

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE MESTRADO DO DEPTO. DE MATEMÁTICA

# Teoria geral das wavelets e aplicações

*Nicholas Rincon Reis*

orientado por  
Prof. Dr. Paulo Cupertino de LIMA

e co-orientado por  
Prof. Dr. Gastão de Almeida BRAGA

26 de setembro de 2018

# Agradecimentos

A Deus pela oportunidade concedida e por tantas bênçãos ao longo desse caminho, mesmo que eu nunca tenha merecido.

Aos meus pais, Frederico e Aline, pela educação e por todo o apoio e incentivo dado a mim durante toda a minha vida. Vocês são um espelho para mim, e espero criar meus filhos da mesma forma que vocês me criaram. Agradeço também a toda a minha família, em especial a minha avó, Antônia, por todo o carinho e cuidado.

Ao meu irmão, Thomas, pela parceria e por ter sido um exemplo para mim até hoje. Agradeço também à minha namorada, Ana Luiza, pelo amor incondicional e por estar comigo em todos os momentos.

Ao meu amigo Victor César, por estar sempre presente em todas as fases da minha vida, sendo sempre um apoio para mim. Agradeço também aos meus amigos Yuri e Rafael por sempre me ouvirem, e estarem sempre dispostos a me ajudar.

Aos meus companheiros Matheus, P.O., Rodolfo, Pedrão e Comprovante por todos os churrascos e todos os momentos de diversão.

Agradeço a todos os pesquisadores e todas as pesquisadoras na área de Matemática, por contribuírem para o avanço dessa ciência tão mágica e fascinante. Agradeço também à Matemática, por ser uma das minhas paixões e ter me motivado a estudá-la por tanto tempo.

Agradeço à CAPES por todo o apoio financeiro, que foi extremamente importante ao longo desse caminho, e agradeço também a todos os professores e todas as professoras que já tive, por terem contribuído para a minha formação.

Agradeço ao meu co-orientador, Professor Gastão de Almeida Braga, por todo o apoio ao longo da minha vida universitária, e por ter aberto portas muito importantes para mim. Agradeço também a todas as pessoas da Secretaria, do Colegiado, e todas as pessoas responsáveis pela limpeza e organização das salas do ICEx. Sem vocês, a vida de todos os estudantes e professores seria muito mais difícil (para não dizer impossível). Obrigado por tudo o que vocês fazem para facilitar e ajudar no nosso cotidiano.

Agradeço, de forma especial, ao meu orientador, Professor Paulo Cupertino de Lima. Muito obrigado por toda a disposição em me ajudar com matrícula, matérias, com o tema da dissertação e por me guiar por esse caminho. Sem você, não seria possível chegar até onde eu cheguei, por isso te agradeço por toda a ajuda.

Espero, nesse trabalho, retribuir pelo menos um pouco todo o apoio e toda a ajuda que recebi de todas as direções ao longo da minha vida acadêmica, e espero, de coração, que todas as pessoas tenham as mesmas oportunidades que eu tive.

## Resumo

Classicamente, uma função  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  é definida como uma wavelet se a família de funções  $\{2^{-j/2}\psi(2^{-j} \cdot -k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  forma uma base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ . Uma das características fundamentais das wavelets é que elas nos permitem fatiar hierarquicamente o espaço  $L^2(\mathbb{R})$  em subespaços ortogonais, cada um desses associado a uma escala (ou resolução); e, como em um microscópio, esse fatiamento nos permite ver todos os detalhes de uma função, desde os mais grosseiros aos mais delicados. Por causa disso, as wavelets são amplamente usadas como ferramentas para análise de sinais e processamento de dados. Nesta dissertação vimos como construir wavelets em geral, a partir do conceito de análise de resolução em escalas múltiplas (ARM). Com o auxílio desse conceito, construímos algumas das wavelets existentes na literatura. Relaxando uma das hipóteses da ARM, substituindo o conceito de base ortonormal por base de Riesz, vimos a teoria da construção de wavelets de suporte compacto, especificando as wavelets de Daubechies, que possuem tantos momentos nulos quanto se queira. Por fim, voltamos a nossa atenção para a aplicação de wavelets a problemas de processamento de dados; para isso, introduzimos algoritmos de decomposição e reconstrução via wavelets e os implementamos numericamente, aplicando-os aos problemas de compressão, remoção de ruídos e detecção de singularidades de dados.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares e notações</b>	<b>6</b>
2.1	Notações . . . . .	6
2.2	Resultados sobre integração . . . . .	6
2.3	Espaços de Hilbert . . . . .	8
2.3.1	Ortogonalidade e ortonormalidade . . . . .	8
2.3.2	Operadores lineares em espaços de Hilbert . . . . .	9
2.3.3	Espaços $L^2(\mathbb{R})$ e $l^2(\mathbb{Z})$ . . . . .	10
2.4	Análise de Fourier . . . . .	11
2.4.1	Séries de Fourier . . . . .	11
2.4.2	Transformada de Fourier . . . . .	11
2.5	Resultados gerais . . . . .	13
<b>3</b>	<b>A wavelet de Haar</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Análise de resolução em escalas múltiplas</b>	<b>22</b>
4.1	Definição e observações iniciais . . . . .	22
4.2	Demonstração do Teorema 4.1 . . . . .	23
4.3	Uma possível escolha para $\psi$ . . . . .	29
4.4	A ARM de Haar . . . . .	30
4.5	Construção da wavelet de Shannon a partir da ARM . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Sequências e bases de Riesz</b>	<b>36</b>
5.1	Definição e observações iniciais . . . . .	36
5.2	Relaxando as condições de uma ARM . . . . .	37
5.3	Construindo uma ARM a partir de uma base de Riesz . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Wavelets de suporte compacto: as wavelets de Daubechies</b>	<b>50</b>
6.1	Introdução . . . . .	50
6.2	Construindo uma ARM a partir de $m_0$ . . . . .	52
6.3	Encontrando candidatos a $m_0$ . . . . .	58
6.4	Wavelets de Daubechies . . . . .	61
6.5	Calculando os coeficientes de filtro das wavelets de Daubechies . . . . .	63
6.5.1	Caso $N = 1$ . . . . .	64

6.5.2	Caso $N = 2$ . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Transformada discreta de wavelets</b>	<b>66</b>
7.1	Algoritmo para decomposição . . . . .	66
7.2	Algoritmo para reconstrução . . . . .	67
7.3	Implementação dos algoritmos de decomposição e reconstrução . . . . .	68
<b>8</b>	<b>Aplicação de wavelets no processamento de imagens</b>	<b>70</b>
8.1	Decomposição de imagens via wavelets . . . . .	70
8.2	Compressão de dados . . . . .	71
8.3	Remoção de ruídos . . . . .	74
8.4	Detecção de singularidades . . . . .	74
8.5	Considerações finais . . . . .	76
<b>A</b>	<b>Códigos para processamento de dados via wavelets</b>	<b>77</b>
A.1	Wavelet de Haar . . . . .	77
A.2	Wavelet Daub4 . . . . .	78
A.3	Códigos para decomposição de uma matriz via wavelets . . . . .	79
A.4	Observações gerais sobre os algoritmos . . . . .	81

# Capítulo 1

## Introdução

Diferentemente de muitas áreas da Matemática, o estudo das wavelets não surgiu a partir de um predecessor, tampouco foi inicialmente formulado por um cientista em específico. Pelo contrário, ao longo do século XX vários matemáticos, físicos e engenheiros de partes diferentes do mundo se aventuraram pelo universo das wavelets em diversas formas e aplicações diferentes, sem ter a ciência de que estavam estudando o mesmo tema.

Se buscarmos o trabalho pioneiro nessa área, esse mérito cabe a Alfred Haar [1], que em 1909 construiu uma família de funções que formavam uma base ortonormal para o conjunto das funções quadrado-integráveis em  $[0, 1]$ . Entretanto, nessa época, não existia o estudo de wavelets e tampouco o termo *wavelets*. Posteriormente, descobriu-se que essa família de funções poderia ser estendida para uma base ortonormal para o conjunto das funções de quadrados integráveis em  $\mathbb{R}$ , o que fez com que a função base de seu estudo ficasse conhecida como a *wavelet de Haar*.

Como as wavelets de Haar não eram sequer contínuas, o trabalho de Haar foi deixado de lado por muito tempo, até que o físico Paul Levy, pesquisando sobre o movimento Browniano na década de 1930, descobriu que a função base de Haar se adequava melhor ao estudo de alguns detalhes do movimento Browniano, quando comparada com as funções bases de Fourier. Além disso, a função base de Haar poderia ser esticada, comprimida e transladada, fazendo com que ela coubesse em diferentes intervalos, permitindo assim maior precisão quando comparada à função base de Fourier, uma vez que esta sempre possui suporte ilimitado.

Posteriormente, muitos matemáticos contribuíram para os estudos de wavelets (mesmo antes da popularização desse termo), mas a principal contribuição para essa área ocorreu no final da década de 1970, quando o geofísico francês Jean Morlet [2] se deparou com o problema de analisar sinais que possuíam componentes com altíssima frequência em um curto intervalo de tempo e componentes com baixa frequência em um longo intervalo de tempo. A ferramenta mais popular usada para análise de sinais naquela época era a *transformada de Fourier* (com ótima localização de frequência, mas sem localização espacial), com a versão da *transformada de Fourier de tempo curto* (que analisava apenas uma “janela temporal”). Entretanto, com essa transformada, Morlet conseguia analisar as componentes de alta frequência ao usar uma janela temporal curta, ou então as componentes de baixa frequência usando

uma janela temporal longa, mas ele não conseguia analisar ambas simultaneamente. Para resolver esse problema, ele então usou um conjunto de funções geradas a partir de uma Gaussiana, com suportes compactos no tempo e na frequência. Como essas funções possuíam uma natureza curta e ondulatória, Morlet nomeou o seu trabalho de *Wavelets de forma constante*, sendo essa a primeira vez em que a terminologia “wavelet” foi usada para representar o que seria uma “onda pequena”.

Com todos esses trabalhos em vista, o trabalho mais importante para a formalização e a popularização das wavelets foi a formulação do conceito de *análise de resolução em escalas múltiplas*, por Stephane G. Mallat e Y. Meyer, em 1986 ([3] e [4]). A ARM ofereceu, pela primeira vez, um referencial no qual wavelets são construídas naturalmente. Com isso, Ingrid Daubechies criou a sua própria família de wavelets, as *wavelets de Daubechies*, baseado no conceito de resoluções múltiplas [5]. Essas wavelets são importantes por possuírem suportes compactos e possuírem tantos momentos nulos quanto queiramos.

Desde então, as wavelets causaram um enorme impacto em toda a comunidade científica, e como podemos ver em [6], vem sendo usadas em diversas aplicações diferentes: compressão de dados, remoção de ruídos, codificação de fonte e canal, engenharia biomédica, soluções numéricas para equações diferenciais parciais, fractais, análise de turbulência e análise financeira, entre outras. Por isso, a teoria das wavelets está na interface da matemática com outras ciências, sendo um ótimo exemplo de como uma teoria puramente matemática pode se tornar extremamente relevante e útil para a resolução de problemas do mundo real. A relevância das wavelets foi evidenciada em 2017, quando o matemático Yves Meyer recebeu o prêmio Abel pelo seu destaque no desenvolvimento da teoria matemática das wavelets, uma vez que essas foram essenciais na detecção de ondas gravitacionais criadas pela colisão de dois buracos negros.

Novas descobertas e contribuições vêm sendo feitas constantemente para a área de wavelets. Definições diferentes vêm sendo introduzidas, o que mostra a dinamicidade do conceito de wavelets. Assim, definir uma wavelet nos dias atuais é uma tarefa extremamente difícil. Nesse sentido, podemos falar em wavelets de primeira geração, que são geradas a partir das operações de translação e dilatação de uma única função. Existem dois tipos de wavelets de primeira geração: as discretas e as contínuas. Neste trabalho, consideraremos os estudos apenas sobre as wavelets discretas.

No Capítulo 2, apresentaremos resultados que serão usados como ferramentas no desenvolvimento desse trabalho.

No Capítulo 3, introduziremos o conceito de wavelet e o ilustraremos com o exemplo mais simples simples e conhecido: a wavelet de Haar.

No Capítulo 4, apresentaremos o conceito de análise de resolução em escalas múltiplas (ARM). A partir dele, construiremos as wavelets de Haar e de Shannon.

No Capítulo 5, definiremos sequências e bases de Riesz e mostraremos como relaxar uma das hipóteses da ARM a partir desses conceitos. Após isso, mostraremos como construir uma ARM a partir de uma base de Riesz.

No Capítulo 6, veremos as wavelets de Daubechies, as quais possuem suportes compactos e podem ser tomadas tão suaves quanto queiramos.

No Capítulo 7, introduziremos a transformada discreta de wavelets a partir da

construção de algoritmos rápidos envolvendo wavelets para a decomposição e reconstrução de funções. Apresentaremos também algoritmos específicos para conjuntos finitos de dados, trabalhando a partir das wavelets de Haar e Daubechies.

Finalmente, no Capítulo 8, implementaremos numericamente os algoritmos vistos no capítulo 7, e os aplicaremos em problemas de processamento de imagens. Mostraremos como usar a transformada discreta de wavelets para resolver problemas de compressão de dados, remoção de ruídos e detecção de singularidades.

As referências básicas para este trabalho serão [7], [8] e [9].



# Capítulo 2

## Preliminares e notações

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados que serão usadas ao longo do trabalho.

### 2.1 Notações

Dado  $B \subset \mathbb{R}$ , seja  $A \subset B$ . Definimos a função característica de  $A$ , com domínio em  $B$ , denotada por  $\chi_A$ , pela regra

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Denotamos por  $\text{span}\{A\}$  como sendo o conjunto gerado por combinações lineares finitas de elementos de  $A$ , com coeficientes em  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Dada uma função  $f : \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ )  $\rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), definimos a função  $f_{j,k}$  por

$$f_{j,k}(x) = 2^{-j/2} f(2^{-j}x - k),$$

onde  $j, k \in \mathbb{Z}$ . Além disso, definiremos

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1, & \text{se } a = b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

### 2.2 Resultados sobre integração

Os resultados apresentados nessa seção podem ser encontrados em livros-texto, como Bartle [10].

Na teoria da integração, os conjuntos de medida nula são irrelevantes para cálculos em integrais. Assim, em um contexto geral, as hipóteses são feitas em *quase todos os pontos*, isto é, a menos de conjuntos de medida nula. Estudaremos funções mensuráveis sob a  $\sigma$ -álgebra de Borel (em  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Usaremos a medida de Lebesgue para cálculo de integrais sobre um conjunto  $X$  mensurável, lembrando que a integral de Lebesgue coincide com a integral de Riemann, quando a integral de Riemann existe.

**Teorema 2.1.** (*Lema de Fatou*) Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de funções mensuráveis não-negativas e  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , em quase todos os pontos de  $X$ . Então,

$$\int_X f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dx.$$

**Teorema 2.2.** (*Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue*) Seja  $g$  uma função integrável sobre  $X$  e  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de funções mensuráveis, tais que  $|f_n(x)| \leq g(x)$  em  $X$ . Se  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , em quase todos os pontos de  $X$ , então  $f$  é integrável e

$$\int_X f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dx.$$

Seja  $p \in \mathbb{R}$ , tal que  $1 \leq p < \infty$ . Definimos o espaço  $L^p(X)$  como sendo o espaço (das classes de equivalências) das funções mensuráveis  $f$  tais que

$$\int_X |f|^p dx < \infty.$$

Nesses espaços, a função  $\|\cdot\|_p : L^p(X) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p dx \right)^{1/p}$$

define uma norma, que torna  $L^p(X)$  um espaço normado completo.

Analogamente, definimos o espaço  $L^\infty(X)$  como sendo o espaço (das classes de equivalências) das funções mensuráveis  $f$  que são essencialmente limitadas, i.e., existe  $M > 0$ , tal que  $|f| \leq M$ , em quase todos os pontos de  $X$ . A função  $\|\cdot\|_\infty : L^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \in \mathbb{R} : |f| \leq M \text{ em quase todos os pontos de } X\},$$

define uma norma em  $L^\infty(X)$  e torna  $L^\infty(X)$  completo.

**Teorema 2.3.** (*Desigualdade de Holder*) Sejam  $p, q \in \mathbb{R}$ , tais que  $1 < p, q < \infty$  com  $1/p + 1/q = 1$ . Se  $f \in L^p(X)$  e  $g \in L^q(X)$ , então

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

A desigualdade também vale para  $p = 1, q = \infty$ .

Da desigualdade de Holder, se  $f \in L^2(\mathbb{R})$  com suporte compacto, então  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , tendo em vista que

$$\|f\|_1 = \|f \cdot \chi_{[-R, R]}\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|\chi_{[-R, R]}\|_2 < \infty,$$

onde  $[-R, R]$  contém o suporte de  $f$ .

Como  $f_n = f \chi_{[-n, n]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  e  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $f$  em  $L^2(\mathbb{R})$ , concluímos que o espaço  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  é denso em  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 2.4.** Seja  $Q = \{\chi_{[a, b]} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset L^2(\mathbb{R})$ . Então  $\overline{\text{span}\{Q\}} = L^2(\mathbb{R})$ .

## 2.3 Espaços de Hilbert

As definições e proposições aqui apresentadas podem ser encontradas em livros-texto, como Kreyzig [11].

**Definição 2.1.** Seja  $(E, \|\cdot\|)$  um espaço vetorial normado. Dizemos que  $E$  é completo (ou de Banach), se toda sequência de Cauchy em  $E$  sob a norma  $\|\cdot\|$  converge para um elemento de  $E$ . Seja  $\mathcal{H}$  um espaço vetorial com um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , linear no primeiro argumento. Dizemos que  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert sob a norma  $\|u\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ , quando esta torna  $\mathcal{H}$  completo.

Em espaços de Hilbert, vale a desigualdade de Cauchy-Schwartz, dada por

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

quaisquer que sejam  $u, v \in \mathcal{H}$ .

### 2.3.1 Ortogonalidade e ortonormalidade

Nesta subseção, trabalharemos com um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  sobre  $\mathbb{C}$  (ou  $\mathbb{R}$ ), com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e norma  $\|\cdot\|$  induzida pelo produto interno.

**Definição 2.2.** Dois vetores  $u, v \in \mathcal{H}$  são ditos **ortogonais** se  $\langle u, v \rangle = 0$ . Seja  $U \subset \mathcal{H}$ . Definimos como **complemento ortogonal** de  $U$  o conjunto

$$U^{\perp} = \{v \in \mathcal{H} : \langle u, v \rangle = 0\}.$$

É fácil verificar que  $U^{\perp}$  é um subespaço de  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 2.5.** (*Soma direta*) *Seja  $U$  um subespaço de  $\mathcal{H}$  fechado. Então,  $\mathcal{H} = U \oplus U^{\perp}$ . Em outras palavras, se  $x \in \mathcal{H}$ , existem  $u, v$  unicamente determinados tais que  $u \in U$ ,  $v \in U^{\perp}$ ,  $x = u + v$ .*

O vetor  $u$  é definido como a projeção ortogonal de  $x$  em  $U$ . Isto se deve ao fato de que  $\langle x - u, u' \rangle = \langle v, u' \rangle = 0$ , qualquer que seja  $u' \in U$ .

**Lema 2.1.** *Seja  $U \neq \emptyset$  um subespaço de  $\mathcal{H}$ . Então,  $U$  é denso em  $\mathcal{H}$  se, e somente se,  $U^{\perp} = \{0\}$ .*

**Definição 2.3.** Seja  $I$  uma coleção de índices. Dizemos que uma coleção de elementos  $V = \{v_k\}_{k \in I}$  em  $\mathcal{H}$  é um **conjunto ortonormal** se  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ , onde  $i, j \in I$ . Dizemos ainda que  $V$  é um **conjunto ortonormal completo** se  $\overline{\text{span}\{V\}} = \mathcal{H}$ .

Dado um  $x \in \mathcal{H}$ , os coeficientes  $\langle x, v_k \rangle_{k \in I}$  são chamados de **coeficientes de Fourier** de  $x$  em relação a  $V$ .

**Lema 2.2.** *Dado um  $x \in \mathcal{H}$  arbitrário e  $V$  um conjunto ortonormal, existe no máximo uma quantidade enumerável de coeficientes de Fourier não nulos de  $x$  em relação a  $V$ . Em particular, podemos considerar a soma  $\sum_{k \in I} \langle x, v_k \rangle v_k$ .*

**Teorema 2.6.** *Seja  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  um conjunto ortonormal em  $\mathcal{H}$ . Então, para todo  $x \in \mathcal{H}$ , a série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$$

*converge na norma de  $\mathcal{H}$ . Além disso,  $x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$  é ortogonal a  $e_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Lema 2.3.** *(Relação de Parseval) Se  $I$  é uma família de índices e  $V = \{e_k\}_{k \in I}$  é um conjunto completo ortonormal em  $\mathcal{H}$ , então*

$$x = \sum_{k \in I} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

*Além disso, temos que*

$$\sum_{k \in I} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

### 2.3.2 Operadores lineares em espaços de Hilbert

Nessa subseção, trabalharemos com espaços de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $H_1$  e  $H_2$ , sob produtos internos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ , e normas  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  respectivamente.

**Definição 2.4.** *Seja  $T : H_1 \rightarrow H_2$  um operador linear. Dizemos que  $T$  é limitado se existe  $c > 0$  tal que  $\|T(x)\|_2 \leq c\|x\|_1, \forall x \in H_1$ . Para esses operadores, definimos uma norma, dada por*

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|_2}{\|x\|_1} : x \in H_1, x \neq 0 \right\}.$$

Essa norma está definida no espaço dos operadores lineares limitados de  $H_1$  em  $H_2$ , entretanto, como não há risco de confusão, denotaremos essa norma apenas por  $\|\cdot\|$ .

**Lema 2.4.**

- (i) *Seja  $T : H_1 \rightarrow H_2$  um operador linear limitado. Então,  $\|T(x)\|_2 \leq \|T\| \cdot \|x\|_1$ , para qualquer  $x \in H_1$ . Além disso, se  $c \geq 0$  é tal que  $\|T(x)\|_2 \leq c \cdot \|x\|_1$  para qualquer  $x \in H_1$ , então  $\|T\| \leq c$ .*
- (ii) *Uma transformação linear é limitada se e somente se ela for contínua.*

**Teorema 2.7.** *(Existência do operador adjunto) Seja  $T : H_1 \rightarrow H_2$  um operador linear limitado. Então, existe um operador linear  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  tal que*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle,$$

*para quaisquer  $x \in H_1, y \in H_2$ . O operador  $T^*$  é unicamente determinado; dizemos que  $T^*$  é o **operador adjunto** do operador  $T$ .*

**Lema 2.5.** (*Propriedades do operador adjunto*) Seja  $T : H_1 \rightarrow H_2$  um operador linear limitado. Então, o operador adjunto  $T^*$  satisfaz às seguintes propriedades:

- (i)  $\|T^*\| = \|T\|$ ;
- (ii)  $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ;
- (iii)  $(T^*)^* = T$ ;
- (iv)  $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$ ;
- (v) Se o operador  $T$  for invertível, então  $T^*$  também o é, e  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .

**Definição 2.5.** Seja  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador linear limitado. Dizemos que  $T$  é **auto-adjunto** se  $T^* = T$ .

**Teorema 2.8.** Seja  $U$  um subespaço fechado de  $\mathcal{H}$ . Seja  $P_U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  a projeção ortogonal em  $U$ . Então,  $P_U$  é auto-adjunto. Além disso,  $\|P_U\| = 1$ .

### 2.3.3 Espaços $L^2(\mathbb{R})$ e $l^2(\mathbb{Z})$

Ao longo do texto trabalharemos principalmente com os espaços de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  e  $l^2(\mathbb{Z})$ . Por causa disso, os definiremos nesta seção.

Dados  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , definimos produto interno em  $L^2(\mathbb{R})$  por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \bar{g} dx,$$

e a norma induzida pelo produto interno é

$$\|f\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx \right)^{1/2}.$$

O espaço  $l^2(\mathbb{Z})$  é definido como o espaço das seqüências complexas indexadas por inteiros cujo quadrado é somável. Em outras palavras,

$$l^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

O produto interno em  $l^2(\mathbb{Z})$  é

$$\langle x, y \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \bar{y}_n,$$

e a norma induzida pelo produto interno é

$$\|x\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 \right)^{1/2},$$

onde  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  e  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  são seqüências em  $l^2(\mathbb{Z})$ .

## 2.4 Análise de Fourier

Nesta seção exporemos os principais resultados sobre análise de Fourier. Esses resultados serão amplamente usados ao longo do texto, e as suas demonstrações podem ser encontradas em livros-texto, como Figueiredo [12].

### 2.4.1 Séries de Fourier

Seja  $L > 0$ . Consideraremos as funções  $2L$ -periódicas, isto é, o conjunto das funções  $f$  satisfazendo a  $f(x - 2L) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Considere o intervalo  $[0, 2L]$  (na verdade, podemos tomar qualquer intervalo de comprimento  $2L$ ; por simplicidade, tomaremos esse intervalo). Podemos provar que o conjunto

$$\left\{ \frac{e^{in\pi x/L}}{\sqrt{2L}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

constitui uma base ortonormal para  $L^2([0, 2L])$  (isto é, as funções cujo módulo ao quadrado é integrável de 0 a  $2L$ ). Dada  $f \in L^2([0, 2L])$ , a sua série de Fourier é definida por

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\pi x/L}, \quad (2.1)$$

onde os  $f_n$  são chamados de coeficientes de Fourier de  $f$ , e definidos por

$$f_n = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} e^{-in\pi x/L} f(x) dx.$$

**Teorema 2.9.** *Seja  $f \in L^2([0, 2L])$ . Então,*

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_0^{2L} \left| f(x) - \sum_{n=-M}^N f_n e^{in\pi x/L} \right|^2 dx = 0.$$

**Lema 2.6.** *(Identidade de Parseval para séries de Fourier) Seja  $f \in L^2([0, 2L])$ . Então,*

$$\|f\|_{L^2([0, 2L])}^2 \equiv \int_0^{2L} |f(x)|^2 dx = 2L \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2.$$

**Teorema 2.10.** *(Carleson, [13]) Seja  $f \in L^2([0, 2\pi])$ . A série em (2.1) converge para  $f$  em quase todos os pontos.*

### 2.4.2 Transformada de Fourier

**Definição 2.6.** *Seja  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . A transformada de Fourier de  $f$  é definida por*

$$(\mathcal{F}(f))(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} f(x) dx.$$

Observe que a transformada de Fourier é linear.

**Teorema 2.11.** *Seja  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Então,*

- (i)  $|\hat{f}| \leq \|f\|_1$  em quase todos os pontos;
- (ii)  $\hat{f}$  é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ ;
- (iii) Para quaisquer constantes  $a, b$ , com  $a \neq 0$ , temos

$$\widehat{f(a \cdot -b)}(\omega) = \frac{e^{-ib\omega/a}}{|a|} \hat{f}(\omega/a).$$

**Definição 2.7.** *Seja  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  a transformada de Fourier de  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Definimos a transformada inversa de Fourier por*

$$(\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

**Teorema 2.12.** *Sob as hipóteses da definição acima, temos que  $f(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}))(x)$  nos pontos de continuidade de  $f$ .*

**Teorema 2.13.** *Seja  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Então,  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  e satisfaz à identidade de Parseval  $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ .*

Uma consequência desse teorema é que a transformada de Fourier pode ser interpretada como um operador linear limitado de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  com imagem em  $L^2(\mathbb{R})$ , que preserva a norma. Nesse sentido, é possível fazer uma extensão de  $\mathcal{F}$  como um operador linear limitado para todo  $L^2(\mathbb{R})$ , uma vez que  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  é denso em  $L^2(\mathbb{R})$ . Essa extensão é feita a partir dos truncamentos de  $f$ , isto é, a partir da sequência  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $f_n = f\chi_{[-n,n]}$ . Cada  $f_n$  está em  $L^1(\mathbb{R})$ , então podemos aplicar  $\mathcal{F}$  em cada elemento desta sequência. Nesse caso, a sequência  $(f_n)$  é de Cauchy, sob a norma em  $L^2(\mathbb{R})$ . Assim, a identidade de Parseval e a linearidade de  $\mathcal{F}$  garantem que a sequência  $(\hat{f}_n)$  também é de Cauchy, e portanto, converge para alguma função  $\hat{f}$ . Definimos  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$  a partir desse limite, quando  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 2.14.** *Para  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , valem as seguintes propriedades:*

- (i) (Fórmula de Parseval)  $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ ;
- (ii) (Fórmula de Plancherel)  $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ ;
- (iii) (Cálculo de momentos de  $f$ ) Para  $n \in \mathbb{N}$ , vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = \left(\frac{-i}{2\pi}\right)^n \frac{d^n \hat{f}}{dx^n}(0).$$

**Teorema 2.15.** (Deslauriers, Dubuc, [14]) Seja  $\gamma(\omega) = \sum_{n=N_1}^{N_2} \gamma_n e^{-in\omega}$ , tal que  $\sum_{n=N_1}^{N_2} \gamma_n = 1$ . Então, a função

$$\Gamma(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \gamma(2^{-j}\omega)$$

é a transformada de Fourier de uma função com suporte em  $[N_1, N_2]$ .

**Teorema 2.16.** A transformada de Fourier é uma bijeção de  $L^2(\mathbb{R})$  em  $L^2(\mathbb{R})$ .

## 2.5 Resultados gerais

Sejam  $f, g : \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ )  $\rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) funções deriváveis até a ordem  $n$ . Então, pela regra de Leibniz para derivação do produto de duas funções, temos a seguinte fórmula:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

**Teorema 2.17.** (Bezout) Sejam  $p_1, p_2$  polinômios de grau  $n_1, n_2$  respectivamente. Suponha que  $p_1, p_2$  não possuem zeros em comum. Então existem polinômios únicos  $q_1, q_2$  com grau  $n_2 - 1, n_1 - 1$  respectivamente tais que  $p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1$ .

Uma demonstração para este teorema se encontra em Daubechies [15], página 169.



# Capítulo 3

## A wavelet de Haar

A seguir, apresentaremos o conceito de bases ortonormais em  $L^2(\mathbb{R})$  e a definição clássica de wavelets, e introduziremos uma função extremamente simples, a qual mostraremos ser uma wavelet. Por simplicidade, denotaremos a norma em  $L^2(\mathbb{R})$  apenas por  $\|\cdot\|$ .

**Definição 3.1.** Dizemos que uma coleção de elementos  $\{\phi_n : n \in \mathbb{Z}\}$  em um espaço de Hilbert separável  $\mathcal{H}$  sob uma norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  é um *conjunto ortonormal completo* (isto é, uma base ortonormal) em  $\mathcal{H}$  se ela satisfaz às três seguintes condições:

- **Ortogonalidade:**  $\langle \phi_m, \phi_n \rangle = 0$ , se  $n \neq m$ ;
- **Normalidade:**  $\|\phi_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ;
- **Completude:** Para todo  $f \in \mathcal{H}$ ,  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{Z}$  suficientemente grande tal que

$$\left\| f - \sum_{k=-N}^{k=N} \langle f, \phi_k \rangle \cdot \phi_k \right\|_{\mathcal{H}} < \epsilon.$$

**Definição 3.2.** Dizemos que uma função  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  é uma wavelet se a família de funções

$$\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}, \text{ onde } \psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k),$$

é um conjunto ortonormal completo em  $L^2(\mathbb{R})$ . Nesse caso, dizemos que  $\psi(x)$  é uma wavelet mãe.

Podemos fazer algumas observações sobre essas definições. Primeiramente, é fácil ver que  $\|\psi_{j,k}\| = \|\psi\|$ ,  $\forall j, k \in \mathbb{Z}$ , devido ao fator de normalização  $2^{-j/2}$  na função  $\psi_{j,k}$ . Portanto, se  $\|\psi\| = 1$ , então  $\|\psi_{j,k}\| = 1 \forall j, k \in \mathbb{Z}$ . Além disso, devido à definição de wavelets, se  $\psi$  for uma wavelet, então para qualquer  $j, k \in \mathbb{Z}$ ,  $\psi_{j,k}$  também será uma wavelet. Por causa disso, dizemos que o conjunto  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  constitui uma base ortonormal de wavelets para  $L^2(\mathbb{R})$ .

Como veremos no processo de construção das wavelets, toda wavelet possui média nula (isto é,  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$ ). Isso significa que ela oscila em torno do eixo  $x$ . Por outro lado, as wavelets mais usadas possuem suporte compacto ou decaem de forma

rápida o suficiente para que sejam muito localizadas em  $x$ . Por isso, a wavelet pode ser vista como uma onda pequena (daí o nome *wavelet*, que, em inglês, significa “onda pequena”).

Notemos que, à primeira vista, não é óbvio que wavelets existem, devido às restrições de ortogonalidade e completude da Definição 3.1. A fim de dirimir essa dúvida, considere a seguinte função:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2), \\ -1, & x \in [1/2, 1), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostraremos que essa função é uma wavelet, conhecida como wavelet de Haar.

Inicialmente, observe que essa função é mensurável, se anula fora do intervalo  $[0, 1)$  e  $\|\psi\| = 1$ , ou seja,  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ .

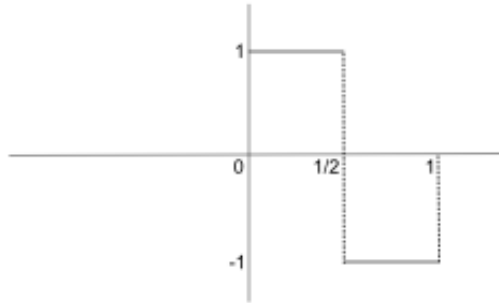


Figura 3.1: Esboço do gráfico da wavelet de Haar.

A partir da definição da  $\psi$ , segue que  $\psi_{j,k}$  possui suporte no intervalo  $[k2^j, (k+1)2^j)$ .

Vamos dedicar o resto dessa seção a provar que o conjunto  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  forma uma base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Teorema 3.1.** *O conjunto  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  é ortonormal em  $L^2(\mathbb{R})$ .*

*Demonstração.* Para demonstrarmos esse teorema, precisamos demonstrar as seguintes propriedades:

- (i)  $\|\psi_{j,k}\| = 1$ .
- (ii)  $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = 0$ , se  $(j, k) \neq (j', k')$ .

Como o suporte da função  $\psi_{j,k}$  é o intervalo  $[k2^j, (k+1)2^j)$ , segue que

$$\begin{aligned} \|\psi_{j,k}\| &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} (2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k))^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left( 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(2^{-j}x - k)|^2 dx \right)^{1/2} = \left( 2^{-j} \int_{k2^j}^{(k+1)2^j} dx \right)^{1/2} = 1. \end{aligned}$$

Para a prova de (ii), vamos separar em dois casos: quando  $j = j'$  (ou seja, obrigatoriamente  $k \neq k'$ ), e quando  $j \neq j'$ .

No primeiro caso, é fácil observar que os suportes das funções (ou seja, os intervalos  $[k2^j, (k+1)2^j)$  e  $[k'2^j, (k'+1)2^j)$ ) são disjuntos, portanto, o produto interno dessas funções é sempre 0.

Para provar o segundo caso, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $j > j'$ . Fazendo a mudança de variável  $u = 2^{-j}x - k$  em

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)) \cdot \overline{(2^{-j'/2} \psi(2^{-j'}x - k'))} dx,$$

concluimos

$$2^{(j-j')/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) \cdot \psi(2^{-j'+j}u - k' + k2^j) du = \langle \psi, \psi_{j'',k''} \rangle,$$

onde  $j'' = j' - j$ , e  $k'' = k' - k2^j$ . Podemos ver que  $\frac{1}{2} = 2^{-1}$  é um múltiplo natural de  $2^{j''}$ , uma vez que  $j'' < 0$  (já que  $j > j'$ ). Isso significa que, se dividirmos a reta em intervalos da forma  $[i2^{-1}, (i+1)2^{-1})$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , o suporte de  $\psi_{j'',k''}$  deve estar contido em um desses intervalos. Assim sendo, temos três possibilidades para o suporte de  $\psi_{j'',k''}$ :

- O suporte de  $\psi_{j'',k''}$  está contido em  $(-\infty, 0)$  ou  $[1, \infty)$ : nesse caso,  $\psi$  e  $\psi_{j'',k''}$  têm suportes disjuntos, portanto, o produto interno resultante é 0;
- O suporte de  $\psi_{j'',k''}$  está contido em  $[0, 1/2)$ : nesse caso,  $\psi \cdot \psi_{j'',k''} = \psi_{j'',k''}$ , que possui média 0, portanto, o produto interno resultante é 0;
- O suporte de  $\psi_{j'',k''}$  está contido em  $[1/2, 1)$ : nesse caso,  $\psi \cdot \psi_{j'',k''} = -\psi_{j'',k''}$ , que possui média 0, portanto, o produto interno resultante é 0.

Ou seja, em qualquer uma das possibilidades, o produto interno dessas funções é 0. Isso conclui a prova de (ii), e consequentemente a prova do teorema.  $\square$

Uma vez que provamos o Teorema 3.1, nos basta provar o seguinte teorema:

**Teorema 3.2.** *Qualquer função em  $L^2(\mathbb{R})$  pode ser arbitrariamente aproximada por uma combinação linear finita de translações e dilatações da wavelet de Haar. Em outras palavras, o conjunto  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  é completo em  $L^2(\mathbb{R})$ .*

Assumindo esse resultado como válido, concluimos então que o conjunto  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  é um conjunto completo ortonormal em  $L^2(\mathbb{R})$ . Entretanto, antes de prosseguirmos com a demonstração, vamos passar por algumas observações que serão importantes posteriormente.

**Observação 3.1.** Denotaremos por  $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$  o espaço das funções constantes por partes em intervalos da forma  $[k2^j, (k+1)2^j)$ , com norma finita. Em outras palavras, se  $\phi = \chi_{[0,1]}$ , então

$$V_j = \left\{ f : f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi_{j,k}(x), \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j,k}|^2 < \infty \right\}.$$

Notemos que cada  $V_j$  é um subespaço vetorial de  $L^2(\mathbb{R})$ .

*Demonstração.* (do Teorema 3.2) Considere  $\phi = \chi_{[0,1]}$ , como definido anteriormente. Como  $\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1)$  e  $\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1)$ , temos as igualdades

$$\phi(2x) = \frac{\phi(x) + \psi(x)}{2} \quad \text{e} \quad \phi(2x-1) = \frac{\phi(x) - \psi(x)}{2}.$$

Substituindo  $x$  por  $2^{-j-1}x - k$  nessas relações, e multiplicando as novas relações obtidas por  $2^{-j/2}$ , obtemos as igualdades

$$\phi_{j,2k}(x) = \frac{\phi_{j+1,k}(x) + \psi_{j+1,k}(x)}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \phi_{j,2k+1}(x) = \frac{\phi_{j+1,k}(x) - \psi_{j+1,k}(x)}{\sqrt{2}}, \quad (3.1)$$

o que nos conduz à relação

$$a_{j,2k} \cdot \phi_{j,2k} + a_{j,2k+1} \cdot \phi_{j,2k+1} = \frac{a_{j,2k} + a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}} \phi_{j+1,k} + \frac{a_{j,2k} - a_{j,2k+1}}{\sqrt{2}} \psi_{j+1,k}. \quad (3.2)$$

A partir de (3.2), se  $f^j \in V_j$ , ou seja,  $f^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi_{j,k}$ ,  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j,k}|^2 < \infty$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} f^j(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi_{j,k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_{j,2k} \phi_{j,2k}(x) + a_{j,2k+1} \phi_{j,2k+1}(x)) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k} \phi_{j+1,k}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j+1,k} \psi_{j+1,k}(x) \equiv f^{j+1} + \delta^{j+1}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

em que  $f^{j+1} \in V_{j+1}$ , e  $\delta^{j+1} \in W_{j+1}$ , onde

$$W_{j+1} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j+1,k} \psi_{j+1,k}(x), \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_{j+1,k}|^2 < \infty \right\}.$$

Assim, chegamos a uma versão de menor resolução (por um fator de 2) de  $f^j$ , tal que  $\delta^{j+1}$  contém os “detalhes” necessários para voltarmos para a resolução original. É fácil ver que  $W_j$  é um subespaço vetorial de  $L^2(\mathbb{R})$  para qualquer  $j \in \mathbb{Z}$ .

Note que  $\langle \phi_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle = 0, \forall j, k, k' \in \mathbb{Z}$ . A partir disso, e de (3.3), concluímos que

$$V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}.$$

Aplicando esse processo  $l$  vezes, podemos ver que

$$V_j = W_{j+1} \oplus \dots \oplus W_{j+l} \oplus V_{j+l}. \quad (3.4)$$

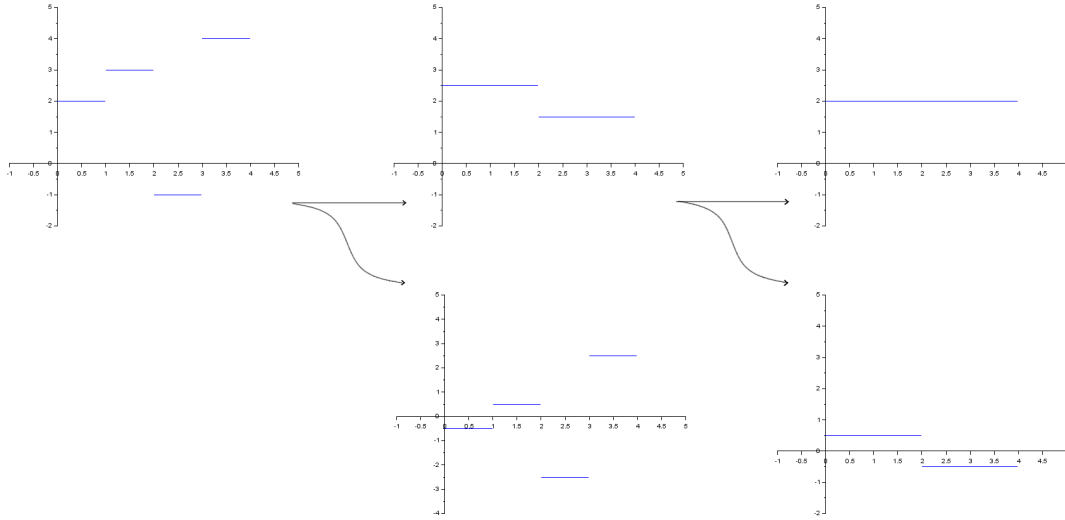


Figura 3.2: Decomposição sucessiva de uma função via wavelet de Haar.

Sejam  $P_j f, Q_j f$  as projeções ortogonais de  $f$  em  $V_j$  e  $W_{j+1}$  respectivamente. Note que  $Q_j = P_j - P_{j+1}$ . Expandindo isso, a partir da decomposição em (3.4), chegamos em

$$P_{j_0} f - P_{j_0+l} f = \sum_{k=0}^{l-1} (P_{j_0+k} - P_{j_0+k+1}) = \sum_{k=0}^{l-1} Q_{j_0+k}. \quad (3.5)$$

Assim, se  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$f = f - P_{j_0} f + P_{j_0+l} f + P_{j_0} f - P_{j_0+l} f = (f - P_{j_0} f) + P_{j_0+l} f + \sum_{k=0}^{l-1} Q_{j_0+k} f$$

o que implica que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{l-1} Q_{j_0+k} f \right\| = \|(f - P_{j_0} f) + P_{j_0+l} f\| \leq \|(f - P_{j_0} f)\| + \|P_{j_0+l} f\|.$$

A demonstração do teorema agora se reduz a mostrar que, dado um  $\epsilon > 0$  arbitrário, existem  $j_0, l \in \mathbb{Z}$  tais que

$$\|f - P_{j_0} f\| < \epsilon, \quad (3.6)$$

$$\|P_{j_0+l} f\| < \epsilon. \quad (3.7)$$

Da teoria da integração de Lebesgue, temos que o conjunto das funções

$$h(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[a_k, b_k)}, c_k \in \mathbb{R}, a_k, b_k \in \mathbb{Q}$$

é denso em  $L^2(\mathbb{R})$ . Da mesma forma, como os racionais da forma  $k \cdot 2^j$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$  são densos em  $\mathbb{R}$ , as funções da forma

$$h(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{[k_i 2^{j_i}, (k_i+1)2^{j_i}]},$$

onde  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $j_i, k_i \in \mathbb{Z}$ , são densas em  $L^2(\mathbb{R})$ . Portanto, dados  $f \in L^2(\mathbb{R})$  e  $\epsilon > 0$ ,  $\exists j_0 < j_1 \in \mathbb{Z}$  tais que

$$\left\| f - \sum_{k=-2^{j_1-j_0}}^{2^{j_1-j_0}-1} a_{j_0,k} \cdot \phi_{j_0,k} \right\| < \epsilon,$$

o que prova (3.6).

Partindo do mesmo pressuposto, podemos construir

$$h^{j_0}(x) \equiv \sum_{k=-2^{j_1-j_0}}^{2^{j_1-j_0}-1} a_{j_0,k} \cdot \phi_{j_0,k} \in V_{j_0},$$

tal que  $\|f - h^{j_0}\| < \frac{\epsilon}{2}$ . Logo,

$$\|P_{j_0+l}f\| \leq \|P_{j_0+l}h^{j_0}\| + \|P_{j_0+l}(f - h^{j_0})\| \leq \|P_{j_0+l}h^{j_0}\| + \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.8)$$

Partindo de (3.3), podemos agrupar os termos dois a dois, de tal forma que

$$\begin{aligned} h^{j_0}(x) &= \sum_{k=-2^{j_1-j_0-1}}^{2^{j_1-j_0-1}-1} a_{j_0+1,k} \cdot \phi_{j_0+1,k}(x) + \sum_{k=-2^{j_1-j_0-1}}^{2^{j_1-j_0-1}-1} d_{j_0+1,k} \cdot \psi_{j_0+1,k}(x) \\ &\equiv h^{j_0+1}(x) + \delta^{j_0+1}(x). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Repetindo o processo em (3.9) para  $h^{j_0+l}$ , eventualmente chegaremos em  $h^{j_1}(x) = a_{j_1,-1} \cdot \phi_{j_1,-1}(x) + a_{j_1,0} \cdot \phi_{j_1,0}(x)$ . Aplicando ainda esse processo em  $h^{j_1}$ , na  $n$ -ésima repetição teremos

$$\begin{aligned} h^{j_1} &= \frac{a_{j_1,-1}}{2^{n/2}} \phi_{j_1+n,-1} + \frac{a_{j_1,0}}{2^{n/2}} \phi_{j_1+n,0} + \sum_{j=1}^n d_{j_1+j,-1} \psi_{j_1+j,-1} + d_{j_1+j,0} \psi_{j_1+j,0} \\ &\equiv h^{j_1+n} + \Delta^n, \end{aligned}$$

em que

$$\Delta^n \equiv \sum_{j=1}^{j_1-j_0} \delta^{j_0+j} + \sum_{j=1}^n d_{j_1+j,-1} \psi_{j_1+j,-1} + d_{j_1+j,0} \psi_{j_1+j,0},$$

que é uma combinação linear finita de wavelets. Note que

$$\begin{aligned}
\|h^{j_1+n}\| &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} a_{j_1,-1}^2 2^{-n} (\phi_{j_1+n,-1}(x))^2 + a_{j_1,0}^2 2^{-n} (\phi_{j_1+n,0}(x))^2 dx \right)^{1/2} \\
&= 2^{-n/2} \left( \int_{-2^{j_1+n}}^0 a_{j_1,-1}^2 2^{-(j_1+n)} dx + \int_0^{2^{j_1+n}} a_{j_1,0}^2 2^{-(j_1+n)} dx \right)^{1/2} \\
&= 2^{-n/2} (a_{j_1,-1}^2 + a_{j_1,0}^2)^{1/2} = \left( \frac{a_{j_1,-1}^2 + a_{j_1,0}^2}{2^n} \right)^{1/2}, \tag{3.10}
\end{aligned}$$

que converge para 0 quando  $n \rightarrow \infty$ . Tomando  $n$  suficientemente grande e  $l = j_1 - j_0 + n$ , chegamos em

$$\|P_{j_0+l}h^{j_0}\| = \|P_{j_1+n}h^{j_0}\| = \|h^{j_1+n}\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

A partir disso e de (3.8), chegamos em

$$\|P_{j_0+l}f\| < \epsilon,$$

o que prova (3.7), e conclui a prova do teorema.  $\square$

Isso prova que o conjunto  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  é um conjunto ortonormal completo em  $L^2(\mathbb{R})$  e que o conjunto das combinações lineares finitas de  $\psi_{j,k}$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$  é denso em  $L^2(\mathbb{R})$ . Nesse sentido, podemos escrever

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : f = \sum_{j,k} d_{j,k} \psi_{j,k}, \sum_{j,k} |d_{j,k}^2| < \infty \right\},$$

uma vez que esse conjunto é fechado.

A seguir, obteremos os algoritmos para a decomposição e a reconstrução de dados para a wavelet de Haar. Note que a wavelet de Haar nos permite as seguintes relações:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x-1) \right) \equiv \sqrt{2} (h_0 \phi(2x) + h_1 \phi(2x-1)) \tag{3.11}$$

$$\phi(x) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x-1) \right) \equiv \sqrt{2} (g_0 \phi(2x) + g_1 \phi(2x-1)). \tag{3.12}$$

Podemos definir os coeficientes  $a_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  (a “média” e os “detalhes”) como as projeções de  $f$  sobre  $\phi_{j,k}$  e  $\psi_{j,k}$ , respectivamente (ou seja,  $a_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$  e  $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ ). Então, ao multiplicarmos as equações (3.11) e (3.12) por  $f$  e as integrarmos na reta, teremos as seguintes relações de coeficientes para passar da escala  $j-1$  para a escala  $j$ :

$$a_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{j-1,2n} + a_{j-1,2n+1}), \tag{3.13}$$

$$d_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{j-1,2n} - a_{j-1,2n+1}). \tag{3.14}$$

Dessas, decorrem

$$a_{j-1,2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j,n} + d_{j,n}), \quad (3.15)$$

$$a_{j-1,2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j,n} - d_{j,n}), \quad (3.16)$$

que nos permitem passar da escala  $j$  para a escala  $j - 1$ . As igualdades (3.13) e (3.14) nos dão um algoritmo rápido de decomposição de uma função, ao passo em que as igualdades (3.15) e (3.16) nos dão um algoritmo rápido de reconstrução de uma função. Esses algoritmos se generalizam para wavelets em geral, como será visto nas Seções 7.1 e 7.2.



# Capítulo 4

## Análise de resolução em escalas múltiplas

Nesta seção, introduziremos o conceito de ARM, que nos dará uma maneira sistemática de como construir wavelets em geral.

### 4.1 Definição e observações iniciais

**Definição 4.1.** Uma ARM é uma sequência  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de espaços fechados de  $L^2(\mathbb{R})$ , que satisfazem às seguintes propriedades:

- (i)  $V_{j+1} \subset V_j, \forall j \in \mathbb{Z}$ ;
- (ii)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ;
- (iii)  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ;
- (iv)  $f(x) \in V_j \iff f(2^j x) \in V_0$ ;
- (v)  $f(x) \in V_0 \iff f(x - k) \in V_0 \forall k \in \mathbb{Z}$ ;
- (vi)  $\exists \phi \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é uma base ortonormal para  $V_0$ .

Cabem algumas observações que decorrem dessas propriedades:

- A propriedade (iv) garante que todos os  $V_j$  estejam relacionados (por escala) a um mesmo espaço  $V_0$ .
- As propriedades (iv) e (vi) implicam que  $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é uma base ortonormal para  $V_j, \forall j \in \mathbb{Z}$ .
- As propriedades (i) e (iii) asseguram que,  $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = f$  (onde  $P_j$  é a projeção em  $V_j$ ).

Os  $V_j$  podem ser interpretados como espaços de aproximações sucessivas, e quanto menor o índice, melhor é a aproximação (pois mais fina é a resolução obtida). Para passarmos de uma resolução de  $2^j$  para  $2^{j-1}$ , é necessário incrementar os detalhes de  $P_j f$  para  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Esses detalhes estão no complemento ortogonal de  $V_j$  em relação a  $V_{j-1}$ , que será denotado por  $W_j$  (no caso,  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ ). Para um  $l \in \mathbb{Z}, l > 0$ , podemos escrever

$$V_j = V_{j+l} \bigoplus_{k=1}^l W_{j+k},$$

de forma que todos esses espaços sejam mutuamente ortogonais. Isso alinhado às condições (ii) e (iii), implicam que

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j.$$

O próximo teorema é o resultado mais importante da ARM.

**Teorema 4.1.** *Seja uma sequência de espaços  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  em  $L^2(\mathbb{R})$  formando uma ARM e  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é uma base ortonormal para  $V_0$ . Então, existe uma base ortonormal de wavelets  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  para  $L^2(\mathbb{R})$  tal que*

$$P_{j-1} = P_j + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

A importância desse teorema não se dá só pela seu resultado teórico, mas também pelo seu resultado prático, uma vez que, em sua demonstração, vamos construir  $\psi$  explicitamente, usando como ferramenta principal a transformada de Fourier, visto que dilatações e translações são trivialmente implementadas no espaço de frequências.

Como a demonstração desse teorema é extensa, dedicaremos a próxima seção para essa demonstração.

## 4.2 Demonstração do Teorema 4.1

Como  $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$ , e  $\{\phi_{-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forma uma base ortonormal para  $V_{-1}$ , temos que

$$\phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{-1,k} = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k). \quad (4.1)$$

Da ortonormalidade de  $\{\phi_{-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , segue que  $h_k = \langle \phi, \phi_{-1,k} \rangle$ , e

$$\sum_k |h_k|^2 = \|\phi\|_2^2 = 1.$$

A identidade (4.1) é chamada de *equação de escala* para  $\phi$ . Essa equação é a “regra” que determina como os  $V_j$  se relacionam, sendo também chamada de equação de *refinamento*, *dilatação* ou equação de *diferença entre duas escalas*, e os coeficientes  $h_k$  são chamados de *coeficientes de filtro* da função  $\phi$ .

Usando a transformada de Fourier, obtemos

$$\widehat{\phi(2 \cdot -k)}(\omega) = \frac{e^{-i\omega k/2}}{2} \hat{\phi}(\omega/2),$$

e, portanto,

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-i\omega k/2} \hat{\phi}(\omega/2).$$

Definindo

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}, \quad (4.2)$$

temos então

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2), \quad (4.3)$$

em quase todos os pontos. Vale observar que  $m_0$  é uma função periódica, de período  $2\pi$ . Além disso,  $m_0 \in L^2([0, 2\pi])$ , uma vez que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |m_0(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2} \sum_{k, k' \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k'}} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-k')\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_k} \cdot 2\pi = \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 = \pi. \end{aligned}$$

Agora, vamos enunciar dois lemas que serão de suma importância na demonstração do teorema:

**Lema 4.1.** *Translações por inteiros  $\phi_{0,k}(x) = \phi(x - k)$  de uma função  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  constituem um sistema ortonormal se e somente se*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = (2\pi)^{-1},$$

em quase todos os pontos.

*Demonstração.* Tendo em vista que a transformada de Fourier preserva o produto interno em  $L^2(\mathbb{R})$ , e que  $e^{ik\omega}$  é uma função  $2\pi$ -periódica para  $k \in \mathbb{Z}$ , temos que

$$\begin{aligned} \delta_{k,0} = \langle \phi_{0,0}, \phi_{0,k} \rangle &= \langle \hat{\phi}_{0,0}, \hat{\phi}_{0,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) \overline{e^{-ik\omega} \hat{\phi}(\omega)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{ik\omega} d\omega = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} e^{ik\omega} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} e^{ik\omega} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Definindo  $\theta(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2$ , e reescrevendo (4.4), chegamos em

$$\langle \phi_{0,0}, \phi_{0,k} \rangle = \int_0^{2\pi} e^{ik\omega} \theta(\omega) d\omega,$$

que é igual ao  $k$ -ésimo coeficiente da série de Fourier de  $\theta$  (o termo  $c_k$ ), multiplicado por  $2\pi$ . Sabemos que  $\delta_{k,0} = 1$  somente se  $k = 0$ , sendo igual a 0 caso contrário. Portanto, é necessário que  $c_k = 0$ , se  $k \neq 0$ , e  $c_k = (2\pi)^{-1}$ , se  $k = 0$ . Logo,  $\theta(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = (2\pi)^{-1}$ , em quase todos os pontos.

Como todos os passos feitos são igualdades,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = (2\pi)^{-1} \iff \langle \phi_{0,0}, \phi_{0,k} \rangle = \delta_{k,0}.$$

□

**Lema 4.2.**

$$|m_0(\eta)|^2 + |m_0(\eta + \pi)|^2 = 1,$$

em quase todos os pontos.

*Demonstração.* A partir de (4.3), e usando o Lema (4.1), obtemos

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega/2 + \pi l)|^2 |\hat{\phi}(\omega/2 + \pi l)|^2 = (2\pi)^{-1},$$

em quase todos os pontos. Como essa série converge absolutamente, podemos quebrá-la em índices pares e ímpares. Chamando  $\omega/2$  de  $\eta$ , chegamos em

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\eta + 2\pi l)|^2 |\hat{\phi}(\eta + 2\pi l)|^2 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\eta + \pi + 2\pi l)|^2 |\hat{\phi}(\eta + \pi + 2\pi l)|^2.$$

Usando agora o fato de que  $m_0$  tem período  $2\pi$ , chegamos em

$$\begin{aligned} |m_0(\eta)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\eta + 2\pi l)|^2 + |m_0(\eta + \pi)|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\eta + \pi + 2\pi l)|^2 \\ = (2\pi)^{-1} (|m_0(\eta)|^2 + |m_0(\eta + \pi)|^2) = (2\pi)^{-1}, \end{aligned}$$

em quase todos os pontos. Assim,  $|m_0(\eta)|^2 + |m_0(\eta + \pi)|^2 = 1$  em quase todos os pontos. □

Desse lema decorre que  $|m_0(w)| \leq 1$  em quase todos os pontos. Agora, vamos caracterizar o espaço  $W_0$ , que é o complemento ortogonal de  $V_0$  em relação a  $V_{-1}$ .

Primeiramente, se  $f \in W_0$ , então  $f \in V_{-1}$ , logo  $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \phi_{-1,k}$ , de forma que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^2 < \infty$ , e  $f_k = \langle f, \phi_{-1,k} \rangle$ . Então, podemos escrever

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{-ik\omega/2} \hat{\phi}(\omega/2).$$

Assim como fizemos anteriormente, definimos

$$m_f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{-ik\omega}, \quad (4.5)$$

e chegamos em

$$\hat{f}(\omega) = m_f(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2), \quad (4.6)$$

com  $m_f$  sendo  $2\pi$ -periódica. Notemos que a série em (4.5) converge em quase todos os pontos, uma vez que  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Os argumentos acima podem ser repetidos na ordem inversa, o que nos permite concluir que, se vale (4.6) para alguma função  $m_f \in L^2([0, 2\pi])$ , que seja  $2\pi$ -periódica, então  $f \in V_{-1}$ .

Além disso, se  $f \in W_0$ , então  $f \perp V_0$ , logo,  $\forall k \in \mathbb{Z}, f \perp \phi_{0,k}$ . Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f, \phi_{0,k} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\phi}_{0,k} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\phi}(\omega)} e^{-ik\omega} d\omega \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} e^{ik\omega} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\phi}(\omega)} d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} e^{ik\omega} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2\pi l) \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)} d\omega. \end{aligned}$$

O que, similarmente à prova do Lema (4.1), implica que

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2\pi l) \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)} = 0$$

em quase todos os pontos. Usando (4.3) e (4.6), chegamos em

$$\begin{aligned} &\sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\omega + 2\pi l) \overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_f(\omega/2 + \pi l) \hat{\phi}(\omega/2 + \pi l) \overline{m_0(\omega/2 + \pi l) \hat{\phi}(\omega/2 + \pi l)} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} m_f(\omega/2 + \pi l) \overline{m_0(\omega/2 + \pi l)} |\hat{\phi}(\omega/2 + \pi l)|^2 = 0. \end{aligned}$$

Separando os termos dessa soma em pares e ímpares, e usando a periodicidade de  $m_f$  e  $m_0$ , assim como na prova do Lema (4.2), concluímos enfim que

$$m_f(\eta) \overline{m_0(\eta)} + m_f(\eta + \pi) \overline{m_0(\eta + \pi)} = 0, \quad (4.7)$$

em quase todos os pontos. Reciprocamente, se  $f \in V_{-1}$  e vale (4.7), então  $f \perp V_0$ .

Definamos agora os seguintes vetores:

$$\begin{cases} M_0 = (m_0(\omega), m_0(\omega + \pi)), \\ M_f = (m_f(\omega), m_f(\omega + \pi)), \\ M'_0 = (m_0(\omega + \pi), -m_0(\omega)). \end{cases}$$

Pelo Lema 4.2, os vetores  $M_0$  e  $M'_0$  são unitários, e pelas suas definições, são ortogonais para quase todo  $\omega$ . Logo,  $M_0$  e  $M'_0$  formam uma base ortonormal para  $\mathbb{C}^2$ .

Entretanto, como vale (4.7), temos que  $M_0$  e  $M_f$  são ortogonais em quase todos os pontos, e portanto  $M_f(\omega) = \lambda(\omega) M_0'(\omega)$  em quase todos os pontos, onde

$$\lambda(\omega) = \langle M_f(\omega), M_0'(\omega) \rangle = m_f(\omega)m_0(\omega + \pi) - m_f(\omega + \pi)m_0(\omega).$$

Note que

$$\begin{aligned} \lambda(\omega + \pi) &= m_f(\omega + \pi)m_0(\omega + 2\pi) - m_f(\omega + 2\pi)m_0(\omega + \pi) \\ &= m_f(\omega + \pi)m_0(\omega) - m_f(\omega)m_0(\omega + \pi) = -\lambda(\omega), \end{aligned} \quad (4.8)$$

uma vez que  $m_0$  e  $m_f$  são  $2\pi$ -periódicas; em particular, temos que  $\lambda$  também é  $2\pi$ -periódica.

Agora definamos  $\lambda(\eta) = e^{i\eta}(e^{-i\eta}\lambda(\eta)) \equiv e^{i\eta}v(2\eta)$ . Usaremos (4.8) para verificar que  $v$  é  $2\pi$ -periódica. Com efeito,

$$\begin{aligned} v(\eta + 2\pi) &= e^{-i(\eta/2 + \pi)}\lambda(\eta/2 + \pi) \\ &= (\cos(\eta/2 + \pi) - i \operatorname{sen}(\eta/2 + \pi))(-\lambda(\eta/2)) \\ &= (-\cos(\eta/2) + i \operatorname{sen}(\eta/2))(-\lambda(\eta/2)) \\ &= (\cos(\eta/2) - i \operatorname{sen}(\eta/2))\lambda(\eta/2) = e^{-i\eta/2}\lambda(\eta/2) = v(\eta). \end{aligned}$$

Mostraremos também que  $v \in L^2([0, 2\pi])$ . Podemos escrever  $M_f(\omega) = e^{i\omega}v(2\omega)M_0'(\omega)$ , e como  $M_0'$  é unitário, obtemos

$$|v(\omega)|^2 = |\lambda(\omega/2)|^2 = |M_f(\omega/2)|^2 = |m_f(\omega/2)|^2 + |m_f(\omega/2 + \pi)|^2$$

em quase todos os pontos, o que implica que

$$\|v\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 = \int_0^{2\pi} |v(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{2\pi} |m_f(\omega/2)|^2 + |m_f(\omega/2 + \pi)|^2 d\omega.$$

Fazendo  $\omega/2 = \eta$ , e logo  $d\omega = 2d\eta$ , chegamos em

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\pi |m_f(\eta)|^2 + |m_f(\eta + \pi)|^2 d\eta &= \int_0^{2\pi} |m_f(\eta)|^2 d\eta = 2\|m_f\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Olhando para a primeira coordenada de  $M_f$ , concluímos que, se  $f \in W_0$ , então

$$m_f(\omega) = e^{i\omega}v(2\omega)\overline{m_0(\omega + \pi)},$$

e portanto

$$\hat{f}(\omega) = e^{i\omega/2}\overline{m_0(\omega/2 + \pi)}v(\omega)\hat{\phi}(\omega/2), \quad (4.9)$$

em que  $v$  é  $2\pi$ -periódica. Reciprocamente, podemos verificar que, se existe  $v$  em  $L^2([0, 2\pi])$  tal que  $\hat{f}$  pode ser escrita na forma (4.9), então  $f \in W_0$ . De fato, se  $v$  satisfaz às hipóteses, então

$$\hat{f}(\omega) = m_f(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2),$$

com

$$m_f(\omega/2) = e^{i\omega/2} v(\omega) \overline{m_0(\omega/2 + \pi)}.$$

É fácil ver que  $m_f$  é uma função  $2\pi$ -periódica. Como do Lema (4.2) segue que  $|m_0(\omega)| \leq 1$  em quase todos os pontos, então  $m_f \in L^2([0, 2\pi])$  e consequentemente  $f \in V_{-1}$ . Além disso, temos que

$$\begin{aligned} M_f(\omega) &= (m_f(\omega), m_f(\omega + \pi)) \\ &= e^{i\omega} v(2\omega) \overline{m_0(\omega + \pi)} \overline{m_0(\omega)} = e^{i\omega} v(2\omega) M'_0, \end{aligned}$$

o que implica que  $M_f \perp M_0$  em quase todos os pontos. Logo, (4.7) vale em quase todos os pontos; mas, como  $f \in V_{-1}$ , isso implica que  $f \perp V_0$ , e então  $f \in W_0$ .

A escolha natural para  $v$  é a função constante  $v \equiv 1$ . Podemos definir então a função  $\psi$  a partir de  $\hat{\psi}$ , fazendo

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \hat{\phi}(\omega/2). \quad (4.10)$$

Mostraremos que  $\psi$  assim definida é uma wavelet. Claramente,  $v$  é  $2\pi$ -periódica, e  $v \in L^2([0, 2\pi])$ . Logo,  $\psi \in W_0$ . Suponha, por um instante, que o conjunto  $\{\psi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  constitua uma base ortonormal para  $W_0$ . Então, pela propriedade (iv) da Definição 4.1, temos que  $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  constitui uma base ortonormal para  $W_j$ . Por definição,  $W_j \perp W_{j'}$  sempre que  $j \neq j'$ . Logo, como

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j,$$

então o conjunto  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  constitui uma base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ , e segue que  $\psi$  é, de fato, uma wavelet.

Agora nos resta provar que o conjunto  $\{\psi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  constitui uma base ortonormal para  $W_0$ . Podemos checar a ortonormalidade a partir do Lema (4.1). Observe que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega/2 + k\pi + \pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega/2 + k\pi)|^2.$$

Separando essa série em termos pares e ímpares, obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega/2 + 2k\pi + \pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega/2 + 2k\pi)|^2 + \\ &\sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega/2 + 2k\pi + 2\pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega/2 + 2k\pi + \pi)|^2, \end{aligned}$$

e a partir da periodicidade de  $m_0$ , chegamos em

$$\begin{aligned} |m_0(\omega/2 + \pi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega/2 + 2k\pi)|^2 &+ |m_0(\omega/2)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega/2 + 2k\pi + \pi)|^2 \\ &= (2\pi)^{-1} \cdot (|m_0(\omega/2 + \pi)|^2 + |m_0(\omega/2)|^2) \\ &= (2\pi)^{-1}, \end{aligned}$$

em quase todos os pontos. Então, pelo Lema (4.1), o conjunto  $\{\psi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  é ortonormal.

Por outro lado, se  $f \in W_0$ , então existe uma função  $v$  em  $L^2([0, 2\pi])$  tal que  $v$  é  $2\pi$ -periódica e em quase todos os pontos vale

$$\hat{f}(\omega) = v(\omega)\hat{\psi}(\omega).$$

Expandindo  $v(\omega)$  em sua série de Fourier (que converge para  $v$  em norma), obtemos

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k e^{-ik\omega} \hat{\psi}(\omega),$$

que é a transformada de Fourier da função  $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k \psi_{0,k}$ . Logo, a série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k \psi_{0,k}$  converge em  $L^2(\mathbb{R})$  para  $f$ . Isso mostra que as  $\psi_{0,k}$  formam uma base ortonormal para  $W_0$ , o que conclui a prova do teorema.

### 4.3 Uma possível escolha para $\psi$

Note que a fórmula

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \hat{\phi}(\omega/2)$$

está escrita em termos da transformada de Fourier de  $\psi$ . Então, para obtermos uma fórmula para a função  $\psi$  devemos aplicar o processo de inversão da transformada de Fourier. Primeiramente, usando a definição de  $m_0$  em (4.2), temos

$$\begin{aligned} e^{i\omega/2} \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} &= \frac{e^{i\omega/2}}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_k} e^{ik(\omega/2 + \pi)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h_k} e^{i(k+1)\omega/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} (-1)^{k'-1} \overline{h_{-k'-1}} e^{-ik'\omega/2}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

de forma que em (4.11) fizemos a mudança de variáveis  $k+1 = -k'$ . Agora, podemos escrever

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} (-1)^{k'-1} \overline{h_{-k'-1}} e^{-ik'\omega/2} \hat{\phi}(\omega/2).$$

Como  $\widehat{\phi(2 \cdot - k)}(\omega) = \frac{1}{2} e^{-ik\omega/2} \hat{\phi}(\omega/2)$ , concluímos que  $\psi$  pode ser escrita na forma

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \overline{h_{-k-1}} \phi(2x - k) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi_{-1,k}(x). \quad (4.12)$$



## 4.4 A ARM de Haar

Definimos a função  $\phi(x) = \chi_{[0,1)}(x)$ , e o seu conjunto de translações e dilatações como  $\phi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\phi(2^{-j}x - k)$ . Nesse caso, a ARM escolhida é  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , tal que

$$V_j = \left\{ f : f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{j,k} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty \right\}.$$

Descrevendo cada um desses  $V_j$ , podemos dizer que  $V_j$  é o conjunto das funções quadrado-integráveis, constantes por partes em intervalos de tamanho  $2^j$ . Nesse caso, podemos ver que as propriedades são cumpridas:

- $V_{j+1} \subset V_j$ : uma função que é constante por partes em intervalos de tamanho  $2^j$  também o é em intervalos de tamanho  $2^{j-1}$ .
- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$ : uma função que está em todos os  $V_j$  deve ser constante em toda a reta; para ela ser quadrado-integrável, deve então ser a função identicamente nula.
- $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ : essa propriedade corresponde ao Teorema 3.2.
- $f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0$ : essa propriedade decorre da definição dos  $V_j$  e de  $\phi_{j,k}$ .
- $f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$ : essa propriedade decorre da definição dos  $V_j$  e de  $\phi_{j,k}$ .
- $\{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  constitui uma base ortonormal para  $V_0$ .

Isso prova que os espaços  $V_j$  realmente formam uma ARM. Observemos que

$$\phi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{-1,0} + \phi_{-1,1}), \quad (4.13)$$

e que então a wavelet obtida pela relação (4.12) é

$$\psi(x) = \phi(2x + 1) - \phi(2x + 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{-1,-1}(x) - \phi_{-1,-2}(x)).$$

Ao aplicarmos essa função em  $x - 1$ , obtemos

$$\phi(2x - 1) - \phi(2x).$$

Se multiplicarmos por  $-1$ , encontramos a wavelet de Haar, conforme esperado.

## 4.5 Construção da wavelet de Shannon a partir da ARM

Primeiramente, vamos enunciar o teorema que será a base da construção para a wavelet de Shannon.

**Teorema 4.2.** *Seja  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , tal que  $\hat{f}(\omega) = 0$  se  $|\omega| > \pi$ . Então,*

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\text{sen } \pi(t - n)}{\pi(t - n)},$$

tomando o limite quando  $t \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Antes de demonstrarmos o caso geral, cabe ressaltar que quando  $t \in \mathbb{Z}$ , é necessário tomarmos o limite do lado direito da igualdade, para evitar indeterminações. Esse limite converge exatamente para  $f(t)$ , uma vez que  $\text{sen } k\pi = 0$  se  $k \in \mathbb{Z}$ , e que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ .

Seja  $\hat{f}(\omega)$  a transformada de Fourier de  $f$ . Então, podemos tomar a sua série de Fourier e escrevermos

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\omega},$$

se  $|\omega| < \pi$ . Nesse caso,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

Mas como  $\hat{f}(\omega) = 0$  se  $|\omega| > \pi$ , podemos escrever

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{in\omega} \hat{f}(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(n),$$

pela fórmula de inversão da transformada de Fourier. Logo,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\omega} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f(n)}{\sqrt{2\pi}} e^{-in\omega} d\omega \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f(n)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-n)\omega} d\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f(n)}{2\pi} \cdot \frac{e^{i(t-n)\pi} - e^{i(t-n)(-\pi)}}{i(t-n)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\text{sen } \pi(t - n)}{\pi(t - n)}, \end{aligned}$$

o que mostra o teorema. □

**Definição 4.2.** Dizemos que uma função  $f \in L^2(\mathbb{R})$  possui banda limitada se  $\exists \Omega > 0$  tal que  $|\omega| > \Omega \Rightarrow \hat{f}(\omega) = 0$ .

Seja  $f$  uma função de banda limitada, tal que  $\hat{f}(\omega) = 0$  se  $|\omega| > \Omega$ . Nesse caso, podemos tomar  $g$  de tal forma que  $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\frac{\Omega}{\pi}\omega)$ . Então,  $\hat{g}(\omega) = 0$  se  $|\omega| > \pi$ . Assim,  $g$  satisfaz às hipóteses do Teorema (4.2). Então, podemos escrever

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \frac{\text{sen } \pi(t - n)}{\pi(t - n)}. \quad (4.14)$$

Pelas propriedades da transformada de Fourier, segue que  $g(t) = \frac{\pi}{\Omega} f(\frac{\pi}{\Omega}t)$ , e que  $f(t) = \frac{\Omega}{\pi} g(\frac{\Omega}{\pi}t)$ . Logo, a partir disso e de (4.14), chegamos em

$$\frac{\pi}{\Omega} f\left(\frac{\pi}{\Omega}t\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\pi}{\Omega} f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right) \frac{\text{sen } \pi(t - n)}{\pi(t - n)}. \quad (4.15)$$

Aplicando (4.15) em  $\frac{\Omega}{\pi}t$ , chegamos em

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\pi}{\Omega}n\right) \frac{\text{sen } (\Omega t - \pi n)}{\Omega t - \pi n}.$$

Isso significa que uma função de banda limitada é determinada pelos seus valores nos números inteiros, dilatados por um escalar.

Vamos definir agora os espaços  $V_j$  que formam a ARM para a wavelet de Shannon. Seja  $V_j$  o subespaço de  $L^2(\mathbb{R})$ , tal que  $f \in V_j$  se a sua transformada de Fourier,  $\hat{f}(\omega)$ , se anula quando  $|\omega| > 2^{-j}\pi$ . Podemos ver que:

- $V_{j+1} \subset V_j$ .
- Seja  $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ ; então  $\hat{f}(\omega) = 0$  em todos os pontos, logo  $f(x) = 0$ . Isso significa que  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ .
- Seja  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Então,  $\forall \epsilon > 0$ , podemos tomar  $g$  tal que, para um  $N$  arbitrariamente grande,  $\hat{g} = \chi_{[-N, N]} \hat{f}$ . Nesse caso, como  $N$  é arbitrário, e a transformada de Fourier preserva norma, podemos obter

$$\|f - g\| = \|\hat{f} - \hat{g}\| < \epsilon.$$

Como  $g$  possui banda limitada, está em algum  $V_j$ . Logo, temos que  $g \in \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ , então  $f \in \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$ , o que implica que  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ .

- Como  $\widehat{f(\cdot - n)}(\omega) = e^{-in\omega} \hat{f}(\omega)$ , se  $f \in V_0$ ,  $f(\cdot - n) \in V_0$ .
- Seja  $f \in V_j$ . Então,

$$\widehat{f(2^j \cdot)}(\omega) = 2^{-j} \hat{f}(2^{-j}\omega).$$

Nesse caso,  $\hat{f}(2^{-j}\omega) = 0$ , se  $|2^{-j}\omega| > 2^{-j}\pi$ , ou seja, se  $|\omega| > \pi$ . Então,  $f(2^j \cdot) \in V_0$ .

- Seja  $f \in V_0$ . Então,  $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \phi(t - n)$ , em que  $\phi(t) = \frac{\text{sen } \pi t}{\pi t}$ . Note que

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \phi(t - n), \phi(t - m) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\omega} \hat{\phi}(\omega) \overline{e^{-im\omega} \hat{\phi}(\omega)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(n-m)\omega} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)\omega} d\omega = \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Isso significa que  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma base ortonormal para  $V_0$ .

Essas seis observações mostram que a sequência de subespaços  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  em  $L^2(\mathbb{R})$  forma, de fato, uma ARM. Vamos agora encontrar a forma para a wavelet de Shannon, a partir da relação

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2),$$

dada em (4.3). Uma vez que

$$\hat{\phi}(\omega) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega) \text{ e } \hat{\phi}(\omega/2) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \chi_{[-2\pi, 2\pi]}(\omega),$$

é necessário que  $m_0(\omega/2) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega)$  em quase todos os pontos do intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$  para que a relação (4.3) seja verdadeira, na ARM associada à wavelet de Shannon. Logo,  $m_0(\omega) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(\omega)$  em quase todos os pontos de  $[-\pi, \pi]$ . Devemos então periodizar  $m_0$ , para que esta possua período  $2\pi$ . Fazemos isso escrevendo

$$m_0(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(\omega + 2\pi l).$$

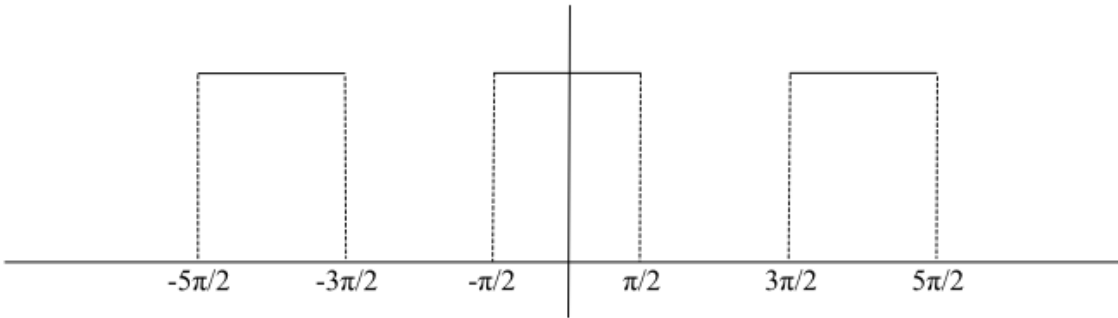


Figura 4.1: Esboço da função  $m_0(\omega)$ .

Podemos então calcular

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \hat{\phi}(\omega/2) = \begin{cases} \frac{e^{i\omega/2}}{\sqrt{2\pi}}, & \text{se } -2\pi \leq x < -\pi \\ \frac{e^{i\omega/2}}{\sqrt{2\pi}}, & \text{se } \pi \leq x < 2\pi \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A partir da inversa da transformada de Fourier, obtemos

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{\psi}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-2\pi}^{\pi} e^{i\omega x} e^{i\omega/2} d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\omega x} e^{i\omega/2} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-2\pi}^{\pi} e^{i\omega(x+1/2)} d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\omega(x+1/2)} d\omega \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Usando o fato de que  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sen \theta$ , podemos escrever

$$e^{i\omega(x+1/2)} = \cos(\omega(x+1/2)) + i \sen(\omega(x+1/2)).$$

Como essas funções são integráveis em  $[-2\pi, -\pi)$  e em  $[\pi, 2\pi)$ , podemos separar as integrais em (4.16), escrevendo

$$\int_{-2\pi}^{-\pi} e^{i\omega(x+1/2)} d\omega = \int_{-2\pi}^{-\pi} \cos(\omega(x+1/2)) d\omega + \int_{-2\pi}^{-\pi} i \sen(\omega(x+1/2)) d\omega$$

e

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{i\omega(x+1/2)} d\omega = \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\omega(x+1/2)) d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} i \sen(\omega(x+1/2)) d\omega.$$

Uma vez que a função  $i \sen(\omega(x+1/2))$  é ímpar na variável  $\omega$ , podemos observar que

$$\int_{-2\pi}^{-\pi} i \sen(\omega(x+1/2)) d\omega = - \int_{\pi}^{2\pi} i \sen(\omega(x+1/2)) d\omega.$$

Da mesma forma, uma vez que  $\cos(\omega(x+1/2))$  é par na variável  $\omega$ , podemos observar que

$$\int_{-2\pi}^{-\pi} \cos(\omega(x+1/2)) d\omega = \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\omega(x+1/2)) d\omega.$$

Assim, podemos concluir que

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \left( 2 \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\omega(x + 1/2)) d\omega \right) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\omega(x + 1/2)) d\omega.$$

Calculando essa integral, temos

$$\psi(x) = \frac{\text{sen}(2\pi(x + 1/2)) - \text{sen}(\pi(x + 1/2))}{\pi(x + 1/2)},$$

tomando o limite quando necessário. Essa função é conhecida como a wavelet de Shannon, cujo gráfico é dado na Figura 4.2.

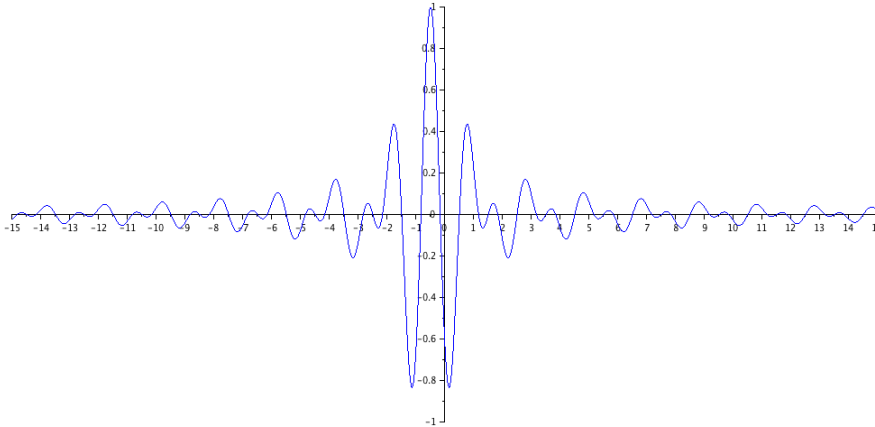


Figura 4.2: Esboço de parte da wavelet de Shannon.

Observe que, a partir da definição da série de Fourier, podemos calcular os coeficientes de filtro  $h_k$  para a wavelet de Shannon a partir da relação

$$\begin{aligned} h_k &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega} m_0(\omega) d\omega \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ik\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{se } k = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \cdot \frac{2\text{sen}(k\pi/2)}{k}, & \text{se } k \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$h_k = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{se } k = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2k\pi} \cdot (-1)^{(k-1)/2}, & \text{se } k \text{ é ímpar}, \\ 0, & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases}$$

Como o decaimento dos coeficientes de filtro é linear em relação a  $k^{-1}$ , a wavelet de Shannon possui poucas aplicações práticas.

# Capítulo 5

## Sequências e bases de Riesz

### 5.1 Definição e observações iniciais

**Definição 5.1.** Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert. Dizemos que uma sequência de vetores  $(x_n)_{n \in M} \subset \mathcal{H}$  é uma sequência de Riesz se existem constantes  $A, B \in \mathbb{R}, 0 < A \leq B$  tais que

$$A \left( \sum_{n \in M} |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{n \in M} a_n x_n \right\| \leq B \left( \sum_{n \in M} |a_n|^2 \right)^{1/2},$$

para toda sequência numérica  $(a_n)_{n \in M}$  com  $\sum_{n \in M} |a_n|^2 < \infty$ , em que  $M$  é um conjunto enumerável. Nesse caso, dizemos que o conjunto  $\{x_n\}_{n \in M}$  é um sistema de Riesz em  $\mathcal{H}$ , com constantes  $A$  e  $B$ . Se o espaço gerado por  $\{x_n\}_{n \in M}$  for denso em  $\mathcal{H}$ , dizemos que  $\{x_n\}_{n \in M}$  é uma base de Riesz para  $\mathcal{H}$ .

Antes de partirmos para os resultados, faremos algumas observações que decorrem dessa definição para entender melhor o que é uma sequência de Riesz.

Sejam  $x_1, x_2, \dots$  vetores linearmente dependentes. Então, podemos tomar índices  $i_1, i_2, \dots, i_k$  tais que, para algum conjunto de escalares não-nulos  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ , vale

$$\sum_{j=1}^k a_{i_j} x_{i_j} = 0.$$

Nesse caso, podemos tomar a sequência numérica

$$\alpha_n = \begin{cases} a_{i_j}, & \text{se } n = i_j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, para toda constante  $A > 0$ , temos que

$$A \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} > 0 = \left\| \sum_{j=1}^k a_{i_j} x_{i_j} \right\| = \left\| \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j x_j \right\|.$$

Portanto, uma sequência de vetores linearmente dependentes não pode ser uma sequência de Riesz.

Agora, considere a sequência de funções

$$x_n := f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$$

no espaço de Hilbert  $L^2([0, 1])$ . Note que  $x^n$  é uma sequência linearmente independente e que  $x_n \rightarrow 0$  em norma quando  $n \rightarrow \infty$ . Devido a isso,  $\forall A > 0, \exists n_0$  tal que  $\|x_{n_0}\| < A$ . Ao tomarmos a sequência

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = n_0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

encontraremos

$$A \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 \right)^{1/2} = A > \|x_{n_0}\| = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n \right\|,$$

o que implica que essa sequência não é uma sequência de Riesz.

Concluimos que uma sequência de Riesz deve ser linearmente independente, mas não necessariamente uma sequência linearmente independente é uma sequência de Riesz.

Podemos mostrar que uma sequência ortonormal é uma sequência de Riesz, com  $A = B = 1$ . Por outro lado, nem toda sequência de Riesz é uma sequência ortonormal; um exemplo simples pode ser construindo tomando  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ , e o conjunto  $\{(1, 1), (1, 0)\}$ . Nesse sentido, o conceito de sequências (ou bases) de Riesz é uma generalização do conceito de sequências (ou bases) ortonormais.

## 5.2 Relaxando as condições de uma ARM

Seja  $\phi$  uma função em  $L^2(\mathbb{R})$ , e uma sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ . Suponha que a função  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi(\cdot - n)$  esteja em  $L^2(\mathbb{R})$ . Nesse caso, sua transformada de Fourier é  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\omega} \hat{\phi}(\omega)$ . Como essa transformação preserva a norma, temos então que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi(\cdot - n) \right\| &= \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\omega} \hat{\phi} \right\| \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\omega} \right|^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\omega} \right|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 d\omega \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Uma vez que

$$\int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega = \|\phi\|^2 < \infty,$$



a série  $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2$  converge em quase todos os pontos.

Para futura referência, vamos enunciar um lema simples, mas que será usado como ferramenta para as demonstrações dessa seção.

**Lema 5.1.** *Seja  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  uma sequência em  $l^2(\mathbb{Z})$ . Então,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\omega} \right|^2 d\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

*Demonstração.* Como  $|\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\omega}|^2 = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} e^{-i(n-m)\omega}$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\omega} \right|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} e^{-i(n-m)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-m)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 2\pi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \end{aligned}$$

□

Enunciaremos, então, uma proposição que será fundamental para o trabalho com wavelets a partir de bases de Riesz. Esse resultado se assemelha muito a um resultado visto no capítulo sobre ARM.

**Proposição 5.1.** *Seja  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  e  $0 < A \leq B$  constantes. Então,  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forma uma sequência de Riesz com constantes  $A$  e  $B$  se e somente se*

$$\frac{A^2}{2\pi} \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \leq \frac{B^2}{2\pi}, \quad (5.2)$$

em quase todos os pontos.

*Demonstração.* Suponhamos inicialmente que, em quase todo  $\omega \in \mathbb{R}$ , valha

$$\frac{A^2}{2\pi} \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \leq \frac{B^2}{2\pi}.$$

Dado  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ , multiplicando a desigualdade por  $|\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\omega}|^2$  obtemos

$$\frac{A^2}{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\omega} \right|^2 \leq \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\omega} \right|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \leq \frac{B^2}{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\omega} \right|^2.$$

Integrado de 0 a  $2\pi$ , usando (5.1) e o Lema 5.1, obtemos

$$A^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi(\cdot - n) \right\|^2 \leq B^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

Tomando a raiz quadrada em todos os termos, obtemos as condições necessárias para que  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  constitua um sistema de Riesz, com constantes  $A$  e  $B$ , o que conclui essa parte da prova.

Agora, suponhamos que  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  constitua um sistema de Riesz, com constantes  $A$  e  $B$ . Vamos definir os conjuntos  $C$  e  $D$  como

$$C = \left\{ \omega \in [0, 2\pi] : \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 > \frac{B^2}{2\pi} \right\},$$

$$D = \left\{ \omega \in [0, 2\pi] : \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 < \frac{A^2}{2\pi} \right\}.$$

Mostraremos, por absurdo, que esses conjuntos possuem medida nula. Primeiramente, suponha  $|C| > 0$ . Podemos tomar  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$  tal que

$$\chi_C(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\omega},$$

com a convergência entendida em  $L^2([0, 2\pi])$ . Note que  $(c_n)$  é a sequência dos termos da série de Fourier de  $\chi_C$ . De (5.1), obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \phi(\cdot - n) \right\| &= \left( \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\omega} \right|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 d\omega \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_C \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 d\omega \right)^{1/2} > \frac{B}{\sqrt{2\pi}} |C|^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Por outro lado, pelo Lema 5.1,

$$|C| = \|\chi_C\|^2 = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2,$$

ou seja,

$$|C|^{1/2} = \sqrt{2\pi} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Aplicando (5.3), obtemos

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \phi(\cdot - n) \right\| > B \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \right)^{1/2},$$

o que contraria a hipótese de que  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é um sistema de Riesz. Com isso, chegamos em um absurdo, o que mostra que  $|C| = 0$ .

Analogamente, suponha  $|D| > 0$ . Podemos tomar  $(d_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$  tal que

$$\chi_D(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{-in\omega},$$

com a convergência entendida em  $L^2([0, 2\pi])$ . Então, de (5.1), segue que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \phi(\cdot - n) \right\| &= \left( \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{-in\omega} \right|^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 d\omega \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_D \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 d\omega \right) < \frac{A}{\sqrt{2\pi}} |D|^{1/2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 5.1, temos que

$$|D| = \|\chi_D\| = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{-in\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^2.$$

Logo,  $|D|^{1/2} = \sqrt{2\pi} (\sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|^2)^{1/2}$ , e

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \phi(\cdot - n) \right\| < A \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|^2 \right)^{1/2},$$

o que não satisfaz à definição de seqüências de Riesz. Logo, é necessário que  $|C| = |D| = 0$ . Isso significa que, em quase todos os pontos,

$$\frac{A^2}{2\pi} \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \leq \frac{B^2}{2\pi},$$

o que conclui prova a proposição.  $\square$

**Observação 5.1.** *O Lema 4.1 decorre imediatamente desta proposição. Isto se dá devido ao fato de que, se  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma base ortonormal para um espaço, então  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma base de Riesz para este espaço, com constantes  $A = B = 1$ .*

Agora, seja  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  e  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  uma base de Riesz para um espaço vetorial  $V$ , com constantes  $A$  e  $B$ . Vamos mostrar como encontrar uma base ortonormal para  $V$  a partir de  $\phi$ .

Pela Proposição 5.1, temos que

$$\frac{A}{\sqrt{2\pi}} \leq \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{B}{\sqrt{2\pi}}$$

em quase todos os pontos. Nesse caso, podemos concluir que

$$\theta_\phi(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \right)^{1/2}}$$

está definida em quase todos os pontos. Para evitar indeterminações, vamos definir  $\theta_\phi(\omega) = \frac{1}{A}$  nos pontos em que (5.2) não vale. Defina  $\gamma(\omega)$  a partir de  $\hat{\gamma} = \hat{\phi} \cdot \theta_\phi$ . Ainda pela Proposição 5.1, temos que  $\theta_\phi$  é limitada em módulo, e como  $\phi, \hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$  por hipótese, então  $\hat{\gamma} \in L^2(\mathbb{R})$ , e conseqüentemente  $\gamma \in L^2(\mathbb{R})$ . Além disso, como  $\theta_\phi$  é  $2\pi$ -periódica, podemos encontrar duas seqüências  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ , tais que

$$\theta_\phi(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\omega} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\theta_\phi(\omega)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e^{-in\omega}$$

em quase todos os pontos. Então, temos

$$\hat{\gamma}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\omega} \hat{\phi}(\omega) \quad \text{e} \quad \hat{\phi}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e^{-in\omega} \hat{\gamma}(\omega),$$

donde, a partir das propriedades da transformada de Fourier, segue que

$$\gamma(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi_{0,n}(x) \quad \text{e} \quad \phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \gamma_{0,n}(x).$$

Isso nos permite concluir que

$$\gamma \in \overline{\text{span}\{\phi_{0,n} : n \in \mathbb{Z}\}} \quad \text{e} \quad \phi \in \overline{\text{span}\{\gamma_{0,n} : n \in \mathbb{Z}\}}. \quad (5.4)$$

Além disso, podemos observar que, em quase todos os pontos,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\gamma}(\omega + 2\pi l)|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \frac{|\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2}{2\pi \sum_{l' \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l')|^2} \right) = \frac{1}{2\pi}, \quad (5.5)$$

o que, pelo Lema 4.1, implica que  $\{\gamma_{0,n} : n \in \mathbb{Z}\}$  é um sistema ortonormal.

Então, de (5.4) e (5.5), podemos concluir que  $\{\gamma_{0,n} : n \in \mathbb{Z}\}$  é uma base ortonormal para  $V$ .

Assim, podemos relaxar as condições de uma ARM para as seguintes condições:

**Definição 5.2.** Dizemos que uma seqüência  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de espaços fechados de  $L^2(\mathbb{R})$  formam uma análise de resolução em escalas múltiplas se essa seqüência satisfaz às seguintes condições:

- (i)  $V_{j+1} \subset V_j, \forall j \in \mathbb{Z}$ ;
- (ii)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ;
- (iii)  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ;
- (iv)  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_0$ ;
- (v)  $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x - k) \in V_0 \forall k \in \mathbb{Z}$ ;
- (vi) Existe  $\phi \in V_0$  tal que  $\{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é uma base de Riesz para  $V_0$ .

## 5.3 Construindo uma ARM a partir de uma base de Riesz

Como visto na seção anterior, podemos relaxar as condições para que uma sequência de subespaços  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in L^2(\mathbb{R})$  forme uma ARM; nesse caso, mostramos que podemos abandonar a condição

“*existe  $\phi \in V_0$  tal que  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  seja uma base ortonormal de  $V_0$ ”*,

e exigir somente que

“*existe  $\phi \in V_0$  tal que  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  seja uma base de Riesz para  $V_0$ ”*.

Entretanto, com algumas condições adicionais, é possível construir uma ARM a partir de uma sequência de Riesz em  $L^2(\mathbb{R})$ . O objetivo dessa seção é demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 5.1.** *Suponha que uma função  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  satisfaça às seguintes condições:*

- (i)  $\{\phi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$  seja uma sequência de Riesz em  $L^2(\mathbb{R})$ .
- (ii) Existe uma sequência  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$  tal que  $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k)$ , com a convergência da série entendida em  $L^2(\mathbb{R})$ .
- (iii)  $\hat{\phi}(\omega)$  é contínua em 0, e  $\hat{\phi}(0) \neq 0$ , isto é,  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \neq 0$ .

Então, os subespaços

$$V_j = \overline{\text{span}\{2^{-j/2}\phi(2^{-j} \cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}} \equiv \overline{\text{span}\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}}$$

formam uma ARM em  $L^2(\mathbb{R})$ .

Vamos então enunciar e demonstrar resultados que serão essenciais na demonstração desse teorema, a partir das hipóteses propostas em seu enunciado.

**Proposição 5.2.** *Seja  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  tal que a condição (i) do Teorema 5.1 seja válida, e considere  $V_j = \text{span}\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Existem constantes  $0 < A \leq B$  tais que  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma base de Riesz para  $V_0$ , com constantes  $A$  e  $B$ . Além disso, para qualquer  $j \in \mathbb{Z}$ , o conjunto  $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  é uma base de Riesz para  $V_j$  com as mesmas constantes  $A$  e  $B$ .*

*Demonstração.* Com efeito, existem constantes  $0 < A \leq B$  tais que  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  seja uma sequência de Riesz com constantes  $A$  e  $B$ . Pela definição de  $V_0$ , segue que  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma base de Riesz para  $V_0$ .

Observe agora que, para todo  $j \in \mathbb{Z}$ , temos que

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi_{j,n} \right\| = \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi(\cdot - n) \right\|,$$

uma vez que, fazendo a mudança de variáveis  $u = 2^{-j}x$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi_{j,n} \right\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - n) \right|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi(2^{-j}x - n) \right|^2 2^{-j} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi(u - n) \right|^2 du = \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi(\cdot - n) \right\|^2. \end{aligned}$$

Logo,  $\{\phi_{j,n} : n \in \mathbb{Z}\}$  também é uma sequência de Riesz com constantes  $A$  e  $B$ , e pela definição de  $V_j$ ,  $\{\phi_{j,n} : n \in \mathbb{Z}\}$  é uma base de Riesz para  $V_j$ .  $\square$

**Definição 5.3.** Dizemos que duas famílias indexadas de vetores  $E$  e  $F$  em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  formam um sistema biortonormal se

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j},$$

onde  $v_i \in E, v_j \in F$ .

**Teorema 5.2.** *Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert, e  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  uma base de Riesz em  $\mathcal{H}$ , com constantes  $A$  e  $B$ . Então, existe  $(x_n^*)_{n \in \mathbb{Z}}$  de forma que  $(x_n)$  e  $(x_n^*)$  formem um sistema biortonormal. Além disso,  $(x_n^*)$  pode ser escolhido de forma a ser uma base de Riesz para  $\mathcal{H}$ .*

*Demonstração.* Considere  $I : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{H}$  um operador linear tal que

$$I((a_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x_n.$$

Observe que, como  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma base de Riesz para  $\mathcal{H}$ , o operador está bem-definido (no sentido de que, quando aplicado em uma sequência de  $l^2(\mathbb{Z})$ , o operador de fato leva em um elemento de  $\text{span}\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \mathcal{H}$ , pois a série converge em  $L^2(\mathbb{R})$ ). Vamos agora fazer algumas afirmações sobre o operador  $I$ , provando-as usando o fato de que  $(x_n)$  é uma base de Riesz para  $\mathcal{H}$ :

- $I$  é injetivo. Com efeito, se  $x, y \in l^2(\mathbb{Z}), x \neq y$ , segue que

$$0 < A \|x - y\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \|I(x - y)\|_{\mathcal{H}} = \|I(x) - I(y)\|_{\mathcal{H}},$$

logo,  $I(x) \neq I(y)$ , e  $I$  é injetivo.

- $I$  é sobrejetivo. De fato, se  $v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n x_n \in \mathcal{H}$ , temos que

$$A \|(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}\|_{l^2(\mathbb{Z})} = A \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|^2 \right)^{1/2} \leq \|v\|_{\mathcal{H}},$$

logo,  $(v_n) \in l^2(\mathbb{Z})$  e  $I((v_n)) = v$ , logo,  $I$  é sobrejetivo.

- $I, I^{-1}$  são contínuos. Seja  $(x_n)$  uma sequência em  $l^2(\mathbb{Z})$ , tal que  $(x_n) \rightarrow x \in l^2(\mathbb{Z})$ . Temos então que

$$\|I(x_n) - I(x)\|_{\mathcal{H}} = \|I(x_n - x)\|_{\mathcal{H}} \leq B\|x_n - x\|_{l^2(\mathbb{Z})};$$

como  $\|x_n - x\|_{l^2(\mathbb{Z})} \rightarrow 0$ , segue que  $\|I(x_n) - I(x)\|_{\mathcal{H}}$  também converge para 0, e portanto  $I$  é contínuo. Construindo um raciocínio análogo para  $I^{-1}$ , e usando a outra desigualdade na definição de sequência de Riesz, concluímos então que  $I, I^{-1}$  são contínuos.

Isso tudo se resume em uma afirmação, a qual acabamos de provar:  $I$  é um isomorfismo. Segue que o adjunto de  $I^{-1}$ , isto é, o operador  $(I^{-1})^*$ , também é um isomorfismo de  $l^2(\mathbb{Z})$  sobre  $\mathcal{H}$ . Considere  $e_n \in l^2(\mathbb{Z})$ , com  $e_{nk} = \delta_{n,k}$ . Defina

$$x_n^* = (I^{-1})^*(e_n).$$

Observe que

$$\langle x_n^*, x_m \rangle_{\mathcal{H}} = \langle (I^{-1})^*(e_n), I(e_m) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle e_n, (I^{-1})(I(e_m)) \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} = \langle e_n, e_m \rangle_{l^2(\mathbb{Z})} = \delta_{n,m},$$

logo,  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  e  $(x_n^*)_{n \in \mathbb{Z}}$  formam um sistema biortogonal. Vamos agora mostrar que  $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma base de Riesz para  $\mathcal{H}$ . Com efeito, como  $(I^{-1})^*$  é um isomorfismo, temos que  $\mathcal{H} = \text{span}\{x_n^* : n \in \mathbb{Z}\}$ . Além disso, pela teoria de operadores lineares, as normas dos operadores  $I^*$  e  $(I^{-1})^*$  estão bem-definidas de acordo com a Definição 2.4. Vale também que, se  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ , então

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x_n^* \right\|_{\mathcal{H}} = \|(I^{-1})^*(a)\|_{\mathcal{H}} \leq \|(I^{-1})^*\| \cdot \|a\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \|(I^{-1})^*\| \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right)^{1/2},$$

e temos também que

$$\|a\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right)^{1/2} = \left\| I^* \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x_n^* \right) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \|I^*\| \cdot \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x_n^* \right\|_{\mathcal{H}}.$$

Concluímos então que

$$\frac{1}{\|I^*\|} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x_n^* \right\| \leq \|(I^{-1})^*\| \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right)^{1/2},$$

logo,  $(x_n^*)_{n \in \mathbb{Z}}$  é, de fato, uma base de Riesz para  $\mathcal{H}$ . □

**Corolário 5.1.** *Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  uma base de Riesz em  $\mathcal{H}$ . Então, existem constantes  $C$  e  $D$ , tais que*

$$C\|x\| \leq \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle x_n, x \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq D\|x\|,$$

qualquer que seja  $x \in \mathcal{H}$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathcal{H}$ , e  $(x_n^*)_{n \in \mathbb{Z}}$  uma base de Riesz para  $\mathcal{H}$ , conforme construída no Teorema 5.2. Então, podemos escrever

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x_n^*,$$

onde  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ , e obter

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle x, x_n \rangle|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m x_m^*, x_n \right\rangle \right|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \langle x_m^*, x_n \rangle \right|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Além disso, como  $(x_n^*)_{n \in \mathbb{Z}}$  também é uma base de Riesz para  $\mathcal{H}$ , existem constantes  $0 < A \leq B$ , tais que

$$A \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \|x\| = \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x_n^* \right\| \leq B \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right)^{1/2}. \quad (5.7)$$

De (5.6) e (5.7), segue que

$$B^{-1} \|x\| \leq \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle x_n, x \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq A^{-1} \|x\|.$$

Fazendo  $C = B^{-1}$ ,  $D = A^{-1}$ , concluímos a demonstração do corolário.  $\square$

**Observação 5.2.** Observe que, pela teoria dos operadores lineares, as constantes que tornam  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  uma base de Riesz para  $\mathcal{H}$  no Teorema 5.2 podem ser obtidas a partir das normas dos operadores  $I$  e  $I^{-1}$ . Assim, como  $\|I^*\| = \|I\|$  e  $\|(I^{-1})^*\| = \|I^{-1}\|$ , as constantes que tornam  $(x_n^*)_{n \in \mathbb{Z}}$  uma base de Riesz para  $\mathcal{H}$  também estão associadas às normas dos operadores  $I$  e  $I^{-1}$ . Ao considerarmos os espaços  $V_j$  definidos no Teorema 5.1, pela Proposição 5.2 obtemos enfim que, se  $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  é uma sequência de elementos em  $L^2(\mathbb{R})$ , tal que  $f_j \in V_j$ , então existem constantes  $C$  e  $D$  tais que

$$C \|f_j\| \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f_j, \phi_{j,k} \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq D \|f_j\|.$$

Em particular, se  $f$  é um elemento comum a todos os  $V_j$ , então existem constantes  $C$  e  $D$  tais que, para qualquer  $j \in \mathbb{Z}$ , temos as desigualdades

$$C \|f\| \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq D \|f\|.$$

Vamos agora enunciar duas proposições que garantem algumas condições necessárias para que a sequência de subespaços  $(V_j)$  definida no Teorema 5.1 seja ARM.



**Proposição 5.3.** *Seja  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  satisfazendo à condição (i) do Teorema 5.1 e os espaços  $V_j$  definidos também no Teorema 5.1. Então, para cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , vale*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = 0,$$

onde  $P_j f$  é a projeção de  $f$  no espaço  $V_j$ .

*Demonstração.* Note que somente precisamos mostrar que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j g\| = 0$  para as funções  $g$  de suporte compacto. Com efeito, seja  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , e  $\epsilon > 0$ . Então, existe  $g \in L^2(\mathbb{R})$  com suporte compacto tal que  $\|f - g\| < \epsilon$ , logo,

$$\|P_j f\| = \|P_j(f - g + g)\| \leq \|P_j g\| + \|P_j(f - g)\| \leq \|P_j g\| + \|f - g\| < \|P_j g\| + \epsilon,$$

e, ao tomarmos o limite, obtemos

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \|P_j f\| < \epsilon + \lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j g\| = \epsilon,$$

donde segue que  $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = 0$ .

Seja  $g$  uma função de suporte compacto, e  $R > 0$  tal que  $\text{supp } g \subset [-R, R]$ . Pela Observação 5.2, segue que existe uma constante  $C > 0$  tal que, para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$C^2 \|P_j g\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle P_j g, \phi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle g, P_j \phi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle g, \phi_{j,k} \rangle|^2,$$

uma vez que a projeção é um operador auto-adjunto, e que  $P_j \phi_{j,k} = \phi_{j,k}$ , para qualquer  $k \in \mathbb{Z}$ . Usando o fato de que  $\text{supp } g \subset [-R, R]$ , temos que

$$C^2 \|P_j g\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle g, \chi_{[-R,R]} \cdot \phi_{j,k} \rangle|^2.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, e fazendo a mudança de variáveis  $u = 2^{-j}t - k$ , obtemos enfim que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle g, \chi_{[-R,R]} \cdot \phi_{j,k} \rangle|^2 &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|g\|^2 \cdot \|\chi_{[-R,R]} \cdot \phi_{j,k}\|^2 \\ &= \|g\|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-R}^R |\phi(2^{-j}t - k)|^2 2^{-j} dt \\ &= \|g\|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-2^{-j}R - k}^{2^{-j}R - k} |\phi(u)|^2 du. \end{aligned}$$

Defina agora  $U_j := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-2^{-j}R - k, 2^{-j}R - k]$ . Observe que, como  $R$  é constante, podemos tomar  $j$  suficientemente grande para que essa união se torne disjunta; para esses valores, podemos então escrever

$$\|g\|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-2^{-j}R - k}^{2^{-j}R - k} |\phi(u)|^2 du = \|g\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{U_j}(u) |\phi(u)|^2 du.$$

Observe que, como  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ , então  $|\phi(u)|^2$  é integrável. Além disso,  $\chi_{U_j} \rightarrow 0$  em quase todos os pontos, quando  $j \rightarrow \infty$ . Aplicando então o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|g\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{U_j}(u) |\phi(u)|^2 du = 0.$$

É necessário, portanto, que  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j g\| = 0$ .  $\square$

**Corolário 5.2.** *Seja  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  satisfazendo à condição (i) do Teorema 5.1 e os espaços  $V_j$  definidos também no Teorema 5.1. Então,  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ .*

*Demonstração.* Seja  $f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ . Então,  $P_j f = f$  para qualquer  $j \in \mathbb{Z}$ , e  $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = \lim_{j \rightarrow \infty} f = f$ . Por outro lado, pela Proposição 5.3, temos que  $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = 0$ . Segue que  $f = 0$ .  $\square$

**Proposição 5.4.** *Seja  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  satisfazendo às condições (i) e (iii) do Teorema 5.1 e considere os subespaços  $V_j$  definidos também no Teorema 5.1. Então, se  $f \perp \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ , temos que  $f = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $f \perp \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  e  $\epsilon > 0$ . Seja  $g \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\hat{g} \equiv \hat{f} \cdot \chi_{[-R, R]}$  para algum  $R > 0$ , de forma que  $\|f - g\| < \epsilon$ . Então, se  $P_j$  é a projeção em  $V_j$ , temos que  $P_j f = 0 \forall j \in \mathbb{Z}$ , portanto,

$$\|P_j g\| = \|P_j(g - f + f)\| \leq \|P_j f\| + \|P_j(f - g)\| \leq \|f - g\| < \epsilon, \quad (5.8)$$

qualquer que seja  $j \in \mathbb{Z}$ . Ainda pela Observação 5.2, existem constantes  $0 < C \leq D$  tais que

$$C \|P_j g\| \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle P_j g, \phi_{j,k} \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq D \|P_j g\|.$$

Elevando essas desigualdades ao quadrado, e usando o fato de que a projeção é um operador auto-adjunto, segue que

$$\begin{aligned} \|P_j g\|^2 &\geq D^{-2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle P_j g, \phi_{j,k} \rangle|^2 = D^{-2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle g, P_j \phi_{j,k} \rangle|^2 \\ &= D^{-2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle g, \phi_{j,k} \rangle|^2 = D^{-2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \overline{\widehat{\phi_{j,k}}(\omega)} d\omega \right|^2 \\ &= D^{-2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \cdot 2^{j/2} e^{ik2^j \omega} \overline{\widehat{\phi}(2^j \omega)} d\omega \right|^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Considere  $j$  suficientemente negativo, de forma que

$$\text{supp } \hat{g} \subset [-R, R] \subset [-2^{-j} \pi, 2^{-j} \pi].$$

Então, o sistema

$$\left\{ \frac{2^{j/2} e^{-ik2^j\omega}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (5.10)$$

é uma base ortonormal para  $L^2([-2^{-j}\pi, 2^{-j}\pi])$ , e segue que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \overline{\hat{\phi}(2^j\omega)} 2^{j/2} e^{ik2^j\omega} d\omega &= \int_{-2^{-j}\pi}^{2^{-j}\pi} \hat{g}(\omega) \overline{\hat{\phi}(2^j\omega)} 2^{j/2} e^{ik2^j\omega} d\omega \\ &= \int_{-2^{-j}\pi}^{2^{-j}\pi} \frac{2^{j/2} e^{-i(-k)2^j\omega}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} \hat{g}(\omega) \overline{\hat{\phi}(2^j\omega)} d\omega \equiv c_{-k}, \end{aligned}$$

de forma que  $c_k$  é o  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier da função  $\sqrt{2\pi} \hat{g}(\omega) \overline{\hat{\phi}(2^j\omega)}$ , no intervalo  $[-2^{-j}\pi, 2^{-j}\pi]$ , com relação ao sistema em (5.10). Continuando então o raciocínio em (5.9), obtemos enfim que

$$\begin{aligned} \|P_j g\|^2 &\geq D^{-2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = D^{-2} \int_{-2^{-j}\pi}^{2^{-j}\pi} \left| \sqrt{2\pi} \hat{g}(\omega) \overline{\hat{\phi}(2^j\omega)} \right|^2 d\omega \\ &= \frac{2\pi}{D^2} \int_{-R}^R |\hat{g}(\omega)|^2 \cdot |\hat{\phi}(2^j\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Por hipótese,  $\hat{\phi}$  é contínua em 0, então  $\hat{\phi}(2^j\omega)$  converge uniformemente para  $\hat{\phi}(0)$  em  $[-R, R]$  quando  $j \rightarrow -\infty$ , isto é,

$$\forall \epsilon' > 0, \exists j_0 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } j \leq j_0 \Rightarrow |\hat{\phi}(2^j x) - \hat{\phi}(0)| < \epsilon', \forall x \in [-R, R].$$

Assim, como  $|\hat{g}(\omega)|^2$  é integrável, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, e combinando, enfim, as desigualdades em (5.8) e em (5.11), obtemos que

$$\epsilon^2 \geq \limsup_{j \rightarrow -\infty} \|P_j g\|^2 \geq \frac{2\pi}{D^2} |\hat{\phi}(0)|^2 \|g\|^2.$$

Como, por hipótese,  $\hat{\phi}(0) \neq 0$ , segue que

$$\|g\| \leq \frac{D\epsilon}{\sqrt{2\pi} |\hat{\phi}(0)|}.$$

Por outro lado, como  $\|f - g\| < \epsilon$ , pela desigualdade triangular temos que

$$\|f\| < \epsilon + \|g\| \leq \epsilon + \frac{D\epsilon}{\sqrt{2\pi} |\hat{\phi}(0)|}, \forall \epsilon > 0,$$

ou seja,  $\|f\| = 0$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

**Corolário 5.3.** *Seja  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  satisfazendo às condições (i) e (iii) do Teorema 5.1 e considere os subespaços  $V_j$  definidos também no Teorema 5.1. Então  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  é denso em  $L^2(\mathbb{R})$ .*

*Demonstração.* Pelas propriedades dos espaços de Hilbert, segue que, se  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert e  $A$  é um subespaço qualquer de  $\mathcal{H}$ , então  $\overline{A}^\perp = A^\perp$ , e se  $A$  for fechado,  $\mathcal{H} = A \oplus A^\perp$ . Segue então, pela Proposição 5.4 que

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} \oplus \left( \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \right)^\perp = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j},$$

portanto,  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  é denso em  $L^2(\mathbb{R})$ . □

Vamos, enfim, demonstrar o Teorema 5.1. Com efeito, seja  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  uma função satisfazendo às condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 5.1. Vamos mostrar que valem cada uma das propriedades necessárias para que a sequência de subespaços  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , definida no Teorema 5.1, seja, de fato, uma ARM.

Observe que, pela condição (ii), temos que  $V_{j+1} \subset V_j, \forall j \in \mathbb{Z}$ . Além disso, pelos Corolários 5.2 e 5.3, segue que

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \text{ e } \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}).$$

As definições de  $V_0$  e  $V_j$  asseguram que

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_0$$

e também que

$$f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x - k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

A condição (i) assegura, junto à definição de  $V_0$ , que  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma base de Riesz para  $V_0$ . Isso conclui que a sequência de subespaços  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  forma, de fato, uma ARM para  $L^2(\mathbb{R})$ .

# Capítulo 6

## Wavelets de suporte compacto: as wavelets de Daubechies

Neste capítulo, exporemos todas as ferramentas necessárias para demonstrar que é possível construir wavelets com suportes compactos a partir de um filtro  $m_0$ . Como objetivo, construiremos as wavelets de Daubechies. Dado um  $N \in \mathbb{Z}$  positivo, a wavelet de Daubechies de ordem  $N$  possui suporte compacto e todos os seus momentos até a ordem  $N - 1$  são nulos. Um exemplo inicial com  $N = 1$  é a já conhecida wavelet de Haar. A existência destas wavelets será demonstrada usando o conceito de ARM, e tendo em vista a equação (4.12), um método para obter uma wavelet  $\psi$  com suporte compacto é encontrar uma função escala  $\phi$  que possua suporte compacto.

### 6.1 Introdução

Vamos tentar construir uma função escala  $\phi$  a partir do filtro  $m_0$ . Queremos, nesse caso, que  $m_0$  satisfaça às seguintes condições:

$$m_0 \in C^1 \text{ e é } 2\pi\text{-periódica.} \quad (6.1)$$

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1. \quad (6.2)$$

$$m_0(0) = 1. \quad (6.3)$$

A necessidade das condições (6.2) e (6.3) vem do Lema 4.2 e da equação

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2),$$

dada em (4.3). Vimos, no Lema 4.2, que a condição (6.2) deve ocorrer em quase todos os pontos, entretanto, supondo  $m_0 \in C^1$ , é necessário que (6.2) ocorra, de fato, em todos os pontos. Observe que

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(\omega) &= m_0(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2) = m_0(\omega/2)m_0(\omega/4)\hat{\phi}(\omega/4) \\
&= \cdots = \prod_{j=1}^n m_0(\omega/2^j)\hat{\phi}(\omega/2^n) \\
&\equiv \Pi_n(\omega) \cdot \hat{\phi}(\omega/2^n).
\end{aligned}$$

A partir da condição (6.1), podemos concluir que  $m_0$  possui derivada contínua e periódica, portanto, limitada. Por outro lado, a condição (6.2) implica imediatamente que  $|m_0(\omega)| \leq 1$ . Podemos escrever então

$$\begin{aligned}
|\Pi_{n+1}(\omega) - \Pi_n(\omega)| &= |\Pi_n(\omega) \cdot (m_0(\omega/2^{n+1}) - 1)| \\
&\leq |m_0(\omega/2^{n+1}) - m_0(0)| \\
&\leq \|m'_0\|_\infty(\omega/2^{n+1}),
\end{aligned}$$

onde usamos Desigualdade do valor médio. Procedendo (por indução), temos que

$$\begin{aligned}
|\Pi_{n+m}(\omega) - \Pi_n(\omega)| &= \left| \Pi_n(\omega) \cdot \left( \prod_{j=n+1}^{n+m} m_0(\omega/2^j) - 1 \right) \right| \\
&= \left| \Pi_n(\omega) \cdot \left( \prod_{j=n+1}^{n+m} m_0(\omega/2^j) - \prod_{j=n+2}^{n+m} m_0(\omega/2^j) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \prod_{j=n+2}^{n+m} m_0(\omega/2^j) - \cdots + m_0(\omega/2^{n+m}) - m_0(0) \right) \right| \\
&\leq \|m_0\|_\infty \cdot \left( \sum_{j=n+1}^{n+m} |2^{-j}\omega| \right) \\
&= \|m'_0\|_\infty |\omega| \left( \sum_{j=n+1}^{n+m} 2^{-j} \right) \leq \|m'_0\|_\infty |\omega/2^n|.
\end{aligned}$$

Isso significa que a sequência  $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy, e converge uniformemente em conjuntos compactos. Assim, podemos escrever

$$\hat{\phi}(\omega) = \left( \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega) \right) \cdot \hat{\phi}(0). \tag{6.4}$$

Conforme visto na equação (4.2), podemos escrever

$$m_0(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega},$$

com

$$h_k = \sqrt{2}^{-1} \langle \phi, \phi_{-1,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x - k)} dx.$$

Entretanto, se  $\phi$  possuir suporte compacto, então somente um número finito de  $h_k$  serão não-nulos. Logo,  $m_0(\omega)$  deve ser um polinômio trigonométrico.

Queremos ainda que  $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  seja um sistema ortonormal; conforme visto no Lema 4.1, uma condição suficiente para isso é que

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}, \quad (6.5)$$

em todos os pontos. Tendo isso objetivo, usaremos a seguinte proposição.

**Proposição 6.1.** *Seja  $m_0$  é uma função satisfazendo às condições (6.1) - (6.3), e  $\phi$  uma função dada pela regra em (6.4). Se (6.5) acontece em todos os pontos, então para  $k \in \mathbb{Z}$  vale*

$$|\hat{\phi}(2k\pi)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

*Demonstração.* Pelas condições (6.2) e (6.3), segue que  $m_0(\pi) = 0$ . Como  $m_0$  é  $2\pi$ -periódica, segue que  $m_0(k\pi) = 0$  se  $k$  é ímpar.

Seja  $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ . Então  $k$  pode ser escrito da forma  $2^p q$ , com  $q$  ímpar. Logo, o produtório

$$\prod_{j=1}^{\infty} m_0(2k\pi 2^{-j})$$

contém a parcela  $m_0(p\pi)$ , que é 0, uma vez que  $p$  é ímpar. Isso significa que  $\hat{\phi}(2k\pi) = 0$  se  $k \neq 0$ . Vamos agora provar que a proposição é válida quando  $k = 0$ . Uma vez que (6.5) acontece em todos os pontos, podemos concluir que, quando  $\omega = 0$ , vale

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(2\pi l)|^2 = |\hat{\phi}(0)|^2 = \frac{1}{2\pi},$$

o que conclui a demonstração. □

**Observação 6.1.** *Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ . Logo, a construção em (6.4) se torna*

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\omega 2^{-j}). \quad (6.6)$$

*Usaremos essa fórmula a partir da próxima seção.*

## 6.2 Construindo uma ARM a partir de $m_0$

Provemos, inicialmente, que  $\phi$  definida por (6.6) está em  $L^2(\mathbb{R})$  a partir do seguinte resultado.

**Proposição 6.2.** *Seja  $m_0$  uma função satisfazendo às condições (6.1) - (6.3). Então, a função  $\phi$  definida por (6.6) está em  $L^2(\mathbb{R})$  e  $\|\phi\|_2 \leq 1$ .*

*Demonstração.* Sejam  $n \geq 1$  e  $\Pi_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^n m_0(2^{-j}\omega)$ . Note que  $\Pi_n$  é uma função  $2^{n+1}\pi$ -periódica. Então, quando  $n > 1$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
I_n &\equiv \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} |\Pi_n(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{2^{n+1}\pi} |\Pi_n(\omega)|^2 d\omega \\
&= \int_0^{2^n\pi} |\Pi_n(\omega)|^2 d\omega + \int_{2^n\pi}^{2^{n+1}\pi} |\Pi_n(\omega)|^2 d\omega \\
&= \int_0^{2^n\pi} (|\Pi_n(\omega)|^2 + |\Pi_n(\omega + 2^n\pi)|^2) d\omega \\
&= \int_0^{2^n\pi} |\Pi_{n-1}(\omega)|^2 (|m_0(2^{-n}\omega)|^2 + |m_0(2^{-n}\omega + \pi)|^2) d\omega \\
&= \int_0^{2^n\pi} |\Pi_{n-1}(\omega)|^2 d\omega = I_{n-1}.
\end{aligned}$$

Repetindo esse argumento, obtemos

$$\begin{aligned}
I_n = I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |m_0(\omega/2)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |m_0(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\omega = 1.
\end{aligned}$$

Uma vez que  $|\Pi_n(\omega)|^2 \rightarrow |\hat{\phi}(\omega)|^2$ , podemos aplicar o Lema de Fatou à sequência  $(\Pi_n \cdot \chi_{[-2^n\pi, 2^n\pi]})$  e obter então

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} |\Pi_n(\omega)|^2 d\omega = \liminf_{n \rightarrow \infty} I_n = 1.$$

Logo,  $\|\phi\|_2^2 = \|\hat{\phi}\|_2^2 \leq 1$  e  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ . □

Lembremos que, para construir uma ARM a partir de  $\phi$ , é necessário que o conjunto  $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  seja um sistema ortonormal; entretanto, somente as condições (6.1) - (6.3) não são suficientes para que isso aconteça para  $\phi$  definida a partir de (6.6). Podemos ver isso a partir do exemplo a seguir.

**Exemplo 6.1.** Seja  $m_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $m_0(\omega) = (1 + e^{i3\omega})/2$ . É fácil ver que  $m_0$  é  $2\pi$ -periódica e de classe  $C^1$ . Além disso,  $m_0(0) = (1 + e^0)/2 = 1$ . Nos resta mostrar que  $m_0$  satisfaz à condição (6.2). Para isso, vamos usar as propriedades dos números complexos a seguir:

- $|z|^2 = z\bar{z}$ ;
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ .



Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} |m_0(\omega)|^2 &= \frac{(1 + e^{i3\omega})(1 + e^{-i3\omega})}{4} = \frac{(1 + e^{i3\omega} + e^{-i3\omega} + 1)}{4} \\ &= \frac{(2 + \cos 3\omega + i \operatorname{sen} 3\omega + \cos 3\omega - i \operatorname{sen} 3\omega)}{4} = \frac{1 + \cos 3\omega}{2}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos então que

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = \frac{1 + \cos 3\omega}{2} + \frac{1 + \cos(3\omega + 3\pi)}{2} = 1,$$

uma vez que  $\cos(3\omega + 3\pi) = \cos(3\omega + \pi) = -\cos(3\omega)$ . Vamos agora obter  $\phi$  a partir da fórmula (6.6). Primeiramente, observe que

$$\frac{1 + e^{i\theta}}{2} = e^{i\theta/2} \frac{e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}}{2} = e^{i\theta/2} \cos \theta/2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \Pi_n(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^n e^{i2^{-j} \cdot 3\omega/2} \cos(2^{-j} \cdot 3\omega/2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^n e^{i2^{-j} \cdot 3\omega/2} \prod_{j=1}^n \cos(2^{-j} \cdot 3\omega/2) \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Pi_{n,1}(\omega) \cdot \Pi_{n,2}(\omega). \end{aligned}$$

Note que, uma vez que  $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta$ , podemos escrever  $\cos \theta = \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2 \operatorname{sen} \theta}$ , obtendo, por fim,

$$\Pi_{n,2}(\omega) = \prod_{j=1}^n \frac{\operatorname{sen}(2^{-j} \cdot 3\omega/2)}{2 \operatorname{sen}(2^{-j} \cdot 3\omega/2)} = \frac{\operatorname{sen} 3\omega/2}{2^n \operatorname{sen}(2^{-n} \cdot 3\omega/2)} = \frac{\operatorname{sen} 3\omega/2}{3\omega/2} \cdot \frac{2^{-n} \cdot 3\omega/2}{\operatorname{sen}(2^{-n} \cdot 3\omega/2)},$$

que, quando  $n \rightarrow \infty$ , converge para  $\operatorname{sen}(3\omega/2)/(3\omega/2)$ . Por outro lado,

$$\Pi_{n,1}(\omega) = e^{i \sum_{j=1}^n 2^{-j} \cdot 3\omega/2},$$

que, quando  $n \rightarrow \infty$ , converge para  $e^{i3\omega/2}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i3\omega/2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 3\omega/2}{3\omega/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i3\omega/2} \cdot \frac{e^{i3\omega/2} - e^{-i3\omega/2}}{2i \cdot 3\omega/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i3\omega} - 1}{i3\omega}. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos que  $\phi(x) = \frac{1}{3} \chi_{[-3,0)}(x)$ . É fácil ver que translações por inteiros de  $\phi$  não são sempre ortogonais entre si. Logo, apenas as condições (6.1) - (6.3) não são suficientes para que  $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  seja um sistema ortonormal em  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Observação 6.2.** Observe que esses cálculos não valem para o conjunto

$$\{\omega \in \mathbb{R} : \sin(2^{-n} \cdot 3\omega/2) = 0, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

Entretanto, como esse conjunto possui medida nula, podemos concluir

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{e^{i3\omega} - 1}{\sqrt{2\pi}i3\omega}$$

em quase todos os pontos. Podemos estender essa definição para para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ , definindo, em particular,  $\hat{\phi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ .

Vamos mostrar que uma condição suficiente para que  $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  seja um sistema ortonormal, com  $\phi$  construída a partir de (6.6), é que

$$m_0(\omega) \neq 0, \forall \omega \in [-\pi/2, \pi/2]. \quad (6.7)$$

**Lema 6.1.** Se  $m_0$  é um polinômio trigonométrico satisfazendo às condições (6.1) - (6.3) e  $\phi$  é definida por (6.6), então  $\phi$  é uma função de suporte compacto em  $L^2(\mathbb{R})$  e

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \equiv G(\omega) \quad (6.8)$$

é um polinômio trigonométrico.

*Demonstração.* Seja  $m_0$  um polinômio trigonométrico da forma

$$m_0(\omega) = \sum_{k=-M}^M h_k e^{-ik\omega},$$

satisfazendo às condições (6.1) - (6.3). Observe que

$$\sum_{k=-M}^M h_k = m_0(0) = 1.$$

Assim, podemos aplicar o Teorema 2.15 para concluir que  $\phi$  é uma função de suporte compacto em  $L^2(\mathbb{R})$ .

Como  $\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ , temos que

$$G(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2$$

é  $2\pi$ -periódica e está em  $L^1([0, 2\pi))$ . Podemos tomar a série de Fourier de  $G(\omega)$ , e escrever  $G(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\omega}$ . Pela definição dos  $c_k$ , obtemos

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\omega) e^{-ik\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{-ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-ik\omega} \hat{\phi}(\omega)] \overline{\hat{\phi}(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - k) \overline{\phi(x)} dx, \end{aligned}$$

visto que a transformada de Fourier preserva produto interno. Entretanto,  $\phi$  possui suporte compacto. Isso significa que apenas um número finito dos coeficientes  $c_k$  são não-nulos. Logo,  $G(\omega)$  é um polinômio trigonométrico, o que conclui a demonstração.  $\square$

**Teorema 6.1.** *Seja  $m_0$  um polinômio trigonométrico satisfazendo às condições (6.1) - (6.3). Suponha que  $m_0(\omega) \neq 0, \forall \omega \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Se  $\phi$  é definido por (6.6), então  $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é um sistema ortonormal.*

*Demonstração.* Só precisamos mostrar que  $G(\omega) = \frac{1}{2\pi}$  em  $[-\pi, \pi]$ , onde  $G(\omega)$  é definida em (6.8). Vamos mostrar inicialmente que

$$G(2\omega) = |m_0(\omega)|^2 G(\omega) + |m_0(\omega + \pi)|^2 G(\omega + \pi). \quad (6.9)$$

Separando o somatório de define  $G(\omega)$  em termos pares e ímpares, obtemos

$$\begin{aligned} G(2\omega) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(2(\omega + \pi l))|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega + \pi l)|^2 |\hat{\phi}(\omega + \pi l)|^2 \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega + 2\pi l)|^2 |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \\ &\quad + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega + (2l + 1)\pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega + (2l + 1)\pi)|^2 \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega)|^2 |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 + \sum_{l \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega + \pi)|^2 |\hat{\phi}(\omega + (2l + 1)\pi)|^2 \\ &= |m_0(\omega)|^2 G(\omega) + |m_0(\omega + \pi)|^2 G(\omega + \pi). \end{aligned}$$

O Lema 6.1 garante que  $G$  é um polinômio trigonométrico, em particular,  $G$  é contínua. Por outro lado, pela sua definição, fica claro que  $G$  assume somente valores reais. Assim, podemos tomar  $m = \min_{\omega \in [-\pi, \pi]} G(\omega)$  e  $\omega_0 \in [-\pi, \pi]$ , tal que  $G(\omega_0) = m$ . Vamos mostrar que, nesse caso,  $G(\omega_0/2) = m$ . Com efeito, pela definição de  $\omega_0$ , podemos afirmar que  $\omega_0/2 \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Logo, pela hipótese,  $m_0(\omega_0/2) \neq 0$ . Pela igualdade em (6.9), segue que

$$m = G(\omega_0) = |m_0(\omega_0/2)|^2 G(\omega_0/2) + |m_0(\omega_0/2 + \pi)|^2 G(\omega_0/2 + \pi).$$

Observe que, como  $G$  é  $2\pi$ -periódica, então  $G(\omega_0/2 + \pi) = G(\omega_0/2 - \pi)$ . Sob a hipótese de  $\omega_0 \geq 0$ , temos que  $\omega_0/2 - \pi \in [-\pi, \pi]$ . Caso ocorra que  $\omega_0 < 0$ , temos que  $\omega_0/2 + \pi \in [-\pi, \pi]$ . Portanto, em ambos os casos, temos que  $G(\omega_0/2 + \pi) \geq m$ . Assim, chegamos em

$$m = G(\omega_0) \geq |m_0(\omega_0/2)|^2 G(\omega_0/2) + |m_0(\omega_0/2 + \pi)|^2 m.$$

Suponha que  $G(\omega_0/2) > m$ . Como  $m_0(\omega_0/2) \neq 0$ , temos que

$$m = G(\omega_0) > |m_0(\omega_0/2)|^2 m + |m_0(\omega_0/2 + \pi)|^2 m = m,$$

pela condição (6.2). Assim, chegamos em um absurdo e segue que  $G(\omega_0/2) = m$ . Repetindo esse processo, obtemos então

$$G(2^{-j}\omega_0) = m, \text{ para } j = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

o que, pela continuidade de  $G$ , implica que  $m = G(0) = 1/2\pi$ .

Observe que, pela Proposição (6.2) e pela definição de  $G$ , segue que

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(\omega) d\omega = \|\hat{\phi}\|_2^2 \leq 1.$$

Entretanto, como  $G(\omega) \geq 1/2\pi$  e  $G$  é contínua, é necessário que  $G(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi}$  em  $[-\pi, \pi]$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

Agora vamos construir a ARM associado ao polinômio trigonométrico  $m_0$ , sob as condições (6.1) - (6.3) e (6.7). Seja

$$V_j = \overline{\text{span}\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}},$$

com  $\phi$  dada por (6.6). Então, pelo Teorema 6.1, temos que  $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  é um sistema ortonormal em  $L^2(\mathbb{R})$ , em particular, é um sistema de Riesz com constantes  $A = B = 1$ . A construção de  $\phi$  garante que  $\hat{\phi}(\omega) = m_0(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$  e, como  $m_0$  é um polinômio trigonométrico, a inversa da transformada de Fourier de  $\hat{\phi}$  é

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k).$$

Note que, na soma acima, existe apenas um número finito de parcelas. Ainda pela definição de  $\phi$ , segue que  $\hat{\phi}(0) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \neq 0$ . Além disso, como  $\phi$  é uma função em  $L^2(\mathbb{R})$  com suporte compacto,  $\phi$  está em  $L^1(\mathbb{R})$ . Segue então que  $\hat{\phi}$  é contínua em todos os pontos, em particular, é contínua em 0. Com isso, temos que todas as hipóteses do Teorema 5.1 são cumpridas, e conseqüentemente, a seqüência de subespaços  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  forma uma ARM. Com isso, concluímos essa seção.

**Observação 6.3.** *Conforme visto na Seção 4.3, podemos tomar a wavelet  $\psi$  satisfazendo a*

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \hat{\phi}(\omega/2).$$

Como  $m_0(0) = 1$ , pela condição (6.2) segue que  $m_0(\pi) = 0$ , logo,  $\hat{\psi}(0) = 0$ . Mas

$$\hat{\psi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \hat{\phi}(0),$$

onde os coeficientes  $g_k$  estão definidos em (4.12). Logo, como  $\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , segue que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k = 0.$$

Este fato será importante no Capítulo 8.

### 6.3 Encontrando candidatos a $m_0$

Ainda temos que construir o filtro  $m_0$  satisfazendo às propriedades usadas anteriormente. O caminho que seguiremos nessa seção será construir  $g(\omega) = |m_0(\omega)|^2$  e a partir de  $g$  obter  $m_0$ . Para isso, queremos encontrar uma função  $g$  tal que

$$g(\omega) + g(\omega + \pi) = 1, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (6.10)$$

$$g(0) = 1, \quad (6.11)$$

$$g(\omega) \geq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}, \text{ e } g(\omega) > 0 \forall \omega \in [-\pi/2, \pi/2]. \quad (6.12)$$

Observe que, pela condição (6.10), obtemos que  $g$  é  $2\pi$ -periódica. Uma função satisfazendo a essas condições é

$$g(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{\chi_{\{-\pi/2\}}}{2} + \chi_{(-\pi/2, \pi/2)} + \frac{\chi_{\{\pi/2\}}}{2} \right] (\omega + 2k\pi).$$

O objetivo, como exemplo inicial, será construir uma versão mais suave dessa função, a partir de um polinômio trigonométrico. Para  $k = 0, 1, 2, \dots$  defina  $c_k$  por

$$c_k^{-1} := \int_0^\pi (\sen t)^{2k+1} dt.$$

Notemos que  $c_k$  é positivo, para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ . Seja

$$g_k(\omega) = 1 - c_k \int_0^\omega (\sen t)^{2k+1} dt.$$

Observe que

$$\begin{aligned} & g_k(\omega) + g_k(\omega + \pi) \\ &= 2 - c_k \int_0^\omega (\sen t)^{2k+1} dt - c_k \int_0^{\omega+\pi} (\sen t)^{2k+1} dt \\ &= 2 - c_k \int_0^\omega (\sen t)^{2k+1} dt - c_k \int_0^\pi (\sen t)^{2k+1} dt - c_k \int_\pi^{\omega+\pi} (\sen t)^{2k+1} dt \\ &= 1 - c_k \int_0^\omega (\sen t)^{2k+1} dt - c_k \int_\pi^{\omega+\pi} (\sen t)^{2k+1} dt = 1, \end{aligned}$$

pois  $\sen(t + \pi) = -\sen t$ , logo

$$c_k \int_0^\omega (\sen t)^{2k+1} dt = -c_k \int_\pi^{\omega+\pi} (\sen t)^{2k+1} dt.$$

Temos também que  $g(0) = 1$ . Além disso, notemos que, se  $\omega \in [-\pi/2, \pi/2]$ , vale

$$\left| \int_0^\omega (\sen t)^{2k+1} dt \right| < c_k^{-1} \Rightarrow g(\omega) > 0.$$

Pela definição dos  $c_k$ , claramente  $g \geq 0$  em  $[-\pi, \pi]$ . Como  $g$  é  $2\pi$ -periódica, segue que  $g \geq 0$ . Logo,  $g$  satisfaz às condições (6.10) - (6.12).

**Exemplo 6.2.** (Caso  $k = 0$ ) Como  $\int_0^\omega \sin t \, dt = -\cos \omega + 1$ , segue que  $c_0^{-1} = 2$  e

$$g_0(\omega) = 1 - \frac{1 - \cos \omega}{2} = \frac{1 + \cos \omega}{2} = \frac{e^{i\omega}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{-i\omega}}{4}.$$

Sabendo que  $(1 + e^{i\omega})(1 + e^{-i\omega}) = 2 + 2 \cos \omega$ , concluímos então que

$$m_0(\omega) = \frac{1 + e^{i\omega}}{2}$$

satisfaz a  $|m_0(\omega)|^2 = g(\omega)$ .

Escrevendo  $\sin \omega = \frac{1}{2i}(e^{i\omega} - e^{-i\omega})$ , podemos ver que  $g_k(\omega)$  é um polinômio trigonométrico de grau  $2k + 1$ . No caso  $k = 0$ , encontramos com facilidade um filtro  $m_0$  tal que  $|m_0(\omega)|^2 = g(\omega)$ . Entretanto, no caso geral, a existência de  $m_0$  é garantida pelo resultado a seguir.

**Lema 6.2.** (*Lema de Fejér-Riesz*) *Seja*

$$g(\omega) = \sum_{k=-M}^M a_k e^{ik\omega}$$

*um polinômio trigonométrico de grau  $M$ , tal que  $g(\omega) \geq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$ . Então, existe um polinômio trigonométrico*

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k e^{ik\omega},$$

*tal que  $|m_0(\omega)|^2 = g(\omega)$ .*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos assumir  $g(\omega) > 0$ . O caso geral reduz-se a esse ao considerarmos  $g(\omega) + \epsilon$  e tomarmos o limite quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

Como  $g(\omega) > 0$ , é necessário que

$$g(\omega) \equiv \overline{g(\omega)},$$

ou seja,  $a_k = \overline{a_{-k}}$ . Considere o polinômio  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , dado por

$$P(z) = \sum_{k=-M}^M a_k z^{k+M} = a_M z^{2M} + a_{M-1} z^{2M-1} + \cdots + a_{-M+1} z + a_{-M}.$$

Note que

$$P(z) = z^{2M} \overline{P(1/\bar{z})}. \quad (6.13)$$

Isso se deve ao fato de que

$$z^{2M} \cdot \overline{\left( a_k \frac{1}{\bar{z}^{k+M}} \right)} = z^{2M} \overline{a_k} \frac{1}{z^{k+M}} = z^{M-k} a_{-k},$$

pois  $\overline{a_k} = a_{-k}$ . Observe que, como assumimos  $g > 0$ , os pontos sob o círculo unitário não podem ser raízes de  $P$ , pois

$$P(e^{i\omega}) = e^{iM\omega}g(\omega) > 0.$$

Além disso, 0 também não pode ser uma raiz de  $P$ , uma vez que  $P(0) = a_{-M} \neq 0$  (pois  $g$  tem grau  $M$ ). Isso mostra que, pela relação (6.13), se os pontos  $z_1, \dots, z_n$  são as raízes de  $P$  dentro do círculo unitário, os pontos  $1/\overline{z_1}, \dots, 1/\overline{z_n}$  são as raízes de  $P$  fora do círculo unitário, respeitando as respectivas multiplicidades. Segue então que

$$P(z) = a_M \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{r_k} (z - 1/\overline{z_k})^{r_k},$$

de forma que a multiplicidade de  $z_k$  em relação a  $P$  é  $r_k$  e  $\sum_{k=1}^n 2r_k = 2M$ . Escrevendo

$$z - \frac{1}{\overline{w}} = z \left(1 - \frac{1}{z\overline{w}}\right) = \frac{z}{\overline{w}} \left(\overline{w} - \frac{1}{z}\right),$$

chegamos em

$$\begin{aligned} P(z) &= a_M \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{r_k} \left(\overline{z_k} - \frac{1}{z}\right)^{r_k} \left(\frac{z}{\overline{z_k}}\right)^{r_k} \\ &= a_M \left(\prod_{k=1}^n (z - z_k)^{r_k} \left(\overline{z_k} - \frac{1}{z}\right)^{r_k}\right) \left(\prod_{k=1}^n \frac{z^{r_k}}{\overline{z_k}^{r_k}}\right) \\ &= \frac{a_M z^M}{\prod_{k=1}^n \overline{z_k}^{r_k}} \left(\prod_{k=1}^n (z - z_k)^{r_k} \left(\frac{1}{z} - \overline{z_k}\right)^{r_k} (-1)^{r_k}\right) \\ &\equiv C z^M \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{r_k} \left(\frac{1}{z} - \overline{z_k}\right)^{r_k}. \end{aligned}$$

Fazendo  $z = e^{i\omega}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , na expressão acima, temos

$$g(\omega) = e^{-iM\omega} P(e^{i\omega}) = C \prod_{k=1}^n (e^{i\omega} - z_k)^{r_k} (e^{-i\omega} - \overline{z_k})^{r_k} = C \left[ \prod_{k=1}^n |(e^{i\omega} - z_k)|^{r_k} \right]^2.$$

Como  $g(\omega) > 0$ , segue que  $C > 0$ . Consequentemente, se escrevermos

$$m_0(\omega) = \sqrt{C} \prod_{k=1}^n (e^{i\omega} - z_k)^{r_k},$$

obtemos que  $|m_0|^2 = g$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

**Observação 6.4.** No caso em que as raízes  $z_k$  são todas reais, podemos usar também  $m_0(\omega) = \sqrt{C} \prod_{k=1}^n (e^{-i\omega} - z_k)^{r_k}$ .

## 6.4 Wavelets de Daubechies

A construção das wavelets de Daubechies se dá a partir da escolha de  $m_0$ . Dado um  $N \in \mathbb{N}$  positivo, definimos inicialmente o polinômio

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} x^k,$$

e fazemos

$$m_0(\omega) = \left( \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N L(\omega),$$

onde  $|L(\omega)|^2 = P_N(\sin^2 \omega/2)$ . Vamos mostrar que  $m_0$  satisfaz às condições exibidas na seção 6.2 para que  $\phi$  definida por

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega)$$

seja uma função de escala associada a uma ARM, definida por  $V_j = \overline{\text{span}\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$ .

Observe que, como  $\sin^2(\omega/2) = (1 - \cos \omega)/2$ , então  $P_N(\sin^2(\omega/2))$  é um polinômio trigonométrico em função de  $\omega$ . Nesse caso, usando o Lema de Fejér-Riesz, podemos afirmar que  $L(\omega)$  é um polinômio trigonométrico. Logo,  $m_0 \in C^\infty$ , em particular,  $m_0$  é de classe  $C^1$ . Além disso,  $L(\omega)$  é da forma  $\sum_{k=-M}^M a_k e^{ik\omega}$ , logo, é  $2\pi$ -periódica, e  $m_0$  é uma função  $2\pi$ -periódica. Assim, a condição (6.1) é satisfeita por  $m_0$ .

Vamos mostrar agora que  $|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$ . Observe que

$$\begin{aligned} |m_0(\omega)|^2 &= \left| \left( \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N \right|^2 \cdot |L(\omega)|^2 \\ &= \left[ \left( \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right) \left( \frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right) \right]^N \cdot P_N(\sin^2(\omega/2)) \\ &= \left[ \frac{2 + 2 \cos \omega}{4} \right]^N \cdot P_N(\sin^2(\omega/2)) \\ &= (\cos^2(\omega/2))^N \cdot P_N(\sin^2(\omega/2)). \end{aligned}$$

Desenvolvendo analogamente para  $\omega + \pi$ , queremos mostrar então que

$$x^N P_N(1-x) + (1-x)^N P_N(x) = 1,$$

$\forall x \in [0, 1]$ , onde  $x = \cos^2(\omega/2)$ . Como  $x^N$  e  $(1-x)^N$  não possuem zeros em comum, o Teorema de Bezout garante que existem polinômios  $q_1, q_2$  unicamente determinados, de grau  $N-1$ , tais que

$$(1-x)^N q_1(x) + x^N q_2(x) \equiv 1.$$



Substituindo  $y = 1 - x$ , obtemos

$$y^N q_1(1 - y) + (1 - y)^N q_2(1 - y) \equiv 1,$$

logo,  $q_1(x) = q_2(1 - x)$  e  $q_1(1 - x) = q_2(x)$ . Podemos escrever então

$$(1 - x)^N q_1(x) + x^N q_1(1 - x) = 1 \Rightarrow q_1(x) = (1 - x^N q_1(1 - x)) \cdot (1 - x)^{-N}.$$

Para obter os coeficientes de  $q_1(x)$ , vamos expandir  $q_1(x)$  em sua série de Taylor. Sejam  $f = 1 - x^N q_1(1 - x)$  e  $g = (1 - x)^{-N}$ . Então,

$$q_1^{(n)}(x) = (f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \left[ \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \right] (x).$$

Observe que  $f(x) = 1 - h(x)$ , onde  $h(x)$  é da forma  $\sum_{k=N}^{2N-1} h_k x^k$ . Logo,  $f(0) = 1$  e  $f^{(n)}(0) = 0$  para  $n = 1, \dots, N - 1$ . Portanto,

$$\begin{aligned} q_1^{(n)}(0) &= g^{(n)}(0) \\ &= \left( \prod_{k=1}^n (N + k - 1) \right) \cdot [1 - x]^{-(N+n)} \Big|_{x=0} = \binom{N + k - 1}{k} k!. \end{aligned}$$

Assim, como  $q_1(x)$  possui grau  $N - 1$ , segue que

$$q_1(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{q_1^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N + k - 1}{k} x^k = P_N(x).$$

Logo,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , temos

$$(1 - x)^N P_N(x) + x^N P_N(1 - x) = 1.$$

Isso mostra que  $|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$ , isto é,  $m_0$  satisfaz à condição (6.2).

Observe que  $m_0(0) = ((1 + e^0)/2)^N \cdot L(0) = L(0)$ . Note ainda que  $|L(0)|^2 = P_N(0) = 1$ ; assim,  $|m_0(0)| = 1$ . Como as propriedades demonstradas anteriormente independem de rotações, podemos assumir, sem perder generalidade, que  $m_0(0) = 1$ , isto é,  $m_0$  satisfaz à condição (6.3).

Concluimos enfim mostrando que  $m_0$  não possui zeros em  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Com efeito, observe que  $P_N$  é uma função positiva, logo,  $L(\omega) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$ . Além disso, observe que

$$\left( \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N = 0 \Rightarrow e^{-i\omega} = -1 \Rightarrow \omega = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Logo,  $m_0$  não possui zeros em  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Isso mostra que  $m_0$  satisfaz à condição (6.7), e conseqüentemente  $\phi$  definida por (6.6) é, de fato, uma função escala associada à ARM  $V_j = \overline{\text{span}\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$ . Assim, conforme visto em (4.10), a função  $\psi$  definida por

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \hat{\phi}(\omega/2)$$

constitui, de fato, uma wavelet com suporte compacto. Vamos agora mostrar que a wavelet  $\psi$  possui momentos nulos até a ordem  $N - 1$ . Isso é equivalente a dizer que

$$\hat{\psi}^{(n)}(0) = 0, \text{ para } n = 0, \dots, N - 1.$$

Notemos que, ao definir

$$f = \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \quad \text{e} \quad g = e^{i\omega/2} \hat{\phi}(\omega/2),$$

chegamos em

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^{(n)}(0) &= \sum_{k=0}^n \left[ \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \right] (0) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{-k} \overline{m_0^{(k)}(\pi)} \cdot g^{(n-k)}(0). \end{aligned}$$

Entretanto, uma vez que

$$m_0(\omega) = \left( \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N L(\omega),$$

com  $L(w)$  um polinômio trigonométrico, segue que

$$\begin{aligned} m_0^{(n)}(\pi) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[ \frac{1 + e^{-i\cdot}}{2} \right]^{(k)} (\omega) \cdot L^{(n-k)}(\omega) \Big|_{\omega=\pi} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[ \prod_{j=1}^k N - j + 1 \right] \left( \frac{-i}{2} \right)^k \left( \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^{N-k} L^{(n-k)}(\omega) \Big|_{\omega=\pi} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[ \prod_{j=1}^k N - j + 1 \right] \left( \frac{-i}{2} \right)^k \left( \frac{1 - 1}{2} \right)^{N-k} L^{(n-k)}(\pi) = 0, \end{aligned}$$

para  $n = 0, \dots, N - 1$ , uma vez que  $e^{-i\pi} = -1$ . Segue que  $\psi$  possui todos os momentos até a ordem  $N - 1$  nulos.

## 6.5 Calculando os coeficientes de filtro das wavelets de Daubechies

Nas Seções 4.2 e 4.3, vimos que

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$$

e

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h_{-k-1}} \phi(2x - k),$$

respectivamente. Assim, encontrar os coeficientes de filtro das wavelets de Daubechies se resume a encontrar os coeficientes do polinômio trigonométrico  $m_0$ . Vamos encontrar os coeficientes de filtro exatos para  $N = 1$  e  $N = 2$ . Para valores maiores de  $N$ , os coeficientes são obtidos numericamente.

### 6.5.1 Caso $N = 1$

Observe que, quando  $N = 1$ , temos  $P_1(x) = 1, \forall x \in \mathbb{C}$ , e

$$m_0(\omega) = \left( \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right) \cdot L(\omega),$$

onde  $|L(\omega)|^2 = P_1(\sin^2(\omega/2)) = 1$ . Fazendo  $L(\omega) = 1$ , segue que

$$m_0(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-i\omega}}{\sqrt{2}} \right),$$

portanto,  $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$ , o que corresponde à wavelet de Haar.

### 6.5.2 Caso $N = 2$

Vamos encontrar um polinômio trigonométrico  $L(\omega)$  tal que  $|L(\omega)|^2 = P_2(\sin^2\omega/2)$ . Usaremos a técnica exposta na demonstração do Lema de Fejér-Riesz para encontrar esse polinômio. Observe que  $P_2(x) = 1 + 2x$ . Uma vez que  $\sin^2\omega/2 = (1 - \cos\omega)/2$ ,

$$P_2(\sin^2\omega/2) = 2 - \cos\omega = 2 - \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} = \frac{1}{2}(-e^{-i\omega} + 4 - e^{i\omega}).$$

Defina o polinômio  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definido por  $P(z) = -1 + 4z - z^2$ . As raízes de  $P$  são

$$z_1 = 2 - \sqrt{3} \text{ e } z_2 = 2 + \sqrt{3},$$

com  $z_1$  sendo a raiz dentro do círculo unitário e  $z_2 = z_1^{-1}$  fora deste. Seja  $C = \frac{1}{z_1} = z_2$ . Então, o polinômio

$$L(\omega) = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{2}}(e^{i\omega} - z_1)$$

satisfaz a  $|L(\omega)|^2 = P_2(\sin^2\omega/2)$ . De fato, temos que

$$\begin{aligned} |L(\omega)|^2 &= \frac{C}{2}(e^{i\omega} - z_1)(e^{-i\omega} - z_1) = \frac{z_2}{2}(1 - z_1e^{i\omega} - z_1e^{-i\omega} + z_1^2) \\ &= \frac{z_2}{2}(-z_1e^{i\omega} - z_1e^{-i\omega} + 4z_1) = \frac{z_1z_2}{2}(-e^{-i\omega} + 4 - e^{i\omega}) \\ &= P_2(\sin^2\omega/2), \end{aligned}$$

uma vez que  $z_1z_2 = 1$  e  $1 + z_1^2 = 4z_1$ . Vamos agora encontrar o polinômio trigonométrico  $m_0$ . Observe inicialmente que

$$C = z_2 = 2 + \sqrt{3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2}.$$

Assim, temos que  $\sqrt{C}/\sqrt{2} = (1 + \sqrt{3})/2 = (z_2 - 1)/2$ . Portanto,

$$\begin{aligned} m_0(\omega) &= \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2}\right)^2 L(\omega) = \left(\frac{e^{-2i\omega} + 2e^{-i\omega} + 1}{4}\right) \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{2}}(e^{i\omega} - z_1) \\ &= \frac{z_2 - 1}{8}(-z_1 e^{-2i\omega} + (1 - 2z_1)e^{-i\omega} + (2 - z_1) + e^{i\omega}) \\ &= \frac{(1 - \sqrt{3})e^{-2i\omega}}{8} + \frac{(3 - \sqrt{3})e^{-i\omega}}{8} + \frac{3 + \sqrt{3}}{8} + \frac{(1 + \sqrt{3})e^{i\omega}}{8}. \end{aligned}$$

Como  $m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$ , segue que

$$h_{-1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_0 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

**Observação 6.5.** A função  $\phi$  se escreve por

$$\phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{-1,k}.$$

Como podemos transladar a função escala por inteiros, podemos usar os coeficientes de filtro

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

Nesse caso, os coeficientes de filtro da wavelet encontrados a partir da fórmula na Seção 4.3 seriam

$$g_{-4} = h_3, \quad g_{-3} = -h_2, \quad g_{-2} = h_1, \quad g_{-1} = -h_0.$$

Como translações por inteiro de uma wavelet ainda são uma wavelet, podemos usar os coeficientes

$$g_0 = h_3, \quad g_1 = -h_2, \quad g_2 = h_1, \quad g_3 = -h_0,$$

que são os coeficientes de filtro da wavelet conhecida na literatura como Daub4.

# Capítulo 7

## Transformada discreta de wavelets

No final do Capítulo 3, vimos algoritmos rápidos para a decomposição e reconstrução de uma função para a wavelet de Haar. O objetivo deste capítulo é generalizar tais algoritmos para wavelets arbitrárias (como, por exemplo, a wavelet de Daubechies).

### 7.1 Algoritmo para decomposição

Seja  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  uma ARM e  $(W_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  os espaços de wavelets associados a essa ARM, isto é, os espaços que satisfazem à relação

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j,$$

para qualquer  $j \in \mathbb{Z}$ . Consideremos  $\phi$  a função escala associada a esta ARM e  $\psi$  a wavelet correspondente. Nas Seções 4.2 e 4.3, obtivemos as relações de escalas

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k) \text{ e } \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2x - k),$$

onde  $h_k$  são os coeficientes de filtro de  $\phi$  e  $g_k$  são os coeficientes de wavelet de  $\psi$ . Podemos generalizar essas relações, para obter

$$\begin{aligned} \phi_{j,n}(x) &= 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - n) = 2^{-(j-1)/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2^{-(j-1)}x - 2n - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{j-1,2n+k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \phi_{j-1,k}(x), \end{aligned} \quad (7.1)$$

quaisquer que sejam  $j, n \in \mathbb{Z}$ . De modo análogo, obtemos também

$$\psi_{j,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi_{j-1,2n+k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \phi_{j-1,k}. \quad (7.2)$$

Vamos agora relacionar os espaços  $V_{j-1}$ ,  $V_j$  e  $W_j$ . Seja  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , e denote por  $P_j, Q_j$  as projeções ortogonais em  $V_j, W_j$  respectivamente. Pela definição de  $V_j$ , denotando  $\langle P_j f, \phi_{j,k} \rangle$  por  $a_{j,k}$ , obtemos então

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi_{j,k}.$$

As propriedades de projeções ortogonais garantem que

$$\langle f - P_j f, \phi_{j,k} \rangle = 0,$$

isto é,  $\langle P_j f, \phi_{j,k} \rangle = \langle f, \phi_{j,k} \rangle, \forall k \in \mathbb{Z}$ . Sendo assim, podemos encontrar os coeficientes  $(a_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  a partir dos coeficientes  $(a_{j-1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ . A partir de (7.1), temos

$$\begin{aligned} a_{j,n} &= \langle P_j f, \phi_{j,n} \rangle = \langle f, \phi_{j,n} \rangle \\ &= \left\langle f, \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} \phi_{j-1,k} \right\rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{k-2n}} \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_{k-2n}} a_{j-1,k}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

De maneira análoga mostra-se que

$$\langle Q_j f, \psi_{j,k} \rangle = \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

Denotando  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$  por  $d_{j,k}$ , temos  $Q_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}$ . A partir de (7.2), obtemos

$$\begin{aligned} d_{j,n} &= \langle Q_j f, \psi_{j,n} \rangle = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \\ &= \left\langle f, \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} \phi_{j-1,k} \right\rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g_{k-2n}} \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g_{k-2n}} a_{j-1,k}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

A partir das fórmulas em (7.3) e (7.4), obtemos um algoritmo recursivo de decomposição que pode ser esquematizado da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccccc} a_{j_0, \cdot} & \rightarrow & a_{j_0+1, \cdot} & \rightarrow & a_{j_0+2, \cdot} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & a_{j_0+l-1, \cdot} & \rightarrow & a_{j_0+l, \cdot} \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & d_{j_0+1, \cdot} & & d_{j_0+2, \cdot} & & & & d_{j_0+l-1, \cdot} & & d_{j_0+l, \cdot} \end{array} \quad (7.5)$$

denotamos esse algoritmo como a *transformada discreta de wavelets*.

## 7.2 Algoritmo para reconstrução

Observe que, a partir de (7.1), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j-1,k}, \phi_{j,n} \rangle &= \left\langle \phi_{j-1,k}, \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2n} \phi_{j-1,l} \right\rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_{l-2n}} \langle \phi_{j-1,k}, \phi_{j-1,l} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{h_{l-2n}} \delta_{k,l} \\ &= \overline{h_{k-2n}}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

O mesmo raciocínio implica que

$$\langle \phi_{j-1,k}, \psi_{j,n} \rangle = \overline{g_{k-2n}}. \quad (7.7)$$

Como  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ , segue que

$$P_{j-1}f = P_j f + Q_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}.$$

Usando agora as relações em (7.6) e (7.7), segue que

$$\begin{aligned} a_{j-1,n} &= \langle P_{j-1}f, \phi_{j-1,n} \rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \right\rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \langle \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} \cdot a_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \cdot d_{j,k}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

A partir da fórmula em (7.8), obtemos um algoritmo recursivo de reconstrução esquematizado abaixo

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{j_0+l,\cdot} & \rightarrow & a_{j_0+l-1,\cdot} & \rightarrow & a_{j_0+l-2,\cdot} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & a_{j_0+1,\cdot} & \rightarrow & a_{j_0,\cdot} \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ d_{j_0+l,\cdot} & & d_{j_0+l-1,\cdot} & & d_{j_0+l-2,\cdot} & & & & d_{j_0+1,\cdot} & & \end{array} \quad (7.9)$$

### 7.3 Implementação dos algoritmos de decomposição e reconstrução

Observe que o algoritmo de decomposição descrito na Seção 7.1 nos permite mapear o conjunto de dados

$$\{a_{0,k} : k = 0, 1, 2, \dots, 2^N - 1\}$$

em

$$\{a_{N,0}, d_{j,k} : j = 1, 2, 3, \dots, N, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2^{N-j} - 1\}. \quad (7.10)$$

A passagem

$$(a_{j,\cdot}) \rightarrow \begin{pmatrix} a_{j+1,\cdot} \\ d_{j+1,\cdot} \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

será implementada por uma matriz ortogonal  $Q_j$  de ordem  $2^{N-j}$ . Em outras palavras, temos

$$Q_j(a_{j,\cdot}) = \begin{pmatrix} a_{j+1,\cdot} \\ d_{j+1,\cdot} \end{pmatrix},$$

onde  $Q_j$  para as wavelets de Haar e Daub4 são dadas por

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & h_0 & h_1 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_2 & g_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & g_0 & g_1 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Como  $Q_j$  é uma matriz ortogonal, a passagem inversa

$$\begin{pmatrix} a_{j+1,\cdot} \\ d_{j+1,\cdot} \end{pmatrix} \rightarrow (a_{j,\cdot}) \quad (7.12)$$

é implementada por

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} a_{j+1,\cdot} \\ d_{j+1,\cdot} \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} a_{j+1,\cdot} \\ d_{j+1,\cdot} \end{pmatrix} = (a_{j,\cdot}).$$



# Capítulo 8

## Aplicação de wavelets no processamento de imagens

No Capítulo anterior, construímos a transformada discreta de wavelets e mostramos como aplicar essa transformada em conjuntos finitos de dados, voltando a nossa atenção para a transformada usando os coeficientes de filtro da wavelet de Haar e da wavelet Daub4. Neste capítulo, introduziremos problemas de processamento de imagens. Por simplicidade, usaremos imagens em tons de cinza, de domínio público e dimensão  $512 \times 512$ . Tal imagem pode ser representada por uma matriz, onde cada índice varia entre 0 (cor preta) e 255 (cor branca), que denotaremos por  $A$ .

### 8.1 Decomposição de imagens via wavelets

Existem dois algoritmos para a decomposição de imagens por wavelets: o padrão e o não-padrão. O algoritmo padrão consiste em aplicar o algoritmo (7.10) em todas as linhas, e posteriormente, em todas as colunas da imagem. Já o algoritmo não-padrão consiste em aplicar a passagem (7.11) em todas as linhas da imagem, e posteriormente em todas as colunas da imagem, repetindo esse processo até concluir a transformação em (7.10) em todas as linhas e colunas da imagem. Optamos por usar o algoritmo não-padrão neste trabalho, que pode ser visualizado na Figura 8.1. O algoritmo não-padrão foi implementado seguindo os passos lógicos a seguir.

1. Começamos com  $j = 0$ .
2. No  $j + 1$ -ésimo passo, consideramos a submatriz de  $A$ , denotada por  $A_j$ , como sendo a matriz composta pelos elementos  $\{a_{i,k} : i, k \in \{0, 1, \dots, 2^{N-j} - 1\}\}$ .
3. Aplicamos o algoritmo de decomposição em (7.11) em cada linha da matriz  $A_j$ .
4. Aplicamos o algoritmo de decomposição em (7.11) em cada coluna da matriz  $A_j$ .
5. Substituímos os elementos de  $A$  associados à matriz  $A_j$  pelos novos elementos de  $A_j$ , obtidos após os passos 3 e 4.

6. Substituímos  $j$  por  $j + 1$  e voltamos para o passo 2, até que  $j = N - 1$ .

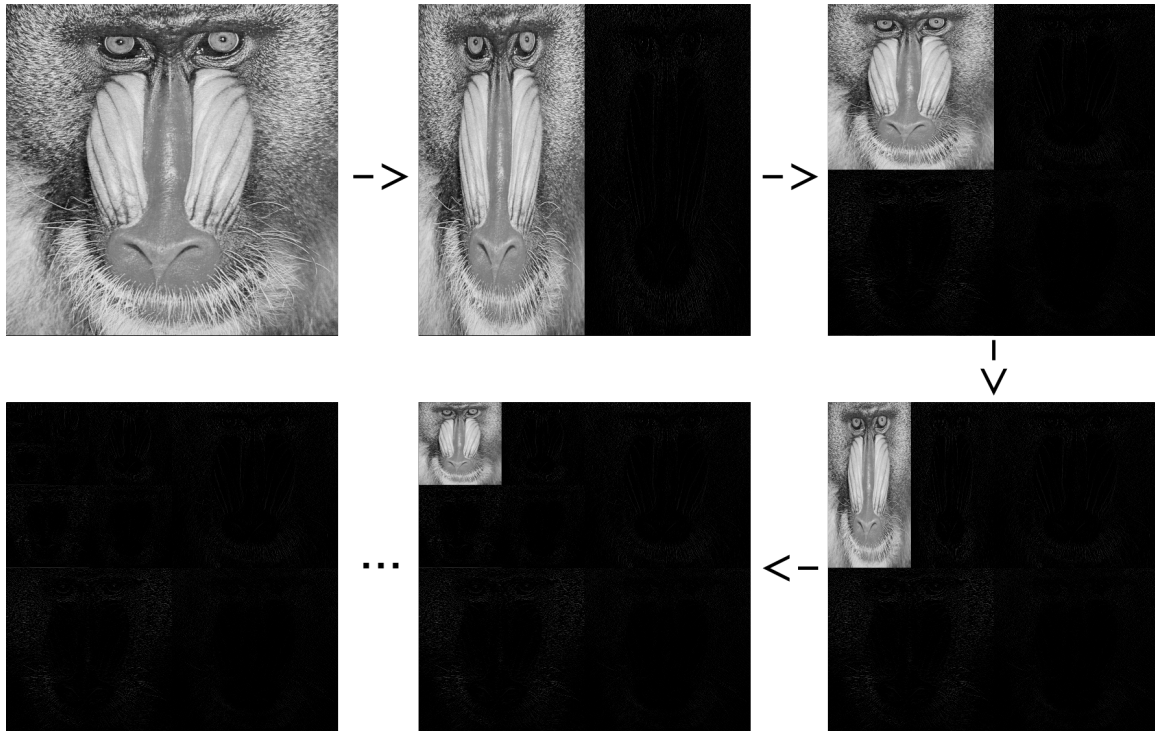


Figura 8.1: Algoritmo não-padrão, onde as setas indicam os passos do algoritmo.

O algoritmo de reconstrução consiste, basicamente, em desfazer as operações feitas no algoritmo de decomposição.

1. Começamos com  $j = 1$ .
2. No  $j$ -ésimo passo, consideramos a submatriz de  $A$ , denotada por  $B_j$ , como sendo a matriz composta pelos elementos  $\{a_{i,k} : i, k \in \{0, 1, \dots, 2^j - 1\}\}$ .
3. Aplicamos o algoritmo de reconstrução em (7.12) em cada coluna da matriz  $B_j$ .
4. Aplicamos o algoritmo de reconstrução em (7.12) em cada linha da matriz  $B_j$ .
5. Substituímos os elementos de  $A$  associados à matriz  $B_j$  pelos novos elementos de  $B_j$ , obtidos após os passos 3 e 4.
6. Substituímos  $j$  por  $j + 1$  e voltamos para o passo 2, até que  $j = N$ .

## 8.2 Compressão de dados

Em uma imagem digital usual, existe uma correlação local muito forte entre os pixels (isto é, pixels próximos possuem valores próximos). Os coeficientes de wavelets

são combinações lineares de valores de pixels vizinhos, e, nessa combinação linear, os coeficientes são os coeficientes de filtro da wavelet, os quais possuem média nula (veja a Observação 6.3). Por causa disso, os coeficientes de wavelets são nulos ou próximos de 0. Por isso, podemos desconsiderar muitos desses coeficientes no momento de aplicar o algoritmo de reconstrução, comprimindo, assim, a imagem original, como ilustrado nas Figuras 8.2 e 8.3, onde na Figura 8.3 percebe-se nitidamente que os coeficientes de wavelet estão centrados em torno do 0.

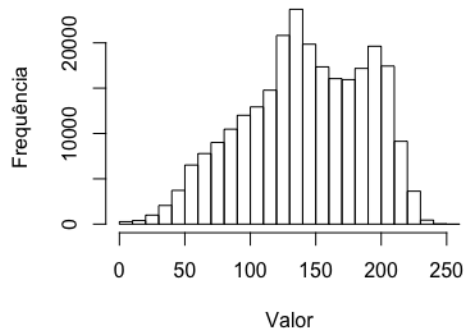


Figura 8.2: Distribuição dos valores dos pixels da imagem original.

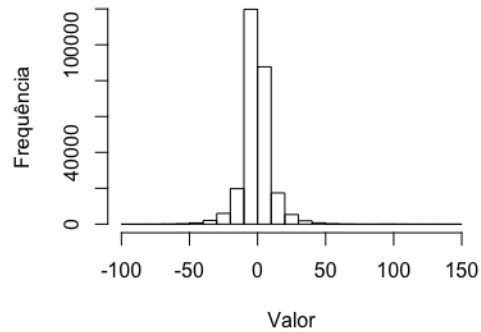


Figura 8.3: Distribuição dos coeficientes de wavelet após a decomposição da imagem, pela wavelet de Haar.

A seguir, vamos mostrar alguns resultados de compressão usando as wavelets de Haar e Daub4.

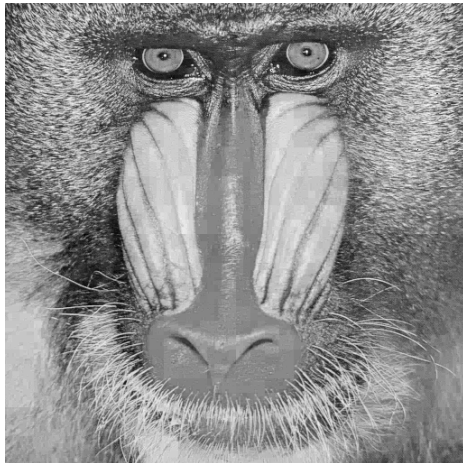


Figura 8.4: Reconstrução usando apenas 50% dos coeficientes de wavelets, a partir da wavelet de Haar.



Figura 8.5: Reconstrução usando apenas 20% dos coeficientes de wavelets, a partir da wavelet de Haar.



Figura 8.6: Reconstrução usando apenas 10% dos coeficientes de wavelets, a partir da wavelet de Haar.

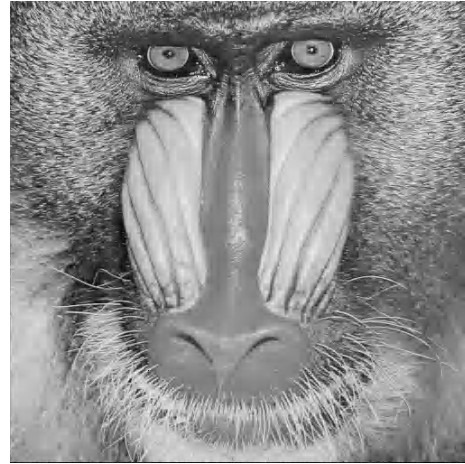


Figura 8.7: Reconstrução usando apenas 10% dos coeficientes de wavelets, a partir da wavelet Daub4.

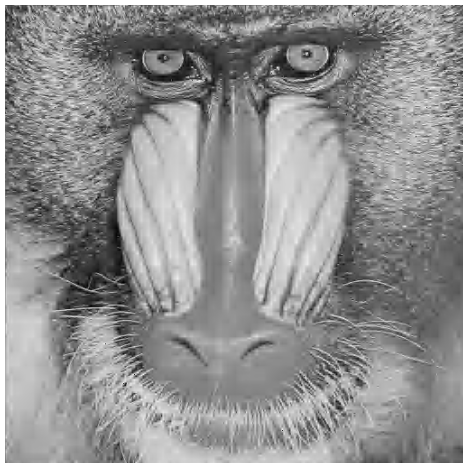


Figura 8.8: Reconstrução usando apenas 5% dos coeficientes de wavelets, a partir da wavelet Daub4.



Figura 8.9: Reconstrução usando apenas 2% dos coeficientes de wavelets, a partir da wavelet Daub4.

### 8.3 Remoção de ruídos

O algoritmo para a remoção de ruídos de uma imagem usando a decomposição por wavelets é similar ao algoritmo para a compressão de dados. Primeiramente, faz-se a decomposição da imagem. Após isso, escolhe-se um limiar positivo (denotado por  $\lambda$ ). Construímos então uma nova matriz, denotada por  $D$ , com as mesmas dimensões da matriz  $A$ . Os valores da matriz  $D$  são obtidos pela seguinte função:

$$D_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{se } |A_{i,j}| \leq \lambda, \\ A_{i,j} - \lambda, & \text{se } A_{i,j} > \lambda, \\ A_{i,j} + \lambda, & \text{se } A_{i,j} < -\lambda. \end{cases} \quad (8.1)$$

Enfim, aplicamos o algoritmo de reconstrução na matriz  $D$ .



Figura 8.10: Imagem original (com ruídos).



Figura 8.11: Imagem com ruídos removidos, usando  $\lambda = 42$ , a partir da wavelet Daub4.

### 8.4 Detecção de singularidades

As singularidades em uma imagem são os contornos dos elementos que constituem essa imagem. Portanto, é esperado que as singularidades sejam destacadas nos níveis iniciais de decomposição de uma imagem por wavelets. Tendo isso em vista, o algoritmo para detecção de singularidades usando wavelets é o mais simples dentre os implementados. Consideramos a matriz  $A$ , de dimensão  $2^N \times 2^N$ , com  $N \geq 1$ , e um número  $K \leq N$ . Executamos o algoritmo de decomposição por wavelets; entretanto, substituímos a condição de parada  $j = N$  pela condição  $j = K$ . Após isso, executamos o algoritmo de reconstrução mantendo apenas os coeficientes de wavelet (isto é, os  $d_{j,k}$ ). A seguir vamos considerar uma imagem de  $512 \times 512$  pixels (isto é,  $N = 9$ ).



Figura 8.12: Imagem original.

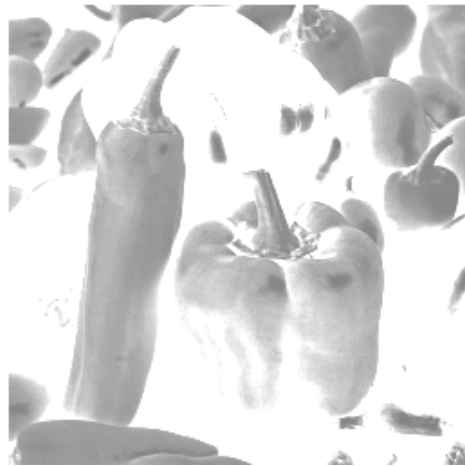


Figura 8.13: Detecção de singularidades usando  $K = 8$ , a partir da wavelet de Haar.



Figura 8.14: Detecção de singularidades usando  $K = 4$ , a partir da wavelet de Haar.



Figura 8.15: Detecção de singularidades usando  $K = 3$ , a partir da wavelet de Haar.



Figura 8.16: Detecção de singularidades usando  $K = 4$ , a partir da wavelet Daub4.



Figura 8.17: Detecção de singularidades usando  $K = 2$ , a partir da wavelet Daub4.

## 8.5 Considerações finais

Nitidamente, os resultados usando a wavelet Daub4 foram melhores do que os resultados usando a wavelet de Haar. Isso era esperado, uma vez que a wavelet Daub4 possui momentos de ordem 0 e 1 nulos, ao passo em que a wavelet de Haar possui apenas o momento de ordem 0 nulo.

Todos os algoritmos citados foram implementados, ao longo do trabalho, na linguagem de programação *C++*. Os histogramas nas figuras 8.2 e 8.3 foram construídos usando a linguagem de programação *R*. Todas as fotos usadas nesse trabalho são de domínio público, e são facilmente encontradas na internet.

# Apêndice A

## Códigos para processamento de dados via wavelets

Apresentamos neste apêndice os códigos referentes às passagens (7.11) e (7.12), e os códigos referentes ao processamento de uma matriz via wavelets.

Como as matrizes  $Q_j$  nas passagens (7.11) e (7.12) são esparsas, implementamos a multiplicação matricial em (7.11) e (7.12) implicitamente, melhorando a complexidade dos programas.

### A.1 Wavelet de Haar

Para melhorar a precisão do programa, multiplicamos a matriz  $Q_j$  por  $1/\sqrt{2}$ , e na inversão usamos a matriz  $\sqrt{2}Q^t$ .

```
//Decomposição de um conjunto de dados pela wavelet de Haar  
//Parâmetros: vetor (passado por referência), com tamanho par  
//No final, o vetor v guarda a decomposição do próprio vetor v  
//Complexidade: linear (O(n))
```

```
void HaarDecomposition(vector < long double > &v) {  
    int sz = v.size();  
    vector < long double > ret(sz);  
  
    //algoritmo de decomposição  
    for(int i = 0; i + 1 < sz; i += 2) {  
        ret[i / 2] = (v[i] + v[i+1]) / 2.0;  
        ret[(sz + i) / 2] = (v[i] - v[i+1]) / 2.0;  
    }  
  
    for(int i = 0; i < sz; i++) v[i] = ret[i];  
}
```

```
//Reconstrução de um conjunto de dados pela wavelet de Haar  
//Parâmetros: vetor (passado por referência), com tamanho par  
//No final, o vetor v guarda a reconstrução do próprio vetor v  
//Complexidade: linear (O(n))
```



```

void HaarReconstruction(vector < long double > &v) {
    int sz = v.size();
    vector < long double > ret(sz);

    //algoritmo de reconstrução
    for(int i = 0; i + 1 < sz; i += 2) {
        ret[i] = v[i / 2] + v[(sz + i) / 2];
        ret[i + 1] = v[i / 2] - v[(sz + i) / 2];
    }

    for(int i = 0; i < sz; i++) v[i] = ret[i];
}

```

## A.2 Wavelet Daub4

*//Decomposição de um conjunto de dados pela wavelet Daub4  
//Parâmetros: vetor (passado por referência), com tamanho par  
//No final, o vetor v guarda a decomposição do próprio vetor v  
//Complexidade: linear (O(n))*

```

void Daub4Decomposition(vector < long double > &v) {
    int sz = v.size();
    vector < long double > ret(sz);

    //obtendo os coeficientes da matriz  $Q^j$ 
    long double h0 = (1 + sqrt(3)) / (4 * sqrt(2));
    long double h1 = (3 + sqrt(3)) / (4 * sqrt(2));
    long double h2 = (3 - sqrt(3)) / (4 * sqrt(2));
    long double h3 = (1 - sqrt(3)) / (4 * sqrt(2));
    long double g0 = h3, g1 = -h2, g2 = h1, g3 = -h0;

    //algoritmo de decomposição
    for(int i = 0; i + 1 < sz; i += 2) {
        int a = i, b = (i+1)%sz, c = (i+2)%sz, d = (i+3)%sz;
        ret[i/2] = h0*v[a] + h1*v[b] + h2*v[c] + h3*v[d];
        ret[(sz+i)/2] = g0*v[a] + g1*v[b] + g2*v[c] + g3*v[d];
    }

    for(int i = 0; i < sz; i++) v[i] = ret[i];
}

```

*//Reconstrução de um conjunto de dados pela wavelet Daub4  
//Parâmetros: vetor (passado por referência), com tamanho par  
//No final, o vetor v guarda a reconstrução do próprio vetor v  
//Complexidade: linear (O(n))*

```

void Daub4Reconstruction(vector < long double > &v) {
    int sz = v.size();
    vector < long double > ret(sz);

    //obtendo os coeficientes da matriz  $Q^j$ 
    long double h0 = (1 + sqrt(3)) / (4 * sqrt(2));

```

```

long double h1 = (3 + sqrt(3)) / (4 * sqrt(2));
long double h2 = (3 - sqrt(3)) / (4 * sqrt(2));
long double h3 = (1 - sqrt(3)) / (4 * sqrt(2));
long double g0 = h3, g1 = -h2, g2 = h1, g3 = -h0;

//obtendo os coeficientes da matriz inversa de Q^j
long double ih0 = h2, ih1 = g2, ih2 = h0, ih3 = g0;
long double ig0 = h3, ig1 = g3, ig2 = h1, ig3 = g1;

//reconstruindo primeiras posições
ret[0] = ih0*v[sz/2-1] + ih1*v[sz-1] + ih2*v[0] + ih3*v[sz/2];
ret[1] = ig0*v[sz/2-1] + ig1*v[sz-1] + ig2*v[0] + ig3*v[sz/2];

//reconstruindo posições restantes
int j = 2;
for(int i = 0; i + 1 < sz; i += 2) {
    int a = i, b = sz/2+i, c = i+1, d = sz/2+i+1;
    ret[j++] = ih0*v[a] + ih1*v[b] + ih2*v[c] + ih3*v[d];
    ret[j++] = ig0*v[a] + ig1*v[b] + ig2*v[c] + ig3*v[d];
}

for(int i = 0; i < sz; i++) v[i] = ret[i];
}

```

### A.3 Códigos para decomposição de uma matriz via wavelets

Primeiramente, introduziremos os códigos usados para decomposição de linhas e colunas de uma matriz. Posteriormente, introduziremos os códigos para decomposição de uma matriz usando coeficientes de wavelets.

```

//Decomposição das linhas da matriz "mat"
//usando coeficientes de wavelets. O método
//VectorDecomposition chama a decomposição
//pela wavelet de Haar ou Daub4.
//Parâmetros: n = número de linhas consideradas,
//m = número de elementos considerados em cada linha.
//Complexidade: O(n*m)

void LineDecomposition(int n, int m) {
    for(int i=0; i<n; i++) {
        //aplica a transformação em um vetor auxiliar
        vector < long double > temp(m);
        for(int j=0; j<m; j++) {
            temp[j] = mat[i][j];
        }
        VectorDecomposition(temp);

        //copia os dados para a matriz "mat"
        for(int j=0; j<m; j++) {
            mat[i][j] = temp[j];
        }
    }
}

```

```

    }
}

//Decomposição das colunas da matriz "mat"
//usando coeficientes de wavelets. O método
//VectorDecomposition chama a decomposição
//pela wavelet de Haar ou Daub4.
//Parâmetros: n = número de elementos considerados em
//cada coluna, m = número de colunas consideradas
//Complexidade: O(n*m)

void ColumnDecomposition(int n, int m) {
    for(int j=0; j<m; j++) {
        //aplica a transformação em um vetor auxiliar
        vector < long double > temp(n);
        for(int i=0; i<n; i++) {
            temp[i] = mat[i][j];
        }
        VectorDecomposition(temp);

        //copia os dados para a matriz "mat"
        for(int i=0; i<n; i++) {
            mat[i][j] = temp[i];
        }
    }
}

```

Os métodos para reconstrução das linhas e colunas de uma matriz são análogos aos métodos anteriores. Suas assinaturas são

```
void LineReconstruction(int n, int m)
```

e

```
void ColumnReconstruction(int n, int m).
```

Apresentamos, enfim, os códigos para a decomposição e reconstrução de uma matriz quadrada a partir da transformada de wavelet.

```

//Decomposição de uma matriz quadrada "mat"
//usando coeficientes de wavelets.
//Parâmetros: n = ordem da matriz;
//É esperado que n seja uma potência de 2.
//Complexidade: O(n^2)

void MatrixDecomposition(int n) {
    //ordem da sub-matriz a ser decomposta
    int size = n;

    while(size > 1) {
        LineDecomposition(size, size);
        ColumnDecomposition(size, size);
        size = size / 2;
    }
}

```

```

//Reconstrução de uma matriz quadrada "mat"
//usando coeficientes de wavelets.
//Parâmetros: n = ordem da matriz;
//É esperado que n seja uma potência de 2.
//Complexidade: O(n^2)

void MatrixReconstruction(int n) {
    //ordem da sub-matriz a ser decomposta
    int size = 2;

    while(size <= n) {
        LineReconstruction(size, size);
        ColumnReconstruction(size, size);
        size = size * 2;
    }
}

```

## A.4 Observações gerais sobre os algoritmos

Podemos estender esses algoritmos para quando a matriz não é quadrada. Primeiramente, estendemos a matriz com zeros até que suas dimensões se tornem potências de 2. Para isso, é necessário, no máximo, dobrar cada uma das dimensões da matriz. Decompomos então linhas e colunas, alternadamente, armazenando os parâmetros passados às funções *LineDecomposition* e *ColumnDecomposition* em uma pilha. Por fim, no algoritmo de reconstrução, desempilhamos cada dupla de parâmetros, e executamos os métodos *LineReconstruction* e *ColumnReconstruction*, passando os parâmetros desempilhados.

O algoritmo para compressão de dados consiste em, após decomposta a matriz, desconsiderar valores (determinados por um percentual) para reconstruir a matriz. Como esse percentual pode ser alto, a matriz se torna esparsa, e portanto fácil de ser armazenada, justificando a compressão de dados.

O algoritmo para remoção de ruídos consiste em, após decomposta a matriz, executar a transformação em (8.1) para algum  $\lambda$ , e reconstruir a matriz.

O algoritmo para detecção de singularidades consiste em interromper o método *MatrixDecomposition* após um determinado número de passos, e reconstruir a matriz desconsiderando os coeficientes  $a_{j,k}$  gerados pela decomposição.

# Referências Bibliográficas

- [1] Alfred Haar, *Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen-Systeme*, Math. Ann, vol. 69, páginas 331-371, 1910.
- [2] A. Grossmann and J. Morlet, *Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 15, ed. 4, páginas 723-736, 1984.
- [3] Y. Meyer, *Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées*, Lectures given at the University of Torino, Italy, 1986.
- [4] Stephane G. Mallat, *Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of  $L^2(\mathbb{R})$* , Transactions of the American Mathematical Society, vol. 315, no. 1, páginas 69-87, Setembro - 1989.
- [5] Ingrid Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 41, páginas 909-946, 1988.
- [6] Robi Polikar, *The Story of Wavelets*, Iowa State University, USA, IMACS/IEEE CSCC'99 Proceedings, páginas 5481-5486, 1999.
- [7] Paulo Cupertino de Lima, *Wavelets: uma introdução à teoria, aos algoritmos e às aplicações*, em preparação, páginas 1-153, 2008.
- [8] Paulo Cupertino de Lima, *Wavelets: uma introdução*, Revista Matemática Universitária, vol. 33, páginas 13-44, Dezembro, 2002.
- [9] Eugenio Hernández, Guido Weiss, *A first course on wavelets*, CRC Press, seção 2.3, 1996.
- [10] Robert G. Bartle, *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- [11] Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 1978.
- [12] Djairo Guedes de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, quarta edição, Projeto Euclides, IMPA, 2014.
- [13] Lennart Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math., vol. 116, páginas 135-157, 1966.

- [14] G. Deslauriers e S. Dubuc, *Interpolation Dyadique*, Fractals, dimensions non entières et applications, páginas 44-55, 1987.
- [15] Ingrid Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, USA, 1992.
- [16] Ingrid Daubechies, *Where Do Wavelets Come From? - A Personal Point of View*, Proceedings of the IEEE, vol. 84, no. 4, páginas 510-513, 1996.
- [17] Robert X. Gao, Ruqiang Yan, *Wavelets: Theory and Applications for Manufacturing*, Springer Science+Business Media, New York, USA, 2011.
- [18] Barbara Burke Hubbard, *The World According to Wavelets*, A K Peters, Wellesley, Massachussets, 1995.