UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Florence Cristina Silva Queiroga

O MÉTODO DE NEWTON: CÁLCULO DE RAIZ DE FUNÇÃO ATRAVÉS DE APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Belo Horizonte

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Florence Cristina Silva Queiroga

O MÉTODO DE NEWTON: CÁLCULO DE RAIZ DE FUNÇÃO ATRAVÉS DE APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Monografia apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hamilton Prado Bueno

Belo Horizonte
2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por sua infinita Graça manifesta cotidianamente em minha vida e por me conceder essa oportunidade.

Aos meus amados pais, Leila e Xisto, pelo cuidado, incentivo e paciência.

Ao Prof. Hamilton pela sugestão do tema, pela paciência em me orientar neste trabalho e pelos ensinamentos dados em aula.

A todos que colaboraram de alguma forma para meu crescimento, meu muito obrigada.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho é um estudo sobre o método de Newton para cálculo de raízes de funções.

O método de Newton é uma aplicação do conceito de derivada e constitui uma importante ferramenta para cálculo de raízes de funções através de aproximações sucessivas. Este método consiste de uma sequência recursiva dada por $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, n \in \mathbb{N}$, em que x_0 é um ponto arbitrário do domínio da função f e f' é a derivada da função f. Sendo assim, se a sequência x_n convergir para a, então a será uma raiz da função f, ou seja, $f(a) = 0$.

No Capítulo 1, será apresentada uma perspectiva histórica do método de Newton seguida de uma análise dos passos executados por Newton em comparação com a notação atual atribuída ao método.

O Capítulo 2 consiste de um estudo do conteúdo apresentado na Seção 3: *Aproximações sucessivas e o método de Newton*, do Capítulo 9, do livro *Análise Real* – Volume 1 de Elon Lages Lima.

No Capítulo 3, será apresentada uma descrição do método de Newton em funções definidas no espaço $\mathbb{R}^n$ e exemplificada sua aplicação na solução de sistemas não-lineares.

No Capítulo 4, são abordadas aplicações do método de Newton para resolução de problemas.

1 PERSPECTIVA HISTÓRICA DO MÉTODO DE NEWTON

No ano de 1669, Isaac Newton (1642-1727) em *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (publicado em 1711), comunica ao seu professor Isaac Barrow um primeiro anúncio do que viria a ser o princípio dos fluxos e o teorema binomial. Nesses escritos Newton apresenta um método de aproximações sucessivas da raiz real de uma equação numérica.

Em 1671, Newton descreve novamente o método de aproximações sucessivas em *Method of Fluxions*, no entanto, este só veio a ser publicado em 1736.

Por essas razões, o primeiro relato impresso deste método foi registrado no capítulo 94 de *Algebra* de Wallis, em 1685. Nele é descrito o processo de Newton para encontrar a solução da equação $y^3 - 2y - 5 = 0$, já outrora presente nos escritos anteriormente citados, apresentando diferenças apenas quanto a aproximação do valor das frações.

Veja a seguir o processo utilizado por Newton para encontrar a solução da equação.

O valor inicial escolhido é $y = 2$. E, então, faz-se $y = 2 + p$. Segue que,

$$(2+p)^3 - 2(2+p) - 5 = p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0.$$

Ignorando as potências de p maiores ou iguais a 2, tem-se $10p - 1 = 0$. Em seguida, faz-se $p = 0.1 + q$ e substitui-se na equação anterior, obtendo

$$(0.1+q)^3 + 6(0.1+q)^2 + 10(0.1+q) - 1 = q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$$

Repetindo o processo, encontra-se $11,23q + 0,061 = 0$. Então, faz-se $q = r - 0.0054$. Daí,

$$r^3 + 6,3r^2 + 11,16205r + 0,00054155 = 0.$$

Donde $r = s - 0,000048517$.

Desde modo, $y = 2 + 0.1 - 0.0054 - 0.000048517 = 2,094551483$.

Em 1690, Joseph Raphson (1648-1715) em *Analysis aequationum universalis*, apresenta uma primeira modificação deste método. Raphson escreve $f(x)$ e $f'(x)$ como polinômios e a partir de operações algébricas fornece "cânones" para o que eles seriam (obviamente, não com essa notação). Na tabela a seguir é possível visualizar os resultados apresentados por Raphson para polinômios até grau 5. No entanto, ele descreveu para polinômios até grau 10. Considere que $1, b, c, d, ...$ são coeficientes de um polinômio em x.

"Pro potestate Quinta"	
$xxxxx$	$5xxxx$
$bxxxx$	$4bxxx$
$cxxx$	$3cxx$
dxx	$2dx$
fx	f

Por conseguinte, o método é também conhecido como método de Newton-Raphson.

Este método é, hoje, descrito por $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \in \mathbb{N}$ em que x_0 é uma aproximação inicial. Dado isso, faremos uma análise dos passos utilizados por Newton em sua resolução em comparação com os resultados que temos atualmente.

Considere o polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$. Sabemos que

$$f'(x_0) = na_n x_0^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x_0^{n-2} + ... + a_1.$$

No processo de Newton é substituído $x = x_0 + p$ como raiz da função inicial,

$$a_n(x_0+p)^n + a_{n-1}(x_0+p)^{n-1} + ... + a_0 = 0.$$

Sabendo que $(x_0+p)^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_0^{n-i}p^i$, podemos calcular os coeficientes que acompanham p. Então, encontramos

$$a_n \binom{n}{1} x_0^{n-1} + a_{n-1}\binom{n-1}{1} x_0^{n-2} + ... + a_1 = f'(x_0).$$

E o termo independente é dado por

$$a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + ... + a_0 = f(x_0).$$

Desde modo, vemos que o passo seguinte de Newton, na notação atual, é $f'(x_0)p + f(x_0) = 0$, logo $p = -\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. E então,

$$y = x_0 + p \implies y = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Assim, fica evidente que os primeiros passos efetuados por Newton resultam exatamente no termo x_1 da sequência recursiva que utilizamos atualmente.

Em seguida, Newton substitui $p = -\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} + q$ na equação anterior obtendo

$$a_n \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + q \right)^n + a_{n-1} \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + q \right)^{n\ -1} + ... + a_0 = 0.$$

Ou seja,

$$a_n(x_1 + q)^n + a_{n-1}\,(x_1 + q)^{n\ -1} + ... + a_0 = 0.$$

Prosseguindo com o procedimento de Newton e repetindo os cálculos anteriores conclui-se que $q = -\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Por fim, na notação atual, Newton concluí que

$$y = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} + ...$$

Isto é, $y = x_n$.

2 O MÉTODO DE NEWTON

O método de Newton é uma aplicação do conceito de derivada e é utilizado para calcular a raiz de uma função através de aproximações sucessivas. Em outras palavras, este método nos fornece uma sequência recursiva x_n cujo limite, se existir, será a raiz da função. Para isso devemos considerar uma função $f : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1 em I, tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Para encontrar a raiz da função f, por meio do método de Newton, escolhemos um valor inicial $x_0 \in I$ e, então, calculamos

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},\\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},\\
&\vdots\\
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.
\end{aligned}
$$

Deste modo, se $x_n \to a$ então $f(a) = 0$. Pois, quando $n \to \infty$ na equação $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, temos $a = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ e isto implica que $f(a) = 0$.

Vejamos a interpretação geométrica do método de Newton.

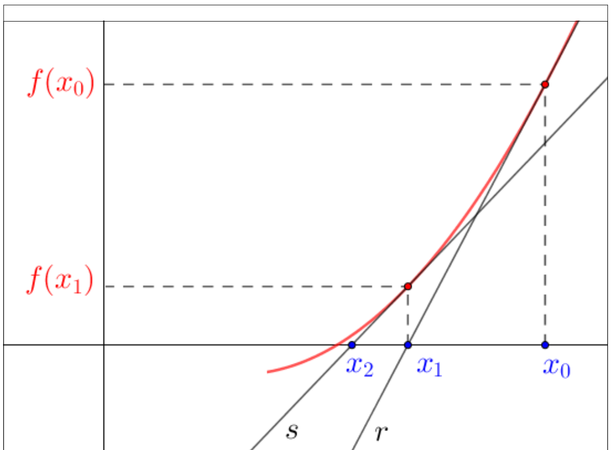

Figura 1: Representação geométrica do método de Newton.

- x_0 um ponto arbitrário do domínio de f;

- r é a reta tangente ao gráfico da função f no ponto x_0;
- x_1 é o ponto de interseção da reta r com o eixo das abscissas;
- s é a reta tangente ao gráfico de f no ponto x_1;
- x_2 é o ponto de interseção da reta s com o eixo das abscissas.

A equação da reta tangente ao gráfico da função f em um ponto de abscissa x_0 é dada por $f(x_1) - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$. Procuramos $x_1 \in I$ tal que $f(x_1) = 0$. Assim temos $-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$, ou seja, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Repetindo o processo anterior e generalizando-o, encontramos a sequência recursiva do método de Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Como exemplo, vamos calcular a raiz de uma função utilizando as aproximações sucessivas do método de Newton. Considere a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 5$. Sabemos que a raiz dessa função é $\sqrt[3]{5}$ e que $1 < \sqrt[3]{5} < 2$. Portanto, tomaremos o valor inicial $x_0 = 1,5$ que está nesse intervalo. Sendo assim,

Função	$f(x) = x^3 - 5$
Derivada	$f'(x) = 3x^2$
Valor Inicial x_0	1,5
x_1	1,74074074074074
x_2	1,71051646183681
x_3	1,70997611745896
x_4	1,70997594667671
x_5	1,70997594667670
x_6	1,70997594667670
x_7	1,70997594667670

Por consequência, pode-se dizer que $\sqrt[3]{5} \approx 1.70997594667670$.

Podemos citar exemplos em que a sequência obtida através do método de Newton não converge, para isso basta considerar uma função que não possui raiz. E, ainda que a função possua raiz real a sequência pode divergir se considerarmos um valor inicial x_0 distante da raiz. Como é o caso da função $f:\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x-x^3$. Se tomarmos $x_0=\frac{\sqrt{5}}{5}$, a sequência do método de Newton será divergente, pois $(x_n)=(x_0,-x_0,x_0,-x_0,...)$.

Semelhante ao caso anterior, temos a função $f:I=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\operatorname{sen}(x)$. Posto isto, procuramos pelo ponto $x_0\in I$ em que a sequência divergirá. Sabemos que $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_0-\operatorname{tg}(x_0)$ e desejamos que as retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de abscissas x_0 e x_1 tenham a mesma inclinação, ou seja, queremos determinar x_0 de tal modo que $\cos(x_0)=\cos(x_1)$. Sendo assim, temos $x_0=x_1$ ou $x_0=-x_1$. A primeira opção resulta em $x_0=0$ e isto implica que a sequência convergirá. Por esse motivo assumiremos $x_0=-x_1$. Segue que, $-x_0=x_0-\operatorname{tg}(x_0)$. Daí, temos que x_0 é uma raiz da função $g(x)=2x-\operatorname{tg}(x)$. Então, se tomarmos x_0 tal que $g(x_0)=0$ obteremos a sequência divergente $(x_n)=(x_0,-x_0,x_0,-x_0,...)$.

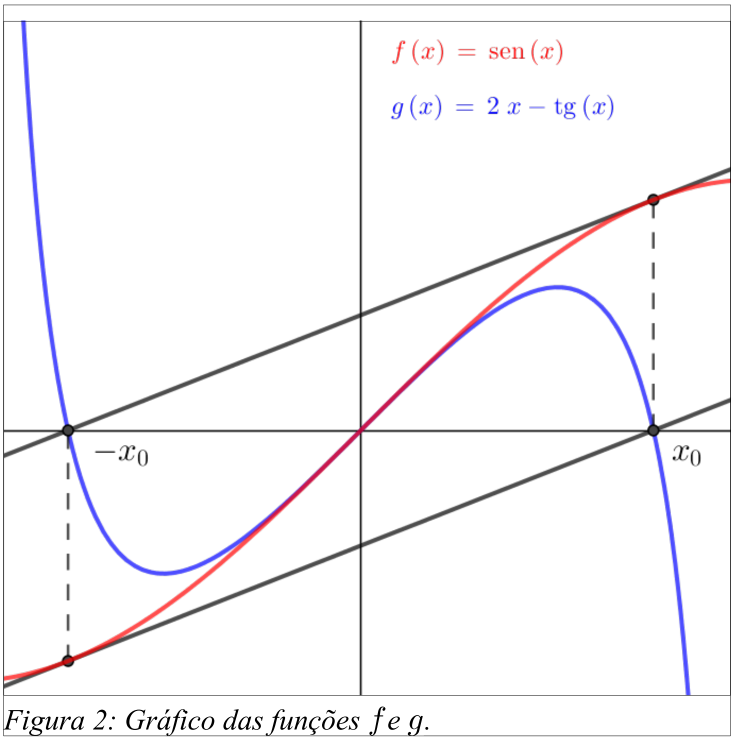

Figura 2: Gráfico das funções f e g.

A seguir, apresentaremos um conteúdo relacionado a contrações que será útil nas próximas demonstrações.

Definição. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é chamada *contração* se existe $k \in \mathbb{R}$ com $0 \leq k < 1$ tal que $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ para todo $x, y \in A$.

É fácil ver que toda contração é uniformemente contínua, uma vez que para todo $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ basta tomarmos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ e então para todos $x, y \in A$ tais que $|y - x| < \delta$ teremos $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Além disso, como consequência do Teorema do Valor Médio, toda função $f : I \to \mathbb{R}$, derivável em I, tal que $|f'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in I$ é uma contração.

Teorema (Ponto Fixo das Contrações). Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é fechado, então para qualquer contração $f : A \to A$, fixando $x_0 \in A$ arbitrário, a sequência

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n), ...$$

converge para o único ponto fixo de f.

Demonstração. Queremos mostrar que, dado $x_0 \in A$ arbitrário, a sequência

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n), ...$$

é de Cauchy. Pois toda sequência de Cauchy é convergente.

<u>Observação</u>: Uma sequência x_n é dita de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todos $m, n > n_0$ tem-se $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Sabemos que a função f é contração. Sendo assim, existe $0 \leq k < 1$ tal que $|x_{m+1} - x_{n+1}| \leq k|x_m - x_n|$ para quaisquer $x_m, x_n \in A$. Portanto,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|.$$

Considere $m > n \in \mathbb{N}$. Dessa forma,

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - ... + x_{n+1} - x_n|$$

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + ... + |x_{n+1} - x_n|$$

$$|x_m - x_n| \leq k^{m-1}|x_1 - x_0| + k^{m-2}|x_1 - x_0| + ... + k^n|x_1 - x_0|$$

$$|x_m - x_n| \leq |x_1 - x_0| \sum_{i=n}^{m-1} k^i < |x_1 - x_0| \sum_{i=n}^{\infty} k^i$$

Uma vez que $\sum_{i=n}^{\infty} k^i = \frac{k^n}{1-k}$,

$$|x_m - x_n| < |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1-k}.$$

Como $0 \leq k < 1$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ tem-se $k^n < \varepsilon$. Logo, podemos afirmar que a sequência converge.

Suponha que $x_n \to a$. Por continuidade, $f(x_n) \to f(a)$. Como $f(x_n) = x_{n+1} \to a$, pela unicidade, temos que $f(a) = a$.

Afirmamos que este ponto fixo é único, pois, caso contrário existiria $b \neq a \in A$ tal que $f(b) = b$. Visto que f é contração,

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b-a| \implies |b-a| \leq k|b-a| \implies k \geq 1.$$

Isso é impossível, dado que $k < 1$. ■

Considere a função $N_f : I \to \mathbb{R}$ dada por $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Se a função N_f possuir ponto fixo, ou seja, um ponto a tal que $N(a) = a$, então este ponto será a raiz da função f.

Provaremos a seguir que se a função $f : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^2, tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então para todo $a \in intI$ tal que $f(a) = 0$ existe uma vizinhança de a, a saber, $J = [a-\delta, a+\delta]$, em que a sequência do método de Newton converge independente do valor inicial $x_0 \in J$.

Demonstração. Temos que $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Então $N'_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$. Donde $N'_f(a) = 0$. Por continuidade da função N'_f, temos que para todo $0 < k < 1$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in [a-\delta, a+\delta] \implies |N'_f(x)| \leq k < 1$. Isto implica que N_f é contração. Além disso, para todo ponto $x \in J$, a imagem $N(x) \in J$, pois $|N_f(x) - a| = |N_f(x) - N(a)| \leq k|x-a| < |x-a| < \delta$. Sendo assim, N_f é contração de $J \to J$, e podemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo das Contrações concluindo que para qualquer $x_0 \in J$ a sequência $x_n = N_f(x_{n-1})$ converge para o único ponto fixo de N_f. ■

Para exemplificar, vamos analisar a função $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Sabemos que $f(0) = 0$. Temos que

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \operatorname{tg}(x)$$
$$N_f'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = -\operatorname{tg}^2(x).$$

Pela afirmação demonstrada anteriormente, existe uma vizinhança de 0, $J = [-\delta, \delta]$, tal que, para todo $x_0 \in J$ a sequência do método de Newton convergirá. Devido à continuidade de N_f ao fixarmos $k = \dfrac{1}{2}$ é possível encontrar $\delta > 0$ de modo que para todo $|x| < \delta$ teremos $|N_f'(x)| \leq k < 1$. Procuramos pelo valor de δ em que $|-\operatorname{tg}^2(x)| \leq \dfrac{1}{2}$. Fazendo os cálculos necessários concluímos que $\delta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Então, para todo $x_0 \in J = \left[-\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$ a sequência $x_n = N_f(x_{n-1})$ convergirá.

O método de Newton é útil para o cálculo do valor aproximado da raiz enésima de um número real $c > 0$, assim como no primeiro exemplo citado.

Considere a função $f : [\sqrt[n]{c}, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n - c$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}^+$. Consequentemente,

$$N_f(x) = \frac{1}{n}\left[x(n-1) + \frac{c}{x^{n-1}}\right]$$
$$N_f'(x) = \frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{c}{x^n}\right).$$

Como $x \geq \sqrt[n]{c}$, então $x^n \geq c$. Isto implica que $|N_f'(x)| < 1$. Logo, N_f é contração. Segue que, se $x \in [\sqrt[n]{c}, \infty)$, então $N_f(x) \in [\sqrt[n]{c}, \infty)$, pois $N_f(x)$ é a média aritmética dos n números $\overbrace{x, x, ..., x,}^{n-1} \dfrac{c}{x^{n-1}}$, enquanto $\sqrt[n]{c}$ é a média geométrica desses números. Como a média geométrica é sempre menor ou igual que a média aritmética, podemos afirmar que $N_f(x) \geq \sqrt[n]{c}$, ou seja, $N_f(x) \in [\sqrt[n]{c}, \infty)$. Pelo Teorema do Ponto Fixo das Contrações, concluímos que a sequência $x_n = N_f(x_{n-1})$ convergirá a $\sqrt[n]{c}$ independentemente do valor inicial x_0.

Considere uma função $f : I \to \mathbb{R}$, de classe C^2 em I, tal que $0 < |f''(x)| \leq A$ e $0 < B \leq |f'(x)|$ para todo $x \in I$. Suponha que $f(a) = 0$. Então a sequência x_n converge para a. Vamos comparar os erros de $|x_{n+1} - a|$ e $|x_n - a|$ usando a fórmula de Taylor com resto em Lagrange, que diz: “Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é n vezes derivável em (a,b) e a derivada de ordem $n-1$ é contínua, então existe $c\in(a,b)$ tal que

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+...+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^{n} \quad ”.$$

Dado isto, existe c entre x_n e a tal que

$$f(a)=f(x_n)+f'(x_n)(a-x_n)+\frac{f''(c)}{2}(a-x_n)^2.$$

Logo,

$$x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=a+\frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(x_n-a)^2$$

$$x_{n+1}-a=\frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(x_n-a)^2$$

$$|x_{n+1}-a|\le\frac{A}{2B}|x_n-a|^2.$$

Se $|x_n-a|<1$, então $|x_n-a|^2$ é ainda menor. Isto mostra a quão rapidamente o método de Newton converge.

Exemplos a seguir foram extraídos dos exercícios da Seção 3, do livro *Análise Real* de Elon Lages Lima.

1. Sejam $I=[a-\delta,a+\delta]$ e $f:I\to\mathbb{R}$ tal que $|f(y)-f(x)|\le k|y-x|$, onde $0\le k\le 1$. Se $|f(a)-a|\le(1-k)\delta$, prove que existe um único $x\in I$ com $f(x)=0$.

Queremos mostrar que $f:I\to I$ é uma contração para, através o Teorema do Ponto Fixo das Contrações, concluir que existe um único ponto fixo $x\in I$.

Como já é dado que f é contração, basta mostrar que se $x\in I$ então $f(x)\in I$.

$$|f(x)-a|=|f(x)-f(a)+f(a)-a|\le|f(x)-f(a)|+|f(a)-a|$$

$$|f(x)-a|<k\delta+(1-k)\delta=\delta.$$

2. Defina $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ pondo $f(x)=2^{\frac{-x}{2}}$. Mostre que f é uma contração e que, se a é seu ponto fixo, $-a$ é a raiz negativa da equação $x^2=2^x$. Use o método das aproximações sucessivas e uma calculadora para obter o valor de a com 8 algarismos decimais exatos.

Temos que $f'(x)=-\frac{ln2}{2^{\frac{x}{2}+1}}$. Portanto, f é estritamente decrescente, $f'(0)=-\frac{ln2}{2}<1$ e $f'(x)\to 0$ quando $x\to\infty$. Logo, $|f'(x)|<1$ para todo $x\in[0,\infty)$. Logo, f é contração.

Suponha que a seja o ponto fixo de f, então

$$2^{\frac{-a}{2}} = a \implies \left(2^{\frac{-a}{2}}\right)^2 = a^2 \implies 2^{-a} = (-a)^2.$$

Função	$x^2 - 2^x$
Derivada	$2x - 2^x ln(2)$
x_0	-1
x_1	-0,7869233669
x_2	-0,7668433794
x_3	-0,7666647101
x_4	-0,766664696
x_5	-0,766664696

3. Seja $I = [a-\delta, a+\delta]$. Se a função $f : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^2, com $f'(x) \neq 0$, $|N_f'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in I$ e $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| < (1-k)\delta$, prove que, seja qual for o valor inicial $x_0 \in I$, o método de Newton converge para a única raiz $x \in I$ da equação $f(x) = 0$.

Se $|N_f'(x)| \leq k < 1$, então N_f é contração. Basta mostrar que se $x \in I$ então $N_f(x) \in I$. Seja $x \in I$,

$$|N_f(x) - a| = |N_f(x) - N_f(a) + N_f(a) - a| \leq |N_f(x) - N_f(a)| + |N_f(a) - a|$$

$$|N_f(x) - a| \leq |N_f(x) - N_f(a)| + \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|$$

$$|N_f(x) - a| < k\delta + (1-k)\delta = \delta.$$

4. Dado $a > 1$, considere a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{a+x}$. Fixado qualquer $x_0 > 0$, prove que a sequência definida indutivamente por $x_1 = f(x_0), ..., x_{n+1} = f(x_n)$, converge para a raiz positiva c equação $x^2 + ax - 1 = 0$.

Temos que $f'(x) = -\frac{1}{(a+x)^2}$. Deste modo, $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in [0, \infty)$. Podemos concluir que $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo das Contrações, afirmamos que a sequência converge para o único ponto fixo de f. Seja c este ponto. Segue que, $f(c) = c = \frac{1}{a+c} \implies c^2 + ac - 1 = 0.$

5. Prove que 1,0754 é um valor aproximado, com 4 algarismos decimais exatos, da raiz positiva da equação $x^6 + 6x - 8 = 0$.

Função	$x^6 + 6x - 8$
Derivada	$6x^5 + 6$
x_0	1
x_1	1,08333
x_2	1,07554
x_3	1,07546
x_4	1,07546
x_5	1,07546

6. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convexa, duas vezes derivável. Se $f(a) < 0 < f(b)$ prove que, começando com um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) > 0$, o método de Newton converge sempre para a única raiz $x \in [a, b]$ da equação $f(x) = 0$.

Se f é uma função convexa derivável, então

- $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ é monótona crescente;
- Para quaisquer $x_0, x \in [a, b]$ vale que $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, em outras palavras, o gráfico de f está sempre acima qualquer reta tangente.

Daí afirmamos que se c é raiz de f, então $c \leq x_n$ para todo n.

Como f é uma função contínua definida em um compacto, f tem máximo e mínimo. Assim sendo, $f(a)$ é o mínimo ou existe $m \in (a, c)$ tal que $f(m)$ é o mínimo. Segue que $f'(a) > 0$ ou $f'(m) = 0$, em qualquer caso teremos $f'(c) > 0$. Por isso, $f'(x_n) \geq f'(c) > 0$. Portanto, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n$.

Assim temos que a sequência do método de Newton é decrescente e limitada, logo converge para c que é o supremo das cotas inferiores.

7. Prove que as aproximações de $\sqrt[n]{c}$ dadas pelo método de Newton formam, a partir do segundo termo, uma sequência decrescente.

Considere $c > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = x^n - c$. Tomemos $x_0 > 0$. Como visto anteriormente, $N(x) \geq \sqrt[n]{c}$ para todo $x > 0$. Logo, $x_1 = N(x_0) \geq \sqrt[n]{c}$. Segue que

$f(x_n) > 0$ e $f'(x_n) > 0$ para todo $n \geq 1$. Assim, $x_{n+1} = N(x_n) = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n$ para todo $n \geq 1$. Ou seja, a sequência é decrescente.

3 O MÉTODO DE NEWTON NO $\mathbb{R}^n$

O método de Newton também pode ser aplicado em funções definidas no $\mathbb{R}^n$. Ele pode ser utilizado para encontrar soluções de sistemas não-lineares.

Considere uma função $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, ..., F_n)$ em que $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, ..., n$. Seja F de classe C^1 em A e a matriz Jacobiana $J_F(x)$ invertível para todo $x \in A$. Suponha que exista $a \in A$ tal que $F(a) = 0$.

Uma aproximação linear da função F em um ponto arbitrário $x_0 \in A$ é dada por

$$L(x) = F(x_0) + J_F(x_0)(x - x_0).$$

Procuramos por $x_1 \in A$, tal que $L(x_1) = 0$. Daí,

$$F(x_0) + J_F(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$

$$x_1 = x_0 - J_F(x_0)^{-1}F(x_0).$$

Aproximando pelo ponto x_1, encontraremos o ponto x_2 tal que $x_2 = x_1 - J_F(x_1)^{-1}F(x_1)$.

Neste caso, a sequência do método de Newton será dada por

$$x_{n+1} = x_n - J_F(x_n)^{-1}F(x_n).$$

Em que x_n são vetores de $\mathbb{R}^n$.

Sendo assim, se $x_n \to a$ então $F(a) = 0$.

A fim de exemplificar, vamos considerar uma função $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ onde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \in \mathbb{R}_+\}$ e a função é definida por

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 - 5, x^2 - y^2 - 1).$$

Queremos encontrar $(a, b) \in A$ tal que $F(a, b) = 0$, ou seja, procuramos por uma solução do sistema não-linear

$$T(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Em outras palavras, buscamos pelo ponto interseção no primeiro quadrante da circunferência $x^2 + y^2 = 5$ com a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

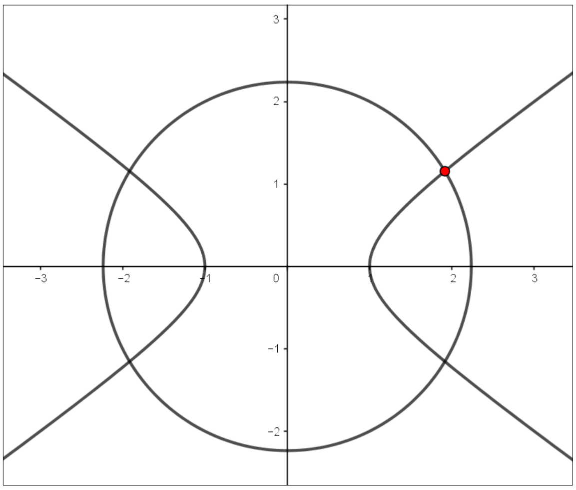

Figura 3: Interpretação geométrica do sistema $T(x,y)$.

É fácil ver que essa interseção é o ponto $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$, por isso esperamos que a sequência do método de Newton convirja a este ponto.

As derivadas parciais de F existem e são contínuas em todo ponto de A. Dessa forma, F é diferenciável em A.

Temos que $J_F(x,y) = \begin{bmatrix} D_1F_1 & D_2F_1 \\ \\ D_1F_2 & D_2F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ \\ 2x & -2y \end{bmatrix}.$

Por conseguinte, $J_F(x,y)$ é invertível para todo $(x,y) \in A$, e

$$J_F(x,y)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \\ \frac{1}{4y} & \frac{-1}{4y} \end{bmatrix}.$$

Tomemos $x_0 = (1,1)$. Segue que,

$$x_1 = x_0 - J_F(x_0)^{-1}F(x_0)$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $x_1 = (2; 1,5)$.

Prosseguindo com os cálculos encontramos os seguintes dados,

Função	$F(x,y) = (x^2 + y^2 - 5, x^2 - y^2 - 1)$
Jacobiana de F	$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}$
Inversa de $J_F(x,y)$	$J_F(x,y)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4y} & \frac{-1}{4y} \end{bmatrix}$
Valor Inicial x_0	$(1,1)$
x_1	$(2;1,5)$
x_2	$(1,75;1,41667)$
x_3	$(1,73214;1,41422)$
x_4	$(1,732051;1,414213)$

A seguir, é possível observar no gráfico a aproximação dos termos da sequência x_n para a interseção das curvas analisadas.

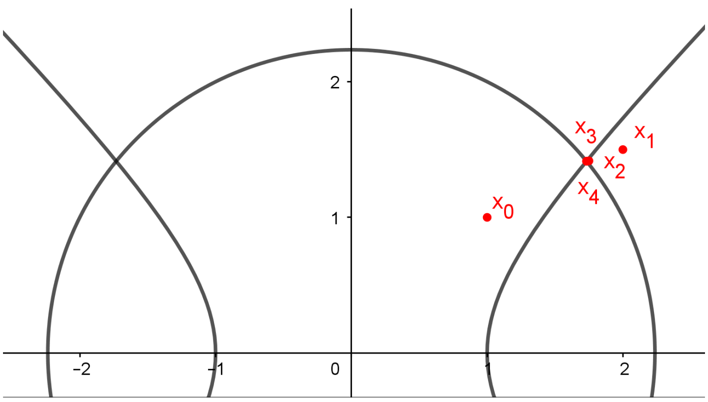

Figura 4: Pontos da sequência x_n no gráfico.

4 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON

A seguir são apresentados problemas no qual utilizamos o método de Newton para obtenção da solução.

1. Uma esfera maciça de aço inox de raio medindo $1cm$ é inserida em um recipiente contendo mercúrio. A partir do princípio de Arquimedes, determine a profundidade h da parte submersa da esfera. Dados:

Densidade do Mercúrio: $\rho_{Hg} = 13.6 g/cm^3$

Densidade do Aço Inox: $\rho_A = 7,85 g/cm^3$

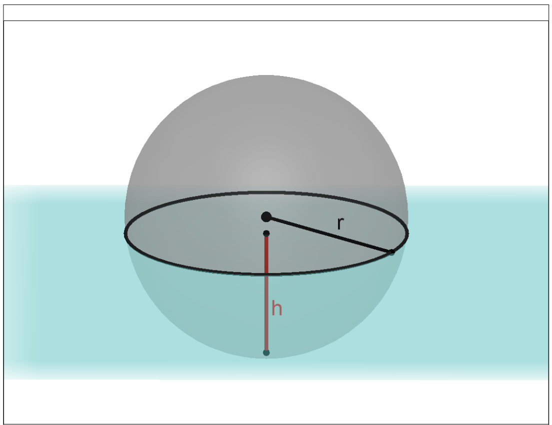

Figura 5: Esquema da esfera inserida no mercúrio.

Pelo princípio de Arquimedes temos que $\rho_A V_e = \rho_{Hg} V_{Hg}$, onde V_e o volume da esfera e V_{Hg} é o volume de mercúrio deslocado.

O volume de mercúrio deslocado será igual ao volume da calota esférica imersa no fluido. Sabendo que $\dfrac{\rho_A}{\rho_{Hg}} V_e = V_{Hg} \implies 0,58 V_e \approx V_{Hg}$, concluímos que o volume da calota esférica imersa é aproximadamente 58% do volume total da esfera. Logo, $0 < h < 2$.

Como $V_{Hg} = \dfrac{\pi}{3} h^2 (3 - h)$, segue que

$$7,85.\frac{4}{3}\pi = 13,6.\frac{\pi}{3} h^2 (3 - h)$$

$$3h^2 - h^3 - \frac{31,4}{13,6} = 0$$

Vamos calcular uma solução dessa equação no intervalo $(0, 2)$ através do método de Newton. Escolhemos o valor inicial $x_0 = 0.5$.

Função	$f(x) = 3x^2 - x^3 - \frac{31,4}{13,6}$
Derivada	$f'(x) = 6x - 3x^2$
x_0	0.5
x_1	1.24836601307190
x_2	1.09882341534636
x_3	1.10330666557358
x_4	1.10330870366618
x_5	1.10330870366662
x_6	1.10330870366662
x_7	1.10330870366662
x_8	1.10330870366662

Assim, concluímos que $h \approx 1,10330870366662cm$.

2. Um tumor é caracterizado como a massa celular formada a partir da proliferação anormal de células. A Equação de Gompertz, que visa determinar o crescimento populacional ao longo do tempo, aplicada ao crescimento populacional de células tumorais nos fornece a seguinte função $N(t) = Ke^{e^{-rt}.ln(\frac{N_0}{K})}$, em que $r > 0$ é a constante de crescimento intrínseca das células, K é o tamanho máximo que o tumor pode atingir com os nutrientes disponíveis e N_0 é a população de células tumorais no instante inicial $t = 0$. Considerando $r = 0,07$, $K = 10^{13}$ e $N_0 = 10^9$, calcule o tempo gasto para a população de células tumorais atingir 2×10^{10}.(Obs.: t é dado em anos).

Com os dados fornecidos construímos a função

$$N(t) = 10^{13}e^{ln(10^{-4})e^{-0,07t}}.$$

Procuramos pela solução da equação $10^3e^{ln(10^{-4})e^{-0.07x}} - 2 = 0$, para isso utilizaremos o método de Newton.

Função	$f(x) = 10^3 e^{ln(10^{-4})e^{-0.07x}} - 2$
Derivada	$f'(x) = 70ln(10^4)e^{ln(10^{-4})e^{-0.07x}}.e^{-0.07x}$
x_0	1
x_1	17.1862356190291
x_2	12.1850562230362
x_3	8.91413577721993
x_4	6.82443854500735
x_5	5.83687194737462
x_6	5.62858310347806
x_7	5.62035723680233
x_8	5.62034486812956
x_9	5.62034486810163
x_{10}	5.62034486810163

Deste modo concluímos que em, aproximadamente, $5,62$ anos a população de células tumorais atingirá 2×10^{10} células.

3. Considere que a função que descreve a velocidade de um objeto em queda, em função do tempo, é dada por $v(t) = \dfrac{ma}{\gamma} + \left(v_0 - \dfrac{ma}{\gamma}\right) e^{\frac{-t\gamma}{m}}$, tal que m é a massa do objeto, a a aceleração, γ o coeficiente de resistência do fluido e v_0 a velocidade inicial. Suponha que um objeto de $1kg$ cai de um determinado local e são registrados os seguintes valores:

t [segundos]	5	10
$v(t)$ [m/s]	9,75	9,81

Sendo assim, determine a aceleração e o coeficiente de resistência do fluido no qual o objeto está sujeito.

Temos que $v_0 = v(0) = 0$, $v(5) = 9,75$ e $v(10) = 9,81$. Segue que,

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\gamma}(1 - e^{-5\gamma}) = 9,75 \\ \\ \dfrac{a}{\gamma}(1 - e^{-10\gamma}) = 9,81 \end{cases}.$$

Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $F = (F_1, F_2)$ tal que

$$
\begin{cases}
F_1(x,y) = \dfrac{x}{y}(1-e^{-5y}) - 9,75 \\[2ex]
F_2(x,y) = \dfrac{x}{y}(1-e^{-10y}) - 9,81
\end{cases}.
$$

Procuramos pelo ponto $(a,\gamma) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(a,\gamma)=0$. Pelo método de Newton, $x_{n+1} = x_n - J_F(x_n)^{-1}F(x_n)$, com

$$
J_F(x,y) = \begin{bmatrix} D_1F_1 & D_2F_1 \\[2ex] D_1F_2 & D_2F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-e^{-5y}}{y} & \frac{x}{y^2}(5ye^{-5y} - 1 + e^{-5y}) \\[2ex] \frac{1-e^{-10y}}{y} & \frac{x}{y^2}(10ye^{-10y} - 1 + e^{-10y}) \end{bmatrix}.
$$

Considere $x_n = (X_n, Y_n)$. Daí,

X_0	Y_0				
7	1				
$J_F(X_0,Y_0)$		$J_F(X_0,Y_0)^{-1}$		$F(X_0,Y_0)$	$J_F(X_0,Y_0)^{-1}F(X_0,Y_0)$
0,9933	-6,7170	30,0717	-28,8704	-2,7972	-2,9806
1,0000	-6,9965	4,2979	-4,2691	-2,8103	-0,0243
X_1	Y_1				
9,9806	1,0243				
$J_F(X_1,Y_1)$		$J_F(X_1,Y_1)^{-1}$		$F(X_1,Y_1)$	$J_F(X_1,Y_1)^{-1}F(X_1,Y_1)$
0,9704	-9,1718	34,7342	-33,5038	-0,0645	-0,0053
0,9762	-9,5087	3,5661	-3,5449	-0,0667	0,0065
X_2	Y_2				
9,9859	1,0178				
$J_F(X_2,Y_2)$		$J_F(X_2,Y_2)^{-1}$		$F(X_2,Y_2)$	$J_F(X_2,Y_2)^{-1}F(X_2,Y_2)$
0,9764	-9,2824	33,4287	-32,2060	0,0003	-0,0025
0,9824	-9,6348	3,4086	-3,3878	0,0004	-0,0003
X_3	Y_3				
9,9883	1,0181				
$J_F(X_3,Y_3)$		$J_F(X_3,Y_3)^{-1}$		$F(X_3,Y_3)$	$J_F(X_3,Y_3)^{-1}F(X_3,Y_3)$
0,9761	-9,2798	33,4875	-32,2645	0,0000	0,0000
0,9821	-9,6316	3,4148	-3,3939	0,0000	0,0000
X_4	Y_4				
9,9883	1,0181				

Concluímos que $(a,\gamma) \approx (9.9883, 1.0181)$.

BIBLIOGRAFIA

BARTLE, G. R. **Elementos de Análise Real**. Tradução: Alfredo A. de Farias. 2. ed. Rio de Janeiro: CAMPUS, 1983.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução: Valéria de Magalhães de Iorio. 8. ed. LTC, 2006.

CAJORI, F. Historical Note on the Newton-Raphson Method of Approximation**. The American Mathematical Monthly.** Vol. 18, No. 2, 1911, p. 29-32. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2973939>. Acesso em: 26 abr. 2018.

DOMINGUES, J. S. **Análise do Modelo de Gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento**. Biomatemática IMECC – UNICAMP. Pirapora-MG. 2011.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas – SP: UNICAMP, 2004.

LIMA, E. L. **Análise Real – Funções de uma variável.** Volume 1. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.