UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Soluções de Viscosidade para Problemas envolvendo o ∞-Laplaciano

Lucas Martins Rocha

Orientador : Prof. Dr. Rodney Josué Biezuner

Belo Horizonte, 6 de julho de 2018

Lucas Martins Rocha

Soluções de Viscosidade para Problemas envolvendo o ∞-Laplaciano

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Rodney Josué Biezuner
Universidade Federal de Minas Gerais

Resumo

Neste trabalho temos como objetivo principal apresentar os resultados alcançados por Marian Bocea e Mihai Mihailescu no artigo [2], em que buscam tratar da existência de soluções não negativas para uma classe de problemas que dependem de um parâmetro real e envolvem o operador ∞-Laplaciano. Alguns resultados utilizados ao longo do artigo foram obtidos do artigo [15], de Petri Juutinen, Peter Lindqvist e Juan J. Manfredi, em especial os que envolvem o primeiro autovalor do ∞-Laplaciano.

Abstract

In this work, our main goal is to present the results obtained by Marian Bocea e Mihai Mihailescu in the article [2], where they seek to treat the exitence of nonnegative solutions for a class of problems depending on a real parameter and involving the ∞-Laplacian operator. Some results used through the article were presented in [15], by Petri Juutinen, Peter Lindqvist and Juan J. Manfredi, in special those which involve the first eigenvalue of the ∞-Laplacian.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Marian Bocea e Mihai Mihailescu buscam, em [2], tratar o caso limite de uma família de problemas de autovalor perturbado para o $(p, q(p))$-laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_{q(p)} u &= \lambda |u|^{p-2} u \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ e $p, q(p)$ satisfazem certas condições. É mostrado que soluções de viscosidade não triviais e não negativas existem se, e só se, o parâmetro λ é maior ou igual ao inverso do máximo da distância até o bordo de Ω.

Em [15], Petri Juutinen, Peter Lindqvist e Juan J. Manfredi tratam de questões envolvendo limites de autofunções do p-laplaciano como soluções de viscosidade de

$$\min\{|\nabla u| - \Lambda_\infty u, -\Delta_\infty u\} = 0$$

em que

$$\Lambda_\infty = \frac{1}{||\delta||_\infty}$$

e δ é a função distância até a fronteira de Ω; obtêm um princípio de comparação para o logarítmo de ∞-autofuções e o aplicam ao problema

$$\begin{cases} \min\{|\nabla u| - \Lambda u, -\Delta_\infty u\} &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

mostrando que $\Lambda = \Lambda_\infty$.

No capítulo 2, pautados em [16], discorreremos brevemente sobre as ideias por trás das soluções de viscosidade, trazendo um pouco do contexto do surgimento das mesmas e de sua utilidade no estabelecimento de soluções locais de equações diferenciais parciais de segunda ordem elípticas não degeneradas. Tudo isso sob a perspectiva de tais equações não admitirem integração por partes.

No capítulo 3 trataremos com mais detalhes dos resultados apresentados em [15]. Inicialmente mostraremos que o inverso do máximo da distância até o bordo de Ω é obtido como limite de autovalores do p-laplaciano quando $p \to \infty$. Logo após, provaremos que toda (sub)-supersolução fraca do problema de autovalor do p-laplaciano é também (sub)-supersolução de viscosidade do mesmo e, em seguida, obteremos a solução de viscosidade

u_∞ de $F_\infty(u, \nabla u, D^2u)$ como limite de uma subsequência de soluções de viscosidade $\{u_p\}$. A demonstração de um princípio de comparação para o logarítmo de ∞-autofunções, bem como a aplicação desse princípio no problema $\min\{|\nabla u| - \Lambda u, -\Delta_\infty u\} = 0$ com condição de Dirichlet serão as últimas abordagens desse capítulo.

Por fim, no capítulo 4, vamos abordar a demonstração de dois teoremas apresentados em [2]: O conjunto de números reais λ para o qual (1.1) possui soluções fracas não triviais é dado pelo intervalo aberto $(\lambda_1(p), \infty)$, sendo $\lambda_1(p)$ o primeiro autovalor do problema, mostrando ainda que para cada parâmetro λ nesse intervalo existe uma solução fraca não nula e não negativa de (1.1); a seguir, mostraremos que se $\Lambda \in (-\infty, \Lambda_\infty)$ e $\lim_{p\to\infty} \dfrac{q(p)}{p} = Q$, então o problema

$$\begin{cases} \min\{\max\{|\nabla u|, |\nabla u|^Q\} - \Lambda u, -\Delta_\infty\} &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

não possui soluções de viscosidade não triviais e não negativas, enquanto se $\Lambda \in [\Lambda_\infty, \infty)$ o problema possui pelo menos uma solução de viscosidade não trivial e não negativa.

Capítulo 2

Soluções de Viscosidade

Soluções de Viscosidade formam uma teoria de soluções "fracas" que são aplicadas a certos tipos de EDPs não lineares de primeira e segunda ordem.

Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(\Omega)$, $n \geq 1$. Considere a equação diferencial parcial

$$F(\ . \ , u, \nabla u, D^2 u) = 0, \tag{2.1}$$

em que Du é o vetor gradiente de u e $D^2 u$ é a matriz Hessiana de u e

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}(n) \to \mathbb{R}$$

é a função definindo a equação cujos argumentos (x, r, p, X) estão em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}(n)$.

Assumiremos sempre que F é contínua e $\mathcal{S}(n)$ denota o conjunto das matrizes simétricas $n \times n$. F é não-linear se for não-linear com respeito à derivada de maior ordem.

As soluções de viscosidade foram introduzidas nos anos 80 por Crandall e Lions (ver [8]) para $F(\ . \ , u, \nabla u) = 0$ como um *critério de unicidade*, com o intuito de selecionar uma das infinitas soluções fortes q.t.p. lipschitzianas do problema de Dirichlet para $F(\ . \ , u, \nabla u) = 0$.

Para EDP's de segunda ordem, problemas mais fundamentais que unicidade aparecem: surgem as "soluções singulares", que não podem ser rigorosamente justificadas, já que $F(\ . \ , u, \nabla u, D^2 u) = 0$ não admite integração por partes. Assim, soluções de viscosidade formam uma "teoria de distribuição não-linear" sem dualidade. Além disso, soluções de viscosidade se aplicam a EDPs elípticas e parabólicas degeneradas.

Definição 2.1 *A EDP* $F(\ . \ , u, \nabla u, D^2 u) = 0$ *é dita elíptica degenerada quando* $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}(n) \to \mathbb{R}$ *satisfaz a monotonicidade fraca*

$$X \leq Y \ \text{em } \mathcal{S}(n) \Rightarrow F(x, r, p, X) \leq F(x, r, p, Y)$$

para todo $(x, r, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Vale fazermos algumas observações:

Observação 2.2 i) $A \geq 0$ em $\mathcal{S}(n)$ se $\sigma(A) \subseteq [0, \infty)$, ou seja, todos os autovalores da matriz simétrica A são não-negativos. Assim, $A \leq B$ se $B - A \geq 0$.

ii) Vamos obter o operador ∞-Laplaciano como limite quando $p \to \infty$ da equação

$$F_p(u, \nabla u, D^2u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0.$$

Observamos que $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |\nabla u|^{p-2}\Delta u + \nabla(|\nabla u|^{p-2}) \cdot \nabla u$. Em coordenadas, sendo $|\nabla u|^{p-2} = (\sum_{i=1}^{n}(\partial_i u)^2)^{\frac{p-2}{2}}$, temos

$$\partial_j(|\nabla u|^{p-2}) = \frac{p-2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\partial_i u)^2\right)^{\frac{p-4}{2}} \sum_{i=1}^{n} 2\partial_i u \partial_{ij} u = (p-2)|\nabla u|^{p-4}\sum_{i=1}^{n}\partial_i u \partial_{ij} u$$

e, assim,

$$\nabla(|\nabla u|^{p-2}) \cdot \nabla u = (p-2)|\nabla u|^{p-4}\sum_{i,j=1}^{n}\partial_i u \partial_j u \partial_{ij} u.$$

Substituindo na equação do p-Laplaciano e colocando o termo $(p-2)|\nabla u|^{p-4}$ em evidência, assumindo $|\nabla u| \neq 0$, obtemos

$$(p-2)|\nabla u|^{p-4}\left(\frac{|\nabla u|^2}{p-2}\Delta u + \sum_{i,j=1}^{n}\partial_i u \partial_j u \partial_{ij} u\right) = 0.$$

Com isso, temos

$$\sum_{i,j=1}^{n}\partial_i u \partial_j u \partial_{ij} u = -\frac{|\nabla u|^2}{p-2}\Delta u$$

e, fazendo $p \to \infty$, temos $\sum_{i,j=1}^{n}\partial_i u \partial_j u \partial_{ij} u = 0$ e $\Delta_\infty u = \sum_{i,j=1}^{n}\partial_i u \partial_j u \partial_{ij} u$.

iii) O operador ∞-Laplaciano é elíptico degenerado. De fato, definindo

$$\Delta_\infty(p, X) = \langle X \cdot p, p\rangle,$$

temos $\Delta_\infty(p, X) - \Delta_\infty(p, Y) = \langle (X - Y) \cdot p, p\rangle \geq 0$ quando $X - Y \geq 0$.

Vamos à motivação de soluções de viscosidade.
Suponha que $u \in C^2(\Omega)$ seja uma solução clássica de

$$F(x, u(x), \nabla u(x), D^2u(x)) = 0, x \in \Omega, \tag{2.2}$$

e que F é elíptica degenerada.

Assuma que, em $x_0 \in \Omega$, a função u possa ser "tocada por cima" por uma função $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ em x_0 (ver figura (2.1)). Assim, $u - \psi$ tem máximo local em x_0, pois

$$u - \psi \leq 0 = (u - \psi)(x_0) \text{ em } B_r(x_0) \subset \Omega. \tag{2.3}$$

Por argumentos de cálculo temos

$$\nabla(u - \psi)(x_0) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

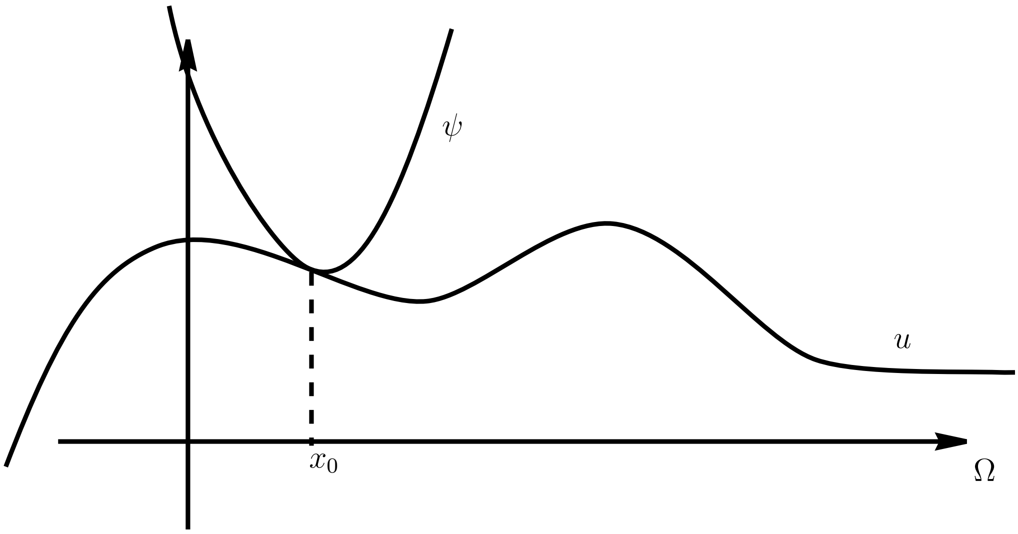

Figura 2.1: Gráficos de u e ψ.

$$D^2(u-\psi)(x_0) \leq 0 \text{ em } \mathcal{S}(n). \tag{2.5}$$

Uma vez que u é uma solução, temos

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0), D^2u(x_0)) \\ &= F(x_0, \psi(x_0), \nabla\psi(x_0), D^2u(x_0)) \text{ (por 2.3 e 2.4)} \\ &\leq F(x_0, \psi(x_0), \nabla\psi(x_0), D^2\psi(x_0)) \text{ (por 2.2 e 2.5).} \end{aligned}$$

Assim, se u for solução de (2.2) então, dado $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in \Omega$ tal que $u - \psi \leq 0 = (u-\psi)(x_0)$ em uma bola $B_r(x_0) \subset \Omega$, temos $F(x_0, \psi(x_0), \nabla\psi(x_0), D^2\psi(x_0)) \geq 0$. De forma análoga, se u for solução de (2.2) então, dado $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $y_0 \in \Omega$ tal que $u-\phi \geq 0 = (u-\phi)(y_0)$ em uma bola $B_r(y_0) \subset \Omega$, temos $F(y_0, \phi(y_0), \nabla\phi(y_0), D^2\phi(y_0)) \leq 0$.

Assim, definiremos subsolução e supersolução de viscosidade da seguinte forma:

Definição 2.3 *Dada uma função $\phi \in C^2(\Omega)$ dizemos:*

i) Uma função u semicontínua superiormente é dita uma subsolução de viscosidade de (2.1) se, dado $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \phi(x_0)$ e $u(x) < \phi(x)$ em uma vizinhança de x_0, temos $F(\ .\ , \phi(x_0), \nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0$;

ii) Uma função u semicontínua inferiormente é dita uma supersolução de viscosidade de (2.1) se, dado $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \phi(x_0)$ e $u(x) > \phi(x)$ em uma vizinhança de x_0, temos $F(\ .\ , \phi(x_0), \nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \geq 0$;

iii) Uma função u é dita uma solução de viscosidade de (2.1) se for uma subsolução e uma supersolução de viscosidade.

Capítulo 3

O problema do ∞-autovalor

Neste capítulo apresentaremos resultados sobre limites de autofunções do p-laplaciano como soluções de viscosidade de

$$\min\{|\nabla u| - \Lambda_\infty u, -\Delta_\infty u\} = 0,$$

em que $\Lambda_\infty = \dfrac{1}{||\delta||_\infty}$ e $\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Em seguida vamos apresentar a prova de um princípio de comparação para o logaritmo de ∞-autofunções, baseada na construção de uma função teste com propriedades adequadas. Por fim, faremos uma aplicação do princípio de comparação obtido ao problema

$$\min\{|\nabla u| - \Lambda u, -\Delta_\infty u\} = 0$$

com condição de Dirichlet, provando que $\Lambda = \Lambda_\infty$.

3.1 Definições e Resultados

Em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, a função distância $\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ é Lipschitz contínua (ver (A.2)), satisfaz $|\nabla\delta(x)| = 1$ q.t.p. de Ω (ver (A.4)) e se anula no bordo de Ω. Seja ϕ outra função Lipschitz contínua que se anula em $\partial\Omega$. Fixe $x \in \Omega$ e escolha $y \in \partial\Omega$ tal que $\delta(x) = |x - y|$. Observe que a desigualdade

$$|\phi(x)| = |\phi(x) - \phi(y)| \leq ||\nabla\phi||_\infty |x - y| = ||\nabla\phi||_\infty \delta(x)$$

é obtida aplicando-se a desigualdade do valor médio ao segmento de reta que une x e y, que é um subconjunto contido em Ω (caso contrário y não realizaria o mínimo da função distância).

Portanto,

$$\frac{||\nabla\delta||_\infty}{|\delta(x)|} \leq \frac{||\nabla\phi||_\infty}{|\phi(x)|} \tag{3.1}$$

e vemos que a função distância satisfaz

$$\Lambda_\infty = \frac{||\nabla\delta||_\infty}{||\delta||_\infty} \leq \frac{||\nabla\phi||_\infty}{||\phi||_\infty} \tag{3.2}$$

para toda $\phi \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. A constante $\Lambda_\infty = \dfrac{1}{||\delta||_\infty}$ depende somente do domínio Ω e interpretamos Λ_∞ como o menor ∞-autovalor do domínio Ω (a ser melhor explicado no decorrer do texto).

Considere, para $p > 1$ finito, o problema

$$\Lambda_p = \inf_{\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |\nabla\phi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |\phi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \right\}. \tag{3.3}$$

Existe uma função minimizante $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$, única a menos de multiplicação por constantes, que satisfaz a equação

$$-\text{div}(|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p) = \Lambda_p^p |u_p|^{p-2}u_p. \tag{3.4}$$

Observação 3.1 É bem conhecido que $u_p > 0$ em Ω (ver [19]) e assim podemos trocar o lado direito da desigualdade (3.4) por u_p^{p-1}.

Normalizamos u_p, ou seja, $||u_p||_p = 1$, em que $||f||_p = \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Lema 3.2 $\lim\limits_{p\to\infty} \Lambda_p = \Lambda_\infty$.

Prova. Usando $\delta(x)$ como função teste em (3.3) obtemos

$$\Lambda_p \leq \frac{1}{||\delta||_p},$$

o que implica que

$$\limsup_{p\to\infty} \Lambda_p \leq \Lambda_\infty,$$

já que $||\delta||_p \to ||\delta||_\infty$ quando $p \to \infty$ (ver (A.1)).

Observe que $||\nabla u_p||_p = \Lambda_p$ é uniformemente limitada em p. Fixe um expoente $m > n$. Para $p > m$ pela desigualdade de Hölder obtemos

$$||\nabla u_p||_m \leq |\Omega|^{-\frac{1}{m}} \left[\left(\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx \right)^{\frac{m}{p}} |\Omega|^{\frac{p-m}{p}} \right]^{\frac{1}{m}} = ||\nabla u_p||_p = \Lambda_p.$$

Concluímos que $\{u_p\}_{p\geq m}$ é uniformemente limitada em $W_0^{1,m}(\Omega)$. Podemos selecionar uma subsequência $\{u_{p_i}\}$ que converge para uma função denotada u_∞ fracamente em $W^{1,m}(\Omega)$ (ver (A.6)) e uniformemente em $C^0(\overline{\Omega})$ (ver (A.7)). A função limite é ∞-superharmônica (a ser definida no fim dessa seção) não negativa e, portanto, satisfaz uma desigualdade do tipo Harnack, implicando que $u_\infty(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$ (ver (A.5)). Para q suficientemente grande, pela semicontinuidade inferior fraca da norma em L^q e pelo fato de u_{p_i} convergir fracamente para u_∞ em $W^{1,q}(\Omega)$, obtemos

$$||\nabla u_\infty||_q \leq \liminf_{p_i\to\infty} ||\nabla u_{p_i}||_q$$

e, aliando o fato de que $||u_\infty||_q = \lim_{p_i\to\infty} ||u_{p_i}||_q$ (pela imersão compacta), concluímos que

$$\frac{||\nabla u_\infty||_q}{||u_\infty||_q} \le \liminf_{p_i\to\infty} \frac{||\nabla u_{p_i}||_q}{||u_{p_i}||_q}.$$

Multiplicando e dividindo a desigualdade por $||u_{p_i}||_{p_i}$ e usando que $||\nabla u_{p_i}||_q \le ||\nabla u_{p_i}||_{p_i}$ (por Hölder) temos

$$\frac{||\nabla u_\infty||_q}{||u_\infty||_q} \le \liminf_{p_i\to\infty} \frac{||\nabla u_{p_i}||_{p_i}}{||u_{p_i}||_q}\frac{||u_{p_i}||_{p_i}}{||u_{p_i}||_{p_i}} = \liminf_{p_i\to\infty} \Lambda_{p_i}\frac{||u_{p_i}||_{p_i}}{||u_{p_i}||_q},$$

pois $\Lambda_{p_i} = \dfrac{||\nabla u_{p_i}||_{p_i}}{||u_{p_i}||_{p_i}}$ por (3.3). Como $||u_{p_i}||_{p_i} \le ||u_{p_i}||_\infty$,

$$\frac{||\nabla u_\infty||_q}{||u_\infty||_q} \le \left(\liminf_{p_i\to\infty} \Lambda_{p_i}\right)\frac{||u_{p_i}||_\infty}{||u_\infty||_q},$$

e, tomando $p_i \to \infty$, obtemos

$$\frac{||\nabla u_\infty||_q}{||u_\infty||_q} \le \left(\liminf_{p_i\to\infty} \Lambda_{p_i}\right)\frac{||u_\infty||_\infty}{||u_\infty||_q},$$

que pode ser visto como

$$\frac{||\nabla u_\infty||_q}{||u_\infty||_\infty} \le \left(\liminf_{p_i\to\infty} \Lambda_{p_i}\right)$$

para q fixado, cancelando-se os termos $||u_\infty||_q$. Agora, tomando $q \to \infty$ e usando (3.2) temos

$$\Lambda_\infty \le \liminf_{p_i\to\infty} \Lambda_i.$$

Como podemos aplicar o raciocínio a qualquer subsequência de $\{u_p\}$, temos o resultado. $\square$

Observação 3.3 Como podemos constatar, a prova anterior mostra que u_∞ é um extremo para o problema (3.2), isto é,

$$\Lambda_\infty \le \frac{||\nabla u_\infty||_\infty}{||u_\infty||_\infty} \le \liminf_{p_i\to\infty} \Lambda_{p_i} = \Lambda_\infty.$$

Suponha agora que as u_p's são suaves e possamos derivar (3.4), obtendo

$$-\left[|\nabla u_p|^{p-2}\Delta u_p + (p-2)|\nabla u_p|^{p-4}\Delta_\infty u_p\right] = \Lambda_p^p|u_p|^{p-2}u_p. \tag{3.5}$$

Essa equação é totalmente não-linear e faz sentido falar sobre subsoluções e supersoluções de viscosidade. O lema a seguir mostra que u_p é sempre uma solução de viscosidade de (3.5).

Lema 3.4 *Uma (sub)-supersolução fraca contínua $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ da equação*

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \Lambda_p^p|u|^{p-2}u \tag{3.6}$$

é sempre uma (sub)-supersolução de viscosidade de (3.5).

Prova. Mostraremos o caso de supersoluções. Fixe $x_0 \in \Omega$ e $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que $u(x_0) = \phi(x_0)$ e $u(x) > \phi(x)$ para $x \neq x_0$. Queremos mostrar que

$$-\left[|\nabla\phi(x_0)|^{p-2}\Delta\phi(x_0) + (p-2)|\nabla\phi(x_0)|^{p-4}\Delta_\infty\phi(x_0)\right] - \Lambda_p^p|\phi(x_0)|^{p-2}\phi(x_0) \geq 0.$$

Suponha que tenhamos a desigualdade contrária. Então, por continuidade, existe $r > 0$ tal que, se $|x - x_0| < r$, temos

$$-\left[|\nabla\phi(x)|^{p-2}\Delta\phi(x) + (p-2)|\nabla\phi(x)|^{p-4}\Delta_\infty\phi(x)\right] < \Lambda_p^p|\phi(x)|^{p-2}\phi(x).$$

Defina $m = \inf\limits_{x\in\partial B_r(x_0)}(u(x) - \phi(x)) > 0$ e escreva $\Phi = \phi + \frac{1}{2}m$. A função Φ satisfaz $\Phi = \phi + \frac{1}{2}m < \phi + u - \phi = u$ em $\partial B_r(x_0)$, $\Phi(x_0) = \phi(x_0) + \frac{1}{2}m = u(x_0) + \frac{1}{2}m > u(x_0)$ e, como $\nabla\Phi = \nabla\phi$,

$$-\mathrm{div}(|\nabla\Phi(x)|^{p-2}\nabla\Phi(x)) < \Lambda_p^p|\phi(x)|^{p-2}\phi(x). \tag{3.7}$$

A função $(\Phi - u)^+$ estendida como zero fora da bola $B_r(x_0)$ é uma boa função teste para a equação (3.6). Como estamos assumindo que u é uma supersolução fraca, temos que

$$\int_{\{\Phi>u\}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla(\Phi - u)dx \geq \Lambda_p^p \int_{\{\Phi>u\}} |u|^{p-2}u(\Phi - u)dx. \tag{3.8}$$

Multiplicando ambos os lados de (3.7) por $(\Phi - u)^+$ e integrando por partes obtemos

$$\int_{\{\Phi>u\}} |\nabla\Phi|^{p-2}\nabla\Phi \cdot \nabla(\Phi - u)dx < \Lambda_p^p \int_{\{\Phi>u\}} |\phi|^{p-2}\phi(\Phi - u)dx. \tag{3.9}$$

Subtraindo (3.8) de (3.9) chegamos em

$$\int_{\{\Phi>u\}} \langle|\nabla\Phi|^{p-2}\nabla\Phi - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla(\Phi - u)\rangle dx < \Lambda_p^p \int_{\{\Phi>u\}} \left(|\phi|^{p-2}\phi - |u|^{p-2}u\right)(\Phi - u)dx. \tag{3.10}$$

Da desigualdade (A.8) observamos que

$$\int_{\{\Phi>u\}} \langle|\nabla\Phi|^{p-2}\nabla\Phi - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla(\Phi - u)\rangle dx \geq C(p) \int_{\{\Phi>u\}} |\nabla\phi - \nabla u|^p dx.$$

Como o lado direito de (3.10) é negativo, concluímos que $\Phi \leq u$ em $B_r(x_0)$, contradizendo o fato de que $\Phi(x_0) > u(x_0)$. $\square$

Consideremos o funcional

$$F_p(z, X, S) = -\left[|X|^{p-2}\mathrm{tr}S + (p-2)|X|^{p-4}\langle S \cdot X, X\rangle\right] - \Lambda_p^p|z|^{p-2}z,$$

em que $z, X \in \mathbb{R}^n$ e S é uma matriz real simétrica. Em seguida, vamos calcular o limite de F_p quando $p \to \infty$ no sentido de viscosidade. Isto é, consideramos uma sequência de soluções de viscosidade $\{u_p\}$ e gostaríamos de saber qual equação é satisfeita por um ponto de acumulação dessa sequência, denotado por u_∞. Explicitamente, assumimos que para uma subsequência $\{u_{p_i}\}$ tenhamos $u_{p_i} \to u_\infty$ uniformemente em Ω quando $p_i \to \infty$.

Fixe um ponto $x_0 \in \Omega$ e seja uma função $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que $u_\infty(x_0) = \phi(x_0)$ e $u_\infty(x) > \phi(x)$ para $x \neq x_0$. Fixe $R > 0$ tal que $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$. Para $0 < r < R$ temos que $\inf\limits_{x \in B_R(x_0)\setminus B_r(x_0)} (u_\infty(x) - \phi(x)) > 0$. Como $u_{p_i} \to u_\infty$ uniformemente no fecho de $B_R(x_0)$, concluímos que, para $i \geq i_r$, $\inf\limits_{x \in B_R(x_0)\setminus B_r(x_0)} (u_{p_i}(x) - \phi(x)) > u_{p_i}(x_0) - \phi(x_0)$.

Portanto, para tais índices i, $u_{p_i} - \phi$ tem mínimo num ponto $x_i \in B_r(x_0)$ e fazendo $r \to 0$ temos que $x_i \to x_0$ quando $i \to \infty$. Para simplificar, escrevemos p_i e x_i ao invés de p_{i_r} e $x_{p_{i_r}}$. Como u_{p_i} é supersolução de viscosidade de (3.5) e $u_{p_i}(x_i) = \phi(x_i)$, temos

$$-\left[|\nabla\phi(x_i)|^{p_i-2}\Delta\phi(x_i) + (p_i-2)|\nabla\phi(x_i)|^{p_i-4}\Delta_\infty\phi(x_i)\right] \geq \Lambda_{p_i}^{p_i}|u_{p_i}(x_i)|^{p_i-2}u_{p_i}(x_i). \quad (3.11)$$

Lembre que $u_\infty(x) > 0$ (por (3.1)) e, logo, $u_{p_i}(x_i) > 0$ para i grande, o que implica que $|\nabla\phi(x_i)| \neq 0$ de (3.11). Dividindo por $(p_i-2)|\nabla\phi(x_i)|^{p_i-4}$ chegamos em

$$-\frac{|\nabla\phi(x_i)|^2\Delta\phi(x_i)}{p_i-2} - \Delta_\infty\phi(x_i) \geq \left(\frac{\Lambda_{p_i}u_{p_i}(x_i)}{|\nabla\phi(x_i)|}\right)^{p_i-4}\frac{\Lambda_{p_i}^4 u_{p_i}(x_i)^3}{p_i-2}. \quad (3.12)$$

Suponha que $\dfrac{\Lambda_\infty\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|} > 1$. Fazendo $p_i \to \infty$ teríamos $-\Delta_\infty\phi(x_0) \geq \infty$, o que é uma contradição. Portanto, devemos ter

$$\frac{\Lambda_\infty\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|} \leq 1. \quad (3.13)$$

Como o lado direito de (3.12) é não negativo, temos que, quando $p_i \to \infty$,

$$-\Delta_\infty\phi(x_0) \geq 0. \quad (3.14)$$

Combinando (3.13) e (3.14) obtemos

$$\min\{|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_\infty\phi(x_0), -\Delta_\infty\phi(x_0)\} \geq 0. \quad (3.15)$$

Assim, estabelecemos que u_∞ é uma supersolução da equação

$$\min\{|\nabla u| - \Lambda_\infty u, -\Delta_\infty u\} = 0.$$

Portanto é natural definir

$$F_\infty(z, X, S) = \min\{|X| - \Lambda_\infty z, -\langle S\cdot X, X\rangle\},$$

sob o olhar de (2.2) item (*ii*).

Vamos ao teorema principal dessa seção:

Teorema 3.5 *Uma função u_∞ obtida como limite de uma subsequência $\{u_p\}$ é uma solução de viscosidade da equação*

$$F_\infty(u, \nabla u, D^2u) = \min\{|\nabla u| - \Lambda_\infty u, -\Delta_\infty u\} = 0. \quad (3.16)$$

Antes de terminar a prova do teorema, observe que

i) u_∞ é ∞-superharmônica pois $-\Delta_\infty u_\infty \geq 0$ no sentido de viscosidade, e

ii) $|\nabla u_\infty| \geq \Lambda_\infty u_\infty$ no sentido de viscosidade,

conforme (3.14) e (3.13) respectivamente. Além do mais, se uma das desigualdades é estrita, a outra deve ser uma igualdade.

Prova. Resta provar que u_∞ é uma subsolução de viscosidade. Fixe $x_0 \in \Omega$ e uma função $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que $u_\infty(x_0) = \phi(x_0)$ e $u_\infty(x) < \phi(x)$ em uma vizinhança de x_0. Queremos verificar que

$$\min\{|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_\infty \phi(x_0), -\Delta_\infty \phi(x_0)\} \leq 0.$$

Se $\nabla\phi(x_0) = 0$ nada há a provar. Vamos assumir que $|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_\infty\phi(x_0) > 0$. De forma análoga a (3.11) obtemos

$$-\left[|\nabla\phi(x_i)|^{p_i-2}\Delta\phi(x_i) + (p_i-2)|\nabla\phi(x_i)|^{p_i-4}\Delta_\infty\phi(x_i)\right] \leq \Lambda_{p_i}^{p_i}|u_{p_i}(x_i)|^{p_i-2}u_{p_i}(x_i),$$

e de (3.12)

$$-\frac{|\nabla\phi(x_i)|^2\Delta\phi(x_i)}{p_i-2} - \Delta_\infty\phi(x_i) \leq \left(\frac{\Lambda_{p_i}u_{p_i}(x_i)}{|\nabla\phi(x_i)|}\right)^{p_i-4}\frac{\Lambda_{p_i}^4 u_{p_i}(x_i)^3}{p_i-2}.$$

Fazendo $p_i \to \infty$ obtemos $-\Delta_\infty\phi(x_0) \leq 0$, já que $\dfrac{\Lambda_\infty\phi(x_0)}{|\nabla\phi(x_0)|} < 1$. □

3.2 Princípios de Comparação

Considere novamente (3.16). Note que $F_\infty(z, X, S)$ é decrescente em S e em z. Temos também que, na linguagem de [7], F_∞ é elíptico degenerado mas não é própria (ou seja, $F_\infty(r, X, S) \geq F_\infty(s, X, S)$ sempre que $r \leq s$). Entretanto, sabemos que u_∞ é estritamente positiva. Isso sugere considerar a equação que $v_\infty = \log(u_\infty)$ satisfaz.

Lema 3.6 *Seja u uma solução de viscosidade não negativa de (3.16) em Ω. Então $v = \log(u)$ é uma solução de viscosidade da equação*

$$\min\{|\nabla v| - \Lambda_\infty, -\Delta_\infty v - |\nabla v|^4\} = 0 \tag{3.17}$$

em Ω.

Prova. Faremos os detalhes do caso de supersolução. Seja $\phi \in C^2(\Omega)$ tal que $v(x_0) = \phi(x_0)$ e $v(x) > \phi(x)$ em uma vizinhança de x_0. Seja $\Phi = e^{\phi(x)}$. Então Φ é uma boa função teste para u no ponto x_0. Portanto,

$$\min\{|\nabla\Phi(x_0)| - \Lambda_\infty\Phi(x_0), -\Delta_\infty\Phi(x_0)\} \geq 0.$$

Note que

$$|\nabla\Phi(x_0)| = e^{\phi(x_0)}|\nabla\phi(x_0)|$$

e

$$\partial_{ij}\Phi(x_0) = \partial_i(e^{\phi(x_0)}\phi_j(x_0)) = e^{\phi(x_0)}\phi_i(x_0)\phi_j(x_0) + e^{\phi(x_0)}\phi_{ij}(x_0).$$

Daí,

$$|\nabla\Phi(x_0)| - \Lambda_\infty\Phi(x_0) = e^{\phi(x_0)}(|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_\infty)$$

e

$$\begin{aligned} -\Delta_\infty(x_0) &= -\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \left(e^{\phi(x_0)}\phi_i(x_0)\phi_j(x_0) + e^{\phi(x_0)}\phi_{ij}(x_0)\right)\cdot e^{\phi(x_0)}\phi_i(x_0), e^{\phi(x_0)}\phi_j(x_0)\right\rangle \\ &= -e^{3\phi(x_0)}(\Delta_\infty\phi(x_0) + |\nabla\phi(x_0)|^4). \end{aligned}$$

Assim,

$$\min\{e^{\phi(x_0)}(|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_\infty), -e^{3\phi(x_0)}(\Delta_\infty\phi(x_0) + |\nabla\phi(x_0)|^4)\} \geq 0.$$

Como $e^{\phi(x_0)} > 0$, temos o resultado. □

Como a equação (3.17) é agora própria (o argumento correspondente à v não aparece na equação), pode-se provar o princípio de comparação para soluções da mesma. Sendo essa equação elíptica degenerada, as técnicas utilizadas em [7] são utilizadas também nessa demonstração. Devido ao uso de tecnicalidades e ferramentas mais complexas, omitiremos a prova do teorema.

Teorema 3.7 *Sejam Ω um domínio limitado, u uma subsolução e v uma supersolução de viscosidade de (3.17) em Ω. Suponha que ambas as funções sejam contínuas em $\overline{\Omega}$. Então, o seguinte princípio de comparação vale:*

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}(u(x) - v(x)) = \sup_{x\in\partial\Omega}(u(x) - v(x)). \tag{3.18}$$

3.3 A Frequência Principal de Δ_∞ em um Domínio

Como uma aplicação do Teorema 3.7 vamos mostrar que Λ_∞ tem propriedades típicas de problemas de autovalores convencionais.

Teorema 3.8 *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ tal que $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$. Se u é uma solução contínua positiva em Ω da equação*

$$\min\{|\nabla u| - \Lambda u, -\Delta_\infty u\} = 0, \tag{3.19}$$

com condição de fronteira nula, então $\Lambda = \Lambda_\infty$.

Prova. Fixe um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que $\delta(x_0) = \dfrac{1}{\Lambda_\infty}$.

Sem perda de generalidade pode-se assumir que $x_0 = 0$. Suponha que $\Lambda > \Lambda_\infty$. Então a bola $B_{\frac{1}{\Lambda}}(0)$ está estritamente contida em Ω. Seja $\rho(x)$ a função distância até a fronteira da bola $B_{\frac{1}{\Lambda}}(0)$. Ambas $C\rho(x)$ e $u(x)$ são soluções de (3.19) em $B_{\frac{1}{\Lambda}}(0)$ para $C > 0$. Pelo princípio de comparação (Teorema 3.7) temos

$$\log C\rho(x) \leq \log u(x)$$

na bola $B_{\frac{1}{\Lambda}}(0)$, levando a uma contradição quando $C \to \infty$. Portanto, devemos ter $\Lambda \leq \Lambda_\infty$.

Se $\Lambda < 0$, então $|\nabla u| - \Lambda u > 0$, pois u é positiva. Assim, (3.19) se resume a $-\Delta_\infty u = 0$, cuja única solução que satisfaz zero no bordo é a função nula. Logo, $\Lambda \geq 0$.

Afirmamos que $\Lambda \neq 0$. Caso contrário, (3.19) se torna

$$\min\{|\nabla u|, -\Delta_\infty u\} = 0. \tag{3.20}$$

Se $|\nabla u| = 0$, então $\nabla u \equiv 0$ e u é função constante. Porém, como u zera na fronteira, temos que u é a função nula.
Se $|\nabla u| \neq 0$, então $-\Delta_\infty u = 0$ e pelo raciocínio anterior u é solução nula.

Até agora provamos que $0 < \Lambda < \Lambda_\infty$. Suponha $\Lambda < \Lambda_\infty$ e denote $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \big| \, dist(x, \overline{\Omega}) < \varepsilon\}$ (ver figura 3.1). Como $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$ e $\overline{\Omega}$ é compacto, temos, para $\varepsilon > 0$

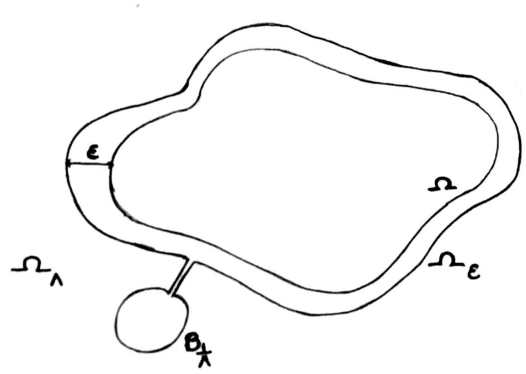

Figura 3.1: Domínios Ω, Ω_ε e Ω_Λ.

pequeno, $\Lambda_\infty(\Omega_\varepsilon) > \Lambda$. Agora seja Ω_Λ o domínio obtido conectando Ω_ε a uma bola de raio $\frac{1}{\Lambda}$ com um tubo suficientemente estreito.

Para esse novo domínio, o inverso do máximo da distância até a fronteira é agora Λ (pois $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\Lambda_\infty(\Omega_\varepsilon)}$) e $\overline{\Omega} \subset \Omega_\Lambda$. Considera uma ∞-autofunção de Ω_Λ, denotada u_Λ. Ambas Cu_Λ e u são soluções da mesma equação em Ω. O princípio de comparação (Teorema 3.7) pode ser usado nessa situação, já que u_Λ é positivo em $\partial\Omega$. Assim,

$$\log u(x) \leq \log Cu_\Lambda(x)$$

para $x \in \Omega$. Fazendo $C \to 0^+$ chegamos em uma contradição. Logo $\Lambda = \Lambda_\infty$.

$\square$

Capítulo 4

Problema de Minimização

Neste capítulo vamos analisar o comportamento quando $p \to \infty$ da sequência de soluções positivas do seguinte problema de autovalor perturbado

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_{q(p)} u &= \lambda |u|^{p-2} u \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) é um domínio limitado, $p \in (N, \infty)$, $q : (1, \infty) \to (N, \infty)$ é uma função satisfazendo $\lim_{p\to\infty} \frac{q(p)}{p} = Q \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, onde ou $q(p) < p$ se $Q \in (0, 1)$ ou $q(p) > p$ se $Q \in (1, \infty)$.

Observamos que, para o caso $q(p) = p$, o problema (4.1) se reduz ao caso clássico de problema de autovalor para o p-Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{p-2} u \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

É bem conhecido que para cada $p \in (1, \infty)$ o mínimo do quociente de Rayleigh associado ao problema (4.2), que é,

$$\lambda_1(p) := \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |u|^p dx}, \tag{4.3}$$

corresponde ao menor autovalor do problema (4.2) cujas autofunções correspondentes são minimizantes de $\lambda_1(p)$ que não mudam de sinal em Ω.

No caso em que $\lambda = \lambda_1(p)$ e $u_p > 0$ é uma solução de (4.2), o Teorema 3.5 garante que existe uma subsequência de $\{u_p\}$ que converge uniformemente em Ω para uma solução de viscosidade não trivial e não negativa do problema limite

$$\begin{cases} \min\{|\nabla u| - \Lambda_\infty u, -\Delta_\infty u\} &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

em que Δ_∞ é o ∞-laplaciano e

$$\Lambda_\infty := \frac{1}{\max_{x\in\Omega} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)}. \tag{4.5}$$

Como foi mostrado no Lema 3.2, Λ_∞ pode ser caracterizado variacionalmente como

$$\Lambda_\infty = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{||\nabla u||_{L^\infty(\Omega)}}{||u||_{L^\infty(\Omega)}}, \tag{4.6}$$

e, além disso, o mesmo Lema nos mostra que

$$\lim_{p\to\infty} (\lambda_1(p))^{\frac{1}{p}} = \Lambda_\infty. \tag{4.7}$$

Por outro lado, a caracterização do limite, quando $p \to \infty$, das soluções positivas de

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda_p |u|^{q(p)-2} u \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.8}$$

com $\lambda_p > 0$ e $\lim_{p\to\infty} \dfrac{q(p)}{p} = Q \in (0, \infty)$ foi investigado em [6], quando $q(p) < p$, e em [5],quando $q(p) > p$. Em particular, foi mostrado que soluções positivas de (4.8) convergem, quando $p \to \infty$, para a solução de viscosidade de

$$\begin{cases} \min\{|\nabla u| - \Lambda u^Q, -\Delta_\infty\} &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

desde que o limite $\lim_{p\to\infty} \lambda_p^{\frac{1}{p}} = \Lambda$ exista.

O problema (4.1) considerado pode ser visto como uma perturbação do problema de autovalor (4.2) quando o p-laplaciano do lado esquerdo dessa equação é perturbado por um $q(p)$-laplaciano com $q(p) \neq p$. Tais problemas já foram estudados em [2] para o caso em que $p < q(p)$ através do método direto do cálculo das variações aplicado ao funcional energia associado à equação. Neste trabalho vamos considerar também o caso $p > q(p)$, para o qual o funcional associado a (4.1) não é mais coercivo. Contornaremos essa dificuldade utilizando a técnica de minimização em variedades de Nehari. Mais adiante investigaremos o comportamento assintótico das soluções positivas do problema (4.1) quando $p \to \infty$. Seremos capazes de mostrar que para qualquer $\Lambda \in [\Lambda_\infty, \infty)$ e cada sequência $\{\lambda_p\}$ com $\lambda_p \in (\lambda_1(p), \infty)$ tal que $\lim_{p\to\infty} \lambda_p^{\frac{1}{p}} = \Lambda$, a sequência de soluções fracas e positivas de (4.1) com $\lambda = \lambda_p$ possui uma subsequência que converge para uma solução viscosa não trivial e não negativa do problema limite

$$\begin{cases} \min\{\max\{|\nabla u|, |\nabla u|^Q\} - \Lambda u, -\Delta_\infty\} &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.9}$$

Por outro lado, podemos mostrar que para todo $\Lambda \in (-\infty, \Lambda_\infty)$ não existem soluções não triviais não negativas do problema (4.9). Assim, em comparação com o problema conhecido (4.4), a análise de (4.9) revela uma situação diferente: enquanto para o problema original um valor de Λ, chamado Λ_∞, dado por (4.5), é tal que a correspondente solução de viscosidade é não negativa, no caso do problema (4.9) essa situação se estende para todo o intervalo $[\Lambda_\infty, \infty)$.

Relembremos agora a definição de soluções fracas para a família de problemas (4.1). Para dado $p > N$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, dizemos que u_λ é uma solução fraca de (4.1) se $u_\lambda \in W_0^{\max\{p,q(p)\}}(\Omega)$ e

$$\int_\Omega (|\nabla u_\lambda|^{p-2} + |\nabla u_\lambda|^{q(p)-2})\nabla u_\lambda \cdot \nabla v dx = \lambda \int_\Omega |u_\lambda|^{p-2} u_\lambda v dx \tag{4.10}$$

para toda $v \in W_0^{\max\{p,q(p)\}}(\Omega)$.

Na próxima seção provaremos o seguinte resultado sobre a família de problemas (4.1), com $p > N$.

Teorema 4.1 *O conjunto de números reais λ para o qual (4.1) possui soluções fracas não triviais é dado pelo intervalo aberto $(\lambda_1(p), \infty)$. Além disso, para cada $\lambda \in (\lambda_1(p), \infty)$ existe uma solução fraca não trivial e não negativa para o problema (4.1).*

Relembremos a seguinte definição antes de passarmos ao resultado principal desse trabalho.

Definição 4.2 *i) Uma função semicontínua superiormente $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é chamada subsolução de viscosidade de*

$$\begin{cases} F(u, \nabla u, \nabla^2 u) &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.11}$$

se $u\big|_{\partial\Omega} \leq 0$ e, sempre que $x_0 \in \Omega$ e $\Psi \in C^2(\Omega)$ são tais que $u(x_0) = \Psi(x_0)$ e $u(x) < \Psi(x)$ se $x \in B(x_0, r)$ para algum $r > 0$, então temos $F(\Psi(x_0), \nabla\Psi(x_0), \nabla^2\Psi(x_0)) \leq 0$;

ii) Uma função semicontínua inferiormente $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é chamada de supersolução de viscosidade de (4.11) se $u\big|_{\partial\Omega} \geq 0$ e, sempre que $x_0 \in \Omega$ e $\Psi \in C^2(\Omega)$ são tais que $u(x_0) = \Psi(x_0)$ e $u(x) > \Psi(x)$ se $x \in B(x_0, r)$ para algum $r > 0$, então temos $F(\Psi(x_0), \nabla\Psi(x_0), \nabla^2\Psi(x_0)) \geq 0$;

iii) Uma função contínua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é chamada de solução viscosa de (4.11) se é ao mesmo tempo uma subsolução e uma supersolução de viscosidade de (4.11).

O principal resultado envolvendo (4.9) é o seguinte:

Teorema 4.3 *Se $\Lambda \in (-\infty, \Lambda_\infty)$, então o problema (4.9) não possui soluções viscosas não triviais e não negativas, enquanto se $\Lambda \in [\Lambda_\infty, \infty)$ o problema (4.9) possui pelo menos uma solução viscosa não trivial e não negativa.*

4.1 Prova do Teorema 4.1

Nesta seção vamos demonstrar o Teorema 4.1. Para a comodidade do leitor, dividiremos a sua demonstração em lemas.

Para cara $p > N$ defina

$$\mu_1(p) := \inf_{u \in C_0^\infty \setminus \{0\}} \frac{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q(p)}\int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx}{\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx} \tag{4.12}$$

e

$$\nu_1(p) := \inf_{u \in C_0^\infty \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx}{\int_\Omega |u|^p dx}. \tag{4.13}$$

Foi mostrado na Proposição 1 de [2] que se $q(p) > p$ então temos $\mu_1(p) = \nu_1(p) = \lambda_1(p)$, em que $\lambda_1(p)$ é dado por (4.3). Argumentos similares podem ser usados para mostrar que o resultado ainda se aplica no caso $q(p) < p$. Apresentamos tais argumentos a seguir.

Lema 4.4 *Para cada $p > q(p)$ temos que $\mu_1(p) = \nu_1(p) = \lambda_1(p)$.*

Prova. Provaremos que $\mu_1(p) = \lambda_1(p)$. Observe primeiramente que

$$\begin{aligned}
\lambda_1(p) &\leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |u|^p dx} \\
&\leq \frac{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx} \\
&\leq \frac{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q(p)}\int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx}{\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx}.
\end{aligned}$$

Passando ao ínfimo sobre todas as $u \in C_0^\infty \setminus \{0\}$ obtemos que $\lambda_1(p) \leq \mu_1(p)$.

Agora note que, para todo $t > 0$ e $u \in C_0^\infty \setminus \{0\}$ temos

$$\begin{aligned}
\mu_1(p) &\leq \frac{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla (tu)|^p dx + \frac{1}{q(p)}\int_\Omega |\nabla (tu)|^{q(p)} dx}{\frac{1}{p}\int_\Omega |tu|^p dx} \\
&\leq \frac{\frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{t^{q(p)}}{q(p)}\int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx}{\frac{t^p}{p}\int_\Omega |u|^p dx} \\
&\leq \frac{pt^{q(p)-p}}{q(p)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx}{\int_\Omega |u|^p dx} + \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |u|^p dx}.
\end{aligned}$$

Se $t \to \infty$, $t^{q(p)-p} \to 0$ pois $q(p) - p < 0$. Daí,

$$\mu_1(p) \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |u|^p dx}$$

para toda $u \in C_0^\infty \setminus \{0\}$. Assim, $\mu_1(p) \leq \lambda_1(p)$ e obtemos a igualdade desejada.

De forma análoga obtem-se $\nu_1(p) = \lambda_1(p)$. □

No caso $q(p) > p$, o Teorema 4.1 está demonstrado em A.12. Dessa forma nós precisamos apenas mostrar que o resultado vale para $q(p) < p$. Para tanto, introduzimos o funcional de energia $I_\lambda : W_0^{1,\max\{p,q(p)\}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado ao problema (4.1), definido por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q(p)}\int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p dx. \tag{4.14}$$

É fácil ver que $I_\lambda \in C^1(W_0^{1,\max\{p,q(p)\}}(\Omega), \mathbb{R})$, com derivada de Gâteux dada por

$$\langle I'_\lambda(u), v\rangle = \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{q(p)-2})\nabla u \cdot \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx,$$

para todas $u, v \in W_0^{1,\max\{p,q(p)\}}(\Omega)$. A estratégia da prova no Teorema 1 de [2] para o caso $q(p) > p$ usa o fato de que podemos aplicar o método direto do cálculo das variações para mostrar que para cada $\lambda \in (\lambda_1(p), \infty)$ o funcional I_λ possui um ponto de mínimo não trivial e não negativo (e assim um ponto crítico) $u_\lambda \in W_0^{1,\max\{p,q(p)\}}(\Omega)$ tal que $I(u_\lambda) < 0$. Infelizmente, quando $q(p) < p$, o funcional I_λ não é mais coercivo (observação (4.5) a seguir) e não se pode aplicar o método direto. Utilizaremos a técnica de minimização em variedades de Nehari para contornar esse problema.

Observação 4.5 Considere uma função $e_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $||e_p||_p = 1$ e $||\nabla e_p||_p^p = \lambda_1(p)$. Assim,

$$I_\lambda(te_p) = \frac{1}{p}||\nabla(te_p)||_p^p + \frac{1}{q}||\nabla(te_p)||_q^q - \frac{\lambda}{p}||te_p||_p^p = \frac{t^q}{q}||\nabla e_p||_q^q - t^p\frac{(\lambda - \lambda_1(p))}{p}.$$

Como $q(p) < p$ e $\lambda > \lambda_1(p)$, temos que se $t \to \infty$ então $I_\lambda(te_p) \to -\infty$ e I_λ não é coercivo.

Lema 4.6 *Se $q(p) < p$, então para cada $\lambda \in (-\infty, \lambda_1(p)]$, o problema (4.1) não possui solução não trivial.*

Prova. Assuma que exista $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que (4.10) vale para $\lambda \leq \lambda_1(p)$. Tomando $v = u_\lambda$ em (4.10) temos

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p dx + \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^{q(p)} dx = \lambda \int_\Omega |u_\lambda|^p dx \leq \lambda_1(p) \int_\Omega |u_\lambda|^p dx.$$

Por outro lado temos que $\lambda_1(p) \int_\Omega |u_\lambda|^p dx \leq \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p dx$. Daí,

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p dx + \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^{q(p)} dx \leq \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^p dx$$

e concluímos que $\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^{q(p)} dx = 0$. Isso combinado ao fato de que $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset W_0^{1,q(p)}(\Omega)$ implica que $\int_\Omega |u_\lambda|^{q(p)} dx = 0$ (pois vale $\lambda_1(q(p)) \int_\Omega |u_\lambda|^{q(p)} dx \leq \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^{q(p)} dx$).
Assim temos que $u_\lambda \equiv 0$, uma contradição com o fato de que $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$. □

Lema 4.7 *Se $q(p) < p$ então para todo $\lambda \in (\lambda_1(p), \infty)$ o problema (4.1) tem uma solução não trivial.*

Prova. Fixe $\lambda > \lambda_1(p)$ e defina $I_\lambda : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por (4.14). Consideremos a variedade de Nehari

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\lambda &= \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \middle| \langle I'_\lambda u, u\rangle = 0 \right\} \\ &= \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \middle| \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx = \lambda \int_\Omega |u|^p dx \right\}. \end{aligned}$$

Sendo $\lambda > \lambda_1(p)$ temos que, sob (4.3), existe $v_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla v_\lambda|^p dx < \lambda \int_\Omega |v_\lambda|^p dx,$$

pelo fato de $\lambda_1(p)$ ser ínfimo (tomando $\varepsilon = \lambda - \lambda_1(p)$).

Para mostrar que $\mathcal{N}_\lambda \neq \emptyset$, vamos encontrar t tal que $tv_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$. Dessa forma devemos ter

$$t^p \int_\Omega |\nabla v_\lambda|^p dx + t^{q(p)} \int_\Omega |\nabla v_\lambda|^{q(p)} dx - \lambda t^p \int_\Omega |v_\lambda|^p dx = 0.$$

Seja $f(t) = t^p A + t^{q(p)} B - \lambda t^p C = (A - \lambda C)t^p + Bt^{q(p)}$, com $A = \int_\Omega |\nabla v_\lambda|^p dx$, $B = \int_\Omega |\nabla v_\lambda|^{q(p)} dx$ e $C = \int_\Omega |v_\lambda|^p dx$. Assim, se $f(t) = 0$ temos

$$(A - \lambda C)t^p = -Bt^{q(p)} \Rightarrow t^{q(p)-p} = \frac{\lambda C - A}{B} \Rightarrow t = \left(\frac{\lambda C - A}{B}\right)^{\frac{1}{q(p)-p}},$$

ou seja,

$$t = \left(\frac{\lambda \int_\Omega |v_\lambda|^p dx - \int_\Omega |\nabla v_\lambda|^p dx}{\int_\Omega |\nabla v_\lambda|^{q(p)} dx}\right)^{\frac{1}{q(p)-p}}.$$

Observe que $t > 0$ já que $\int_\Omega |\nabla v_\lambda|^p dx < \lambda \int_\Omega |v_\lambda|^p dx$.

Provaremos várias propriedades de I_λ que serão utilizadas na sequência. Primeiro, afirmamos que I_λ é coercivo em $\mathcal{N}_\lambda$, isto é, $I_\lambda(u_k) \to \infty$ quando $k \to \infty$ sempre que $\{u_k\}$ é uma sequência em $\mathcal{N}_\lambda$ tal que $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_k|^p dx = \infty$.

De fato, vamos considerar tal sequência e observar que se $u \in \mathcal{N}_\lambda$ então

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q(p)}\int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx \\ &- \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q(p)}\right)\int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx. \end{aligned}$$

Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos $I_\lambda(u_k) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q(p)}\right)\int_\Omega |\nabla u_k|^{q(p)} dx$. Por outro lado, como $u_k \in \mathcal{N}_\lambda$, temos

$$\lambda \int_\Omega |u_k|^p dx = \int_\Omega |\nabla u_k|^p dx + \int_\Omega |\nabla u_k|^{q(p)} dx \geq \int_\Omega |\nabla u_k|^p dx$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\int_\Omega |\nabla u_k|^p dx \to \infty$ quando $k \to \infty$, devemos ter que $\int_\Omega |u_k|^p dx \to \infty$ quando $k \to \infty$. Agora, do fato de que $p > q(p) > N$, temos que $W^{1,q(p)}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^p(\Omega)$. Consequentemente, existe uma constante $D_p > 0$ tal que

$$||w||_p \leq D_p ||\nabla w||_{q(p)} \ \forall \ w \in W_0^{1,q(p)}(\Omega) \supset W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.15}$$

Obtemos, para cada $k \in \mathbb{N}$, que

$$\left(\frac{1}{D_p}\right)^{q(p)} \left(\int_\Omega |u_k|^p dx\right)^{\frac{q(p)}{p}} \leq \int_\Omega |\nabla u_k|^{q(p)} dx.$$

Portanto, se $\int_\Omega |\nabla u_k|^p dx \to \infty$ quando $k \to \infty$ temos $I_\lambda(u_k) \to \infty$ quando $k \to \infty$.

Mostraremos agora que $m = \inf_{w \in \mathcal{N}_\lambda} I_\lambda(w) > 0$. Para tanto, por (4.15), para cada $u \in \mathcal{N}_\lambda$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx &\leq \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx \\
&= \lambda \int_\Omega |u|^p dx \\
&\leq \lambda D_p^p \left(\int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx \right)^{\frac{p}{q(p)}},
\end{aligned}$$

resultando em

$$\left(\frac{1}{\lambda D_p^p} \right)^{\frac{q(p)}{p-q(p)}} \leq \int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx \tag{4.16}$$

para toda $u \in \mathcal{N}_\lambda$. Como

$$I_\lambda(u) = \left(\frac{1}{q(p)} - \frac{1}{p} \right) \int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx \geq \left(\frac{1}{q(p)} - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{1}{\lambda D_p^p} \right)^{\frac{q(p)}{p-q(p)}} > 0$$

para toda $u \in \mathcal{N}_\lambda$, deduzimos que $m > 0$.

Finalmente, afirmamos que existe $u \in \mathcal{N}_\lambda$, $u \geq 0$ q.t.p. de Ω, tal que $I_\lambda(u) = m$. Começamos considerando $\{u_k\} \subset \mathcal{N}_\lambda$ uma sequência minimizante, isto é, tal que $I_\lambda(u_k) \to m$ quando $k \to \infty$. Note que $u_k \in \mathcal{N}_\lambda$ implica que $|u_k| \in \mathcal{N}_\lambda$ e, mais ainda, que $I_\lambda(u_k) = I_\lambda(|u_k|)$. Dessa forma, $\{|u_k|\}$ é também sequência minimizante para m. Consequentemente, pode-se assumir que $u_k \geq 0$ q.t.p. de Ω e para todo $k \in \mathbb{N}$. Como I_λ é coercivo em $\mathcal{N}_\lambda$, deduzimos que a sequência deve ser limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, depois de fazer passagem à subsequência (mantendo a mesma notação da sequência), tem-se $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,q(p)}(\Omega)$, $u_k \to u$ fortemente em $L^p(\Omega)$ e $u_k(x) \to u(x)$ q.t.p. de Ω quando $k \to \infty$. Em particular, concluímos que $u(x) \geq 0$ q.t.p. de Ω. Argumentos de semicontinuidade inferior e convergência forte em $L^p(\Omega)$ implicam que

$$I_\lambda(u) \leq \liminf_{k \to \infty} I_\lambda(u_k) = m. \tag{4.17}$$

Como $u_k \in \mathcal{N}_\lambda$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_k|^p dx \leq \int_\Omega |\nabla u_k|^p dx + \int_\Omega |\nabla u_k|^{q(p)} dx = \lambda \int_\Omega |u_k|^p dx. \tag{4.18}$$

Afirmamos que $u \neq 0$. De fato, se $u \equiv 0$ em Ω então, como $u_k \to u$ em $L^p(\Omega)$, teríamos $\int_\Omega |u_k|^p dx \to 0$ quando $k \to \infty$. Entretanto, isso é impossível pois, por (4.16), temos

$$0 < \left(\frac{1}{\lambda D_p^p} \right)^{\frac{q(p)}{p-q(p)}} \leq \int_\Omega |\nabla u_k|^{q(p)} dx$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Fazendo $k \to \infty$ em (4.18) e utilizando o fato das normas em $W_0^{1,p}$ e $W_0^{1,q(p)}$ serem fracamente semicontínuas inferiormente, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx \leq \lambda \int_\Omega |u|^p dx.$$

Afirmamos que a desigualdade estrita não vale. De fato, suponha que

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx < \lambda \int_\Omega |u|^p dx. \tag{4.19}$$

Com $t = \left(\frac{\lambda \int_\Omega |u|^p dx - \int_\Omega |u|^p dx}{\int_\Omega |u|^{q(p)} dx} \right)^{\frac{1}{q(p)-p}}$ temos que $tu \in \mathcal{N}_\lambda$. Note que $t \in (0,1)$ já que $p > q(p)$ implica em $q(p) - p < 0$, $\lambda \int_\Omega |u|^p dx - \int_\Omega |\nabla u|^p dx > \int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx$ e

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{\lambda \int_\Omega |u|^p dx - \int_\Omega |u|^p dx}{\int_\Omega |u|^{q(p)} dx} \right)^{\frac{1}{q(p)-p}} \\ &= \left(\frac{\int_\Omega |u|^{q(p)} dx}{\lambda \int_\Omega |u|^p dx - \int_\Omega |u|^p dx} \right)^{\frac{1}{p-q(p)}} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 < m \leq I_\lambda(u) &= \left(\frac{1}{q(p)} - \frac{1}{p} \right) \int_\Omega |\nabla (tu)|^{q(p)} dx \\ &= t^{p(q)} \left(\frac{1}{q(p)} - \frac{1}{p} \right) \int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx \\ &= t^{p(q)} I_\lambda(u) \\ &\leq t^{p(q)} \liminf_{k \to \infty} I_\lambda(u_k) \\ &= t^{p(q)} m \\ &< m \end{aligned}$$

obtendo uma contradição. Portanto, por (4.17) concluímos que $I_\lambda(u) = m$.

Concluindo a prova, seja $u \in \mathcal{N}_\lambda$ tal que $I_\lambda(u) = m$. Temos que $\int_\Omega |\nabla u|^p dx < \lambda \int_\Omega |u|^p dx$ já que $\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega |\nabla u|^{q(p)} dx = \lambda \int_\Omega |u|^p dx$ e $u \neq 0$. Seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ arbitrário porém fixado e $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que, para cada $s \in (-\delta, \delta)$, a função $u + sv$ não zera em todo Ω e $\lambda \int_\Omega |u + sv|^p dx > \int_\Omega |\nabla (u + sv)|^p dx$.

A última desigualdade decorre do fato de que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que $f(s) := \lambda \int_\Omega |u + sv|^p dx - \int_\Omega |\nabla (u + sv)|^p dx$ é de classe C^1 e $f(0) > 0$.

Para $s \in \mathbb{R}$ defina $t(s) = \left(\frac{f(s)}{\int_\Omega |\nabla (u + sv)|^{q(p)} dx} \right)^{\frac{1}{q(p)-p}}$. A aplicação $s \mapsto t(s)$ é diferenciável, $t(s)(u + sv) \in \mathcal{N}_\lambda$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e, como $u \in \mathcal{N}_\lambda$, temos que $t(0) = 1$. A seguir, definimos $\gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ por $\gamma(s) := I_\lambda(t(s)(u + sv))$. Por construção, γ é

$C^1(-\delta,\delta)$ e $\gamma(0) \leq \gamma(s)$ para todo $s \in (-\delta,\delta)$. Assim, deduzimos que

$$\begin{aligned} 0 = \gamma'(0) &= \langle I'_\lambda(t(0)u), t'(0)u + t(0)v\rangle \\ &= t'(0)\langle I'_\lambda(u), u\rangle + \langle I'_\lambda(u), v\rangle \\ &= \langle I'_\lambda(u), v\rangle \end{aligned}$$

já que $\langle I'_\lambda(u), u\rangle = 0$ pois $u \in \mathcal{N}_\lambda$. Como $v \in W_0^{1,p}$ foi arbitrário, a prova está completa.

□

4.2 Prova do Teorema 4.3

4.2.1 Existência:

Seja $\Lambda \in (\Lambda_\infty, \infty)$ fixado. Como $\Lambda_\infty = \lim_{p\to\infty} (\lambda_1(p))^{\frac{1}{p}}$, segue que existe uma sequência $\{\lambda_p\}$ com $\lambda_p \in (\lambda_1(p), \infty)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ e tal que $\lim_{p\to\infty} (\lambda_p)^{\frac{1}{p}} = \Lambda$. Para cada $p > N$ considere o problema (4.1) com $\lambda = \lambda_p$ e, ou $N < p < q(p)$ se $Q \in (1,\infty)$ ou $N < q(p) < p$ se $Q \in (0,1)$. Então, para cada $\lambda = \lambda_p$ o problema (4.1) possui uma solução $u_p \in W_0^{1,\max\{p,q(p)\}}(\Omega) \setminus \{0\}$ pelo Teorema 4.1, em que cada u_p pode ser escolhida de forma que $u_p(x) \geq 0$ q.t.p. de Ω. Mais que isso, usando um argumento baseado na desigualdade de Harnack pode-se mostrar que $u_p > 0$ em Ω.

Observação 4.8 Um exemplo de sequência $\{\lambda_p\}$ é a sequência $\lambda_p = (1+\frac{1}{p})^p\Lambda^p$. Temos que $\lambda_p > \Lambda^p > \lambda_1(p)$ e

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty} \left(1+\frac{1}{p}\right)\Lambda = \Lambda.$$

Lema 4.9 *Existe uma subsequência de $\{u_p\}$ que converge uniformemente em Ω, quando $p \to \infty$, para uma função $u_\Lambda \in C(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$, com $u_\Lambda(x) \geq 0$ q.t.p. de Ω.*

Prova. <u>**Caso $Q \in (0,1)$ e $N < q(p) < p$:**</u>

Pelo Lema 4.7 temos que

$$I_{\lambda_p}(u_p) = \left(\frac{1}{q(p)} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)}dx.$$

Para cada $p > N$, seja $\psi_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma autofunção do p-Laplaciano com condição de Dirichlet correspondente ao primeiro autovalor $\lambda_1(p)$. Então $\psi_p > 0$ em Ω e $\int_\Omega |\nabla\psi_p|^p dx = \lambda_1(p)$ se $\int_\Omega |\psi_p|^p dx = 1$. Seja

$$t_p = \left(\frac{\lambda_p\int_\Omega |\psi_p|^p dx - \int_\Omega |\nabla\psi_p|^p dx}{\int_\Omega |\nabla\psi_p|^{q(p)}dx}\right)^{\frac{1}{q(p)-p}} = \left(\frac{\int_\Omega |\nabla\psi_p|^{q(p)}dx}{\lambda_p - \lambda_1(p)}\right)^{\frac{1}{p-q(p)}}.$$

Como $t_p\psi_p \in \mathcal{N}_\lambda$ temos que $I_{\lambda_p}(u_p) \leq I_{\lambda_p}(t_p\psi_p)$. Deduzimos, pela desigualdade de Hölder, que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)}dx &\leq t_p^{q(p)} \int_\Omega |\nabla \psi_p|^{q(p)}dx \\
&= \left(\frac{\int_\Omega |\nabla \psi_p|^{q(p)}dx}{\lambda_p - \lambda_1(p)} \right)^{\frac{q(p)}{p-q(p)}} \int_\Omega |\nabla \psi_p|^{q(p)}dx \\
&= \left(\frac{1}{\lambda_p - \lambda_1(p)} \right)^{\frac{q(p)}{p-q(p)}} \left(\int_\Omega |\nabla \psi_p|^{q(p)}dx \right)^{\frac{p}{p-q(p)}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\lambda_p - \lambda_1(p)} \right)^{\frac{q(p)}{p-q(p)}} \left[\left(\int_\Omega (|\nabla \psi_p|^{q(p)})^{\frac{p}{q(p)}}dx \right)^{\frac{q(p)}{p}} \left(\int_\Omega 1dx \right)^{\frac{p-q(p)}{p}} \right]^{\frac{p}{p-q(p)}} \\
&= \left(\frac{1}{\lambda_p - \lambda_1(p)} \right)^{\frac{q(p)}{p-q(p)}} \mid \Omega \mid .
\end{aligned}
$$

Fixe $m > N$ inteiro positivo. Para qualquer número real $p > q(p) > m$, via Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_p|^m dx &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)}dx \right)^{\frac{m}{q(p)}} \mid \Omega \mid^{\frac{q(p)-m}{q}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)}dx \right)^{\frac{m}{q(p)}} (1 + \mid \Omega|) \\
&\leq \left(\frac{\lambda_1(p)}{\lambda_p - \lambda_1(p)} \right)^{\frac{m}{p-q(p)}} \mid \Omega \mid^{\frac{m}{q}} (1 + \mid \Omega|) \qquad (4.20) \\
&\leq \left[\left(\frac{1}{\frac{\lambda_p}{\lambda_1(p)} - 1} \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{m}{1-\frac{q(p)}{p}}} (1 + \mid \Omega|)^2.
\end{aligned}
$$

Como $\lim_{p\to\infty}(\lambda_p)^{\frac{1}{p}} = \Lambda$ e $\lim_{p\to\infty}(\lambda_1(p))^{\frac{1}{p}} = \Lambda_\infty < \Lambda$, deduzimos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Lambda_\infty + \varepsilon < \Lambda - \varepsilon$ e, para p suficientemente grande, temos $\Lambda - \varepsilon < (\lambda_p)^{\frac{1}{p}}$ e $(\lambda_1(p))^{\frac{1}{p}} < \Lambda_\infty + \varepsilon$. Portanto, para p suficientemente grande, temos

$$
\frac{\lambda_p}{\lambda_1(p)} \geq \left(\frac{\Lambda - \varepsilon}{\Lambda_\infty + \varepsilon} \right)^p > 1
$$

e como $\left(\frac{\Lambda - \varepsilon}{\Lambda_\infty + \varepsilon} \right)^p \geq \frac{\Lambda - \varepsilon}{\Lambda_\infty + \varepsilon} > 1$, obtemos

$$
\frac{1}{\frac{\lambda_p}{\lambda_1(p)} - 1} \leq \frac{1}{\left(\frac{\Lambda - \varepsilon}{\Lambda_\infty + \varepsilon} \right)^p - 1} \leq \frac{1}{\frac{\Lambda - \varepsilon}{\Lambda_\infty + \varepsilon} - 1}.
$$

Deduzimos que para todo $p \in \mathbb{N}$ suficientemente grande temos

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^m dx \le \left[\left(\frac{1}{\frac{\Lambda-\varepsilon}{\Lambda_\infty+\varepsilon}-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{m}{1-\frac{q(p)}{p}}} (1+|\,\Omega|)^2 \le c(m),$$

onde $c(m)$ é uma constante que depende só de m. Daí, $\{|\nabla u_p|\}$ é limitada em $L^m(\Omega)$ e $\{u_p\}$ é limitada em $W_0^{1,m}(\Omega)$. Já que assumimos que $m > N$, a imersão de $W_0^{1,m}(\Omega)$ em $C(\overline{\Omega})$ é compacta. Levando em conta a reflexividade de $W_0^{1,m}(\Omega)$, segue que existe subsequência de $\{u_p\}$, não renomeada, e uma função $u_\Lambda \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u_p \rightharpoonup u_\Lambda$ fracamente em $W_0^{1,m}(\Omega)$ e $u_p \to u_\Lambda$ uniformemente em Ω.

Nos resta ver que $u_\Lambda \not\equiv 0$. Para tanto, recorreremos a um resultado que pode ser encontrado na proposição 2 de [5]: se $p \in (N, \infty)$, então tomando

$$C_p := p|B_1(0)|^{-\frac{1}{p}} N^{\frac{-N(p+1)}{p^2}} (p-1)^{\frac{N(p-1)}{p^2}} (p-N)^{\frac{N}{p^2-1}} \lambda_1(p)^{\frac{N-p}{p^2}},$$

temos que

$$||w||_\infty \le C_p ||\nabla w||_p, \ \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.21}$$

Além disso,

$$\lim_{p\to\infty} C_p = \frac{1}{\Lambda_\infty}. \tag{4.22}$$

De (4.21), com $p > q(p) > N$, temos

$$||u_p||_\infty^{q(p)} \le C_{q(p)}^{q(p)} \int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)} dx. \tag{4.23}$$

Por outro lado, por Hölder,

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)} dx \le \int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)} dx + \int_\Omega |\nabla u_p|^p dx = \lambda_p \int_\Omega |u_p|^p dx \le \lambda_p ||u_p||_\infty^p |\,\Omega|.$$

Essa desigualdade combinada com (4.23) garante que

$$\lambda_p ||u_p||_\infty^p |\,\Omega|\, C_{q(p)}^{q(p)} \ge ||u_p||_\infty^{q(p)}$$

e

$$||u_p||_\infty \ge \left(\frac{1}{\lambda_p |\,\Omega| C_{q(p)}^{q(p)}}\right)^{\frac{1}{p-q(p)}}. \tag{4.24}$$

Como $\lim_{p\to\infty} \dfrac{q(p)}{p} = Q \in (0,1)$, $\lim_{p\to\infty} (\lambda_p)^{\frac{1}{p}} = \Lambda$ e $\lim_{p\to\infty} C_{q(p)} = \dfrac{1}{\Lambda_\infty}$, deduzimos que

$$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{\lambda_p |\,\Omega| C_{q(p)}^{q(p)}}\right)^{\frac{1}{p-q(p)}} = \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{\lambda_p^{\frac{1}{p}} |\,\Omega|^{\frac{1}{p}} C_{q(p)}^{\frac{q(p)}{p}}}\right)^{\frac{1}{1-\frac{q(p)}{p}}} = \left(\frac{\Lambda_\infty^Q}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{1-Q}}.$$

Daí, em (4.23) tomando $p \to \infty$, temos

$$0 < \left(\frac{\Lambda_\infty^Q}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{1-Q}} \le \limsup_{p\to\infty} ||u_p||_\infty = ||u_\Lambda||_\infty.$$

Segue que $u_\Lambda \not\equiv 0$.

<u>**Caso** $Q \in (1,\infty)$ **e** $N < p < q(p)$**:**</u>

Lembre que $u_p \in W_0^{1,q(p)}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é o mínimo global de I_{λ_p} sobre $W_0^{1,q(p)}(\Omega)$ e que $I'_{\lambda_p}(u_p) \cdot u_p = 0$. Daí temos que

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + \int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)} dx = \lambda_p \int_\Omega u_p^p dx$$

e

$$\begin{aligned} I_{\lambda_p}(u_p) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + \frac{1}{q(p)}\int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)} dx - \frac{\lambda_p}{p}\int_\Omega u_p^p dx \\ &= \left(\frac{1}{q(p)} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)} dx < 0. \end{aligned}$$

Da estimativa anterior, combinada com as desigualdades de Hölder e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)} dx &\le \lambda_p \int_\Omega |u_p|^p dx \\ &\le \frac{\lambda_p}{\lambda_1(p)}\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx \\ &\le \frac{\lambda_p}{\lambda_1(p)}\left(\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx\right)^{\frac{p}{q(p)}} |\Omega|^{\frac{q(p)-p}{q(p)}}. \end{aligned}$$

Assim, dessa desigualdade, dividindo tudo por $\left(\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx\right)^{\frac{p}{q(p)}}$ e usando que $1 - \frac{p}{q(p)} = \frac{q(p)-p}{q(p)}$ concluímos que

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)} dx\right)^{\frac{1}{q(p)}} &\le \left[\frac{\lambda_p}{\lambda_1(p)}(1+|\Omega|)\right]^{\frac{1}{q(p)-p}} \\ &= \left[\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_1(p)}\right)^{\frac{1}{p}}(1+|\Omega|)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{1}{\frac{q(p)}{p}-1}}. \end{aligned}$$

Como o lado direito da desigualdade acima converge para $\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_\infty}\right)^{\frac{1}{Q-1}}$ quando $p \to \infty$, deduzimos que $\{||\nabla u_p||_{W_0^{1,q(p)}(\Omega)}\}$ é limitada. Fixe $m > N$ um inteiro positivo. Para cada $p > m$ temos $q(p) > m$ e, como $W_0^{1,q(p)}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, podemos usar a desigualdade de Hölder para deduzir que $\{|\nabla u_p|\}$ é limitada em $L^m(\Omega)$.

Segue que $\{u_p\}$ é limitada em $W_0^{1,m}(\Omega)$. Usando o fato de que $W_0^{1,m}(\Omega)$ é reflexivo e que $W_0^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, existe uma subsequência (denotada da mesma maneira) tal que $u_p \rightharpoonup u_\Lambda$ fracamente em $W_0^{1,m}(\Omega)$ e $u_p \to u_\Lambda$ uniformemente em Ω.

Como no caso anterior, temos que mostrar que $u_\Lambda \not\equiv 0$. Seja δ a função distância ao bordo de Ω. Temos que $\delta \in W_0^{1,q(p)}(\Omega)$ e como $I_{\lambda_p}(u_p) = \min\limits_{w \in W_0^{1,q(p)}(\Omega)} I_{\lambda_p}(w)$ deduzimos que

$$I_{\lambda_p}(u_p) = \left(\frac{1}{q(p)} - \frac{1}{p}\right) \int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)} dx \leq \frac{|\Omega|}{p} + \frac{|\Omega|}{q(p)} - \frac{\lambda_p}{p} \int_\Omega \delta(x)^p dx = I_{\lambda_p}(\delta)$$

ou, equivalentemente,

$$\lambda_p \int_\Omega \delta(x)^p dx \leq \left(1 - \frac{p}{q(p)}\right) \int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)} dx + |\Omega| + \frac{p}{q(p)} |\Omega|.$$

Dessa desigualdade, do fato de que $\int_\Omega |\nabla u_p|^{q(p)} dx \leq \lambda_p \int_\Omega u_p^p dx$ e da desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_p \int_\Omega \delta(x)^p dx &\leq \left(1 - \frac{p}{q(p)}\right) \lambda_p \int_\Omega u_p^p dx + |\Omega| + \frac{p}{q(p)} |\Omega| \\ &\leq \left(1 - \frac{p}{q(p)}\right) \lambda_p ||u_p||_\infty^p \cdot |\Omega| + |\Omega| + \frac{p}{q(p)} |\Omega|. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Como $\lim_{p\to\infty} (\lambda_p)^{\frac{1}{p}} = \Lambda > \Lambda_\infty = \dfrac{1}{||\delta||_\infty}$ e $\lim_{p\to\infty} ||\delta||_p = ||\delta||_\infty$, deduzimos que

$$\lim_{p\to\infty} \left(\lambda_p \int_\Omega \delta(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \Lambda ||\delta||_\infty = \alpha > \frac{||\delta||_\infty}{||\delta||_\infty} = 1.$$

Sendo $\alpha > 1$ obtemos que $\lim\limits_{p\to\infty} \lambda_p \displaystyle\int_\Omega \delta(x)^p dx = \lim\limits_{p\to\infty} \alpha^p = \infty$. Segue que

$$|\Omega| + \frac{p}{q(p)} |\Omega| \leq \frac{\lambda_p}{2} \int_\Omega \delta(x)^p dx, \tag{4.26}$$

para p suficientemente grande. Combinando (4.25) e (4.26) obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_p \int_\Omega \delta(x)^p dx &\leq \left(1 - \frac{p}{q(p)}\right) \lambda_p ||u_p||_\infty^p \cdot |\Omega| + |\Omega| + \frac{p}{q(p)} |\Omega| \\ &\leq \left(1 - \frac{p}{q(p)}\right) \lambda_p ||u_p||_\infty^p \cdot |\Omega| + \frac{\lambda_p}{2} \int_\Omega \delta(x)^p dx, \end{aligned}$$

que implica em

$$\frac{\lambda_p}{2} \int_\Omega \delta(x)^p dx \leq \left(1 - \frac{p}{q(p)}\right) \lambda_p ||u_p||_\infty^p \cdot |\Omega|$$

e, portanto,

$$\left(\frac{1}{2} \int_\Omega \delta(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(1 - \frac{p}{q(p)}\right)^{\frac{1}{p}} ||u_p||_\infty \cdot |\Omega|^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p \to \infty$ temos que $0 < ||\delta||_\infty \leq ||u_\Lambda||_\infty$ e $u_\Lambda \not\equiv 0$. $\square$

Observação 4.10 O Lema 4.9 ainda vale se $\Lambda = \Lambda_\infty$ e $Q \in (0,1)$. De fato, tomando $\lambda_p = 2\lambda_1(p)$ na primeira parte da demonstração, (4.20) se torna $\int_\Omega |\nabla u_p|^m dx \leq (1+|\Omega|)^2$. Daí, a norma de ∇u_p em $L^m(\Omega)$ é ainda limitada por uma constante $c(m)$ que só depende de m. O restante da prova é similar ao que foi feito.

Lema 4.11 *Seja $p > N$. Se $\lambda \in (\lambda_1(p), \infty)$ e u_p é uma solução fraca do problema (4.1), então u_p é uma solução de viscosidade de (4.1).*

Prova. Consequência do Lema 3.4. □

Lema 4.12 *u_Λ é solução de viscosidade de (4.9).*

Prova. Primeiro mostraremos que u_Λ é uma supersolução de viscosidade. Para tanto, seja $x_0 \in \Omega$ e $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $u_\Lambda(x_0) = \psi(x_0)$ e $u_\Lambda - \psi$ tem um mínimo estrito em x_0. A convergência uniforme de u_p para u_Λ implica que existe uma subsequência $\{x_p\} \subset \Omega$ tal que $x_p \to x_0$ e $u_p - \psi$ tem mínimo em x_p. De fato, temos que $u_\Lambda(x_0) = \psi(x_0)$ e $u_\Lambda(x) - \psi(x) > u_\Lambda(x_0) - \psi(x_0) = 0 \Rightarrow u_\Lambda(x) > \psi(x)$ para todo $x \in B_R(x_0)$, $x \neq x_0$, com $R > 0$ fixado e verificando que $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$.

Para $0 < r < R$ temos que $\inf\limits_{x \in B(x_0,R)\setminus B(x_0,r)} (u_\Lambda - \psi) > 0$. Como $u_p \to u_\Lambda$ uniformemente em $\overline{B_R(x_0)}$, para p suficientemente grande, temos que $\min\limits_{x \in \overline{B_R(x_0)}} (u_\Lambda - \psi) = \min\limits_{x \in B_r(x_0)} (u_\Lambda - \psi)$.

De fato, para todo $x \in A_{r,R} = B(x_0,R) \setminus B(x_0,r)$ temos que $\inf\limits_{x \in A_{r,R}} (u_\Lambda - \psi) = m_r > 0$. Para p suficientemente grande temos que $|u_p(x) - u_\Lambda(x)| < \frac{m_r}{2}$ e, assim, $(u_p - \psi)(x) = (u_p - u_\Lambda)(x) + (u_\Lambda - \psi)(x) > -\frac{m_r}{2} + m_r = \frac{m_r}{2}$ para todo $x \in A_{r,R}$. Entretanto, $u_p(x_0) \to u_\Lambda(x_0) = \psi(x_0)$ que implica em $u_p(x_0) - u_\Lambda(x_0) < \frac{m_r}{2}$ para p grande. Logo, $u_p - \psi$ alcança mínimo em $B_r(x_0)$.

Vamos denotar $x_p \in B(x_0,r)$ o ponto de mínimo correspondente. Tomando $r \to 0^+$, obtemos uma subsequência $\{x_p\}$, denotada da mesma maneira da sequência, tal que $x_p \to x_0$ quando $p \to \infty$. Pelo Lema 4.11, sendo u_p uma solução de viscosidade contínua, temos

$$-\Delta_p \psi(x_p) - \Delta_{q(p)} \psi(x_p) - \lambda_p |\psi(x_p)|^{p-2} \psi(x_p) \geq 0.$$

Observe que

$$\Delta_p \psi = div(|\nabla \psi(x_p)|^{p-2} \nabla \psi(x_p)) = |\nabla \psi(x_p)|^{p-2} \Delta \psi + D(|\nabla \psi(x_p)|^{p-2}) \cdot D(\nabla \psi).$$

Para o cálculo de $D(|\nabla \psi(x_p)|^{p-2})$ faremos via coordenadas. Assim, como $|\nabla \psi(x_p)|^{p-2} = \left(\sum_{i=1}^N (\partial_i \psi)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}$ temos que

$$\partial_j(|\nabla \psi(x_p)|^{p-2}) = \frac{p-2}{2} \left(\sum_{i=1}^N (\partial_i \psi)^2\right)^{\frac{p-4}{2}} \sum_{i=1}^N 2 \partial_i \psi \partial_{ij} \psi = (p-2)|\nabla \psi(x_p)|^{p-4} \sum_{i=1}^N \partial_i \psi \partial_{ij} \psi$$

e, portanto,

$$D(|\nabla \psi(x_p)|^{p-2}) = (p-2)|\nabla \psi(x_p)|^{p-4} \sum_{i,j=1}^N \partial_i \psi \partial_j \psi \partial_{ij} \psi = (p-2)|\nabla \psi(x_p)|^{p-4} \Delta_\infty \psi.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
-(|\nabla\psi(x_p)|^{p-2}+|\nabla\psi(x_p)|^{q(p)-2})\Delta\psi(x_p)-[(p-2)|\nabla\psi(x_p)|^{p-4}\\
+(q(p)-2)|\nabla\psi(x_p)|^{q(p)-4}]\Delta_\infty\psi(x_p)\geq\lambda_p|\psi(x_p)|^{p-2}\psi(x_p). \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

Vamos assumir que $u_\Lambda(x_0)>0$. Afirmamos que $\psi(x_p)\geq u_p(x_p)-\varepsilon>0$ para todo p suficientemente grande, dado que $u_\Lambda(x_0)>3\varepsilon>0$. De fato, vamos fixar $\varepsilon>0$ tal que $u_\Lambda(x_0)-3\varepsilon>0$. É fácil ver que para p suficientemente grande temos que

$$
\varepsilon>u_p(x_0)-u_\Lambda(x_0)=u_p(x_0)-\psi(x_0)\geq u_p(x_p)-\psi(x_p),
$$

sendo a última desigualdade devido ao fato de x_p ser mínimo de $u_p-\psi$, e como u_p converge uniformemente para u_Λ em $B_r(x_0)$, temos $|u_p(x_p)-u_\Lambda(x_p)|<\varepsilon$ e $|u_\Lambda(x_p)-u_\Lambda(x_0)|<\varepsilon$. Assim, para todo p suficientemente grande temos

$$
\psi(x_p)\geq u_p(x_p)-\varepsilon\geq u_\Lambda(x_p)-2\varepsilon\geq u_\Lambda(x_0)-3\varepsilon>0.
$$

Por (4.27) deduzimos que $|\nabla\psi(x_p)|>0$ para p suficientemente grande. Isso significa que podemos dividir ambos os lados de (4.27) por $A_p=(p-2)|\nabla\psi(x_p)|^{p-4}+(q(p)-2)|\nabla\psi(x_p)|^{q(p)-4}$ para obter

$$
\begin{aligned}
-\frac{|\nabla\psi(x_p)|^{p-2}+|\nabla\psi(x_p)|^{q(p)-2}}{A_p}\Delta\psi(x_p)-\Delta_\infty\psi(x_p) &\geq \frac{\lambda_p\psi(x_p)^{p-1}}{A_p}\\
&= \left(\frac{\lambda_p^{\frac{1}{p}}\psi(x_p)^{\frac{p-1}{p}}}{A_p^{\frac{1}{p}}}\right)^p.
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\frac{|\nabla\psi(x_p)|^{p-2}+|\nabla\psi(x_p)|^{q(p)-2}}{A_p}\leq\max\left\{\frac{1}{p-2},\frac{1}{q(p)-2}\right\}|\nabla\psi(x_p)|^2,
$$

pois $|\nabla\psi(x_p)|^2(|\nabla\psi(x_p)|^{p-4}+|\nabla\psi(x_p)|^{q(p)-4})=|\nabla\psi(x_p)|^{p-2}+|\nabla\psi(x_p)|^{q(p)-2}$. Fazendo $p\to\infty$ nas estimativas acima obtemos que

$$
\begin{aligned}
-\Delta_\infty\psi(x_0) &\geq \lim_{p\to\infty}\max\left\{\frac{1}{p-2},\frac{1}{q(p)-2}\right\}|\nabla\psi(x_p)|^2\\
&+ \limsup_{p\to\infty}\left(\frac{\lambda_p^{\frac{1}{p}}\psi(x_p)^{\frac{p-1}{p}}}{A_p^{\frac{1}{p}}}\right)^p\\
&= \limsup_{p\to\infty}\left(\frac{\lambda_p^{\frac{1}{p}}\psi(x_p)^{\frac{p-1}{p}}}{A_p^{\frac{1}{p}}}\right)^p. \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

Em particular temos que

$$
-\Delta_\infty\psi(x_0)\geq 0. \qquad (4.29)
$$

Por outro lado,

$$\max\{(p-2)^{\frac{1}{p}}|\nabla\psi(x_p)|^{1-\frac{4}{p}},(q(p)-2)^{\frac{1}{p}}|\nabla\psi(x_p)|^{\frac{q(p)-4}{p}}\}\leq A_p^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq 2^{\frac{1}{p}}\max\{(p-2)^{\frac{1}{p}}|\nabla\psi(x_p)|^{1-\frac{4}{p}},(q(p)-2)^{\frac{1}{p}}|\nabla\psi(x_p)|^{\frac{q(p)-4}{p}}\}.$$

Daí, se $p\to\infty$, temos

$$\lim_{p\to\infty}A_p^{\frac{1}{p}}=\max\{|\nabla\psi(x_0)|,|\nabla\psi(x_0)|^Q\}. \tag{4.30}$$

Afirmamos que

$$\max\{|\nabla\psi(x_0)|,|\nabla\psi(x_0)|^Q\}-\Lambda\psi(x_0)\geq 0. \tag{4.31}$$

Provaremos por contradição. Se assumirmos que (4.31) é falsa, então $\max\{|\nabla\psi(x_0)|,|\nabla\psi(x_0)|^Q\}<\Lambda\psi(x_0)$. Por (4.30) e da hipótese anterior temos que

$$\frac{\lambda_p^{\frac{1}{p}}\psi(x_p)^{\frac{p-1}{p}}}{A_p^{\frac{1}{p}}}>\frac{\lambda_p^{\frac{1}{p}}\psi(x_p)^{\frac{p-1}{p}}}{\Lambda\psi(x_0)}.$$

Assim, deduzimos que existe $\theta>1$ tal que para cada $p\in\mathbb{N}$ suficientemente grande temos

$$\frac{\lambda_p^{\frac{1}{p}}\psi(x_p)^{\frac{p-1}{p}}}{A_p^{\frac{1}{p}}}\geq\theta>1.$$

Isso implica que

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{\lambda_p^{\frac{1}{p}}\psi(x_p)^{\frac{p-1}{p}}}{A_p^{\frac{1}{p}}}\right)^p\geq\lim_{p\to\infty}\theta^p=+\infty,$$

o que é uma contradição com (4.28). Logo (4.31) vale.

Utilizando agora (4.29) e (4.31) temos que

$$\min\left\{\max\{|\nabla\psi(x_0)|,|\nabla\psi(x_0)|^Q\}-\Lambda\psi(x_0),-\Delta_\infty\psi(x_0)\right\}\geq 0. \tag{4.32}$$

Por outro lado, se $u_\Lambda(x_0)=\psi(x_0)=0$, temos ou $\nabla\psi(x_0)\neq 0$ (nesse caso podemos usar argumentos similares para concluir (4.29) e (4.31)), ou $\nabla\psi(x_0)=0$ e, nesse caso, $-\Delta_\infty\psi(x_0)=0$ e (4.29) e (4.31) valem trivialmente. Assim (4.32) se verifica.

Para completar a prova falta mostrar que u_Λ é também uma subsolução de viscosidade de (4.9). Seja $x_0\in\Omega$ e $\psi\in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $u_\Lambda(x_0)=\psi(x_0)$ e $u_\Lambda(x)<\psi(x)$ para todo x numa vizinhança de x_0. Precisamos mostrar que

$$\min\left\{\max\{|\nabla\psi(x_0)|,|\nabla\psi(x_0)|^Q\}-\Lambda\psi(x_0),-\Delta_\infty\psi(x_0)\right\}\leq 0.$$

Primeiro, se $\nabla\psi(x_0)=0$, então a desigualdade anterior se verifica. Por isso, podemos assumir que $\nabla\psi(x_0)\neq 0$. É suficiente mostrar que se

$$\max\{|\nabla\psi(x_0)|,|\nabla\psi(x_0)|^Q\}-\Lambda\psi(x_0)>0 \tag{4.33}$$

então
$$-\Delta_\infty\psi(x_0)\le 0. \tag{4.34}$$
De fato, construímos uma sequência $x_p\to x_0$ tal que
$$\begin{aligned}-\frac{|\nabla\psi(x_p)|^{p-2}+|\nabla\psi(x_p)|^{q(p)-2}}{A_p}\Delta\psi(x_p)-\Delta_\infty\psi(x_p) &\le \frac{\lambda_p\psi(x_p)^{p-1}}{A_p}\\ &= \left(\frac{\lambda_p^{\frac{1}{p}}\psi(x_p)^{\frac{p-1}{p}}}{A_p^{\frac{1}{p}}}\right)^p.\end{aligned}$$
De (4.33) e (4.30) temos
$$\frac{\lambda_p^{\frac{1}{p}}\psi(x_p)^{\frac{p-1}{p}}}{A_p^{\frac{1}{p}}}<\frac{\lambda_p^{\frac{1}{p}}\psi(x_p)^{\frac{p-1}{p}}}{\Lambda\psi(x_0)}.$$
Assim, deduzimos que existe $\theta>1$ tal que para cada $p\in\mathbb{N}$ suficientemente grande temos
$$\frac{\lambda_p^{\frac{1}{p}}\psi(x_p)^{\frac{p-1}{p}}}{A_p^{\frac{1}{p}}}\le\theta<1.$$
Fazendo $p\to\infty$ deduzimos que
$$-\Delta_\infty\psi(x_0)\le\liminf_{p\to\infty}\left(\frac{\lambda_p^{\frac{1}{p}}\psi(x_p)^{\frac{p-1}{p}}}{A_p^{\frac{1}{p}}}\right)^p=0,$$
o que nos dá (4.34). □

Observação 4.13 A última prova garante a garante a parte da existência do Teorema 4.3 para $\Lambda\in(\Lambda_\infty,\infty)$ se $Q\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ e para $\Lambda=\Lambda_\infty$ se $Q\in(0,1)$. Para o caso em que $\Lambda=\Lambda_\infty$ e $Q\in(1,\infty)$, primeiro observamos que $|\nabla u(x)|^Q\le|\nabla u(x)|$ para todo $x\in\Omega$ tal que $|\nabla u(x)|\le 1$. Em seguida, seja u_0 uma solução de viscosidade não trivial e não negativa de (4.4), com $\Lambda=\Lambda_\infty$ (tais soluções existem por Teoremas 3.5 e 3.8). É conhecido que para qualquer constante positiva $C>0$ a função Cu_0 é também solução de viscosidade de (4.4) com $\Lambda=\Lambda_\infty$. Segue que $v_0(x):=\dfrac{u_0(x)}{||\nabla u_0(x)||_\infty}$ é solução de viscosidade de (4.4) com $\Lambda=\Lambda_\infty$. Além disso, $|\nabla v_0(x)|\le 1$ e, assim, $|\nabla v_0(x)|^Q\le|\nabla v_0(x)|$ para todo $x\in\Omega$. Logo, v_0 é uma solução de viscosidade de (4.9) com $\Lambda=\Lambda_\infty$.

4.2.2 Não Existência:

A parte da não existência do Teorema 4.3 consiste em mostrar que para qualquer $\Lambda\in(-\infty,\Lambda_\infty)$ o problema (4.9) não possui solução de viscosidade não trivial e não negativa.

Lema 4.14 *Se u_Λ é uma solução de viscosidade não negativa de (4.9), então é uma supersolução de viscosidade da equação*

$$-\Delta_\infty u = 0 \text{ em } \Omega. \tag{4.35}$$

Além do mais, para toda constante $C > 0$, a função Cu_Λ é também uma supersolução de (4.35).

Prova. Seja $x_0 \in \Omega$ e $\psi \in C^2(\Omega)$ tal que $u_\Lambda(x_0) = \psi(x_0)$ e $u_\Lambda(x) > \psi(x)$ para todo $x \neq x_0$ em uma vizinhança de x_0. Temos que

$$\min\left\{\max\{|\nabla\psi(x_0)|, |\nabla\psi(x_0)|^Q\} - \Lambda\psi(x_0), -\Delta_\infty\psi(x_0)\right\} \geq 0.$$

Segue que

$$-\Delta_\infty\psi(x_0) \geq 0.$$

Assim, u_Λ é uma supersolução de viscosidade de (4.35).

Para a segunda parte, seja $x_0 \in \Omega$ e $\psi \in C^2(\Omega)$ tal que $Cu_\Lambda(x_0) = \psi(x_0)$ e $Cu_\Lambda(x) > \psi(x)$ para todo $x \neq x_0$ em uma vizinhança de x_0. Assim, $u_\Lambda(x_0) = \frac{1}{C}\psi(x_0)$ e $u_\Lambda(x) > \frac{1}{C}\psi(x)$ para todo $x \neq x_0$ em uma vizinhança de x_0. Utilizando $\frac{1}{C}\psi$ como função teste na definição de u_Λ ser uma supersolução de viscosidade não negativa de (4.9) para obter

$$\min\left\{\max\{\frac{1}{C}|\nabla\psi(x_0)|, \frac{1}{C^Q}|\nabla\psi(x_0)|^Q\} - \frac{\Lambda}{C}\psi(x_0), -\frac{1}{C^3}\Delta_\infty\psi(x_0)\right\} \geq 0.$$

Como $C > 0$, temos que $-\Delta_\infty\psi(x_0) \geq 0$, o que implica que Cu_Λ é também uma supersolução de viscosidade de (4.35). $\square$

Lema 4.15 *Para $\Lambda \leq 0$, o problema (4.9) não possui solução de viscosidade não trivial e não negativa.*

Prova. Faremos uma prova por contradição. Seja $\Lambda \leq 0$ e asssuma que existe u solução de viscosidade não negativa do problema (4.9). Mostraremos que isso implica em $u \not\equiv 0$ em Ω.

Seja $x_0 \in \Omega$ arbitrário e seja $\psi \in C^2(\Omega)$ tal que $u(x_0) = \psi(x_0)$ e $u(x) < \psi(x)$ para todo $x \neq x_0$ em uma vizinhança de x_0. Como u é, em particular, uma subsolução de viscosidade de (4.9), temos

$$\min\left\{\max\{|\nabla\psi(x_0)|, |\nabla\psi(x_0)|^Q\} - \Lambda\psi(x_0), -\Delta_\infty\psi(x_0)\right\} \leq 0.$$

Assim, $-\Delta_\infty\psi(x_0) \leq 0$ ou $\max\{|\nabla\psi(x_0)|, |\nabla\psi(x_0)|^Q\} - \Lambda\psi(x_0) \leq 0$. Logo, o segundo caso só vale se $\max\{|\nabla\psi(x_0)|, |\nabla\psi(x_0)|^Q\} = \Lambda\psi(x_0) = 0$, que implica em $\Delta_\infty\psi(x_0) = 0$. Sendo assim, devemos ter $-\Delta_\infty\psi(x_0) \leq 0$. Daí, u é uma subsolução de viscosidade de $-\Delta_\infty\psi(x_0) = 0$.

Por outro lado, pelo Lema 4.14 sabemos que u é também supersolução de viscosidade de $-\Delta_\infty\psi(x_0) = 0$. Portanto, u é solução de viscosidade da equação $-\Delta_\infty\psi(x_0) = 0$

com condição de contorno de Dirichlet. Pelo resultado de unicidade de Jensen (ver [12]), deduzimos que $u \equiv 0$ em Ω. $\square$

Antes de estabelecer o Lema final, vamos lembrar (ver Teorema 8.2 de [14]) que se u é uma supersolução de viscosidade não negativa de $-\Delta_\infty u = 0$ em Ω, então

$$|\nabla \log u(x)| \leq |\nabla \log \delta(x)| \text{ para todo } x \in \Omega. \tag{4.36}$$

Lema 4.16 *Para $\Lambda \in (0, \Lambda_\infty)$, o problema (4.9) não possui solução de viscosidade não trivial e não negativa.*

Prova. Seja $\Lambda > 0$ ser tal que u_Λ é uma solução de viscosidade não trivial e não negativa do problema (4.9). Mostraremos que $\Lambda \geq \Lambda_\infty$. Mostraremos que $\Lambda \geq \Lambda_\infty$. Seja $v_\Lambda = \dfrac{u_\Lambda}{\Lambda||u_\Lambda||_\infty}$. Veremos que v_Λ satisfaz

$$\min\{|\nabla v_\Lambda| - 1, -\Delta_\infty v_\Lambda\} \leq 0 \text{ em } \Omega \tag{4.37}$$

no sentido de viscosidade. De fato, seja $x_0 \in \Omega$ e $\psi \in C^2(\Omega)$ tal que $v_\Lambda(x_0) = \psi(x_0)$ e $v_\Lambda(x) < \psi(x)$ para todo $x \neq x_0$ numa vizinhança de x_0. Temos

$$\max\{\Lambda||u_\Lambda||_\infty|\nabla\psi(x_0)|, (\Lambda||u_\Lambda||_\infty)^Q|\nabla\psi(x_0)|^Q\} \geq \Lambda||u_\Lambda||_\infty|\nabla\psi(x_0)|, \tag{4.38}$$

e

$$-\Lambda^2||u_\Lambda||_\infty\psi(x_0) \geq -\Lambda||u_\Lambda||_\infty. \tag{4.39}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\max\{\Lambda||u_\Lambda||_\infty|\nabla\psi(x_0)|, (\Lambda||u_\Lambda||_\infty)^Q|\nabla\psi(x_0)|^Q\} - \Lambda^2||u_\Lambda||_\infty\psi(x_0)\\ \geq \Lambda||u_\Lambda||_\infty|\nabla\psi(x_0)| - \Lambda||u_\Lambda||_\infty.\end{aligned} \tag{4.40}$$

Por outro lado,

$$-\Delta_\infty(\Lambda||u_\Lambda||_\infty\psi(x_0)) = -(\Lambda||u_\Lambda||_\infty)^3\Delta_\infty\psi(x_0). \tag{4.41}$$

Além disso, usando $\Lambda||u_\Lambda||_\infty\psi$ como função teste na definição de u_Λ ser uma solução de viscosidade não negativa de (4.9), obtemos

$$\begin{aligned}\min\{\max\{\Lambda||u_\Lambda||_\infty|\nabla\psi(x_0)|, (\Lambda||u_\Lambda||_\infty)^Q|\nabla\psi(x_0)|^Q\}\\ -\Lambda^2||u_\Lambda||_\infty\psi(x_0), -(\Lambda||u_\Lambda||_\infty)^3\Delta_\infty\psi(x_0)\} \leq 0.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Combinando (4.40),(4.41) e (4.42) obtemos

$$\min\{\Lambda||u_\Lambda||_\infty|\nabla\psi(x_0)| - \Lambda||u_\Lambda||_\infty, -(\Lambda||u_\Lambda||_\infty)^3\Delta_\infty\psi(x_0)\} \leq 0.$$

Como $\Lambda||u_\Lambda||_\infty > 0$ então ou $|\nabla\psi(x_0)| - 1 \leq 0$ ou $-\Delta_\infty\psi(x_0) \leq 0$. Por isso,

$$\min\{|\nabla\psi(x_0)| - 1, -\Delta_\infty\psi(x_0)\} \leq 0.$$

Assim provamos que v_Λ satisfaz (4.37) no sentido de viscosidade. Por outro lado, pelo Lema 4.14, v_Λ é uma supersolução de viscosidade de (4.35). Por (4.36),

$$|\nabla \log(v_\Lambda(x))| \leq |\nabla \log(\delta(x))| \text{ q.t.p. de } \Omega.$$

Levando em conta que $|\nabla\delta(x)| = 1$ q.t.p. de Ω, obtemos

$$|\nabla v_\Lambda(x)| \leq \frac{|v_\Lambda(x)|}{\delta(x)} \text{ q.t.p. de } \Omega. \tag{4.43}$$

Em seguida, lembre que δ satisfaz

$$\min\{|\nabla\delta| - 1, -\Delta_\infty\delta\} = 0 \text{ em } \Omega, \tag{4.44}$$

e que $\delta = v_\Lambda = 0$ em $\partial\Omega$ (ver Lema 6.10 de [13]).

Sendo v_Λ uma solução de viscosidade de (4.37), pelo princípio de comparação de Jensen devemos ter $v_\Lambda(x) \leq \delta(x)$ para todo $x \in \Omega$. Combinando (4.43) e (4.44) obtemos $|\nabla v_\Lambda(x)| \leq 1$ q.t.p. de Ω e, consequentemente,

$$\frac{||\nabla v_\Lambda||_\infty}{||v_\Lambda||_\infty} \leq \frac{1}{||v_\Lambda||_\infty} = \Lambda.$$

Daí, por (4.6) obtemos que $\Lambda \geq \Lambda_\infty$.

$\square$

Apêndice A

Resultados utilizados

Seguem alguns resultados utilizados ao longo das demonstrações apresentadas nesse trabalho.

Proposição A.1 *Dado um espaço de medida finita* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *e uma função mensurável* $f : X \to \mathbb{R}$ *que pertence a* $L^\infty(X)$*, então,*

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty.$$

Prova. Fixe $\delta > 0$ e considere o conjunto $S_\delta = \{x \in X|\ |f(x)| \geq ||f||_\infty - \delta\}$ com $\delta < ||f||_\infty$. Temos que

$$||f||_p \geq \left(\int_{S_\delta} (||f||_\infty - \delta)^p\right)^{\frac{1}{p}} = (||f||_\infty - \delta)\mu(S_\delta)^{\frac{1}{p}},$$

já que $S_\delta \subset X$ e $\mu(S_\delta) > 0$. Decorre então que

$$\liminf_{p\to\infty} ||f||_p \geq ||f||_\infty.$$

Como $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ q.t.p. de X, temos que

$$||f||_p \leq \left(\int_X ||f||_\infty^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||f||_\infty \mu(X)^{\frac{1}{p}}.$$

Daí, sendo $\mu(X) < \infty$,

$$\limsup_{p\to\infty} ||f||_p \leq \limsup_{p\to\infty} ||f||_\infty \mu(X)^{\frac{1}{p}} = ||f||_\infty.$$

Portanto, temos o resultado. $\square$

Proposição A.2 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e limitado e* $\delta(x) = \min_{y\in\partial\Omega} |x - y|$ *a função distância até a fronteira de* Ω*. Então a função distância é de Lipschitz com constante de Lipschitz igual a 1, ou seja,*

$$|\delta(x) - \delta(y)| \leq |x - y|$$

para todo $x, y \in \Omega$*.*

Prova. Considere o fecho $\overline{\Omega}$. Como $\overline{\Omega}$ é fechado existem $x_0, y_0 \in \overline{\Omega}$ tais que $\delta(x) = |x - x_0|$ e $\delta(y) = |y - y_0|$. Assim, x_0 realiza o mínimo, isto é, $|x - x_0| \leq |x - z|$ para todo $z \in \overline{\Omega}$. Em particular, $|x - x_0| \leq |x - y_0|$. Aplicando a desigualdade triangular obtemos

$$\delta(x) = |x - x_0| \leq |x - y_0| = |x - y + y - y_0| \leq |x - y| + \delta(y),$$

ou seja,

$$\delta(x) - \delta(y) \leq |x - y|.$$

De forma análoga pode-se obter $\delta(y) - \delta(x) \leq |x - y|$. Portanto,

$$|\delta(x) - \delta(y)| \leq |x - y|.$$

Essa prova foi obtida de [10]. □

Teorema A.3 *(Rademacher) Uma função Lipschitz contínua f é totalmente diferenciável q.t.p. em seu domínio Ω, isto é,*

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + o(|y - x|)$$

quando $y \to x$ em quase todo ponto $x \in \Omega$.

Observação A.4 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira suave $\partial\Omega$. Vamos mostrar que $|\nabla \delta| = 1$ dado que existe um ponto $y^* \in \partial\Omega$ tal que $\delta(x) = \min_{y \in \partial\Omega} |x - y| = |x - y^*|$.

Considere o segmento $(1-t)x + ty^*$, $t \in [0, 1]$. Ao longo desse segmento, temos

$$|(1-t)x + ty^* - y| = |(1-t)x + ty^* - ty - (1-t)y| \leq (1-t)|x - y| + t|y - y^*|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\delta((1-t)x + ty^*) = \min_{y \in \partial\Omega} |(1-t)x + ty^* - y| &\leq \min_{y \in \partial\Omega} [(1-t)|x - y| + t|y - y^*|] \\
&\leq \min_{y \in \partial\Omega} [(1-t)|x - y|] + \min_{y \in \partial\Omega} [t|y - y^*|] \\
&= \min_{y \in \partial\Omega} [(1-t)|x - y|] \\
&= (1-t)\delta(x).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$|(1-t)x + ty^* - y| = |x - y - t(x - y^*)| \geq |x - y| - t|x - y^*|,$$

isto é,

$$\delta((1-t)x + ty^*) \geq \delta(x) - t\delta(x) = (1-t)\delta(x).$$

Portanto, $\delta((1-t)x + ty^*) = (1-t)\delta(x)$.

Derivando com respeito a t obtemos

$$\langle \nabla \delta((1-t)x + ty^*), y^* - x \rangle = -\delta(x),$$

que equivale a

$$|\nabla\delta((1-t)x+ty^*)|\cdot|y^*-x|\cos\theta=-\delta(x).$$

Como $\delta(x)=|y^*-x|$, então $|\nabla\delta((1-t)x+ty^*)|\cos\theta=-1$.

Observe que, quando $t=0$, $\nabla\delta(x)$ aponta na direção de máximo crescimento, enquanto y^*-x aponta para a direção de y^*. Entretanto, essa direção y^*-x é a direção de máximo descrescimento pois, caso contrário, y^* não minimizaria $\delta(x)$. Portanto, $y^*-x=-\nabla\delta(x)$ e, assim, $\cos\theta=-1$, que se verifica para todo $t\in[0,1]$.

Logo, para todo $x\in\Omega$ que não pertence a $\partial\Omega$, s existe um único ponto $y^*\in\partial\Omega$ tal que $\delta(x)=|x-y^*|$, temos $|\nabla\delta|=1$.

Pode-se mostrar que nos pontos $x\in\Omega$ tais que existem mais de um ponto que realiza o mínimo de $\delta(x)$, a função distância não é diferenciável e, além disso, esse conjunto dos pontos onde a função não é diferenciável tem medida nula. A prova desse fato exige um ferramental mais elaborado, e deixaremos a cargo do leitor a referência [9] para uma melhor elucidação desse fato.

Teorema A.5 *(Harnack) Se a solução variacional $u_\infty\geq 0$ em Ω, então*

$$u_\infty(x)\leq u_\infty(y)\exp\left(\frac{|x-y|}{R-r}\right)$$

em que $x,y\in B(x_0,r)$ e $\overline{B(x_0,R)}\subset\Omega$.

Prova. Ver em [17]. □

Teorema A.6 *Toda sequência limitada possui uma subsequência fracamente convergente em um espaço reflexivo.*

Prova. Ver [4] capítulo 6. □

Teorema A.7 *(Rellich-Kondrakhov) Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $p>n$, então*

$$W_0^{1,p}\hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}),$$

em que $\hookrightarrow\hookrightarrow$ é utilizado para imersões compactas.

Prova. Ver [11]. □

Proposição A.8 *Dados $a,b\in\mathbb{R}^n$, então, para $p>2$, temos*

$$\langle|a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b,a-b\rangle\geq 2^{2-p}|a-b|^p.$$

Prova. Capítulo 11 de [18]. □

Definição A.9 *Dizemos que uma função $F : W^{1,q}(U) \to \mathbb{R}$ é (sequencialmente) fracamente semicontínua inferior se*

$$F(u) \leq \liminf_{k\to\infty} F(u_k),$$

sempre que $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em $W^{1,q}(U)$.

Observação A.10 A norma $||.||_p$ é fracmente semicontínua inferior. Seja $\{u_k\}$ sequência em $L^p(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, tal que $u_k \rightharpoonup u$. Por um corolário do Teorema de Hahn-Banach, existe $\phi \in (L^p(U))^*$ tal que $\phi(u) = ||u||$ e $||\phi|| = 1$. Daí,

$$||u|| = \phi(u) = \liminf_{k\to\infty} \phi(u_k) \leq \liminf_{k\to\infty} ||\phi|| \cdot ||u_k||_p = \liminf_{k\to\infty} ||u_k||_p.$$

Teorema A.11 *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional fracamente semicontínuo inferiormente e coercivo. Então I tem um ponto de mínimo global.*

Prova. Ver [1]. □

Teorema A.12 *(Caso $p < q(p)$) O conjunto de números reais λ para o qual (4.1) possui soluções fracas não triviais é dado pelo intervalo aberto $(\lambda_1(p), \infty)$. Além disso, para cada $\lambda \in (\lambda_1(p), \infty)$ existe uma solução fraca não trivial e não negativa para o problema (4.1).*

Prova. Seja

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p}||\nabla u||_p^p + \frac{1}{q}||\nabla u||_q^q - \frac{\lambda}{p}||u||_p^p$$

definido em (4.14). Vamos ver que se $p < q = q(p)$, o funcional é coercivo para $\lambda \in (\lambda_1(p), \infty)$ e limitado inferiormente, garantindo a existência de um mínimo, que denotaremos por u_λ, para o mesmo (que coincide com a solução fraca de (4.1)). Em seguida, veremos que u_λ é não nulo.

Primeiramente, vamos observar que, pela desigualdade de Hölder,

$$||u||_p^p = \int_\Omega |u|^p dx \leq \left(\int_\Omega 1 dx\right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\int_\Omega |u|^q dx\right)^{\frac{p}{q}} = |\Omega|^{\frac{q-p}{q}} ||u||_q^p.$$

Pela desigualdade de Poincaré temos que $||u||_q \leq \lambda_1(q)^{-\frac{1}{q}} ||\nabla u||_q$ e, assim, a desigualdade acima fica

$$||u||_p^p \leq |\Omega|^{\frac{q-p}{q}} (\lambda_1(q))^{-\frac{p}{q}} ||\nabla u||_q^p.$$

Como $q > p$, temos $0 < q - p < q$ e $\frac{q-p}{q} \leq 1$. Portanto,

$$||u||_p^p \leq (\lambda_1(q))^{-\frac{p}{q}} ||\nabla u||_q^p.$$

Com isso em mãos, podemos obter a desigualdade

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{q}||\nabla u||_q^q - \frac{\lambda(\lambda_1(q))^{-\frac{p}{q}}}{p}||\nabla u||_q^p.$$

Vamos considerar a função auxiliar $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \frac{1}{q}t^q - \frac{\lambda(\lambda_1(q))^{-\frac{p}{q}}}{p}t^p,$$

obtida ao trocarmos $||u||_q$ por t. Note que se $||u||_q \to \infty$, então $||\nabla u||_q \to \infty$ (pela desigualdade de Poincaré) e, ao fazermos $t \to \infty$, temos que $g(t) \to \infty$ pois $q > p$. Disso obtemos a coercividade de I_λ.

Para verificarmos que I_λ é limitado inferiormente observemos que

$$g'(t) = t^{q-1} - \lambda(\lambda_1(q))^{-\frac{p}{q}}t^{p-1} \geq 0$$

se, e só se,

$$\frac{t^{q-1}}{t^{p-1}} \geq \lambda(\lambda_1(q))^{-\frac{p}{q}}.$$

Disso obtemos que

$$t \geq k,$$

em que $k = \left(\lambda(\lambda_1(q))^{-\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{q-p}}$. Logo, no intervalo $[k, \infty)$, a função g é não decrescente. No intervalo $[0, k]$, como g é contínua, temos que g possui mínimo. Consequentemente, $\inf\limits_{t\in[0,\infty)} g(t) > -\infty$ e temos que I_λ é limitado inferiormente.

Como I_λ é fracamente semicontínua inferiormente (veja (A.10)), temos que existe $u_\lambda \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tal que $I_\lambda(u_\lambda) = \min\limits_{u\in W_0^{1,q}(\Omega)} I_\lambda(u)$ (pelo Teorema A.11). Além disso, como $I_\lambda(u_\lambda) = I_\lambda(|u_\lambda|)$, podemos assumir que $u_\lambda \geq 0$ em Ω. Para vermos que $u_\lambda \not\equiv 0$, basta ver que I_λ assume valores negativos em $W_0^{1,q}(\Omega)$, pois, por continuidade, como $I_\lambda(0) = 0$, se $I_\lambda(u_\lambda) < 0$ então u_λ não pode ser nula.

Para tanto, considere uma função $e_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $||e_p||_p = 1$ e $||\nabla e_p||_p^p = \lambda_1(p)$. Assim,

$$I_\lambda(te_p) = \frac{1}{p}||\nabla(te_p)||_p^p + \frac{1}{q}||\nabla(te_p)||_q^q - \frac{\lambda}{p}||te_p||_p^p = \frac{t^q}{q}||\nabla e_p||_q^q - t^p\frac{(\lambda - \lambda_1(p))}{p}.$$

Para que $I_\lambda(te_p) < 0$, devemos ter

$$\frac{t^q}{q}||\nabla e_p||_q^q < t^p\frac{(\lambda - \lambda_1(p))}{p},$$

em outras palavras,

$$t < \left(\frac{q(\lambda - \lambda_1(p))}{p||\nabla e_p||_q^q}\right)^{\frac{1}{q-p}}.$$

A expressão que está entre parênteses é positiva pois $\lambda > \lambda_1(p)$ e $\frac{1}{q-p}$ está bem definido já que $p < q$. Portanto, para $0 < t < \left(\frac{q(\lambda-\lambda_1(p))}{p||\nabla e_p||_q^q}\right)^{\frac{1}{q-p}}$, temos que $I_\lambda(te_p) < 0$. □

Referências Bibliográficas

[1] BADIALE M., SERRA E. *Semilinear elliptic equations for beginners. Existence results via the variational approach.* Springer, London (2011).

[2] BOCEA, M., MIHAILESCU, M. *Existence of nonnegative viscosity solutions for a class of problems involving the ∞-Laplacian.* Nonlinear Differ. Equ. Appl. (2016) 23: 11. https://doi.org/10.1007/s00030-016-0373-2

[3] BOCEA, M., MIHAILESCU, M. *Eigenvalue problems in Orlicz-Sobolev spaces for rapidly growing operators in divergence form.* J. Differ. Equ. **256**, 640-657 (2014).

[4] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., TEIXEIRA, E. *Fundamentos de análise funcional.* Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro, SBM, 2015.

[5] CHARRO, F., PARINI, E. *Limits as $p \to \infty$ of p-Laplacian problems with a superdiffusive power-type nonlinearity: positive and sign changing solutions.* J. Math. Anal. Appl. **372**, 629-644 (2001).

[6] CHARRO, F., PERAL, I. *Limits branch of solutions as $p \to \infty$ for a family of subdiffusive problems related to the p-Laplacian.* Comm. Part. Diff. Equ. **32**, 1965-1981 (2007).

[7] CRANDALL, M., ISHII, H., LIONS, P.L. *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 1-67.

[8] CRANDALL, M., LIONS, P.L. *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations.* Trans. Amer. Math. Soc. **277**, 1-42 (1983).

[9] CRASTA, G., MALUSA, A. *THE DISTANCE FUNCTION FROM THE BOUNDARY IN A MINKOWSKI SPACE*American Mathematical Society, Vol 359, Num 12, December 2007, pages 5725-5759.

[10] DIAS, B. de A. FERREIRA, W. M., MARTINS, E. M.; Introdução à Teoria de Pontos Fixos. Monografia de Graduação. Universidade Federal de Ouro Preto, 2012.

[11] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations.* Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1998. (Graduate Studies in Mathematics, v. 19)

[12] JENSEN, R. *Uniqueness of Lipschitz extensions: minimizing the sup norm of the gradient*. Arch. Ration. Mech. Anal. **123**, 169-192 (2005).

[13] JUUTINEN, P. *Minimization problems for Lipschitz functions via viscosity solutions*. Licenciate thesis, University of Jyväskylä (1996), 1-39.

[14] JUUTINEN, P., LINDQVIST, P. *On the higher eigenvalues for the ∞-eigenvalue problem*. Calc. Var. Partial Differ. Equa. **23**, 51-74 (1993).

[15] JUUTINEN, P., LINDQVIST, P., MANFREDI, J.J. *The ∞-eigenvalue problem*. Arch. Ration. Mech. Anal. **148**, 89-105 (1999).

[16] KATZOURAKIS, N. *An Introduction to Viscosity Solutions for Fully Nonlinear PDE with Applications to Calculus of Variations in L^∞*. BCAM, Springer Briefs in Mathematics, 2015.

[17] LINDQVIST, P. *Notes on the Infinity-Laplace Equation*. Norwegian University of Science and Technology.

[18] LINDQVIST, P. *Notes on the p-Laplace Equation*. Norwegian University of Science and Technology.

[19] LINDQVIST, P. *On a Nonlinear Eigenvalue Problem*. Berichte Univ. Jyvaskyla Math. Inst., (1995), 33-54.