

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Leonardo Angelo Soares da Silva

**A versão algorítmica do lema local de  
Lovász com aplicações a problemas de  
coloração de grafos**

Belo Horizonte - MG  
2018

---

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Autor: Leonardo Angelo Soares da Silva

Orientador: Aldo Procacci

Belo Horizonte - MG  
2018

---

LEONARDO ANGELO SOARES DA SILVA

A VERSÃO ALGORÍTMICA DO LEMA LOCAL DE LOVÁSZ COM APLICAÇÕES  
A PROBLEMAS DE COLORAÇÃO DE GRAFOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aldo Procacci

Belo Horizonte - MG  
2018

LEONARDO ANGELO SOARES DA SILVA

A VERSÃO ALGORÍTMICA DO LEMA LOCAL DE LOVÁSZ COM APLICAÇÕES  
A PROBLEMAS DE COLORAÇÃO DE GRAFOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 15 de junho de 2018.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Aldo Procacci - Orientador  
UFMG

---

Prof. Dr. Bhalchandra Digambar Thatte  
UFMG

---

Prof. Dr. Sokol Ndreca  
UFMG

Belo Horizonte - MG  
2018

*A minha segunda mãe (avó), dona Zefinha.  
(in memoriam).*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado força suficiente para encarar essa jornada que ele sabe o quanto foi difícil. Agradeço também aos meus pais, José Ilton da Silva e Valdenice Soares da Silva, pelo dom da vida e por tudo que eles puderam me oferecer, mesmo que com pouco. Agradeço a minha tia Ieda Torres pelo incentivo a todo momento no curso e, em especial, a minha falecida avó, Josefa Torres, que me deu todo um suporte para encarar a vida e pelos incentivos de um modo geral. As minhas primas Nayara e Kleyce, por toda confiabilidade posta em mim para percorrer este caminho.

Agradeço aos meus amigos que, em momento de desespero, deram-me forças e sabedoria para continuar na conclusão desta jornada, além de terem me proporcionado momentos ímpares de lazer e diversão. Em particular: Fernando Naves, Mateus Melo, Izabela Fernandes e Rafael Hortelã.

Agradeço ainda ao prof. Dr. Aldo Procacci por todo auxílio, conhecimento e confiança transmitidos a mim em todo tempo na construção deste trabalho.

À todos os professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG pelo auxílio na minha formação e capacitação.

Por fim, agradeço a CAPES, pelo financiamento concedido.

# Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Conceitos básicos e definições sobre grafos . . . . .	1
1.2 O Lema Local de Lovász e suas variantes . . . . .	4
<b>2 O Algoritmo: Teorema de Moser e Tardos e Teorema de Pegden</b>	<b>11</b>
2.1 A versão algorítmica do lema local . . . . .	11
2.2 Processo de Registro e Árvores de Testemunhas . . . . .	12
2.3 Produção aleatória de Árvores de Testemunhas . . . . .	17
2.4 Uma Melhora do Teorema de Moser e Tardos: O Teorema de Pegden . . .	19
<b>3 Aplicações do Teorema de Pegden</b>	<b>24</b>
3.1 Colorações acíclicas próprias de aresta de um grafo . . . . .	25
3.2 Colorações acíclicas de arestas de grafos com girth $g \geq 5$ . . . . .	28
3.3 Colorações estrelas do vértice de um grafo . . . . .	32
3.4 Colorações $\beta$ -frugais dos vértice de um grafo . . . . .	35

# Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar a demonstração da versão algorítmica do lema local de Lovász bem como uma versão melhorada do mesmo e aplicá-lo a problemas de coloração de grafos. Considere  $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$  um grafo de dependência para uma família  $\mathcal{A}$  de eventos no espaço de probabilidade  $\Omega_{\Psi}$ , onde  $\Psi$  é uma coleção de variáveis aleatórias mutuamente independentes. Temos que se existe  $\mu : \mathcal{A} \mapsto (0, \infty)$  tal que

$$P(A) \leq \frac{\mu(A)}{\sum_{B \in \Gamma^+(A)} \prod \mu(B)}$$

então existem valores para as variáveis em  $\Psi$  tais que nenhum dos eventos em  $\mathcal{A}$  ocorra. Além disso, o algoritmo que descreveremos reamostra cada evento  $A \in \mathcal{A}$  num valor esperado  $\mu(A)$  vezes antes de encontrar tal avaliação.

Tal versão pode ainda ser ampliada se envolvermos com as cliques. Suponhamos que dado  $A \in \mathcal{A}$ , a vizinhança inclusiva  $\Gamma^+(A)$  em  $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$  seja a união de  $k$  cliques  $c_1, \dots, c_k$ . Se, para cada  $A \in \mathcal{A}$ ,

$$P(A) \leq \frac{\mu(A)}{\varphi_A^*(\mu)} \tag{1}$$

onde

$$\varphi_A^*(\mu) = \prod_{i=1}^k \left[ 1 + \sum_{B \in c_i} \mu(B) \right]$$

então, existem valores para as variáveis em  $\Psi$  tais que nenhum dos eventos em  $\mathcal{A}$  ocorre. Além disso, o algoritmo que descreveremos reamostra um evento  $A \in \mathcal{A}$  no máximo  $\mu(A)$  vezes em valor esperado antes de encontrar tal avaliação.

É exatamente a cota descrita em (1) que utilizaremos para resolver alguns problemas de coloração de grafos descritos neste trabalho.

Palavras-chave: Lema Local de Lovász, Grafo de Dependência, Algoritmo,

# Abstract

The objective of this work is to present the proof of the algorithmic version of the Lovász local lemma as well as an improved version of it and apply it to problems of coloring of graphs. Consider  $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$  a graph of dependency for an event  $\mathcal{A}$  family in the probability space  $\Omega_{\Psi}$ , where  $\Psi$  is a collection of mutually independent random variables. We have to find if there is  $\mu : \mathcal{A} \mapsto (0, \infty)$  such that

$$P(A) \leq \frac{\mu(A)}{\sum_{B \in \Gamma^+(A)} \prod \mu(B)}$$

then there are values for the variables in  $\Psi$  such that none of the events in  $\mathcal{A}$  occur. In addition, the algorithm we will describe resamples each  $A \in \mathcal{A}$  in an expected value  $\mu(A)$  times before finding such an assessment.

Such a version can be magnified if we engage with clicks. Suppose that given  $A \in \mathcal{A}$ , let the inclusive neighborhood  $\Gamma^+(A)$  in  $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$  be the union of  $k$  clicks  $c_1, \dots, c_k$ . If, for each  $A \in \mathcal{A}$ ,

$$P(A) \leq \frac{\mu(A)}{\varphi_A^*(\mu)} \tag{2}$$

where

$$\varphi_A^*(\mu) = \prod_{i=1}^k \left[ 1 + \sum_{B \in c_i} \mu(B) \right]$$

then there are values for the variables in  $\Psi$  such that none of the events in  $\mathcal{A}$  occurs. In addition, the algorithm we will describe resets an event  $A \in \mathcal{A}$  at most  $\mu(A)$  times in expected value before finding such an evaluation.

It is exactly the dimension described in (2) that we will use to solve some problems of coloring of graphs described in this work.

Key words: Lovász local lemma, Dependency Graph, Algorithm.

# Capítulo 1

## Introdução

Dividiremos esse capítulo em duas partes: na primeira parte apresentaremos os conceitos básicos utilizados ao longo da dissertação e, na segunda parte, delinearemos o contexto em que se encontra nosso objeto de estudo.

### 1.1 Conceitos básicos e definições sobre grafos

Apresentaremos aqui alguns conceitos e notações pertinentes a Teoria de Grafos e Combinatória.

**Definição 1** Um grafo  $G = (V, E)$  é definido pelo par de conjuntos  $V$  e  $E$  onde:

$V$  - conjunto finito e não-vazio: o conjunto dos vértices ou nodos do grafo

$E$  - conjunto de pares não ordenados  $\{u, v\}, u, v \in V$ : as arestas do grafo.

**Exemplo 2** Considere  $V = \{Ana, João, Maria, Zé\}$  e  $E = \{\{Ana, João\}, \{Ana, Maria\}, \{João, Maria\}, \{Maria, Zé\}\}$ . Assim,  $G = (V, E)$  é dado por



Figura 1.1: Grafo simples  $G = (V, E)$ .

**Definição 3** A ordem de um grafo é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices.

**Definição 4** Em um grafo  $G$ , dois vértices  $u, v \in V$  são adjacentes (ou vizinhos) se  $\{u, v\} \in E$ .

A aresta da definição acima é dita ser incidente a ambos os vértices  $u$  e  $v$ .

**Definição 5** Dado um grafo  $G$  e  $x \in V$ , o grau de  $x$ , denotado por  $Gr_x$ , é dado pelo número de arestas que são incidentes a  $x$ .

Além disso, quando num grafo todos os seus vértices têm o mesmo grau ele é dito regular.

Diante da definição acima, definimos o grau máximo  $\Delta$  de um grafo  $G$  como sendo  $\Delta = \max_{x \in V} Gr_x$ .

Na figura 1.1, temos que o vértice Ana possui  $Gr_{Ana} = 2$ , o vértice João possui  $Gr_{Joao} = 2$  e o vértice Zé possui  $Gr_{Zé} = 1$ . Já o vértice Maria possui  $Gr_{Maria} = 3$  e, conseqüentemente,  $\Delta = 3$  pois é em Maria que se atinge o maior grau.

**Definição 6** Um grafo é dito completo se há uma aresta entre cada par de seus vértices. Tais grafos são designados por  $K_n$ , onde  $n$  é a ordem do grafo.

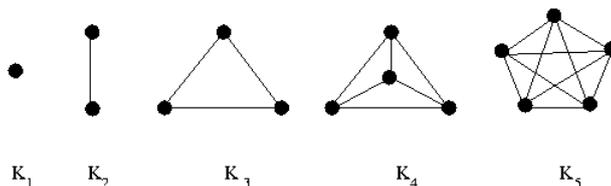


Figura 1.2: Representação de grafos completos  $K_n$ , onde  $n = 1, \dots, 5$

Quando num grafo  $G$  seus vértices ou arestas estiverem associados á algum rótulo, ele é dito ser um **grafo rotulado**.

**Definição 7** Um grafo  $G_s = (V_s, E_s)$  é dito ser um subgrafo de um grafo  $G = (V, E)$  quando  $V_s \subseteq V$  e  $E_s \subseteq E$  e, para qualquer aresta  $\{u, v\} \in E_s$ , tem-se que  $u \in V_s$  e  $v \in V_s$ .

**Definição 8** Uma clique de um grafo  $G$  é um subconjunto  $C \subset V$  de seus vértices tais que cada dois vértices do subconjunto são conectados por uma aresta.

Se  $G = (V, E)$  é grafo e  $C$  é subconjunto de  $V$ , o subgrafo de  $G$  induzido por  $C$  é aquele que tem como conjunto de vértices  $C$  e como conjunto de arestas as arestas de  $E$  contidas em  $C$ . Diante disso e através da definição acima, equivale dizer que numa clique um subgrafo induzido de  $C$ ,  $C \subseteq V$ , é completo.

**Definição 9** Um caminho é uma seqüência qualquer de arestas adjacentes que ligam dois vértices.

Um caminho é dito *elementar* se não passa duas vezes pelo mesmo vértice. Em contrapartida, é dito *simples*, se não passa duas vezes pela mesma aresta. Além disso, o comprimento de um caminho é dado pelo número de arestas que a compõe.

**Definição 10** Um ciclo de um grafo  $G$  é um caminho simples e fechado (o vértice inicial é o mesmo que o vértice final).

**Definição 11** Um girth (cintura)  $g$  de um grafo  $G$  é o comprimento de um ciclo mais curto contido em  $G$ .

**Definição 12** Um grafo  $G$  é dito ser conexo se há pelo menos um caminho ligando cada par de vértices de  $G$ . Dizemos que um grafo é desconexo se ele não for conexo.

**Exemplo 13** Considere o seguinte grafo:

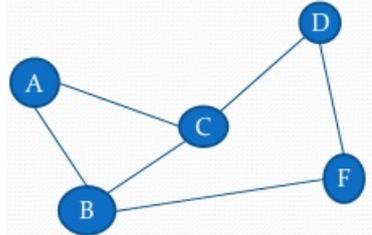


Figura 1.3: Grafo  $G_1$

Como podemos observar em  $G_1$ , os vértices "A, B"; "D, F"; "C, B"; "C, D"; "A, C"; "F, B" estão relacionados simplesmente pelas suas respectivas arestas. Podemos notar ainda que o vértice F não se relaciona com o vértice A, porém, podemos fazer tal comunicação por um caminho: seja por "A -> B -> F" ou por "A -> C -> D -> F". Isto é,  $G_1$  é dito um grafo conexo pois existe pelo menos um caminho ligando todos seus vértices.

**Definição 14** Uma árvore é um grafo conexo e sem ciclos.

Seja  $G$  um grafo com ordem  $n \geq 2$ . As propriedades seguintes são equivalentes e suficientes para caracterizar  $G$  como uma árvore:

- 1-  $G$  é conexo e sem ciclos;
- 2-  $G$  é sem ciclos e tem  $n - 1$  arestas;
- 3-  $G$  é conexo e tem  $n - 1$  arestas;
- 4-  $G$  é sem ciclos e por adição de uma aresta se cria um ciclo e somente um;
- 5-  $G$  é conexo, mas deixa de sê-lo se uma aresta é suprimida;
- 6- Todo par de vértices de  $G$  é unido por um e somente um caminho elementar.

**Definição 15** Um grafo  $G$  desconexo é formado por pelo menos dois subgrafos conexos, disjuntos em relação aos vértices e maximais em relação à inclusão. Cada um destes subgrafos conexos é dito uma componente conexa do grafo  $G = (V, E)$ .

**Definição 16** Uma floresta é um grafo cujas componentes conexas são árvores.

**Definição 17** Dado um grafo  $G$ , para cada vértice  $v \in V$ , definimos a vizinhança de  $v$  como sendo os vértices adjacentes a  $v$  em  $G$  e denotamos essa vizinhança por  $\Gamma(v)$ . Além disso, chamamos de vizinhança inclusiva como sendo a vizinhança do vértice  $v$  num grafo  $G$  juntamente com o próprio vértice  $v$ . Com isso, escrevemos a vizinhança inclusiva da seguinte maneira:  $\Gamma^+(v) = \Gamma(v) \cup \{v\}$ .

**Definição 18** Um conjunto independente de um grafo  $G$  é um conjunto  $S$  de vértices de  $G$  tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em  $S$ .

Em outras palavras, se  $a$  e  $b$  são vértices quaisquer de um conjunto independente, não há aresta entre  $a$  e  $b$ . Conseqüentemente, todo grafo tem ao menos um conjunto independente: o conjunto vazio e um grafo pode ter vários conjuntos independentes distintos.

**Definição 19** Considere um grafo  $G = (V, E)$  e seja  $C$  um conjunto de cores. Uma coloração própria dos vértices de  $G$  é uma atribuição de alguma cor de  $C$  para cada vértice de  $V$  de tal modo que a dois vértices adjacentes serão atribuídos cores diferentes.

Diante da definição acima, podemos dizer que uma coloração própria dos vértices de  $G = (V, E)$  é uma função  $f : V \mapsto C$  tal que para cada par de vértices  $\{v, w\} \in E$ , temos que  $f(v) \neq f(w)$ .

Temos ainda que uma  $k$ -coloração de  $G$  é uma coloração que utiliza um total de  $k$  cores.

**Definição 20** Denomina-se número cromático de um grafo  $G$  o menor número de cores  $k$  para o qual existe uma  $k$ -coloração própria de  $G$ .

**Exemplo 21** Abaixo, na figura 1.4, temos exemplificando um grafo  $G$  tendo uma 4-coloração própria e, na figura 1.5, utilizando-se do mesmo grafo  $G$  obtemos uma 2-coloração própria. Na figura 1.5 podemos notar que é possível colorir os vértices do grafo  $G$  em discussão utilizando somente 2 cores. Logo,  $c(G) = 2$ .

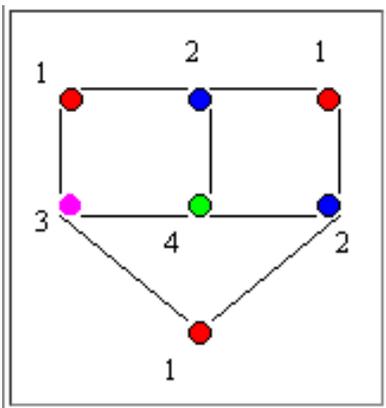


Figura 1.4: 4-coloração de  $G$

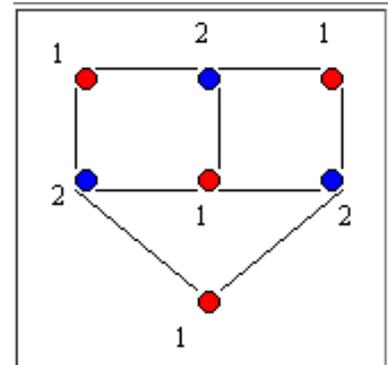


Figura 1.5: 2-coloração de  $G$

Analogamente, uma coloração própria de arestas de  $G = (V, E)$  é uma atribuição de alguma cor de  $C$  para cada aresta de  $G$  de tal modo que a duas arestas adjacentes serão atribuídos cores diferentes e denomina-se número cromático de arestas,  $a'(G)$ , de um grafo  $G$  o menor número de cores  $k$  para o qual existe uma  $k$ -coloração própria de arestas de  $G$ .

## 1.2 O Lema Local de Lovász e suas variantes

O Lovasz Local Lemma (LLL), originalmente formulado por Erdős e Lovász em [8], é uma das ferramentas mais importantes e poderosas no âmbito do chamado método probabilístico em combinatória (ver, por exemplo, a referência [15]). A filosofia do método probabilístico é provar a existência de objetos combinatórios com certas propriedades desejáveis (por exemplo, uma coloração própria de vértices ou arestas de um grafo) mostrando que esses objetos têm uma probabilidade positiva de ocorrer em algum espaço de probabilidade adequadamente definido. Em particular, a idéia básica do LLL é a de determinar um espaço de probabilidade e uma adequada família de eventos deste espaço (a família dos eventos ruins) de tal maneira que a existência do objeto combinatório sob análise é garantida se nenhum dos eventos ruins acima mencionados ocorre. O LLL então fornece uma condição suficiente sobre o tamanho das probabilidades desses eventos ruins para garantir que, com probabilidade estritamente positiva, nenhum deles ocorre. A popularidade deste lema é basicamente devida ao fato de que ele pode ser implementado para uma ampla classe de problemas em combinatória, de tal forma que sua condição suficiente, uma vez que alguns parâmetros foram adequadamente ajustados, pode ser facilmente verificada.

Para enunciar o lema local de Lovász, precisamos introduzir algumas definições e conceitos. Seja  $\mathcal{A}$  um conjunto finito de eventos num espaço de probabilidade  $\Omega$ . Se  $A \in \mathcal{A}$ , então denotaremos por  $\bar{A}$  o evento complementar de  $A$ , i.e.,  $\bar{A}$  ocorre se e somente se  $A$  não ocorre.

**Definição 22** *Seja  $\Omega$  um espaço de probabilidade e  $G = (V, E)$  um grafo. Dizemos que o grafo  $G$  é um grafo de dependência para a família finita de eventos  $\mathcal{A}$  de  $\Omega$  se  $V = \mathcal{A}$  e se, para cada evento  $A \in \mathcal{A}$ , o evento  $A$  é mutuamente independente da  $\sigma$ -álgebra gerada pela coleção de eventos  $\mathcal{A} \setminus \Gamma^+(A)$ .*

**Exemplo 23** *Considere o conjunto de eventos  $(A, B, C, D, E)$  que forma a família de eventos  $\mathcal{A}$ . Um possível grafo de dependência  $G$  para esses eventos pode ser dado na figura abaixo:*

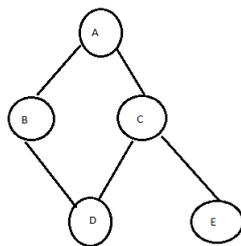


Figura 1.6: Grafo de dependência para os eventos  $A, B, C, D, E$ .

*Note que: o evento  $A$  depende dos eventos  $B$  e  $C$  e é mutuamente independente dos eventos  $D$  e  $E$ ; o evento  $B$  depende dos eventos  $A$  e  $D$  e é mutuamente independente dos eventos  $C$  e  $E$ ; o evento  $C$  depende dos eventos  $A, D$  e  $E$  e é mutuamente independente do evento  $B$ ; o evento  $D$  depende dos eventos  $B$  e  $C$  e é mutuamente independente dos eventos  $A$  e  $E$  e, finalmente, o evento  $E$  depende unicamente do evento  $C$  e é mutuamente independente dos eventos  $A, B$  e  $D$ .*

Dado  $A \in \mathcal{A}$ , denotaremos por  $P(A)$  como sendo a probabilidade do evento  $A$  ocorrer. Diante disso, vamos ao enunciado do lema local de Lovász:

**Teorema 24** (*Lema Local de Lovász - LLL*) *Seja  $G$  um grafo de dependência para uma família de eventos  $\mathcal{A}$ , e suponha que exista uma função de valor real  $x : \mathcal{A} \rightarrow (0, 1)$  tal que,  $\forall A \in \mathcal{A}$ :*

$$P(A) \leq x(A) \prod_{B \in \Gamma(A)} (1 - x(B))$$

Então,

$$P\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}\right) \geq \prod_{A \in \mathcal{A}} (1 - x(A))$$

Em particular, essa probabilidade é estritamente positiva.

**Prova.** Seja o conjunto de vértices  $V = \{1, \dots, n\}$ . Vamos primeiro provar, por indução, que para qualquer  $S \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $|S| = s < n$  e qualquer  $i \notin S$

$$P(A_i | \bigcap_{j \in S} \bar{A}_j) \leq x(i) \quad (1.1)$$

Para  $s = 0$  temos que (1.1) é satisfeita. Assumindo que valha para todos os  $s' < s$ , vamos provar para  $S$ . Ponha  $S_1 = \{j \in S; (i, j) \in E\}$  e  $S_2 = S \setminus S_1$ . Então

$$P(A_i | \bigcap_{j \in S} \bar{A}_j) = \frac{P(A_i \cap (\bigcap_{j \in S_1} \bar{A}_j) | \bigcap_{l \in S_2} \bar{A}_l)}{P(\bigcap_{j \in S_1} \bar{A}_j | \bigcap_{l \in S_2} \bar{A}_l)} \quad (1.2)$$

Para ligar o numerador, observe que como cada  $A_i$  é mutuamente independente dos eventos  $A_l : l \in S_2$  temos

$$P(A_i \cap (\bigcap_{j \in S_1} \bar{A}_j) | \bigcap_{l \in S_2} \bar{A}_l) \leq P(A_i | \bigcap_{l \in S_2} \bar{A}_l) = P(A_i) \leq x_i \prod_{(i,j) \in E} (1 - x(j)) \quad (1.3)$$

O denominador, por outro lado, pode ser limitado pela hipótese de indução. De fato, suponha  $S_1 = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ . Se  $r = 0$  então o denominador é 1 e (1.1) segue.

De outra forma:

$$P(\bar{A}_{j_1} \cap \bar{A}_{j_2} \cap \dots \cap \bar{A}_{j_r} | \bigcap_{l \in S_2} \bar{A}_l)$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - P(A_{j_1} | \bigcap_{l \in S_2} \bar{A}_l)) \cdot (1 - P(A_{j_2} | \bar{A}_{j_1} \cap \bigcap_{l \in S_2} \bar{A}_l)) \cdot \dots \cdot (1 - P(A_{j_r} | \bar{A}_{j_1} \cap \dots \cap \bar{A}_{j_{r-1}} \cap \bigcap_{l \in S_2} \bar{A}_l)) \\
&\geq (1 - x_{j_1}) \cdot (1 - x_{j_2}) \cdot \dots \cdot (1 - x_{j_r}) \geq \prod_{(i,j) \in E} (1 - x_j) \quad (1.4)
\end{aligned}$$

Substituindo (1.3) e (1.4) em (1.2) concluímos que  $P(A_i | \bigcap_{j \in S} \bar{A}_j) \geq x_i$ , completando a prova da indução.

Diante disso, segue que:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}\right) = (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2 | \bar{A}_1)) \cdot \dots \cdot (1 - P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{A}_i)) \geq \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$$

como queríamos. □

Observe que os eventos da família  $\mathcal{A}$  são os eventos considerados “ruins” e o evento  $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$  (ou seja, o evento tal que nenhum dos eventos ruins aconteça) é o evento considerado “bom”.

Vamos agora reformular o LLL realizando uma mudança de variável dos números reais  $x(A)$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , compreendidos no intervalo  $(0, 1)$  mencionado acima. Esta reformulação do LLL será útil a seguir para que as contas possam ficar mais claras.

Definimos a seguinte função  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow (0, \infty) : A \mapsto \mu(A)$  dependente de  $x(A)$  da seguinte maneira:

$$\mu(A) = \frac{x(A)}{1 - x(A)}, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Daí,

$$x(A) = \frac{\mu(A)}{1 + \mu(A)}, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Feito isso, temos a seguinte reformulação do LLL:

**Teorema 25** (*Lema Local de Lovász - LLL, versão alternativa*) *Seja  $G$  um grafo de dependência para uma família de eventos  $\mathcal{A}$ , e suponha que exista uma função de valor real  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow (0, +\infty)$  tal que  $\forall A \in \mathcal{A}$ :*

$$P(A) \leq \frac{\mu(A)}{\sum_{I \subset \Gamma^+(A)} \prod_{B \in I} \mu(B)} \quad (1.5)$$

Então,

$$P\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}\right) \geq \frac{1}{\sum_{I \subset \Gamma^+(A)} \prod_{A \in \mathcal{A}} \mu(A)}$$

Em particular, essa probabilidade é estritamente positiva.

De fato, o denominador de (1.5) foi reformulado devido a nossa mudança de variável. Assim, como  $x(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(A) + 1}$  e da hipótese original do LLL, temos que:

$$\begin{aligned} P(A) &\leq x(A) \prod_{B \in \Gamma(A)} (1 - x(B)) = \frac{\mu(A)}{1 + \mu(A)} \prod_{B \in \Gamma(A)} \left(1 - \frac{\mu(B)}{1 + \mu(B)}\right) \\ &= \frac{\mu(A)}{1 + \mu(A)} \prod_{B \in \Gamma(A)} \left(\frac{1}{1 + \mu(B)}\right) = \frac{\mu(A)}{\prod_{B \in \Gamma^+(A)} (1 + \mu(B))} = \frac{\mu(A)}{\sum_{I \subset \Gamma^+(A)} \prod_{B \in I} \mu(B)} \end{aligned}$$

Essa formulação alternativa do LLL foi originariamente proposta em [4] e, desde então, na literatura recente em torno do LLL, vários autores utilizam a variável  $\mu(A)$  descrita acima ao invés de  $x(A)$ . A partir dessa formulação alternativa do LLL (i.e, Teorema 25), Bissacot et.al [4] perceberam uma condição que melhorava a hipótese do lema. Como veremos em detalhes mais adiante, essa condição é construída utilizando exclusivamente os conjuntos independentes de eventos  $I \subset \Gamma^+(A)$ , para cada  $A \in \mathcal{A}$ .

Essa melhora originou-se de um trabalho de Scott e Sokal [13] que apontaram uma conexão entre o LLL e a expansão em cluster do gás de polímeros abstrato e isso fez com que vários pesquisadores da área da mecânica estatística fossem atraídos para estudos nesse meio. De maneira mais geral, Scott e Sokal mostraram que o LLL pode ser visto como sendo uma reformulação do critério de Dobrushin para a convergência da expansão em cluster do gás de rede *hard-core* num grafo  $G$ .

Diante desse feito, após dois anos do trabalho de Scott e Sokal, Fernández e Procacci [14] conseguiram uma melhora minuciosa do critério de Dobrushin através dos métodos da expansão em cluster do gás de polímeros abstrato. Só então, a partir daí, que tal resultado foi utilizado por Bissacot et.al [4] para, assim, obter uma nova melhora do LLL. Vejamos o feito por Bissacot et.al:

**Teorema 26** (Bissacot, et al.) *Considere a família finita  $\mathcal{A}$  de eventos em algum espaço de probabilidade  $\Omega$  e seja  $G$  um grafo de dependência da família  $\mathcal{A}$ . Se existem números reais  $0 < \mu(A) < \infty$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , tal que*

$$P(A) \leq \frac{\mu(A)}{\sum_{\substack{I \subset \Gamma^+(A) \\ I \text{ indep}}} \prod_{B \in I} \mu(B)}, \quad (1.6)$$

então

$$P\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}\right) > 0$$

Observe ainda que a condição (1.6) desse teorema é mais fraca do que a condição (1.5) do LLL pois o denominador do lado esquerdo da (1.6) é menor do que o denominador do lado esquerdo da (1.5). De fato, no denominador da (1.6) soma-se somente sobre os subconjuntos independentes de  $\Gamma^+(A)$  enquanto no denominador da (1.5) soma-se sobre todos os subconjuntos, independentes ou não,  $I$  de  $\Gamma^+(A)$ .

Em geral, na maioria dos casos, é difícil escrever explicitamente a soma do denominador de (1.6), porém, quando a vizinhança  $\Gamma^+(A)$  for a união de  $k$  cliques  $c_1, \dots, c_k$ , então o denominador de (1.6) pode ser cotado da seguinte maneira (considerando na pior das hipóteses que as cliques sejam todas independentes):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{I \subset \Gamma^+(A) \\ I \text{ indep}}} \prod_{B \in I} \mu(B) &\leq 1 + \sum_{s=1}^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq k} \sum_{x_1 \in c_{i_1}} \dots \sum_{x_s \in c_{i_s}} \mu_{x_1} \dots \mu_{x_s} \\ &= 1 + \prod_{i=1}^k \left[ \sum_{B \in c_i} \mu(B) \right] \leq \prod_{i=1}^k \left[ 1 + \sum_{B \in c_i} \mu(B) \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

e diante disso, temos:

**Teorema 27** *Com a mesma hipótese do teorema 24, suponhamos que a vizinhança  $\Gamma^+(A)$  em  $G$  seja a união de  $k$  cliques  $c_1, \dots, c_k$ . Se, para cada  $A \in \mathcal{A}$ ,*

$$P(A) \leq \frac{\mu(A)}{\prod_{i=1}^k \left[ 1 + \sum_{B \in c_i} \mu(B) \right]}$$

então,

$$P\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}\right) > 0$$

Em relação aos teoremas introduzidos aqui, podemos notar que o Teorema 27 é mais fraco do que o Teorema 26 porém é, em geral, mais forte do que o Teorema 25 e muito mais fácil de ser implementado do que o Teorema 26. Destaca-se através do Teorema 27 melhores estimativas em relação a latin transversal - que é um conjunto de entradas que inclui exatamente uma entrada de cada linha e coluna de uma matriz quadrada - e, sempre via Teorema 27, obteve-se em [11] melhoras para vários índices cromáticos de grafos.

A variante descrita no Teorema 26, na sua versão algorítmica, será a que utilizaremos nos próximos capítulos.

Apesar do LLL nos fornecer que em algum espaço de probabilidade a probabilidade da ocorrência do evento “bom” é positiva, ele possui um aspecto intrinsecamente não construtivo.

O LLL é não-constructivo no sentido dele fornecer a garantia de existência do que chamamos de evento “bom”, decorrente do fato dele ter probabilidade estritamente positiva de ocorrer, porém não diz como encontrá-lo. Em outras palavras, o LLL bem como sua versão melhorada (Teorema 26), não proporcionam nenhum algoritmo capaz de encontrar uma configuração no espaço de probabilidade que realiza a ocorrência de “bons” eventos. É possível porém, como veremos logo mais, dar uma versão construtiva do lema restringindo oportunamente o espaço de probabilidade.

No âmbito dessa problemática a respeito do LLL, József Beck [9] conseguiu demonstrar uma versão algorítmica do LLL para um caso específico. Sua análise foi em torno de hipergrafos - grafos da forma  $H = (V, E)$  definidos pelo par de conjuntos  $V$  e  $E$  onde  $V$  é um conjunto não vazio e  $E$  é uma família de partes não vazias de  $V$  - por meio de 2-coloração, ou seja, quando podemos colorir os vértices de  $H$  com 2 cores de tal maneira que nenhuma das arestas seja monocromática. Com isso, ele mostra que, dado um hipergrafo tal que cada aresta tem pelo menos  $k$  vértices e intercepta no máximo  $2^{k/48}$  outras arestas, existe um algoritmo que encontra, em tempo polinomial no número de arestas, uma configuração no qual os vértices estão 2-coloridos e sem arestas monocromáticas.

Em contrapartida, a versão original não construtiva do lema aplicada ao mesmo problema permite que toda aresta compartilhe vértices com no máximo  $2^{k-1}/e - 1$  outras arestas e isso é suficiente para garantir a existência de uma tal coloração.

Outros autores contribuíram bastante nesse estudo de versões algorítmicas/construtivas do lema local. Veja, por exemplo, [8] e [10],

As várias tentativas de encontrar uma versão algorítmica do LLL culminaram com o trabalho magnífico de Moser e Tardos [1] onde foi apresentada uma versão algorítmica do LLL, obtida via uma oportuna restrição dos espaços de probabilidade, nos quais os eventos ruins ocorrem e que, no entanto, abrange praticamente todas aplicações conhecidas do LLL. Sendo assim, no teorema de Moser e Tardos temos de alguma forma mais um melhoramento no sentido deles terem fornecido uma versão algorítmica do lema, tendo em destaque que a condição utilizada por eles é a mesma presente no Teorema 24 original de Erdős e Lovász. Porém, logo depois do artigo [4], Wesley Pegden [3] provou que o Teorema 26 também admite uma versão algorítmica completamente idêntica à apresentada por Moser e Tardos.

De maneira geral, o presente trabalho visa apresentar o teorema de Moser e Tardos juntamente com o trabalho de Wesley Pegden [3], mesclando a condição vista em (1.7) junto com a conclusão presente no teorema de Moser e Tardos.

# Capítulo 2

## O Algoritmo: Teorema de Moser e Tardos e Teorema de Pedgen

### 2.1 A versão algorítmica do lema local

Para iniciarmos o estudo feito por Moser e Tardos, considere uma coleção finita  $\Psi$  de variáveis aleatórias mutuamente independentes e seja  $\Omega_\Psi$  o espaço de probabilidade gerado por essas variáveis. Seja agora  $\mathcal{A}$  uma família finita de eventos em  $\Omega_\Psi$  de tal maneira que cada evento  $A \in \mathcal{A}$  tem probabilidade  $P(A)$  de ocorrer e depende a princípio de todas as variáveis em  $\Psi$ . Moser e Tardos fizeram a suposição crítica de que cada  $A \in \mathcal{A}$  depende, na verdade, apenas de algum subconjunto das variáveis aleatórias da coleção  $\Psi$  e eles denotaram  $vbl(A)$  o único subconjunto minimal  $S \in \Psi$  que determina  $A$ . Em outras palavras, para decidir se o evento  $A$  ocorre ou não, é suficiente olhar os valores das variáveis em  $vbl(A)$ .

**Definição 28** *Seja  $A \in \mathcal{A}$  um evento em  $\Omega_\Psi$ . Logo, existe um único subconjunto minimal  $S \in \Psi$  que determina  $A$ . Denotaremos esse subconjunto de variáveis por  $vbl(A)$ .*

Em particular, o evento  $A$  é independente da  $\sigma$ -álgebra gerada pelas variáveis  $\Psi \setminus vbl(A)$ . Dessa maneira, quaisquer dois eventos  $A$  e  $A'$  tais que  $vbl(A) \cap vbl(A') = \emptyset$  são necessariamente eventos independentes. Isto quer dizer que a família  $\mathcal{A}$  possui um grafo de dependência natural definido da seguinte maneira:

**Definição 29** *Seja  $\mathcal{A}$  uma família finita de eventos em  $\Omega_\Psi$ . Chamamos **grafo de dependência** para  $\mathcal{A}$  o grafo  $\mathcal{G}_\mathcal{A}$  com conjunto de vértices em  $\mathcal{A}$  onde dois eventos (vértices) distintos  $A, B \in \mathcal{A}$  estão conectados por uma aresta se e somente se  $vbl(A) \cap vbl(B) \neq \emptyset$ .*

Observe que eventos em  $\mathcal{A}$  são dependentes quando compartilham pelo menos uma mesma variável.

Neste contexto, tendo em vista o objetivo de evidenciar uma configuração das variáveis  $\Psi$  tais que os eventos “ruins” que constituem a família  $\mathcal{A}$  não ocorram, isto é, que os eventos “bons” ocorram, Moser e Tardos definiram o seguinte algoritmo:

### Algoritmo MT:

- **Passo 0:** Consiste em sortear todas as variáveis em  $\Psi$ .
- **Passo i:** Para  $i \geq 1$ , o passo  $i$  do algoritmo consiste em verificar se na “avaliação” algum evento em  $\mathcal{A}$  ocorre. Se sim, escolhemos arbitrariamente um evento  $A \in \mathcal{A}$  que ocorre e fazemos outra amostra aleatória das variáveis em  $vbl(A)$  das quais o evento  $A$  depende, cada uma independentemente e de acordo com sua distribuição sem alterar os valores das variáveis em  $\Psi \setminus vbl(A)$ .

Chamamos este processo de *reamostragem* do evento  $A$ . Continuamos a reamostragem dos eventos que ocorrem até que tais eventos não existam mais.

Vamos provar que esse algoritmo acaba rapidamente, isto é, que ele atinge rapidamente um valor das variáveis que faz com que nenhum dos eventos em  $\mathcal{A}$  ocorram, sendo o tempo esperado de término do algoritmo proporcional ao número de eventos que constituem a família  $\mathcal{A}$ . Nossa análise será baseada em termos do número esperado de vezes em que cada evento é reamostrado pelo algoritmo.

Notemos ainda que cada evento reamostrado pelo algoritmo é um dos eventos “ruins” que queremos evitar pelo lema.

**Teorema 30** (Moser e Tardos) *Seja  $\Psi$  um conjunto finito de variáveis aleatórias mutuamente independentes que geram o espaço de probabilidade  $\Omega_\Psi$ , e seja  $\mathcal{A}$  uma família finita de eventos determinados por essas variáveis. Se existe uma atribuição de valor real  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow (0, \infty)$  tal que*

$$P(A) \leq \frac{\mu(A)}{\sum_{I \subset \Gamma^+(A)} \prod_{B \in I} \mu(B)}$$

*então existem valores para as variáveis em  $\Psi$  tais que nenhum dos eventos em  $\mathcal{A}$  ocorra. Além disso, o algoritmo MT reamostra cada evento  $A \in \mathcal{A}$  num valor esperado  $\mu(A)$  vezes antes de encontrar tal avaliação. Assim, o valor esperado do número total de passos reamostrados para que o algoritmo MT termine será  $\sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A)$ .*

## 2.2 Processo de Registro e Árvores de Testemunhas

Para demonstrar o Teorema 30, precisaremos de algumas ferramentas a respeito do funcionamento do algoritmo.

Como vimos, a análise do algoritmo de Moser e Tardos é baseada na reamostragem dos eventos em cada passo, ou seja, em cada passo o algoritmo reamostra algum evento da família  $\mathcal{A}$  que ocorreu. Para isso, definiremos um *registro de execução* ou apenas *registro* como sendo uma função  $C : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$  que funciona como uma lista de como estes eventos foram selecionados para a reamostragem em cada passo  $t \in \mathbb{N}$ . Moser e Tardos chamaram essa função que acabamos de definir de *Log* do algoritmo. Em particular, a lista produzida por  $C$  é uma variável aleatória determinada pelas escolhas (aleatórias) que o algoritmo realiza no processo.

Note que se o algoritmo termina (para),  $C$  é parcial e definida apenas até o número total das etapas realizadas.

Consideremos a seguinte definição:

**Definição 31** *Uma árvore enraizada  $T$  é um grafo onde um vértice foi escolhido e designado como raiz.*

Seja  $V(T)$  o conjunto de vértices da árvore enraizada  $T$ . A distância da raiz de  $T$  até um vértice  $v \in V(T)$  é definida pelo comprimento do único caminho simples que liga a raiz a esse vértice e será denotada por  $d(v)$ .

Dados dois vértices  $u, v \in V(T)$  dizemos que  $v$  é descendente de  $u$  ou  $u$  ancestral de  $v$  se existe um caminho que liga  $v$  à raiz e que passa por  $u$ .

**Definição 32** *Dados  $u$  e  $v$  em  $V(T)$  tais que  $v$  é descendente de  $u$  e  $d(v)-d(u)=1$ , temos que  $v$  é dito filho de  $u$  e  $u$  é dito pai de  $v$ .*

Note que se  $v$  é descendente ou filho de  $u$ , então  $d(u) < d(v)$ . Perceba ainda que todo vértice diferente da raiz de  $T$  tem apenas um pai e a raiz não possui ancestrais.

Em seu artigo, Moser e Tardos definiram o que se entende por *árvore de testemunha*, denotada por  $\tau$ , como sendo o par  $(T, \sigma_T)$  onde  $T$  é a árvore enraizada definida anteriormente e  $\sigma_T$  é uma função,  $\sigma_T : V(T) \mapsto \mathcal{A}$ , de tal maneira que os filhos de um vértice  $u \in V(T)$  recebem rotulações (marcações) na vizinhança inclusiva de  $\sigma_T(u)$ , ou seja,  $\Gamma^+(\sigma_T(u))$ .

**Definição 33** *Uma árvore de testemunha  $\tau = (T, \sigma_T)$  é chamada de própria se filhos distintos de um mesmo vértice sempre recebem rotulações, por  $\sigma_T$ , distintas.*

Consideraremos aqui o conjunto dos vértices de  $T$ ,  $V(T)$ , como sendo também o conjunto dos vértices de  $\tau$ , ou seja,  $V(\tau) := V(T)$ . Para simplificar a notação, usaremos  $[v]$  ao invés de  $\sigma_T(v)$ .

Tendo em vista estas definições e observações, podemos prosseguir com o funcionamento do algoritmo. A cada passo  $t \in \mathbb{N}$  do algoritmo, fixado o registro  $C$ , vamos associar uma árvore de testemunha  $\tau_C(t)$  com vértices em  $\mathcal{A}$  e raiz rotulada por  $C(t)$ .

Definimos, primeiramente,  $\tau_C^{(t)}(t)$  como sendo um vértice de raiz isolado, rotulado pelo registro, no passo  $t$ . Vamos agora construir, através do registro  $C$ , uma sequência de árvores de testemunha  $\tau_C^{(t)}(t), \tau_C^{(t-1)}(t), \dots, \tau_C^{(1)}(t)$  e finalmente vamos definir  $\tau_C(t) = \tau_C^{(1)}(t)$ .

Para cada  $i \in \{1, \dots, t-1\}$  vamos obter  $\tau_C^{(i)}(t)$  a partir de  $\tau_C^{(i+1)}(t)$  com base na adição de um novo vértice a  $\tau_C^{(i+1)}(t)$  com rótulo  $C(i)$  da seguinte maneira:

**(1º)** se existem vértices  $v \in V(\tau)$  em  $\tau_C^{(i+1)}(t)$  tais que  $C(i) \in \Gamma^+([v])$ , escolhemos entre todos esses vértices o que possui distância máxima da raiz, digamos  $w$ , e anexamos um novo vértice  $u$  a  $w$  rotulado por  $C(i)$ , obtendo com isso a árvore  $\tau_C^{(i)}(t) := \tau_C^{(i+1)}(t)$ .

Além do mais, se existir mais de um vértice em  $\tau_C^{(i+1)}(t)$  que tenha a distância máxima da raiz cuja vizinhança contém  $C(i)$ , escolheremos arbitrariamente um deles, digamos  $w$ , e a ele anexamos o novo vértice  $u$  sendo, com isso,  $u$  filho de  $w$ .

(2°) se não existir vértice  $v \in V(\tau)$  em  $\tau_C^{i+1}(t)$  tal que  $C(i) \in \Gamma^+([v])$ , então ignoramos o passo no tempo  $i$ , passamos para o próximo vértice e definimos simplesmente, nesse tempo,  $\tau_C^{(i)}(t) := \tau_C^{(i+1)}(t)$ .

**Exemplo 34** Consideremos um grafo de dependência simples dos eventos  $P, Q, R, S$  da seguinte forma:

$$P \text{ --- } Q \text{ --- } R \text{ --- } S$$

Note que  $P$  e  $Q$ ,  $Q$  e  $R$ ,  $R$  e  $S$  são eventos dependentes um do outro. Suponhamos ainda que um possível registro  $C$  seja a lista abaixo:

$$C (R, S, R, P, S, Q, R, S, P, R, \dots).$$

Uma possível construção da árvore de testemunha  $\tau_C(10)$  é feita desse modo: A raiz dessa árvore tem rótulo  $R$ , pois ele é o décimo elemento do registro. Pelo processo de construção de  $\tau_C^{(i)}(t)$  que descrevemos acima e analisando a ordem decrescente no registro, vemos que a raiz  $R$  estará conectada com  $S$  que por sua vez se conectará novamente com  $R$  que se conectará com  $Q$  e  $S$ , onde  $Q$  se conectará somente com  $P$  e  $S$  com  $R$  que se conectará com  $S$  e por fim se conectará com  $R$  (veja figura 2.1).

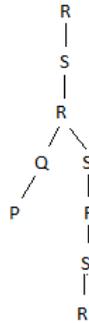


Figura 2.1: Representação da árvore de testemunha  $\tau_C(10)$

Dizemos que a árvore de testemunha  $\tau$  ocorre no registro  $C$  se existe  $t \in \mathbb{N}$  tal que  $\tau_C(t) = \tau$ .

A demonstração do Teorema 30 tem como base o seguinte lema:

**Lema 35** Seja  $\tau = (T, \sigma_T)$  árvore de testemunha e considere a função registro  $C : \mathbb{N} \mapsto \mathcal{A}$  produzido pelo algoritmo.

- (i) Se  $\tau$  ocorre em  $C$ , então ela é uma árvore de testemunha própria;
- (ii) A probabilidade de que  $\tau$  ocorra em  $C$  é no máximo  $\prod_{v \in V(\tau)} P([v])$ .

**Prova.**

- (i) Sejam  $u$  e  $v$  vértices de  $\tau_C(t)$  que estão à mesma distância da raiz, ou seja,  $d(v) = d(u)$ . Na construção da árvore  $\tau_C(t)$  descrita acima, seja  $i \in \{1, \dots, t-1\}$  o passo ao qual foi acrescentado o vértice  $u$  e seja  $j \in \{1, \dots, t-1\}$  o passo ao qual foi acrescentado o vértice  $v$ . Das duas uma: ou  $i > j$  (i.e,  $u$  foi acrescentado *antes* de  $v$ ) ou  $i < j$  (i.e,  $u$  foi acrescentado *depois* de  $v$ ). Sem perda de generalidade, suponhamos que  $i > j$ . Assim sendo,  $[v]$  tem que ser necessariamente independente de  $[u]$  pois, caso contrário, seria anexado a  $u$  (ou a algum vértice de  $\tau_C(t)$  com distância da raiz maior ou igual a  $d(u)$ ) e portanto  $d(v) \geq d(u) + 1$ , i.e,  $v$  não teria a mesma distância até a raiz de  $u$ , contrariamente à hipótese. Logo, pode-se concluir que conjunto dos (rótulos dos) vértices de  $\tau_C(t)$  que estão à mesma distância da raiz é um conjunto independente em  $G$ . Em particular, os rótulos dos filhos de um mesmo pai em  $\tau_C(t)$  formam um conjunto independente em  $G$  e, portanto, são todos distintos, isto é,  $\tau_C(t)$  é árvore de testemunha própria.
- (ii) Definimos o seguinte procedimento, chamado por Moser e Tardos de  $\tau$ -check: em ordem decrescente da distância à raiz, visite todos os vértices de  $\tau$  e para um vértice  $v$  sorteie uma configuração das variáveis em  $vbl([v])$ , de acordo com sua distribuição e independente de observações anteriores e verifique se a configuração, no caso, resulta na ocorrência de  $[v]$ . Feito isso, se todos os eventos ocorreram quando foram testados, dizemos que  $\tau$ -check passa.

Claramente, como para cada evento rotulado de  $\tau_C(t)$  toma-se uma configuração de forma independente dos demais, temos que a probabilidade do  $\tau$ -check dar certo em um vértice específico  $v \in V(\tau)$  é simplesmente  $P([v])$  e a probabilidade do  $\tau$ -check passar após ter visitado todos os vértices de  $\tau$  é exatamente

$$\prod_{v \in V(\tau)} P([v]).$$

A demonstração da parte (ii) do lema seguirá do fato de que sempre quando  $\tau$  ocorre no registro e quando fizermos o processo do  $\tau$ -check na mesma fonte aleatória, ele passa. Assim, a probabilidade de  $\tau$  ocorrer é menor ou igual que a probabilidade do  $\tau$ -check passar.

Vamos assumir agora que, para cada variável  $\psi \in \Psi$ , se tenha a disposição uma sequência infinita de amostras aleatórias independentes  $\psi^0, \psi^1, \dots$  na qual sempre que o algoritmo precisar de um novo valor observado de  $\psi$ , ele pegará o próximo valor não utilizado desta sequência.

Fixamos um vértice  $v \in V(\tau)$  em  $\tau$  e para cada variável  $\psi \in vbl([v])$ , seja  $S_v(\psi)$  o conjunto de todos os vértices  $w \in V(\tau)$  tais que  $d(w) > d(v)$  e  $\psi \in vbl([w])$ .

Como vimos, o  $\tau$ -check visita os vértices em ordem decrescente de distância à raiz e, por (i), eventos à mesma distância da raiz são independentes. Assim, antes de testar  $[v]$  o  $\tau$ -check já testou todos os eventos  $[w]$  da fonte aleatória dada pela sequência  $\psi^0, \psi^1, \dots$ . Daí, quando o  $\tau$ -check testa  $v$ , a fonte aleatória busca a variável  $\psi$  na posição  $\psi^{S_v(\psi)}$  pois ela está presente na sequência infinita de variáveis informada

acima, sendo que cada valor de  $\psi$  já foi utilizado pela fonte dos rótulos de  $[w] \in S_v(\psi)$  e não pode ser utilizado novamente. Assim, antes do  $\tau$ -check considerar o vértice  $v$  ele tinha amostrado  $\psi$  exatamente quando ele estava considerando os vértices em  $S_v(\psi)$  na mesma fonte aleatória.

Vamos supor agora que  $\tau$  ocorra no registro  $C$ , ou seja,  $\tau = (T, \sigma_T) = \tau_C(t)$ , para algum  $t \in \mathbb{N}$ . Para cada  $v \in V(\tau)$ , seja  $q(v)$  o passo em que o algoritmo reamostra  $[v]$ . Observe que se  $w \in S_v(\psi)$  então, necessariamente,  $q(w) < q(v)$ . Quando o algoritmo reamostra um evento  $[v]$  de  $\tau_C(t)$  no passo  $q(v)$  é porque esse evento ocorreu antes desta reamostragem. Afirmamos então que o valor de  $\psi \in vbl([v])$ , imediatamente antes do algoritmo reamostrar  $[v]$ , é exatamente  $\psi|_{S_v(\psi)}$ . De fato,  $\psi$  foi reamostrada ao passo 0 do algoritmo e depois foi reamostrada em todos os passos  $q(w) < q(v)$  para  $w \in S_v(\psi)$ .

Portanto, como o  $\tau$ -check tem o mesmo valor para as variáveis em  $vbl([v])$  quando o vértice rotulado  $[v]$  é considerado, assumindo que  $\tau$  ocorra no registro  $C$ , o próprio  $\tau$ -check também conclui que  $[v]$  ocorreu. Logo, a probabilidade de  $\tau$  ocorrer no registro é no máximo o produto de  $P([v])$ . Sendo assim, tal probabilidade está contida na probabilidade do  $\tau$ -check passar.

Em outras palavras,

$$P(\tau \text{ ocorrer no registro } C) \leq \prod_{v \in V(\tau)} P([v]),$$

como queríamos. □

Considerando nosso registro  $C$ , definimos  $N_A$  como sendo a variável aleatória que conta quantas vezes o evento  $A \in \mathcal{A}$  foi reamostrado durante o algoritmo, isto é, quando  $C(t) = A$ , para  $t \in \mathbb{N}$  (passo do algoritmo).

**Definição 36** *Definimos por  $T_A$  o conjunto de todas as árvores de testemunhas próprias, tendo a raiz rotulada pelo evento  $A \in \mathcal{A}$ .*

Sejam  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$  os passos em que o evento  $A$  é reamostrado pelo algoritmo, i.e, para cada  $i = 1, 2, \dots$  temos que  $C(t_i) = A$ . Como demonstramos pelo item (i) do lema anterior, se  $\tau_C(t_i)$  ocorre em  $C$  então ela é própria e logo pertence a  $T_A$ , pra todo  $i$ . Ainda, podemos notar que para cada  $i$ , a árvore  $\tau_C(t_i)$  contém exatamente  $i$  vértices rotulados por  $A$  de maneira que para cada  $i \neq j$ ,  $\tau_C(t_i) \neq \tau_C(t_j)$ . Com isso, o algoritmo, fixado  $C$ , sempre produz árvores de testemunhas próprias com mesma raiz  $A$  distintas.

Concluimos com isso que, além de  $N_A$  contar o número de vezes que o evento foi reamostrado, ele também coincide com o número de árvores de testemunhas próprias distintas com raiz rotulada por  $A$  que ocorrem em  $C$ , isto é, representando pela função característica a ocorrência de árvores de testemunhas  $\tau$  próprias e distintas em  $C$  temos que:

$$N_A = \sum_{\tau \in T_A} 1_{(\tau \text{ ocorrer em } C)}$$

Na próxima seção, iremos cotar o valor esperado de  $N_A$  utilizando um processo aleatório que produz uma árvore de testemunha própria com sua raiz rotulada por  $A \in \mathcal{A}$ . Isso nos dará os instrumentos para demonstrarmos, enfim, o Teorema 30.

## 2.3 Produção aleatória de Árvores de Testemunhas

Começamos esta seção explicando o processo aleatório de geração de árvores de testemunhas próprias com raiz rotulada por  $A \in \mathcal{A}$ . Este é um processo de ramificação do tipo Galton-Watson.

Seja  $A \in \mathcal{A}$  um evento fixo. Vamos gerar uma árvore de testemunha própria tendo sua raiz rotulada por  $A$  da seguinte maneira: na primeira rodada produzimos a raiz rotulada por  $A$  e, em cada rodada seguinte, consideramos cada vértice  $v$  produzido na rodada anterior independentemente e, novamente independentemente, para cada evento  $B \in \Gamma^+([v])$  no grafo de dependência, anexamos a  $v$  um filho com rótulo  $B$  com probabilidade  $x(B) = \mu(B)/(1 + \mu(B))$  ou pulamos tal rótulo com probabilidade  $1 - x(B)$ . Novamente, todas essas escolhas são feitas independentemente.

O processo continua até que ele morra naturalmente devido ao fato de nenhum outro vértice nascer em alguma rodada. Observe que esse processo de Galton-Watson gera automaticamente uma árvore de testemunha própria pois, por construção, em cada vértice os filhos têm necessariamente rótulos distintos. De fato, cada  $B \in \Gamma^+([v])$  ou está entre os filhos de  $v$  ou não está.

Vamos calcular a probabilidade do processo de Galton-Watson produzir exatamente a árvore  $\tau \in T_A$ . Dado  $B \in \mathcal{A}$ , seja

$$x'(B) = x(B) \prod_{C \in \Gamma(B)} (1 - x(C)) = \frac{\mu(B)}{\prod_{C \in \Gamma^+(B)} (1 + \mu(C))} = \frac{\mu(B)}{\sum_{I \subset \Gamma^+(B)} \prod_{C \in I} \mu(C)}$$

Temos então o seguinte lema:

**Lema 37** *Seja  $\tau$  uma árvore de testemunha própria com vértice enraizado rotulado por  $A \in \mathcal{A}$ . A probabilidade  $P_\tau$  do processo de Galton-Watson, descrito acima, produzir  $\tau$  é*

$$P_\tau = \frac{1 - x(A)}{x(A)} \prod_{v \in V(\tau)} x'([v])$$

**Prova.** Para um vértice  $v \in V(\tau)$ , seja  $F_\tau(v)$  o conjunto dos vértices de  $\tau$  que são filhos de  $v$  e seja  $[F_\tau(v)]$  o conjunto de seus rótulos. Denotamos por  $W_v^\tau = \Gamma^+([v]) \setminus [F_\tau(v)]$ , i.e,  $W_v^\tau$  é o subconjunto das vizinhanças inclusivas de  $[v]$  formados pelos  $B \in \Gamma^+([v])$  tais que  $B \neq [u]$  para todo  $u \in F_\tau(v)$ , ou seja, o conjunto dos possíveis "filhos" na vizinhança inclusiva de  $v$  que não recebem rotulação com probabilidade  $x(B)$ ,  $B \in \Gamma^+([v])$ , de modo geral, os não filhos de  $v$ .

Então, podemos ver que a probabilidade do processo de Galton-Watson produzir exatamente  $\tau$  é

$$P_\tau = \frac{1}{x(A)} \prod_{v \in V(\tau)} \left( x([v]) \prod_{u \in W_v^\tau} (1 - x([u])) \right),$$

onde a presença do fator  $\frac{1}{x(A)}$  é devida ao fato da raiz sempre nascer. Logo temos que:

$$\begin{aligned} P_\tau &= \frac{1}{x(A)} \prod_{v \in V(\tau)} \left( x([v]) \prod_{u \in W_v^\tau} (1 - x([u])) \right) \\ &= \frac{1}{x(A)} \left( \prod_{v \in V(\tau)} x([v]) \right) \left( \prod_{v \in V(\tau)} \prod_{u \in W_v^\tau} (1 - x([u])) \right) \\ &= \frac{1}{x(A)} \left( \prod_{v \in V(\tau)} x([v]) \right) \left( \prod_{v \in V(\tau)} \frac{\prod_{u \in \Gamma^+(v)} (1 - x([u]))}{\prod_{\substack{u \in \Gamma^+(v) \\ u \text{ filho de } v \text{ em } \tau}} (1 - x([u]))} \right) \\ &= \frac{1 - x(A)}{x(A)} \prod_{v \in V(\tau)} \left( \frac{x([v])}{1 - x([v])} \prod_{u \in \Gamma^+(v)} (1 - x([u])) \right) \\ &= \frac{1 - x(A)}{x(A)} \prod_{v \in V(\tau)} x([v]) \prod_{u \in \Gamma([v])} (1 - x([u])) \end{aligned}$$

Como  $x'([v]) = x([v]) \prod_{u \in \Gamma([v])} (1 - x([u]))$ , temos que:

$$P_\tau = \frac{1 - x(A)}{x(A)} \prod_{v \in V(\tau)} x'([v]),$$

como queríamos mostrar. □

Diante do que vimos até então, podemos concluir a demonstração do Teorema de Moser e Tardos.

Utilizando da esperança matemática da nossa variável  $N_A$ , temos que

$$\mathbb{E}(N_A) = \sum_{\tau \in T_A} P(\tau \text{ ocorrer em } C)$$

e, pelo Lema 35, obtemos a seguinte desigualdade

$$\mathbb{E}(N_A) = \sum_{\tau \in T_A} P(\tau \text{ ocorrer em } C) \leq \sum_{\tau \in T_A} \prod_{v \in V(\tau)} P([v])$$

Donde, pela hipótese do teorema de Moser e Tardos, obtemos a última desigualdade dada por

$$\mathbb{E}(N_A) = \sum_{\tau \in T_A} P(\tau \text{ ocorrer em } C) \leq \sum_{\tau \in T_A} \prod_{v \in V(\tau)} P([v]) \leq \sum_{\tau \in T_A} \prod_{v \in V(\tau)} x'([v]),$$

visto que  $x'([v]) = x([v]) \prod_{u \in \Gamma([v])} (1 - x(u)) = \frac{\mu([v])}{\sum_{I \subset \Gamma^+([v])} \prod_{C \in I} \mu(C)}$ . Logo,

$$\mathbb{E}(N_A) \leq \sum_{\tau \in T_A} \prod_{v \in V(\tau)} x'([v]) = \frac{x(A)}{1 - x(A)} \sum_{\tau \in T_A} P_\tau,$$

sendo que a igualdade decorre do Lema 37. Dado que  $\sum_{\tau \in T_A} P_\tau$  representa a probabilidade do processo de Galton-Watson gerar pelo menos uma árvore de testemunha própria e que essa probabilidade será de no máximo 1, obtemos

$$\frac{x(A)}{1 - x(A)} \sum_{\tau \in T_A} P_\tau \leq \frac{x(A)}{1 - x(A)}$$

Agora, pela mudança de variáveis  $x(A) = \frac{\mu(A)}{1 + \mu(A)}$  com  $\mu(A) \in (0, +\infty)$ , obtemos:

$$\mathbb{E}(N_A) \leq \frac{x(A)}{1 - x(A)} = \mu(A),$$

ou seja, na hipótese que para cada  $A \in \mathcal{A}$ ,  $P(A) \leq x'(A) = \mu(A) / [\sum_{B \in \Gamma^+(A)} \prod \mu(B)]$ , provamos que o algoritmo reamostra um evento  $A \in \mathcal{A}$  no máximo  $\mu(A)$  vezes em valor esperado e, portanto, o valor esperado do número total de eventos reamostrados será dado por

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A)$$

acabando, assim, com a demonstração do Teorema 30.

## 2.4 Uma Melhora do Teorema de Moser e Tardos: O Teorema de Pegden

Continuando nosso estudo em torno da versão algorítmica do lema local de Lovász, como dito precedentemente, no artigo [3] Pegden apresentou uma melhoria\extensão no argumento realizado em Moser e Tardos, mais especificamente na hipótese do Teorema 30 e na análise do processo de ramificação das árvores de testemunhas próprias.

De modo geral, tal melhoria se baseia na junção da hipótese feita no melhoramento do LLL descrito por [4] em seu teorema, juntamente com a conclusão obtida no Teorema 30.

Utilizando a hipótese do Teorema 26, vamos enunciar agora o teorema melhorado de Moser e Tardos da seguinte forma:

**Teorema 38** (Teorema de Pedgen) *Seja  $\Psi$  um conjunto finito de variáveis aleatórias mutuamente independentes num espaço de probabilidade, e seja  $\mathcal{A}$  um conjunto finito de eventos determinados por essas variáveis. Se existe uma atribuição de valor real  $\mu : \mathcal{A} \mapsto (0, \infty)$  tal que*

$$P(A) \leq \frac{\mu(A)}{\sum_{\substack{I \subset \Gamma^+(A) \\ I \text{ indep}}} \prod_{B \in I} \mu(B)}, \quad (2.1)$$

*então existem valores para as variáveis em  $\Psi$  tais que nenhum dos eventos em  $\mathcal{A}$  ocorre. Além disso, algoritmo MT reamostra um evento  $A \in \mathcal{A}$  no máximo  $\mu(A)$  vezes em valor esperado antes de encontrar tal avaliação. Assim, o valor esperado do número total de passos de algoritmo MT será no máximo  $\sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A)$ .*

Note que, como feito no capítulo 1, podemos escrever  $\mu(A) = \frac{x(A)}{1 - x(A)}$ , com  $0 < x(A) < 1$ .

A prova do Teorema 38 consiste em simplesmente refazer a primeira parte da demonstração do Teorema 30 com alguns detalhes modificados.

Lembremos que, como vimos na parte (i) do Lema 35, qualquer árvore de testemunha que ocorre no registro  $C$  do algoritmo tem a propriedade de que filhos de um mesmo vértice, além de terem rótulos distintos, possuem rótulos que são independentes no grafo de dependência  $\mathcal{G}_A$ .

**Definição 39** *Definimos uma árvore de testemunha fortemente própria,  $\tau_F$ , como sendo uma árvore de testemunha onde filhos de um mesmo vértice possuem rótulos que são independentes no grafo de dependência  $\mathcal{G}_A$ . Além disso, definiremos  $T_A^* \subset T_A$  como o conjunto de árvores de testemunhas fortemente próprias com raiz rotulada em  $A \in \mathcal{A}$ .*

Com essa definição e de maneira análoga vista nos Lemas 35 e 37, temos que

$$\mathbb{E}(N_A) = \sum_{\tau_F \in T_A^*} P(\tau_F \text{ ocorrer em } C) \leq \sum_{\tau_F \in T_A^*} \prod_{v \in V(\tau)} P([v])$$

Feito isso, vamos entender como funciona o processo de ramificação melhorado por [3]:

**Processo de Ramificação melhorado:** Dado um número real  $0 < \mu(A) < \infty$ , seja  $x(A) = \frac{\mu(A)}{1 + \mu(A)}$ . Fixamos um evento qualquer  $A_0$  em  $\mathcal{A}$ . Na primeira rodada do processo, criamos o vértice rotulado enraizado  $A_0$ . Em cada rodada posterior, para cada vértice  $v$  com rótulo  $[v]$  na rodada anterior, realizamos um 'subprocesso', onde para cada  $[u] \in \Gamma^+(v)$  no grafo de dependência  $\mathcal{G}_A$ , um vértice  $u$  com rótulo  $[u]$  é adicionado como uma criança de  $v$  com probabilidade  $x([u])$ , onde tais escolhas são feitas de maneira

independentes. No final do subprocesso, verificamos se o conjunto de rótulos do conjunto resultante de filhos de  $v$  forma um conjunto independente em  $\mathcal{G}_A$ . Se não, excluimos os filhos criados e reiniciamos o subprocesso até que tal conjunto seja formado.

De maneira equivalente, em cada rodada e para cada vértice  $v$  criado na rodada precedente, escolhemos um conjunto independente  $I_v \subset \Gamma^+([v])$  de tal maneira que o peso  $w(I_v)$  de escolha de cada  $I_v$  é

$$w(I_v) = \left( \prod_{u \in I_v} x([u]) \right) \left( \prod_{u \in \Gamma^+([v]) \setminus I_v} (1 - x([v])) \right) \quad (2.2)$$

Notemos que, por construção, este processo de ramificação modificado só pode produzir árvores de testemunha fortemente próprias.

Diante disso, partiremos agora para o lema de ramificação melhorado feito por [3]:

**Lema 40** (*Lema de Ramificação Melhorado*)

Para qualquer árvore de testemunha fortemente própria  $\tau_F$  com raiz rotulada  $A_0 \in \mathcal{A}$ , a probabilidade  $P'_{\tau_F}$  que o processo de ramificação modificado descrito acima produzirá exatamente a árvore  $\tau_F$  será

$$P'_{\tau_F} = \frac{1}{\mu(A_0)} \prod_{v \in V(\tau_F)} \frac{\mu([v])}{\sum_{\substack{I \subset \Gamma^+([v]) \\ I \text{ indep}}} \prod_{A \in I} \mu(A)}$$

**Prova.** Similarmente, como visto na prova do Lema 37, seja  $F_{\tau_F}(v)$  o conjunto dos filhos de  $v \in V(\tau_F)$  na árvore  $\tau_F$  e seja  $[F_{\tau_F}(v)]$  o conjunto dos seus rótulos. Seja  $W_v = \Gamma^+([v]) \setminus [F_{\tau_F}(v)]$  o conjunto dos não filhos de  $v$  na árvore  $\tau_F$ .

Lembrando que o peso atribuído a cada conjunto independente  $I_v \subset \Gamma^+([v])$ , para cada  $v \in V(\tau_F)$ , é dado por  $w(I_v)$  definido em (2.2), temos então que a probabilidade do processo de Galton-Watson modificado, descrito logo acima, gerar exatamente a árvore  $\tau \in T_A^*$  é

$$P'_{\tau_F} = \prod_{v \in V(\tau_F)} \frac{w(I_v)}{\sum_{\substack{I_v \subset \Gamma^+([v]) \\ I \text{ indep}}} w(I)} = \prod_{v \in V(\tau_F)} \frac{\prod_{u \in F_{\tau_F}} x([u]) \prod_{B \in W_v} (1 - x(B))}{\sum_{\substack{I \subset \Gamma^+([v]) \\ I \text{ indep}}} \prod_{A \in I} x(A) \prod_{B \in \Gamma^+([v]) \setminus I} (1 - x(B))}$$

Dividindo o numerador e o denominador pela expressão  $\prod_{B \in \Gamma^+([v])} (1 - x(B))$  obtemos o seguinte

$$P'_{\tau_F} = \prod_{v \in V(\tau_F)} \frac{\frac{\prod_{u \in F_{\tau_F}} x([u]) \prod_{B \in W_v} (1 - x(B))}{\prod_{B \in \Gamma^+([v])} (1 - x(B))}}{\sum_{\substack{I \subset \Gamma^+([v]) \\ I \text{ indep}}} \prod_{A \in I} x(A) \prod_{B \in \Gamma^+([v]) \setminus I} (1 - x(B))} \frac{\prod_{B \in \Gamma^+([v])} (1 - x(B))}{\prod_{B \in \Gamma^+([v])} (1 - x(B))}$$

e, simplificando os produtórios observando as vizinhanças obtemos,

$$P'_{\tau_F} = \prod_{v \in V(\tau_F)} \frac{\prod_{u \in F_{\tau_F}} \frac{x([u])}{1 - x([u])}}{\sum_{\substack{I \subset \Gamma^+([v]) \\ I \text{ indep}}} \prod_{A \in I} \frac{x(A)}{1 - x(A)}}$$

Substituindo a variável  $x(A)$  por  $\mu(A) = \frac{x(A)}{1 - x(A)}$ , obtemos a expressão

$$P'_{\tau_F} = \prod_{v \in V(\tau_F)} \frac{\prod_{u \in F_{\tau_F}} \mu([u])}{\sum_{\substack{I \subset \Gamma^+([v]) \\ I \text{ indep}}} \prod_{A \in I} \mu(A)} \quad (2.3)$$

Ainda, como a raiz rotulada  $A_0$  não produz a probabilidade  $x(A_0)$  pelo processo de ramificação melhorado descrito anteriormente, observamos que o numerador de (2.3) se reduz em

$$\prod_{v \in V(\tau_F)} \prod_{u \in F_{\tau_F}} \mu([u]) = \frac{1}{\mu(A_0)} \prod_{v \in V(\tau_F)} \mu([v]) \quad (2.4)$$

Dessa forma, combinando (2.3) com (2.4) obtemos

$$P'_{\tau_F} = \frac{1}{\mu(A_0)} \prod_{v \in V(\tau_F)} \frac{\mu([v])}{\sum_{\substack{I \subset \Gamma^+([v]) \\ I \text{ indep}}} \prod_{A \in I} \mu(A)}$$

concluindo assim a demonstração do Lema 40.  $\square$

Agora, para concluir a demonstração do Teorema 38, vamos fazer o análogo realizado na demonstração do Teorema 30, utilizando a ideia do Lema 37 juntamente com a segunda parte do Lema 35 da seguinte forma:

$$\mathbb{E}(N_A) = \sum_{\tau_F \in T_A^*} P(\tau_F \text{ ocorrer em } C) \leq \sum_{\tau_F \in T_A^*} \prod_{v \in V(\tau_F)} P([v])$$

donde da hipótese do Teorema 38 temos

$$\mathbb{E}(N_A) \leq \sum_{\tau_F \in T_A^*} \prod_{v \in V(\tau_F)} \frac{\mu([v])}{\sum_{\substack{I \subset \Gamma^+([v]) \\ I \text{ indep}}} \prod_{B \in I} \mu(B)} = \mu(A) \sum_{\tau_F \in T_A^*} P'_{\tau_F} \leq \mu(A) \quad (2.5)$$

onde a igualdade explícita em (2.5) foi obtida pelo Lema 40 e a última desigualdade em (2.5) segue do fato que a probabilidade do processo de Galton-Watson modificado gerar pelo menos uma árvore  $\tau_F$  é no máximo um, temos, em conclusão, provado novamente que

$$\mathbb{E}(N_A) \leq \mu(A),$$

isso quando as probabilidades dos eventos ruins da família  $\mathcal{A}$  satisfazem a hipótese (2.1). Diante disso, o tempo máximo esperado de passos reamostrados pelo algoritmo é  $\sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A)$

o que conclui, finalmente, a demonstração do Teorema 38.

Vamos concluir o capítulo apresentando o análogo algorítmico do Teorema 27 que vale na hipótese que a vizinhança de cada evento  $A \in \mathcal{A}$  em  $\mathcal{G}_A$  seja a união de  $k$  cliques (lembramos a desigualdade (1.7)). Será essa a ferramenta que usaremos no próximo capítulo para as aplicações em problemas de coloração de grafos.

**Teorema 41** *Seja  $\Psi$  um conjunto finito de variáveis aleatórias mutuamente independentes num espaço de probabilidade  $\Omega_\Psi$  e, seja  $\mathcal{A}$  um conjunto finito de eventos determinados por essas variáveis. Dado  $A \in \mathcal{A}$ , suponhamos que a vizinhança  $\Gamma^+(A)$  em  $\mathcal{G}_A$  seja a união de  $k$  cliques  $c_1, \dots, c_k$ . Se, para cada  $A \in \mathcal{A}$ , existir  $\mu : \mathcal{A} \mapsto (0, \infty)$  tal que*

$$P(A) \leq \frac{\mu(A)}{\varphi_A^*(\mu)} \quad (2.6)$$

onde

$$\varphi_A^*(\mu) = \prod_{i=1}^k \left[ 1 + \sum_{B \in c_i} \mu(B) \right] \quad (2.7)$$

então, existem valores para as variáveis em  $\Psi$  tais que nenhum dos eventos em  $\mathcal{A}$  ocorre. Além disso, o algoritmo aleatório descrito na seção 1.1 reamostra um evento  $A \in \mathcal{A}$  no máximo  $\mu(A)$  vezes em valor esperado antes de encontrar a avaliação. Assim, o valor esperado do número total de passos do algoritmo será no máximo  $\sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A)$ .

# Capítulo 3

## Aplicações do Teorema de Pegden

Diante do que vimos no capítulo anterior, vamos agora aplicar a versão “simplificada” do Teorema 38, i.e, o Teorema 41, em alguns problemas de coloração. Para tanto, seguindo o roteiro de Ndreca et.al em [11], vamos definir alguns conceitos pertinentes da teoria de grafos.

**Definição 42** *Uma coloração de vértice própria de  $G$  é uma coloração estrela se nenhum caminho de tamanho 3 é bicromático.*

**Definição 43** *O número mínimo de cores necessárias de modo que em um grafo  $G$  se tenha pelo menos uma coloração de vértice estrela é chamado de número cromático estrelado de  $G$  e denotaremos por  $\mathcal{X}_s(G)$ .*

**Definição 44** *Uma coloração de vértice própria de  $G$  é  $\beta$ -frugal se qualquer vértice tem no máximo  $\beta$  membros de cada classe de cores em sua vizinhança.*

**Definição 45** *O número mínimo de cores necessárias de modo que em um grafo  $G$  se tenha pelo menos uma coloração de vértice própria  $\beta$ -frugal é chamado de número cromático  $\beta$ -frugal de  $G$  e denotaremos esse número por  $\mathcal{X}^\beta(G)$ .*

**Definição 46** *Uma coloração de aresta própria de  $G$  é dita acíclica se não houver ciclos bicromáticos.*

**Definição 47** *O número mínimo de cores necessárias para um grafo  $G$  ter pelo menos uma coloração de aresta própria acíclica é chamado número cromático de aresta própria acíclica de  $G$  e denotaremos esse número por  $a'(G)$ .*

**Definição 48** *O número mínimo de cores necessárias de modo que em um grafo  $G$  se tenha pelo menos uma coloração de vértice própria é chamado de número cromático de  $G$  que denotaremos por  $c(G)$*

Tais definições são de suma importância para o entendimento das seções precedentes. Vale ressaltar que os resultados enunciados e demonstrados nas próximas seções são aplicações diretas do Teorema 41.

Lembremos que  $G = (V, E)$  é um grafo onde  $V$  representa seu conjunto de vértices e  $E$  é representado como seu conjunto de arestas.

### 3.1 Colorações acíclicas próprias de aresta de um grafo

Nesta seção vamos provar o seguinte teorema:

**Teorema 49** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo com grau máximo  $\Delta$ , então as seguintes afirmativas são verdadeiras:*

(1) *Existe uma coloração própria acíclica das arestas de  $G$  utilizando  $N \geq \lceil 9,62(\Delta - 1) \rceil$  cores e logo  $a'(G) \leq \lceil 9,62(\Delta - 1) \rceil$ .*

(2) *O algoritmo de Moser-Tardos encontra essa coloração própria acíclica das arestas de  $G$  em um número de passos em valor esperado não superior a  $\frac{19}{24}|E|$ .*

**Prova.** Dado um grafo  $G = (V, E)$ , um par de arestas  $\{e, e'\} \subset E$  é uma *cereja* de  $G$  se  $e, e'$  são incidentes num mesmo vértice. Seja  $K$  o conjunto constituído pelas cerejas  $\{e, e'\} \subset E$ .

Para  $k \geq 2$ , seja  $C_{2k}$  o conjunto de todos os ciclos de tamanho  $2k$  em  $G$ .

Definimos então  $X = K \cup \left( \bigcup_{k \geq 2} C_{2k} \right)$ . Consideramos aqui um elemento  $c_{2k} \in C_{2k}$

como sendo um conjunto de arestas de modo que os elementos de  $X$  são (algum dos) subconjuntos de  $E$ .

Para cada  $e \in E$ , escolhemos uma cor  $c_e$  aleatoriamente, independentemente e uniformemente entre  $N$  possíveis cores e ponhamos  $N \geq c(\Delta - 1)$  (o valor da constante  $c$  será descoberto depois). Temos então um conjunto  $\Psi = \{c_e\}_{e \in E}$  de variáveis independentes, onde cada uma dessas variáveis podem assumir  $N$  valores uniformemente, que geram o espaço de probabilidade  $\Omega_\Psi$ . Estamos então dentro do contexto dos Teoremas 30, 38 e 41. Tendo escolhido aleatoriamente um valor para cada variável  $c_e \in \Psi$ , obtemos uma coloração de arestas de  $G$  e queremos verificar se essa coloração é própria e acíclica.

Vejam os quais são os eventos não favoráveis. Para isso lembramos que um ciclo é propriamente bicromático se suas arestas são coloridas usando somente duas cores e essa coloração é própria. Obviamente, somente ciclos com um número par de arestas admitem uma coloração bicromática própria.

I. Para cada cereja em  $K$ , seja  $A_{\{e, e'\}}$  o evento em que as arestas  $e$  e  $e'$  tem a mesma cor;

II. Para cada  $c_{2k} \in C_{2k}$ , com  $k \geq 2$ , seja  $A_{c_{2k}}$  o evento em que o ciclo  $c_{2k}$  é propriamente bicromático.

O conjunto de eventos “ruins”  $\mathcal{A}$  dos Teoremas 30, 38 e 41 é, neste caso,

$$\mathcal{A} = \left[ \{A_{\{e, e'\}}\}_{\{e, e'\} \in K} \right] \cup \left[ \bigcup_{k \geq 2} \{c_{2k}\}_{c_{2k} \in C_{2k}} \right] = \{A_x\}_{x \in X}$$

i.e,  $\mathcal{A}$  é constituído por todas as cerejas monocromáticas mais todos os ciclos propriamente bicromáticos.

Se a condição (2.6) é satisfeita, então existe uma coloração das arestas de  $G$  tal que nenhum dos eventos I e II ocorrem e, conseqüentemente, essa coloração é própria de  $G$  e acíclica. Além disso, o algoritmo de Moser e Tardos encontra essa coloração em um número de passos  $\sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A)$  em valor esperado.

Para verificar a condição (2.6) no caso presente observamos, primeiramente, que as probabilidades dos eventos I e II ocorrer são:

$$P(A_{\{e,e'\}}) = \frac{N}{N^2} = \frac{1}{N}$$

e,

$$P(A_{c_{2k}}) = \frac{N(N-1)}{N^{2k}} = \frac{N^2 - N}{N^{2k}} \leq \frac{N^2}{N^{2k}} = \frac{1}{N^{2k-2}}$$

Agora, vamos analisar a estrutura do grafo de dependência  $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$  para os eventos  $\{A_x\}_{x \in X}$ .

Observamos que os elementos  $x \in X$  são particulares subconjuntos do conjunto das arestas  $E$  de  $G$  (i.e.  $x \in X$  ou é uma cereja ou é um ciclo de tamanho par) e para  $x \in X$  temos que o evento  $A_x$  depende somente das variáveis (cores) das arestas em  $X$ . Logo, dois eventos  $A_x$  e  $A_y$  em  $\mathcal{A}$  são independentes se  $x \cap y = \emptyset$

Como cada cor é escolhida em cada aresta independentemente, concluímos que o grafo de dependência  $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$  para os eventos  $\{A_x\}_{x \in X}$  é o grafo com conjunto de vértices  $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \in X}$  e conjunto de arestas  $F$  tal que o par  $\{A_x, A_{x'}\} \in F$  se e somente se  $x \cap x' \neq \emptyset$ .

Observamos ainda que:

- Cada aresta  $e \in E$  está contida em no máximo  $2(\Delta - 1)$  cerejas de  $K$ ;
- Cada aresta  $e \in E$  está contida em no máximo  $(\Delta - 1)^{2k-2}$  ciclos  $c_{2k}$ , para qualquer  $k \geq 2$ .

Definimos então, para  $k \geq 1$

$$\Gamma_1(e) = \{A_x : x \in K \text{ e } e \in x\}$$

$$\Gamma_k(e) = \{A_y : y \in C_{2k} \text{ e } e \in y\}, \quad k \geq 2$$

Pela observação acima temos que

$$|\Gamma_1(e)| \leq 2(\Delta - 1) \tag{3.1}$$

$$|\Gamma_k(e)| \leq (\Delta - 1)^{2k-2}, \quad k \geq 2 \tag{3.2}$$

Além disso, para cada  $e \in E$ , o conjunto

$$\Gamma(e) = \{A_x : x \in X \text{ e } e \in x\} = \bigcup_{k \geq 1} \Gamma_k(e)$$

é claramente uma clique de  $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ , pois todos os eventos de  $\Gamma(e)$  compartilham a variável  $c_e$ .

Consequentemente, para qualquer  $x \in X$  podemos escrever

$$\Gamma^+(A_x) = \cup_{e \in x} \Gamma(e)$$

Isto é, o grafo de dependência da família  $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \in X}$  é tal que, para qualquer  $x \in X$ ,  $\Gamma^+(A_x)$  é união de  $|x|$  cliques. Isto é, todas as hipóteses do Teorema 41 estão satisfeitas.

Vamos agora estimar, para  $x \in X$ , a função  $\varphi_{A_x}^*(\mu)$  definida em (2.7).

Para tanto, escolhemos os números não negativos  $\{\mu(A_z)\}_{z \in X}$  da seguinte maneira: Sejam  $\{\mu_k\}_{k \geq 1}$  uma coleção de números não-negativos. Ponhamos então, para qualquer  $x \in K$  (i.e. para qualquer cereja de  $G$ )  $\mu(A_x) = \mu_1$  e para qualquer  $y \in C_{2k}$  (i.e. para qualquer ciclo de tamanho  $2k$  de  $G$ )  $\mu(A_y) = \mu_k$ .

Temos então, para  $x \in X$

$$\begin{aligned}\varphi_{A_x}^*(\mu) &= \prod_{e \in x} \left[ 1 + \sum_{B \in \Gamma(e)} \mu(B) \right] = \prod_{e \in x} \left[ 1 + \sum_{B \in \Gamma_1(e)} \mu(B) + \sum_{k \geq 2} \sum_{B \in \Gamma_k(e)} \mu(B) \right] = \\ &= \prod_{e \in x} \left[ 1 + |\Gamma_1(e)|\mu_1 + \sum_{k \geq 2} |\Gamma_k(e)|\mu_k \right] \leq \left[ 1 + 2(\Delta - 1)\mu_1 + \sum_{k \geq 2} (\Delta - 1)^{2k-2} \mu_k \right]^{|x|}\end{aligned}$$

sendo que a desigualdade na linha acima segue de (3.1) e (3.2). Em particular, se  $x \in K$ , i.e, se  $x = \{e_1, e_2\}$  é uma cereja

$$\varphi_{A_{\{e_1, e_2\}}}^*(\mu) \leq \left[ 1 + 2(\Delta - 1)\mu_1 + \sum_{k \geq 2} (\Delta - 1)^{2k-2} \mu_k \right]^2$$

e se  $x \in C_{2k}$ , i.e, se  $x = c_{2k}$  é um ciclo de tamanho  $2k$

$$\varphi_{A_{c_{2k}}}^*(\mu) \leq \left[ 1 + 2(\Delta - 1)\mu_1 + \sum_{k \geq 2} (\Delta - 1)^{2k-2} \mu_k \right]^{2k}$$

Então, a condição (2.6) no Teorema 41 é satisfeita se

$$\frac{1}{N} \leq \frac{\mu_1}{\left[ 1 + 2(\Delta - 1)\mu_1 + \sum_{s \geq 2} (\Delta - 1)^{2s-2} \mu_s \right]^2} \quad (3.3)$$

e, simultaneamente,

$$\frac{1}{N^{2k-2}} \leq \frac{\mu_k}{\left[ 1 + 2(\Delta - 1)\mu_1 + \sum_{s \geq 2} (\Delta - 1)^{2s-2} \mu_s \right]^{2k}} \quad (3.4)$$

Diante disso, escolhemos  $\mu_1 = \mu = \frac{\alpha}{\Delta - 1}$ , com  $0 < \alpha < 1$  e  $\mu_k = \mu^{2k-2}$ . Lembrando que  $N \geq c(\Delta - 1)$ , temos então que as desigualdades (3.3) e (3.4) são satisfeitas se

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\alpha}{\left[ 1 + 2\alpha + \sum_{s \geq 2} \alpha^{2s-2} \right]^2} \quad (3.5)$$

e simultaneamente

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\alpha}{\left[ 1 + 2\alpha + \sum_{s \geq 2} \alpha^{2s-2} \right]^{\frac{2k}{2k-2}}} \quad (3.6)$$

Como  $k \geq 2$ , (3.5) implica em (3.6). Sendo assim, a condição que garante que nenhum dos eventos ruins  $\{A_x\}_{x \in X}$  ocorra é

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\alpha}{\left[ 1 + 2\alpha + \sum_{s \geq 2} \alpha^{2s-2} \right]^2} \quad (3.7)$$

temos que (3.7) fica

$$c \geq \alpha^{-1} \left[ 1 + 2\alpha + \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \right]^2$$

Minimizando a função acima no intervalo de  $\alpha \in (0, 1)$  encontramos que o mínimo ocorre quando  $\alpha = 0.31323.. \equiv \alpha_0$ , sendo  $c \geq 9,62130002 \cong 9,62$ .

Com isso, vemos que todo grafo  $G$  com grau máximo  $\Delta$  tal que as arestas são coloridas usando um número de cores  $N \geq 9,62(\Delta - 1)$  admite uma coloração própria acíclica e, portanto,  $a'(G) < 9,62(\Delta - 1)$ . Com isso, o item 1 do Teorema 41 está provado.

Quanto ao item 2, com base no Teorema 41 temos que o algoritmo de Moser e Tardos encontra essa coloração própria das arestas de  $G$  após um número de passos, em valor esperado, não maior que

$$\sum_{x \in X} \mu(A_x) = |K| \frac{\alpha_0}{\Delta - 1} + \sum_{k \geq 2} |C_{2k}| \left( \frac{\alpha_0}{\Delta - 1} \right)^{2k-2} \leq |E| \left[ 2\alpha_0 + \sum_{k \geq 2} \alpha_0^{2k-2} \right] \leq \frac{19}{24} |E|$$

onde usamos as cotas  $|K| \leq |E|2(\Delta - 1)$ ,  $|C_{2k}| \leq |E|(\Delta - 1)^{2k-2}$  e  $\alpha_0 \leq \frac{1}{3}$ . □

## 3.2 Colorações acíclicas de arestas de grafos com girth $g \geq 5$

Nesta seção vamos provar o seguinte resultado:

**Teorema 50** *Seja  $G$  um grafo com grau máximo  $\Delta \geq 3$  e girth  $g$ . Se  $g \geq 5$ , então  $a'(G) \leq \lceil 6,42(\Delta - 1) \rceil$ ; se  $g \geq 7$ , então  $a'(G) \leq \lceil 5,77(\Delta - 1) \rceil$ ; se  $g \geq 53$ , então  $a'(G) \leq \lceil 4,52(\Delta - 1) \rceil$ .*

**Prova.** Consideremos  $\eta \geq 2$  um número inteiro. Dado o grafo  $G = (V, E)$  de grau máximo  $\Delta$  e de girth  $g$ , queremos saber qual o número mínimo de cores necessárias para encontrar uma coloração  $C$  de arestas tal que:

1. Em qualquer vértice  $v$  do grafo  $G$  o número de arestas que incidem sobre  $v$  com a mesma cor é no máximo  $\eta$ ;
2. Não existe ciclo propriamente bicromático em  $G$ ;
3. Não existe ciclo monocromático em  $G$ .

Suponhamos que possamos provar que para algum  $N \in \mathbb{N}$  encontramos uma coloração  $C$  que satisfaça 1, 2 e 3 utilizando-se de  $N$  cores. Sendo assim, é possível também encontrar uma coloração  $C'$  usando  $N' = \eta N$  cores que é própria e satisfaz 2, ou seja,  $C'$  é uma coloração própria acíclica. De fato, podemos observar que em  $C$  o conjunto de arestas com a mesma cor são florestas com grau máximo  $\eta$  devido a condição 1. Logo, precisamos de  $\eta$  cores para colorir propriamente uma floresta com grau máximo  $\eta$ . Por conseguinte, se recolorirmos cada cor  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) da coloração  $C$  usando  $(c_i^1, c_i^2, \dots, c_i^\eta)$  cores distintas de tal forma que florestas monocromáticas desapareçam, então obtemos uma nova coloração  $C'$  que usa  $N' = \eta N$  cores. Essa coloração  $C'$  assim obtida, por construção, é própria e satisfaz 2. Em conclusão, se podemos encontrar uma coloração

de  $G$  que satisfaça 1, 2, e 3 para algum inteiro  $\eta \leq \Delta$  usando  $N$  cores, então podemos também encontrar uma coloração acíclica própria de  $G$  usando  $\eta N$  cores.

Agora, vamos usar o teorema 41 para encontrar uma coloração  $C$  de  $G$  satisfazendo as condições 1-3 com  $N \geq c(\Delta - 1)$  ( $c$  a ser determinado posteriormente) então, se  $N' \geq \bar{c}(\Delta - 1)$ , com  $\bar{c} = \eta c$ , existe também uma coloração de aresta acíclica  $C'$  em  $G$  usando  $N'$  cores.

Vamos escolher para cada aresta  $e \in E$  independentemente uma cor aleatoriamente  $c_e$  entre as  $N$  cores possíveis. Estamos então nas condições do Teorema 41, isto é, como anteriormente, temos um espaço de probabilidade gerado pelo conjunto de variáveis independentes  $\Psi = \{c_e\}_{e \in E}$ .

Seja  $K_\eta$  o conjunto cujos elementos são conjuntos de arestas  $k_\eta = \{e_1, e_2, \dots, e_{\eta+1}\} \subset E$  sendo todos incidentes para um vértice comum. Chamaremos os elementos de  $K_\eta$  de  $\eta$ -cerejas. Seja  $C_m (m \geq g)$  o conjunto cujos elementos são todos ciclos  $c_m$  em  $G$  de tamanho  $m$ . Agora, seja  $X = \{\cup_{m \geq 3} C_m\} \cup K_\eta$ . Como anteriormente, consideramos ciclos como subconjuntos de arestas.

Considere agora os seguinte eventos não-favoráveis:

I - Para  $k_\eta = \{e_1, \dots, e_{\eta+1}\} \in K_\eta$ , seja a  $A_{K_\eta}$  o evento em que todas as arestas  $e_1, \dots, e_{\eta+1}$  têm a mesma cor;

II - Para  $c_{2k} \in C_{2k}$ , com  $k \geq \lceil \frac{g}{2} \rceil$ , seja  $A_{C_{2k}}$  o evento em que o ciclo  $c_{2k}$  ou é propriamente bicromático ou é monocromático;

III - Para  $c_{2l+1} \in C_{2l+1}$ , com  $l \geq \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$ , seja  $A_{C_{2l+1}}$  o evento na qual o ciclo  $c_{2l+1}$  é monocromático.

A família de eventos  $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \in X}$  (i.e., os eventos do tipo I,II e III) é a coleção dos eventos ruins no espaço de probabilidade gerado pelas  $|E|$  variáveis independentes (i.e. as  $N$  possíveis cores em cada aresta). Logo, o Teorema 41 nos dá a condição que garante que o algoritmo de Moser-Tardos encontra uma coloração  $C$  em  $G$  tal que nenhum dos eventos do tipo I,II e III e, conseqüentemente, garante a existência de uma coloração  $C$  em  $G$  com as propriedades 1, 2 e 3 expostas anteriormente.

Descritos os eventos acima, observe que, para  $k_\eta \in K_\eta$ , a probabilidade do evento  $A_{k_\eta}$  acontecer é

$$P(A_{k_\eta}) = \frac{N}{N^{\eta+1}} = \frac{1}{N^\eta} \quad (3.8)$$

Além disso, para qualquer  $k \geq \lceil g/2 \rceil$  e para qualquer  $c_{2k} \in C_{2k}$ , a probabilidade do evento  $A_{c_{2k}}$  acontecer é

$$P(A_{c_{2k}}) = \frac{N + N(N-1)}{N^{2k}} = \frac{N^2 + N - N}{N^{2k}} = \frac{1}{N^{2k-2}} \quad (3.9)$$

Finalmente, para qualquer  $l \geq \lfloor g/2 \rfloor$  e para qualquer  $c_{2l+1} \in C_{2l+1}$ , a probabilidade do evento  $A_{c_{2l+1}}$  acontecer é

$$P(A_{c_{2l+1}}) = \frac{N}{N^{2l+1}} = \frac{1}{N^{2l}} \quad (3.10)$$

Analogamente, como visto na seção precedente, a estrutura do grafo de dependência  $\mathcal{G}_\mathcal{A}$  associado à família  $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \in X}$  dos eventos ruins é tal que o evento  $A_x$  é independente de todos outros eventos  $A_{x'}$  tais que  $x \cap x' = \emptyset$ . Logo, o par  $\{A_x, A_{x'}\}$  é aresta de  $\mathcal{G}_\mathcal{A}$  se, e somente se,  $x \cap x' \neq \emptyset$ .

Observe agora que:

- Dado que cada aresta  $e \in E$  tem dois vértices e, em cada um desse dois vértices temos no máximo  $\Delta - 1$  arestas incidentes, temos que o número de  $\eta$ -cerejas que contém uma aresta  $e$  fixada é no máximo  $2 \binom{\Delta - 1}{\eta} \leq 2 \frac{(\Delta - 1)^\eta}{\eta!}$

- Cada aresta  $e$  está contida em no máximo  $(\Delta - 1)^{m-2}$  ciclos  $c_m \in C_m$ , ( $m \geq 3$ ).  
Diante disso definimos:

$$\Gamma_\eta(e) = \{A_x : x \in K_\eta \text{ e } e \in x\}$$

$$\Gamma_m(e) = \{A_y : y \in C_m \text{ e } e \in y\}, \quad k \geq 3$$

e, pela observação acima, temos que:

$$|\Gamma_\eta(e)| \leq 2 \frac{(\Delta - 1)^\eta}{\eta!} \quad (3.11)$$

$$|\Gamma_m(e)| \leq (\Delta - 1)^{m-2}, \quad m \geq 3 \quad (3.12)$$

Como anteriormente, o conjunto

$$\Gamma(e) = \{A_x : x \in X \text{ e } e \in x\} = \bigcup_{k \geq 1} \Gamma_k(e)$$

é uma clique de  $\mathcal{G}_A$  e, portanto, para qualquer  $x \in X$

$$\Gamma^+(A_x) = \cup_{e \in X} \Gamma(e)$$

Logo, também nesse caso, temos que o grafo de dependência  $\mathcal{G}_A$  da família  $\mathcal{A} = \{A_x\}$  é tal que, para qualquer  $x \in X$ ,  $\Gamma^+(A_x)$  é união de  $|x|$  cliques e, com isso, como estamos dentro das hipóteses do Teorema 41, podemos aplicá-lo.

Para estimar a função  $\varphi_{A_x}^*(\mu)$  definida em (2.7), vamos proceder de maneira análoga como feito na seção precedente na escolha dos números não negativos  $\{\mu(A_z)\}_{z \in X}$ . Ponhamos então, para qualquer  $x \in K_\eta$  (i.e. para qualquer  $\eta$ -cereja de  $G$ ),  $\mu(A_x) = \mu_\eta$  e, para qualquer  $y \in C_m$  (i.e. para qualquer ciclo de tamanho  $m$  de  $G$ ),  $\mu(A_y) = \mu_m$ .

Temos então que, para  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_{A_x}^*(\mu) &= \prod_{e \in x} [1 + \sum_{B \in \Gamma(e)} \mu(B)] = \prod_{e \in x} [1 + \sum_{B \in \Gamma_\eta(e)} \mu(B) + \sum_{m \geq g} \sum_{B \in \Gamma_m(e)} \mu(B)] = \\ &= \prod_{e \in x} [1 + |\Gamma_\eta(e)| \mu_\eta + \sum_{m \geq g} |\Gamma_m(e)| \mu_m] \leq \left[ 1 + 2 \frac{(\Delta - 1)^\eta}{\eta!} \mu_\eta + \sum_{m \geq g} (\Delta - 1)^{m-2} \mu_m \right]^{|x|} \end{aligned}$$

tendo usado na linha as desigualdades (3.11) e (3.12).

Em particular, se  $x \in K_\eta$ , i.e. se  $x = \{e_1, e_2, \dots, e_{\eta+1}\}$  é uma  $\eta$ -cereja

$$\varphi_{A_x}^*(\mu) \leq \left[ 1 + 2 \frac{(\Delta - 1)^\eta}{\eta!} \mu_\eta + \sum_{m \geq g} (\Delta - 1)^{m-2} \mu_m \right]^{\eta+1}$$

e, se  $y \in C_m$ , i.e, se  $y = c_m$  é um ciclo de tamanho  $m$

$$\varphi_{A_y}^*(\mu) \leq \left[ 1 + 2 \frac{(\Delta - 1)^\eta}{\eta!} \mu_\eta + \sum_{m \geq g} (\Delta - 1)^{m-2} \mu_m \right]^m$$

Então, lembrando as probabilidades descritas em (3.8), (3.9) e (3.10), a condição (2.6) do Teorema 41 é satisfeita se as seguintes desigualdades são simultaneamente satisfeitas:

$$\frac{1}{N^\eta} \leq \frac{\mu_\eta}{\left[ 1 + 2 \frac{(\Delta - 1)^\eta}{\eta!} \mu_\eta + \sum_{k \geq \lceil g/2 \rceil} (\Delta - 1)^{2k-2} \mu_{2k} + \sum_{l \geq \lceil g/2 \rceil} (\Delta - 1)^{2l-1} \mu_{2l+1} \right]^{\eta+1}} \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{N^{2k-2}} \leq \frac{\mu_{2k}}{\left[ 1 + 2 \frac{(\Delta - 1)^\eta}{\eta!} \mu_\eta + \sum_{k \geq \lceil g/2 \rceil} (\Delta - 1)^{2k-2} \mu_{2k} + \sum_{l \geq \lceil g/2 \rceil} (\Delta - 1)^{2l-1} \mu_{2l+1} \right]^{2k}} \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{N^{2l}} \leq \frac{\mu_{2l+1}}{\left[ 1 + 2 \frac{(\Delta - 1)^\eta}{\eta!} \mu_\eta + \sum_{k \geq \lceil g/2 \rceil} (\Delta - 1)^{2k-2} \mu_{2k} + \sum_{l \geq \lceil g/2 \rceil} (\Delta - 1)^{2l-1} \mu_{2l+1} \right]^{2l+1}} \quad (3.15)$$

Agora, escolha  $\mu_\eta = \mu^\eta$ ,  $\mu_{2k} = \mu^{2k-2}$ ,  $\mu_{2l+1} = \mu^{2l}$  e  $\mu = \frac{\alpha}{\Delta - 1}$ , com  $\alpha \in (0, 1)$ . Lembrando que  $N \geq c(\Delta - 1)$ , (3.13), (3.14) e (3.15) podem ser reescritas, respectivamente, como:

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\alpha}{\left[ 1 + 2 \frac{\alpha^\eta}{\eta!} + \sum_{k \geq \lceil g/2 \rceil} \alpha^{2k-2} + \frac{1}{(\Delta - 1)} \sum_{l \geq \lceil g/2 \rceil} \alpha^{2l} \right]^{(\eta+1)/\eta}} \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\alpha}{\left[ 1 + 2 \frac{\alpha^\eta}{\eta!} + \sum_{k \geq \lceil g/2 \rceil} \alpha^{2k-2} + \frac{1}{(\Delta - 1)} \sum_{l \geq \lceil l/2 \rceil} \alpha^{2l} \right]^{2k/(2k-2)}}, \quad k \geq \lceil g/2 \rceil \quad (3.17)$$

e

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\alpha}{\left[ 1 + 2 \frac{\alpha^\eta}{\eta!} + \sum_{k \geq \lceil g/2 \rceil} \alpha^{2k-2} + \frac{1}{(\Delta - 1)} \sum_{l \geq \lceil l/2 \rceil} \alpha^{2l} \right]^{(2l+1)/2l}}, \quad l \geq \lceil g/2 \rceil \quad (3.18)$$

Ainda, observando que

$$\sum_{k \geq \lceil g/2 \rceil} \alpha^{2k-2} \leq \alpha^{2\lceil g/2 \rceil - 2} \left[ \frac{1}{1 - \alpha^2} \right] \quad ; \quad \sum_{l \geq \lceil g/2 \rceil} \alpha^{2l} \leq \alpha^{2\lceil g/2 \rceil} \left[ \frac{1}{1 - \alpha^2} \right]$$

temos que (3.16), (3.17) e (3.18) são satisfeitas se

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\alpha}{\left[1 + 2\frac{\alpha^\eta}{\eta!} + \frac{1}{1-\alpha^2} \left(\alpha^{2\lceil g/2 \rceil - 2} + \frac{1}{\Delta-1} \alpha^{2\lfloor g/2 \rfloor}\right)\right]^{(\eta+1)/\eta}} \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\alpha}{\left[1 + 2\frac{\alpha^\eta}{\eta!} + \frac{1}{1-\alpha^2} \left(\alpha^{2\lceil g/2 \rceil - 2} + \frac{1}{\Delta-1} \alpha^{2\lfloor g/2 \rfloor}\right)\right]^{2k/(2k-2)}} , \quad k \geq \lceil g/2 \rceil \quad (3.20)$$

e

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\alpha}{\left[1 + 2\frac{\alpha^\eta}{\eta!} + \frac{1}{1-\alpha^2} \left(\alpha^{2\lceil g/2 \rceil - 2} + \frac{1}{\Delta-1} \alpha^{2\lfloor g/2 \rfloor}\right)\right]^{(2l+1)/2l}} , \quad l \geq \lfloor g/2 \rfloor \quad (3.21)$$

Agora, se  $g \geq 5$  então  $k \geq 3$  e  $l \geq 2$ . Fixando  $\eta = 2$  e diante do que foi visto acima, as três desigualdades (3.19), (3.20) e (3.21) são simultaneamente satisfeitas se

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\alpha}{\left[1 + 2\frac{\alpha^\eta}{\eta!} + \frac{1}{1-\alpha^2} \left(\alpha^{2\lceil g/2 \rceil - 2} + \frac{1}{\Delta-1} \alpha^{2\lfloor g/2 \rfloor}\right)\right]^{(\eta+1)/\eta}} \quad (3.22)$$

Observamos ainda que

$$\alpha^{2\lceil g/2 \rceil - 2} + \frac{1}{\Delta-1} \alpha^{2\lfloor g/2 \rfloor} \leq \frac{\Delta}{\Delta-1} \alpha^{2\lceil g/2 \rceil - 2} \leq \frac{3}{2} \alpha^{2\lceil g/2 \rceil - 2}, \quad \text{para todo } \Delta \geq 3.$$

Logo, (3.22) é satisfeita se

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\alpha}{\left[1 + 2\frac{\alpha^\eta}{\eta!} + \frac{3}{2} \frac{\alpha^{2\lceil g/2 \rceil - 2}}{1-\alpha^2}\right]^{(\eta+1)/\eta}} \quad (3.23)$$

Otimizando (3.23) com respeito a  $\alpha \in (0, 1)$  e, supondo  $g \geq 5$  e  $\eta = 2$ , obtemos  $c \geq 3, 21$ , i.e.,  $\bar{c} = \eta c \geq 6, 42$  logo  $a'(G) \leq \lceil 6, 42(\Delta - 1) \rceil$ ; Se  $g \geq 7$  e  $\eta = 2$  temos que  $\bar{c} \geq 5, 77$  e, conseqüentemente,  $a'(G) \leq \lceil 5, 77(\Delta - 1) \rceil$ . Por fim, se  $g \geq 53$  e  $\eta = 3$  temos que  $\bar{c} \geq 4, 52$  e, conseqüentemente,  $a'(G) \leq \lceil 4, 52(\Delta - 1) \rceil$ . □

### 3.3 Colorações estrelas do vértice de um grafo

Nesta seção vamos provar o seguinte:

**Teorema 51** *Se  $G$  é um grafo com grau máximo  $\Delta \geq 3$ , então  $\mathcal{X}_s(G) \leq \lceil 4, 36 \Delta^{3/2} + 6, 54\Delta \rceil$ .*

**Prova.** Seja  $C$  uma coloração de vértices de  $G = (V, E)$  usando  $N \geq c\Delta^{3/2}$  cores tal que em cada vértice  $v \in V$  uma cor  $c_v$  é escolhida independentemente aleatoriamente e uniformemente entre o conjunto de  $N$  cores.

Definimos  $P_1$  como sendo o conjunto cujos elementos são os conjuntos de vértices  $\{v_1, v_2\}$  formando arestas de  $G$  e seja  $P_3$  o conjunto cujos elementos são os conjuntos de vértices  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  formando caminhos de tamanho 3 em  $G$  e seja  $X = E \cup P_3$ . Realçamos que agora os elementos  $x \in X$  são conjuntos de vértices.

Avalie os seguintes eventos não favoráveis:

I - Para cada par de vértices adjacentes  $\{u, v\} \in E$  de  $G$ , seja  $A_{\{u,v\}}$  o evento em que os vértices  $u$  e  $v$  tem a mesma cor;

II - Para cada caminho de tamanho 3, i.e,  $p_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \in P_3$  em  $G$ , seja  $A_{p_3}$  o evento em que os vértices  $v_1, v_3$  têm a mesma cor e os vértices  $v_2, v_4$  têm a mesma cor (i.e, em outras palavras  $p_3$  é monocromático ou propriamente bicromático).

A família de eventos desfavoráveis  $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \in X}$  é tal que, se nenhum dos eventos em  $\mathcal{A}$  ocorre, então temos que  $C$  é uma coloração estrela. Ainda, note que as probabilidades de cada evento acima é dado por:

$$P(A_{\{u,v\}}) = \frac{N}{N^2} = \frac{1}{N}$$

$$P(A_{p_3}) = \frac{N^2}{N^4} = \frac{1}{N^2}$$

Similarmente como visto antes, temos que para  $x, x' \in X$  (onde  $x \in X$  pode ser um par adjacente de vértice ou um caminho de tamanho 3) um evento  $A_x$  é independente de todos eventos  $A_{x'}$  tal que  $x \cap x' = \emptyset$ . Então, o grafo de dependência  $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$  da família  $\mathcal{A}$  é tal que o par  $\{x, x'\}$  é aresta de  $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$  se e somente se  $x \cap x' \neq \emptyset$ .

Dado um vértice  $v \in V$  do grafo  $G$ , definimos

$$\Gamma_1(v) = \{A_x \in \mathcal{A} : x \in P_1 \text{ e } v \in x\}$$

$$\Gamma_3(v) = \{A_x \in \mathcal{A} : x \in P_3 \text{ e } v \in x\}$$

e

$$\Gamma(v) = \{A_x \in \mathcal{A} : x \in X \text{ e } v \in x\} = \Gamma_1(v) \cup \Gamma_3(v)$$

Obviamente, para qualquer  $v \in V$  temos que  $\Gamma(v)$  é uma clique de  $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$  (pois todos os eventos de  $\Gamma(v)$  compartilham a variável  $c_v$ ) e, portanto, para qualquer  $x \in X$

$$\Gamma^+(A_x) = \cup_{v \in X} \Gamma(v)$$

é a união de 2 cliques se  $x \in P_1$  e de 4 cliques se  $x \in P_3$ .

Observamos ainda que um vértice  $v \in V$  pertence no máximo a  $\Delta$  arestas de  $G$  e no máximo a  $2\Delta(\Delta - 1)^2 \leq 2\Delta^3$  caminhos de tamanho 3 em  $G$  e, conseqüentemente, para todo  $v \in V$

$$|\Gamma_1(v)| \leq \Delta$$

$$|\Gamma_3(v)| \leq 2\Delta^3$$

Como anteriormente podemos agora estimar, para  $x \in X$ , a função  $\varphi_{A_x}^*(\mu)$  definida em (2.7).

Vamos escolher os números não negativos  $\{\mu(A_z)\}_{z \in X}$  da seguinte maneira: Ponhamos, para qualquer  $x \in P_1$  (i.e, para qualquer aresta de  $G$ ),  $\mu(A_x) = \mu_1$  e para qualquer  $y \in P_3$  (i.e, para qualquer caminho de tamanho 3 de  $G$ ),  $\mu(A_y) = \mu_3$ , sendo  $\mu_1$  e  $\mu_3$  números positivos. Daí, para  $x \in X$

$$\begin{aligned} \varphi_{A_x}^*(\mu) &= \prod_{v \in x} \left[1 + \sum_{B \in \Gamma(e)} \mu(B)\right] = \prod_{v \in x} \left[1 + \sum_{B \in \Gamma_1(v)} \mu(B) + \sum_{B \in \Gamma_3(v)} \mu(B)\right] = \\ &= \prod_{v \in x} \left[1 + |\Gamma_1(v)|\mu_1 + |\Gamma_3(v)|\mu_3\right] \leq \left[1 + \Delta\mu_1 + 2\Delta^3\mu_3\right]^{|x|} \end{aligned}$$

Em particular, se  $x \in P_1$  (i.e, se  $x = \{v_1, v_2\}$  é uma cereja);

$$\varphi_{A_{\{v_1, v_2\}}}^*(\mu) \leq \left[1 + \Delta\mu_1 + 2\Delta^3\mu_3\right]^2$$

e, se  $x \in P_3$ , (i.e, se  $x = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  é um caminho de tamanho 4)

$$\varphi_{A_{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}}}^*(\mu) \leq \left[1 + \Delta\mu_1 + 2\Delta^3\mu_3\right]^4$$

Diante disso, temos que o Teorema 41 é satisfeito se podemos encontrar números positivos  $\mu_1, \mu_3$  tais que as desigualdades a seguir são satisfeitas:

$$\frac{1}{N} \leq \frac{\mu_1}{(1 + \Delta\mu_1 + 2\Delta^3\mu_3)^2} \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{N^2} \leq \frac{\mu_3}{(1 + \Delta\mu_1 + 2\Delta^3\mu_3)^4} \quad (3.25)$$

Agora, tomemos  $\mu_3 = \mu_1^2$  e  $\mu_1 = \frac{\alpha}{\Delta^{3/2}}$ , com  $\alpha \in (0, 1)$ . Lembremos que consideramos  $N \geq c\Delta^{3/2}$ . Assim, temos que as desigualdades (3.24) e (3.25) são satisfeitas se:

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\alpha}{(1 + \Delta^{-1/2}\alpha + 2\alpha^2)^2} \quad (3.26)$$

Maximizando o lado direito de (3.26) com respeito a  $\alpha$ , obtemos que seu máximo é dado por:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{6} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{24\Delta}} + \sqrt{\frac{1}{24\Delta}} \right)}$$

Ainda, observando que  $\alpha_0 \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$ , para todo  $\Delta \geq 1$ , temos que a desigualdade (3.26) é satisfeita para todo  $\Delta \geq 3$  se

$$\frac{1}{c} \leq \frac{1}{\sqrt{6} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{24\Delta}} + \sqrt{\frac{1}{24\Delta}} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{1}{\sqrt{6}} + 2 \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{6} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{24\Delta}} + \sqrt{\frac{1}{24\Delta}} \right) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{6\Delta}} + \frac{1}{3} \right)^2} \\
&\Rightarrow c \geq \sqrt{6} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{24\Delta}} + \sqrt{\frac{1}{24\Delta}} \right) \left( \frac{4}{3} + \frac{1}{\sqrt{6\Delta}} \right)^2 \\
&\Rightarrow c \geq \sqrt{6} \left( 1 + \frac{1}{48\Delta} + \sqrt{\frac{1}{24\Delta}} \right) \left( \frac{16}{9} + \frac{8}{3\sqrt{6\Delta}} + \frac{1}{6\Delta} \right) \quad (3.27)
\end{aligned}$$

onde na última linha usamos que  $(1 + \frac{1}{24\Delta})^{1/2} \leq 1 + \frac{1}{48\Delta}$ . Verifica-se agora facilmente que o lado direito de (3.27) é menor que  $\frac{16}{9}\sqrt{6} \left( 1 + \frac{1,5}{\sqrt{\Delta}} \right) \leq 4,36 + \frac{6,54}{\sqrt{\Delta}}$ , para todo  $\Delta \geq 3$ .

Portanto, obtemos  $c \geq 4,36 + \frac{6,54}{\sqrt{\Delta}}$  e, conseqüentemente,  $\mathcal{X}_s(G) < [4,36\Delta^{3/2} + 6,54\Delta]$ , como queríamos mostrar. □

### 3.4 Colorações $\beta$ -frugais dos vértice de um grafo

Nesta seção, vamos provar o seguinte:

**Teorema 52** *Seja  $G$  é um grafo com grau máximo  $\Delta \geq 3$ , então, para qualquer  $\beta \geq 1$ ,  $\mathcal{X}^\beta(G) < \left[ \max \left\{ k_1(\beta)\Delta, k_2(\beta) \frac{\Delta^{1+1/\beta}}{(\beta!)^{1/\beta}} \right\} \right]$ , onde  $k_1(\beta)$  e  $k_2(\beta)$  são funções decrescentes de  $\beta$  tal que  $k_1(\beta) \in [4; 5, 27]$  e  $k_2(\beta) \in [2; 4, 92]$*

**Prova.** Seja  $C$  uma coloração de vértice de  $G = (V, E)$  usando  $c$  cores de modo que em cada vértice uma cor é escolhida independentemente aleatória e uniformemente entre um conjunto de  $c$  cores.

Vamos assumir  $\beta \geq 2$ , pois no caso de  $\beta = 1$  o número cromático 1-frugal de  $G$ ,  $\mathcal{X}^1(G)$ , coincide com o número do vértice cromático  $c(G')$  do grafo  $G'$  obtido a partir de  $G$  pela adição de uma aresta entre qualquer dois vértices a distância 2 em  $G$ . Esse grafo  $G'$  assim obtido tem grau máximo no máximo  $\Delta^2$  e, conseqüentemente por Vizing,  $\mathcal{X}^1(G) \leq \Delta^2 + 1$ .

Dado  $v \in V$ , seja  $P_1$  o conjunto definido na seção 3.3 e seja  $S_\beta^v$  o conjunto cujos elementos são conjuntos de vértices  $\{v_1, \dots, v_{\beta+1}\}$  tal que  $\{v_1, \dots, v_{\beta+1}\} \subset \Gamma_G(v)$ . Seja  $S_\beta = \cup_{v \in V} S_\beta^v$  e  $X = P_1 \cup S_\beta$ . Analogamente, como feito na seção precedente, consideramos os elementos  $x \in X$  como subconjuntos de  $V$ .

Considere os seguintes eventos não favoráveis:

I - Para  $\{u, v\} \in P_1$ , seja  $A_{\{u,v\}}$  o evento onde  $u$  e  $v$  recebem a mesma cor;

II - Para  $s_\beta = \{v_1, \dots, v_{\beta+1}\} \in S_\beta$ , seja  $A_{s_\beta}$  o evento que todos os vértices em  $s_\beta$  recebam a mesma cor.

Se nenhum dos eventos acima ocorrem então  $C$  é uma coloração  $\beta$ -frugal. Analisando as probabilidades de I e II, temos:

$$P(A_{\{u,v\}}) = \frac{1}{c}$$

$$P(A_{s_\beta}) = \frac{c}{c^{\beta+1}} = \frac{1}{c^\beta}$$

De modo análogo como visto anteriormente, o grafo de dependência  $\mathcal{G}_\mathcal{A}$  da família  $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \in X}$  é tal que o par  $\{x, x'\}$  é aresta de  $\mathcal{G}_\mathcal{A}$  se, e somente se,  $x \cap x' \neq \emptyset$ . Definimos então, para qualquer  $v \in V$ ,

$$\Gamma_1(v) = \{A_x \in \mathcal{A} : x \in P_1\} \quad (3.28)$$

$$\Gamma_\beta(v) = \{A_x \in \mathcal{A} : x \in S_\beta\} \quad (3.29)$$

e

$$\Gamma(v) = \{A_x \in \mathcal{A} : x \in X \text{ e } v \in x\} = \Gamma_1(v) \cup \Gamma_\beta(v)$$

Novamente, para qualquer  $v \in V$ , temos que  $\Gamma(v)$  é uma clique de  $\mathcal{G}_\mathcal{A}$  e, portanto, para qualquer  $x \in X$ , temos que

$$\Gamma^+(A_x) = \cup_{e \in X} \Gamma(e)$$

é união de 2 cliques se  $x \in P_1$  e de  $\beta + 1$  cliques se  $x \in S_\beta$ .

Além do mais,

- um vértice  $v \in V$  pertence a no máximo  $\Delta$  arestas de  $G$ ;

- um vértice  $v \in V$  pertence a no máximo  $\Delta \binom{\Delta}{\beta} \leq \frac{\Delta^{1+\beta}}{\beta!}$  conjuntos do tipo

$s_\beta = \{v_1, \dots, v_{\beta+1}\}$ .

Consequentemente,

$$|\Gamma_1(v)| \leq \Delta$$

$$|\Gamma_\beta(v)| \leq \frac{\Delta^{1+\beta}}{\beta!}$$

Vamos agora estimar, para  $x \in X$ , a função  $\varphi_{A_x}^*(\mu)$  definida em (2.7) no presente caso.

Escolhemos os números não negativos  $\{\mu(A_z)\}_{z \in X}$  da seguinte maneira: ponhamos, para qualquer  $x \in P_1$ ,  $\mu(A_x) = \mu_1$  e, para qualquer  $y \in S_\beta$ ,  $\mu(A_y) = \mu_\beta$ , sendo  $\mu_1$  e  $\mu_\beta$  números positivos. Daí, para  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_{A_x}^*(\mu) &= \prod_{v \in x} [1 + \sum_{B \in \Gamma(v)} \mu(B)] = \prod_{v \in x} [1 + \sum_{B \in \Gamma_1(v)} \mu(B) + \sum_{B \in \Gamma_\beta(v)} \mu(B)] = \\ &= \prod_{v \in x} [1 + |\Gamma_1(v)|\mu_1 + |\Gamma_\beta(v)|\mu_\beta] \leq [1 + \Delta\mu_1 + \frac{\Delta^{1+\beta}}{\beta!}\mu_\beta]^{|x|} \end{aligned}$$

Em particular, se  $x \in P_1$ , i.e, se  $x = \{v_1, v_2\}$  é uma cereja

$$\varphi_{A_x}^*(\mu) \leq \left[ 1 + \Delta\mu_1 + \frac{\Delta^{1+\beta}}{\beta!} \mu_\beta \right]^2$$

e se  $y \in S_\beta$ , i.e, se  $x = \{v_1, \dots, v_{\beta+1}\}$ ,

$$\varphi_{A_y}^*(\mu) \leq \left[ 1 + \Delta\mu_1 + \frac{\Delta^{1+\beta}}{\beta!} \mu_\beta \right]^{\beta+1}$$

Com isso, o Teorema 41 é satisfeito se,

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\mu_1}{\left( 1 + \Delta\mu_1 + \frac{\Delta^{1+\beta}}{\beta!} \mu_\beta \right)^2} \quad (3.30)$$

e,

$$\frac{1}{c^\beta} \leq \frac{\mu_\beta}{\left( 1 + \Delta\mu_1 + \frac{\Delta^{1+\beta}}{\beta!} \mu_\beta \right)^{\beta+1}} \quad (3.31)$$

Ponhamos agora  $\mu_1 = \frac{\alpha}{\Delta}$  e  $\mu_\beta = \beta! \left( \frac{\alpha}{\Delta} \right)^{1+\beta}$ , com  $\alpha > 0$ . Assim, as desigualdades (3.30) e (3.31) tornam-se, respectivamente,

$$\frac{1}{c} \leq \frac{1}{\Delta} \frac{\alpha}{(1 + \alpha + \alpha^{1+\beta})^2} \quad (3.32)$$

e,

$$\frac{1}{c} \leq \frac{(\beta!)^{1/\beta}}{\Delta^{1+1/\beta}} \left( \frac{\alpha}{1 + \alpha + \alpha^{1+\beta}} \right)^{1+1/\beta} \quad (3.33)$$

As desigualdades (3.32) e (3.33) são simultaneamente satisfeitas se

$$c \geq \max \left\{ k_1(\beta)\Delta, k_2(\beta) \frac{\Delta^{1+1/\beta}}{(\beta!)^{1/\beta}} \right\},$$

onde

$$k_1(\beta) = \min_{\alpha>0} \frac{(1 + \alpha + \alpha^{1+\beta})^2}{\alpha} \quad (3.34)$$

e

$$k_2(\beta) = \min_{\alpha>0} \left[ \frac{1 + \alpha + \alpha^{1+\beta}}{\alpha} \right]^{1+1/\beta} \quad (3.35)$$

Consequentemente, temos que o número cromático  $\beta$ -frugal  $\mathcal{X}^\beta(G)$  de  $G$  admite a cota superior

$$\mathcal{X}^\beta(G) < \left[ \max \left\{ k_1(\beta)\Delta, k_2(\beta) \frac{\Delta^{1+1/\beta}}{(\beta!)^{1/\beta}} \right\} \right]$$

Finalmente, uma computação (com a ajuda do computador) mostra que as funções  $k_1(\beta)$  e  $k_2(\beta)$  são ambas decrescentes de  $\beta$  tais que  $k_1(\beta) \in (4; 5, 27)$  e  $k_2(\beta) \in (2; 4, 92)$  quando  $\beta \geq 2$ , como queríamos mostrar.  $\square$

# Referências Bibliográficas

- [1] Moser, A and Tardos, G.: *A constructive proof of the Lovász local lemma.* J. ACM, 57 Article 11, 2010.
- [2] Alves, R.: *Duas aplicações da Mecânica Estatística: Percolação em Grafos Infinitos e Lema Local de Lovász Algorítmico.* Tese de Doutorado: Belo Horizonte 2013.
- [3] Pedgen, W.: *An improvement of the Moser-Tardos Algorithmic local lema.* SIAM J. Discrete Math., 28(2), 911-917. (7 pages), 2011.
- [4] Bissacot, R.; Fernández, R.; Procacci, A.; Scoppola, B. *An improvement of the Lovász Local Lemma via Cluster Expansion,* Combinatorics, Probability and Computing, 20(5), 709-719. 2011
- [5] Alon, N. Mc Diarmid, C.; Reed, B. *Acyclic colouring of graphs,* *Random Structures and Algorithms*, 2, no. 3, 277-288 (1991).
- [6] Fertin, G.; Raspaud, A.; Reed, B. *Star colouring of graphs,* *Journal of Graph Theory*, 47, Issue 3, 163-182 (2004)
- [7] Erdos, P. and Lovász, L. *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions, in nite and nite sets.* Vol. II, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Vol. 10, pp. 609-627. North-Holland, Amsterdam, (1975).
- [8] Alon, N. 1991. *A parallel algorithmic version of the local lemma.* Rand. Struct. Algor. 2, 4, 367-378.
- [9] Beck, J. 1991. *An algorithmic approach to the Lovász local lemma.* Rand. Struct. Algor. 2, 4, 343-365.
- [10] Molly, M., and Reed, B. 1998. *Further algorithmic aspects of the local lemma.* In Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC). ACM, New York, 524-529
- [11] Ndreca, S.; Procacci, A.; Scoppola, B. *Improved bounds on coloring of graphs,* European Journal of Combinatorics, 33, n 4, p. 592-609 (2012).
- [13] Scott, A.; Sokol, A. D.: *The repulsive lattice gas, the independent-set polynomial, and the Lovasz local lemma,* J. Stat. Phys. 118, no. 5-6, 1151-1261,(2005).

- [14] Fernandez, R.; Procacci A.: *Cluster expansion for abstract polymer models*. New bounds from an old approach, *Communications in Mathematical Physics*. 274, n.1, 123-140 (2007).
- [15] Alon, N. and Spencer, J.: *The Probabilistic Method*. Third Edition. New York, Wiley-Interscience, (2008).
- [16] Dobrushin, R.: *Perturbation methods of the theory of Gibbsian elds*, in P. Bernard (editor), *Lectures on Probability Theory and Statistics*, *Lecture Notes in Mathematics* Volume 1648, 1996, pp 1-66 Springer-Verlag, Berlin (1996).