) \ : \ |D^\alpha u| \in L^p(\mathbb{R}^N_+) \text{ para } 1 \leq |\alpha| \leq k \text{ e } p^* = \frac{Np}{N-p}\},$$

com a norma $\|\cdot\|_{E^{k,p}}$, *dada por*

$$\|u\|_{E^{k,p}} = \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N_+)} + \sum_{1\leq|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Observação 23.

- *Pela norma definida para os espaços* $E^{k,p}$ *fica evidente que esses espaços são espaços de Banach.*
- *Em particular, fixado* $p > 1$, *quando não existir confusão vamos denotar* $E^{k,p}$ *somente por* E^k.
- *Se fixamos* $k = 1$, *temos o espaço de Banach* $E^1 = D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.

Teorema 23. *Sejam* $N > 2m$, $\frac{N+2(m-1)}{N-1} < \rho < \infty$ *e* $r_0^k = \frac{(\rho-1)N}{\rho+2(m-k)+1-|\beta|}$, *seja* E *definido por*

$$E = E^{m,r_0^1} \cap E^{m,r_0^m}$$

com a norma dada por:

$$\|u\|_E = \|u\|_{L^{(r_0^1)^*}(\mathbb{R}^N_+)} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} \|D^\beta u\|_{L^{r_0^1}(\mathbb{R}^N_+)} + \|u\|_{L^{(r_0^m)^*}(\mathbb{R}^N_+)} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} \|D^\beta u\|_{L^{r_0^m}(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Suponha que $0 \not\equiv f_{m-k} \in L^{\overline{d}_k^1}(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^{\overline{d}_k^m}(\mathbb{R}^{N-1})$, *em que* $\overline{d}_k^j = \frac{(N-1)r_0^j}{N+\left(2(m-k)+1-|\beta|\right)r_0^j}$.

Definindo $X_k = L^{\overline{d}_k^1}(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^{\overline{d}_k^m}(\mathbb{R}^{N-1})$ *com a norma associada*

$$\|\cdot\|_{X_k} = \|\cdot\|_{\overline{d}_k^1} + \|\cdot\|_{\overline{d}_k^m}.$$

Então, as seguintes afirmações são válidas:

1. *Existe um* $\varepsilon > 0$ *de modo que, se* $\sum_{k=1}^m \|f_{m-k}\|_{X_k} \le \frac{\varepsilon}{K}$, *então a equação integral (3.9) tem uma única solução* $u \in E$ *satisfazendo* $\|u\|_E \le 2\varepsilon$, *em que*[2] $L = C_1^k + \sum_{1\le|\beta|\le m} C_2^k$.

2. *Sejam* u_1 *e* u_2 *soluções como aquelas do item anterior correspondentes as condições iniciais* $(f_0,\cdots,f_{m-1},\varepsilon_1)$ *e* $(g_0,\cdots,g_{m-1},\varepsilon_2)$ *e* $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$, *respetivamente. Então,*

$$\|u_1-u_2\|_E \le \frac{L}{1-2^\rho Mm\varepsilon^{\rho-1}} \sum_{k=1}^m \|f_{m-k}-g_{m-k}\|_{X_k} \tag{3.31}$$

Demonstração.

Prova de 1: Seja a bola $B_{2\varepsilon} = \{u \in E \ : \ \|u\|_E \le 2\varepsilon\}$ com a métrica $\mathscr{L}(\cdot,\cdot)$ dada por

$$\mathscr{L}(u,v) = \|u-v\|_E.$$

Para algum $\varepsilon > 0$, mostraremos que a aplicação $\Phi : B_{2\varepsilon} \to B_{2\varepsilon}$ dada por

$$\Phi(u) = \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \overline{G}_{k-1}(x,y)(u|u|^{\rho-1}+f_{m-k})dy = \sum_{k=1}^m H_k(u|u|^{\rho-1}+f_{m-k})$$

é uma contração em $(B_{2\varepsilon,\mathscr{L}})$ sempre que $2^\rho Mm\varepsilon^{\rho-1} < 1$.

Tome $L = C_1^k + \sum_{1\le|\beta|\le m} C_2^k$, então

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^m H_k(f_{m-k}) \right\|_E &\le \sum_{k=1}^m \|H_k(f_{m-k})\|_E \\
&= \sum_{k=1}^m \Big(\|H_k(f_{m-k})\|_{(r_0^1)^*} + \sum_{1\le|\beta|\le m} \|D^\beta H_k(f_{m-k})\|_{r_0^1} + \|H_k(f_{m-k})\|_{(r_0^m)^*} \\
&\quad + \sum_{1\le|\beta|\le m} \|D^\beta H_k(f_{m-k})\|_{r_0^m} \Big) \\
&\le \sum_{k=1}^m \Big(C_1^k \|f_{m-k}\|_{\overline{d}_k^1} + \sum_{1\le|\beta|\le m} C_2^k \|f_{m-k}\|_{\overline{d}_k^1} + C_1^k \|f_{m-k}\|_{\overline{d}_k^m} + \sum_{1\le|\beta|\le m} C_2^k \|f_{m-k}\|_{\overline{d}_k^m} \Big) \\
&\le \sum_{k=1}^m L \Big(\|f_{m-k}\|_{L^{\overline{d}_k^1}(\mathbb{R}^{N-1})} + \|f_{m-k}\|_{L^{\overline{d}_k^m}(\mathbb{R}^{N-1})} \Big) = L \sum_{k=1}^m \|f_{m-k}\|_{X_k} \le \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Por outro lado, denotando $M = M_1^k + \sum_{1\le|\beta|\le m} M_2^k$, decorre do Lema 8, para quaisquer $u, v \in B_{2\varepsilon}$

[2] C_1^k e C_2^k são aquelas dadas no Lema 7.

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_E &= \left\|\sum_{k=1}^{m} H_k(u|u|^{\rho-1}-v|v|^{\rho-1})\right\|_E \leq \sum_{k=1}^{m}\left\|H_k(u|u|^{\rho-1}-v|v|^{\rho-1})\right\|_E \\
&= \sum_{k=1}^{m}\Big(\|H_k(u|u|^{\rho-1}-v|v|^{\rho-1})\|_{(r_0^1)^*} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m}\|D^\beta H_k(u|u|^{\rho-1}-v|v|^{\rho-1})\|_{r_0^1} \\
&\quad + \|H_k(u|u|^{\rho-1}-v|v|^{\rho-1})\|_{(r_0^m)^*} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m}\|D^\beta H_k(u|u|^{\rho-1}-v|v|^{\rho-1})\|_{r_0^m}\Big) \\
&\leq \sum_{k=1}^{m}\Bigg(M_1^k\|D(u-v)\|_{r_0^1}\Big(\|Du\|_{r_0^k}^{\rho-1}+\|Dv\|_{r_0^k}^{\rho-1}\Big) + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} M_2^k\|D(u-v)\|_{r_0^1}\Big(\|Du\|_{r_0^k}^{\rho-1}+\|Dv\|_{r_0^k}^{\rho-1}\Big) \\
&\quad + M_1^k\|D(u-v)\|_{r_0^m}\Big(\|Du\|_{r_0^k}^{\rho-1}+\|Dv\|_{r_0^k}^{\rho-1}\Big) + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} M_2^k\|D(u-v)\|_{r_0^m}\Big(\|Du\|_{r_0^k}^{\rho-1}+\|Dv\|_{r_0^k}^{\rho-1}\Big)\Bigg) \\
&= \sum_{k=1}^{m} M\Bigg(\Big(\|D(u-v)\|_{r_0^1}+\|D(u-v)\|_{r_0^m}\Big)\Big(\|Du\|_{r_0^k}^{\rho-1}+\|Dv\|_{r_0^k}^{\rho-1}\Big)\Bigg) \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} M\Bigg(\|u-v\|_E\Big(\|u\|_E^{\rho-1}+\|v\|_E^{\rho-1}\Big)\Bigg) = 2^\rho\varepsilon^{\rho-1}Mm\|u-v\|_E.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

Nessa estimativa a última desigualdade decorre da desigualdade de interpolação para espaços L^p (veja Preliminares: Teorema 8)

$$\|Du\|_{r_0^k} \leq \|Du\|_{r_0^1}^t\|Du\|_{r_0^m}^{1-t} \leq \|u\|_E^t\|u\|_E^{1-t} = \|u\|_E.$$

Consequentemente, para $u,v \in B_{2\varepsilon}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_E &\leq Mm(\|u\|_E^{\rho-1}+\|v\|_E^{\rho-1})\|u-v\|_E \\
&\leq 2^\rho\varepsilon^{\rho-1}Mm\|u-v\|_E < \|u-v\|_E.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Portanto, Φ é uma contração. Daí para aplicar o Teorema do ponto fixo de Banach estaria faltando mostrar que $\|\Phi(u)\|_E < 2\varepsilon$. De fato, por (3.34) com $v=0$, tem-se

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} H_k(u|u|^{\rho-1})\right\|_E \leq Mm\|u\|_E^\rho = Mm(2\varepsilon)^\rho = 2^\rho Mm\varepsilon^\rho.$$

Juntando isto com (3.32) obtém-se:

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_E &\leq \left\|\sum_{k=1}^{m} H_k(u|u|^{\rho-1}+f_{m-k})\right\|_E \leq \left\|\sum_{k=1}^{m} H_k(u|u|^{\rho-1})+\sum_{k=1}^{m} H_k(f_{m-k})\right\|_E \\
&\leq \left\|\sum_{k=1}^{m} H_k(u|u|^{\rho-1})\right\|_E + \left\|\sum_{k=1}^{m} H_k(f_{m-k})\right\|_E \\
&\leq 2^\rho Mm\varepsilon^\rho+\varepsilon = \varepsilon(1+2^\rho Mm\varepsilon^{\rho-1}) < 2\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Prova de 2: Sejam u_1 e u_2 dadas por

$$u_1 = \sum_{k=1}^{m} H_k(u_1|u_1|^{\rho-1}+f_{m-k}) \quad e \quad u_2 = \sum_{k=1}^{m} H_k(u_2|u_2|^{\rho-1}+g_{m-k}).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|u_1-u_2\|_E &= \left\| \sum_{k=1}^{m} H_k(u_1|u_1|^{\rho-1}+f_{m-k}) - \sum_{k=1}^{m} H_k(u_2|u_2|^{\rho-1}+g_{m-k}) \right\|_E \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{m} H_k(u_1|u_1|^{\rho-1}-u_2|u_2|^{\rho-1}) + \sum_{k=1}^{m} H_k(f_{m-k}-g_{m-k}) \right\|_E \\
&\leq \left\| \sum_{k=1}^{m} H_k(u_1|u_1|^{\rho-1}-u_2|u_2|^{\rho-1}) \right\|_E + \left\| \sum_{k=1}^{m} H_k(f_{m-k}-g_{m-k}) \right\|_E .
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Na primeira parcela, por (3.33), obtém-se:

$$\| \sum_{k=1}^{m} H_k(u_1|u_1|^{\rho-1}-u_2|u_2|^{\rho-1})\|_E \leq 2^\rho M m \varepsilon^{\rho-1}\|u_1-u_2\|_E.$$

Na segunda parcela, de (3.32), obtém-se:

$$\| \sum_{k=1}^{m} H_k(f_{m-k}-g_{m-k})\|_E \leq L \sum_{j=0}^{m-1} \|f_j-g_j\|_X.$$

Substituindo essas duas desigualdades em (3.36), tem-se:

$$\|u_1-u_2\|_E \leq L \sum_{j=0}^{m-1} \|f_j-g_j\|_X + 2^\rho M m \varepsilon^{\rho-1}\|u_1-u_2\|_E.$$

Daí, desde que $2^\rho M m \varepsilon^{\rho-1} < 1$, obtem-se (3.31), o que conclui a prova do Teorema 23. □

Situações mais gerais

Vamos considerar um problema mais geral do tipo

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N_+, \\ \lambda(-\Delta)^j u + \frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^j u = c(x)h(u) + f_j, \qquad x \in \partial\mathbb{R}^N_+, \;\; j = 0,1,\cdots,m-1, \end{cases} \tag{3.37}$$

em que $c \in L^\infty$ e h uma função real de variável real com as seguintes propriedades:

h1) $h(0) = 0$,

h2) $|h(u)-h(v)| \leq C|u-v|(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1})$.

Nesta seção vamos estabelecer a existência de uma única solução para este problema. Os resultados que iremos expor nesta seção são análogos com aqueles que foram apresentados nas duas seções anteriores.

De (B.18) e (3.8) podemos escrever a solução integral (3.37) da seguinte forma:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \overline{G}_{k-1}(x,y)\Big(c(x)h(u)+f_{m-k}\Big)(y)dy \tag{3.38}$$

ou, fazendo uso da definição das funções H_k:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{m} H_k(ch(u)+f_{m-k})(x). \tag{3.39}$$

Vamos refazer as contas da seção anterior para estas novas condições de fronteira.

Lema 9. *Seja $m \in \mathbb{N}$, $N > 2m$, $1 \leq k \leq m$, $\frac{N+2(m-1)}{N-1} < \rho < \infty$, $c \in L^\infty$ e h uma função satisfazendo (h1) e (h2). Sejam $r_0^k = \frac{(\rho-1)N}{\rho+2(m-k)+1-\beta}$ e $\frac{N}{N-1-\left(2(m-k)+1-\beta\right)} < b_0 < N$ e $\frac{N}{N-2(m-k+1)} < b_1 < \infty$ tais que*

$$\frac{1}{b_0} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{N}. \tag{3.40}$$

Então, existem constantes M_1^k e M_2^k tais que

1.

$$\begin{aligned} \|D^\beta H_k\Big(c(x)h(u) - c(x)h(v)\Big)\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)} \leq M_2^k \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)} \|Du - Dv\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)} \\ \times \Big(\|Du\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)} + \|Dv\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)}\Big). \end{aligned} \tag{3.41}$$

2.

$$\begin{aligned} \|H_k\Big(c(x)h(u) - c(x)h(v)\Big)\|_{L^{b_1}(\mathbb{R}^N_+)} \leq M_1^k \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)} \|Du - Dv\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)} \\ \times \Big(\|Du\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)} + \|Dv\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)}\Big). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Demonstração.

Prova de 1: Sejam $1 < l_k < b_0$ satisfazendo

$$\frac{1}{b_0} = \frac{1}{l_k} - \frac{\Big(2(m-k)+1-|\beta|\Big)b_0 + 1}{b_0(N-1)}. \tag{3.43}$$

Logo, por (3.43) pode-se obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_k} &= \frac{1}{b_0} + \frac{\Big(2(m-k)+1-|\beta|\Big)b_0 + 1}{b_0(N-1)} = \frac{N-b_0}{(N-1)b_0} + \frac{b_0 + \big(2(m-k)+1-|\beta|\big)b_0}{b_0(N-1)} \\ &= \frac{1}{z_1} + \frac{\rho-1}{z_2}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

para z_1 e z_2 satisfazendo

$$\frac{N-1}{z_1} = \frac{N}{b_0} - 1, \qquad \frac{N-1}{z_2} = \frac{N}{r_0^k} - 1. \tag{3.45}$$

Note que $\frac{z_1}{l_k}$ e $\frac{z_2}{(\rho-1)l_k}$ são expoentes conjugados. Decorre de (3.13) com $b_0 = q$ e a desigualdade (3.26) o seguinte

$$\begin{aligned} &\Big\|D^\beta H_k\Big(c(x)h(u) - c(x)h(v)\Big)\Big\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)} = \Big\|D^\beta H_k\Big(c(x)\big(h(u) - h(v)\big)\Big)\Big\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)} \\ &\leq M\big\|c\big(h(u)-h(v)\big)\big\|_{L^{l_k}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq M\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\big\|(u-v)\big(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1}\big)\big\|_{L^{l_k}(\mathbb{R}^{N-1})} \\ &= M\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Big(|u-v|(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1})\Big)^{l_k} dy\right)^{\frac{1}{l_k}} \\ &= M\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u-v|^{l_k \frac{z_1}{l_k}} dy\right)^{\frac{l_k}{z_1 l_k}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Big(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1}\Big)^{\frac{z_2}{\rho-1}} dy\right)^{\frac{\rho-1}{z_2}} \\ &\leq M\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\|u-v\|_{L^{z_1}(\mathbb{R}^{N-1})}\big(\|u\|^{\rho-1}_{L^{z_2}(\mathbb{R}^{N-1})} + \|v\|^{\rho-1}_{L^{z_2}(\mathbb{R}^{N-1})}\big). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Logo, pela desigualdade (3.45), podemos aplicar o Teorema 17 com $p_* = z_1$ e $p = b_0$. Assim

$$\|u-v\|_{L^{z_1}(\mathbb{R}^N_+)} \leq M_1\|Du-Dv\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)}, \tag{3.47}$$

e também aplicando o Teorema 17 com $p_* = z_2$ e $p = r_0$ obtém-se

$$\|u\|^{\rho-1}_{L^{z_2}(\mathbb{R}^{N-1})} + \|v\|^{\rho-1}_{L^{z_2}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq M_2\Big(\|Du\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^{N-1})} + \|Dv\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^{N-1})}\Big). \tag{3.48}$$

Substituindo (3.47) e (3.48) em (3.46) obtém-se

$$\begin{aligned}\|D^\beta H_k(u|u|^{\rho-1}) - D^\beta H_k(v|v|^{\rho-1})\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)} &\leq M_2^k\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\|Du-Dv\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)}\\ &\times\Big(\|Du\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)} + \|Dv\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)}\Big).\end{aligned}$$

Prova de 2: Agora seja $1 < s_k < b_1$ satisfazendo $\frac{1}{b_1} = \frac{1}{s_k} - \frac{1+(2(m-k)+2-|\beta|)b_1}{(N-1)b_1}$. Logo por (3.40) e (3.44) podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_k} &= \frac{1}{b_1} + \frac{1+b_1(2(m-k)+2-|\beta|)}{(N-1)b_1} = \frac{N-1+(2(m-k)+2-|\beta|)b_1}{(N-1)b_1}\\ &= \frac{N+2(m-k)b_0}{(N-1)b_0} = \frac{1}{z_1} + \frac{\rho-1}{z_2}\end{aligned}$$

para z_1 e z_2 satisfazendo (3.45). Aplicando (3.12) com $b_1 = q$, além da desigualdade (3.26) obtemos

$$\begin{aligned}&\|H_k(c(x)h(u) - c(x)h(v))\|_{L^{b_1}(\mathbb{R}^N_+)} = \|H_k(c(x)(h(u)-h(v)))\|_{L^{b_1}(\mathbb{R}^N_+)}\\ &\leq M\|c(h(u)-h(v))\|_{L^{s_k}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq M\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\|(u-v)\big(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1}\big)\|_{L^{s_k}(\mathbb{R}^{N-1})}\\ &= M\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\Big(|u-v|(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1})\Big)^{s_k}dy\right)^{\frac{1}{s_k}}\\ &= M\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}|u-v|^{s_k\frac{z_1}{s_k}}dy\right)^{\frac{s_k}{z_1 s_k}}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\Big(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1}\Big)^{\frac{z_2}{\rho-1}}dy\right)^{\frac{\rho-1}{z_2}}\\ &\leq M\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\|u-v\|_{L^{z_1}(\mathbb{R}^{N-1})}\big(\|u\|^{\rho-1}_{L^{z_2}(\mathbb{R}^{N-1})} + \|v\|^{\rho-1}_{L^{z_2}(\mathbb{R}^{N-1})}\big).\end{aligned} \tag{3.49}$$

Assim de (3.47) e (3.48) em (3.49) obtém-se

$$\begin{aligned}\|H_k(u|u|^{\rho-1}) - H_k(v|v|^{\rho-1})\|_{L^{b_1}(\mathbb{R}^N_+)} &\leq M_1^k\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\|Du-Dv\|_{L^{b_0}(\mathbb{R}^N_+)}\\ &\times\Big(\|Du\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)} + \|Dv\|^{\rho-1}_{L^{r_0^k}(\mathbb{R}^N_+)}\Big).\end{aligned}$$

□

Teorema 24. *Seja $N > 2m$, $\frac{N+2(m-1)}{N-1} < \rho < \infty$ e $r_0^k = \frac{(\rho-1)N}{\rho+2(m-k)+1-|\beta|}$. Seja E definido por*

$$E = E^{m,r_0^1} \cap E^{m,r_0^m}$$

com a norma dada por

$$\|u\|_E = \|u\|_{L^{(r_0^1)^*}(\mathbb{R}^N_+)} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m}\|D^\beta u\|_{L^{r_0^1}(\mathbb{R}^N_+)} + \|u\|_{L^{(r_0^m)^*}(\mathbb{R}^N_+)} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m}\|D^\beta u\|_{L^{r_0^m}(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Suponha que $0 \not\equiv f_{m-k} \in L^{\overline{d}_k^1}(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^{\overline{d}_k^m}(\mathbb{R}^{N-1})$, *em que* $\overline{d}_k^j = \frac{(N-1)r_0^j}{N+\left(2(m-k)+1-|\beta|\right)r_0^j}$.

Definindo $X_k = L^{\overline{d}_k^1}(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^{\overline{d}_k^m}(\mathbb{R}^{N-1})$ *com a norma associada*

$$\|\cdot\|_{X_k} = \|\cdot\|_{\overline{d}_k^1} + \|\cdot\|_{\overline{d}_k^m}.$$

Então,

1. *Existe um* $\varepsilon > 0$ *de modo que, se* $\sum_{k=1}^m \|f_{m-k}\|_{X_k} \leq \frac{\varepsilon}{K}$, *então a equação integral (3.38) tem uma única solução* $u \in E$ *satisfazendo* $\|u\|_E \leq 2\varepsilon$, *sendo* $L = C_1^k + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} C_2^k$.

Demonstração. Seja a bola $B_{2\varepsilon} = \{u \in E \ : \ \|u\|_E \leq 2\varepsilon\}$ com a métrica $\mathscr{L}(\cdot,\cdot)$ dada por

$$\mathscr{L}(u,v) = \|u-v\|_E,$$

para algum $\varepsilon > 0$. Mostraremos que a aplicação $\Phi : B_{2\varepsilon} \to B_{2\varepsilon}$ dada por

$$\Phi(u) = \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \overline{G}_{k-1}(x,y)(c(x)h(u)+f_{m-k})dy = \sum_{k=1}^m H_k(c(x)h(u)+f_{m-k})$$

é uma contração em $(B_{2\varepsilon,\mathscr{L}})$, sempre que, $2^\rho Mm\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\varepsilon^{\rho-1} < 1$.

Daí, para $L = C_1^k + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} C_2^k$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^m H_k(f_{m-k})\right\|_E &\leq \sum_{k=1}^m \|H_k(f_{m-k})\|_E \\
&= \sum_{k=1}^m \Big(\|H_k(f_{m-k})\|_{(r_0^1)^*} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} \|D^\beta H_k(f_{m-k})\|_{r_0^1} + \|H_k(f_{m-k})\|_{(r_0^m)^*} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} \|D^\beta H_k(f_{m-k})\|_{r_0^m}\Big) \\
&\leq \sum_{k=1}^m \Big(C_1^k\|f_{m-k}\|_{\overline{d}_k^1} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} C_2^k\|f_{m-k}\|_{\overline{d}_k^1} + C_1^k\|f_{m-k}\|_{\overline{d}_k^m} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} C_2^k\|f_{m-k}\|_{\overline{d}_k^m}\Big) \\
&\leq \sum_{k=1}^m L\Big(\|f_{m-k}\|_{L^{\overline{d}_k^1}(\mathbb{R}^{N-1})} + \|f_{m-k}\|_{L^{\overline{d}_k^m}(\mathbb{R}^{N-1})}\Big) = L\sum_{k=1}^m \|f_{m-k}\|_{X_k} \leq \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Assim para qualquer $u,v \in B_{2\varepsilon}$ pegando $M = M_1^k + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} \overline{M}_2^k$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_E &= \|\sum_{k=1}^{m} H_k(c(x)h(u)-c(x)h(v)\|_E \leq \sum_{k=1}^{m} \|H_k\Big(c(x)\big(h(u)-h(v)\big)\Big)\|_E \\
&= \sum_{k=1}^{m} \|H_k\Big(c(x)\big(h(u)-h(v)\big)\Big)\|_{(r_0^m)^*} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} \|D^\beta H_k\Big(c(x)\big(h(u)-h(v)\big)\Big)\|_{r_0^m} \\
&\quad + \|H_k\Big(c(x)\big(h(u)-h(v)\big)\Big)\|_{(r_0^1)^*} + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} \|D^\beta H_k\Big(c(x)\big(h(u)-h(v)\big)\Big)\|_{r_0^1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} M_1^k \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)} \|D(u-v)\|_{r_0^m}\Big(\|Du\|_{r_0^k}^{\rho-1}+\|Dv\|_{r_0^k}^{\rho-1}\Big) \\
&\quad + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} M_2^k \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)} \|D(u-v)\|_{r_0^m}\Big(\|Du\|_{r_0^k}^{\rho-1}+\|Dv\|_{r_0^k}^{\rho-1}\Big) \\
&\quad + \overline{M}_1^k \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)} \|D(u-v)\|_{r_0^1}\Big(\|Du\|_{r_0^k}^{\rho-1}+\|Dv\|_{r_0^k}^{\rho-1}\Big) \\
&\quad + \sum_{1\leq|\beta|\leq m} \overline{M}_2^k \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)} \|D(u-v)\|_{r_0^1}\Big(\|Du\|_{r_0^k}^{\rho-1}+\|Dv\|_{r_0^k}^{\rho-1}\Big) \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} M \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)} \Big(\|D(u-v)\|_{q_1}+\|D(u-v)\|_{q_m}\Big)\Big(\|Du\|_{r_0^k}^{\rho-1}+\|Dv\|_{r_0^k}^{\rho-1}\Big) \\
&\leq Mm\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}(\|u\|_E^{\rho-1}+\|v\|_E^{\rho-1})\|u-v\|_E.
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

Essa última desigualdade segue do lema de interpolação para as normas L^p, já que $q_1 \leq r_0^k \leq q_m$ implica em $\|Du\|_{r_0^k} \leq \|Du\|_{r_0^1}^t \cdot \|Du\|_{r_0^m}^{1-t} \leq \|u\|_E^t \|u\|_E^{1-t} = \|u\|_E$.

Consequentemente para $u, v \in B_{2\varepsilon}$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_E &\leq Mm\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}(\|u\|_E^{\rho-1}+\|v\|_E^{\rho-1})\|u-v\|_E \\
&\leq 2^\rho \varepsilon^{\rho-1} Mm\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\|u-v\|_E < \|u-v\|_E.
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

Portanto Φ é uma contração, sempre que, $2^\rho Mm\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\varepsilon^{\rho-1} < 1$. Finalmente de (3.52) com $v = 0$ tem-se

$$
\|\sum_{k=1}^{m} H_k(u|u|^{\rho-1})\|_E \leq Mm\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\|u\|_E^\rho = Mm\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}(2\varepsilon)^\rho = 2^\rho Mm\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\varepsilon^\rho,
$$

juntando isto com (3.50) obtem-se:

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_E &\leq \Big\|\sum_{k=1}^{m} H_k(u|u|^{\rho-1}+f_{m-k})\Big\|_E \leq \Big\|\sum_{k=1}^{m} H_k(u|u|^{\rho-1})+\sum_{k=1}^{m} H_k(f_{m-k})\Big\|_E \\
&\leq \Big\|\sum_{k=1}^{m} H_k(u|u|^{\rho-1})\Big\|_E + \Big\|\sum_{k=1}^{m} H_k(f_{m-k})\Big\|_E \\
&\leq 2^\rho Mm\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\varepsilon^\rho + \varepsilon = \varepsilon(1+2^\rho Mm\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N_+)}\varepsilon^{\rho-1}) < 2\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

□

Sobre a solução do problema

Já na secção anterior encontramos uma solução para o problema (3.1), mostrando com ajuda das funções de Green que o problema mencionado tem um ponto fixo, isto é, uma solução do tipo integral no sentido de (3.8). Mostraremos que a solução encontrada na secção anterior possui algum tipo de comportamento como ser uma solução fraca ou muito fraca; para isto vamos considerar algumas restrições do problema anterior. Para não ficar atrapalhados com detalhes técnicos na ordem do problema vamos considerar que $m = 2k$, o caso $m = 2k+1$ é análogo com a diferencia de ter que colocar mais um gradiente dentro da expressão para a solução fraca do problema.

Considere o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N_+, \\ \lambda(-\Delta)^j u + \frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^j u = 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, \ = 1, \cdots, m-2, \\ \lambda(-\Delta)^{m-1} u + \frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^{m-1} u = u|u|^{\rho-1} + f, \quad x \in \partial\mathbb{R}^N_+, \end{cases} \tag{3.54}$$

em que $N > 2m$, $\lambda > 0$, $\rho > 1$, $f \not\equiv 0$ e η é o vetor normal unitário apontando para fora do semi-espaço $\mathbb{R}^d_+$. Dado o problema acima para uma função $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$, fazendo o produto com $(-\Delta)^m u$ e integrando sobre $\mathbb{R}^N_+$, teremos

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^m u \varphi = \int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^k \varphi (-\Delta)^k u + \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{m-i} u \frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^{i-1}\varphi - (-\Delta)^{i-1}\varphi \frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^{m-i} u.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^k \varphi (-\Delta)^k u dx &= \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{i-1}\varphi \frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^{m-i} u - (-\Delta)^{m-i} u \frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^{i-1}\varphi dx \\ &= \sum_{i=2}^{k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{i-1}\varphi \Big(-\lambda(-\Delta)^{m-i} u \Big) - (-\Delta)^{m-i} u \frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^{i-1}\varphi dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi \frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^{m-1} u - (-\Delta)^{m-1} u \frac{\partial}{\partial \eta}\varphi dx \\ &= \sum_{i=2}^{k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} -(-\Delta)^{m-i} u \Big(\frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^{i-1}\varphi + \lambda(-\Delta)^{i-1}\varphi \Big) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi \Big(u|u|^{\rho-1} + f \Big) - (-\Delta)^{m-1} u \Big(\frac{\partial}{\partial \eta}\varphi + \lambda\varphi \Big) dx \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} -(-\Delta)^{m-i} u \Big(\frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^{i-1}\varphi + \lambda(-\Delta)^{i-1}\varphi \Big) dx + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi \Big(u|u|^{\rho-1} + f \Big) dx. \end{aligned}$$

Assim, pelas condições de fronteira, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^k \varphi (-\Delta)^k u dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi \Big(u|u|^{\rho-1} + f \Big) dx - \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{m-i} u \Big(\frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^{i-1}\varphi + \lambda(-\Delta)^{i-1}\varphi \Big) dx,$$

isto sugere definir uma solução fraca do problema como una função $u \in E$ satisfazendo essa última igualdade acima.

Definição 29. *Uma solução fraca do problema (3.54) é uma função $u \in E$ que satisfaz a seguinte igualdade*

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^k \varphi (-\Delta)^k u dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi \Big(u|u|^{\rho-1} + f \Big) dx - \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{m-i} u \Big(\frac{\partial}{\partial \eta} (-\Delta)^{i-1} \varphi + \lambda (-\Delta)^{i-1} \varphi \Big) dx, \tag{3.55}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Agora, para nossa solução encontrada no capítulo anterior, tem-se:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^N_+} \delta(x-y) u(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^m G(x,y) u(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta u)(-\Delta)^{m-1} G + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{m-1} G \frac{\partial}{\partial \eta} u - u \frac{\partial}{\partial \eta} (-\Delta)^{m-1} G dy, \end{aligned}$$

repetindo o argumento m vezes

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^N_+} G(-\Delta)^m u + \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{m-k} G \frac{\partial}{\partial \eta} (-\Delta)^{k-1} u - (-\Delta)^{k-1} u \frac{\partial}{\partial \eta} (-\Delta)^{m-k} G dy \\ &= \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{m-k} G \frac{\partial}{\partial \eta} (-\Delta)^{k-1} u - (-\Delta)^{k-1} u \frac{\partial}{\partial \eta} (-\Delta)^{m-k} G dy \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{m-k} G \frac{\partial}{\partial \eta} (-\Delta)^{k-1} u - (-\Delta)^{k-1} u \frac{\partial}{\partial \eta} (-\Delta)^{m-k} G dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} G \frac{\partial}{\partial \eta} (-\Delta)^{m-1} u - (-\Delta)^{m-1} u \frac{\partial}{\partial \eta} G dy \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{m-k} G \big(-\lambda (-\Delta)^{k-1} u \big) - (-\Delta)^{k-1} u \frac{\partial}{\partial \eta} (-\Delta)^{m-k} G dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} G \Big(u|u|^{\rho-1} + f - \lambda (-\Delta)^{m-1} u \Big) - (-\Delta)^{m-1} u \frac{\partial}{\partial \eta} G dy \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} -(-\Delta)^{k-1} u \Big(\frac{\partial}{\partial \eta} (-\Delta)^{m-k} G + \lambda (-\Delta)^{m-k} G \Big) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} G \big(u|u|^{\rho-1} + f \big) - (-\Delta)^{m-1} u \Big(\frac{\partial}{\partial \eta} G + \lambda G \Big) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} G \big(u|u|^{\rho-1} + f \big) dy. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^k u(-\Delta)^k \varphi dx &= \int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^k \int_{\mathbb{R}^{N-1}} G\big(u|u|^{\rho-1}+f\big)dy(-\Delta)^k \varphi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^k G\big(u|u|^{\rho-1}+f\big)(-\Delta)^k \varphi dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \big(u|u|^{\rho-1}+f\big)(y)\left(\int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^k G(-\Delta)^k \varphi dx\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \big(u|u|^{\rho-1}+f\big)(y)\left(\int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^k G(-\Delta)^k \varphi dx\right)dy.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Observe que fazendo uso das identidades de Green k vezes, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^k G(-\Delta)^k \varphi dx &= \int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^m G\varphi dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{k-i}\varphi \frac{\partial}{\partial\eta}(-\Delta)^{k+i-1}G - (-\Delta)^{k+i-1}G\frac{\partial}{\partial\eta}(-\Delta)^{k-i}\varphi dx \\
&= \varphi(y) + \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{k-i}\varphi\big(-\lambda(-\Delta)^{k+i-1}G\big) - (-\Delta)^{k+i-1}G\frac{\partial}{\partial\eta}(-\Delta)^{k-i}\varphi dx \\
&= \varphi(y) - \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{k+i-1}G\left(\frac{\partial}{\partial\eta}(-\Delta)^{k-i}\varphi + \lambda(-\Delta)^{k-i}\varphi\right)dx.
\end{aligned}$$

Substituindo em (3.56)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^k u(-\Delta)^k \varphi dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \big(u|u|^{\rho-1}+f\big)(y)\varphi(y)dy \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \big(u|u|^{\rho-1}+f\big)(y) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{k+i-1}G\left(\frac{\partial}{\partial\eta}(-\Delta)^{k-i}\varphi + \lambda(-\Delta)^{k-i}\varphi\right)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \big(u|u|^{\rho-1}+f\big)(y)\varphi(y)dy \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{\partial}{\partial\eta}(-\Delta)^{k-i}\varphi + \lambda(-\Delta)^{k-i}\varphi\right)\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{k+i-1}G\big(u|u|^{\rho-1}+f\big)(y)dy\right)dx.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Agora, lembrando que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} G\big(u|u|^{\rho-1}+f\big)dy$$

implica em

$$(-\Delta)^{k+i-1}u = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{k+i-1}G\big(u|u|^{\rho-1}+f\big)(y)dy.$$

Substituindo em (3.57), tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} (-\Delta)^k u(-\Delta)^k \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} \left(u|u|^{\rho-1} + f\right)(y)\varphi(y)dy$$
$$- \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta)^{k+i-1} u \left(\frac{\partial}{\partial \eta}(-\Delta)^{k-i}\varphi + \lambda(-\Delta)^{k-i}\varphi\right) dx.$$

Logo, fazendo a mudança de variaveis $j = k - i + 1$ obtem-se (3.55). Daí, conclui-se que a solução do ponto fixo é uma solução no sentido fraco.

Capítulo 4

Operadores poli-harmônicos em espaços anisotrópicos

Neste capítulo vamos estudar o seguinte problema:
Problema 8.

$$\begin{cases} \Delta^m u + V(x)u + b(x)h(u) + g(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^N \\ \Delta^j u \to 0, \ |x| \to \infty, \ j = 0, \cdots, m-1, \end{cases}$$

em que $m \in \mathbb{N}$, $N > 2m$, $\rho > \max\{\frac{N}{N-2}, 2\}$. $V \in L^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N)$ *e* $b \in L^{\vec{q}}(\mathbb{R}^N)$ *para* $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_N)$ *e* $\vec{q} = (q_1, \cdots, q_N)$ *tais que:*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{s_i} = 2m \quad e \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} = \theta < 2m,$$

$\vec{r_0} = (r_{0,1}, \cdots, r_{0,N})$ *e* $\vec{\delta} = (\delta_1, \cdots, \delta_N)$ *tal que*[1]

$$\vec{1} < \vec{\delta} < \vec{r_0}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_{0,i}} = \alpha_0 = \frac{2m-\theta}{\rho - 1}, \tag{4.1}$$

e sejam $0 \not\equiv g \in L^{\vec{\delta}}(\mathbb{R}^N)$ *e* h *é uma função real de variável real com as seguintes propriedades:*

h1) $h(0) = 0$,

h2) $|h(u) - h(v)| \leq C|u-v|(|u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1})$.

Ferreira, Montenegro e Medeiros em [15] estudaram o caso $m = 1$ e $h(u) = u|u|^{\rho-1}$. Nesse caso eles estabeleceram a existência de uma única solução via Teorema do Ponto Fixo de Banach, a qual possui propriedades de simetria e positividade desde que algumas funções envolvidas no problema possuam essas propriedades.

O caso particular $m = 1$ aparece de maneira natural no estudo de soluções de ondas estacionárias da equação de Klein-Gordon, no estudo de ondas na equação de Schrödinger e na mecânica quântica.

[1] $\vec{a} \leq \vec{b}$, se $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, \cdots, N$.

Essas equações têm sido usadas para descrever muitos fenômenos físicos, que apresentam, em geral, uma característica anisotrópica, devido à não homogeneidade da mídia, bem como à complexidade dos pesos envolvidos. Nossa generalização apresenta uma ordem maior na equação diferencial e toma uma função $h(u)$ mais geral do que aquela apresentada no artigo antes mencionado. Assim, apresentaremos a solução do caso poli-harmônico, o qual pretendemos abordar em espaços anisotrópicos fazendo uso da função de Green (associadas ao operador poli-harmônico envolvido no Problema 8) e algumas desigualdades entre elas, sendo a mais relevante a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev, para posteriormente, mediante argumentos de ponto fixo estabelecer a existência de uma única solução em uma bola de raio suficientemente pequeno com as mesmas propriedades que aquela do caso estudado em [15].

Iremos dividir o estudo deste capítulo em quatro seções. Na primeira seção vamos começar fazendo uma pequena introdução aos conceitos básicos dos espaços anisotrópicos e o abordagem do problema. Na segunda seção vamos aproveitar uma versão da desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev para desenvolver algumas estimativas para os operadores associados com o problema mencionado acima. Na terceira seção iremos fazer a prova do resultado principal do capítulo, mostrando a existência da solução e a dependência dela com respeito das condições para as funções envolvidas no problema e finalmente na última seção iremos falar das propriedades qualitativas da solução encontrada. Com essas considerações mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 25. *Seja $0 \leq \theta < 2m < N$, $\frac{N-\theta}{N-2m} < \rho < \infty$, e sejam $\overrightarrow{r}_0$, $\overrightarrow{r}^k_1$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{1} < \overrightarrow{s} < \overrightarrow{\infty}$, $\overrightarrow{1} \leq \overrightarrow{q} \leq \overrightarrow{\infty}$, $\overrightarrow{\delta}$ e $\overrightarrow{l}$ satisfazendo:*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{s_i} = 2m \quad e \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} = \theta < 2m,$$

$$\overrightarrow{1} < \overrightarrow{\delta} < \overrightarrow{r_0}, \qquad \overrightarrow{r_1} < \overrightarrow{\infty}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_{0,i}} = \alpha_0 = \frac{2m-\theta}{\rho - 1},$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\delta_i} = \alpha_h = \alpha_0 + 2m, \qquad e \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r^k_{1,i}} = \alpha_0 + k, \ para\ k = 1, \cdots, m,$$

$$\frac{1}{\overrightarrow{s}} = \frac{\rho - 1}{\overrightarrow{r}_0} + \frac{1}{\overrightarrow{q}} \qquad e \qquad \frac{1}{\overrightarrow{\delta}} = \frac{\rho}{\overrightarrow{r}_0} + \frac{1}{\overrightarrow{q}} \leq \overrightarrow{1} \tag{4.2}$$

e

$$\overrightarrow{1} < \overrightarrow{l} < \overrightarrow{r}_2 < \overrightarrow{\infty} \ tal\ que\ \frac{1}{\overrightarrow{r}_2} = \frac{1}{\overrightarrow{l}} - \frac{1}{\overrightarrow{s}}. \tag{4.3}$$

Então, se $V \in L^{\overrightarrow{s}}(\mathbb{R}^N)$, $b \in L^{\overrightarrow{q}}(\mathbb{R}^N)$, $0 \not\equiv g \in L^{\overrightarrow{\delta}}(\mathbb{R}^N)$ e h satisfaz as propriedades $(h1)$ e $(h2)$, as seguintes afirmações são verdadeiras

1. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\eta = C_1 \|V\|_{\overrightarrow{s}} < 1$ e $\|h\|_{\overrightarrow{\delta}} \leq \frac{\varepsilon}{C_1}$, então a equação integral associada ao Problema 8 tem uma única solução $u \in L^{\overrightarrow{r}_0}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\|u\|_{\overrightarrow{r}_0} \leq \frac{2\varepsilon}{1-\eta}$. Além disso, $\nabla^k u \in L^{\overrightarrow{r}^k_1}(\mathbb{R}^N)$, para $k = 1, \cdots, m$.*

2. *Sejam $\overrightarrow{1} < \overrightarrow{l} < \overrightarrow{r}_2 < \infty$ satisfazendo (4.3). Assumindo que $g \in L^{\overrightarrow{\delta}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\overrightarrow{l}}(\mathbb{R}^N)$ e $\overline{\eta} = C_3 \|V\|_{\overrightarrow{s}} < 1$.Existe $0 < \overline{\varepsilon} \leq \varepsilon$ tal que se $\|g\|_{\overrightarrow{\delta}} \leq \frac{\overline{\varepsilon}}{C_1}$, então $u \in L^{\overrightarrow{r}_0}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\overrightarrow{r}_2}(\mathbb{R}^N)$.*

3. *Sejam u_1 e u_2 duas soluções associadas com as condições (V_1, g_1) e (V_2, g_2) respetivamente. Sejam (ε_1, η_1) e (ε_2, η_2) os seus parâmetros. Denotando por $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ e $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\}$ tais que $\eta + K_1 \frac{2\varepsilon^{\rho}}{(1-\eta)^{\rho-1}} \|b\|_{\overrightarrow{q}} < 1$, então a seguinte estimativa é válida*

$$\|u_1 - u_2\|_{r_0} \leq \frac{1}{1 - \eta - \frac{2^{\rho} K_1 \varepsilon^{\rho-1}}{(1-\eta)^{\rho-1}} \|b\|_{\overrightarrow{q}}} \Big(\frac{2\varepsilon C_1}{1-\eta} \|V_1 - V_2\|_{\overrightarrow{s}} + C_1 \|g_1 - g_2\|_{\overrightarrow{\delta}} \Big).$$

Espaços anisotrópicos

Nesta primeira seção iremos introduzir as definições de espaços anisotrópicos e a norma associada nestes espaços nos quais pretendemos fazer o estudo do problema. Posteriormente,vamos escolher os índices adequados para que nosso problema seja invariante por escala e assim com esses índices começaremos a estabelecer em seções posteriores algumas estimativas para os operadores que aparecem na forma integral do problema.

Definição 30. *Seja $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e seja o vetor $\overrightarrow{p} = (p_1, \cdots, p_N)$ cujas componentes satisfazem $1 \leq p_i \leq \infty$. Defina-se a norma anisotrópica por*

$$\|u\|_{\overrightarrow{p}} = \Bigg\| \cdots \Big\| \|u\|_{L^{p_1}(dx_1)} \Big\|_{L^{p_2}(dx_2)} \cdots \Bigg\|_{L^{p_N}(dx_N)}. \tag{4.4}$$

Além disso, defina-se o espaço anisotrópico de Lebesgue por

$$L^{\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N) = \{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \ : \ \|u\|_{\overrightarrow{p}} < \infty\}. \tag{4.5}$$

Observação 24.

- *Se $\overrightarrow{p} = (p, \cdots, p)$, então a norma $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{\overrightarrow{p}}$ são iguais. Daí, $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ se, e somente se, $u \in L^{\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)$. Isto é, $L^{\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N) = L^p(\mathbb{R}^N)$.*
- *Os espaços $L^{\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N)$ são espaços de Banach.*

A ideia de Green é, dada uma equação no formato $Lu(x) = f(x),\ x \in \Omega$ a solução tem o formato

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y) f(y) dy.$$

Para nosso caso teríamos o seguinte

$$L = \Delta^m, \quad f = Vu + bh(u) + g \ \text{ e } \ \Omega = \mathbb{R}^N.$$

O problema é que em geral não é fácil conseguir uma função de Green associada ao problema. De fato, a principal dificuldade para calcular uma função de Green associada a este tipo de problemas irá depender da forma do domínio Ω e das condições do bordo para o problema; para nosso caso isto é possível pois nós estamos trabalhando no espaço $\mathbb{R}^N$ e assim não existe uma condição no bordo. Logo podemos pegar como função de Green a solução fundamental do problema poli-harmônico $\Delta^m u = 0$. Assim, lembrando que uma solução fundamental para $(-\Delta)^m u = 0$ vem dada na Definição 13. Isto é, ela satisfaz

$$(-\Delta)^m \phi = \delta_x,$$

então evidentemente pegando $G = (-1)^m\phi$ tem-se que esta nova expressão satisfaz

$$\Delta^m G = \Delta^m\Big[(-1)^m\phi\Big] = (-\Delta)^m\phi = \delta_x,$$

isto sugere pegar $G = (-1)^m\phi$.

Observação 25. *Para nosso caso, o fato de não possuir bordo permite que não precisemos de adicionar uma função corretora na expressão para G.*

Agora denotando por σ_N o volume da bola unitária, desde que

$$\phi(x-y) = C_{N,m}|x-y|^{2m-N}, \text{ pois } d > 2m,$$

o Problema 8 pode ser transformado na seguinte equação integral

$$u(x) = (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|x-y|^{2m-N}\Big(Vu + bh(u) + g(y)\Big)dy, \tag{4.6}$$

para $C_{N,m}$ dada por

$$C_{N,m} = \frac{2\Gamma(\frac{N}{2}-m)}{2^{2m}(m-1)!\Gamma(\frac{N}{2})\sigma_N}.$$

Veja que o lado direito da equação (4.6) acima pode ser considerado uma expressão que depende de u. Isto sugere a ideia de definir um operador T pela expressão abaixo

$$T(u)(x) = (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|x-y|^{2m-N}\Big(V(y)u + b(y)h(u) + g(y)\Big)dy.$$

Assim a equação (4.6) pode ser vista da seguinte maneira

$$u = T(u),$$

o qual sugere pensar em procurar uma solução da equação como um ponto fixo para o operador T. As questões naturais que surgem neste ponto são:

- Em qual espaço definir o operador T?
- Que restrições devem ser consideradas para as funções V, b e g?

Para mostrar que o operador T está bem definido, precisamos estabelecer os espaços aos quais pertencem as funções b, V e g de modo que as seguintes integrais façam sentido

$$(-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{V(y)u(y)}{|x-y|^{N-2m}}dy,$$
$$(-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{b(y)h(u)}{|x-y|^{N-2m}}dy,$$
$$(-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{g(y)}{|x-y|^{N-2m}}dy.$$

A primeira coisa a fazer neste tipo de problemas é tentar conseguir estabelecer algum índice de tal maneira que o problema com reescalonamento possua a propriedade de ser invariante por homotetia. Começaremos considerando uma escala para u dada por $u(x) \to u_\sigma(x) = \sigma^{\alpha_0}u(\sigma x), \quad \sigma > 0.$

Observação 26. *Seja $0 \leq \theta < 2m$ e sejam as funções b_σ, V_σ, g_σ e h_σ satisfazendo*

$$\begin{aligned} b_\sigma(x) &= \sigma^\theta b(\sigma x), \\ V_\sigma(x) &= \sigma^{2m} V(\sigma x), \\ g_\sigma(x) &= \sigma^{\alpha_0+2m} g(\sigma x), \\ h_\sigma(u_\sigma) &= \sigma^{\rho\alpha_0} h(\sigma^{-\alpha_0} u_\sigma). \end{aligned}$$

Então, tem-se

$$\Big(\Delta^m u_\sigma + V_\sigma u_\sigma + b_\sigma h_\sigma(u_\sigma) + g_\sigma\Big)(x) = \Big(\sigma^{\alpha_0+2m}\Delta^m u + \sigma^{\alpha_0+2m} V u + \sigma^{\theta+\rho\alpha} b h(u) + \sigma^{\alpha_0+2m} g\Big)(\sigma x).$$

Logo, para o problema ser invariante por escala, precisaremos que todos os exponentes da constante σ sejam iguais. Isto é

$$\alpha_0 + 2m = \theta + \rho,$$

ou equivalentemente,

$$\alpha_0 = \frac{2m-\theta}{\rho-1}.$$

Assim, se u é solução do Problema 8, então $u_\sigma(x) = \sigma^{\alpha_0} u(\sigma x)$ é solução da equação com reescalonamento

$$\Delta^m u_\sigma + V_\sigma u_\sigma + b_\sigma h_\sigma(u_\sigma) + g_\sigma = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

já que

$$\big(\Delta^m u_\sigma + V_\sigma u_\sigma + b_\sigma h_\sigma(u_\sigma) + g_\sigma\big)(x) = \sigma^{\alpha_0+2m}\big(\Delta^m u + V u + b h(u) + g\big)(\sigma x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Razão pela qual consideramos o reescalonamento dado por

$$u(x) \to u_\sigma(x) = \sigma^{\alpha_0} u(\sigma x), \quad \sigma > 0. \tag{4.7}$$

Estimativas

Nesta seção iremos estabelecer as estimativas dos operadores envolvidos na equação integral (4.6). Tais estimativas são baseadas em uma versão da desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev para espaços anisotrópicos e iremos utiliza-las na seguinte seção para apresentar os resultados de existência da solução em um espaço adequado para obter as derivadas das soluções.

Denotando $\overrightarrow{a} \leq \overrightarrow{b}$ se $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, \cdots, N$.

$$\overrightarrow{1} = (1, \cdots, 1), \qquad \overrightarrow{\infty} = (\infty, \cdots, \infty)$$

e

$$\frac{1}{\overrightarrow{p}} = (\frac{1}{p_1}, \cdots, \frac{1}{p_N})$$

para $\overrightarrow{p} = (p_1, \cdots, p_N)$.

Assumindo $V \in L^{\overrightarrow{s}}(\mathbb{R}^N)$ e $b \in L^{\overrightarrow{q}}(\mathbb{R}^N)$ para $\overrightarrow{s} = (s_1, \cdots, s_N)$ e $\overrightarrow{q} = (q_1, \cdots, q_N)$, tais que:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i} = 2m \quad e \quad \sum_{i=1}^N \frac{1}{q_i} = \theta < 2m \tag{4.8}$$

e considerando o seguinte:

$$\alpha_0 = \frac{2m-\theta}{\rho-1}, \qquad \alpha_h = \alpha_0 + 2m,$$

$\vec{r_0} = (r_{0,1}, \cdots, r_{0,N})$, $\vec{r_1} = (r_{1,1}, \cdots, r_{1,N})$ e $\vec{\delta} = (\delta_1, \cdots, \delta_N)$ tal que

$$\vec{1} < \vec{\delta} < \vec{r_0}, \quad \vec{r_1} < \vec{\infty}, \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_{0,i}} = \alpha_0 = \frac{2m-\theta}{\rho-1}. \tag{4.9}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\delta_i} = \alpha_h = \alpha_0 + 2m \quad e \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_{1,i}^k} = \alpha_0 + k, \tag{4.10}$$

para $k = 1, \cdots, m$.

Além disso, assumiremos que $\vec{1} < \vec{s} < \vec{\infty}$, $\vec{1} \le \vec{q} \le \vec{\infty}$ satisfazem

$$\frac{1}{\vec{s}} = \frac{\rho-1}{\vec{r}_0} + \frac{1}{\vec{q}} \quad e \quad \frac{1}{\vec{\delta}} = \frac{\rho}{\vec{r}_0} + \frac{1}{\vec{q}} \le \vec{1} \tag{4.11}$$

e

$$\vec{1} < \vec{l} < \vec{r}_2 < \vec{\infty} \text{ tal que } \frac{1}{\vec{r}_2} = \frac{1}{\vec{l}} - \frac{1}{\vec{s}}. \tag{4.12}$$

Definição 31. *Sejam $g \in L^{\vec{\delta}}(\mathbb{R}^N)$, $V \in L^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N)$ e $b \in L^{\vec{q}}(\mathbb{R}^N)$ para $\vec{\delta}$, $\vec{s}$ e $\vec{q}$ satisfazendo (4.8)-(4.12). Então, definimos os seguintes operadores:*

$$T_V(u)(x) = (-1)^{m-1} C_{N,m} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(y)u(y)}{|x-y|^{N-2m}} dy, \tag{4.13}$$

$$B_b(h(u))(x) = (-1)^{m-1} C_{N,m} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{b(y)h(u)}{|x-y|^{N-2m}} dy, \tag{4.14}$$

$$H(g)(x) = (-1)^{m-1} C_{N,m} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(y)}{|x-y|^{N-2m}} dy. \tag{4.15}$$

Com esses operadores a equação $u = T(u)$ pode ser escrita na forma

$$u = T_V(u) + B_b(h(u)) + H(g). \tag{4.16}$$

Observação 27.

- *Veja que $T_V(u) = H(Vu)$ e $B_b(h(u)) = H(bh(u))$.*
- *Nos Lemas 12, 13 e 14 estabeleceremos estimativas na norma $L^{\vec{r_0}}(\mathbb{R}^N)$ para os operadores T_V, H e B_b e em consequência concluiremos que $u \in L^{\vec{r_0}}(\mathbb{R}^N)$.*

Lema 10 (Desigualdade de Hölder para espaços anisotrópicos)**.** *Sejam $\vec{1} \le \vec{p}, \vec{p_j} \le \vec{\infty}$ para cada $j = 1, \cdots, m$ tal que*

$$\frac{1}{\vec{p}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\vec{p_j}}.$$

Então,

$$\left\| \prod_{j=1}^{m} u_j \right\|_{\vec{p}} \le \prod_{j=1}^{m} \|u_j\|_{\vec{p_j}}. \tag{4.17}$$

Demonstração. Sejam $\overrightarrow{p} = (p_1, \cdots, p_N)$, $\overrightarrow{p_j} = (p_1^j \cdots, p_m^j)$ para cada $j = 1, \cdots, m$. Então,

$$\frac{1}{p_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_i^j} \text{ para cada } i = 1, \cdots, N.$$

Logo, segue da desigualdade de Hölder para funções nos espaços L^p

$$\begin{aligned}
\left\| \prod_{j=1}^{m} u_j \right\|_{\overrightarrow{p}} &= \left\| \cdots \left\| \| \prod_{j=1}^{m} u_j \|_{L^{p_1}(dx_1)} \right\|_{L^{p_2}(dx_2)} \cdots \right\|_{L^{p_N}(dx_N)} \\
&\leq \left\| \cdots \left\| \prod_{j=1}^{m} \|u_j\|_{L^{p_1^j}(dx_1)} \right\|_{L^{p_2}(dx_2)} \cdots \right\|_{L^{p_N}(dx_N)} \\
&\leq \left\| \cdots \prod_{j=1}^{m} \left\| \|u_j\|_{L^{p_1^j}(dx_1)} \right\|_{L^{p_2^j}(dx_2)} \cdots \right\|_{L^{p_N}(dx_N)} \\
&\leq \prod_{j=1}^{m} \left\| \cdots \left\| \|u_j\|_{L^{p_1^j}(dx_1)} \right\|_{L^{p_2^j}(dx_2)} \cdots \right\|_{L^{p_N^j}(dx_N)} = \prod_{j=1}^{m} \|u_j\|_{\overrightarrow{p_j}}.
\end{aligned}$$

□

Lema 11 (Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev)**.** *Sejam $\overrightarrow{r} = (r_1, \cdots, r_N)$, $\overrightarrow{p} = (p_1, \cdots, p_N)$ tal que $\overrightarrow{1} < \overrightarrow{r} < \overrightarrow{p} < \overrightarrow{\infty}$ e seja a igualdade $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_i} - \beta$ onde $0 < \beta < N$, então existe C tal que*

$$\| |x|^{-(N-\beta)} * f \|_{\overrightarrow{p}} \leq C \|f\|_{\overrightarrow{r}}. \tag{4.18}$$

Demonstração. Seja $\overrightarrow{z} = (z_1, \cdots, z_N)$ com $z_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} z_i = 1$, e $z_i(N-\beta) < 1$ para cada $i = 1, \cdots, N$. Então,

$$\frac{1}{p_i} = \frac{1}{r_i} - (1 - z_i(N-\beta)).$$

Logo,

$$z_i = \frac{1}{N-\beta} \Big(1 - \big((\frac{1}{r_i} - \frac{1}{p_i}) \big) \Big).$$

Desde que $N|x| \geq |x_1| + \cdots + |x_N|$, obtém-se

$$\frac{1}{|x|^{N-\beta}} \leq C \prod_{i=1}^{N} |x_i|^{-z_i(N-\beta)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{|x|^{N-\beta}} * f \right\|_{\overrightarrow{p}} &= \left\| \left\| \cdots \| \| \frac{1}{|x|^{N-\beta} * f} \|_{L^{p_1}(dx_1)} \right\|_{L^{p_2}(dx_2)} \right\|_{L^{p_{N-1}}(dx_{N-1})} \Bigg\|_{L^{p_N}(dx_N)} \\
&\leq C \left\| |x_N|^{-z_N(N-\beta)} * \left\| \cdots \| |x_2|^{-z^2(N-\beta)} * \| |x_1|^{-z_1(N-\beta)} * f(x_1, \cdots, x_N) \|_{L^{p_1}(dx_1)} \right\|_{L^{p_2}(dx_2)} \cdots \right\|_{L^{p_{N-1}}(dx_{N-1})} \Bigg\|_{L^{p_N}(dx_N)} \\
&\leq C \left\| |x_N|^{-z_N(N-\beta)} * \left\| \cdots \|C|x_2|^{-z^2(N-\beta)} * \|f(x_1, \cdots, x_N)\|_{L^{r_1}(dx_1)} \right\|_{L^{p_2}(dx_2)} \cdots \right\|_{L^{p_{N-1}}(dx_{N-1})} \Bigg\|_{L^{p_N}(dx_N)} \\
&\leq C \left\| \left\| \cdots \| \|f(x_1, \cdots, x_N)\|_{L^{r_1}(dx_1)} \right\|_{L^{r_2}(dx_2)} \cdots \right\|_{L^{r_{N-1}}(dx_{N-1})} \Bigg\|_{L^{r_N}(dx_N)} = C\|f\|_{\overrightarrow{r}}.
\end{aligned}$$

□

Lema 12. *Sejam $\overrightarrow{r}_0$, $\overrightarrow{r}_1^k$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{\delta}$ e $\overrightarrow{l}$ satisfazendo (4.9) - (4.12). Então existem constantes C_1, C_2, $C_3 > 0$ tais que*

1.
$$\|H(h)\|_{\overrightarrow{r}_0} \leq C_1 \|h\|_{\overrightarrow{\delta}}, \text{ para toda } h \in L^{\overrightarrow{\delta}}, \tag{4.19}$$

2.
$$\|H(h)\|_{\overrightarrow{r}_2} \leq C_3 \|h\|_{\overrightarrow{l}}, \text{ para toda } h \in L^{\overrightarrow{l}}, \tag{4.20}$$

3.
$$\|\nabla^k H(h)\|_{\overrightarrow{r}_1^k} \leq C_2 \|h\|_{\overrightarrow{\delta}}, \text{ para toda } h \in L^{\overrightarrow{\delta}}. \tag{4.21}$$

Demonstração.

Prova de 1: De (4.15) temos que

$$H(h)(x) = (-1)^{m-1} C_{N,m} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(y)}{|x-y|^{N-2m}} dy.$$

Assim, desde que (4.9) e (4.10) implicam em

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_{0,1}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\delta_i} - 2m.$$

Segue do Lema 11, para $\beta = 2m$

$$\|H(h)\|_{\overrightarrow{r}_0} = C \| |x|^{-(N-2m)} * h \|_{\overrightarrow{r}_0} \leq C_1 \|h\|_{\overrightarrow{\delta}},$$

o que prova (4.19).

Prova de 2: A segunda desigualdade pode ser provada analogamente desde que equação (4.12) implica em

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_{2,1}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{l_i} - 2m.$$

Logo, decorre do Lema 11, com $\beta = 2m$

$$\|H(h)\|_{\overrightarrow{r}_2} = C \| |x|^{-(N-2m)} * h \|_{\overrightarrow{r}_2} \leq C_1 \|h\|_{\overrightarrow{l}}.$$

Prova de 3: Para provar (4.21) basta observar o seguinte

$$\nabla^k H(h)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_x^k \left(\frac{1}{|x-y|^{N-2m}} \right) h(y) dy \tag{4.22}$$

e

$$\left| \nabla_x^k \left(\frac{1}{|x-y|^{N-2m}} \right) \right| \leq \frac{C}{|x-y|^{N-2m+k}}.$$

Além disso notemos que (4.10) implica em:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_{1,i}^k} = \alpha_0 + k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\delta_i} - 2m + k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\delta_i} - (2m-k).$$

Portanto, do Lema 11, tem-se:

$$\|\nabla^k H(h)\|_{\vec{r}_1^k} \leq C \left\| |x|^{-(N-2m+k)} * h \right\|_{\vec{r}_1^k} \leq C_2 \|h\|_{\vec{\delta}}.$$

□

Lema 13. *Sejam $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1^k$, $\vec{r}_2$, $\vec{\delta}$ e $\vec{l}$ satisfazendo (4.9) - (4.12) e C_1, C_2, $C_3 > 0$ dados no Lema 12. Então,*

1.
$$\|T_V(u)\|_{\vec{r}_0} \leq C_1 \|V\|_{\vec{s}} \|u\|_{\vec{r}_0}, \quad \textit{para toda } V \in L^{\vec{s}} \textit{ e } u \in L^{\vec{r}_0}, \tag{4.23}$$

2.
$$\|T_V(u)\|_{\vec{r}_2} \leq C_3 \|V\|_{\vec{s}} \|u\|_{\vec{r}_2}, \quad \textit{para toda } V \in L^{\vec{s}} \textit{ e } u \in L^{\vec{r}_2}, \tag{4.24}$$

3.
$$\|\nabla^k T_V(u)\|_{\vec{r}_1^k} \leq C_2 \|V\|_{\vec{s}} \|u\|_{\vec{r}_0}, \quad \textit{para toda } V \in L^{\vec{s}} \textit{ e } u \in L^{\vec{r}_0}. \tag{4.25}$$

Demonstração.

Prova de 1: Pela definição de T_V e H temos que $T_V(u) = H(Vu)$. Logo, decorre do Lema 11:

$$\|T_V(u)\|_{\vec{r}_0} = \|H(Vu)\|_{\vec{r}_0} \leq C \|Vu\|_{\vec{\delta}},$$

mas de (4.11), tem-se

$$\frac{1}{\vec{\delta}} = \frac{\rho}{\vec{r}_0} + \frac{1}{\vec{q}} = \left(\frac{\rho - 1}{\vec{r}_0} + \frac{1}{\vec{q}} \right) + \frac{1}{\vec{r}_0} = \frac{1}{\vec{s}} + \frac{1}{\vec{r}_0}.$$

Assim, pelo desigualdade de Hölder para espaços anisotrópicos de Lebesgue

$$\|Vu\|_{\vec{\delta}} \leq \|V\|_{\vec{s}} \|u\|_{\vec{r}_0}. \tag{4.26}$$

De onde segue a primeira desigualdade.

Prova de 2: De (4.12) temos

$$\frac{1}{\vec{l}} = \frac{1}{\vec{s}} + \frac{1}{\vec{r}_2}.$$

Assim, novamente pela desigualdade de Hölder para espaços de Lebesgue anisotrópicos e Lema 12, item 2

$$\|T_V(u)\|_{\vec{r}_2} = \|H(Vu)\|_{\vec{r}_2} \leq C \|Vu\|_{\vec{l}} \leq C \|V\|_{\vec{s}} \|u\|_{\vec{r}_2}.$$

Prova de 3: Como já foi observado acima $T_V(u) = H(Vu)$. Assim

$$\nabla T_V(u) = \nabla H(Vu).$$

Segue do Lema 12, item 3

$$\|\nabla^k T_V(u)\|_{\vec{r}_1^k} = \|\nabla^k H(Vu)\|_{\vec{r}_1^k} \leq C \|Vu\|_{\vec{\delta}} \leq C \|V\|_{\vec{s}} \|u\|_{\vec{r}_0}.$$

□

Lema 14. *Sejam $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1^k$, $\vec{r}_2$, $\vec{\delta}$ e $\vec{l}$ satisfazendo (4.9) - (4.12). Então para $b \in L^{\vec{q}}(\mathbb{R}^N)$ existem constantes C_1, C_2, $C_3 > 0$ tais que:*

1.

$$\|B_b(h(u)) - B_b(h(v))\|_{\overrightarrow{r}_0} \leq K_1\|b\|_{\overrightarrow{q}}\|u-v\|_{\overrightarrow{r}_0}\left(\|u\|_{\overrightarrow{r}_0}^{\rho-1} + \|v\|_{\overrightarrow{r}_0}^{\rho-1}\right), \text{ para } u \in L^{\overrightarrow{r_0}}, \quad (4.27)$$

2.

$$\|B_b(h(u)) - B_b(h(v))\|_{\overrightarrow{r}_2} \leq K_3\|b\|_{\overrightarrow{q}}\|u-v\|_{\overrightarrow{r}_2}\left(\|u\|_{\overrightarrow{r}_0}^{\rho-1} + \|v\|_{\overrightarrow{r}_0}^{\rho-1}\right), \text{ para } u \in L^{\overrightarrow{r_2}}, \quad (4.28)$$

3.

$$\|\nabla^k B_b(h(u)) - \nabla^k B_b(h(v))\|_{\overrightarrow{r}_1^k} \leq K_2\|b\|_{\overrightarrow{q}}\|u-v\|_{\overrightarrow{r}_0}\left(\|u\|_{\overrightarrow{r}_0}^{\rho-1} + \|v\|_{\overrightarrow{r}_0}^{\rho-1}\right), \text{ para } u \in L^{\overrightarrow{r_0}}. \tag{4.29}$$

Demonstração.

Prova de 1: Observe que $B_b(h(u)) = H(bh(u))$. Assim:

$$B_b b(h(u)) - B_b(h(v)) = H(bh(u)) - H(bh(v)) = H\Big(b\big(h(u) - h(v)\big)\Big).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|B_b(h(u)) - B_b(h(v))\|_{\overrightarrow{r}_0} &= \|H\Big(b\big(h(u)-h(v)\big)\Big)\|_{\overrightarrow{r}_0} \\ &\leq C\|b\Big(h(u)-h(v)\Big)\|_{\overrightarrow{\delta}}, \end{aligned} \tag{4.30}$$

aqui pegando $\overrightarrow{d} = \frac{\overrightarrow{r}_0}{\rho-1}$, tem-se

$$\frac{1}{\overrightarrow{\delta}} = \frac{\rho}{\overrightarrow{r}_0} + \frac{1}{\overrightarrow{q}} = \frac{1}{\overrightarrow{r}_0} + \frac{1}{\overrightarrow{d}} + \frac{1}{\overrightarrow{q}}.$$

Logo, segue da desigualdade de Hölder para espaços de Lebesgue anisotrópicos

$$\begin{aligned} \|b\Big(h(u)-h(v)\Big)\|_{\overrightarrow{\delta}} &\leq \|b|u-v|\big(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1}\big)\|_{\overrightarrow{\delta}} \\ &\leq \|b\|_{\overrightarrow{q}}\|u-v\|_{\overrightarrow{r}_0}\Big\||u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1}\Big\|_{\overrightarrow{d}}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

usando a desigualdade triangular no terceiro termo da direita

$$\||u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1}\|_{\overrightarrow{d}} \leq \||u|^{\rho-1}\|_{\overrightarrow{d}} + \||v|^{\rho-1}\|_{\overrightarrow{d}} \leq \|u\|_{\overrightarrow{r}_0}^{\rho-1} + \|v\|_{\overrightarrow{r}_0}^{\rho-1}. \tag{4.32}$$

Logo substituindo (4.31) e (4.32) em (4.30) obtém-se a desigualdade.

Prova de 2: De (4.12) tem-se:

$$\frac{1}{\overrightarrow{l}} + \frac{1}{\overrightarrow{r}_2} + \frac{1}{\overrightarrow{s}} = \frac{1}{\overrightarrow{r}_2} + \frac{\rho-1}{\overrightarrow{r}_0} + \frac{1}{\overrightarrow{q}}.$$

Assim, por Hölder segue

$$
\begin{aligned}
\|B_b(h(u)) - B_b(h(v))\|_{\vec{r}_2} &= \|H\Big(b\big(h(u)-h(v)\big)\Big)\|_{\vec{r}_2} \leq C\|b(h(u)-h(v))\|_{\vec{l}} \\
&\leq C\|b|u-v|(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1})\|_{\vec{l}} \\
&\leq C\|b\|_{\vec{q}}\|u-v\|_{\vec{r}_2}\||u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1}\|_{\vec{a}} \\
&\leq C\|b\|_{\vec{q}}\|u-v\|_{\vec{r}_2}\Big(\|u\|^{\rho-1}_{\vec{r}_0}+\|v\|^{\rho-1}_{\vec{r}_0}\Big).
\end{aligned}
$$

Prova de 3: Fazendo uso dos mesmos argumentos acima temos

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^k B_b(h(u)) - \nabla^k B_b(h(v))\|_{\vec{r}^k_1} &= \|\nabla^k\Big(B_b(h(u)) - B_b(h(v))\Big)\|_{\vec{r}^k_1} \\
&= \|\nabla^k H(b(h(u)-h(v)))\|_{\vec{r}^k_1} \\
&\leq C\|b(h(u)-h(v))\|_{\vec{\delta}} \\
&\leq C\|b\|_{\vec{q}}\|u-v\|_{\vec{r}_0}\Big(\|u\|^{\rho-1}_{\vec{r}_0}+\|v\|^{\rho-1}_{\vec{r}_0}\Big).
\end{aligned}
$$

□

Sobre a solução da equação em espaços anisotrópicos

Nesta seção iremos usar as estimativas feitas na seção anterior para estabelecer resultados de existência da solução e dependência da mesma respeito das funções envolvidas na formulação do problema. Iremos usar as estimativas feitas anteriormente junto com argumentos de ponto fixo para o operador dado pela equação (4.16) mostrando que este operador possui um único ponto fixo dentro de uma bola de raio suficientemente pequeno. Finalmente estabeleceremos algumas propriedades da solução baseadas nas estimativas para as derivadas dos operadores envolvidos na equação integral mencionada.

Teorema 26. *Seja $0 \leq \theta < 2m$, $\frac{N-\theta}{N-2m} < \rho < \infty$, e sejam $\vec{r}_0$, $\vec{r}^k_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{s}$, $\vec{q}$, $\vec{\delta}$ e $\vec{l}$ satisfazendo (4.9) - (4.12). Assumindo que $0 \not\equiv g \in L^{\vec{\delta}}(\mathbb{R}^N)$, $V \in L^{\vec{s}}(\mathbb{R}^N)$, $b \in L^{\vec{q}}(\mathbb{R}^N)$ com $\sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i} = 2m$ e $\theta = \sum_{i=1}^N \frac{1}{q_i}$.*

Então, se h satisfaz as propriedades $(h1)$ e $(h2)$, as seguintes afirmações são verdadeiras

1. *Seja C_1 dada no Lema 12. Existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\eta = C_1\|V\|_{\vec{s}} < 1$ e $\|h\|_{\vec{\delta}} \leq \frac{\varepsilon}{C_1}$, então a equação integral (4.6) tem uma única solução $u \in L^{\vec{r}_0}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\|u\|_{\vec{r}_0} \leq \frac{2\varepsilon}{1-\eta}$. Além disso, $\nabla^k u \in L^{\vec{r}^k_1}(\mathbb{R}^N)$, para $k = 1, \cdots, m$.*

2. *Sejam $\vec{1} < \vec{l} < \vec{r}_2 < \infty$ satisfazendo (4.12). Assumindo que $g \in L^{\vec{\delta}}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\vec{l}}(\mathbb{R}^N)$ e $\overline{\eta} = C_3\|V\|_{\vec{s}} < 1$, onde C_3 é dada no Lema 12. Existe $0 < \overline{\varepsilon} \leq \varepsilon$ tal que se $\|g\|_{\vec{\delta}} \leq \frac{\overline{\varepsilon}}{C_1}$, então $u \in L^{\vec{r}_0}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\vec{r}_2}(\mathbb{R}^N)$.*

3. *Sejam u_1 e u_2 duas soluções associadas com as condições (V_1, g_1) e (V_2, g_2) respetivamente. Sejam (ε_1, η_1) e (ε_2, η_2) os seus parâmetros, Denotando por $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ e $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\}$ tais que $\eta + K_1\frac{2\varepsilon^\rho}{(1-\eta)^{\rho-1}}\|b\|_{\vec{q}} < 1$, então a seguinte estimativa é válida*

$$
\|u_1 - u_2\|_{r_0} \leq \frac{1}{1-\eta-\frac{2^\rho K_1 \varepsilon^{\rho-1}}{(1-\eta)^{\rho-1}}\|b\|_{\vec{q}}}\Big(\frac{2\varepsilon C_1}{1-\eta}\|V_1 - V_2\|_{\vec{s}} + C_1\|g_1 - g_2\|_{\vec{\delta}}\Big).
$$

Demonstração.

Prova de 1: Definamos a função $\Psi : L^{\vec{r}_0} \to L^{\vec{r}_0}$ dada por

$$\Psi(u) := T_V(u) + B_b(h(u)) + H(g)$$

e considere a bola

$$B_\varepsilon = \{u \in L^{\vec{r}_0} \ : \ \|u\|_{\vec{r}_0} \leq \frac{2\varepsilon}{1-\eta}\}$$

com a métrica

$$\mathscr{W}(u,v) = \|u-v\|_{\vec{r}_0}.$$

Seja $u \in B_\varepsilon$; desde que $\eta = C_1\|V\|_{\vec{s}} < 1$

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)\|_{\vec{r}_0} &= \|T_V(u) + B_b(h(u)) + H(g)\|_{\vec{r}_0} \\
&\leq \|T_V(u)\|_{\vec{r}_0} + \|B_b(h(u))\|_{\vec{r}_0} + \|H(g)\|_{\vec{r}_0} \\
&\leq C_1\|V\|_{\vec{s}}\|u\|_{\vec{r}_0} + K_1\|b\|_{\vec{q}}\|u\|^{\rho}_{\vec{r}_0} + C_1\|g\|_{\vec{\delta}} \\
&\leq \eta\frac{2\varepsilon}{1-\eta} + K_1\|b\|_{\vec{q}}\frac{2^\rho\varepsilon^\rho}{(1-\eta)^\rho} + \varepsilon \\
&= \left(1 + \eta + K_1\|b\|_{\vec{q}}\frac{2^\rho\varepsilon^{\rho-1}}{(1-\eta)^{\rho-1}}\right)\frac{\varepsilon}{1-\eta} \\
&< \frac{2\varepsilon}{1-\eta}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Aqui ε é escolhido tal que $K_1\|b\|_{\vec{q}}\frac{2^\rho\varepsilon^{\rho-1}}{(1-\eta)^{\rho-1}} + \eta < 1$. Por outro lado

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{\vec{r}_0} &= \|T_V(u) + B_b(h(u)) - T_V(v) - B_b(h(v))\|_{\vec{r}_0} \\
&= \|T_V(u-v) + B_b(h(u)) - B_b(h(v))\|_{\vec{r}_0} \\
&\leq \|T_V(u-v)\|_{\vec{r}_0} + \|B_b(h(u)) - B_b(h(v))\|_{\vec{r_0}} \\
&\leq C_1\|V\|_{\vec{s}}\|u-v\|_{\vec{r}_0} + K_1\|b\|_{\vec{q}}\|u-v\|_{\vec{r}_0}\left(\|u\|^{\rho-1}_{\vec{r}_0} + \|v\|^{\rho-1}_{\vec{r}_0}\right) \\
&\leq \left(\eta + K_1\|b\|_{\vec{q}}\frac{2^\rho\varepsilon^{\rho-1}}{(1-\eta)^{\rho-1}}\right)\|u-v\|_{\vec{r}_0} < \|u-v\|_{\vec{r}_0}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

De (4.33) e (4.34) conclui-se que $\Psi\Big|_{B_\varepsilon}$ é uma contração. Em consequência pode-se garantir a existência de uma função $u \in B_\varepsilon$.

Por outro lado $u \in L^{\vec{r}_0}$ e $u = T_V(u) + B_b(h(u)) + H(g)$ implicam

$$\nabla^k u = \nabla^k T_V(u) + \nabla^k B_b(h(u)) + \nabla^k H(g).$$

Daí

$$\begin{aligned}
\|\nabla^k u\|_{\vec{r}_1^k} &\leq \|\nabla^k T_V(u)\|_{\vec{r}_1^k} + \|\nabla^k B_b(h(u))\|_{\vec{r}_1^k} + \|\nabla^k H(g)\|_{\vec{r}_1^k} \\
&\leq C_2\|V\|_{\vec{s}}\|u\|_{\vec{r}_0} + K_2\|b\|_{\vec{q}}\|u\|^{\rho}_{\vec{r}_0} + C_2\|g\|_{\vec{\delta}} < \infty.
\end{aligned}$$

Isto é, $\nabla^k u \in L^{\vec{r}_1^k}$.

Prova de 2: Seja a sequencia de Picard dada por:

$$u_1 = H(g) \quad e \quad u_{j+1} = T_V(u_j) + B_b(h(u_j)) + H(g), \quad j \in \mathbb{N}. \tag{4.35}$$

Dado que $\Psi\Big|_{B_\varepsilon}$ é uma contração temos que a solução u é o limite da sequência de Picard (4.35) em $L^{\overrightarrow{r}_0}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|u_{j+1}\|_{\overrightarrow{r_2}} &= \|T_V(u_j) + B_b(h(u_j)) + H(g)\|_{\overrightarrow{r}_2} \\
&\leq \|T_V(u_j)\|_{\overrightarrow{r}_2} + \|B_b(h(u_j))\|_{\overrightarrow{r}_2} + \|H(g)\|_{\overrightarrow{r}_2} \\
&\leq C_3\|V\|_{\overrightarrow{s}}\|u_j\|_{\overrightarrow{r}_2} + K_3\|b\|_{\overrightarrow{q}}\|u_j\|_{\overrightarrow{r}_0}\|u_j\|^{\rho-1}_{\overrightarrow{r}_0} + C_3\|g\|_{\overrightarrow{l}} \\
&\leq C_3\|g\|_{\overrightarrow{l}} + \left(C_3\|V\|_{\overrightarrow{s}} + K_3\|b\|_{\overrightarrow{q}}\|u_j\|^{\rho-1}_{\overrightarrow{r}_0}\right)\|u_j\|_{\overrightarrow{r}_2}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Seja $\eta = C_3\|V\|_{\overrightarrow{s}} < 1$ e $0 < \overline{\varepsilon} \leq \varepsilon$ satisfazendo

$$\overline{\eta} + K_3\|b\|_{\overrightarrow{q}} \frac{2^\rho \overline{\varepsilon}^{\rho-1}}{(1-\eta)^{\rho-1}} < 1. \tag{4.37}$$

Substituindo isto em (4.36), tem-se

$$\begin{aligned}
\|u_{j+1}\|_{\overrightarrow{r}_2} &\leq C_3\|g\|_{\overrightarrow{l}} + \left(C_3\|V\|_{\overrightarrow{s}} + K_3\|b\|_{\overrightarrow{q}}\|u_j\|^{\rho-1}_{\overrightarrow{r}_0}\right)\|u_j\|_{\overrightarrow{r}_2} \\
&\leq C_3\|g\|_{\overrightarrow{l}} + \left(\overline{\eta} + K_3\|b\|_{\overrightarrow{q}} \frac{2^{\rho-1}\overline{\varepsilon}^{\rho-1}}{(1-\eta)^{\rho-1}}\right)\|u_j\|_{\overrightarrow{r}_2} \\
&\leq \frac{C_3\|g\|_{\overrightarrow{l}}}{1 - \overline{\eta} - K_3\|b\|_{\overrightarrow{q}} \frac{2^{\rho-1}\overline{\varepsilon}^{\rho-1}}{(1-\eta)^{\rho-1}}}.
\end{aligned}$$

Daí, a sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada. Logo ela converge fracamente em $L^{\overrightarrow{r}_2}$ para $\overline{u}$, particularmente converge no sentido das distribuições. Mas pelo feito no primeiro item temos que $u_j \to u \in L^{\overrightarrow{r}_0}$. Assim, a unicidade do limite permite concluir que $u = \overline{u} \in L^{\overrightarrow{r}_2}$. Daí conclui-se o segundo item do teorema.

Prova de 3: Sejam u_1 e u_2 duas soluções associadas com as condições (V_1, g_1) e (V_2, g_2) respetivamente, então tem-se

$$\begin{aligned}
u_1 &= T_{V_1}(u_1) + B_b(h(u_1)) + H(g_1) \\
u_2 &= T_{V_2}(u_2) + B_b(h(u_2)) + H(g_2).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u_1-u_2\|_{r_0} &= \|T_{V_1}(u_1)+B_b(h(u_1))+H(g_1)-T_{V_2}(u_2)-B_b(h(u_2))-H(g_2)\|_{r_0}\\
&\leq \|T_{V_1}(u_1)-T_{V_2}(u_2)\|_{r_0}+\|B_b(h(u_1))-B_b(h(u_2))\|_{r_0}+\|H(g_1)-H(g_2)\|_{r_0}\\
&\leq \|H(V_1u_1)-H(V_2u_2)\|_{r_0}+\|B_b(h(u_1))-B_b(h(u_2))\|_{r_0}+\|H(g_1)-H(g_2)\|_{r_0}\\
&\leq |H(V_1u_1)-H(V_1u_2)\|_{r_0}+\|H(V_1u_2)-H(V_2u_2)\|_{r_0}\\
&\quad+\|B_b(h(u_1))-B_b(h(u_2))\|_{r_0}+\|H(g_1)-H(g_2)\|_{r_0}\\
&\leq C_1\|V_1u_1-V_1u_2\|_{r_0}+C_1\|V_1u_2-V_2u_2\|_{r_0}\\
&\quad+K_1\|b\|_{\vec{q}}\|u_1-u_2\|\Big(\|u_1\|_{r_0}^{\rho-1}+\|u_2\|_{r_0}^{\rho-1}\Big)+C_1\|g_1-g_2\|_{\vec{\delta}}\\
&\leq C_1\|V_1\|_{\vec{s}}\|u_1-u_2\|_{r_0}+C_1\|V_1-V_2\|_{\vec{s}}\|u_2\|_{r_0}\\
&\quad+K_1\frac{2^\rho\varepsilon^{\rho-1}}{(1-\eta)^{\rho-1}}\|b\|_{\vec{q}}\|u_1-u_2\|+C_1\|g_1-g_2\|_{\vec{\delta}}\\
&=\Big(\eta+K_1\frac{2^\rho\varepsilon^{\rho-1}}{(1-\eta)^{\rho-1}}\|b\|_{\vec{q}}\Big)\|u_1-u_2\|_{r_0}+\frac{2\varepsilon C_1}{1-\eta}\|V_1-V_2\|_{\vec{s}}+C_1\|g_1-g_2\|_{\vec{\delta}}.
\end{aligned}$$

Passando o primeiro termo da direita pro outro lado e colocando em evidencia a norma da diferencia u_1-u_2 obtém-se a estimativa. O que conclui a prova do teorema. □

Definição 32. *Seja o espaço $\mathscr{D}$ definido por $\mathscr{D}=\{u\in L^{\vec{r_0}}\ :\ \nabla^k u\in L^{\vec{r_1^k}}\}$. Uma função $u\in\mathscr{D}$ é uma solução fraca do Problema 8 se ela satisfaz:*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla^m u\nabla^m\varphi dx+(-1)^m\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(y)\Big(Vu+bh(u)+g\Big)(y)dy=0, \tag{4.38}$$

para toda $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 27. *Seja u a solução dada em Teorema 26 item 1, então u é uma solução do Problema 8 no sentido fraco dado na Definição 32.*

Demonstração. Denote por

$$\langle\varphi,\psi\rangle:=\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\psi(x)dx.$$

Seja ϕ a solução fundamental do problema poli-harmônico e $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, então fazendo uso das identidades de Green m vezes, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Big\langle\nabla^m\phi(x-y),\nabla^m\varphi(x)\Big\rangle &= \Big\langle(-\Delta)\nabla^{m-1}\phi,\nabla^{m-1}\varphi\Big\rangle\\
&=\Big\langle(-\Delta)^2\nabla^{m-2}\phi,\nabla^{m-2}\varphi\Big\rangle\\
&\ \ \vdots\\
&=\Big\langle(-\Delta)^m\phi,\varphi\Big\rangle=\varphi(y).
\end{aligned}$$

Logo, para nossa solução acima

$$u(x)=(-1)^{m-1}\int_{\mathbb{R}^N}\phi(x-y)\Big(Vu+bh(u)+g\Big)(y)dy,$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla^m u, \nabla^m \varphi \rangle &= \Big\langle \nabla^m (-1)^{m-1} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y)(Vu+bh(u)+g)(y)dy, \nabla^m \varphi \Big\rangle \\
&= (-1)^{m-1} \Big\langle \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla^m \phi(x-y)(Vu+bh(u)+g)(y)dy, \nabla^m \varphi \Big\rangle \\
&= (-1)^{m-1} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla^m \phi, \nabla^m \varphi \rangle \Big(Vu+bh(u)+g \Big)(y)dy \\
&= (-1)^{m-1} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \langle (-\Delta)^m \delta, \varphi \rangle \Big(Vu+bh(u)+g \Big)(y)dy \\
&= (-1)^{m-1} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) \Big(Vu+bh(u)+g \Big)(y)dy,
\end{aligned}$$

portanto u é solução no sentido de (4.38). □

Propriedades qualitativas

Nesta seção iremos falar das propriedades qualitativas da solução encontrada na seção anterior, para isso aproveitaremos que a solução do ponto fixo pode ser construída como o limite de uma sequencia de Picard. Assim vamos estabelecer propriedades de positividade e simetria para a solução baseadas no comportamento a priori de algumas funções envolvidas no problema.

Teorema 28. *Nas hipóteses do Teorema 26. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto arbitrário de medida positiva, G um subconjunto de*[2] *$O(N)$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo (h1), (h2) tem-se:*

1. *Seja h tal que $h(t) \geq 0$ se $t \geq 0$ e $h(t) \leq 0$, se $t \leq 0$ para quase todo ponto em $t \in \mathbb{R}$ então se m é ímpar tem-se que a solução u é positiva (resp. negativa) se $V(x),\ b(x),\ g(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) em $\mathbb{R}^N$ e $g(x) > 0$ (resp. < 0) em Ω. Enquanto que se m é par tem-se que a solução é positiva (resp. negativa) se $V(x),\ b(x),\ g(x) \leq 0$ (resp. ≥ 0) em $\mathbb{R}^N$ e $g(x) < 0$ (resp. > 0) em Ω.*

2. *Sejam $V(x)$ e $b(x)$ simétricas*[3] *pela ação de G e h uma função impar, então a solução u é antissimétrica quando g(x) é antissimétrica por G.*

3. *Sejam $V(x)$ e $b(x)$ simétricas pela ação de G, então a solução u é simétrica quando g(x) é simétrica por G.*

Demonstração.

Prova de 1: Sejam $V, b \geq 0$ para quase todo ponto em $\mathbb{R}^N$ e seja Ω um conjunto de medida positiva. De (4.15) tem-se $u_1 = H(g) > 0$ no $\mathbb{R}^N$. Além disso tem-se:

$$T_V(u) \geq 0 \quad e \quad B_b(h(u)) \geq 0 \quad \text{quando } u \geq 0 \text{ para quase todo ponto no } \mathbb{R}^N, \tag{4.39}$$

pois $V(x),\ b(x) \geq 0$ para quase todo ponto no $\mathbb{R}^N$. Mas $u_1 > 0$, logo de (4.35) e (4.39) segue que $u_2 > 0$. Repetindo esse procedimento obtém-se que $u_j > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Assim já que $u_j \to u \in L^{\vec{r}_0}$ tem-se que $u \geq 0$ para quase todo ponto no $\mathbb{R}^N$. Assim de (4.16) e (4.39)

$$u = T_V(u) + B_b(h(u)) + H(g) \geq H(g) > 0. \quad q.t.p \quad \text{no } \mathbb{R}^N,$$

[2] Veja a Definição 18 no capítulo Preliminares.

[3] Veja Definição 19 no capítulo Preliminares.

os outros casos do item (1) são totalmente análogos.

Prova de 2: Seja $A \in G \subset O(N)$. Dado que por hipóteses g é antissimétrica por G, tem-se:

$$\begin{aligned}
-H(g)(A^{-1}x) &= (-1)^m C_{N,m} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{g(y)}{|A^{-1}x-y|^{N-2m}} dy \\
&= (-1)^m C_{N,m} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{g(y)}{\left|A^{-1}\left(x-Ay\right)\right|^{N-2m}} dy \\
&= (-1)^m C_{N,m} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{g(y)}{|x-Ay|^{N-2m}} dy \\
&= (-1)^m C_{N,m} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{g(A^{-1}z)}{|x-z|^{N-2m}} dz \\
&= (-1)^{m-1} C_{N,m} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{g(z)}{|x-z|^{N-2m}} dz = H(g)(x),
\end{aligned}$$

isto é $H(g)$ é antissimétrica.

Por outro lado observe que o fato de ter V e b simétricas, implica que para u antissimétrica tem-se:

$$\begin{aligned}
-T_V(u)(A^{-1}x) &= (-1)^m C_{N,m} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{V(y)u(y)}{|A^{-1}x-y|^{N-2m}} dy \\
&= (-1)^m C_{N,m} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{V(y)u(y)}{\left|A^{-1}\left(x-Ay\right)\right|^{N-2m}} dy \\
&= (-1)^m C_{N,m} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{V(y)u(y)}{|x-Ay|^{N-2m}} dy \\
&= (-1)^m C_{N,m} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{V(Ay)u(y)}{|x-Ay|^{N-2m}} dy \\
&= (-1)^m C_{N,m} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{V(z)u(A^{-1}z)}{|x-z|^{N-2m}} dz \\
&= (-1)^{m-1} C_{N,m} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{V(z)u(z)}{|x-z|^{N-2m}} dz = T_V(u)(x).
\end{aligned}$$

Consequentemente $T_V(u)$ é antissimétrica. Além disso, dado que h é uma função ímpar tem-se:

$$
\begin{aligned}
-B_b(h\circ u)(A^{-1}x) &= (-1)^m C_{N,m}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{b(y)(h\circ u)(y)}{|A^{-1}x-y|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^m C_{N,m}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{b(y)(h\circ u)(y)}{\left|A^{-1}\left(x-Ay\right)\right|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^m C_{N,m}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{b(Ay)(h\circ u)(y)}{|x-Ay|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^m C_{N,m}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{b(Ay)(h\circ u)(y)}{|x-Ay|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^m C_{N,m}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{b(z)(h\big(u(A^{-1}z)\big)}{|x-z|^{N-2m}}dz\\
&= (-1)^m C_{N,m}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{b(z)\big(h(-u(z)\big)}{|x-z|^{N-2m}}dz\\
&= (-1)^{m-1} C_{N,m}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{b(z)(h\big(u(z)\big)}{|x-z|^{N-2m}}dz = B_b(h\circ u)(x).
\end{aligned}
$$

Isto é, as hipóteses de V e b ser simétricas e h ímpar implicam que $T_V(u)$ e $B_b(h\circ u)$ são antissimétricas desde que u seja antissimétrica. Por outro lado de (4.35) tem-se $u_1 = H(g)$ e portanto, pelo observado acima u_1 é antissimétrica. Assim $u_2 = T_V(u_1) + B_b(h\circ u_1) + H(g)$ é antissimétrica, repetindo esse argumento conclui-se que u_j é antissimétrica; mas $u_j \to u$ em $L^{\vec{r}_0}$, isto implica que (a menos de subsequência) converge pontualmente, e assim u é antissimétrica.

A prova do caso simétrico é totalmente análoga porém vale a pena fazer a demostração já que ela não precisa de hipóteses adicionais sobre a função h

Prova de 3: Dado que por hipóteses g é simétrica por G, tem-se:

$$
\begin{aligned}
H(g)(Ax) &= (-1)^{m-1} C_{N,m}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{g(y)}{|Ax-y|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^{m-1} C_{N,m}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{g(y)}{\left|A\left(x-A^{-1}y\right)\right|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^{m-1} C_{N,m}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{g(Az)}{|x-z|^{N-2m}}dz\\
&= (-1)^{m-1} C_{N,m}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{g(Ay)}{|x-z|^{N-2m}}dz\\
&= (-1)^{m-1} C_{N,m}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{g(z)}{|x-z|^{N-2m}}dz = H(g)(x),
\end{aligned}
$$

isto é $H(g)$ é simétrica.

Por outro lado observe que o fato de ter V e b simétricas, implica que para u simétrica tem-se:

$$
\begin{aligned}
T_V(u)(Ax) &= (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{V(y)u(y)}{|Ax-y|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{V(y)u(y)}{\left|A\left(x-A^{-1}y\right)\right|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{V(y)u(y)}{|x-A^{-1}y|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{V(Az)u(Az)}{|x-z|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{V(z)u(z)}{|x-z|^{N-2m}}dz = T_V(u)(x),
\end{aligned}
$$

consequentemente $T_V(u)$ é simétrica. Além disso, tem-se:

$$
\begin{aligned}
B_b(h\circ u)(Ax) &= (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{b(y)(h\circ u)(y)}{|Ax-y|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{b(y)(h\circ u)(y)}{\left|A\left(x-A^{-1}y\right)\right|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{b(y)(h\circ u)(y)}{|x-A^{-1}y|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{b(Az)(h\circ u)(Az)}{|x-z|^{N-2m}}dy\\
&= (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{b(Az)(h\big(u(Az)\big)}{|x-z|^{N-2m}}dz\\
&= (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{b(z)\big(h\big(u(z)\big)}{|x-z|^{N-2m}}dz\\
&= (-1)^{m-1}C_{N,m}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{b(z)(h\big(u(z)\big)}{|x-z|^{N-2m}}dz = B_b(h\circ u)(x),
\end{aligned}
$$

isto é, as hipóteses de V e b ser simétricas permitem tirar qualquer hipóteses adicional sobre a função h. Daí isto implica que $T_V(u)$ e $B_b(h\circ u)$ são simétricas desde que u seja simétrica. Por outro lado de (4.35) tem-se $u_1 = H(g)$ e portanto, pelo observado acima u_1 é simétrica. Assim $u_2 = T_V(u_1)+B_b(h\circ u_1)+H(g)$ é simétrica, repetindo esse argumento conclui-se que u_j é simétrica; mas $u_j \to u$ em $L^{\vec{r}_0}$, isto implica que (a menos de subsequência) converge pontualmente, e assim u é simétrica. $\square$

Capítulo 5

Sobre uma classe de sistemas elípticos com pesos

Introdução

Neste capítulo vamos fazer mais uma vez uso das funções de Green, desta vez associadas ao laplaciano no espaço $\mathbb{R}^N$ para abordar o seguinte sistema de duas equações diferencias elípticas com pesos

Problema 9.

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u + \omega K_1(x)u\varphi = a(x)h(u) + f(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta \varphi + V_2(x)\varphi + \omega K_2(x)u\varphi = b(x)h(\varphi) + g(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

em que $a, b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, ω uma constante positiva, $f, g \in L^\theta(\mathbb{R}^N)$ não nulas e $K_1, K_2 \in L^q(\mathbb{R}^N)$, para

$$\theta = \frac{N(\rho - 1)}{2\rho} \quad e \quad q = \frac{N(\rho - 1)}{2\rho - 4},$$

sendo f e g funções com norma $\|\cdot\|_\theta$ suficientemente pequena, pesos V_i com norma $\|\cdot\|_{\frac{N}{2}}$ pequena. e h uma função real de variável real satisfazendo

h1) $h(0) = 0$,

h2) $\Big|h(u) - h(v)\Big| \le C|u - v|\Big(|u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1}\Big)$.

O problema 9 é inspirado naquele estudado por Ferreira, Montenegro e Medeiros no artigo [16], de fato ele não é uma generalização no sentido estrito mas tem uma generalização da primeira equação considerada no sistema do artigo mencionado, levado para o caso de um sistema de duas equações e posteriormente a um sistema de n equações. De fato, no nosso problema iremos trocar a restrição do peso V ser não negativo pela condição dele ter norma suficientemente pequena no espaço $L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$. Assim, apresentaremos baixo essas restrições um resultado de existência de uma única solução em uma bola suficientemente pequena:

Teorema 29. *Seja $N > 2$, $\rho > \frac{N}{N-2}$, $\rho > 2$ e sejam $k = \frac{2}{\rho-1}$, $r_0 = \frac{N}{k} = \frac{N(\rho-1)}{2}$ e $r_1 = \frac{N(\rho-1)}{\rho+1}$. Se $f, g \in L^\theta(\mathbb{R}^N)$ são não nulas, $V_1, V_2 \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ e $K_1, K_2 \in L^q(\mathbb{R}^N)$, onde*

$$\theta = \frac{N(\rho - 1)}{2\rho} \quad e \quad q = \frac{N(\rho - 1)}{2\rho - 4}.$$

Então, se $a,b \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ e h satisfaz as propriedades $(h1)$ e $(h2)$, as seguintes afirmações são verdadeiras

1. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\|f\|_\theta \leq \frac{\varepsilon}{4C_1}$, $\|g\|_\theta \leq \frac{\varepsilon}{4C_1}$, $\|V_1\| \leq \frac{\varepsilon}{L_3}$ e $\|V_2\| \leq \frac{\varepsilon}{L_3}$, então o sistema integral associado ao Problema 3 possui uma única solução*
$$(u,\varphi) \in E = L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_0}(\mathbb{R}^N),$$
satisfazendo $\|(u,\varphi)\|_E \leq \varepsilon$.

2. *O par (u,φ) é uma solução no sentido das distribuições e satisfaz*
$$|\nabla u| \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N) \;\; e \;\; |\nabla\varphi| \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N).$$

Vamos dividir este capítulo em quatro seções, na primeira vamos fazer expor o problema e enunciar as principais hipóteses a ser consideradas no problema. Na segunda seção desenvolveremos algumas estimativas para os operadores associados com o sistema mencionado. Na terceira seção iremos fazer a prova do resultado principal neste capítulo, mostrando a existência da solução e a continuidade dela respeito das condições para as funções envolvidas no problema e finalmente na última seção iremos falar das propriedades qualitativas e algumas observações respeito a uma generalização para um sistema de n equações.

Começaremos observando que o sistema acima pode-se reescrever da seguinte forma:
$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \Big(ah(u) + f - (V_1 u + \omega K_1(u\varphi))\Big)(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta\varphi(x) = \Big(bh(\varphi) + g - (V_2\varphi + \omega K_2 u\varphi)\Big)(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{5.1}$$
A ideia é fazer uso da função de Green associada ao Laplaciano no espaço $\mathbb{R}^N$
$$G(x-y) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \cdot \frac{1}{|x-y|^{N-2}}, \;\; \text{para } N > 2.$$

Assim, iremos considerar
$$\begin{cases} u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y)\big(ah(u) - \omega K_1 u\varphi + f - V_1 u\big)(y)dy, \\ \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y)\big(bh(\varphi) - \omega K_2 u\varphi + g - V_2\varphi\big)(y)dy, \end{cases}$$
isto é
$$\begin{cases} u = B_1(u) - \omega B_2(u,\varphi) + F(f) - B_3(u), \\ \varphi = \overline{B}_1(\varphi) - \omega\overline{B}_2(u,\varphi) + F(g) - \overline{B}_3(\varphi), \end{cases} \tag{5.2}$$
onde os operadores mencionados acima são definidos por
$$B_1(u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} Gah(u)dy, \qquad \overline{B}_1(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} Gbh(\varphi)dy, \tag{5.3}$$
$$B_2(u,\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} GK_1 u\varphi dy, \qquad \overline{B}_2(u,\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} GK_2 u\varphi dy, \tag{5.4}$$
$$F(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} Gf dy, \qquad F(g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} Ggdy, \tag{5.5}$$
$$B_3(u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} GV_1 udy, \qquad \overline{B}_3(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} GV_2\varphi dy. \tag{5.6}$$

Observação 28. *A função de Green para o laplaciano no espaço* $\mathbb{R}^N$ *satisfaz*

$$\begin{cases} 0 \leq G_1(x) \leq C|x|^{2-N} & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N, \\ |\nabla G_1(x)| \leq C|x|^{1-N} & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{5.7}$$

Dado o Problema 9, uma escala com $V_1 \equiv 0$, $V_2 \equiv 0$, $f \equiv 0$ e $g \equiv 0$ será dada por

$$u_\lambda(x) = \lambda^k u(\lambda x), \qquad \varphi_\lambda(x) = \lambda^l \varphi(\lambda x), \qquad (K_i)_\lambda(x) = \lambda^\alpha (K_i)(\lambda x), \quad \text{para } i = 1,2. \tag{5.8}$$

Assim, substituindo na equação (5.1), tem-se

$$\lambda^{k+2}\Delta u(\lambda x) + \omega\lambda^{\alpha+l+k} K(\lambda x)u(\lambda x)\varphi(\lambda x) = \lambda^{k\rho} u(\lambda x)|u(\lambda x)|^{\rho-1},$$

$$\lambda^{l+2}\Delta\varphi(\lambda x) + \omega\lambda^{\alpha+l+k} K(\lambda x)u(\lambda x)\varphi(\lambda x) = \lambda^{l\rho} \varphi(\lambda x)|\varphi(\lambda x)|^{\rho-1}.$$

Daí,

$$k+2 = \alpha + l + k = k\rho,$$

além disso,

$$l+2 = \alpha + k + l = l\rho.$$

Logo, dessas duas igualdades, obtém-se

$$k = l = \frac{2}{\rho-1}, \tag{5.9}$$

e

$$\alpha = \frac{2\rho-4}{\rho-1}. \tag{5.10}$$

Observação 29. *Dado* $k = \frac{2}{\rho-1}$, *tem-se*

$$\theta = \frac{N(\rho-1)}{2\rho} = \frac{N}{k+2}$$

Agora vamos tentar achar os valores dos índices para que a equação seja invariante por homotetia

$$\|u_\lambda\|_{r_0}^{r_0} = \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^{r_0} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda^k u(\lambda x)|^{r_0} dx = \lambda^{kr_0} \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda x)|^{r_0} dx$$
$$\frac{\lambda^{kr_0}}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{r_0} dx = \lambda^{kr_0 - N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{r_0} dx = \lambda^{kr_0-N}\|u\|_{r_0}^{r_0},$$

$$\|\nabla u_\lambda\|_{r_1}^{r_1} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^{r_1} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda^k \nabla u(\lambda x)|^{r_1} dx = \lambda^{kr_1}\lambda^{r_1} \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda x)|^{r_1} dx$$
$$\frac{\lambda^{kr_1}\lambda^{r_1}}{\lambda^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^{r_1} dx = \lambda^{(k+1)r_1 - N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^{r_1} dx = \lambda^{(k+1)r_1-N}\|\nabla u\|_{r_1}^{r_1}.$$

Daí, conclui-se que os únicos índices tais que as normas para u e ∇u sejam invariantes por homotetia são dados por

$$r_0 = \frac{N}{k} = \frac{N(\rho-1)}{2}, \qquad r_1 = \frac{N(\rho-1)}{\rho+1}. \tag{5.11}$$

Estimativas para os operadores B_i

Pela equação (5.2) na seção anterior estabelecemos que o estudo da solução do problema passa por estudar o comportamento de alguns operadores que aparecem nessa equação. Nesta seção utilizaremos a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev para expor algumas estimativas para os operadores B_i envolvidos na solução do problema enunciado na seção anterior. Ditas estimativas serão utilizadas nas próximas seções como ferramentas para demonstrar os resultados de existência da solução e algumas propriedades qualitativas da mesma.

Lema 15. *Seja $N > 2$, $\rho > \frac{N}{N-2}$, $\rho > 2$ e sejam $k = \frac{2}{\rho-1}$, $r_0 = \frac{N}{k} = \frac{N(\rho-1)}{2}$ e $r_1 = \frac{N(\rho-1)}{\rho+1}$. Se $f \in L^\theta(\mathbb{R}^N)$, onde*

$$\theta = \frac{N}{k+2}.$$

Entao, existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$\|F(f)\|_{r_0} \leq C_1\|f\|_\theta, \tag{5.12}$$

$$\|\nabla F(f)\|_{r_1} \leq C_2\|f\|_\theta. \tag{5.13}$$

Além disso, se m é um multi-índice e $1 < t_1 < b_1 < \infty$ com $\frac{1}{b_1} = \frac{1}{t_1} - \frac{2}{N}$, então existe uma constante $C_3 > 0$ independente de f tal que

$$\|\nabla^m F(f)\|_{b_1} \leq C_3\|\nabla^m f\|_{t_1}. \tag{5.14}$$

Demonstração. De (5.11) tem-se $\frac{1}{r_0} = \frac{1}{\theta} - \frac{2}{N}$. Logo segue da desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev

$$\|F(f)\|_{r_0} = \left\|\int_{\mathbb{R}^N} G(x-y)f(y)dy\right\|_{r_0} \leq C\left\|\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}}dy\right\|_{r_0} \leq C_1\|f\|_\theta.$$

Além disso $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{N}$. Assim

$$\|\nabla F(f)\|_{r_1} = \left\|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla_x G(x-y)f(y)dy\right\|_{r_1} \leq C\left\|\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-1}}dy\right\|_{r_1} \leq C_2\|f\|_\theta.$$

Finalmente, se m é um multi-índice e $1 < t_1 < b_1 < \infty$ com $\frac{1}{b_1} = \frac{1}{t_1} - \frac{2}{N}$ obtém-se

$$\|\nabla^m F(f)\|_{b_1} = \left\|\int_{\mathbb{R}^N} G(x-y)\nabla^m f(y)dy\right\|_{b_1} \leq C\left\|\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla^m f(y)}{|x-y|^{N-2}}dy\right\|_{b_1} \leq C_3\|\nabla^m f\|_{t_1}.$$

□

Lema 16. *Seja $N > 2$, $\rho > \frac{N}{N-2}$, $\rho > 2$ e sejam $k = \frac{2}{\rho-1}$, $r_0 = \frac{N}{k} = \frac{N(\rho-1)}{2}$ e $r_1 = \frac{N(\rho-1)}{\rho+1}$. Então, se $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ existem constantes positivas L_1 e S_1 tais que*

$$\|B_1(u) - B_1(v)\|_{r_0} \leq L_1\|u-v\|_{r_0}\left(\|u\|_{r_0}^{\rho-1} + \|v\|_{r_0}^{\rho-1}\right), \tag{5.15}$$

$$\|\nabla\big(B_1(u) - B_1(v)\big)\|_{r_1} \leq S_1\|u-v\|_{r_0}\left(\|u\|_{r_0}^{\rho-1} + \|v\|_{r_0}^{\rho-1}\right), \tag{5.16}$$

para todo $u, v \in L^{r_0}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Note-se que $B_1(u)-B_1(v)=F(ah(u)-ah(v))=F\Big(a\big(h(u)-h(v)\big)\Big)$. Pela condição $(h2)$ e usando a desigualdade de Hölder com

$$\frac{1}{\theta}=\frac{k+2}{N}=\frac{1}{r_0}+\frac{\rho-1}{r_0},$$

obtém-se

$$\begin{aligned}\|B_1(u)-B_1(v)\|_{r_0}&\leq\left\|F\Big(a\big(h(u)-h(v)\big)\Big)\right\|_{r_0}\\&\leq C_1\|a\big(h(u)-h(v)\big)\|_\theta\\&\leq C\|a\|_\infty\||u-v|\big(|u|^{\rho-1}+|v|^{\rho-1}\big)\|_\theta\\&\leq L_1\|u-v\|_{r_0}\big(\|u\|_{r_0}^{\rho-1}+\|v\|_{r_0}^{\rho-1}\big),\end{aligned}$$

o que mostra a primeira desigualdade. Para mostrar a segunda é suficiente observar que

$$\nabla B_1(u)(x)=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla_x G_1(x-y)ah(u)(y)dy=\nabla F(ah(u))(x).$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}\|\nabla B_1(u)-\nabla B_1(v)\|_{r_1}&=\left\|\nabla F\big(ah(u)-ah(v)\big)\right\|_{r_1}\\&\leq C_2\|a\|_\infty\|h(u)-h(v)\|_\theta\\&\leq C\|a\|_\infty\|u-v\|_{r_0}\big(\|u\|_{r_0}^{\rho-1}+\|v\|_{r_0}^{\rho-1}\big)\\&\leq S_1\|u-v\|_{r_0}\big(\|u\|_{r_0}^{\rho-1}+\|v\|_{r_0}^{\rho-1}\big).\end{aligned}$$

Daí, conclui-se o Lema. □

Observação 30. *Se trocamos B_1 por $\overline{B}_1$ seguem as mesmas estimativas só trocando as constantes L_1 e S_1 por $\overline{L}_1$ e $\overline{S}_1$ respetivamente, e as provas dessas estimativas são análogas às feitas no Lema 16 trocando a função a pela função b.*

Lema 17. *Seja $N>2$, $\rho>\frac{N}{N-2}$, $\rho>2$ e sejam $k=\frac{2}{\rho-1}$, $r_0=\frac{N}{k}=\frac{N(\rho-1)}{2}$ e $r_1=\frac{N(\rho-1)}{\rho+1}$. Então, se $K_1\in L^q(\mathbb{R}^N)$ existem constantes L_2 e S_2 tais que*

$$\|B_2(u,\varphi)\|_{r_0}\leq L_2\|u\|_{r_0}\|\varphi\|_{r_0}, \tag{5.17}$$

$$\|\nabla B_2(u,\varphi)\|_{r_1}\leq S_2\|u\|_{r_0}\|\varphi\|_{r_0}, \tag{5.18}$$

para todo $u,\varphi\in L^{r_0}(\mathbb{R}^N)$.

Além disso, dadas $u_1,u_2,\varphi_1,\varphi_2\in L^{r_0}(\mathbb{R}^N)$, tem-se

$$\|B(u_1,\varphi_1)-B(u_2,\varphi_2)\|_{r_0}\leq L_2\|u_1-u_2\|_{r_0}\|\varphi_1\|_{r_0}+L_2\|u_2\|_{r_0}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{r_0}. \tag{5.19}$$

Demonstração. Primeiro vamos fazer a prova da estimativa para B_2, observe que:

$$\frac{1}{\theta}=\frac{k+2}{N}=\frac{1}{r_0}+\frac{\rho-1}{r_0}=\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_0}+\frac{\rho-2}{r_0},$$

assim pegando $q = \frac{r_0}{\rho - 2}$ obtém-se

$$\|B_2(u,\varphi)\|_{r_0} = \|F(K_1 u\varphi)\|_{r_0} \leq C_1\|K_1 u\varphi\|_\theta \leq C_1\|K_1\|_q\|u\|_{r_0}\|\varphi\|_{r_0}.$$

De maneira análoga, tem-se

$$\|\nabla B_2(u,\varphi)\|_{r_1} = \|\nabla F(K_1 u\varphi)\|_{r_1} \leq C_2\|K_1 u\varphi\|_\theta \leq C_2\|K_1\|_q\|u\|_{r_0}\|\varphi\|_{r_0}.$$

Daí, segue-se a primeira parte do teorema com $L_2 = C_1\|K_1\|_q$ e $S_2 = C_2\|K_1\|_q$. A última desigualdade segue da desigualdade triangular e (5.17) assim

$$\begin{aligned}\|B(u_1,\varphi_1) - B(u_2,\varphi_2)\|_{r_0} &= \|B(u_1,\varphi_1) - B(u_2,\varphi_1) + B(u_2,\varphi_1) - B(u_2,\varphi_2)\|_{r_0} \\ &\leq \|B(u_1 - u_2,\varphi_1)\|_{r_0} + \|B(u_2,\varphi_1 - \varphi_2)\|_{r_0} \\ &\leq L_2\|u_1 - u_2\|_{r_0}\|\varphi_1\|_{r_0} + L_2\|u_2\|_{r_0}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{r_0}.\end{aligned}$$

□

Observação 31. *Se trocamos B_2 por $\overline{B}_2$ seguem as mesmas estimativas só trocando as constantes L_2 e S_2 por $\overline{L}_2$ e $\overline{S}_2$ respetivamente, e as provas dessas estimativas são análogas às feitas no Lema 17 trocando a função K_1 pela função K_2.*

Lema 18. *Seja $N > 2$, $\rho > \frac{N}{N-2}$, $\rho > 2$ e sejam $k = \frac{2}{\rho - 1}$, $r_0 = \frac{N}{k} = \frac{N(\rho-1)}{2}$ e $r_1 = \frac{N(\rho-1)}{\rho+1}$. Então, se $V_1 \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$, tem-se as seguintes desigualdades*

$$\|B_3(u) - B_3(v)\|_{r_0} \leq C_1\|V_1\|_{\frac{N}{2}}\|u - v\|_{r_0}, \tag{5.20}$$

$$\|\nabla\big(B_3(u) - B_3(v)\big)\|_{r_0} \leq C_2\|V_1\|_{\frac{N}{2}}\|u - v\|_{r_0}, \tag{5.21}$$

para todo $u, v \in L^{r_0}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. A prova da primeira e segunda desigualdade são análogas aos lemas anteriores. De fato:

$$\begin{aligned}\|B_3(u) - B_3(v)\|_{r_0} &= \|F(V_1 u) - F(V_1 v)\|_{r_0} = \|F(V_1 u - V_1 v)\|_{r_0} \\ &C_1\|V_1(u - v)\|_\theta \leq C_1\|V_1\|_{\frac{N}{2}}\|u - v\|_{r_0}.\end{aligned}$$

Assim também

$$\begin{aligned}\|\nabla B_3(u) - \nabla B_3(v)\|_{r_1} &= \|\nabla F\Big(V_1 u - V_1 v\Big)\|_{r_0} \leq C_2\|V_1 u - V_1 v\|_\theta \\ &C_2\|V_1(u - v)\|_\theta \leq C_2\|V_1\|_{\frac{N}{2}}\|u - v\|_{r_0}.\end{aligned}$$

□

Observação 32. *Novamente trocando B_3 por $\overline{B}_3$ seguem as mesmas estimativas só trocando $\|V_1\|_{\frac{N}{2}}$ por $\|V_2\|_{\frac{N}{2}}$ respetivamente, e as provas dessas estimativas são análogas às feitas no Lema 18 trocando os pesos V_1 por V_2.*

Existência da solução

Nesta seção vamos definir um espaço de Banach apropriado no qual podemos aplicar os lemas formulados ha pouco na seção anterior para mostrar que o sistema dado no Problema 9 possui solução.

Definição 33. *Seja o espaço normado E definido por*

$$E = L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_0}(\mathbb{R}^N), \tag{5.22}$$

com a norma associada dada por

$$\|(u,\varphi)\|_E = \|u\|_{r_0} + \|\varphi\|_{r_0},$$

para $(u,\varphi) \in E = L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_0}(\mathbb{R}^N)$.

Definição 34. *Defina-se o operador $T : E \to E$ dado por*

$$\begin{aligned} T :& L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \\ &(u,\varphi) \longrightarrow \Big(B_1(u) - \omega B_2(u,\varphi) + F(f) - B_3(u), \overline{B}_1(\varphi) - \omega \overline{B}_2(u,\varphi) + F(g) - \overline{B}_3(\varphi)\Big). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Vamos considerar a bola no espaço E definida por:

$$B_\varepsilon = \{(u,\varphi) \in E \ : \ \|(u,\varphi)\|_E \leq \varepsilon\}.$$

Observação 33.

- *Evidentemente o espaço E é um espaço de Banach já que é o produto de espaços Banach e possui as propriedades de reflexividade e separabilidade que herdam do espaço $L^{r_0}(\mathbb{R}^N)$.*
- *Mostrar que o Problema 9 tem solução é mesma coisa que mostrar que T possui um ponto fixo $(u,\varphi) \in E = L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_0}(\mathbb{R}^N)$.*

Teorema 30. *Seja $N > 2$, $\rho > \frac{N}{N-2}$, $\rho > 2$ e sejam $k = \frac{2}{\rho-1}$, $r_0 = \frac{N}{k} = \frac{N(\rho-1)}{2}$ e $r_1 = \frac{N(\rho-1)}{\rho+1}$. Se $f,g \in L^\theta(\mathbb{R}^N)$ são não nulas, $V_1,V_2 \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ e $K_1,K_2 \in L^q(\mathbb{R}^N)$, onde*

$$\theta = \frac{N(\rho-1)}{2\rho} \quad e \quad q = \frac{N(\rho-1)}{2\rho-4}.$$

Então, se $a,b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e h satisfaz as propriedades $(h1)$ e $(h2)$, as seguintes afirmações são verdadeiras

1. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\|f\|_\theta \leq \frac{\varepsilon}{4C_1}$, $\|g\|_\theta \leq \frac{\varepsilon}{4C_1}$, $\|V_1\| \leq \frac{\varepsilon}{L_3}$ e $\|V_2\| \leq \frac{\varepsilon}{L_3}$,então o sistema integral (5.2) possui uma única solução.*

   $$(u,\varphi) \in E = L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_0}(\mathbb{R}^N)$$

   satisfazendo $\|(u,\varphi)\|_E \leq \varepsilon$, onde C_1 é dada no Lema 15.

2. *O par (u,φ) é uma solução no sentido das distribuições e satisfaz*

   $$|\nabla u| \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N) \ \ e \ \ |\nabla \varphi| \in L^{r_1}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. Seja $(u,\varphi)\in B_\varepsilon$, então pelas hipóteses para f e g e segundo as estimativas dos Lemas 16, 17 e 18 tem-se:

$$\begin{aligned}
\|T(u,\varphi)\|_{r_0} &= \|B_1(u)-\omega B_2(u,\varphi)+F(f)-B_3(u)\|_{r_0}\\
&\quad +\|\overline{B}_1(\varphi)-\omega\overline{B}_2(u,\varphi)+F(g)-\overline{B}_3(\varphi)\|_{r_0}\\
&\leq \|B_1(u)\|_{r_0}+|\omega|\|B_2(u,\varphi)\|_{r_0}+\|B_3(u)\|_{r_0}+\|F(f)\|_{r_0}\\
&\quad +\|\overline{B}_1(\varphi)\|_{r_0}+|\omega|\|\overline{B}_2(u,\varphi)\|_{r_0}+\|\overline{B}_3(\varphi)\|_{r_0}+\|F(g)\|_{r_0}\\
&\leq L_1\|u\|_{r_0}^{\rho}+|\omega|L_2\|u\|_{r_0}\|\varphi\|_{r_0}+C_1\|V_1\|_{\frac{N}{2}}\|u\|_{r_0}+C_1\|f\|_\theta\\
&\quad +\overline{L}_1\|u\|_{r_0}^{\rho}+|\omega|\overline{L}_2\|u\|_{r_0}\|\varphi\|_{r_0}+C_1\|V_2\|_{\frac{N}{2}}\|\varphi\|_{r_0}+C_1\|g\|_\theta\\
&\leq M\|(u,\varphi)\|_E^{\rho}+|\omega|M'\|(u,\varphi)\|_E^2+\varepsilon\|(u,\varphi)\|_E+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\\
&\leq \big(M\varepsilon^{\rho-1}+|\omega|M'\varepsilon+\varepsilon\big)\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim $T(B_\varepsilon)\subset B_\varepsilon$ desde que $M\varepsilon^{\rho-1}+|\omega|M'\varepsilon+\varepsilon<\frac{1}{2}$, sendo $M=L_1+\overline{L}_1$ e $M'=L_2+\overline{L}_2$.

Agora vamos mostrar que T é uma contração. Dos Lemas 16, 17 e 18, tem-se

$$\begin{aligned}
&\|T(u,\varphi)-T(v,\psi)\|_E=\\
&= \|B_1(u)-\omega B_2(u,\varphi)+F(f)-B_3(u)-B_1(v)-\omega B_2(v,\psi)-F(f)+B_3(v)\|_{r_0}\\
&\quad +\|\overline{B}_1(\varphi)-\omega\overline{B}_2(u,\varphi)+F(g)-\overline{B}_3(\varphi)-\overline{B}_1(\psi)+\omega\overline{B}_2(v,\psi)-F(g)+\overline{B}_3(\psi)\|_{r_0}\\
&\leq \|B_1(u)-B_1(v)\|_{r_0}+|\omega|\|B_2(u,\varphi)-B_2(v,\psi)\|_{r_0}+\|B_3(u)-B_3(v)\|_{r_0}\\
&\quad +\|\overline{B}_1(\varphi)-\overline{B}_1(\psi)\|_{r_0}+|\omega|\|\overline{B}_2(u,\varphi)-\overline{B}_2(v,\psi)\|_{r_0}+\|\overline{B}_3(\varphi)-\overline{B}_3(\psi)\|_{r_0}\\
&\leq L_1(2\varepsilon^{\rho-1})\|u-v\|_{r_0}+|\omega|\Big(\|B_2(u-v,\varphi)\|_{r_0}+\|B_2(v,\varphi-\psi)\|_{r_0}\Big)+L_3\|V_1\|_{\frac{r_0}{\rho-1}}\|u-v\|_{r_0}\\
&+\overline{L}_1(2\varepsilon^{\rho-1})\|\varphi-\psi\|_{r_0}+|\omega|\Big(\|\overline{B}_2(u-v,\varphi)\|_{r_0}+\|\overline{B}_2(v,\varphi-\psi)\|_{r_0}\Big)+\overline{L}_3\|V_2\|_{\frac{r_0}{\rho-1}}\|\varphi-\psi\|_{r_0}\\
&\leq 2\varepsilon^{\rho-1}(L_1+\overline{L}_1)\|(u,\varphi)-(v,\psi)\|_E+(L_3\|V_1\|_{\frac{r_0}{\rho-1}}+\overline{L}_3\|V_2\|_{\frac{r_0}{\rho-1}})\|(u,\varphi)-(v\psi)\|_E\\
&\quad +|\omega|\left(\|B_2(u-v,\varphi)\|_{r_0}+\|B_2(v,\varphi-\psi)\|_{r_0}+\|\overline{B}_2(u-v,\varphi)\|_{r_0}+\|\overline{B}_2(v,\varphi-\psi)\|_{r_0}\right)\\
&\leq 2\varepsilon^{\rho-1}M\|(u,\varphi)-(v,\psi)\|_E+2\varepsilon\|(u,\varphi)-(v\psi)\|_E\\
&\quad +|\omega|\left(L_2\|u-v\|_{r_0}\|\varphi\|_{r_0}+L_2\|v\|_{r_0}\|\varphi-\psi\|_{r_0}+\overline{L}_2\|u-v\|_{r_0}\|\varphi\|_{r_0}+\overline{L}_2\|v\|_{r_0}\|\varphi-\psi\|_{r_0}\right)\\
&\leq 2\varepsilon^{\rho-1}M\|(u,\varphi)-(v,\psi)\|_E+2\varepsilon\|(u,\varphi)-(v,\psi)\|_E\\
&\quad +|\omega|(L_2+\overline{L}_2)\Big(\|u-v\|_{r_0}\|\varphi\|_{r_0}+\|v\|_{r_0}\|\varphi-\psi\|_{r_0}\Big)\\
&\leq 2\varepsilon^{\rho-1}M\|(u,\varphi)-(v,\psi)\|_E+2\varepsilon\|(u,\varphi)-(v,\psi)\|_E\\
&\quad +2\varepsilon|\omega|M'\|(u,\varphi)-(v,\psi)\|_E\\
&\leq \left(2\varepsilon^{\rho-1}M+2\varepsilon|\omega|M'+2\varepsilon\right)\|(u,\varphi)-(v,\psi)\|_E\leq\|(u,\varphi)-(v,\psi)\|_E,
\end{aligned}$$

desde que $M\varepsilon^{\rho-1}+|\omega|M'\varepsilon+\varepsilon<\frac{1}{2}$. Logo T é uma contração. Daí conclui-se a primeira afirmação.

Para mostrar o segundo item basta perceber que se $f,g\in L^\theta(\mathbb{R}^N)$ e (u,φ) é uma solução. Daí

$$\begin{cases}\nabla u=\nabla B_1(u)-\omega\nabla B_2(u,\varphi)+\nabla F(f)-\nabla B_3(u),\\ \nabla\varphi=\nabla\overline{B}_1(\varphi)-\omega\nabla\overline{B}_2(u,\varphi)+\nabla F(g)-\nabla\overline{B}_3(\varphi).\end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{r_1} &= \|\nabla B_1(u)\|_{r_1} + |\omega|\|\nabla B_2(u,\varphi)\|_{r_1} + \|\nabla F(f)\|_{r_1} + \|\nabla B_3(u)\|_{r_1} \\
&= S_1\|u\|_{r_0} + S_2\|u\|_{r_0}\|\varphi\|_{r_0} + C_2\|V_1\|_{\frac{N}{2}}\|u\|_{r_0} + C_1\|f\|_\theta < \infty, \\
\|\nabla \varphi\|_{r_1} &= \|\nabla \overline{B}_1(\varphi)\|_{r_0} + |\omega|\|\nabla \overline{B}_2(u,\varphi)\|_{r_1} + \|\nabla F(g)\|_{r_1} + \|\nabla \overline{B}_3(\varphi)\|_{r_1} \\
&= \overline{S}_1\|u\|_{r_0} + \overline{S}_2\|u\|_{r_0}\|\varphi\|_{r_0} + \overline{C}_2\|V_2\|_{\frac{N}{2}}\|u\|_{r_0} + C_1\|g\|_\theta < \infty.
\end{aligned}$$

Dai conclui-se a prova do resultado. □

Teorema 31. *Nas hipóteses do Teorema 30, sejam (u_1,φ_1) e (u_2,φ_2) duas soluções correspondentes as condições (f_1,g_1,ε_1) e (f_2,g_2,ε_2) respetivamente. Então*

$$\|(u_1,\varphi_1)-(u_2,\varphi_2)\|_E \le \frac{C_1\Big(\|f_1-f_2\|_\theta + \|g_1-g_2\|_\theta\Big)}{1-\Bigg((\varepsilon_1^{\rho-1}+\varepsilon_2^{\rho-1})M + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)N|\omega| + \varepsilon_1+\varepsilon_2\Bigg)}. \tag{5.24}$$

Demonstração. Sejam (u_1,φ_1) e (u_2,φ_2) soluções associadas a (f_1,g_1,ε_1) e (f_2,g_2,ε_2) respetivamente, então tem-se:

$$\begin{aligned}
u_1 &= B_1(u_1) - \omega B_2(u_1,\varphi_1) + F(f_1) - B_3(u_1), \\
u_2 &= B_1(u_2) - \omega B_2(u_2,\varphi_2) + F(f_2) - B_3(u_2), \\
\varphi_1 &= \overline{B}_1(\varphi_1) - \omega \overline{B}_2(u_1,\varphi_1) + F(g_1) - \overline{B}_3(\varphi_1), \\
\varphi_2 &= \overline{B}_1(\varphi_2) - \omega \overline{B}_2(u_2,\varphi_2) + F(g_2) - \overline{B}_3(\varphi_2).
\end{aligned}$$

Assim novamente segue dos Lemas 16, 17 e 18

$$\begin{aligned}
&\|(u_1,\varphi_1)-(u_2,\varphi_2)\|_E = \|u_1-u_2\|_{r_0} + \|\varphi_1-\varphi_2\|_{r_0} \\
&\quad = \|B_1(u_1) - \omega B_2(u_1,\varphi_1) + F(f_1) - B_3(u_1) - B_1(u_2) + \omega B_2(u_2,\varphi_2) - F(f_2) + B_3(u_2)\|_{r_0} \\
&\quad + \|\overline{B}_1(\varphi_1) - \omega \overline{B}_2(u_1,\varphi_1) + F(g_1) - \overline{B}_3(\varphi_1) - \overline{B}_1(\varphi_2) + \omega \overline{B}_2(u_2,\varphi_2) - F(g_2) + \overline{B}_3(\varphi_2)\|_{r_0} \\
&\quad \le \|B_1(u_1) - B_1(u_2)\|_{r_0} + |\omega|\|B_2(u_1,\varphi_1) - B_2(u_2,\varphi_2)\|_{r_0} \\
&\quad + \|F(f_1) - F(f_2)\|_{r_0} + \|B_3(u_1) - B_3(u_2)\|_{r_0} \\
&\quad + \|\overline{B}_1(\varphi_1) - \overline{B}_1(\varphi_2)\|_{r_0} + |\omega|\|\overline{B}_2(u_1,\varphi_1) - \overline{B}_2(u_2,\varphi_2)\|_{r_0} \\
&\quad + \|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\|_{r_0} + \|B_3(\varphi_1) - B_3(\varphi_2)\|_{r_0} \\
&\quad \le L_1\|u_1-u_2\|_{r_0}(\|u_1\|_{r_0}^{\rho-1} + \|u_2\|_{r_0}^{\rho-1}) \\
&\quad + |\omega|\Big(L_2\|u_1-u_2\|_{r_0}\|\varphi_1\|_{r_0} + L_2\|u_2\|_{r_0}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{r_0}\Big) \\
&\quad + C_1\|V_1\|_{\frac{d}{2}}\|u_1-u_2\|_{r_0} + C_1\|f_1-f_2\|_\theta \\
&\quad + \overline{L}_1\|\varphi_1-\varphi_2\|_{r_0}(\|\varphi_1\|_{r_0}^{\rho-1} + \|\varphi_2\|_{r_0}^{\rho-1}) \\
&\quad + |\omega|\Big(\overline{L}_2\|u_1-u_2\|_{r_0}\|\varphi_1\|_{r_0} + \overline{L}_2\|u_2\|_{r_0}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{r_0}\Big) \\
&\quad + C_1\|V_2\|_{\frac{d}{2}}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{r_0} + C_1\|g_1-g_2\|_\theta \\
&\quad \le \Big((\varepsilon_1^{\rho-1}+\varepsilon_2^{\rho-1})(L_1+\overline{L}_1) + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)(L_2+\overline{L}_2) + \varepsilon_1+\varepsilon_2\Big)\|(u_1,\varphi_1)-(u_2,\varphi_2)\|_E \\
&\quad + C_1\Big(\|f_1-f_2\|_\theta + \|g_1-g_2\|_\theta\Big).
\end{aligned}$$

Daí segue a conclusão. □

Propriedades qualitativas

Teorema 32. *Nas hipóteses do Teorema 30. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto de medida positiva. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $K_1, K_2, V_1, V_2, a, b, f, g$ são funções radiais, então a solução (u, φ) é radial.*

2. *Se as funções K_1, K_2, a, b, f, g são funções pares, então u e φ são funções pares.*

3. *Seja h tal que $h(t) \geq 0$ se $t \geq 0$ e $h(t) \leq 0$, se $t \leq 0$ para quase todo ponto em $\mathbb{R}$. Se $f \not\equiv 0$ e $g \not\equiv 0$ são não negativas e $f, g > 0$ em Ω. Então a solução (u, φ) é positiva, isto é, $\varphi > 0$ e $u > 0$, quando a, b, K_1, K_2 são não negativas, $V_1, V_2 \leq 0$ e $\omega < 0$.*

Demonstração. Dado que f é radial se, para cada transformação ortogonal A, tem-se $f(x) = f(Ax)$. Chamando de $f_A(x) = f(Ax)$, então fazendo a mudança $y = Az$

$$
\begin{aligned}
F(f)(Ax) &= \int_{\mathbb{R}^N} G(Ax - y) f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(Ax - A^{-1}y)) f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(x - A^{-1}y) f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(x - z) f(Az) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(x - z) f(z) dy = F(f)(x).
\end{aligned}
$$

Para a função a, tem-se

$$
\begin{aligned}
F(ah(u))(Ax) &= \int_{\mathbb{R}^N} G(Ax - y) ah(u)(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(Ax - A^{-1}y)) ah(u)(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(x - A^{-1}y) ah(u)(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(x - z) a(Az) h(u)(Az) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(x - z) a(z) h(u_A)(z) dy = F(ah(u_A))(x),
\end{aligned}
$$

para a função K_1

$$\begin{aligned}
F(K_1u\varphi)(Ax) &= \int_{\mathbb{R}^N} G(Ax-y)K_1u\varphi(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(Ax-A^{-1}y))K_1u\varphi(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(x-A^{-1}y)K_1u\varphi(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(x-z)K_1(Az)u(Az)\varphi(Az)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(x-z)K_1(z)u_A(z)\varphi_A(z)dy = F(K_1u_A\varphi_A)(x)
\end{aligned}$$

e mesmo assim para o peso V_1

$$\begin{aligned}
F(V_1u)(Ax) &= \int_{\mathbb{R}^N} G(Ax-y)V_1u(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(A(x-A^{-1}y))V_1u(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(x-A^{-1}y)V_1u(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(x-z)V_1(Az)u(Az)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G(x-z)V_1u_A(z)dy = F(V_1u_A)(x).
\end{aligned}$$

A mesma coisa pode ser feita para a função g. Assim, dada uma solução (u,φ) de (5.2), então

$$\begin{aligned}
u_A(x) = u(Ax) &= B_1(u)(Ax) - \omega B_2(u,\varphi)(Ax) + F(f)(Ax) - B_3(u)(Ax) \\
&= F(ah(u))(Ax) - \omega F(K_1u\varphi)(Ax) + F(f)(Ax) - F(V_1u)(Ax) \\
&= F(ah(u_A)) - \omega F(K_1u_A\varphi_A)(x) + F(f)(x) - F(V_1u_A)(x), \\
\varphi_A(x) = \varphi(Ax) &= \overline{B}_1(\varphi)(Ax) - \omega\overline{B}_2(u,\varphi)(Ax) + F(g)(Ax) - \overline{B}_3(\varphi)(Ax) \\
&= F(bh(\varphi))(Ax) - \omega F(K_2u\varphi)(Ax) + F(g)(Ax) - F(V_2\varphi)(Ax) \\
&= F(bh(\varphi_A))(x) - \omega F(K_2u_A\varphi_A)(x) + F(g)(x) - F(V_2\varphi_A)(x).
\end{aligned}$$

Assim, pode-se concluir que (u_A,φ_A) é também uma solução de (5.2). Além disso, já que A é uma transformação ortogonal, tem-se

$$\|(u_A,\varphi_A)\|_E = \|u_A\|_{r_0} + \|\varphi_A\|_{r_0} = \|u\|_{r_0} + \|\varphi\|_{r_0} = \|(u,\varphi)\|_E.$$

Logo, tem-se $(u,\varphi) = (u_A,\varphi_A)$ já que o ponto fixo é único. Em consequência a solução é radial.

Para mostrar o segundo item basta pegar a transformação ortogonal $A = -I$ no primeiro item. Finalmente para mostrar o terceiro item pode-se pegar a seguinte sequencia de Picard:

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= B_1(u_k) - \omega B_2(u_k,\varphi_k) + F(f) - B_3(u_k), \\
\varphi_{k+1} &= \overline{B}_1(u_k) - \omega\overline{B}_2(u_k,\varphi_k) + F(g) - \overline{B}_3(u_k).
\end{aligned}$$

Daí, já que $f > 0$ e $g > 0$ num conjunto de medida positiva no $\mathbb{R}^N$, escolhendo $u_1 = F(f) > 0$ e $\varphi_1 = F(g) > 0$ para quase todo ponto no $\mathbb{R}^N$. Agora suponha que $u_k > 0$ e $\varphi_k > 0$ então tem-se

$$B_1(u_k)(x) = F(ah(u_k))(x) = C\int_{\mathbb{R}^N} \frac{ah(u_k)(y)}{|x-y|^{N-2}}dy \geq 0,$$

$$B_2(u_k,\varphi_k)(x) = F(K_1u_k\varphi_k)(x) = C\int_{\mathbb{R}^N} \frac{K_1u_k\varphi_k}{|x-y|^{N-2}}dy \geq 0,$$

$$B_3(u_k) = F(V_1u_k) = C\int_{\mathbb{R}^N} \frac{V_1u_k}{|x-y|^{N-2}}dy \geq 0.$$

De manera análoga conclui-se $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \overline{B}_3 \geq 0$. Logo

$$u_{k+1} = B_1(u_k) - \omega B_2(u_k,\varphi_k) + F(f) - B_3(u_k) > 0,$$

$$\varphi_{k+1} = \overline{B}_1(\varphi_k) - \omega\overline{B}_2(u_k,\varphi_k) + F(g) - \overline{B}_3(\varphi_k) > 0.$$

Mas $(u_k,\varphi_k) \to (u,\varphi)$ no espaço $E = L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \times L^{r_0}(\mathbb{R}^N)$ logo $u \geq 0$ e $\varphi \geq 0$. Assim

$$u = B_1(u) - \omega B_2(u,\varphi) + F(f) - B_3(u) \geq u_1 > 0,$$

$$\varphi = \overline{B}_1(\varphi) - \omega\overline{B}_2(u,\varphi) + F(g) - \overline{B}_3(\varphi) \geq F(g) > 0.$$

$\square$

Uma generalização para o caso de um sistema de n equações

Nesta seção faremos uma generalização do sistema acima para um caso de n equações. Devido ao fato das contas serem muito parecidas com o caso do sistema de duas equações, mencionaremos apenas as modificações adequadas e a abordagem para limitar os operadores envolvidos no sistema.

Considere o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1u_1 + \omega K_1u_1u_2\cdots u_n = a_1h(u_1) + f_1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ -\Delta u_n + V_nu_n + \omega K_nu_1u_2\cdots u_n = a_nh(u_n) + f_n. \end{cases} \tag{5.25}$$

Segundo os mesmos raciocínios feitos para o sistema de duas equações teremos

$$\begin{cases} u_1 = \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y)\Big(a_1h(u_1) + f_1 - \omega K_1u_1\cdots u_n - V_1u_1\Big), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ u_n = \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y)\Big(a_nh(u_n) + f_n - \omega K_nu_1\cdots u_n - V_nu_1\Big), \end{cases} \tag{5.26}$$

ou equivalentemente

$$u_i = A_i(a_ih(u_i)) - \omega C_i(u_1\cdots u_n) + F(f_i) - D_i(u_i),$$

onde para F definida por (5.5), tem-se

$$A_i(a_ih(u_i)) = F(a_ih(u_i)),\ \ C_i(u_1\cdots u_n) = F(K_iu_1\cdots u_n),\ \ D_i(u_i) = F(V_iu_i).$$

Evidentemente os operadores A_i satisfazem as mesmas propriedades do operador B_1 no Lema 16, os operadores D_i satisfazem as mesmas propriedades do operador B_3 no Lema 17. Assim, estabelecer a existência da solução do sistema resulta sendo mesma coisa que achar uma estimativa para os operadores C_i.

Lema 19. *Sejam os inteiros $n, N > 2$, e o sistema de n equações dado por (5.26). Sejam $\rho > \frac{N}{N-2}$, $\rho > n$, $k = \frac{2}{\rho-1}$, $r_0 = \frac{N}{k} = \frac{N(\rho-1)}{2}$ e $r_1 = \frac{N(\rho-1)}{\rho+1}$. Se $K_i \in L^q(\mathbb{R}^N)$, onde*

$$q = \frac{N(\rho-1)}{2\rho-2n}.$$

Então, existem constantes L_2^i e S_2^i tais que

$$\|C_i(u_1,\cdots,u_n)\|_{r_0} \le L_2^i \|u_1\|_{r_0}\cdots\|u_n\|_{r_0},$$
$$\|\nabla C_i(u_1,\cdots,u_n)\|_{r_1} \le S_2^i \|u_1\|_{r_0}\cdots\|u_n\|_{r_0},$$

para todo $u_i \in L^{r_0}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Da escolha de θ tem-se

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{r_0} + \frac{\rho-1}{r_0} = \underbrace{\frac{1}{r_0} + \cdots + \frac{1}{r_0}}_{n-vezes} + \frac{\rho-n}{r_0}.$$

Logo, usando Hölder com $q = \frac{r_0}{\rho-n}$

$$\|C_i(u_1\cdots u_n)\|_{r_0} = \|F(K_i u_1\cdots u_n)\|_{r_0} \le C_1\|K_1 u_1\cdots u_n\|_\theta \le C_1\|K_i\|_q\|u_1\|_{r_0}\cdots\|u_n\|_{r_0}.$$

A segunda estimativa pode-se estabelecer de maneira análoga

$$\|\nabla C_i(u_1\cdots u_n)\|_{r_1} = \|\nabla F(K_i u_1\cdots u_n)\|_{r_0} \le C_2\|K_1 u_1\cdots u_n\|_\theta \le C_2\|K_i\|_q\|u_1\|_{r_0}\cdots\|u_n\|_{r_0}.$$

□

Assim, podemos enunciar um resultado de existência de soluções do sistema de n equações como um corolário do Teorema 30.

Corolário 2. *Sejam os inteiros $n, N > 2$, e o sistema de n equações dado por (5.26). Sejam $\rho > \frac{N}{N-2}$, $\rho > n$, $k = \frac{2}{\rho-1}$, $r_0 = \frac{N}{k} = \frac{N(\rho-1)}{2}$ e $r_1 = \frac{N(\rho-1)}{\rho+1}$. Se $f_i \in L^\theta(\mathbb{R}^N)$, $V_i \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$, $a_i \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $K_i \in L^q(\mathbb{R}^N)$, onde*

$$\theta = \frac{N(\rho-1)}{2\rho} \quad e \quad q = \frac{N(\rho-1)}{2\rho-2n}.$$

Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\|f_i\|_\theta \le \frac{\varepsilon}{4C_1}$ e $\|V_i\| \le \frac{\varepsilon}{L_i}$ o sistema integral (5.26) possui uma única solução.

$$(u_1,\cdots,u_n) \in E = L^{r_0}(\mathbb{R}^N)\times\cdots\times L^{r_0}(\mathbb{R}^N)$$

satisfazendo $\|(u_1,\cdots,u_n)\|_E \le \varepsilon$, onde C_1 é dada no Lema 15.

Demonstração. A prova segue como no Teorema 30 adequando o espaço e aplicando o Lema 19.

□

Apêndice A

Notações

Sinal	Significado
Ω	Um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$
$\|\Omega\|$	A medida de Lebesgue de Ω
$\mathscr{H}^N(\Omega)$	Medida de Haussdorf N-dimensional de Ω
∇	O operador gradiente
Δ	Operador de Laplace
$\eta(s)$	Vetor normal em s
$\frac{\partial}{\partial\eta}$	A derivada normal
m	A ordem do operador Laplaciano
i, j, k	Índices de iteração
λ_k^D	k-ésimo autovalor do Laplaciano Dirichlet
λ_k^N	k-ésimo autovalor do Laplaciano Neumann
$d = \mathrm{diam}(\Omega)$	O diâmetro de Ω
ϕ	Solução fundamental do operador poli-harmônico
G	A função de Green
$\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_N)$	Uma N-upla
$\|\beta\| = \sum_{i=1}^N \|\beta_i\|$	Ordem da derivada D^β
$G(L,N)$	Conjunto das matrizes invertíveis de ordem N
$O(N) \subset G(L,N)$	Conjunto das matrizes ortogonais de ordem N
$A \in O(N)$	Uma matriz ortogonal de ordem N
$\overrightarrow{p} = (p_1, \cdots, p_N)$	Uma N-upla com $1 \leq p_i \leq \infty$
$\frac{1}{\overrightarrow{p}} = \left(\frac{1}{p_1}, \cdots, \frac{1}{p_N}\right)$	O inverso de $\overrightarrow{p}$
$L^{\overrightarrow{p}}(\Omega)$	Espaço anisotrópico de expoente $\overrightarrow{p}$

Apêndice B

A solução fundamental do operador poli-harmônico e estimativas.

As provas dos resultados expostos neste apêndice são generalizações de resultados clásicos obtidos para o operador laplaciano, os quais podem ser encontrados em [1]. Vamos precisar, basicamente, de uma versão generalizada da 2^a identidade de Green como ferramenta principal para conseguir trabalhar no Problema 7, Lembramos que a segunda identidade de Green é dada por:

$$\int_{\Omega} u\Delta v - v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta} dS_x \tag{B.1}$$

Lema 20. *Sejam f e g suaves. Para cada $p \in \mathbb{N}$ tem-se:*

1.

$$\int_{\Omega} \Delta f(x)\Delta^p g(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\Delta^{p+1}g(x) + \int_{\partial\Omega} \left\{\Delta^p g(x)\frac{\partial f}{\partial \eta}(x) - f(x)\frac{\partial \Delta^p g}{\partial \eta}(x)\right\}dS_x, \tag{B.2}$$

2.

$$\int_{\Omega} g(x)\Delta^p f(x) - f(x)\Delta^p g(x)dx = \sum_{k=1}^{p}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta^{k-1} f}{\partial \eta}(x)\Delta^{p-k}g(x) - \Delta^{k-1}f(x)\frac{\partial \Delta^{p-k}g}{\partial \eta}(x)dS_x. \tag{B.3}$$

Prova de 1: É imediato, ao substituir $u = \Delta^p g$ e $v = f$ na equação (B.1).

Prova de 2: A prova é por indução. Para $p = 1$ o resultado é satisfeito tomando $u = f$ e $v = g$ na equação (B.1). Para $p = 2$ escolhendo $u = \Delta g$ e $v = f$ na equação (B.1)

$$\int_{\Omega} \Delta g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta^2 g(x)dx = \int_{\partial\Omega} \Delta g(x)\frac{\partial f}{\partial \eta}(x) - f(x)\frac{\partial \Delta g}{\partial \eta}dS_x. \tag{B.4}$$

E, escolhendo $u = g$ e $v = \Delta f$ na equação (B.1) obtemos

$$\int_{\Omega} g(x)\Delta^2 f(x) - \Delta f(x)\Delta g(x)dx = \int_{\partial\Omega} g(x)\frac{\partial \Delta f}{\partial \eta}(x) - \Delta f(x)\frac{\partial g}{\partial \eta}(x)dS_x. \tag{B.5}$$

Somando (B.4) e (B.5) obtemos o resultado para $p = 2$; isto é,

$$\int_{\Omega} g(x)\Delta^2 f(x) - f(x)\Delta^2 g(x)dx = \int_{\partial\Omega} (g(x)\frac{\partial \Delta f}{\partial \eta}(x) - \Delta f(x)\frac{\partial g}{\partial \eta}(x))dS_x + \int_{\partial\Omega} (\Delta g(x)\frac{\partial f}{\partial \eta}(x) - f(x)\frac{\partial \Delta g}{\partial \eta}(x))dS_x.$$

Suponha agora válido o resultado para $p-1$, isto é,

$$\int_{\Omega} \Delta^{p-1} f(x)g(x) - f(x)\Delta^{p-1}g(x)dx = \sum_{k=1}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta^{k-1} f}{\partial \eta}(x)\Delta^{p-1-k}g(x) - \Delta^{k-1}f(x)\frac{\partial \Delta^{p-1-k}g}{\partial \eta}dS_x.$$

Vamos provar que é valido para p. Trocando g por Δg em (B.3) e usando a hipótese de indução temos

$$\int_{\Omega} \Delta g(x)\Delta^{p-1} f(x) - f(x)\Delta^{p}g(x)dx = \sum_{k=1}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta^{k-1} f}{\partial \eta}(x)\Delta^{p-1-k}\Delta g(x)dS_x - \sum_{k=1}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \Delta^{k-1}f(x)\frac{\partial \Delta^{p-1-k}\Delta g}{\partial \eta}(x)dS_x. \tag{B.6}$$

Trocando f por Δf em (B.3) resulta

$$\int_{\Omega} g(x)\Delta^{p} f(x) - \Delta f(x)\Delta^{p-1}g(x)dx = \sum_{k=1}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta^{k-1}\Delta f}{\partial \eta}(x)\Delta^{p-1-k}g(x)dS_x - \sum_{k=1}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \Delta^{k-1}\Delta f(x)\frac{\partial \Delta^{p-1-k}g}{\partial \eta}(x)dS_x. \tag{B.7}$$

Somando (B.6) e (B.7), obtemos

$$\int_{\Omega} g(x)\Delta^{p} f(x) - f(x)\Delta^{p}g(x)dx + \int_{\Omega} \Delta g(x)\Delta^{p-1} f(x) - \Delta f(x)\Delta^{p-1}g(x)dx$$
$$= \sum_{k=1}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta^{k-1} f}{\partial \eta}(x)\Delta^{p-k}g(x) - \Delta^{k-1}f(x)\frac{\partial \Delta^{p-k}g}{\partial \eta}(x)dS_x + \sum_{k=1}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta^{k} f}{\partial \eta}(x)\Delta^{p-1-k}g(x) - \Delta^{k}f(x)\frac{\partial \Delta^{p-1-k}g}{\partial \eta}(x)dS_x.$$

Aplicando (B.2) nas duas parcelas da segunda integral da esquerda, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(x)\Delta^p f(x) - f(x)\Delta^p g(x)dx + \int_\Omega g(x)\Delta^p f(x)dx + \int_{\partial\Omega} \left\{\Delta^{p-1} f(x)\frac{\partial g}{\partial\eta}(x) - g(x)\frac{\partial\Delta^{p-1} f}{\partial\eta}\right\}dS_x \\
- \int_\Omega f(x)\Delta^p g(x)dx - \int_{\partial\Omega} \left\{\Delta^{p-1} g(x)\frac{\partial f}{\partial\eta}(x) - f(x)\frac{\partial\Delta^{p-1} g}{\partial\eta}\right\}dS_x \\
= \sum_{k=1}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta^{k-1} f}{\partial\eta}(x)\Delta^{p-k} g(x) - \Delta^{k-1} f(x)\frac{\partial\Delta^{p-k} g}{\partial\eta}(x)dS_x \\
+ \sum_{k=1}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \Big((\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta^k f)(\Delta^{p-1-k} g) - (\Delta^k f)(\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta^{p-1-k} g)\Big)dS(x).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
2\int_\Omega g(x)\Delta^p f(x) - f(x)\Delta^p g(x)dx = \int_{\partial\Omega} \Delta^{p-1} g(x)\frac{\partial f}{\partial\eta}(x) - f(x)\frac{\partial\Delta^{p-1} g}{\partial\eta}\Big)dS_x \\
+ \sum_{k=1}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta^{k-1} f}{\partial\eta}(x)\Delta^{p-k} g(x) - \Delta^{k-1} f(x)\frac{\partial\Delta^{p-k} g}{\partial\eta}(x)dS_x \\
+ \sum_{k=1}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \Big((\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta^k f)(\Delta^{p-1-k} g) - (\Delta^k f)(\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta^{p-1-k} g)\Big)dS_x \\
+ \int_{\partial\Omega} g(x)\frac{\partial\Delta^{p-1} f}{\partial\eta}(x) - \Delta^{p-1} f(x)\frac{\partial g}{\partial\eta}(x)dS_x \\
= \int_{\partial\Omega} \Delta^{p-1} g(x)\frac{\partial f}{\partial\eta}(x) - f(x)\frac{\partial\Delta^{p-1} g}{\partial\eta}(x)dS_x \\
+ \int_{\partial\Omega} \Delta^{p-1} g(x)\frac{\partial f}{\partial\eta}(x) - f(x)\frac{\partial\Delta^{p-1} g}{\partial\eta}(x)dS_x \\
+ \sum_{k=2}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta^{k-1} f}{\partial\eta}(x)\Delta^{p-k} g(x) - \Delta^{k-1} f(x)\frac{\partial\Delta^{p-k} g}{\partial\eta}(x)dS_x \\
+ \sum_{k=1}^{p-2}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta^{k} f}{\partial\eta}(x)\Delta^{p-1-k} g(x)\Delta^{k} f(x)\frac{\partial\Delta^{p-1-k} g}{\partial\eta}(x)dS_x \\
+ \int_{\partial\Omega} g(x)\frac{\partial\Delta^{p-1} f}{\partial\eta}(x) - \Delta^{p-1} f(x)\frac{\partial g}{\partial\eta}(x)dS_x \\
+ \int_{\partial\Omega} g(x)\frac{\partial\Delta^{p-1} f}{\partial\eta}(x) - \Delta^{p-1} f(x)\frac{\partial g}{\partial\eta}(x)dS_x.
\end{aligned}$$

Daí, reindexando o segundo somatório da direita obtemos:

$$\begin{aligned}
2\int_{\Omega} g(x)\Delta^p f(x) - f(x)\Delta^p g(x)dx &= 2\int_{\partial\Omega} \Delta^{p-1}g(x)\frac{\partial f}{\partial\eta}(x) - f(x)\frac{\partial\Delta^{p-1}g}{\partial\eta}(x)dS_x \\
&+ \sum_{k=2}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta^{k-1}f}{\partial\eta}(x)\Delta^{p-k}g(x) - \Delta^{k-1}f(x)\frac{\partial\Delta^{p-k}g}{\partial\eta}(x)dS_x \\
&+ \sum_{k=2}^{p-1}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta^{k-1}f}{\partial\eta}(x)\Delta^{p-k}g(x) - \Delta^{k-1}f(x)\frac{\partial\Delta^{p-k}g}{\partial\eta}(x)dS_x \\
&+ 2\int_{\partial\Omega} g(x)\frac{\partial\Delta^{p-1}f}{\partial\eta}(x) - \Delta^{p-1}f(x)\frac{\partial g}{\partial\eta}(x)dS_x \\
&= 2\sum_{k=1}^{p}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta^{k-1}f}{\partial\eta}(x)\Delta^{p-k}g(x) - \Delta^{k-1}f(x)\frac{\partial\Delta^{p-k}g}{\partial\eta}(x)dS_x.
\end{aligned}$$

□

Lema 21. *Para $x \neq y$ a função ϕ definida por (3.3) satisfaz:*

$$\begin{cases}
\Delta^k\phi(x,y) = C_{N,p}\Big\{\prod_{i=0}^{k-1}\Big(2p-N-2i\Big)\Big\}\Big\{\prod_{j=1}^{k}(2p-2j)\Big\}|x-y|^{2p-N-2k}, & N > 2p,\ j \geq 1, \\
\Delta^k\phi(x,y) = 2^{k-1}(k-1)!C_p\Big\{\prod_{i=1}^{k}(2i-2p)\Big\}|x-y|^{-2k}, & N = 2p,\ j \geq 1.
\end{cases} \tag{B.8}$$

<u>CASO 1:</u> Se $N > 2p$. Argumentamos por indução sobre k. Para $k = 1$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x,y) &= \frac{C_{N,p}(2p-N)|x-y|^{2p-N-1}(x_i-y_i)}{|x-y|} = C_{N,p}(2p-N)|x-y|^{2p-N-2}(x_i-y_i) \\
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\phi(x,y) &= C_{N,p}(2p-N)\Big(|x-y|^{2p-N-2} + (2p-N-2)|x-y|^{2p-N-3}\frac{(x_i-y_i)^2}{|x-y|}\Big).
\end{aligned}$$

Logo

$$\Delta\phi(x,y) = C_{N,p}(2p-N)(2p-2)|x-y|^{2p-N-2}.$$

Suponha o resultado válido para $k-1 \geq 1$, isto é,

$$\Delta^{k-1}\phi(x,y) = C_{N,p}\Big\{\prod_{i=0}^{k-2}\Big(2p-N-2i\Big)\Big\}\Big\{\prod_{j=1}^{k-1}(2p-2j)\Big\}|x-y|^{2p-N-2(k-1)}.$$

Assim, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta^{k-1}\phi(x,y) =& C_{N,p}\Big\{\prod_{i=0}^{k-2}\Big(2p-N-2i\Big)\Big\} \\
&\times\Big\{\prod_{j=1}^{k-1}(2p-2j)\Big\}(2p-N-2(k-1))|x-y|^{2p-N-2(k-1)-1}\frac{x_i-y_i}{|x-y|} \\
=& C_{N,p}\Big\{\prod_{i=0}^{k-1}\Big(2p-N-2i\Big)\Big\}\Big\{\prod_{j=1}^{k-1}(2p-2j)\Big\}|x-y|^{2p-N-2(k-1)-2}(x_i-y_i), \\
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Delta^{k-1}\phi(x,y) =& C_{N,p}\Big\{\prod_{i=0}^{k-1}\Big(2p-N-2i\Big)\Big\}\Big\{\prod_{j=1}^{k-1}(2p-2j)\Big\}\Bigg(|x-y|^{2p-N-2(k-1)-2} \\
&+(x_i-y_i)^2(2p-N-2(k-1)-2)|x-y|^{2p-N-2(k-1)-2}\Bigg).
\end{aligned}$$

Logo, obtém-se

$$\Delta^k\phi(x,y) = C_{N,p}\Big\{\prod_{i=0}^{k-1}\Big(2p-N-2i\Big)\Big\}\Big\{\prod_{j=1}^{k}(2p-2j)\Big\}|x-y|^{2p-N-2k}.$$

Portanto, temos a primeira afirmação do lema.

<u>CASO 2:</u> Se $N=2p$. Novamente argumentamos por indução sobre k. Para $k=1$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x,y) &= -C_p\frac{1}{|x-y|}\frac{x_i-y_i}{|x-y|} = -C_p(x_i-y_i)|x-y|^{-2} \\
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\phi(x,y) &= -C_p\Big(|x-y|^{-2}-2|x-y|^{-3}(x_i-y_i)\frac{x_i-y_i}{|x-y|}\Big).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta\phi(x,y) = \{C_p(2-2p)\}|x-y|^{-2}.$$

Suponha o resultado válido para $k-1\geq 1$, isto é,

$$\Delta^{k-1}\phi(x,y) = 2^{k-2}(k-2)!C_p\Big\{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-2p)\Big\}|x-y|^{-2(k-1)}.$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta^{k-1}\phi(x,y) &= 2^{k-2}(k-2)!C_p\Big\{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-2p)\Big\}(-2(k-1))|x-y|^{-2(k-1)-2}(x_i-y_i) \\
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Delta^{k-1}\phi(x,y) =& 2^{k-2}(k-2)!C_p\Big\{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-2p)\Big\}(-2(k-1)) \\
&\times\Big(|x-y|^{-2(k-1)-2}+(-2(k-1)-2)(x_i-y_i)^2|x-y|^{-2(k-1)-4}\Big) \\
=& 2^{k-1}(k-1)!C_p\Big\{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-2p)\Big\}\Big(2k(x_i-y_i)^2|x-y|^{-2k-2}-|x-y|^{-2k}\Big),
\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\Delta^k\phi(x,y) = 2^{k-1}(k-1)!C_p\Big\{\prod_{i=1}^{k}(2i-2p)\Big\}|x-y|^{-2k}$$

Portanto, temos a segunda afirmação do lema.

□

Corolário 3. *Fixado y, para cada $x \neq y$ temos que* $(-\Delta)^p\phi(x,y) = 0$

Prova: Basta aplicar o Lema 21 quando $k = p$

$$\begin{cases} \Delta^p\phi(x,y) = C_{N,p}\Big\{\prod_{i=0}^{p-1}\Big(2p-N-2i\Big)\Big\}\Big\{\prod_{j=1}^{p}(2p-2j)\Big\}|x-y|^{-N} = 0, \quad N > 2p \\ \Delta^p\phi(x,y) = 2^{p-1}(p-1)!C_p\Big\{\prod_{i=1}^{p}(2i-2p)\Big\}|x-y|^{-2p} = 0, \quad N = 2p \end{cases}$$

e depois multiplicar por $(-1)^p$.

Corolário 4. *Sejam $y \in \Omega$ fixo, $B_\varepsilon(y) \subset\subset \Omega$, $x \in \partial B_\varepsilon(y)$ e $p \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\eta}\Delta^k\phi(x,y) = C_{N,p}\prod_{i=0}^{k}\Big(2p-N-2i\Big)\prod_{j=1}^{k}(2p-2j)|x-y|^{2p-N-2k-1}, \quad N > 2p, j \geq 1, \\ \frac{\partial}{\partial\eta}\Delta^k\phi(x,y) = -2^k k!C_p\prod_{i=1}^{k}(2i-2p)|x-y|^{-2k-1}, \quad N = 2p, j \geq 1. \end{cases}$$

Prova de 1: Decorre do Lema 21 que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta^k\phi(x,y) = (2p-N-2k)C_{N,p}\Big\{\prod_{i=0}^{k-1}\Big(2p-N-2i\Big)\Big\}\Big\{\prod_{j=1}^{k}(2p-2j)\Big\}|x-y|^{2p-N-2k-1}\frac{x_i-y_i}{|x-y|}.$$

Logo, como $\eta = \frac{x-y}{|x-y|}$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta^k\phi(x,y) = C_{N,p}\Big\{\prod_{i=0}^{k}\Big(2p-N-2i\Big)\Big\}\Big\{\prod_{j=1}^{k}(2p-2j)\Big\}|x-y|^{2p-N-2k-1}.$$

Prova de 2: Temos, no caso $N = 2p$, que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta^k\phi(x,y) = -2^k k!C_p\Big\{\prod_{i=1}^{k}(2i-2p)\Big\}|x-y|^{-2k-1}\frac{x_i-y_i}{|x-y|}.$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta^k\phi(x,y) = -2^k k!C_p\Big\{\prod_{i=1}^{k}(2i-2p)\Big\}|x-y|^{-2k-1}.$$

□

No Lema 20, multiplicando a equação (B.3) por $(-1)^p$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (-\Delta)^p f(x)g(x) - f(x)(-\Delta)^p g)dx =& (-1)\sum_{k=1}^{p}\int_{\partial\Omega}\Bigg\{\frac{\partial(-\Delta)^{k-1}f}{\partial\eta}(-\Delta)^{p-k}g(x) \\ &- (-\Delta)^{k-1}f(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}g}{\partial\eta}(x)\Bigg\}dS_x. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Considere agora $V_\varepsilon = \Omega \diagdown B_\varepsilon(y)$, então escolhendo $f = u$ e $g = \phi$ na equação (B.9) tem-se

$$\begin{aligned} \int_{V_\varepsilon}\phi(x,y)(-\Delta)^p u(x) - u(x)(-\Delta)^p\phi(x,y)dx =& (-1)\Bigg\{\sum_{k=1}^{p}\int_{\partial V_\varepsilon}\frac{\partial(-\Delta)^{k-1}u}{\partial\eta}(x)(-\Delta)^{p-k}\phi(x,y)dS_x \\ &- \sum_{k=1}^{p}\int_{\partial V_\varepsilon}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}\phi}{\partial\eta}(x,y)dS_x\Bigg\}. \end{aligned}$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\int_{V_\varepsilon} \phi(x,y)(-\Delta)^p u(x) - u(x)(-\Delta)^p \phi(x,y)dx =(-1)\Bigg\{ &\sum_{k=1}^{p} \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial(-\Delta)^{k-1}u(x)}{\partial\eta}(-\Delta)^{p-k}\phi(x,y) \\ &- (-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}\phi}{\partial\eta}(x,y)\Big)dS_x \\ &- \sum_{k=1}^{p} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Big\{ \frac{\partial(-\Delta)^{k-1}u}{\partial\eta}(x)(-\Delta)^{p-k}\phi(x,y) \\ &- (-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}\phi}{\partial\eta}(x,y)\Big\}dS_x \Bigg\}.\end{aligned} \tag{B.10}$$

Lema 22. *Para $p \in \mathbb{N}$ e $N \geq 2p$ sejam $V_\varepsilon = \Omega \diagdown B_\varepsilon(y)$ e $u \in C^{2p}(\Omega) \cap C^{2p-1}(\overline{\Omega})$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1.
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_\varepsilon(y)} \phi(x,y)(-\Delta)^p u(x)dx = 0,$$

ou equivalentemente

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{V_\varepsilon} \phi(x,y)(-\Delta)^p u(x)dx = \int_{\Omega} \phi(x,y)(-\Delta)^p u(x)dx.$$

2.
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=1}^{p} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial(-\Delta)^{k-1}u}{\partial\eta}(x)(-\Delta)^{p-k}\phi(x,y)dS_x = 0.$$

3.
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=1}^{p} \int_{\partial B_{\varepsilon(y)}} (-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}\phi}{\partial\eta}(x,y)dS_x = -u(y).$$

Prova de 1: <u>*CASO* 1 :</u> Se $N > 2p$ temos que

$$\begin{aligned}\Big| \int_{B_\varepsilon(y)} \phi(x,y)(-\Delta)^p u(x)dx \Big| &\leq C \int_{B_\varepsilon(y)} |x-y|^{2p-N}dx = C\int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r(y)} |x-y|^{2p-N}dS_x dr \\ &= C\int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r(y)} r^{2p-N}dS_x dr = C_2\int_0^\varepsilon r^{2p-1}dr = C_3\varepsilon^{2p}.\end{aligned} \tag{B.11}$$

<u>CASO 2 :</u> Se $N = 2p$, temos que

$$\begin{aligned}
\Big| \int\limits_{B_\varepsilon(y)} \phi(x,y)(-\Delta)^p u(x)dx \Big| &\leq C \int\limits_{B_\varepsilon(y)} \ln|x-y|dx \\
&= C \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\partial B_r(y)} \ln|x-y|dS_x dr = C \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\partial B_r(y)} \ln r dS_x dr \\
&= C_2 \int\limits_0^\varepsilon r^{N-1} \ln r dr \\
&= C_2 \Big(\frac{r^N \ln r}{N} \Big|_0^\varepsilon - \int\limits_0^\varepsilon \frac{r^{N-1}}{N} dr \Big) = C_3 \varepsilon^N \ln \varepsilon - C_4 \varepsilon^N \to 0.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Portanto, de (B.11) e (B.12) temos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{B_\varepsilon(y)} \phi(x,y)(-\Delta)^p u(x)dx = 0, \qquad N \geq 2p.$$

Prova de 2: <u>CASO 1 :</u> Se $N > 2p$, então, pelo Lema 21, temos que, para $k \geq 1$,

$$\big|(-\Delta)^{p-k}\phi(x,y)\big| = C_k^p |x-y|^{2k-N}.$$

Assim, para todo $k \geq 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Big| \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial(-\Delta)^{k-1}u}{\partial \eta}(x)(-\Delta)^{p-k}\phi(x,y)dS_x \Big| &\leq C_{1,k}^p \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} |(-\Delta)^{p-k}\phi(x,y)|dS_x \\
&= C_{2,k}^p \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} |x-y|^{2k-N} dS_x \\
&= C_{2,k}^p \varepsilon^{2k-N} \sigma_N \varepsilon^{N-1} = C_{3,k}^p \varepsilon^{2k-1}.
\end{aligned}$$

<u>CASO 2 :</u> Se $N = 2p$, pelo Lema 21 temos, para $k < p$,

$$\begin{aligned}
\Big| \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial(-\Delta)^{k-1}u}{\partial \eta}(x)(-\Delta)^{p-k}\phi(x,y)dS_x \Big| &\leq C_{1,k}^p \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} |(-\Delta)^{p-k}\phi(x,y)|dS_x \\
&= C_{2,k}^p \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} |x-y|^{2k-N} dS_x \\
&= C_{2,k}^p \varepsilon^{2k-N} \sigma_N \varepsilon^{N-1} = C_{3,k}^p \varepsilon^{2k-1}.
\end{aligned}$$

Se $k = p$, então temos

$$\begin{aligned}
\Big| \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \phi(x,y) \frac{\partial(-\Delta)^{p-1}u}{\partial \eta}(x)dS_x \Big| &\leq C \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\ln|x-y|}{\sigma_N} dS_x \\
&= C \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\varepsilon^{N-1}\ln\varepsilon}{\varepsilon^{N-1}\sigma_N} dS_x \\
&= C_2 \varepsilon^{N-1} \ln \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{p}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}\frac{\partial(-\Delta)^{k-1}u}{\partial\eta}(x)(-\Delta)^{p-k}\phi(x,y)dS_x=0. \tag{B.13}$$

Prova de 3: <u>*CASO* 1 :</u> Se $N>2p$, então a primeira igualdade em (3.4) pode ser reescrita como:

$$C_{N,p}=\frac{(-1)^p}{\prod_{i=0}^{p-1}(2p-N-2i)\prod_{j=1}^{p-1}(2p-2j)}. \tag{B.14}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}\phi}{\partial\eta}dS_x &= \lim_{\varepsilon\to 0}(-1)^{p-k}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial\Delta^{p-k}\phi}{\partial\eta}(x,y)dS_x\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}(-1)^{p-k}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)\left\{\prod_{i=0}^{p-k}(2p-N-2i)\right\}\left\{\prod_{j=1}^{p-k}(2p-2j)\right\}|x-y|^{2k-N-1}dS_x\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}(-1)^{p-k}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\left\{\prod_{i=0}^{p-k}(2p-N-2i)\right\}\left\{\prod_{j=1}^{p-k}(2p-2j)\right\}|x-y|^{2k-N-1}}{(-1)^p\left\{\prod_{i=0}^{p-1}(2p-N-2i)\right\}\left\{\prod_{j=1}^{p-1}(2p-2j)\right\}\sigma_N}dS_x.
\end{aligned}$$

Portanto, para $k=1$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}\phi}{\partial\eta}(x,y)dS_x &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}u(x)\frac{|x-y|^{-N+1}}{\sigma_N}dS_x\\
&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}\frac{u}{\varepsilon^{n-1}\sigma_n}dS(x)=-u(y).
\end{aligned}$$

Para $k>1$, temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}\phi}{\partial\eta}dS_x\\
&\quad=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(-1)^k}{\prod_{j=p+1-k}^{p-1}(2p-2j)\prod_{i=1}^{p-1}(2p-N-2i)}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)|x-y|^{2k-N-1}dS_x\\
&\quad=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(-1)^k}{\prod_{j=p+1-k}^{p-1}(2p-2j)\prod_{i=1}^{p-1}(2p-N-2i)}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)\varepsilon^{2k-N-1}dS_x\\
&\quad=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(-1)^k\varepsilon^{2k-2}}{\prod_{j=p+1-k}^{p-1}(2p-2j)\prod_{i=1}^{p-1}(2p-N-2i)}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}\frac{(-\Delta)^{k-1}u(x)}{\varepsilon^{N-1}}dS_x=0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{p}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}\phi}{\partial\eta}(x,y)dS_x=-u(y).$$

<u>*CASO* 2 :</u> Se $N=2p$, então de (3.4) temos que

$$C_p=\frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{p-1}(2i-2p)\right)^2\sigma_N}. \tag{B.15}$$

Assim,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}\phi}{\partial\eta}dS_x$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\left(\prod_{i=1}^{p-k}(2i-2p)\right)^2|x-y|^{2k-2p-1}}{\left(\prod_{i=1}^{p-1}(2i-2p)\right)^2\sigma_N}dS_x.$$

Logo, para $k=1$, vale

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}\phi}{\partial\eta}dS_x=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)}\frac{(-\Delta)^{k-1}u(x)}{|x-y|^{-N+1}\sigma_N}dS_x$$
$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)}\frac{u(x)}{\varepsilon^{-N+1}\sigma_N}dS_x=-u(y).$$

Para $k>1$, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}\phi}{\partial\eta}dS_x=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)}\frac{(-\Delta)^{k-1}u(x)\varepsilon^{2k-N-1}}{\left(\prod_{i=p-k+1}^{p-1}(2i-2p)\right)^2\sigma_N}dS_x$$
$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{2k-2}}{\left(\prod_{i=p-k+1}^{p-1}(2i-2p)\right)^2}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)}\frac{(-\Delta)^{k-1}u(x)}{\varepsilon^{N-1}\sigma_N}dS_x$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}C\varepsilon^{2k-2}=0.$$

Portanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}\phi}{\partial\eta}(x,y)dS_x=-u(y).$$

□

Corolário 5. *Se $p\in\mathbb{N}$, $N\geq 2p$, $V_\varepsilon=\Omega\setminus B_\varepsilon(y)$ e ϕ é a solução fundamental de $(-\Delta)^p u$, temos que:*

$$u(y)=\int\limits_\Omega\phi(-\Delta)^p u\,dx-\sum_{k=1}^{p}\left\{\int\limits_{\partial\Omega}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}\phi}{\partial\eta}(x,y)\right.$$
$$\left.-\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial(-\Delta)^{k-1}u}{\partial\eta}(x)(-\Delta)^{p-k}\phi(x,y)dS_x\right\}\tag{B.16}$$

Prova: Basta aplicar o Lema 22 na equação (B.10).

□

Da mesma maneira, para cada y fixo, escolhendo $f(x)=u(x)$ e $g(x)=H(x,y)$, em que H é uma função que satisfaz $(-\Delta_x)^p H(x,y)=0$, como antes. Temos

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} H(x,y)(-\Delta)^p u(x)dx =&(-1)\Bigg\{\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial(-\Delta)^{k-1}u}{\partial\eta}(x)(-\Delta)^{p-k}H(x,y)\\&-\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{\partial\Omega}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}H}{\partial\eta}(x,y)dS_x\Bigg\}.\end{aligned}$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}0 = \int\limits_{\Omega} H(x,y)(-\Delta)^p u(x)dx + &\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial(-\Delta)^{k-1}u}{\partial\eta}(x)(-\Delta)^{p-k}H(x,y)dS_x\\&-\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{\partial\Omega}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}H}{\partial\eta}(x,y)dS_x.\end{aligned} \tag{B.17}$$

Somando (B.16) e (B.17) e pondo $G(x,y) = \phi(x,y) - H(x,y)$ obtemos

$$\begin{aligned}u(y) =& \int\limits_{\Omega} G(x,y)(-\Delta)^p u(x)dx - \sum_{k=1}^{p}\int\limits_{\partial\Omega}(-\Delta)^{k-1}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}G}{\partial\eta}(x,y)\\&-\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial(-\Delta)^{k-1}u}{\partial\eta}(x)(-\Delta)^{p-k}G(x,y)dS_x\\=&\int\limits_{\Omega} G(x,y)(-\Delta)^p u(x)dx - \sum_{k=1}^{p}\int\limits_{\partial\Omega}(-\Delta)^{p-k}u(x)\frac{\partial(-\Delta)^{k-1}G(x,y)}{\partial\eta}\\&-\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial(-\Delta)^{p-k}u}{\partial\eta}(x)(-\Delta)^{k-1}G(x,y)dS_x.\end{aligned} \tag{B.18}$$

Referências Bibliográficas

[1] L. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society,1998.

[2] F. JOHN, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1982.

[3] D. GILBARG AND N. TRUDINGER,*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1983.

[4] HAIM BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[5] ELIAS STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.

[6] ANTOINE HENROT, *Extremum Problems for Eingenvalues of Elliptic Operators*, Princeton University Press, 1970.

[7] G. HARDY, J LITTLEWOOD AND G. POLYA, *Inequalities.* Cambridge Mathematical Library, 1988.

[8] F GAZZOLA, H GRUNAU AND G. SWEERS, *Polyharmonic boundary value problems.* Springer, 2010.

[9] E. B. DAVIES, *Heat kernels and spectral theory*, Cambridge Univ. Press, 1989.

[10] MICHEL C. DELFOUR, J. P. ZOLÉSIO, *Shapes and geometries: analysis, differential calculus, and optimization*, Springer-Verlag, 1983.

[11] RODNEY J. BIEZUNER, *Autovalores do Laplaciano*, Notas de aula pos-graduação matemática UFMG, 2006.

[12] JINDRICH NECAS, GERALD TONEL, ALOIS KUFNER, ARKA NECASOVA, CRISTIAN G. SIMADER, *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*, Springer, 2012.

Artigos

[13] FUTOSHI TAKASHI, *Some identities of Green Functions for the polyharmonic operator with the Navier boundary conditions and its aplications*. Mathematische Nachrichten, p. 306-319, 2013.

[14] L.C. FERREIRA, EVERALDO S. MEDEIROS AND MARCELO MONTENEGRO, *On the Laplace equation with a supercritical nonlinear Robin boundary condition in the half-space*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, p. 667-682, 2013.

[15] L.C. FERREIRA, EVERALDO S. MEDEIROS AND MARCELO MONTENEGRO, *A class of elliptic equations in anisotropic spaces*. Annali di Matematica Pura ed Applicata, p. 539–552, 2011.

[16] L.C. FERREIRA, EVERALDO S. MEDEIROS AND MARCELO MONTENEGRO, *A class of elliptic system of Sc hrödinger-Poisson type*. Journal of the Australian Mathematical Society, p. 301-314, 2014.

[17] A. K. BEN-NAOUM, C. TROESTLER AND M. WILLEM, *Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains.* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and applications, p. 823-833, 1996.

[18] L. DE CARLI, S.M. HUDSON, *A Faber-Krahn inequality for solutions of Schröndinger's equation*, Advances in Mathematics, p. 2416-2427, 2012.

[19] J. DENZLER, *Bounds for the heat difussion through windows of given area*, Journal of mathematical analysis and applications, p. 405-422, 1998.

[20] MARK S. ASHBAUGH, FRANCESCO CHIACCHIO, *On low eigenvalues of the laplacian with mixed boundary conditions*, Journal of Differential Equations, p. 2544-2566, 2011.

[21] MARK S. ASHBAUGH, RAFAEL D. BENGURIA *Isoperimetric Inequalities for Eigenvalues of the Laplacian* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol. 76- Parte 1, A conference on spectral theory and Mathematics Physics in honor of Barry Simon's 60th birthday march p. 27-31, 2006.

[22] E. DE GIORGI, *su una teoria generale della misura* $(N-1)$*-dimensional in uno spazio ad N dimensioni*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, p. 191-213, 1954.

[23] JULIAN FERNANDEZ BORDER AND JULIO D. ROSSI, *Asymtotic behavior of the best Sobolev trace constant in expanding and contracting domains*, Communications on pure and applied analysis, p. 75-94, 2002.

[24] F. PACELLA, M. TRICARICO, *Symetrization for a class of elliptic equations with mixed boundary conditions*, Università di Napoli. Dipartimento di Matematica e Applicazioni, p. 75-93, 1985.

[25] YEHUDA PINCHOVER AND TIFERET SAADON, *On positivity of solutions of degenerate boundary value problems for second-order elliptic equations*. Israel journal of mathematics, p. 125 - 168, 2002.

[26] HYNEK KOVAȒÍK, *The lowest eigenvalue of the Laplace operators with mixed boundary conditions*. The Journal of Geometric Analysis, p. 1509–1525, 2014.

[27] STEVEN J. COX AND PAUL X. UHLIG, *Where beste the hold a drum fast*, Society for industrial and applied mathematics, p. 948-964, 1999.

[28] C-S LIN, W-M NI AND I TAKAGI, *Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system*, Jornal of differential equations, p. 1-27, 1998.

[29] R. SCHAAF, *Stacionary solutions of chemotaxis systems*, Transactions of the Americam Mathematical Society, p. 531-556, 1985.

[30] Z. W. SHEN, *L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials*, Annales de l'Institut Fourier, p. 513-546, 1995.

[31] MARIO BEBENDORF, *A Note on the Poincaré Inequality for Convex Domains* Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, p. 751–756, 2003.

[32] H. F. WEINBERG, *An Isoperimetric Inequality for the N-Dimensional Free Membrane Problem* Journal of Rational Mechanics and Analysis, p. 633-636, 1956.

[33] L. E. PAYNE, H. F. WEINBERGER, *An optimal Poincaré inequality for convex domains*, Arch. Rational Mech, p. 286–292, 1960.

[34] G. PÓLYA, *Remarks on the foregoing papers* Math. Phys., p. 55-57, 1952.