

**CRITÉRIOS PARA AS COMPONENTES
ESPECTRAIS ABSOLUTAMENTE CONTÍNUAS
DE OPERADORES DE JACOBI A VALORES
MATRICIAIS**

FABRÍCIO VIEIRA OLIVEIRA

**CRITÉRIOS PARA AS COMPONENTES
ESPECTRAIS ABSOLUTAMENTE CONTÍNUAS
DE OPERADORES DE JACOBI A VALORES
MATRICIAIS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

ORIENTADOR: SILAS LUIZ DE CARVALHO

Belo Horizonte

Julho de 2018

© 2018, Fabrício Vieira Oliveira.
Todos os direitos reservados.

Vieira Oliveira, Fabrício

D1234p Critérios para as Componentes Espectrais
Absolutamente Contínuas de Operadores de Jacobi a
Valores Matriciais / Fabrício Vieira Oliveira. — Belo
Horizonte, 2018
xxvii, 194 f. : il. ; 29cm

Tese (doutorado) — Universidade Federal de Minas
Gerais

Orientador: Silas Luiz de Carvalho

1. Matemática — Teses. 2. Física Matemática —
Teoria Espectral. I. Silas Luiz de Carvalho.
II. Critérios para as Componentes Espectrais
Absolutamente Contínuas de Operadores de Jacobi a
Valores Matriciais.

CDU 519.6*82.10

[Folha de Aprovação]

Quando a secretaria do Curso fornecer esta folha, ela deve ser digitalizada e armazenada no disco em formato gráfico.

Se você estiver usando o `pdflatex`, armazene o arquivo preferencialmente em formato PNG (o formato JPEG é pior neste caso).

Se você estiver usando o `latex` (não o `pdflatex`), terá que converter o arquivo gráfico para o formato EPS.

Em seguida, acrescente a opção `approval={nome do arquivo}` ao comando `\ppgccufmg`.

Se a imagem da folha de aprovação precisar ser ajustada, use:
`approval=[ajuste] [escala] {nome do arquivo}`
onde *ajuste* é uma distância para deslocar a imagem para baixo e *escala* é um fator de escala para a imagem. Por exemplo:
`approval=[-2cm] [0.9] {nome do arquivo}`
desloca a imagem 2cm para cima e a escala em 90%.

"Mathematics is not a deductive science-that's a cliché. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial-and-error, experimentation, and guesswork."

Paul Halmos (1985).

Agradecimentos

Agradeço a Deus, Início e Fim de todas as coisas.

Agradeço à Virgem Maria por nos conduzir ao Cristo.

Agradeço a todos os meus familiares, especialmente minha mãe, Conceição, por me darem o seu amor.

Agradeço a todos os professores que tive no Departamento de Matemática por me permitirem aprender um pouco mais sobre Matemática. Em especial, ao meu orientador, o Professor Silas, por me suportar por tanto tempo, e à minha pré-orientadora, Professora Sônia, por me auxiliar em escolhas decisivas no início do curso.

Agradeço aos professores da banca examinadora, Professor César de Oliveira, Professor Gastão de Almeida Braga, Professor Pablo Daniel Carrasco Correa, Professor Tiago Pereira, pelas correções e sugestões no trabalho final e também pelos preciosos conselhos.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

Enfim, agradeço a todas, tantas quantas, pessoas que pude conhecer em Belo Horizonte e que me trouxeram grandes alegrias.

*“Eis que é cessada a procela,
vou indo, Senhora,
ao lume da estrela.
Meu nome? Se importa,
assenteis nos livros
de anais desta Casa
que, em noite varrida
pela tempestade,
negastes guarida
aos guardiões da vida:
a Fé, a Esperança
e a própria Caridade.”*
(Elomar Figueira Mello)

Resumo

Apresentamos, neste trabalho, caracterizações da componente espectral absolutamente contínua de multiplicidade arbitrária associada ao operador de Jacobi discreto a valores matriciais definido em $l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^l)$. Os resultados apresentados são, essencialmente, extensões, pois tratam-se de caracterizações já conhecidas, em alguns casos, para operadores de Schrödinger a valores matriciais e, em outros, para operadores de Jacobi escalares.

O primeiro resultado que obtivemos é uma extensão, para o caso matricial, da desigualdade de Jitomirskaya-Last ([Jitomirskaya & Last \[1999\]](#)), que relaciona o comportamento assintótico de soluções da equação de autovalores com a medida espectral do operador.

Tais caracterizações são baseadas na chamada Teoria de Kotani ([Kotani & Simon \[1988\]](#)), desenvolvida para operadores ergódicos, e nos resultados obtidos por Last e Simon ([Last & Simon \[1999\]](#)), que relacionam o comportamento assintótico da média de Cesàro das normas das matrizes de transferência do cociclo associado ao operador ao seu tipo espectral.

Especificamente, demonstramos para operadores ergódicos que para um inteiro $1 \leq r \leq l$, a componente absolutamente contínua de multiplicidade $2r$ do operador está associada ao conjunto das energias para as quais os $2r$ menores expoentes de Lyapunov (definidos a partir do cociclo) se anulam.

Também demonstramos que esta mesma componente absolutamente contínua de multiplicidade $2r$ está associada ao comportamento assintótico, em $\pm\infty$, da média de Cesàro do r -ésimo menor valor singular de matrizes dadas por soluções da equação de autovalores associada ao operador. Tal resultado nos permite demonstrar a constância dessas componentes espectrais associadas a operadores

dinamicamente definidos por aplicações minimais. Ainda nesse contexto, demonstramos uma versão mais fraca da chamada dicotomia exponencial ([Haro & Puig \[2013\]](#), [Johnson \[1986\]](#), [Marx \[2014\]](#)). A saber, demonstramos que o conjunto resolvente associado a um operador minimal coincide com o conjunto de pontos nos quais o cociclo satisfaz uma condição de crescimento exponencial uniforme.

Por fim, apresentamos também a Teoria de Kotani para operadores de Dirac ergódicos, um caso particular de operadores de Jacobi a valores matriciais singulares.

Palavras-chave: Operador de Jacobi a valores matriciais, Teoria de Kotani, Dicotomia Exponencial, Operador de Dirac.

Abstract

We discuss in this work some characterizations of the absolutely continuous spectrum of arbitrary multiplicity of discrete matrix-valued Jacobi operators on $l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^l)$. Essentially, these results extend some well-known characterizations for scalar Schrödinger operators.

The first result obtained is an extension of the Jitomirskaya-Last inequality ([Jitomirskaya & Last \[1999\]](#)), which relates the asymptotic behavior of the solutions to the eigenvalue equation to the spectral measures.

Such characterizations are extensions of Kotani's theory ([Kotani & Simon \[1988\]](#)) for ergodic operators, and of Last-Simon results ([Last & Simon \[1999\]](#)), which relate the absolutely continuous spectrum to the asymptotic behavior of the Cesàro mean of the transfer matrices' norms.

Especially, we prove (as in [Kotani & Simon \[1988\]](#)) that for an integer $1 \leq r \leq l$, the absolutely continuous spectrum of multiplicity $2r$ is related to the energies for which the $2r$ smaller Lyapunov exponents are 0.

We also prove that the absolutely continuous spectrum of multiplicity $2r$ is also related to the asymptotic behavior, in $\pm\infty$, of the Cesàro mean of the singular values of some matrices given by solutions to the eigenvalue equation. This result allows us to prove the constancy of these spectral components for minimal Jacobi operators. In this setting, we give a proof of a weaker version of the exponential dichotomy ([Haro & Puig \[2013\]](#), [Johnson \[1986\]](#), [Marx \[2014\]](#)). Namely, we prove that the resolvent set is the set of energies for which the operator's cocycle satisfies a uniformly exponential growth condition.

We also discuss Kotani's theory for ergodic Dirac operators, which can be seen as a particular class of singular matrix-valued Jacobi operators.

Keywords: Matrix-valued Jacobi operator, Kotani's theory, Exponential Dichotomy, Dirac operator.

Lista de Símbolos

- \hbar – Constante de Planck.
- Δ – Operador laplaciano.
- κ – Medida de Lebesgue em \mathbb{R} .
- \mathbb{Z}_+ – Conjunto dos inteiros não negativos.
- \mathbb{C}_+ – Semi-plano superior do plano complexo.
- $M(l, \mathbb{K})$ – Álgebra de matrizes $l \times l$ no corpo \mathbb{K} .
- $GL(l, \mathbb{K})$ – o grupo das matrizes de $M(l, \mathbb{K})$ com determinante não-nulo.
- $O(l, \mathbb{K})$ – grupo ortogonal em $M(l, \mathbb{K})$.
- $SO(l)$ – grupo ortogonal especial em $M(l, \mathbb{K})$.
- $SL(l)$ – grupo ortogonal especial em $M(l, \mathbb{R})$.
- $U(l)$ – grupo unitário em $M(l, \mathbb{C})$.
- $SU(l)$ – grupo unitário especial em $M(l, \mathbb{C})$.
- $SP(l, \mathbb{C})$ – grupo simplético em $M(l, \mathbb{C})$.

- $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$ – Espaço das sequências que se anulam a partir de algum inteiro.
- $s_l[A]$ – l -ésimo maior valor singular da matriz A .
- γ – Expoente de Lyapunov.
- k – Densidade integrada de estados.
- \mathbb{I} – Aplicação identidade.
- \mathbb{J} – Matriz simplética padrão.
- A_n – Matrizes de transferência de um cociclo.
- χ_A – Função característica do conjunto A .
- $\mu_{\mathbf{u}}$ – Medida espectral associada ao vetor \mathbf{u} .
- μ^{pp} – Componente puramente pontual da medida μ .
- μ^{ac} – Componente absolutamente contínua da medida μ .
- μ^{sc} – Componente singular contínua da medida μ .
- \mathcal{H}^{pp} – Subespaço puramente pontual.
- \mathcal{H}^{sc} – Subespaço singular contínuo.
- \mathcal{H}^{ac} – Subespaço absolutamente contínuo.
- \bar{B}^{ess} – Fecho essencial do conjunto B .
- $\sigma_{pp}(H)$ – Componente puramente pontual do espectro do operador H .

- $\sigma_{ac}(H)$ – Componente absolutamente contínua do espectro do operador H .
- $\sigma_{sc}(H)$ – Componente singular contínua do espectro do operador H .
- Σ_{pp} – Suporte minimal para a componente puramente pontual do espectro.
- Σ_{ac} – Suporte minimal para a componente absolutamente contínua do espectro.
- Σ_{sc} – Suporte minimal para a componente singular contínua do espectro.
- P_{pp}^H – Projção espectral da componente puramente pontual do operador H .
- P_{ac}^H – Projção espectral da componente absolutamente contínua do operador H .
- P_{sc}^H – Projção espectral da componente singular contínua do operador H .
- \mathbb{S}^l – Esfera de dimensão l .
- $c_{00}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^l)$ – Sequências em $(\mathbb{C}^l)^{\mathbb{Z}}$ que se anulam a menos de um conjunto finito.
- $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^l)$ – Funções quadrado-somáveis de \mathbb{R} em \mathbb{C}^l .

Lista de Figuras

1.1	Precedência das seções.	12
2.1	Modelo de cristal harmônico unidimensional.	15
2.2	Operador em uma faixa em \mathbb{Z}^3	17

Lista de Tabelas

Sumário

Agradecimentos	ix
Resumo	xiii
Abstract	xv
Lista de Símbolos	xviii
Lista de Figuras	xxi
Lista de Tabelas	xxiii
1 Introdução	1
1.1 O Contexto	1
1.2 Os Problemas Abordados	5
1.3 Resultados	7
1.4 Organização do Texto	10
2 O Operador de Jacobi em $l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^l)$	13
2.1 Operador de Jacobi	13
2.2 Abordagem Dinâmica	18
2.3 Fórmula de Green	20
2.4 Extensões Auto-adjuntas	26
3 O Operador Resolvente	37
3.1 Função M de Weyl-Titchmarsh	38

3.2	O Núcleo Integral do Operador Resolvente	40
3.3	Suportes Espectrais	45
4	Comportamento Assintótico de Auto-soluções	51
5	Critérios para Componentes Espectrais	67
5.1	Caracterização da Componente Absolutamente Contínua de Multi- plicidade Arbitrária	69
5.2	Componente Absolutamente Contínua de Multiplicidade Total . . .	79
6	Operadores Ergódicos	89
6.1	O Conceito de Operador Dinamicamente Definido	89
6.2	Expoentes de Lyapunov do Operador	94
6.3	Fórmula de Thouless	97
6.4	Teorema de Kotani	103
6.5	Teorema de Ishii-Pastur	116
7	Operadores Minimais	119
7.1	Constância do Espectro Absolutamente Contínuo	119
7.2	Cociclos e Crescimento Exponencial Uniforme	127
7.3	Dicotomia Exponencial	131
8	O Operador de Dirac em $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$	137
8.1	Dedução da Equação de Dirac	137
8.2	O Cociclo Associado ao Operador de Dirac	139
8.3	Função de Green do Operador de Dirac	141
8.4	Classificação do Espectro	144
9	Considerações Finais	157
9.1	Regularidade do Operador	157
9.2	Auto-soluções e Propriedades Espectrais	158
9.3	Caracterização e Invariância das Componentes Espectrais	159
	Referências Bibliográficas	161

Apêndice A	Análise Complexa	169
Apêndice B	Teoria Espectral	171
B.1	Operadores Auto-adjuntos	171
B.2	Decomposição Espectral	174
Apêndice C	Matrizes e Valores Singulares	179
Apêndice D	Medidas a Valores Matriciais	185
Apêndice E	Sistemas Dinâmicos e Cociclos	191
Apêndice F	Teoria Ergódica	193

Capítulo 1

Introdução

1.1 O Contexto

A equação diferencial que descreve a dinâmica de partículas no âmbito da mecânica quântica é dada por

$$H\mathbf{u} = i\hbar\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

em que H é um operador auto-adjunto, chamado Hamiltoniano, definido em um espaço de Hilbert. Matematicamente, esta relação define o que se denomina um grupo unitário de evolução. Tal estrutura implica que se um estado inicial \mathbf{u}_0 tem uma energia E bem definida, preservada pelo operador H , então sua evolução no tempo, $\mathbf{u}(t, x)$, é expressa por

$$\mathbf{u}(t, x) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\mathbf{u}_0(x), \quad (1.2)$$

que é a solução da Equação 1.1. Tais estados, chamados estados estacionários, são justamente as auto-soluções de H e verificam $H\mathbf{u} = E\mathbf{u}$ para algum $E \in \mathbb{R}$. Em particular, se um estado \mathbf{u} pode ser escrito como combinação linear de estados estacionários, isto é, $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{u}_k$, então

$$\mathbf{u}(t, x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} \mathbf{u}_k(x).$$

Este fato desperta interesse sobre os estados estacionários; mais geralmente, há interesse em se estudar o espectro do operador H , que intuitivamente corresponderia à generalização das energias associadas a estados estacionários, denominadas autovalores¹.

Nos casos mais frequentes, o operador H está associado à energia do momento linear $\frac{1}{2m}(p_{x_1}^2 + p_{x_2}^2 + p_{x_3}^2)$, e a equação da dinâmica se torna

$$i\hbar \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \mathbf{u} + V \mathbf{u}, \quad (1.3)$$

onde m denota a massa da partícula, $V(x_1, x_2, x_3)$ é uma função real, que será chamada potencial, e Δ é o laplaciano:

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_3^2},$$

nas coordenadas euclidianas tridimensionais x_1, x_2, x_3 em um domínio adequado de \mathbb{R}^3 . A Equação 1.3 é a forma original da Equação 1.1 proposta em Schrödinger [1926], que descreve com sucesso diversos fenômenos das partículas quânticas.

A complexidade do potencial pode conduzir a grandes dificuldades na resolução das equações de Schrödinger e da equação de estados estacionários. Por outro lado, o estudo do espectro destes operadores sempre despertou grande interesse, principalmente graças às suas consequências físicas; em particular, destaca-se a distinção entre espectro discreto e espectro contínuo (vide relação (B.2)).

Se H é um operador auto-adjunto limitado em um espaço de Hilbert \mathcal{H} , é possível associar cada vetor \mathbf{u} a uma medida $\mu_{\mathbf{u}}$ suportada no espectro $\sigma(H)$ do operador H e expressa pela relação (vide relação (B.1))

$$\langle H(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = \int_{\mathbb{R}} s d\mu_{\mathbf{u}}(s).$$

Para fins de compreensão, considere o caso particular em que $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Se \mathbf{u}_0 é uma auto-solução associada ao autovalor E , então $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R})$, e portanto a função $\mathbf{u}_0(x)$ decai em $\pm\infty$. Logo, para todo t , como $\left| e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \right| = 1$, a evolução temporal da auto-solução, dada por 1.2, em um tempo t arbitrário, também

¹Landau & Lifshitz [1965], página 28.

decai em $\pm\infty$. Podemos interpretar este comportamento da função do seguinte modo: quanto mais afastado da origem for um conjunto, menor a probabilidade da partícula se encontrar neste conjunto, independentemente do tempo.

Imagine, agora, que \mathbf{u} seja uma função no subespaço contínuo (Definição B.15). Neste caso, sua evolução no instante t poderia ser escrita como

$$\mathbf{u}(t, x) = \int_{\sigma(H)} a(E) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \mathbf{u}_E(x) dE.$$

Note que, para x e t fixados,

$$|\mathbf{u}(t, x)|^2 = \int_{\sigma(H)} \int_{\sigma(H)} a(E) a^*(E') e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E')t} \mathbf{u}_E(x) \mathbf{u}_{E'}^*(x) dE dE';$$

assim, ao tomarmos a média de $|\mathbf{u}(t, x)|^2$ em um intervalo de tempo $[0, T]$, o valor esperado dos fatores $e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E')t}$ tende a se anular no limite $T \rightarrow \infty$, o que significa que a probabilidade de se encontrar a partícula em uma região finita tende a zero (Landau & Lifshitz [1965], página 30).

Podemos ir mais além e decompor a medida espectral $\mu_{\mathbf{u}}$ em três componentes²:

$$\mu_{\mathbf{u}} = \mu_{\mathbf{u}}^{pp} + \mu_{\mathbf{u}}^{ac} + \mu_{\mathbf{u}}^{sc}.$$

A componente puramente pontual $\mu_{\mathbf{u}}^{pp}$ tem suporte em um conjunto discreto. A componente absolutamente contínua $\mu_{\mathbf{u}}^{ac}$, por sua vez, é uma medida absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. A componente singular contínua $\mu_{\mathbf{u}}^{sc}$ está suportada em um conjunto de medida de Lebesgue nula e atribui peso nulo a qualquer conjunto enumerável.

Se definirmos os conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{pp} &:= \{\mathbf{u} \in \mathcal{H}; \mu_{\mathbf{u}} = \mu_{\mathbf{u}}^{pp}\}, \\ \mathcal{H}^{ac} &:= \{\mathbf{u} \in \mathcal{H}; \mu_{\mathbf{u}} = \mu_{\mathbf{u}}^{ac}\}, \\ \mathcal{H}^{sc} &:= \{\mathbf{u} \in \mathcal{H}; \mu_{\mathbf{u}} = \mu_{\mathbf{u}}^{sc}\}, \end{aligned}$$

²Veja a Seção B.2 do Apêndice.

temos uma decomposição³

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{pp} \oplus \mathcal{H}^{ac} \oplus \mathcal{H}^{sc}.$$

Uma vez que as restrições $H|_{\mathcal{H}^{pp}}, H|_{\mathcal{H}^{ac}}, H|_{\mathcal{H}^{sc}}$ são bem definidas, faz sentido considerar os conjuntos

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}(H) &:= \sigma(H|_{\mathcal{H}^{pp}}), \\ \sigma_{ac}(H) &:= \sigma(H|_{\mathcal{H}^{ac}}), \\ \sigma_{sc}(H) &:= \sigma(H|_{\mathcal{H}^{sc}}). \end{aligned}$$

De tais conjuntos resulta a decomposição $\sigma(H) = \sigma_{pp}(H) \cup \sigma_{ac}(H) \cup \sigma_{sc}(H)$. Dizemos que H tem espectro puramente pontual se $\sigma_{ac}(H) = \emptyset$ e $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$, H tem espectro puramente absolutamente contínuo se $\sigma_{pp}(H) = \emptyset$ e $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$, e H tem espectro puramente singular contínuo se $\sigma_{pp}(H) = \emptyset$ e $\sigma_{ac}(H) = \emptyset$.

Conforme a exposição no Capítulo 13 de [de Oliveira \[2009\]](#), esta decomposição se relaciona com uma interessante classificação do comportamento assintótico da evolução dos elementos de \mathcal{H} . Há, por exemplo, duas caracterizações dos vetores do subespaço \mathcal{H}^{pp} . Um vetor \mathbf{u} pertence a \mathcal{H}^{pp} se, e somente, sua órbita relativa ao grupo unitário, isto é,

$$\mathcal{O}(\mathbf{u}) := \{e^{-itH}\mathbf{u}, t \in \mathbb{R}\},$$

possui fecho compacto em \mathcal{H} . Em particular, observe que se \mathbf{u} é estacionário, sua órbita é periódica (Seção 13.2 de [de Oliveira \[2009\]](#)).

Dizemos que a trajetória do vetor é quase periódica se dado $\epsilon > 0$, existe L tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$, existe τ com $s \leq \tau \leq s + L$ que verifica, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\|e^{-i(t+\tau)H}\mathbf{u} - e^{-itH}\mathbf{u}\| < \epsilon.$$

Temos, também, uma segunda identificação de \mathcal{H}^{pp} com os vetores cujas trajetórias são quase-periódicas (Seção 13.2 de [de Oliveira \[2009\]](#)).

³O operador H deve verificar algumas propriedades adicionais para que esta decomposição esteja bem definida. Vide a página 313 de [de Oliveira \[2009\]](#) para detalhes.

Por outro lado, se \mathbf{u} pertence a \mathcal{H}^{ac} , então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\langle e^{-itH} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 = 0$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$ (Seção 13.4 de [de Oliveira \[2009\]](#)). Percebe-se, então, que enquanto a componente puramente pontual está associada a trajetórias que tendem a se concentrar em subespaços de dimensão finita, a componente absolutamente contínua se relaciona com vetores cuja trajetória converge fracamente para o vetor nulo.

1.2 Os Problemas Abordados

A análise das componentes espectrais é um problema de fundamental importância no estudo de operadores em espaços de Hilbert, e caracterizar os conjuntos $\sigma_{pp}(H)$, $\sigma_{ac}(H)$, $\sigma_{sc}(H)$ é um dos objetivos centrais da teoria espectral de operadores auto-adjuntos. Em particular, é conveniente estabelecer critérios para que, a partir da expressão do operador, se possam determinar propriedades do espectro. Neste sentido, pretendemos estender para o contexto dos operadores de Jacobi a valores matriciais alguns resultados já estabelecidos para operadores de Schrödinger, que são o nosso ponto de partida.

No caso escalar, o operador de Jacobi é dado

$$(Hu)_n := a_n u_{n+1} + a_{n-1} u_{n-1} + v_n u_n, \quad (1.4)$$

para $u \in l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C})$, sendo $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ seqüências bilaterais de números complexos. Pode-se também definir a restrição H^+ deste operador a $l^2(\mathbb{Z}_+; \mathbb{C})$, com uma condição de contorno adequada na origem (veja, por exemplo, página 16 de [Teschl \[2000\]](#)). A maneira mais simples de defini-lo é pela lei

$$(H^+u)_n := \begin{cases} a_n u_{n+1} + v_n u_n, & \text{se } n = 0, \\ a_n u_{n+1} + a_{n-1} u_{n-1} + v_n u_n, & \text{se } n > 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

que corresponde ao chamado operador de Dirichlet.

O operador de Schrödinger, por sua vez, é expresso por

$$(Hu)_n := u_{n+1} + u_{n-1} + v_n u_n. \quad (1.6)$$

Trata-se, portanto, de um caso particular do operador de Jacobi, a saber, com $a_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Definidos em $l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C})$, estes operadores são denominados discretos; há também seus equivalentes contínuos, definidos em um espaço de Hilbert apropriado, e expressos respectivamente por

$$(Hu)(x) := -\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{d}{dx} \right) u(x) + v(x)u(x), \quad (1.7)$$

e

$$(Hu)(x) := -\frac{d^2}{dx^2} u(x) + v(x)u(x). \quad (1.8)$$

Apesar de em muitos aspectos o estudo do operador no caso discreto produzir resultados equivalentes ao caso contínuo, consideraremos apenas o primeiro. Especificamente, estudaremos o operador como definido por (1.4), mas "assumindo" valores matriciais, denominado operador de Jacobi a valores matriciais, e definido pela lei

$$[H\mathbf{u}]_n := D_{n-1}^* \mathbf{u}_{n-1} + D_n \mathbf{u}_{n+1} + V_n \mathbf{u}_n, \quad (1.9)$$

sendo $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma sequência arbitrária de matrizes não-nulas em $M(l, \mathbb{R})$, $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de matrizes auto-adjuntas em $M(l, \mathbb{R})$ e $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de vetores em \mathbb{C}^l . Também no caso do operador de Schrödinger, denominamos a generalização de (1.6) por operador de Schrödinger a valores matriciais:

$$[H\mathbf{u}]_n := \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{u}_{n+1} + V_n \mathbf{u}_n. \quad (1.10)$$

Algumas motivações para o estudo das propriedades espectrais da classe de operadores da forma (1.9) serão apresentadas na Seção 2.1.

O primeiro problema que discutiremos é motivado pela chamada teoria de subordinação, que relaciona a decomposição espectral do operador com o comportamento assintótico das soluções da equação de autovalores. Com base nesta teoria, Last e Simon [Last & Simon \[1999\]](#) estabeleceram uma caracterização da

componente absolutamente contínua do espectro do operador (1.4).

O segundo problema, dentro da chamada Teoria de Kotani, se refere a operadores dinamicamente definidos, ou seja, operadores do tipo (1.9) em que as sequências $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ são funções matriciais avaliadas ao longo de órbitas de sistemas dinâmicos. A expressão mais geral deste resultado, para operadores da forma (1.10), é apresentada em Kotani & Simon [1988]. A saber, trata-se de um resultado de caracterização da componente absolutamente contínua do espectro. Estendemos, portanto, esta teoria dos operadores da forma (1.10) para operadores da forma (1.9).

Demonstraremos, no contexto de operadores dinamicamente definidos por aplicações minimais, uma versão mais fraca da chamada dicotomia exponencial. Para estes operadores, o conjunto resolvente consiste no conjunto de pontos nos quais um sistema dinâmico (a saber, um cociclo) definido a partir do operador, satisfaz uma propriedade de crescimento exponencial uniforme. Tal caracterização foi demonstrada por Johnson em Johnson [1986], para operadores da forma (1.6), e por Haro e Puig em Haro & Puig [2013], para operadores da forma (1.9) com as matrizes D_n constantes.

As dificuldades que se apresentam para as generalizações que pretendemos têm origem basicamente em dois fatores: o fato do problema ser transposto do caso escalar para o caso matricial faz necessária a utilização de novas ferramentas relacionadas à álgebra matricial (tais ferramentas permitem contornar, por exemplo, a dificuldade inerente à não-comutatividade do produto matricial); o segundo fator é a própria complexidade estrutural das funções matriciais que definem o operador, o que muitas vezes exige um cálculo mais cuidadoso envolvendo os valores singulares das mesmas. Esta característica de complexidade estrutural dos coeficientes é a principal diferença técnica entre operadores do Jacobi e de Schrödinger.

1.3 Resultados

Consideraremos em nosso estudo, portanto, operadores de Jacobi a valores matriciais da forma (1.9) para os quais as matrizes D_n sejam reais e simétricas.

O primeiro resultado obtido, no Capítulo 4, é uma extensão da desigualdade de Jitomirskaya-Last (Jitomirskaya & Last [1999]), do caso escalar para operado-

res de Jacobi a valores matriciais em $l^2(\mathbb{Z}_+; \mathbb{C}^l)$ (Proposição 4.3). A desigualdade estabelece uma relação direta entre as medidas espectrais e as auto-soluções, especificamente as chamadas soluções de Neumann e Dirichlet, ψ, ϕ , respectivamente, que são sequências de matrizes em $M(l, \mathbb{C})$ que satisfazem a equação de autovalores com as condições iniciais $\psi_0 = \mathbb{I}, \psi_1 = 0$ e $\phi_0 = 0, \phi_1 = \mathbb{I}$. Considerando as soluções de Neumann e Dirichlet em $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$k_1 \frac{\|\psi\|_{L(y)}}{\|\phi\|_{L(y)}} \leq \|M(x + iy)\| \leq k_2 \frac{\|\psi\|_{L(y)}}{\|\phi\|_{L(y)}} \frac{\|\phi\|_{L(y)}^2}{s_l[\phi]_{L(y)}^2},$$

onde k_1, k_2 são constantes uniformes em $y \in \mathbb{R}$, $\|\psi\|_{L(y)}$ é uma norma truncada no ponto $L(y)$, e a matriz M , chamada de matriz de Weyl-Titchmarsh, é uma parametrização que fornece as medidas espectrais pelo limite

$$\lim_{y \downarrow 0} \Im[M(x + iy)],$$

conforme demonstraremos na Seção 3.3. Partimos da mesma estratégia utilizada em Jitomirskaya & Last [1999], uma estimativa a partir de uma fórmula de variação de parâmetros. Mas no caso matricial temos de comparar o crescimento de um número maior soluções, o que resulta em um termo adicional na desigualdade em relação ao caso escalar, o termo $\frac{\|\phi\|_{L(y)}^2}{s_l[\phi]_{L(y)}^2}$, que compara o crescimento de soluções com a mesma condição inicial.

O segundo resultado obtido é uma generalização da caracterização estabelecida em Last & Simon [1999] para a componente absolutamente contínua do operador de Jacobi escalar. Especificamente, demonstramos na Seção 5.1 (teoremas 5.3 e 5.6) que, para $1 \leq r \leq l$, o fecho essencial (Definição D.11) do conjunto $\mathcal{S}_r \setminus \mathcal{S}_{r+1}$, com

$$\mathcal{S}_r := \{x \in \mathbb{R}; \liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L [s_{l-r+1}^2[\phi_n(x)] + s_{l-r+1}^2[\psi_n(x)]] < \infty\},$$

coincide com o espectro absolutamente contínuo de multiplicidade r do operador (1.9) restrito a \mathbb{Z}_+ e que satisfaz uma dada condição de contorno em $k = 0$ (vide Seção 3.3), onde $s_k[\phi]$ é o k -ésimo valor singular da matriz ϕ e, novamente, ψ e ϕ são

sequências de matrizes formadas por auto-soluções. Além disso, para a componente absolutamente contínua de multiplicidade total, demonstramos (teoremas 5.14 e 5.15) que

$$\mathcal{S} := \left\{ x \in \mathbb{R}; \liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=0}^L \|A_n(x)\|^2 < \infty \right\}$$

é um suporte minimal da componente absolutamente contínua de multiplicidade l da medida espectral do mesmo operador, em que as matrizes $A_n(x)$, denominadas matrizes de transferência, geram recursivamente as soluções da equação de autovalores em x e podem ser obtidas diretamente da expressão do operador (vide (2.6)). Desse modo, $\mu_{\mathbf{u}}^{pp}(\mathcal{S}) = 0$ e $\mu_{\mathbf{u}}^{sc}(\mathcal{S}) = 0$ para qualquer vetor \mathbf{u} pertencente ao domínio do referido operador. A demonstração do resultado para o suporte \mathcal{S} é análoga à demonstração exibida em Last & Simon [1999], para o caso escalar, a partir da desigualdade de Jitomirskaya-Last. A dificuldade adicional é cotar o novo termo que aparece na desigualdade para o caso matricial.

Porém, não conseguimos aplicar a mesma linha de demonstração da caracterização do suporte \mathcal{S} para as componentes absolutamente contínuas de multiplicidade menor. A solução que encontramos para demonstrar os resultados referentes aos suportes \mathcal{S}_r parte de uma caracterização do espectro do operador em termos do decaimento de soluções da equação de autovalores, explicitamente, o Lema 5.1, que adaptamos de Teschl [2000].

O terceiro resultado, demonstrado no Capítulo 6, é o chamado Teorema de Kotani, demonstrado para operadores de Schrödinger ergódicos (isto é, operadores dinamicamente definidos por uma aplicação ergódica) a valores matriciais por Simon e Kotani em Kotani & Simon [1988]. Podemos definir, a partir das matrizes do operador de Jacobi, os expoentes γ , denominados expoentes de Lyapunov e definidos na Seção 6.2. Tais expoentes são expressos, através das matrizes de transferência, por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (s_j[A_n(\omega)]) = \gamma_j^\omega,$$

identidade esta satisfeita para quase todo ω no espaço de medida (Ω, ν) , no qual está definida a aplicação ergódica. Demonstraremos (Teorema 6.18) que o fecho

essencial do conjunto

$$\mathcal{Z}_r := \{x \in \mathbb{R}; \text{exatamente } 2r \text{ expoentes } \gamma \text{ se anulam}\}$$

coincide com o espectro absolutamente contínuo de multiplicidade r do operador. Na realidade, o Teorema de Kotani corresponde apenas à inclusão $\overline{\mathcal{Z}_r}^{ess} \subseteq \sigma_{ac,r}$; a inclusão $\sigma_{ac,r} \subseteq \overline{\mathcal{Z}_r}^{ess}$, que também demonstramos aqui, é denominada Teorema de Ishii-Pastur (Teorema 6.20). Seguimos a sequência da demonstração de [Kotani & Simon \[1988\]](#), a dificuldade adicional, em nosso caso, é considerar a influência das matrizes D_n de (1.9) nas estimativas. Optamos por basear as estimativas na matriz $D_0 \mathfrak{S}[M] D_0$, conjugada da parte imaginária da matriz de Weyl-Titchmarsh, para, posteriormente, relacionar as estimativas com os valores singulares da matriz $\lim_{y \downarrow 0} \mathfrak{S}[M(x + iy)]$, por meio da Lei da Inércia de Sylvester (Proposição C.6).

No capítulo 7, também no contexto dos operadores dinamicamente definidos, mas desta vez por aplicações minimais, demonstramos uma versão mais fraca da chamada dicotomia exponencial (proposições 7.12 e 7.13); a saber, o conjunto resolvente do operador corresponde aos valores de energia para os quais o ciclo formado pelas matrizes de transferência satisfaz uma condição de crescimento uniforme. A versão mais geral desta caracterização foi demonstrada por Haro e Puig, em [Haro & Puig \[2013\]](#), para operadores de Jacobi a valores matriciais com coeficientes constantes; aqui, demonstramos o resultado para o caso de coeficientes variáveis, adaptando a demonstração de [Zhang \[2018\]](#) para cociclos $SO(2)$ associados ao operador de Schrödinger.

Por fim, no Capítulo 8, demonstramos o Teorema de Kotani para o chamado operador de Dirac ergódico. A demonstração do resultado não é uma adaptação imediata dos resultados do Capítulo 6, já que o operador de Dirac é um exemplo de operador de Jacobi singular, ou seja, cujas matrizes $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ em (1.9) não são invertíveis.

1.4 Organização do Texto

Apresentamos, na Seção 2.1, a definição e algumas motivações para o estudo dos operadores de Jacobi a valores matriciais. Na Seção 2.2, definimos um sistema

dinâmico associado ao operador de Jacobi por meio das respectivas matrizes de transferência. Na Seção 2.3, demonstramos a chamada fórmula de Green (Proposição 2.3), que nos permite estudar o comportamento assintótico das auto-soluções. Por fim, na Seção 2.4, discutimos o problema de determinação das extensões auto-adjuntas do operador.

No Capítulo 3, obtemos a chamada matriz de Green, isto é, o núcleo integral do operador resolvente, a qual nos permite, por meio do Teorema Espectral, caracterizar a medida espectral. Na Seção 3.1, apresentamos uma parametrização das auto-soluções que será associada à função de Green, introduzida na Seção 3.2. A partir desta parametrização podemos, como discutido na Seção 3.3, determinar um suporte minimal para a componente absolutamente contínua da medida. Discutimos ainda como o espectro absolutamente contínuo é preservado por perturbações de posto finito realizadas sobre o operador.

Abordamos a relação entre o comportamento assintótico de auto-soluções e medidas espectrais no Capítulo 4. Buscamos generalizar, para o contexto de operadores de Jacobi a valores matriciais, a desigualdade de Jitomirskaya-Last (Proposição 4.3).

No Capítulo 5, apresentamos um dos resultados centrais do trabalho. Na Seção 5.1, obtemos uma possível generalização, para operadores de Jacobi a valores matriciais, da caracterização do espectro absolutamente contínuo de multiplicidade arbitrária, a partir do comportamento assintótico das soluções da equação de autovalores (Teoremas 5.3 e 5.6). Na Seção 5.2, partindo da desigualdade de Jitomirskaya-Last obtida no Capítulo 4, determinamos através dos Teoremas 5.14 e 5.15 um suporte minimal para a componente absolutamente contínua de multiplicidade total.

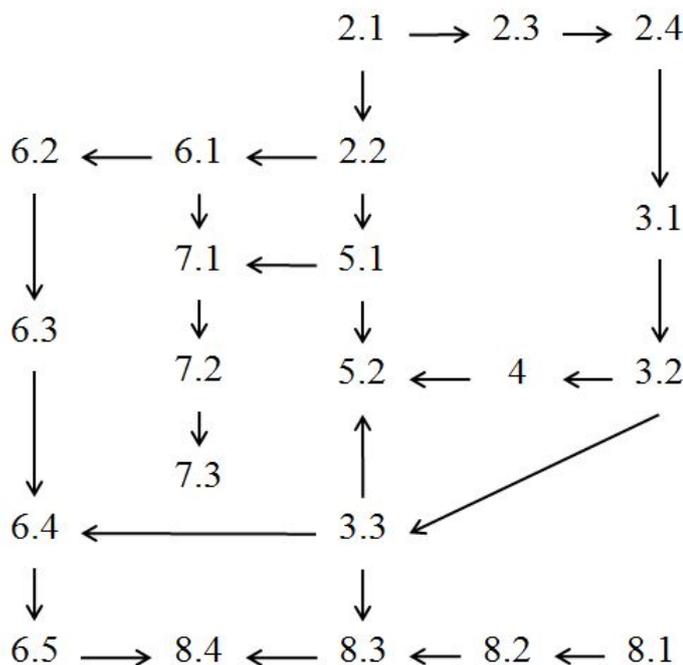
A Teoria de Kotani é o assunto central do Capítulo 6. Todos os resultados desse capítulo se referem a operadores dinamicamente definidos a partir de sistemas ergódicos, os quais serão definidos na Seção 6.1. Na Seção 6.2, definimos os expoentes de Lyapunov associados ao operador e , na Seção 6.3, demonstramos a Fórmula de Thouless (Teorema 6.9), que relaciona esses expoentes à chamada densidade integrada de estados do operador. Apresentamos uma generalização do Teorema de Kotani (Teorema 6.18) na Seção 6.4 e a sua recíproca (Teorema 6.20), conhecida como Teorema de Ishii-Pastur, na Seção 6.5.

Discutimos, no Capítulo 7, operadores dinamicamente definidos a partir de transformações minimais. Na Seção 7.1, demonstramos a constância da componente absolutamente contínua (Teorema 7.6) a partir dos resultados obtidos no Capítulo 5. Caracterizamos os cociclos que satisfazem uma condição de crescimento uniforme na Seção 7.2 e demonstramos uma versão mais fraca de dicotomia exponencial (Proposições 7.12 e 7.13), que representa uma caracterização do espectro do operador, na Seção 7.3.

No Capítulo 8, aplicamos alguns dos resultados anteriores ao operador de Dirac, que será definido na Seção 8.1. Apresentamos o cociclo definido a partir do operador de Dirac ergódico na Seção 8.2, e na Seção 8.3, as funções de Green e de Weyl-Titchmarsh. Na Seção 8.4, apresentamos os resultados que caracterizam a Teoria de Kotani do operador de Dirac.

A precedência ideal das seções é como o indicado na Figura 1.1.

Figura 1.1. Precedência das seções.



Capítulo 2

O Operador de Jacobi em $l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^l)$

2.1 Operador de Jacobi

Nesta seção, apresentamos a definição formal do operador de Jacobi¹ a valores matriciais e discutimos algumas motivações para o estudo de tal classe de operadores.

Definição 2.1 (Operador de Jacobi a Valores Matriciais). *Dado $l \in \mathbb{N}$, um operador de Jacobi a valores matriciais é um operador simétrico em $(\mathbb{C}^l)^{\mathbb{Z}}$ definido pela lei*

$$[H\mathbf{u}]_n := D_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + D_n\mathbf{u}_{n+1} + V_n\mathbf{u}_n, \quad (2.1)$$

onde $D_n, V_n \in S(l, \mathbb{R})$.

Na realidade, a definição² usual de operador de Jacobi a valores matriciais não exige que as matrizes D_n sejam simétricas; entretanto, para os problemas que consideramos, esta é uma exigência necessária (vide, por exemplo, a Proposição 2.3).

¹Há uma pequena confusão quanto à nomenclatura de operadores de Jacobi. Por exemplo, em [Kotani & Simon \[1988\]](#), como contraponto ao caso contínuo em $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^l)$, os autores denominam por matrizes de Jacobi o que, em [Marx & Jitomirskaya \[2017\]](#), é denominado operador de Schrödinger a valores matriciais. Adotamos a definição de [Marx & Jitomirskaya \[2017\]](#) que condiz, por exemplo, com a definição de [Stone \[1932\]](#), páginas 86, 530.

²Como, por exemplo, a definição apresentada em [Marx & Jitomirskaya \[2017\]](#), onde há uma revisão acerca dos resultados conhecidos para esses operadores.

O operador H pode ser 'representado' por uma matriz bloco-tridiagonal infinita:

$$H\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & V_{-1} & D_{-1} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & D_{-1} & V_0 & D_0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & D_0 & V_1 & D_1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & D_1 & V_2 & \dots & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{u}_{-1} \\ \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Em muitas situações, é conveniente considerar a restrição H^+ do operador a \mathbb{Z}_+ .

Definição 2.2 (Operador de Jacobi a Valores Matriciais em \mathbb{Z}_+). *Dado H como na Definição 2.1, a restrição de H a \mathbb{Z}_+ é o operador em $(\mathbb{C}^l)^{\mathbb{Z}_+}$ definido pela lei*

$$[H^+\mathbf{u}]_n := \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se } n = 0, \\ D_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + D_n\mathbf{u}_{n+1} + V_n\mathbf{u}_n, & \text{se } n > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

De maneira inteiramente análoga, podemos definir a restrição H^- a \mathbb{Z}_- . O operador H^+ também pode ser representado em forma matricial como

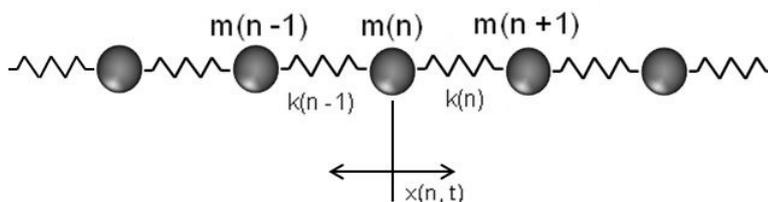
$$H^+\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ D_0 & V_1 & D_1 & 0 & \dots \\ 0 & D_1 & V_2 & D_2 & \dots \\ 0 & 0 & D_2 & V_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Há diversas situações em que o operador da Definição 2.1 está associado a um problema físico. Inicialmente, considere³ o caso escalar, ou seja, $l = 1$. Um dos modelos utilizados na Física Clássica para o comportamento de partículas em estado sólido é o chamado cristal harmônico. No caso unidimensional, cada partícula pode interagir apenas com seus dois primeiros vizinhos e a interação é

³Confira [Teschl \[2000\]](#), página 22.

análoga a que ocorre com um oscilador harmônico. Então, a força que age sobre a partícula que ocupa a posição n dependerá de sua massa, $m(n)$, dos deslocamentos em relação à posição de equilíbrio das partículas vizinhas, denotados por $x(n-1, t)$ e $x(n+1, t)$, bem como das respectivas constantes harmônicas $k(n)$ e $k(n-1)$, conforme indicado na figura 2.1.

Figura 2.1. Modelo de cristal harmônico unidimensional.



Pela segunda Lei de Newton, para a n -ésima partícula, temos a equação

$$m(n) \frac{d^2}{dt^2} x(n, t) = k(n-1)(x(n-1, t) - x(n, t)) + k(n)(x(n+1, t) - x(n, t)).$$

Se introduzirmos as coordenadas

$$\begin{cases} p(n, t) = m(n) \frac{d}{dt} x(n, t), \\ q(n, t) = x(n, t), \end{cases}$$

o Hamiltoniano do sistema é dado por

$$h(p, q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{p(n)^2}{2m(n)} + \frac{k(n)}{2} (q(n+1) - q(n))^2.$$

Pela transformação $(u, v) = (\frac{p}{\sqrt{m}}, \sqrt{m}q)$, o Hamiltoniano pode ser reescrito como

$$h(u, v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v(n)^2 + 2a(n)u(n)u(n+1) + b(n)u(n)^2,$$

em que

$$\begin{cases} a(n) & := \frac{-k(n)}{\sqrt{m(n)m(n+1)}}, \\ b(n) & := \frac{k(n)+k(n-1)}{m(n)}. \end{cases}$$

As equações de movimento, neste caso, são reescritas como

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(n, t) & = v(n, t), \\ \frac{d}{dt}v(n, t) & = -Hu(n, t), \end{cases}$$

onde

$$Hu = a(n)u(n+1) + a(n-1)u(n-1) + b(n)u(n), \quad (2.3)$$

de modo que H corresponde ao caso escalar ($l = 1$) da Definição 2.1. Nestas coordenadas, portanto, a equação de segunda ordem se torna

$$\frac{d^2}{dt^2}u(n, t) = -Hu(n, t).$$

Logo, partindo do Cálculo Funcional, para conhecermos a solução⁴, basta conhecermos a decomposição espectral de H .

Um outro contexto no qual se fazem presentes operadores de Jacobi é a teoria da equações de diferença finita, que muitas vezes modela problemas de Mecânica Quântica; neste caso, os equivalentes dos operadores dinâmicos para sequências são definidos como (Chen & Shi [2004])

$$\begin{cases} \nabla u(n) & := u(n) - u(n-1), \\ \Delta u(n) & := u(n+1) - u(n). \end{cases}$$

Em termos destes operadores, uma identidade como (2.3) pode ser escrita como

$$Hu = -\nabla(a(n)\Delta u(n)) + b(n)u(n),$$

⁴Para maiores detalhes e para ver a expressão da solução obtida pelo Cálculo Funcional, confira Teschl [2000], página 23.

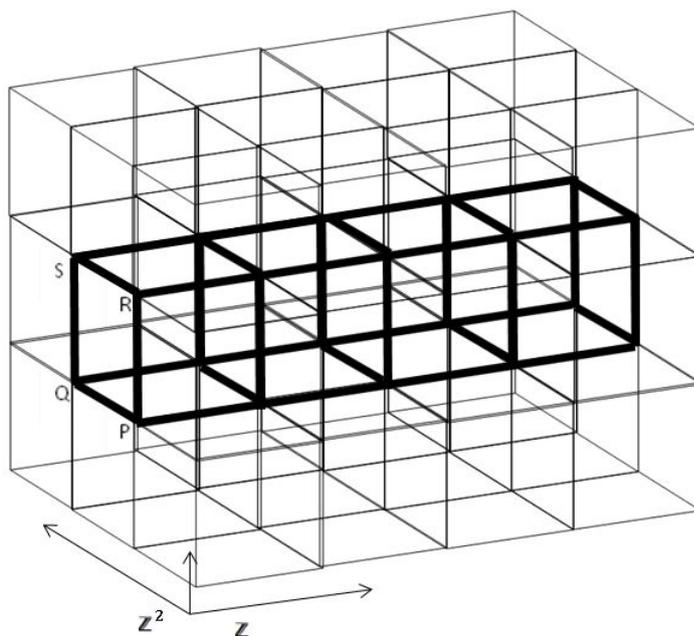
ou seja, como uma combinação de operadores dinâmicos e um operador de multiplicação correspondente ao potencial.

Em dimensões maiores, fixado $\nu \geq 2$ e dado $\Omega \subset \mathbb{Z}^{\nu-1}$, podemos considerar⁵ o conjunto $\mathbb{Z} \times \Omega$, isto é, uma faixa ν -dimensional. Por exemplo, para $\nu = 3$, poderíamos tomar

$$\Omega := \{P = (0, 0); Q = (1, 0); R = (0, 1); S = (1, 1)\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

Teríamos então, como indicado na Figura 2.2, $\mathbb{Z} \times \Omega \subset \mathbb{Z}^3$. Defina, para $\mathbf{u} \in$

Figura 2.2. Operador em uma faixa em \mathbb{Z}^3 .



$l^2(\mathbb{Z} \times \Omega; \mathbb{C})$, um operador da forma

$$(H(\mathbf{u}))_\alpha := \sum_{\substack{|\beta-\alpha|=1 \\ \beta \in \mathbb{Z} \times \Omega}} \mathbf{u}_\beta + V(\alpha)\mathbf{u}_\alpha,$$

com $\alpha \in \mathbb{Z} \times \Omega$. Note que a interação em um sítio α depende apenas dos sítios

⁵Confira [Kotani & Simon \[1988\]](#).

primeiros vizinhos. No exemplo tridimensional,

$$\begin{aligned} (H\mathbf{u})_{P,n} &= u_{P,n-1} + u_{P,n+1} + u_{Q,n} + u_{R,n} + v_{P,n}u_{P,n}, \\ (H\mathbf{u})_{Q,n} &= u_{Q,n-1} + u_{Q,n+1} + u_{P,n} + u_{S,n} + v_{Q,n}u_{Q,n}, \\ (H\mathbf{u})_{R,n} &= u_{R,n-1} + u_{R,n+1} + u_{P,n} + u_{S,n} + v_{R,n}u_{R,n}, \\ (H\mathbf{u})_{S,n} &= u_{S,n-1} + u_{S,n+1} + u_{Q,n} + u_{R,n} + v_{S,n}u_{S,n}. \end{aligned}$$

Se definirmos, para cada $n \in \mathbb{Z}$, as matrizes

$$D_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_n := \begin{bmatrix} v_{P,n} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & v_{Q,n} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & v_{R,n} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & v_{S,n} \end{bmatrix},$$

podemos representar H na forma (2.1), com a dimensão das matrizes sendo dada pela cardinalidade de Ω . Evidentemente, poderíamos generalizar este modelo, para estruturas que não estejam contidas em \mathbb{Z}^ν (uma vez que este só depende das relações de adjacência nos elementos de Ω), como é o caso de vários modelos de cristais.

2.2 Abordagem Dinâmica

Fixado $z \in \mathbb{C}$, podemos escrever a equação de autovalores do operador (2.1), definida para todo $n \in \mathbb{Z}$, por

$$D_n \mathbf{u}_{n+1} + D_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + V_n \mathbf{u}_n = z \mathbf{u}_n, \quad (2.4)$$

na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n+1} \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_n^{-1}(z - V_n) & -D_n^{-1}D_{n-1} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

A relação de recorrência assim obtida define um sistema dinâmico discreto,

segundo a Definição E.1, com $X = \mathbb{C}^{2l}$, $G = \mathbb{Z}$ e

$$\pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}; n) = ((A_n(z))_{11}\mathbf{u} + (A_n(z))_{12}\mathbf{v}, (A_n(z))_{21}\mathbf{u} + (A_n(z))_{22}\mathbf{v}),$$

sendo $(A_n(z))_{jk}$ blocos $l \times l$ da matriz de transferência $A_n(z)$, de tamanho $2l \times 2l$, expressa por

$$A_n(z) = \begin{bmatrix} (A_n(z))_{11} & (A_n(z))_{12} \\ (A_n(z))_{21} & (A_n(z))_{22} \end{bmatrix},$$

e definida pela relação

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n+1} \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = A_n(z) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Alternativamente, se denotamos por

$$\alpha_n := \begin{bmatrix} D_n^{-1}(z - V_n) & -D_n^{-1}D_{n-1} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix},$$

então

$$A_n(z) := \begin{cases} \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\dots\alpha_1\alpha_0, & \text{se } n \geq 1, \\ \mathbb{I}_{2l}, & \text{se } n = 0, \\ \alpha_n^{-1}\alpha_{n-1}^{-1}\dots\alpha_{-2}^{-1}\alpha_{-1}^{-1}, & \text{se } n \leq -1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Equivalentemente, poderíamos escrever a equação de autovalores como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n+1} \\ D_n\mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_n^{-1}(z - V_n) & -D_n^{-1} \\ D_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n \\ D_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

e então escrever as matrizes de transferência tomando em (2.7) as matrizes

$$\beta_n := \begin{bmatrix} D_n^{-1}(z - V_n) & -D_n^{-1} \\ D_n & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

em substituição às matrizes α_n . A vantagem desta segunda representação é o fato das matrizes A_n serem unimodulares (isto é, possuírem determinante 1) e, mais ainda, simpléticas (vide Definição C.8).

2.3 Fórmula de Green

A Fórmula de Green é uma identidade que decorre diretamente da lei que define o operador e indica como uma grandeza definida a partir de dois vetores arbitrários em $(\mathbb{C}^l)^{\mathbb{Z}}$ varia em cada posição a partir da imagem dos respectivos vetores pelo operador. Esta quantidade possui uma importância tanto do ponto de vista dinâmico (que será mais explorado na Seção 3.1), quanto do ponto de vista da teoria espectral (que é essencial na Seção 2.4).

Para o produto interno em \mathbb{C}^l , adotaremos a convenção da linearidade com respeito à primeira componente, ou seja,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}^l} := \sum_{k=1}^l u_k \bar{v}_k.$$

Proposição 2.3 (Fórmula de Green). *Seja H como na Definição 2.1. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in (\mathbb{C}^l)^{\mathbb{Z}}$, para quaisquer números inteiros $n > m$,*

$$\sum_{k=m}^n \langle (H\mathbf{u})_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle (H\mathbf{v})_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(n+1) - W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(m),$$

onde W é o Wronskiano, dado por

$$W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(n) := \langle D_{n-1} \mathbf{u}_n, \bar{\mathbf{v}}_{n-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_{n-1} \mathbf{v}_n, \bar{\mathbf{u}}_{n-1} \rangle_{\mathbb{C}^l}.$$

Demonstração. Pela definição do operador H ,

$$\begin{cases} \langle (H\mathbf{u})_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = \langle D_k \mathbf{u}_{k+1}, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle D_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle V_k \mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l}, \\ \langle (H\mathbf{v})_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = \langle D_k \mathbf{v}_{k+1}, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle D_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle V_k \mathbf{v}_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l}, \end{cases}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
& \langle (H\mathbf{u})_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle (H\mathbf{v})_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = \\
& = \langle D_k \mathbf{u}_{k+1}, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle D_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle V_k \mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} \\
& \quad - \langle D_k \mathbf{v}_{k+1}, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle V_k \mathbf{v}_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = \\
& = (\langle D_k \mathbf{u}_{k+1}, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\
& \quad + (\langle D_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_k \mathbf{v}_{k+1}, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\
& \quad + (\langle V_k \mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle V_k \mathbf{v}_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l}).
\end{aligned}$$

Como as matrizes D_k e V_k são reais e simétricas,

$$\begin{aligned}
\langle (H\mathbf{u})_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle (H\mathbf{v})_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} & = (\langle D_k \mathbf{u}_{k+1}, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_{k-1} \mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{v}}_{k-1} \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\
& \quad + (\langle D_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_k \mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{v}}_{k+1} \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\
& \quad + (\langle V_k \mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{u}_k, V_k \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\
& = (\langle D_k \mathbf{u}_{k+1}, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_{k-1} \mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{v}}_{k-1} \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\
& \quad + (\langle D_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_k \mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{v}}_{k+1} \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\
& \quad + (0).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=m}^n \langle (H\mathbf{u})_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle (H\mathbf{v})_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = \\
&= \sum_{k=m}^n \langle D_k \mathbf{u}_{k+1}, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_{k-1} \mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{v}}_{k-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} \\
& \quad + \sum_{k=m}^n \langle D_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_k \mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{v}}_{k+1} \rangle_{\mathbb{C}^l} = \\
&= (-\langle D_{m-1} \mathbf{u}_m, \bar{\mathbf{v}}_{m-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle D_n \mathbf{u}_{n+1}, \bar{\mathbf{v}}_n \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\
& \quad + (\langle D_{m-1} \mathbf{u}_{m-1}, \bar{\mathbf{v}}_m \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_n \mathbf{u}_n, \bar{\mathbf{v}}_{n+1} \rangle_{\mathbb{C}^l}) = \\
&= (\langle D_n \mathbf{u}_{n+1}, \bar{\mathbf{v}}_n \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_n \mathbf{u}_n, \bar{\mathbf{v}}_{n+1} \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\
& \quad - (\langle D_{m-1} \mathbf{u}_m, \bar{\mathbf{v}}_{m-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_{m-1} \mathbf{u}_{m-1}, \bar{\mathbf{v}}_m \rangle_{\mathbb{C}^l}).
\end{aligned}$$

E, novamente, pelo fato das matrizes D_k serem reais e simétricas,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=m}^n \langle (H\mathbf{u})_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle (H\mathbf{v})_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = \\
&= (\langle D_n \mathbf{u}_{n+1}, \bar{\mathbf{v}}_n \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_n \mathbf{v}_{n+1}, \bar{\mathbf{u}}_n \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\
& \quad - (\langle D_{m-1} \mathbf{u}_m, \bar{\mathbf{v}}_{m-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_{m-1} \mathbf{v}_m, \bar{\mathbf{u}}_{m-1} \rangle_{\mathbb{C}^l}) = \\
&= W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(n+1) - W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(m).
\end{aligned}$$

□

Considerando $\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n$ como vetores-coluna, podemos reescrever o wronskiano de \mathbf{u} e \mathbf{v} em n como

$$W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(n) = \mathbf{u}_n^t D_{n-1} \mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n^t D_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}. \quad (2.10)$$

No caso de A_n, B_n serem seqüências de matrizes $l \times l$, aplicando o operador

a cada coluna, temos um resultado análogo à Fórmula de Green; a saber,

$$\sum_{k=m}^n A_k^t H(B)_k - H(A)_k^t B_k = W_{[A,B]}(n+1) - W_{[A,B]}(m), \quad (2.11)$$

com

$$W_{[A,B]}(m) = (A_{m-1}^t D_{m-1} B_m - A_m^t D_{m-1} B_{m-1}).$$

Lema 2.4. *Seja H como na Definição 2.1. Se $\mathbf{u} \in (\mathbb{C}^l)^{\mathbb{Z}}$ é tal que $H\mathbf{u} = z\mathbf{u}$ para algum $z \in \mathbb{C}$, então*

$$\Im[\langle D_n \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{u}_n \rangle_{\mathbb{C}^l}] - \Im[\langle D_{m-1} \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m-1} \rangle_{\mathbb{C}^l}] = \Im[z] \sum_{k=m}^n \|\mathbf{u}_k\|^2.$$

Demonstração. Basta aplicar a fórmula de Green para \mathbf{u} e $\bar{\mathbf{u}}$. Como o operador é simétrico, $H\bar{\mathbf{u}} = \bar{z}\bar{\mathbf{u}}$. O membro esquerdo da fórmula fica

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \langle (H\mathbf{u})_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle (H\bar{\mathbf{u}})_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} &= \sum_{k=m}^n \langle z\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \bar{z}\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &= \sum_{k=m}^n z \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \bar{z} \langle \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &= \sum_{k=m}^n z \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \bar{z} \langle \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &= \sum_{k=m}^n z \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \bar{z} \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &= \sum_{k=m}^n (z - \bar{z}) \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &= \sum_{k=m}^n 2i \Im[z] \|\mathbf{u}_k\|^2. \end{aligned}$$

Já o membro direito se expressa como

$$\begin{aligned} W_{[\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}]}(n+1) - W_{[\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}]}(m) &= (\langle D_n \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{u}_n \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_n \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1} \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\ &\quad - (\langle D_{m-1} \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_{m-1} \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_m \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\ &= 2i \Im[\langle D_n \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{u}_n \rangle_{\mathbb{C}^l}] - 2i \Im[\langle D_{m-1} \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m-1} \rangle_{\mathbb{C}^l}]. \end{aligned}$$

□

Lema 2.5 (Constância do Wronskiano). *Seja H como na Definição 2.1. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in (\mathbb{C}^l)^{\mathbb{Z}}$ são tais que $H\mathbf{u} = z\mathbf{u}$ e $H\mathbf{v} = z\mathbf{v}$ para algum $z \in \mathbb{C}$, então o Wronskiano $W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(n)$ é constante.*

Demonstração. Basta aplicar a fórmula de Green para \mathbf{u} e \mathbf{v} . Com efeito,

$$\sum_{k=m}^n \langle (H\mathbf{u})_k, \bar{\mathbf{v}} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle (H\mathbf{v})_k, \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\mathbb{C}^l} = \sum_{k=m}^n \langle z\mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle z\mathbf{v}_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = 0,$$

e portanto

$$W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(n+1) - W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(m) = 0.$$

□

Lema 2.6. *Seja H como na Definição 2.1. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r}, \mathbf{s} \in (\mathbb{C}^l)^{\mathbb{Z}}$ são tais que $H\mathbf{u} = z\mathbf{u}$, $H\mathbf{r} = z\mathbf{r}$ e $H\mathbf{v} = x\mathbf{v}$, $H\mathbf{s} = x\mathbf{s}$ para algum $z = x + iy \in \mathbb{C}$, então*

$$W_{[\mathbf{u}-\mathbf{v}, \bar{\mathbf{r}}-\bar{\mathbf{s}}]}(n+1) - W_{[\mathbf{u}-\mathbf{v}, \bar{\mathbf{r}}-\bar{\mathbf{s}}]}(m) = iy \sum_{k=m}^n 2 \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{r}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{s}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{r}_k \rangle_{\mathbb{C}^l}.$$

Demonstração. Temos, para todo $k \in \mathbb{Z}$, a identidade

$$\begin{aligned} & \langle (H(\mathbf{u} - \mathbf{v}))_k, (\mathbf{r} - \mathbf{s})_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle (H(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{s}}))_k, (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}})_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = \\ &= \langle z\mathbf{u}_k - x\mathbf{v}_k, \mathbf{r}_k - \mathbf{s}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \bar{z}\bar{\mathbf{r}}_k - x\bar{\mathbf{s}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k - \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = \\ &= \langle z\mathbf{u}_k, \mathbf{r}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle z\mathbf{u}_k, \mathbf{s}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle x\mathbf{v}_k, \mathbf{s}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle x\mathbf{v}_k, \mathbf{r}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ & \quad + \langle \bar{z}\bar{\mathbf{r}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \bar{z}\bar{\mathbf{r}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle x\bar{\mathbf{s}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle x\bar{\mathbf{s}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l}. \end{aligned}$$

Agora, somando ambos os membros da identidade anterior de m a n , temos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=m}^n \langle (H(\mathbf{u} - \mathbf{v}))_k, (\mathbf{r} - \mathbf{s})_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle (H(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{s}}))_k, (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}})_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = \\ &= \sum_{k=m}^n 2yi \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{r}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \sum_{k=m}^n yi \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{s}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \sum_{k=m}^n yi \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{r}_k \rangle_{\mathbb{C}^l}. \end{aligned}$$

O resultado é agora uma consequência da fórmula de Green. \square

Lema 2.7. *Seja H como na Definição 2.1. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in (\mathbb{C}^l)^\mathbb{Z}$ são tais que $H\mathbf{u} = z\mathbf{u}$ e $H\mathbf{v} = x\mathbf{v}$ para algum $z = x + iy \in \mathbb{C}$, então*

$$\begin{aligned} & y \sum_{k=m}^n 2 \|\mathbf{u}_k\|_{\mathbb{C}^l}^2 - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = \\ & = 2\Im [\langle D_n(\mathbf{u} - \mathbf{v})_{n+1}, (\mathbf{u} - \mathbf{v})_n \rangle_{\mathbb{C}^l}] - 2\Im [\langle D_{m-1}(\mathbf{u} - \mathbf{v})_m, (\mathbf{u} - \mathbf{v})_{m-1} \rangle_{\mathbb{C}^l}]. \end{aligned}$$

Demonstração. Basta aplicar o Lema 2.7, com $\mathbf{r} = \mathbf{u}, \mathbf{v} = \mathbf{s}$, e observar que

$$\begin{aligned} W_{[\mathbf{u}-\mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}-\bar{\mathbf{v}}]}(n+1) - W_{[\mathbf{u}-\mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}-\bar{\mathbf{v}}]}(m) &= \langle D_n(\mathbf{u} - \mathbf{v})_{n+1}, (\mathbf{u} - \mathbf{v})_n \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &\quad - \langle (D_n \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}})_{n+1}, (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}})_n \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &\quad - \langle D_{m-1}(\mathbf{u} - \mathbf{v})_m, (\mathbf{u} - \mathbf{v})_{m-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &\quad + \langle (D_{m-1} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}})_m, (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}})_{m-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &= 2i\Im [\langle D_n(\mathbf{u} - \mathbf{v})_{n+1}, (\mathbf{u} - \mathbf{v})_n \rangle_{\mathbb{C}^l}] \\ &\quad - 2i\Im [\langle D_{m-1}(\mathbf{u} - \mathbf{v})_m, (\mathbf{u} - \mathbf{v})_{m-1} \rangle_{\mathbb{C}^l}]. \end{aligned}$$

\square

Lema 2.8. *Seja H como na Definição 2.1. Se $B, C \in (M(l, \mathbb{C}))^\mathbb{Z}$ são tais que $HB = zB$ e $HC = xC$ para algum $z = x + iy \in \mathbb{C}$, então*

$$\begin{aligned} y \sum_{k=m}^n 2B_k^* B_k - B_k^* C_k - C_k^* B_k &= 2\Im [(B - C)_n^t D_n (B - C)_{n+1}] \\ &\quad - 2\Im [(B - C)_{m-1}^t D_{m-1} (B - C)_m]. \end{aligned}$$

Demonstração. Basta aplicar o Lema 2.6 às colunas das matrizes B e C . \square

2.4 Extensões Auto-adjuntas

Tanto o operador da Definição 2.1 quanto o operador da Definição 2.2 podem não ser limitados, se os considerarmos como definidos em subconjuntos de $l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^l)$ e $l^2(\mathbb{Z}_+; \mathbb{C}^l)$ respectivamente, o que torna necessário determinar suas respectivas extensões auto-adjuntas, caso existam. Observe que, em princípio, o operador H^+ sequer é simétrico.

Lema 2.9. *Seja H^+ como na Definição 2.2. Para $\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k \in (\mathbb{C}^l)^{\mathbb{N}}$ e $n \in \mathbb{Z}_+$, vale*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}_k, (H^+ \mathbf{u})_k \rangle_{\mathbb{C}^l} &= \sum_{k=1}^n \langle (H^+ \mathbf{x})_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &+ (\langle \mathbf{x}_n, D_n \mathbf{u}_{n+1} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{x}_{n+1}, D_n \mathbf{u}_n \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\ &- (\langle \mathbf{x}_0, D_0 \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{x}_1, D_0 \mathbf{u}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l}). \end{aligned}$$

Demonstração. Analogamente à identidade de Green, temos para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ que

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{x}_k, (H^+ \mathbf{u})_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle (H^+ \mathbf{x})_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = \\ &= \langle \mathbf{x}_k, D_k \mathbf{u}_{k+1} \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle \mathbf{x}_k, D_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle \mathbf{x}_k, V_k \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &- (\langle D_k \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle D_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle V_k \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l}) = \\ &= (\langle \mathbf{x}_k, D_k \mathbf{u}_{k+1} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l}) + (\langle \mathbf{x}_k, D_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_k \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l}). \end{aligned}$$

Somando ambos os membros da identidade acima de 1 a n , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}_k, (H^+ \mathbf{u})_k \rangle_{\mathbb{C}^l} &= \sum_{k=1}^n \langle (H^+ \mathbf{x})_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &+ (\langle \mathbf{x}_n, D_n \mathbf{u}_{n+1} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{x}_{n+1}, D_n \mathbf{u}_n \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\ &- (\langle \mathbf{x}_0, D_0 \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{x}_1, D_0 \mathbf{u}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l}). \end{aligned}$$

□

Portanto, para que o operador definido por H^+ seja simétrico em um domínio $\mathcal{D} \subseteq l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l)$, é necessário que, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\langle \mathbf{x}_n, D_n \mathbf{u}_{n+1} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{x}_{n+1}, D_n \mathbf{u}_n \rangle_{\mathbb{C}^l}) = (\langle \mathbf{x}_0, D_0 \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{x}_1, D_0 \mathbf{u}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l}). \quad (2.12)$$

Podemos partir dos operadores⁶

$$H_{max}^+ : (H_{max}^+) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l), \quad (2.13)$$

$$H_{min}^+ : (H_{min}^+) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l), \quad (2.14)$$

em que (H_{max}^+) é o conjunto

$$\{\mathbf{u} \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l) \mid H^+ \mathbf{u} \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l)\},$$

e (H_{min}^+) é o conjunto

$$\{\mathbf{x} \in c_{00}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l) \mid (\langle \mathbf{x}_0, D_0 \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{x}_1, D_0 \mathbf{u}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l}) = 0, \forall \mathbf{u} \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l)\}.$$

Proposição 2.10. *Os operadores H_{max}^+ e H_{min}^+ , definidos acima, satisfazem*

$$(a) \ H_{max}^+ = (H_{min}^+)^*;$$

$$(b) \ (H_{max}^+)^* = \overline{H_{min}^+}.$$

Demonstração. (a):

Mostraremos primeiramente que $(H_{max}^+) \supseteq ((H_{min}^+)^*)$. Devido à definição de operador adjunto (Definição B.2), $((H_{min}^+)^*)$ é o conjunto

$$\{\mathbf{x} \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l) \mid \exists \mathbf{y} \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l), \langle \mathbf{x}, H_{min}^+ \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle, \forall \mathbf{u} \in (H_{min}^+)\}.$$

Supondo que $\mathbf{x} \in ((H_{min}^+)^*)$, devemos mostrar que $H^+ \mathbf{x} \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l)$. Pelo Lema

⁶Baseamo-nos nas abordagens de Teschl [2000], página 47 e Carmona & Lacroix [1990], página 122.

2.9, para todo $\mathbf{u} \in (H_{min}^+)$ e todo $n > 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \langle (H^+ \mathbf{x})_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} &= \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}_k, (H_{min}^+ \mathbf{u})_k \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &\quad - (\langle \mathbf{x}_n, D_n \mathbf{u}_{n+1} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{x}_{n+1}, D_n \mathbf{u}_n \rangle_{\mathbb{C}^l}) \\ &\quad + (\langle \mathbf{x}_0, D_0 \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{x}_1, D_0 \mathbf{u}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l}). \end{aligned}$$

Tomando o limite em n e considerando \mathbf{y} segundo a definição $((H_{min}^+)^*)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle (H^+ \mathbf{x})_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = \langle \mathbf{x}, H_{min}^+ \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle.$$

Logo, como \mathbf{u} é arbitrário, $H^+ \mathbf{x} \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l)$ e portanto, $\mathbf{x} \in (H_{max}^+)$.

Suponha agora que $\mathbf{x} \in (H_{max}^+)$. Desejamos mostrar que, para todo $\mathbf{u} \in (H_{min}^+)$, $\langle \mathbf{x}, H_{min}^+ \mathbf{u} \rangle = \langle H_{max}^+ \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle$. Novamente pelo Lema 2.9 e pela relação (2.12),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle (H_{max}^+ \mathbf{x})_k, \mathbf{u}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathbf{x}_k, (H_{min}^+ \mathbf{u})_k \rangle_{\mathbb{C}^l},$$

e, conseqüentemente, $\mathbf{x} \in ((H_{min}^+)^*)$. Logo, $(H_{max}^+) \subseteq ((H_{min}^+)^*)$.

(b):

Como $(H_{min}^+)^{**} = \overline{H_{min}^+}$, o resultado se segue da alínea (a). \square

Suponha que a sequência $(D_n)_n$ satisfaça, para todo par $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in l^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^l)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\langle \mathbf{v}_n, D_n \mathbf{u}_{n+1} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{v}_{n+1}, D_n \mathbf{u}_n \rangle_{\mathbb{C}^l}) = 0 \quad (2.15)$$

(basta, por exemplo, exigir que D_n seja limitado). Neste caso, a forma de fronteira associada a H_{max}^+ (Definição B.4) é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle (H_{max}^+ \mathbf{u})_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle (H_{max}^+ \mathbf{v})_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &= -(\langle \mathbf{v}_0, D_0 \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{v}_1, D_0 \mathbf{u}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ainda sob tais hipóteses, para determinarmos explicitamente as extensões

auto-adjuntas de H_{min}^+ , necessitamos de uma tripla de fronteira $(\mathcal{H}, \rho_1, \rho_2)$ (veja a Definição B.5). Para tanto, defina⁷ os subespaços

$$X := \{\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 - iD_0\mathbf{u}_0; \mathbf{u} \in ((H_{min}^+)^*)\},$$

$$Y := \{\mathbf{y} = \mathbf{u}_1 + iD_0\mathbf{u}_0; \mathbf{u} \in ((H_{min}^+)^*)\},$$

e as aplicações $\rho_1, \rho_2 : ((H_{min}^+)^*) \rightarrow \mathbb{C}^l$, dadas por

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}_1 - iD_0\mathbf{u}_0, \\ \rho_2(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}_1 + iD_0\mathbf{u}_0. \end{aligned}$$

Então, para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in ((H_{min}^+)^*)$,

$$\begin{aligned} \langle \rho_1(\mathbf{u}), \rho_1(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \rho_2(\mathbf{u}), \rho_2(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbb{C}^l} &= \langle \mathbf{u}_1 - iD_0\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_1 - iD_0\mathbf{v}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &\quad - \langle \mathbf{u}_1 + iD_0\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_1 + iD_0\mathbf{v}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &= \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle \mathbf{u}_1, -iD_0\mathbf{v}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &\quad + \langle -iD_0\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l} + \langle -iD_0\mathbf{u}_0, -iD_0\mathbf{v}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &\quad - \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{u}_1, iD_0\mathbf{v}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &\quad - \langle iD_0\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle iD_0\mathbf{u}_0, iD_0\mathbf{v}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &= 2i \langle \mathbf{u}_1, D_0\mathbf{v}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l} - 2i \langle D_0\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l} \\ &= 2i\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

onde Γ é a forma de fronteira dada por (2.16).

Portanto, $(\mathbb{C}^l, \rho_1, \rho_2)$ é uma tripla de fronteira. Além disto, os índices de deficiência do operador H_{min}^+ são iguais. De fato, sabe-se que, no caso geral de

⁷Seguimos a idéia do exemplo apresentado em de Oliveira [2009], página 181.

operadores simétricos, os índices de deficiência são constantes⁸ em cada semi-plano de \mathbb{C} . Como as matrizes do operador são reais, as auto-soluções em z são conjugadas às auto-soluções em \bar{z} ; logo, $n_-(H_{min}^+) = n_+(H_{min}^+)$. Então, podemos aplicar a Proposição B.6 e estabelecer os domínios cujas restrições de $(H_{max}^+)^*$ são auto-adjuntas; tais conjuntos são obtidos através de aplicações unitárias U entre X e Y tais que, para todo $\mathbf{u} \in (H_{min}^+)^*$,

$$\rho_1(\mathbf{u}) = U\rho_2(\mathbf{u}).$$

Assim, se $(\mathbb{I} + U)$ for invertível,

$$\mathbf{u}_1 - iD_0\mathbf{u}_0 = U\mathbf{u}_1 + iUD_0\mathbf{u}_0,$$

ou seja,

$$(\mathbb{I} - U)\mathbf{u}_1 = i(\mathbb{I} + U)D_0\mathbf{u}_0,$$

e portanto

$$i(\mathbb{I} + U)^{-1}(\mathbb{I} - U)\mathbf{u}_1 = -D_0\mathbf{u}_0.$$

O operador do membro esquerdo da identidade acima é a transformada de Cayley da matriz U , e equivale a uma matriz auto-adjunta⁹. Assim, as extensões auto-adjuntas do operador estão associadas às transformações auto-adjuntas $i(\mathbb{I} + U)^{-1}(\mathbb{I} - U)$. Em particular, se $B\mathbf{u}_1 = -D_0\mathbf{u}_0$ e $B\mathbf{v}_1 = -D_0\mathbf{v}_0$ para uma transformação auto-adjunta B , então

$$(\langle \mathbf{v}_0, D_0\mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{v}_1, D_0\mathbf{u}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l}) = (\langle -B\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle \mathbf{v}_1, -B\mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbb{C}^l}) = 0;$$

assim, a forma de fronteira se anula.

Sob tais hipóteses, temos então definidas as extensões auto-adjuntas do operador H_{min}^+ , caracterizadas por transformações auto-adjuntas em \mathbb{C}^l . Podemos

⁸Weidmann [1980], página 230.

⁹de Oliveira [2009], página 183.

representá-las como

$$H_+^B \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & (V_1 - B) & D_1 & 0 & \dots \\ 0 & D_1 & V_2 & D_2 & \dots \\ 0 & 0 & D_2 & V_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

parametrizadas pelas transformações auto-adjuntas B . Em particular, no caso $B = 0$, chamado de operador de Dirichlet, o domínio é caracterizado por $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$. Observe que o operador H , definido em

$$\{\mathbf{x} \in l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^l) \mid H\mathbf{x} \in l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^l)\} \quad (2.18)$$

pela lei (2.1), pode ser visto como uma perturbação de posto finito da soma direta dos operadores H_+^B e H_-^B , definidos respectivamente em $l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l)$ e $l^2(\mathbb{Z}_-, \mathbb{C}^l)$, com $B = 0$.

Existem, no entanto, matrizes unitárias U que, apesar de $(\mathbb{I} + U)$ não ser invertível, também caracterizam extensões do operador, de maneira que nem todas as extensões são da forma (2.17). É o caso, por exemplo, de $U = -\mathbb{I}$, denominado operador de Neumann. Mais geralmente, se $(\mathbb{I} - U)$ é invertível, a condição $\rho_1(\mathbf{u}) = U\rho_2(\mathbf{u})$ se torna

$$\mathbf{u}_1 = i(\mathbb{I} - U)^{-1}(\mathbb{I} + U)D_0\mathbf{u}_0,$$

de maneira que podemos escrever estas extensões como

$$H_+^B \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ (D_0 - V_1 B D_0) & 0 & D_1 & 0 & \dots \\ -D_1 B D_0 & 0 & V_2 & D_2 & \dots \\ 0 & 0 & D_2 & V_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

em que B é novamente uma matriz auto-adjunta. Em particular, o operador de Neumann equivale a $B = 0$, ou seja, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$.

Os operadores H , definido em (2.18), e H_{min}^+ , definido como na Proposição 2.10, têm em princípio $2l$ graus de liberdade, no sentido de que seus índices de deficiência estão entre 0 e $2l$. A hipótese de haver exatamente l soluções da equação de auto-valores que sejam quadrado-somáveis em $+\infty$ nos permitirá representar o operador resolvente de uma maneira única. De modo mais geral, esta situação equivale ao conceito de operador ponto limite em $+\infty$:

Definição 2.11 (Operador Ponto Limite). *O operador H_{min}^+ é dito ponto limite em $+\infty$ se, para algum $z \in \mathbb{C}_+$, exatamente l soluções da equação $H_{max}^+ \mathbf{u} = z \mathbf{u}$ são quadrado-somáveis em $+\infty$.*

A definição independe de z , pois o índice de deficiência de H_{min}^+ independe de z .

Em outras palavras, o operador é ponto limite se $n_-(H_{min}^+) = n_+(H_{min}^+) = l$. O conceito e a denominação ponto limite se originaram na teoria dos círculos de Weyl para o caso escalar, discutida no Capítulo 9 de Coddington & Levinson [1955], por exemplo; neste caso $n_{\pm} \in \{0, 1, 2\}$. Analisando a restrição do operador a intervalos finitos, para $n_{\pm} = 1$, as parametrizações das soluções da equação de autovalores (funções de Weyl-Titchmarsh), que formam um círculo no plano complexo, convergem para um ponto em \mathbb{C} quando os intervalos tendem à semirreta, ponto este que caracteriza o operador resolvente. Se $n_{\pm} = 2$, os círculos tendem a um círculo no plano complexo, e o operador é classificado como círculo limite.

No Capítulo 9 de Atkinson [1964], no contexto de operadores de Sturm-Liouville, há um estudo sobre a teoria dos círculos de Weyl para dimensões maiores que utiliza aplicações lineares unitárias como parametrizações. No mesmo contexto, essa teoria é exposta mais detalhadamente em Hinton & Shaw [1981], em que os casos $n_{\pm} < l$ são relacionados ao posto da representação matricial do operador resolvente.

Para o caso $n_{\pm} > l$, não há uma representação matricial única do operador resolvente. A situação $n_{\pm} = 2l$, por sua vez, é análoga à classificação de círculo limite no caso escalar (Shi [2004]).

A questão subsequente é determinar caracterizações, ou ao menos condições suficientes, que nos permitam classificar um operador como ponto limite. No nosso caso, a propriedade (2.15) é essencial para que as extensões sejam definidas desta

maneira, forçando que o operador seja ponto limite, segundo a Definição 2.11. Por exemplo, determinam-se em [Chen & Shi \[2004\]](#) resultados desta natureza para um operador escalar semelhante ao caso do operador de Jacobi. Em um âmbito mais geral, há trabalhos como [Atkinson \[1981\]](#) e [Everitt et al. \[1986\]](#) que tratam de operadores de Sturm-Liouville. Em dimensão maior, podemos citar [Pleijel \[1969\]](#), [Braeutigam \[2017\]](#) e [Qi & Chen \[2004\]](#).

Especificamente em [Allahverdiev \[2003\]](#), há um estudo sobre as extensões auto-adjuntas para um caso mais restrito do que o caso ponto limite. Nesse trabalho, o ponto de partida é uma das extensões do tipo (2.17), e portanto o índice de deficiência assume valores entre 0 e l , diferentemente do operador H_{min}^+ . Neste contexto, o operador é dito indeterminado se o índice de deficiência é máximo, ou seja, l e nos trabalhos [Kostyuchenko & Mirzoev \[1998\]](#), [Kostyuchenko & Mirzoev \[1999\]](#) e [Kostyuchenko & Mirzoev \[2001\]](#) existem caracterizações para o caso indeterminado.

Não buscaremos apresentar uma caracterização para o conceito de ponto limite; apenas assumiremos¹⁰, de agora em diante, as condições que nos permitiram definir as extensões (2.17) e (2.19), em especial a propriedade (2.15), que pode ser interpretada como uma 'condição de contorno' em $+\infty$. Para o operador de Jacobi escalar, há uma condição suficiente para o caso ponto limite ([Teschl \[2000\]](#), página 49). Podemos estendê-la para o caso a valores matriciais.

Proposição 2.12. *Se o operador H^+ , como na Definição 2.2, satisfaz*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\|D_k\|} = \infty, \quad (2.20)$$

então H_{min}^+ é ponto limite em $+\infty$.

Demonstração. Demonstraremos inicialmente que $n_+(H_{min}^+) \geq l$. Se $\Im[z] > 0$, o operador $(H_{min}^+ - z)^{-1}$ está definido e é limitado. Considerando (assim como o argumento apresentado em [Carmona & Lacroix \[1990\]](#), página 124) uma base de

¹⁰Por exemplo, [Geszttesy et al. \[2002\]](#) assume apenas que as matrizes D_n e V_n são uniformemente limitadas.

vetores canônicos $\{\mathbf{e}_{1,1}, \mathbf{e}_{1,2}, \dots, \mathbf{e}_{1,l}\}$ (vide (3.7)), o sistema

$$\{(H_{min}^+ - z)^{-1}\mathbf{e}_{1,1}, (H_{min}^+ - z)^{-1}\mathbf{e}_{1,2}, \dots, (H_{min}^+ - z)^{-1}\mathbf{e}_{1,l}\}$$

é linearmente independente, sendo cada um de seus elementos quadrado-somável em $+\infty$ (recorde que $\{\mathbf{e}_{1,k}\}_{k=1}^l$ é uma base espectral, segundo a Definição B.18). Desse modo, concluímos que $n_+(H_{min}^+) \geq l$.

Agora, supondo por absurdo que $n_+(H_{min}^+) > l$, para $z \in \mathbb{C}$ fixado, existem auto-soluções $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l)$ linearmente independentes e uma constante $C \neq 0$ tais que $W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(1) \neq C$. Pela constância do Wronskiano, para todo $k > 0$,

$$W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(k) = \langle D_{k-1}\mathbf{u}_k, \bar{\mathbf{v}}_{k-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_{k-1}\mathbf{v}_k, \bar{\mathbf{u}}_{k-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} = C,$$

ou seja,

$$\frac{|C|}{\|D_{k-1}\|} \leq (\|\mathbf{u}_k\| \|\mathbf{v}_{k-1}\| + \|\mathbf{v}_k\| \|\mathbf{u}_{k-1}\|).$$

Somando ambos os membros da desigualdade acima de 1 a n e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{|C|}{\|D_{k-1}\|} &\leq \sum_{k=1}^n \|\mathbf{u}_k\| \|\mathbf{v}_{k-1}\| + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{v}_k\| \|\mathbf{u}_{k-1}\| \\ &\leq \sqrt{(\sum_{k=1}^n \|\mathbf{u}_k\|^2) (\sum_{k=1}^n \|\mathbf{v}_{k-1}\|^2)} \\ &\quad + \sqrt{(\sum_{k=1}^n \|\mathbf{v}_k\|^2) (\sum_{k=1}^n \|\mathbf{u}_{k-1}\|^2)} \\ &\leq \sqrt{(\sum_{k=0}^{n+1} \|\mathbf{u}_k\|^2) (\sum_{k=0}^{n+1} \|\mathbf{v}_k\|^2)} \\ &\quad + \sqrt{(\sum_{k=0}^{n+1} \|\mathbf{v}_k\|^2) (\sum_{k=0}^{n+1} \|\mathbf{u}_k\|^2)} \\ &= 2\sqrt{(\sum_{k=0}^{n+1} \|\mathbf{u}_k\|^2) (\sum_{k=0}^{n+1} \|\mathbf{v}_k\|^2)}. \end{aligned}$$

Desta maneira, tomando o limite $n \rightarrow \infty$ em ambos os membros, temos que

$$\frac{|C|}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\|D_k\|} \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| < \infty.$$

Um absurdo. Logo, necessariamente $n_+(H_{min}^+) \leq l$.

□

Capítulo 3

O Operador Resolvente

Tradicionalmente, as propriedades espectrais de um operador auto-adjunto são determinadas pelo comportamento de 'fronteira' do respectivo operador resolvente, isto é, o comportamento para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ no limite de $y \downarrow 0$. Com efeito, com a fórmula de inversão de Stieltjes e o Teorema Espectral, podemos obter a medida espectral do operador de Dirichlet, definido a partir de (2.17) e satisfazendo em (H_{max}^+) , domínio do operador (2.13), a condição $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, sendo representado matricialmente como

$$H_+^\phi \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & V_1 & D_1 & 0 & \dots \\ 0 & D_1 & V_2 & D_2 & \dots \\ 0 & 0 & D_2 & V_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Para tanto, fixado z no conjunto resolvente de H_+^ϕ , é necessário escrever o operador resolvente em sua forma integral a partir da função de Green (a valores matriciais), que será parametrizada pelas soluções da equação de autovalores em z .

3.1 Função M de Weyl-Titchmarsh

Inicialmente, parametrizaremos as auto-soluções quadrado-somáveis em função das condições iniciais. Esta parametrização é conhecida como Função de Weyl-Titchmarsh.

Se H^+ é um operador segundo a Definição 2.2, fixado $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, sabemos que no caso ponto limite (Definição 2.11) o conjunto de auto-soluções quadrado-somáveis da equação $H^+ \mathbf{u} = z\mathbf{u}$ em $(\mathbb{C}^l)^{\mathbb{Z}_+}$, denotado por

$$\mathcal{J}_+(z) := \left\{ \mathbf{u} \in (\mathbb{C}^l)^{\mathbb{Z}_+} \mid H^+ \mathbf{u} = z\mathbf{u}, \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{u}_n\|^2 < \infty \right\},$$

é um subespaço de dimensão l .

Definição 3.1 (Soluções de Jost). *Seja H como na Definição 2.1 e ponto limite em $+\infty$. Para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, existe uma única sequência $(F_n^{(+)})_n$ de matrizes $l \times l$ tal que*

$$(a) \quad D_n F_{n+1}^{(+)} + D_{n-1} F_{n-1}^{(+)} + V_n F_n^{(+)} = z F_n^{(+)},$$

$$(b) \quad F_0^{(+)} = \mathbb{I},$$

$$(c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left\| F_n^{(+)} \right\|^2 < \infty.$$

Cada coluna da matriz é uma solução da equação de autovalores tendo como condição inicial um vetor canônico. Cada uma destas l soluções é chamada solução de Jost.

As soluções quadrado-somáveis em $+\infty$, que formam as matrizes $(F_n^{(+)})_n$, constituem uma base para $\mathcal{J}_+(z)$. Também podemos definir, de maneira inteiramente análoga, a sequência de matrizes $(F_n^{(-)})_n$, formadas por soluções da equação de autovalores de H satisfazendo

$$\sum_{n=0}^{-\infty} \left\| F_n^{(-)} \right\|^2 < \infty,$$

de tal modo a constituírem uma base de $\mathcal{J}_-(z)$, o espaço das soluções quadrado-somáveis em $-\infty$. Apresentaremos a seguir uma maneira conveniente de parametrizar os espaços $\mathcal{J}_\pm(z)$.

Definição 3.2 (Matriz M de Weyl-Titchmarsh). *Sejam $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e $\left(F_n^{(+)}\right)_n$, $\left(F_n^{(-)}\right)_n$ como na Definição 3.1. Definimos as funções (a valores matriciais) M_\pm^ϕ de Weyl-Titchmarsh, associadas aos operadores H_\pm^ϕ dados por (3.1), como*

$$M_\pm^\phi = -F_{\pm 1}^{(\pm)} D_0^{-1}.$$

A escolha desta parametrização se justifica principalmente por corresponder à transformada de Borel das medidas espectrais dos operadores H_\pm^ϕ , respectivamente (vide Seção 3.3), mas também por conveniência para alguns cálculos necessários (vide Seção 6.4). Necessitamos estabelecer uma relação entre a matriz Weyl-Titchmarsh e as soluções de Jost, da mesma forma que a Proposição 2.3 em Kotani & Simon [1988]:

Proposição 3.3. *Sejam $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\left(F_n^{(+)}\right)_n$ como na Definição 3.1 e M_+^ϕ a matriz de Weyl-Titchmarsh correspondente. Então,*

- (a) $(M_+^\phi)^t = M_+^\phi$;
- (b) $D_0 \mathfrak{S}[M_+^\phi] D_0 = \mathfrak{S}[z] \sum_{k=1}^{\infty} F_k^{(+)*} F_k^{(+)}$.

Demonstração. Para simplificar a notação, omitiremos o índice (+).

(a) Da fórmula de Green (equação (2.11)), com $A_k = B_k = F_k$, segue-se a existência de uma constante C tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$W_{[F,F]}(n) = (F_{n-1}^t D_{n-1} F_n - F_n^t D_{n-1} F_{n-1}).$$

Da propriedade (c) da Definição 3.1, segue-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_{[F,F]}(n) = 0,$$

e assim $C = 0$; em particular,

$$(D_0 F_0)^t F_1 - (D_0 F_1)^t F_0 = 0.$$

Como $F_0 = \mathbb{I}$ e $D_0 = D_0^t$, temos que $D_0 F_1 = D_0 M^\phi D_0$ é simétrica; agora, como D_0 é simétrica, segue-se que M^ϕ também o é.

(b) Novamente utilizando a equação (2.11) com $A_k = \overline{F}_k$, $B_k = F_k$ e $m = 1$, tomando o limite $n \rightarrow \infty$, segue-se que

$$(D_0 \overline{F}_0)^t F_1 - (D_0 \overline{F}_1)^t F_0 = \Im[z] \sum_{k=1}^{\infty} F_k^* F_k$$

(note que a relação (2.15) é satisfeita, por hipótese), e portanto o resultado. \square

3.2 O Núcleo Integral do Operador Resolvente

Nesta seção definiremos a função de Green associada ao operador de Dirichlet H^ϕ , dado por (3.1). Omitiremos o índice (+) a partir de agora, a fim de tornar a notação menos carregada.

Definição 3.4 (Soluções de Neumann e Dirichlet). *Sejam ψ, ϕ seqüências de soluções matriciais da equação de autovalores (2.4) para $z \in \mathbb{C}$, que satisfazem as condições iniciais*

$$\begin{cases} \psi_0 = \mathbb{I}, \\ \psi_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \phi_0 = 0, \\ \phi_1 = \mathbb{I}. \end{cases}$$

Tais soluções são denominadas soluções de Neumann e de Dirichlet, respectivamente.

Podemos exprimir as soluções de Jost em termos destas soluções como

$$F_n^{(+)} = \psi_n - \phi_n M_+^\phi D_0. \quad (3.2)$$

De fato, esta identidade segue do fato de que ambos os membros de (3.2) coincidem nos sítios 0 e 1 e são soluções da mesma equação de autovalores.

Também a partir destas soluções, podemos exprimir de maneira conveniente as matrizes de transferência dadas por (2.6); a saber, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{bmatrix} \phi_{n+1} & \psi_{n+1} \\ \phi_n & \psi_n \end{bmatrix} = A_n(z) \begin{bmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_0 & \psi_0 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

mais geralmente, para $n \geq m \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} \phi_{n+1} & \psi_{n+1} \\ \phi_n & \psi_n \end{bmatrix} = A_{m,n}(z) \begin{bmatrix} \phi_{m+1} & \psi_{m+1} \\ \phi_m & \psi_m \end{bmatrix}.$$

Se optarmos pelas matrizes de transferência simpléticas, tal relação se torna, para todos $n \geq m \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} \phi_{n+1} & \psi_{n+1} \\ D_n \phi_n & D_n \psi_n \end{bmatrix} = A_{m,n}(x) \begin{bmatrix} \phi_{m+1} & \psi_{m+1} \\ D_m \phi_m & D_m \psi_m \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Lema 3.5. *Sejam H como na Definição 2.1, e ψ, ϕ as soluções de Neumann e de Dirichlet, respectivamente, da equação de autovalores correspondente. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,*

- (a) $\psi_n D_0^{-1} \phi_n^t - \phi_n D_0^{-1} \psi_n^t = 0$;
- (b) $\psi_n D_0^{-1} \phi_{n+1}^t - \phi_n D_0^{-1} \psi_{n+1}^t = D_n^{-1}$;
- (c) $\psi_{n+1} D_0^{-1} \phi_n^t - \phi_{n+1} D_0^{-1} \psi_n^t = -D_n^{-1}$.

Demonstração. Aplicando a constância do Wronskiano, por meio da equação (2.11), sobre os pares (ψ, ψ) , (ψ, ϕ) , (ϕ, ψ) e (ϕ, ϕ) , temos para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, o sistema de equações

$$\begin{cases} \psi_n^t D_n \psi_{n+1} - \psi_{n+1}^t D_n \psi_n = 0, \\ \psi_n^t D_n \phi_{n+1} - \psi_{n+1}^t D_n \phi_n = D_0, \\ \phi_n^t D_n \psi_{n+1} - \phi_{n+1}^t D_n \psi_n = -D_0, \\ \phi_n^t D_n \phi_{n+1} - \phi_{n+1}^t D_n \phi_n = 0, \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \psi_n^t & \psi_{n+1}^t \\ \phi_n^t & \phi_{n+1}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_n & 0 \\ 0 & D_n \end{bmatrix} \mathbb{J} \begin{bmatrix} \psi_n & \phi_n \\ \psi_{n+1} & \phi_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbb{J} \begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & D_0 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

com

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que $\mathbb{J}^{-1} = -\mathbb{J}$ e que

$$\begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & D_0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D_0^{-1} & 0 \\ 0 & D_0^{-1} \end{bmatrix}.$$

Logo, multiplicado à esquerda os dois lados da identidade (3.5) por estas duas inversas, obtemos

$$\left(\begin{bmatrix} D_0^{-1} & 0 \\ 0 & D_0^{-1} \end{bmatrix} \mathbb{J}^{-1} \begin{bmatrix} \psi_n^t & \psi_{n+1}^t \\ \phi_n^t & \phi_{n+1}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_n & 0 \\ 0 & D_n \end{bmatrix} \mathbb{J} \right) \left(\begin{bmatrix} \psi_n & \phi_n \\ \psi_{n+1} & \phi_{n+1} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}.$$

Assim, como as matrizes comutam,

$$\left(\begin{bmatrix} \psi_n & \phi_n \\ \psi_{n+1} & \phi_{n+1} \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} D_0^{-1} & 0 \\ 0 & D_0^{-1} \end{bmatrix} \mathbb{J}^{-1} \begin{bmatrix} \psi_n^t & \psi_{n+1}^t \\ \phi_n^t & \phi_{n+1}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_n & 0 \\ 0 & D_n \end{bmatrix} \mathbb{J} \right) = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}.$$

Rearranjando os termos:

$$\begin{bmatrix} \psi_n & \phi_n \\ \psi_{n+1} & \phi_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0^{-1} & 0 \\ 0 & D_0^{-1} \end{bmatrix} \mathbb{J} \begin{bmatrix} \psi_n^t & \psi_{n+1}^t \\ \phi_n^t & \phi_{n+1}^t \end{bmatrix} = \mathbb{J} \begin{bmatrix} D_n^{-1} & 0 \\ 0 & D_n^{-1} \end{bmatrix},$$

equação esta que por sua vez pode ser reescrita como

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_n D_0^{-1} \phi_n^t - \phi_n D_0^{-1} \psi_n^t = 0, \\ \psi_n D_0^{-1} \phi_{n+1}^t - \phi_n D_0^{-1} \psi_{n+1}^t = D_n^{-1}, \\ \psi_{n+1} D_0^{-1} \phi_n^t - \phi_{n+1} D_0^{-1} \psi_n^t = -D_n^{-1}, \\ \psi_{n+1} D_0^{-1} \phi_{n+1}^t - \phi_{n+1} D_0^{-1} \psi_{n+1}^t = 0. \end{array} \right.$$

□

Lema 3.6. *Sejam H como na Definição 2.1, F e ϕ as soluções de Jost em $+\infty$ e de Dirichlet para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, respectivamente. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,*

- (a) $F_n D_0^{-1} \phi_n^t - \phi_n D_0^{-1} F_n^t = 0.$
- (b) $F_n D_0^{-1} \phi_{n+1}^t - \phi_n D_0^{-1} F_{n+1}^t = D_n^{-1}.$
- (c) $F_{n+1} D_0^{-1} \phi_n^t - \phi_{n+1} D_0^{-1} F_n^t = -D_n^{-1}.$

Demonstração. Basta substituir na equação (3.2) as equações do Lema anterior. \square

Proposição 3.7. *Para H^ϕ , dado por (3.1), defina para $p, q \in \mathbb{Z}_+$,*

$$G^\phi(p, q; z) = \begin{cases} -\phi_p(z) D_0^{-1} F_q^t(z), & p \leq q, \\ -F_p(z) D_0^{-1} \phi_q^t(z), & p > q, \end{cases}$$

em que F e ϕ são, respectivamente, as soluções de Jost em $+\infty$ e de Dirichlet para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Então, para todo $\mathbf{u} \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l)$,

$$\sum_q G^\phi(p, q; z) \mathbf{u}_q = ((H^\phi - z)^{-1} \mathbf{u})_p; \quad (3.6)$$

em outras palavras, G^ϕ é a função de Green associada ao operador H^ϕ .

Demonstração. Segue-se do fato das matrizes F_n serem quadrado-somáveis que se $\mathbf{u} \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l)$, então

$$\left(\sum_q G^\phi(p, q; z) \mathbf{u}_q \right)_{p \in \mathbb{Z}_+} \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l).$$

Demonstraremos que

$$(H^\phi - z) \left(\sum_q G^\phi(p, q; z) \mathbf{u}_q \right)_{p \in \mathbb{Z}_+} = (\mathbf{u}_p)_{p \in \mathbb{Z}_+}.$$

Por definição, omitindo a dependência de z em $G^\phi(p, q; z)$,

$$\begin{aligned} (H^\phi - z) \left(\sum_q G^\phi(p, q) \mathbf{u}_q \right)_{p \in \mathbb{Z}_+} &= \left(\sum_q D_p G^\phi(p+1, q) \mathbf{u}_q \right)_{p \in \mathbb{Z}_+} \\ &\quad + \left(\sum_q D_{p-1} G^\phi(p-1, q) \mathbf{u}_q \right)_{p \in \mathbb{Z}_+} \\ &\quad + \left(\sum_q (V_p - z) G^\phi(p, q) \mathbf{u}_q \right)_{p \in \mathbb{Z}_+}. \end{aligned}$$

Fixado p , temos de separar os casos. Para $q < p-1$,

$$\begin{aligned} &D_p G^\phi(p+1, q) \mathbf{u}_q + D_{p-1} G^\phi(p-1, q) \mathbf{u}_q + (V_p - z) G^\phi(p, q) \mathbf{u}_q = \\ &= -D_p F_{p+1} D_0^{-1} \phi_q^t \mathbf{u}_q - D_{p-1} F_{p-1} D_0^{-1} \phi_q^t \mathbf{u}_q - (V_p - z) F_p D_0^{-1} \phi_q^t \mathbf{u}_q = \\ &= -[D_p F_{p+1} + D_{p-1} F_{p-1} + (V_p - z) F_p] D_0^{-1} \phi_q^t \mathbf{u}_q = \\ &= -[0] D_0^{-1} \phi_q^t \mathbf{u}_q = \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Para $q = p-1$,

$$\begin{aligned} &D_p G^\phi(p+1, q) \mathbf{u}_q + D_{p-1} G^\phi(p-1, q) \mathbf{u}_q + (V_p - z) G^\phi(p, q) \mathbf{u}_q = \\ &= -D_p F_{p+1} D_0^{-1} \phi_q^t \mathbf{u}_q - D_{p-1} \phi_{p-1} D_0^{-1} F_q^t \mathbf{u}_q - (V_p - z) F_p D_0^{-1} \phi_q^t \mathbf{u}_q = \\ &= -D_p F_{p+1} D_0^{-1} \phi_q^t \mathbf{u}_q - D_{p-1} F_{p-1} D_0^{-1} \phi_q^t \mathbf{u}_q - (V_p - z) F_p D_0^{-1} \phi_q^t \mathbf{u}_q = \\ &= -[D_p F_{p+1} + D_{p-1} F_{p-1} + (V_p - z) F_p] D_0^{-1} \phi_q^t \mathbf{u}_q = \\ &= -[0] D_0^{-1} \psi_q^t \mathbf{u}_q = \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

onde usamos o Lema 3.6 (a) na segunda igualdade. Para $q = p$,

$$\begin{aligned}
& D_q G^\phi(q+1, q) \mathbf{u}_q + D_{q-1} G^\phi(q-1, q) \mathbf{u}_q + (V_q - z) G^\phi(q, q) \mathbf{u}_q = \\
&= -D_q F_{q+1} D_0^{-1} \phi_q^t \mathbf{u}_q - D_{q-1} \phi_{q-1} D_0^{-1} F_q^t \mathbf{u}_q - (V_q - z) \phi_q D_0^{-1} F_q^t \mathbf{u}_q = \\
&= -(D_q \phi_{q+1} D_0^{-1} F_q^t - \mathbb{I}) \mathbf{u}_q - D_{q-1} \phi_{q-1} D_0^{-1} F_q^t \mathbf{u}_q - (V_q - z) \phi_q D_0^{-1} F_q^t \mathbf{u}_q = \\
&= -[D_q \phi_{q+1} + D_{q-1} \phi_{q-1} + (V_q - z) \phi_q] D_0^{-1} F_q^t \mathbf{u}_q + \mathbf{u}_q = \\
&= -[0] D_0^{-1} F_q^t \mathbf{u}_q + \mathbf{u}_q = \\
&= \mathbf{u}_q,
\end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, utilizamos o Lema 3.6 (c). Para $q \geq p+1$,

$$\begin{aligned}
& D_p G^\phi(p+1, q) \mathbf{u}_q + D_{p-1} G^\phi(p-1, q) \mathbf{u}_q + (V_p - z) G^\phi(p, q) \mathbf{u}_q = \\
&= -D_p \phi_{p+1} D_0^{-1} F_q^t \mathbf{u}_q - D_{p-1} \phi_{p-1} D_0^{-1} F_q^t \mathbf{u}_q - (V_p - z) \phi_p D_0^{-1} F_q^t \mathbf{u}_q = \\
&= -[D_p \phi_{p+1} + D_{p-1} \phi_{p-1} - (V_p - z) \phi_p] D_0^{-1} F_q^t \mathbf{u}_q = \\
&= -[0] D_0^{-1} F_q^t \mathbf{u}_q = \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

□

3.3 Suportes Espectrais

A função de Green $G^\phi(p, q; z)$ definida em \mathbb{C}_+ , para p, q fixados, é uma função de Herglotz (Definição D.1) e, portanto, segue-se da Proposição D.2 que

$$\lim_{y \downarrow 0} G^\phi(p, q; x \pm iy)$$

existe para Lebesgue quase todo x . Mais ainda, pelo Teorema Espectral (Proposição B.12), temos que, para todo $\mathbf{u} \in l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l)$,

$$\langle (H^\phi - z)^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \int \frac{1}{x - z} d\mu_{\mathbf{u}}(x).$$

Se tomarmos os l vetores canônicos $(\mathbf{e}_{1,k})_{k=1,\dots,l}$ em $(\mathbb{C}^l)^{\mathbb{Z}_+}$, dados por

$$(\mathbf{e}_{1,k})_{n,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, j = k, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.7)$$

segue-se da identidade (3.6) e da fórmula de inversão de Stieltjes (Proposição D.4) que as medidas espectrais $d\mu_{\mathbf{e}_{1,k}}(x)$ são obtidas como o limite, quando $y \downarrow 0$, da parte imaginária dos elementos diagonais da matriz $Q := G^\phi(1, 1; x + iy)$.

Como os vetores $(\mathbf{e}_{1,k})_{k=1,\dots,l}$ formam uma base espectral para H^ϕ (Definição B.18), denomina-se medida espectral do operador H^ϕ a matriz $(d\mu_{\mathbf{e}_{1,i}, \mathbf{e}_{1,j}})_{1 \leq i, j \leq l}$.

Proposição 3.8 (Suporte Minimal para a Componente Absolutamente Contínua). *Sejam H^ϕ , dado por (3.1), M_+^ϕ a matriz de Weyl-Titchmarsh associada, definida por (3.2), e $1 \leq j \leq l$. Então, o conjunto*

$$\Sigma_{ac,j}^\phi := \{x \in \mathbb{R}; \exists \lim_{y \downarrow 0} M_+^\phi(x + iy), [\lim_{y \downarrow 0} \Im[M_+^\phi(x + iy)]] = j\}$$

é um suporte minimal (vide Definição D.8) para a componente absolutamente contínua de multiplicidade j da medida espectral (Definição B.19), e o conjunto

$$\Sigma_{ac}^\phi := \bigcup_{j=1}^l \Sigma_{ac,j}^\phi$$

é um suporte minimal para a componente absolutamente contínua. Além disso, o conjunto

$$\Sigma_s^\phi := \{x \in \mathbb{R}; \lim_{y \downarrow 0} \Im[[M_+^\phi(x + iy)]] = \infty\}$$

é um suporte minimal para a componente singular.

Demonstração. Por definição,

$$G^\phi(1, 1; z) = -\phi_1 D_0^{-1} F_1^t = D_0^{-1} D_0^t (M_+^\phi)^t = M_+^\phi. \quad (3.8)$$

Desta maneira, $\Sigma_{ac,r}$ e Σ_c são os suportes dados pela Proposição D.10, considerando $G^\phi(1, 1; z)$ como uma função Herglotz a valores matriciais. \square

Necessitamos analisar, como veremos adiante, a relação entre as medidas espectrais de operadores que diferem entre si por um operador de posto finito. Com efeito, podemos relacionar as extensões (2.17) e (2.19) por perturbações deste tipo. Por exemplo, se H_B^+ e H_C^+ são operadores da forma (2.17), então

$$H_B^+ - H_C^+ = (C - B) \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{1,j} \rangle \mathbf{e}_{1,j} \right). \quad (3.9)$$

Caso H_B^+ e H_C^+ sejam da forma (2.19), então

$$\begin{aligned} H_B^+ - H_C^+ &= V_1(C - B)D_0 \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{0,j} \rangle \mathbf{e}_{1,j} \right) \\ &\quad + D_1(C - B)D_0 \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{0,j} \rangle \mathbf{e}_{2,j} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Mais ainda, se H_B^+ é da forma (2.17) e H_C^+ é da forma (2.19), então

$$\begin{aligned} H_B^+ - H_C^+ &= (V_1 - B) \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{1,j} \rangle \mathbf{e}_{1,j} \right) + D_1 \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{1,j} \rangle \mathbf{e}_{2,j} \right) \\ &\quad + (V_1 C D_0 - D_0) \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{0,j} \rangle \mathbf{e}_{1,j} \right) \\ &\quad + (D_1 C D_0) \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{0,j} \rangle \mathbf{e}_{2,j} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Mais especificamente, será necessário (como discutido nos Capítulos 5 e 6) relacionar suportes minimais das componentes absolutamente contínuas de multiplicidades arbitrárias das medidas espectrais associadas aos operadores de Dirichlet, dado por (3.1), e de Neumann, definido a partir de (2.17) com a condição

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, e representado como

$$H^\psi \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ D_0 & 0 & D_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & V_2 & D_2 & \dots \\ 0 & 0 & D_2 & V_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Estes operadores satisfazem a relação

$$H^\phi = H^\psi + V_1 \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{1,j} \rangle \mathbf{e}_{1,j} \right) + D_1 \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{1,j} \rangle \mathbf{e}_{2,j} \right) - D_0 \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{2,j} \rangle \mathbf{e}_{0,j} \right).$$

A saber, perturbações de posto finito preservam cada componente absolutamente contínua do espectro com a respectiva multiplicidade. O caminho mais direto para se demonstrar este fato é apelar ao Teorema de Kato-Rosenblum, assim como em [Kotani & Simon \[1988\]](#).

Proposição 3.9. *Sejam H^ϕ e H^ψ , dados por (3.1) e (3.12), respectivamente. Então, para $1 \leq j \leq l$, $\sigma_{ac,j}(H^\phi) = \sigma_{ac,j}(H^\psi)$.*

Demonstração. Considere $\{\mathbf{e}_{2,1}, \mathbf{e}_{2,2}, \dots, \mathbf{e}_{2,l}\}$ como uma base espectral (Definição B.18) para H^ϕ e H^ψ . Considere ainda, para $1 \leq k \leq l$, os operadores H_k^ϕ, H_k^ψ dados pelas restrições ao subespaço gerado por $\mathbf{e}_{2,k}$.

Uma vez que, para cada k , H_k^ϕ é uma perturbação de posto finito de H_k^ψ , os operadores H_k^ϕ, H_k^ψ tem o mesmo espectro absolutamente contínuo, pelo Teorema de Kato-Rosenblum (Proposição B.21). Logo, fixado j , $\sigma_{ac,j}^\phi = \sigma_{ac,j}^\psi$ (Definição B.19). \square

Também desejamos relacionar os operadores H_+^ϕ, H_-^ϕ , definidos em \mathbb{Z}_+ e \mathbb{Z}_- ,

respectivamente, e H , definido em \mathbb{Z} ; a saber

$$\begin{aligned} H &= \left(H_+^\phi \oplus H_-^\phi \right) + V_0 \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{0,j} \rangle \mathbf{e}_{0,j} \right) \\ &\quad + D_0 \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{0,j} \rangle \mathbf{e}_{1,j} \right) + D_0 \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{1,j} \rangle \mathbf{e}_{0,j} \right) \\ &\quad + D_{-1} \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{0,j} \rangle \mathbf{e}_{-1,j} \right) + D_{-1} \left(\sum_{j=1}^l \langle \cdot, \mathbf{e}_{-1,j} \rangle \mathbf{e}_{0,j} \right). \end{aligned}$$

Proposição 3.10. *Sejam H , como na Definição 2.1, definido em $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^l)$, H_+^ϕ , dado por (3.1), definido em $l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l)$, e H_-^ϕ seu análogo definido em $l^2(\mathbb{Z}_-, \mathbb{C}^l)$. Então, para $1 \leq j \leq 2l$, $\sigma_{ac,j}(H) = \sigma_{ac,j}(H_+^\phi \oplus H_-^\phi)$.*

Demonstração. Considere $\{\mathbf{e}_{1,1}, \mathbf{e}_{1,2}, \dots, \mathbf{e}_{1,l}, \mathbf{e}_{-1,1}, \mathbf{e}_{-1,2}, \dots, \mathbf{e}_{-1,l}\}$ como uma base espectral (Definição B.18) para H e $(H_+^\phi \oplus H_-^\phi)$. Para $1 \leq k \leq l$ e $m = -1, 1$, sejam os operadores $H_{m,k}$ e $(H_+^\phi \oplus H_-^\phi)_{m,k}$ dados pelas restrições de H e $(H_+^\phi \oplus H_-^\phi)$ ao subespaço gerado por $\mathbf{e}_{m,k}$.

Uma vez que $(H_+^\phi \oplus H_-^\phi)_{m,k}$ é uma perturbação de posto finito de $H_{m,k}$, novamente pelo Teorema de Kato-Rosenblum, os espectros absolutamente contínuos de $H_{m,k}$ e $(H_+^\phi \oplus H_-^\phi)_{m,k}$ coincidem. \square

Capítulo 4

Comportamento Assintótico de Auto-soluções

Uma das maneiras possíveis de estudar as medidas espectrais associadas a um operador é a partir da análise do comportamento assintótico das soluções da equação de autovalores.

No contexto de operadores de Schrödinger escalares, e mais geralmente operadores de Sturm-Liouville, tal análise é realizada de forma bem sucedida pela teoria de subordinação, desenvolvida em [Khan & Gilbert \[1992\]](#) e [Pearson & Gilbert \[1987\]](#). Porém, a informação fornecida por esta abordagem pode ser obtida, quase integralmente, a partir de uma desigualdade apresentada em [Jitomirskaya & Last \[1999\]](#), que é um caminho mais curto para a análise do comportamento das soluções.

O conceito de solução subordinada surgiu primeiramente em [Gilbert \[1984\]](#), tese de Gilbert, seguida pela publicação de diversos trabalhos da mesma autora adaptando a teoria a casos específicos de operadores de Schrödinger.

Segundo [Pearson & Gilbert \[1987\]](#), a motivação do conceito tem origem nos trabalhos [Hartman & Wintner \[1949a\]](#), [Hartman & Wintner \[1947\]](#) e [Hartman & Wintner \[1949b\]](#), nos quais são analisadas as relações entre a proporção de crescimento das auto-soluções e propriedades espectrais do operador.

A ideia inicial, uma vez que tais trabalhos tratam do caso escalar, é estudar

diretamente o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{|v_n|}$$

da razão de duas auto-soluções linearmente independentes. No entanto, este quociente pode ser um fator problemático caso alguma das auto-soluções se anule em uma infinidade de pontos. Por este motivo, esses trabalhos tratam de sistemas não-oscilatórios¹ de equações diferenciais.

A transição para o conceito de solução subordinada permite, entre outros benefícios, contornar esta dificuldade. No caso escalar, uma solução da equação de autovalores u é dita subordinada em $+\infty$ se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n |u_k|}{\sum_{k=1}^n |v_k|} = 0 \quad (4.1)$$

para toda v linearmente independente de \mathbf{u} que satisfaz a mesma equação de autovalores. A relação desta propriedade com a medida espectral se manifesta através dos seguintes conjuntos

$$B_{ac} := \{x \in \mathbb{R}; \text{ não há solução subordinada} \},$$

$$B_{sc} := \{x \in \mathbb{R}; \text{ há solução subordinada, que satisfaz condição de contorno na origem, mas que não pertence a } l^2(\mathbb{Z}_+; \mathbb{C}^l) \},$$

$$B_p := \{x \in \mathbb{R}; \text{ há solução subordinada quadrado-somável, que satisfaz condição de contorno na origem} \},$$

que caracterizam suportes minimais (Definição D.8) para as componentes absolutamente contínua, singular-contínua e puramente pontual da medida espectral do operador de Schrödinger escalar definido em $[0, \infty)$ (Pearson & Gilbert [1987], página 53).

No caso escalar, há apenas duas auto-soluções linearmente independentes, logo, para determinar se uma solução é subordinada, basta verificar a propriedade (4.1) para uma auto-solução linearmente independente. Ao tentar definir o conceito de solução subordinada no caso de uma dimensão maior surge uma dificuldade inerente à estrutura do operador, pois uma auto-função u pode, por exemplo,

¹Para mais detalhes, veja Hartman & Wintner [1949a], página 638 e Hartman [2002], página 355.

satisfazer a propriedade (4.1) para toda autofunção v em um subespaço próprio, mas não em relação a todas as demais soluções da equação de autovalores.

Nossa pretensão inicial, em relação à teoria de subordinação, era obter a uma teoria equivalente à teoria originalmente desenvolvida para operadores de Sturm-Liouville escalares. Não chegamos a cumprir completamente nosso plano, uma vez que o caminho que adotamos foi buscar uma generalização da desigualdade de Jitomirskaya-Last², e os resultados a que chegamos não possibilitaram uma caracterização idêntica. Isto se deve, entre outros fatores, ao aparecimento de um novo termo na desigualdade (Proposição 4.3), que se relaciona à proporção do crescimento das normas de auto-soluções com mesma condição inicial. A desigualdade que obtivemos, todavia, se mostrou suficiente para demonstrarmos, na Seção 5.2, os resultados que se referem a uma caracterização de um suporte minimal da componente absolutamente contínua de multiplicidade total da medida espectral.

Ressaltamos também o fato dos suportes para as componentes espectrais definidos na Proposição 3.8 se basearem no posto da matriz $\mathfrak{S}[M^\phi]$ (Definição 3.2), associada às medidas espectrais. Portanto, a fim de relacionarmos completamente tais suportes com o comportamento das auto-soluções, devemos lidar com os valores singulares da matriz $\mathfrak{S}[M^\phi]$ isoladamente. A desigualdade de Jitomirskaya-Last envolve a matriz M^ϕ e não a matriz $\mathfrak{S}[M^\phi]$ e, em princípio, não sabemos como se relacionam, entre si, os seus valores singulares, com exceção dos maiores.

Apesar da aparente impossibilidade de estender o conceito de solução subordinada a esta situação, ainda podemos prosseguir na proposta de relacionar o comportamento assintótico das auto-soluções com a medida espectral.

Precisaremos, como veremos no Capítulo 5, considerar não somente a norma das matrizes formadas por auto-soluções, mas também os valores singulares isoladamente.

Definição 4.1 (Norma Truncada). *Sejam $L > 1$, e $(B_n)_n \in (M(l, \mathbb{C}))^{\mathbb{N}}$ uma sequência de matrizes. Definimos a chamada norma truncada em L da sequência como*

$$\|B\|_L := \left(\sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \|B_n\|^2 + (L - \lfloor L \rfloor) \|B_{\lfloor L \rfloor + 1}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

²Jitomirskaya & Last [1999], página 174.

e os valores singulares (Definição C.2) truncados L como

$$s_k [B]_L := \left(\sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} s_k^2 [B_n] + (L - \lfloor L \rfloor) s_k^2 [B_{\lfloor L \rfloor + 1}] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Podemos verificar que, de fato, a norma truncada é uma norma. Para demonstrarmos a desigualdade triangular, observamos que

$$\begin{aligned} \|A + B\|_L &= \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \|A_n + B_n\|^2 + (L - \lfloor L \rfloor) \|A_{\lfloor L \rfloor + 1} + B_{\lfloor L \rfloor + 1}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \|A_n + B_n\|^2 + \left\| (L - \lfloor L \rfloor)^{\frac{1}{2}} A_{\lfloor L \rfloor + 1} + (L - \lfloor L \rfloor)^{\frac{1}{2}} B_{\lfloor L \rfloor + 1} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

e, utilizando a desigualdade triangular para seqüências de tamanho $\lfloor L \rfloor$,

$$\begin{aligned} \|A + B\|_L &\leq \left(\sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \|A_n\|^2 + \left\| (L - \lfloor L \rfloor)^{\frac{1}{2}} A_{\lfloor L \rfloor + 1} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \|B_n\|^2 + \left\| (L - \lfloor L \rfloor)^{\frac{1}{2}} B_{\lfloor L \rfloor + 1} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \|A_n\|^2 + (L - \lfloor L \rfloor) \|A_{\lfloor L \rfloor + 1}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \|B_n\|^2 + (L - \lfloor L \rfloor) \|B_{\lfloor L \rfloor + 1}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

assim,

$$\|A + B\|_L \leq \|A\|_L + \|B\|_L.$$

Nosso objetivo é relacionar, para $L \in \mathbb{N}$ e $z = x + iy \in \mathbb{C}_+$ fixados, as normas truncadas das matrizes formadas pelas soluções de Jost em z e as matrizes formadas pelas soluções de Neumann e Dirichlet em x . A ideia, extraída de [Khan & Gilbert \[1992\]](#) e [Jitomirskaya & Last \[1999\]](#), é utilizar uma fórmula de variação de parâmetros.

Lema 4.2. *Sejam, para $z = x + iy \in \mathbb{C}_+$, as matrizes $(F_n)_n$, segundo a Definição 3.1, e ψ_n, ϕ_n as soluções de Neumann e Dirichlet (Definição 3.4) em x . Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} F_n(z) &= \psi_n(x) - \phi_n(x)M^\phi(z)D_0 \\ &\quad - iy\psi_n(x) \sum_{k=1}^n D_0^{-1}\phi_k^t(x)F_k(z) \\ &\quad + iy\phi_n(x) \sum_{k=1}^n D_0^{-1}\psi_k^t(x)F_k(z), \end{aligned}$$

em que M^ϕ é segundo a Definição 3.2.

Observe que o membro direito não está definido para $n = 0$, mas sabemos pela Definição 3.1 que $F_0(z) = \mathbb{I}$.

Demonstração. Omitiremos a dependência das funções em x e z para não carregarmos a notação. Defina

$$B_n := \psi_n - \phi_n M^\phi D_0 - iy\psi_n \sum_{k=1}^n D_0^{-1}\phi_k^t F_k + iy\phi_n \sum_{k=1}^n D_0^{-1}\psi_k^t F_k,$$

com $B_0 := \mathbb{I}$. Mostraremos que B_n , assim definida, satisfaz, da mesma maneira que F_n , a equação de autovalores para z . Primeiramente calcularemos cada termo isoladamente: $D_n B_{n+1}$, $D_{n-1} B_{n-1}$ e $(V_n - x)B_n$. Para o termo $D_n B_{n+1}$, temos que

$$\begin{aligned} D_n B_{n+1} &= D_n (\psi_{n+1} - \phi_{n+1} M^\phi D_0) \\ &\quad - (iy D_n \psi_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} D_0^{-1} \phi_k^t F_k) \\ &\quad + (iy D_n \phi_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} D_0^{-1} \psi_k^t F_k). \end{aligned}$$

Podemos reescrever as duas últimas parcelas como

$$\begin{aligned} -iy D_n \psi_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} D_0^{-1} \phi_k^t F_k &= -iy D_n \psi_{n+1} D_0^{-1} \phi_{n+1}^t F_{n+1} - iy D_n \psi_{n+1} D_0^{-1} \phi_n^t F_n \\ &\quad - iy D_n \psi_{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} D_0^{-1} \phi_k^t F_k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} iyD_n\phi_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} D_0^{-1}\psi_k^t F_k &= iyD_n\phi_{n+1}D_0^{-1}\psi_{n+1}^t F_{n+1} + iyD_n\phi_{n+1}D_0^{-1}\psi_n^t F_n \\ &\quad + iyD_n\phi_{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} D_0^{-1}\psi_k^t F_k. \end{aligned}$$

Para o termo $D_{n-1}B_{n-1}$,

$$\begin{aligned} D_{n-1}B_{n-1} &= D_{n-1}\psi_{n-1} - D_{n-1}\phi_{n-1}M^\phi D_0 \\ &\quad - iyD_{n-1}\psi_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} D_0^{-1}\phi_k^t F_k \\ &\quad + iyD_{n-1}\phi_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} D_0^{-1}\psi_k^t F_k. \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} (V_n - x)B_n &= ((V_n - x)\psi_n - (V_n - x)\phi_n M^\phi D_0) \\ &\quad - (iy(V_n - x)\psi_n \sum_{k=1}^n D_0^{-1}\phi_k^t F_k) \\ &\quad + (iy(V_n - x)\phi_n \sum_{k=1}^n D_0^{-1}\psi_k^t F_k). \end{aligned}$$

Podemos novamente reescrever as duas últimas parcelas do membro direito da identidade anterior como

$$-iy(V_n - x)\psi_n \sum_{k=1}^n D_0^{-1}\phi_k^t F_k = -iy(V_n - x)\psi_n D_0^{-1}\phi_n^t F_n - iy(V_n - x)\psi_n \sum_{k=1}^{n-1} D_0^{-1}\phi_k^t F_k$$

e

$$iy(V_n - x)\phi_n \sum_{k=1}^n D_0^{-1}\psi_k^t F_k = iy(V_n - x)\phi_n D_0^{-1}\psi_n^t F_n + iy(V_n - x)\phi_n \sum_{k=1}^{n-1} D_0^{-1}\psi_k^t F_k.$$

Ao computarmos a soma $D_n B_{n+1} + D_{n-1} B_{n-1} + (V_n - x) B_n$ e ao agruparmos os termos nos quais surgem os fatores $\sum_{k=1}^{n-1} D_0^{-1}\psi_k^t F_k$ e $\sum_{k=1}^{n-1} D_0^{-1}\phi_k^t F_k$, temos

algumas simplificações, devidas ao fato de ϕ, ψ satisfazerem

$$\begin{cases} D_n \phi_{n+1} + D_{n-1} \phi_{n-1} + (V_n - x) \phi_n = 0, \\ D_n \psi_{n+1} + D_{n-1} \psi_{n-1} + (V_n - x) \psi_n = 0, \end{cases}$$

de modo que

$$\begin{aligned} & D_n B_{n+1} + D_{n-1} B_{n-1} + (V_n - x) B_n = \\ &= iy D_n \phi_{n+1} D_0^{-1} \psi_{n+1}^t F_{n+1} - iy D_n \psi_{n+1} D_0^{-1} \phi_{n+1}^t F_{n+1} \\ & \quad + iy D_n \phi_{n+1} D_0^{-1} \psi_n^t F_n - iy D_n \psi_{n+1} D_0^{-1} \phi_n^t F_n \\ & \quad + iy (V_n - x) \phi_n D_0^{-1} \psi_n^t F_n - iy (V_n - x) \psi_n D_0^{-1} \phi_n^t F_n. \end{aligned}$$

Podemos reescrever a última identidade como

$$\begin{aligned} & D_n B_{n+1} + D_{n-1} B_{n-1} + (V_n - x) B_n = \\ &= iy D_n (\phi_{n+1} D_0^{-1} \psi_{n+1}^t - \psi_{n+1} D_0^{-1} \phi_{n+1}^t) F_{n+1} \\ & \quad + iy D_n (\phi_{n+1} D_0^{-1} \psi_n^t - \psi_{n+1} D_0^{-1} \phi_n^t) F_n \\ & \quad iy (V_n - x) (\phi_n D_0^{-1} \psi_n^t - \psi_n D_0^{-1} \phi_n^t) F_n. \end{aligned}$$

Agora, utilizando as identidades do Lema 3.5, concluímos que

$$D_n B_{n+1} + D_{n-1} B_{n-1} + (V_n - x) B_n = iy F_n.$$

Por outro lado, como F_n é auto-solução em $x + iy$,

$$D_n F_{n+1} + D_{n-1} F_{n-1} + (V_n - x) F_n = iy F_n$$

A sequência B_n , por definição, satisfaz $B_0 = \mathbb{I}$ e $B_1 = -M^\phi D_0$. No caso

da sequência F_n , devido à Definição 3.2, temos que $F_1 = -M^\phi D_0$ e também, pela Definição 3.1, $F_0 = \mathbb{I}$. Como F e B coincidem nos sítios 0 e 1 e satisfazem a mesma relação de segunda ordem, segue-se que $F = B$. \square

Considere as sequências de matrizes ψ_n, ϕ_n formadas por auto-soluções (Definição 3.4). As auto-soluções que formam as colunas destas sequências também geram todo o auto-espço. Da constância do Wronskiano para auto-soluções, a existência de uma auto-solução cuja norma decai em $+\infty$ implica a existência de outra solução ilimitada em $+\infty$. Isto garante que ou $\|\psi_n\|$, ou $\|\phi_n\|$ cresce indefinidamente quando n cresce. Assim, se definirmos a função $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ pela lei

$$f(L) := \|\psi\|_{\lfloor L \rfloor} \|\phi\|_{\lfloor L \rfloor} + (L - \lfloor L \rfloor) \|\psi\|_{\lfloor L \rfloor + 1} \|\phi\|_{\lfloor L \rfloor + 1},$$

temos que f é contínua, crescente e $\lim_{L \rightarrow \infty} f(L) = \infty$ devido à constância do Wronskiano. Desta maneira, dado $y > 0$ arbitrariamente pequeno, existe $L(y)$ tal que

$$y \|D_0^{-1}\| \left(\|\psi\|_{\lfloor L \rfloor} \|\phi\|_{\lfloor L \rfloor} + (L - \lfloor L \rfloor) \|\psi\|_{\lfloor L \rfloor + 1} \|\phi\|_{\lfloor L \rfloor + 1} \right) = 1. \quad (4.2)$$

Proposição 4.3. *Sejam $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $M^\phi(x + iy)$, ψ_n e ϕ_n como no enunciado do Lema 4.2. Então, existem constantes $k_1, k_2 > 0$ tais que³*

$$k_1 \frac{\|\psi\|_{L(y)}}{\|\phi\|_{L(y)}} \leq \|M^\phi(x + iy)\| \leq k_2 \frac{\|\psi\|_{L(y)}}{\|\phi\|_{L(y)}} \frac{\|\phi\|_{L(y)}^2}{s_l[\phi]_{L(y)}^2}.$$

em que $L(y) > 0$ é dado por (4.2).

Demonstração. Pelo Lema 4.2, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \psi_n - \phi_n M^\phi D_0 - iy \psi_n \alpha_n + iy \phi_n \beta_n, \quad (4.3)$$

onde

$$\begin{cases} \alpha_n & := \sum_{k=1}^n D_0^{-1} \phi_k^t F_k, \\ \beta_n & := \sum_{k=1}^n D_0^{-1} \psi_k^t F_k. \end{cases}$$

³O termo $\frac{\|\phi\|_{L(y)}^2}{s_l[\phi]_{L(y)}^2}$ presente na desigualdade é o chamado número de condição. O número de condição de uma aplicação linear A é a quantidade $\|A\| \|A^{-1}\|$.

Desejamos relacionar as sequências de matrizes ψ_n, ϕ_n com a matriz M^ϕ e, para isto, utilizaremos a Proposição 3.3–b e a identidade (4.3). O primeiro passo é estimar os termos com α e β a fim de calcular (utilizando a norma matricial de Frobenius, Definição C.1), para um $L \in \mathbb{N}$ arbitrário, $\|F\|_L$:

$$\begin{aligned}
& \|\psi\alpha\|_L^2 = \\
&= \sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \left[\left(\sum_{k=1}^n \psi_n D_0^{-1} \phi_k^* F_k \right)^* \left(\sum_{k=1}^n \psi_n D_0^{-1} \phi_k^* F_k \right) \right] \\
& \quad + (L - \lfloor L \rfloor) \left[\left(\sum_{k=1}^{\lfloor L \rfloor + 1} \psi_{\lfloor L \rfloor + 1} D_0^{-1} \phi_k^* F_k \right)^* \left(\sum_{k=1}^{\lfloor L \rfloor + 1} \psi_{\lfloor L \rfloor + 1} D_0^{-1} \phi_k^* F_k \right) \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \left[\left(\sum_{k=1}^n F_k^* \phi_k D_0^{-1} \psi_n^* \right) \left(\sum_{k=1}^n \psi_n D_0^{-1} \phi_k^* F_k \right) \right] \\
& \quad + (L - \lfloor L \rfloor) \left[\left(\sum_{k=1}^{\lfloor L \rfloor + 1} F_k^* \phi_k D_0^{-1} \psi_{\lfloor L \rfloor + 1}^* \right) \left(\sum_{k=1}^{\lfloor L \rfloor + 1} \psi_{\lfloor L \rfloor + 1} D_0^{-1} \phi_k^* F_k \right) \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \left[\left(\sum_{k=1}^n F_k^* \phi_k \right) D_0^{-1} \psi_n^* \psi_n D_0^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \phi_k^* F_k \right) \right] \\
& \quad + (L - \lfloor L \rfloor) \left[\left(\sum_{k=1}^{\lfloor L \rfloor + 1} F_k^* \phi_k \right) D_0^{-1} \psi_{\lfloor L \rfloor + 1}^* \psi_{\lfloor L \rfloor + 1} D_0^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor L \rfloor + 1} \phi_k^* F_k \right) \right].
\end{aligned}$$

Pela ciclicidade do traço, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\sum_{k=1}^n F_k^* \phi_k \right) D_0^{-1} \psi_n^* \psi_n D_0^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \phi_k^* F_k \right) \right] = \\
&= \left[\psi_n D_0^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \phi_k^* F_k \right) \left(\sum_{k=1}^n F_k^* \phi_k \right) D_0^{-1} \psi_n^* \right] = \\
&= \left[D_0^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \phi_k^* F_k \right) \left(\sum_{k=1}^n F_k^* \phi_k \right) D_0^{-1} \psi_n^* \psi_n \right]
\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para a norma de Frobenius,

$$\begin{aligned}
& [(\sum_{k=1}^n F_k^* \phi_k) D_0^{-1} \psi_n^* \psi_n D_0^{-1} (\sum_{k=1}^n \phi_k^* F_k)] = \\
& = [D_0^{-1} (\sum_{k=1}^n \phi_k^* F_k) (\sum_{k=1}^n F_k^* \phi_k) D_0^{-1} \psi_n^* \psi_n] \leq \\
& \leq [D_0^{-1} (\sum_{k=1}^n \phi_k^* F_k) (\sum_{k=1}^n F_k^* \phi_k) D_0^{-1}] \text{tr} [\psi_n^* \psi_n] \leq \\
& \leq [(\sum_{k=1}^n \phi_k^* F_k) (\sum_{k=1}^n F_k^* \phi_k)] [D_0^{-2}] \text{tr} [\psi_n^* \psi_n].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \|\psi \alpha\|_L^2 \leq \\
& \leq \sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \|\psi_n\|^2 \|D_0^{-1}\|^2 [(\sum_{k=1}^n F_k^* \phi_k) (\sum_{k=1}^n \phi_k^* F_k)] \\
& \quad + \|\psi_{\lfloor L \rfloor + 1}\|^2 \|D_0^{-1}\|^2 (L - \lfloor L \rfloor) \left[\left(\sum_{k=1}^{\lfloor L \rfloor + 1} F_k^* \phi_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\lfloor L \rfloor + 1} \phi_k^* F_k \right) \right] \\
& = \|D_0^{-1}\|^2 \sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \|\psi_n\|^2 \left[\left(\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n F_p^* \phi_p \phi_q^* F_q \right) \right] \\
& \quad + \|\psi_{\lfloor L \rfloor + 1}\|^2 \|D_0^{-1}\|^2 (L - \lfloor L \rfloor) \left[\left(\sum_{p=1}^{\lfloor L \rfloor + 1} \sum_{q=1}^{\lfloor L \rfloor + 1} F_p^* \phi_p \phi_q^* F_q \right) \right] \\
& = \|D_0^{-1}\|^2 \sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \|\psi_n\|^2 \left(\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n [F_p^* \phi_p \phi_q^* F_q] \right) \\
& \quad + \|\psi_{\lfloor L \rfloor + 1}\|^2 \|D_0^{-1}\|^2 (L - \lfloor L \rfloor) \left(\sum_{p=1}^{\lfloor L \rfloor + 1} \sum_{q=1}^{\lfloor L \rfloor + 1} [F_p^* \phi_p \phi_q^* F_q] \right).
\end{aligned}$$

Novamente, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n [F_p^* \phi_p \phi_q^* F_q] = \\
&= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sqrt{[F_p^* F_p] [\phi_p \phi_p^*] [\phi_q^* \phi_q] [F_q F_q^*]} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{[F_k^* F_k] [\phi_k \phi_k^*]} \right) \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{[\phi_k^* \phi_k] [F_k F_k^*]} \right) \\
&= (\|F\|_n)^2 (\|\phi\|_n)^2,
\end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\|\psi \alpha\|_L^2 &\leq \|D_0^{-1}\|^2 \sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \|\psi_n\|^2 (\|F\|_n)^2 (\|\phi\|_n)^2 \\
&\quad + \|\psi_{\lfloor L \rfloor + 1}\|^2 \|D_0^{-1}\|^2 (L - \lfloor L \rfloor) \left(\|F\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 \left(\|\phi\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 \\
&\leq \|D_0^{-1}\|^2 \sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \|\psi_n\|^2 \left(\|F\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 \left(\|\phi\|_{\lfloor L \rfloor}\right)^2 \\
&\quad + \left(\|\psi\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 \|D_0^{-1}\|^2 (L - \lfloor L \rfloor) \left(\|F\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 \left(\|\phi\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2.
\end{aligned}$$

Logo, se tomarmos L tal qual em (4.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\|\psi_n \alpha_n\|_L^2 &\leq \|D_0^{-1}\|^2 \left(\|F\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 \left(\|\phi\|_{\lfloor L \rfloor}\right)^2 \sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} \|\psi_n\|^2 \\
&\quad + \|D_0^{-1}\|^2 (L - \lfloor L \rfloor) \left(\|F\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 \left(\|\phi\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 \left(\|\psi\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 \\
&\leq \|D_0^{-1}\|^2 \left(\|F\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 \left(\|\phi\|_{\lfloor L \rfloor}\right)^2 \left(\|\psi\|_{\lfloor L \rfloor}\right)^2 \\
&\quad + \|D_0^{-1}\|^2 \left(\|F\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 (L - \lfloor L \rfloor)^2 \left(\|\phi\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 \left(\|\psi\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 \\
&\leq \left(\|F\|_{\lfloor L \rfloor + 1}\right)^2 \left(\frac{1}{y}\right)^2.
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos demonstrar que

$$\|\phi\beta\|_L \leq \left(\|F\|_{[L]+1}\right) \left(\frac{1}{y}\right).$$

Concluimos de (4.3), pela Desigualdade Triangular, que

$$\begin{aligned} \|F\|_L &\geq \|\psi - \phi M^\phi D_0\|_L - \|iy\psi\alpha\|_L - \|iy\phi\beta\|_L \\ &\geq \|\psi - \phi M^\phi D_0\|_L - 2y \left(\|F\|_{[L]+1}\right) \left(\frac{1}{y}\right), \end{aligned}$$

e portanto que

$$\|\psi - \phi M^\phi D_0\|_L \leq \|F\|_L + 2\|F\|_{[L]+1} \leq 3\|F\|_{[L]+1}.$$

Tome o quadrado de cada membro da desigualdade acima:

$$\begin{aligned} 9\|F\|_{[L]+1}^2 &\geq \\ &\geq \|\psi\|_L^2 + \|\phi M^\phi D_0\|_L^2 - (L - [L]) \left[\psi_{[L]+1}^* \phi_{[L]+1} M^\phi D_0 \right] \\ &\quad - \sum_{n=1}^{[L]} \left[\psi_n^* \phi_n M^\phi D_0 \right] - \sum_{n=1}^{[L]} \left[D_0 (M^\phi)^* \phi_n^* \psi_n \right] \\ &\quad - (L - [L]) \left[D_0 (M^\phi)^* \phi_{[L]+1}^* \psi_{[L]+1} \right]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
& [D_0(M^\phi)^*\phi_n^*\psi_n] \leq \\
& \leq \sqrt{[D_0^*D_0]}\sqrt{[\psi_n^*\phi_n M^\phi(M^\phi)^*\phi_n^*\psi_n]} = \\
& = \|D_0\| \sqrt{[\psi_n^*\psi_n\phi_n M^\phi(M^\phi)^*\phi_n^*]} \leq \\
& \leq \|D_0\| \sqrt{\sqrt{[\psi_n^*\psi_n\psi_n\psi_n^*]}\sqrt{[\phi_n M^\phi(M^\phi)^*\phi_n^*\phi_n M^\phi(M^\phi)^*\phi_n^*]}} \leq \\
& \leq \|D_0\| \sqrt{[\psi_n^*][\phi_n M^\phi(M^\phi)^*\phi_n^*]} = \\
& = \|D_0\| \|\psi_n\| \sqrt{[\phi_n^*\phi_n M^\phi(M^\phi)^*]} \leq \\
& \leq \|D_0\| \|\psi_n\| \sqrt{\sqrt{[\phi_n^*\phi_n\phi_n\phi_n^*]}\sqrt{[M^\phi(M^\phi)^*(M^\phi)^*M^\phi]}} \leq \\
& \leq \|D_0\| \|\psi_n\| \sqrt{[\phi_n^*\phi_n][M^\phi(M^\phi)^*]} = \\
& = \|D_0\| \|\psi_n\| \|\phi_n\| \|M^\phi\|.
\end{aligned}$$

Podemos, então, limitar dois dos termos do membro direito da desigualdade (4.4) por

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\lfloor L \rfloor} [\psi_n^*\phi_n M D_0] + (L - \lfloor L \rfloor) [\psi_{\lfloor L \rfloor+1}^*\phi_{\lfloor L \rfloor+1} M^\phi D_0] \leq \\
& \leq \|D_0\| \|M^\phi\| \left(\|\psi\|_{\lfloor L \rfloor} \|\phi\|_{\lfloor L \rfloor} + (L - \lfloor L \rfloor) \|\psi_{\lfloor L \rfloor+1}\| \|\phi_{\lfloor L \rfloor+1}\| \right) \leq \\
& \leq \|M^\phi\| \left(\|\psi\|_{\lfloor L \rfloor} \|\phi\|_{\lfloor L \rfloor} + (L - \lfloor L \rfloor) \|\psi\|_{\lfloor L \rfloor+1} \|\phi\|_{\lfloor L \rfloor+1} \right) = \\
& = \|D_0\| \|M^\phi\| \frac{1}{y\|D_0^{-1}\|},
\end{aligned}$$

e assim obter

$$9 \|F\|_{[L]+1}^2 \geq \|\psi\|_L^2 + \|\phi M^\phi D_0\|_L^2 - 2 \|D_0\| \|M\| \frac{1}{y \|D_0^{-1}\|}. \quad (4.5)$$

Agora, utilizando as estimativas da Proposição C.5-(f),

$$\begin{aligned} \|\phi M^\phi D_0\|_L^2 &= \sum_{n=1}^{[L]} [\phi_n M^\phi D_0 D_0 (M^\phi)^* \phi_n^*] \\ &\quad + (L - [L]) [\phi_{[L]+1} M^\phi D_0 D_0 (M^\phi)^* \phi_{[L]+1}^*] \\ &\geq \|M^\phi\|^2 s_l[D_0^2] \sum_{n=1}^{[L]} s_l[\phi_n \phi_n^*] \\ &\quad + (L - [L]) \|M^\phi\|^2 s_l[D_0^2] s_l[\phi_{[L]+1} \phi_{[L]+1}^*] \\ &= \|M^\phi\|^2 s_l[D_0^2] s_l[\phi]_L^2, \end{aligned}$$

de modo que (4.5) se torna

$$9 \|F\|_{[L]+1}^2 \geq \|\psi\|_L^2 - 2 \|D_0\| \|M^\phi\| \frac{1}{y \|D_0^{-1}\|} + \|M^\phi\|^2 s_l[D_0^2] s_l[\phi]_L^2. \quad (4.6)$$

A Proposição 3.3-b garante que

$$\frac{[D_0 \Im[M^\phi] D_0]}{y} \geq \|F\|_{[L]+1}^2.$$

Agora, mais uma vez por Cauchy-Schwarz,

$$[D_0 \Im[M^\phi] D_0] = \text{tr}[D_0^2 \Im[M^\phi]] \leq \|D_0^2\| \|\Im[M^\phi]\|,$$

e como $\Im[M^\phi] = \frac{1}{2i}(M^\phi - \overline{M^\phi})$, pela desigualdade triangular, $\|\Im[M^\phi]\| \leq \|M^\phi\|$. Substituindo estas últimas estimativas em (4.6), obtemos uma inequação quadrática em relação a $\|M^\phi\|$:

$$\frac{9}{y} \|D_0^2\| \|M^\phi\| \geq \|\psi\|_L^2 - 2 \|D_0\| \|M^\phi\| \frac{1}{y \|D_0^{-1}\|} + \|M^\phi\|^2 s_l[D_0^2] s_l[\phi]_L^2,$$

ou seja,

$$y \|\psi\|_L^2 - \left(2 \frac{\|D_0\|}{\|D_0^{-1}\|} + 9 \|D_0^2\| \right) \|M^\phi\| + y \|M^\phi\|^2 s_l[D_0^2] s_l[\phi]_L^2 \leq 0,$$

e, assim, temos uma inequação da forma

$$a \|M^\phi\|^2 + b \|M^\phi\| + c \leq 0,$$

com

$$\begin{cases} a := y (s_l[D_0^2]) (s_l[\phi]_L^2) \\ b := - \left(2 \frac{\|D_0\|}{\|D_0^{-1}\|} + 9 \|D_0\|^2 \right), \\ c := y \|\psi\|_L^2. \end{cases}$$

Ao computarmos o discriminante, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(2 \frac{\|D_0\|}{\|D_0^{-1}\|} + 9 \|D_0\|^2 \right)^2 - 4y^2 (s_l[D_0^2]) (s_l[\phi]_L^2) \|\psi\|_L^2 \\ &\geq \left(2 \frac{\|D_0\|}{\|D_0^{-1}\|} + 9 \|D_0\|^2 \right)^2 - 4 \left(\frac{s_l[D_0^2]}{\|D_0^{-1}\|^2} \right) \\ &> 0, \end{aligned}$$

o que nos mostra que a equação quadrática correspondente admite duas soluções distintas. Logo, podemos estabelecer as desigualdades

$$\frac{-c}{b} < \|M^\phi\| < \frac{-2b}{a},$$

ou seja,

$$\left(-\frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{\|D_0^{-1}\|} \right) \left(\frac{\|\psi\|_L}{\|\phi\|_L} \right) < \|M^\phi\| < -2b \left(\frac{\|D_0^{-1}\|}{s_l[D_0^2]} \right) \left(\frac{\|\phi\|_L^2}{s_l[\phi]_L^2} \right) \left(\frac{\|\psi\|_L}{\|\phi\|_L} \right).$$

O resultado se segue ao definirmos k_1, k_2 como

$$\begin{cases} k_1 &= -\left(\frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{\|D_0^{-1}\|}\right), \\ k_2 &= -2b \left(\frac{\|D_0^{-1}\|}{s_i[D_0^2]}\right). \end{cases}$$

□

Capítulo 5

Critérios para Componentes Espectrais

Neste capítulo, buscaremos uma caracterização da componente espectral absolutamente contínua de multiplicidade j , para $j = \{1, 2, \dots, l\}$, do operador de Jacobi H_+^ϕ , dado por (3.1). Nosso ponto de partida é o resultado obtido por Last e Simon em [Last & Simon \[1999\]](#) para o caso escalar, que estabelece um suporte minimal da componente absolutamente contínua em termos do comportamento da soma de Cèsaro do quadrado da norma da matriz de transferência, isto é,

$$\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|A_n(x)\|^2.$$

O suporte minimal obtido em [Last & Simon \[1999\]](#) tem medida de Lebesgue total na componente absolutamente contínua do espectro e, mais ainda, a componente singular da medida espectral atribui peso nulo a este conjunto.

Para estendermos esta caracterização para dimensões maiores, pretendemos estratificar a informação relacionada à norma da matriz de transferência através de seus valores singulares.

No caso de tentarmos descrever as componentes espectrais através dos suportes minimais $\Sigma_{ac,j}^\phi$ dados pela Proposição 3.8, mesmo no caso de multiplicidade parcial, há a exigência de que o limite da matriz espectral exista, o que exclui o

suporte correspondente à componente singular. A primeira dificuldade que encontramos é garantir que a componente singular da medida espectral atribua peso nulo ao suporte. Para o caso de multiplicidade parcial da componente absolutamente contínua, não utilizaremos o suporte da Proposição 3.8. Se tentamos descrever a componente absolutamente contínua de multiplicidade arbitrária, a menos que seja de multiplicidade total, não sabemos se o suporte para esta componente excluirá a componente singular. Apesar de não termos garantias que tal suporte tenha peso nulo com respeito à componente singular medida espectral, o conjunto de pontos ao qual a componente singular atribui peso nulo tem, obviamente, medida de Lebesgue nula. Portanto, ao tomarmos o fecho essencial (Definição D.11) deste conjunto com respeito à medida de Lebesgue, teremos uma caracterização da parte absolutamente contínua do espectro.

Há, também, a dificuldade em relacionar o crescimento da norma das auto-soluções com os valores singulares das matrizes de transferência. Podemos obter as mesmas propriedades do suporte descrito em Last & Simon [1999] apenas para a componente absolutamente contínua de multiplicidade total. Para as componentes de multiplicidade parcial, não fomos capazes de relacionar o suporte diretamente com os valores singulares das matrizes de transferência, mas apenas com os valores singulares das matrizes ψ e ϕ , formadas pelas soluções de Neumann e Dirichlet (Definição 3.4). Também, neste caso, o suporte é obtido ao tomarmos o fecho essencial de um conjunto com respeito à medida de Lebesgue (vide Seção 5.1).

O que faremos na Seção 5.2, que discute a determinação de um suporte minimal da componente espectral absolutamente contínua de multiplicidade total do operador H^ϕ , é, para um $x \in \mathbb{R}$, relacionar o comportamento assintótico das matrizes de transferência com as matrizes de Neumann e Dirichlet. Sabemos, por meio do capítulo precedente, relacionar estas últimas à matriz M^ϕ . Com efeito, a

conexão entre as matrizes de transferência e M^ϕ é dada pelas relações:

$$\begin{array}{ccc}
 & \|\psi(x)\|_{L(y)} & \\
 & \nearrow \swarrow (a) & (c) \searrow \nearrow \\
 \|A(x)\|_{L(y)} & & M(x + iy) \\
 & \searrow \nearrow (b) & (d) \nearrow \swarrow \\
 & \|\phi(x)\|_{L(y)} &
 \end{array}$$

As passagens (c), (d) são dadas pela Proposição 4.3, e as passagens (a), (b) serão demonstradas no Lemas 5.11 e 5.12.

Assumiremos, neste capítulo, as seguinte condições com respeito aos valores singulares das matrizes D_n :

$$0 < \inf_{n \in \mathbb{Z}_+} s_l[D_n] \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} s_1[D_n] < \infty. \quad (5.1)$$

A primeira condição nos diz que as matrizes D_n são não-singulares¹, ou seja, que $\det(D_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Mas, tal como expresso pela condição, necessitamos de uma exigência maior: que a sequência $(s_l[D_n])_{n \in \mathbb{Z}_+}$ seja limitada inferiormente por um número estritamente positivo.

5.1 Caracterização da Componente Absolutamente Contínua de Multiplicidade Arbitrária

Considerando as matrizes ϕ, ψ , segundo a Definição 3.4, mostraremos que, para cada $1 \leq r \leq l-1$ (respectivamente $r = l$), o fecho essencial com respeito à medida

¹Neste caso, o próprio operador é dito não-singular, conforme Marx & Jitomirskaya [2017], página 2.

de Lebesgue do conjunto $\mathcal{S}_r \setminus \mathcal{S}_{r+1}$ (respectivamente \mathcal{S}_l), onde

$$\mathcal{S}_r := \left\{ x \in \mathbb{R}; \liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L s_{l-r+1}^2[\phi_n(x)] + s_{l-r+1}^2[\psi_n(x)] < \infty \right\} \quad (5.2)$$

coincide com a componente espectral absolutamente contínua de multiplicidade r (respectivamente l) do operador H^ϕ . Mais ainda, pela discussão realizada na Seção 3.3, $\sigma_{ac,r}(H^\phi) = \sigma_{ac,r}(H^\psi)$; segue-se, portanto que $\overline{\mathcal{S}_r \setminus \mathcal{S}_{r+1}}^{ess}$ coincide com a componente espectral absolutamente contínua de multiplicidade r do operador H^ψ , e, mais ainda, de qualquer extensão auto-adjunta de H_{min}^+ (em particular, as extensões dadas por (2.17) e (2.19)).

Começaremos a discussão por relacionando o espectro com o decaimento de auto-soluções, conforme argumento utilizado em Teschl [2000], página 33.

Lema 5.1. *Sejam H^ϕ , dado por (3.1), e para algum $1 \leq k \leq l$, $\mathbf{e}_{1,k} \in (\mathbb{C}^l)^\mathbb{N}$ um vetor canônico, segundo (3.7). Denote por H_k^ϕ a restrição de H^ϕ ao subespaço cíclico gerado por $\mathbf{e}_{1,k}$ (Definição B.17). Se $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_k^\phi)$, então existe uma auto-solução de H_k^ϕ em z que decai exponencialmente.*

Demonstração. Desejamos mostrar que existem $C, \alpha > 0$ tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|g(1, n)e^{\alpha n}| < C,$$

em que g é a função de Green do operador H_k^ϕ nos sítios 1 e n :

$$g(1, n) := \left\langle (\mathbf{e}_{1,k})_1, ((H_k^\phi - z)^{-1} \mathbf{e}_{1,k})_n \right\rangle_{\mathbb{C}^l}.$$

Para $\alpha > 0$ arbitrário, considere os operadores

$$(Q_\alpha \mathbf{u})_n := (e^\alpha - 1)D_n \mathbf{u}_{n+1} + (e^{-\alpha} - 1)D_{n-1} \mathbf{u}_{n-1},$$

$$(P_\alpha \mathbf{u})_n := e^{\alpha n} \mathbf{u}_n$$

em $(\mathbb{C}^l)^\mathbb{N}$. Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{\alpha(n-1)} g(1, n) = \left\langle (\mathbf{e}_{1,k})_1, (P_{-\alpha}(H_k^\phi - z)^{-1} P_\alpha \mathbf{e}_{1,k})_n \right\rangle_{\mathbb{C}^l}.$$

Por outro lado,

$$P_{-\alpha}(H_k^\phi - z)P_\alpha = (H_k^\phi - z + Q_\alpha),$$

de modo que

$$e^{\alpha(n-1)}g(1, n) = \left\langle \mathbf{e}_{1,k}, ((H_k^\phi - z + Q_\alpha)^{-1}\mathbf{e}_{1,k})_n \right\rangle_{\mathbb{C}^l}.$$

Assim, a limitação da sequência $(e^{\alpha(n-1)}g(1, n))_{n \in \mathbb{N}}$ se seguirá da limitação do operador $(H_k^\phi - z + Q_\alpha)^{-1}$. Para tanto, devemos estimar Q_α :

$$\|Q_\alpha\| \leq 2(e^\alpha - 1) \sup_n \|D_n\|.$$

Considere $\delta = (z, \sigma(H_k^\phi))$. Se tomarmos $\epsilon > 0$ tal que

$$\alpha = \log \left(1 + \frac{(1 - \epsilon)}{2 \sup_n \|D_n\|} \right),$$

teremos que $\|Q_\alpha\| \leq (1 - \epsilon)\delta$. A segunda identidade do resolvente estabelece que

$$(H_k^\phi - z + Q_\alpha)^{-1} = (H_k^\phi - z)^{-1} + (H_k^\phi - z + Q_\alpha)^{-1}(-Q_\alpha)(H_k^\phi - z)^{-1}.$$

Logo,

$$\left\| (H_k^\phi - z + Q_\alpha)^{-1} \right\| \leq \left\| (H_k^\phi - z)^{-1} \right\| + \left\| (H_k^\phi - z)^{-1} \right\| \|Q_\alpha\| \left\| (H_k^\phi - z + Q_\alpha)^{-1} \right\|,$$

e, uma vez que $\left\| (H_k^\phi - z)^{-1} \right\| = \delta^{-1}$,

$$\left\| (H_k^\phi - z + Q_\alpha)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\delta\epsilon}.$$

Segue-se que a sequência $(e^{\alpha(n-1)}g(1, n))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e, a partir da Função de Green, obtemos uma auto-solução que decai exponencialmente. □

Lema 5.2. *Sejam H^ϕ, H^ψ os operadores dados por (3.1) e (3.12), respectivamente, $\mathbf{e}_{1,k} \in (\mathbb{C}^l)^\mathbb{N}$ e H_k^ϕ , como no enunciado do Lema 5.1. Se $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_k^\phi)$, então*

existe uma solução da equação de autovalores em z do operador H^ψ que cresce exponencialmente.

Demonstração. Do lema anterior, existe uma auto-solução \mathbf{u} de H_k^ϕ que decai exponencialmente. Se \mathbf{v} é uma solução da equação de autovalores do operador H^ψ , necessariamente, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Logo,

$$W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(1) = \langle D_0 \mathbf{u}_1, \bar{\mathbf{v}}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_0 \mathbf{v}_1, \bar{\mathbf{u}}_0 \rangle_{\mathbb{C}^l} = \mathbf{u}_1^t D_0 \mathbf{v}_0.$$

Como D_0 é invertível, podemos tomar \mathbf{v} de maneira que $W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(1) = C \neq 0$. Da constância do Wronskiano, segue-se que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$W_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}(n) = \langle D_{n-1} \mathbf{u}_n, \bar{\mathbf{v}}_{n-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} - \langle D_{n-1} \mathbf{v}_n, \bar{\mathbf{u}}_{n-1} \rangle_{\mathbb{C}^l} = C,$$

e assim, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |C| &\leq \|D_{n-1}\| (\|\mathbf{u}_n\| \|\bar{\mathbf{v}}_{n-1}\| + \|\mathbf{v}_n\| \|\bar{\mathbf{u}}_{n-1}\|) \\ &\leq \left(\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|D_{n-1}\| \right) (\|\mathbf{u}_n\| \|\bar{\mathbf{v}}_{n-1}\| + \|\mathbf{v}_n\| \|\bar{\mathbf{u}}_{n-1}\|). \end{aligned}$$

Logo, $\|\mathbf{v}_n\|$ deve crescer exponencialmente. □

Teorema 5.3. *Dado $0 \leq r \leq l$, a restrição do espectro absolutamente contínuo do operador H^ϕ , dado (3.1), ao conjunto \mathcal{S}_r , dado por (5.2), tem multiplicidade no mínimo r .*

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{R}$, considere a base espectral $\{\mathbf{e}_{1,1}, \mathbf{e}_{1,2}, \dots, \mathbf{e}_{1,l}\}$ para H^ϕ e denote por H_j^ϕ a restrição de H^ϕ ao subespaço cíclico gerado por $\mathbf{e}_{1,j}$. Por definição,

$$\overline{\bigcup_{(k_1, \dots, k_r)} \bigcap_{j=1}^r \sigma(H_{k_j}^\phi)}^{\text{ess}}$$

é um suporte essencial do espectro absolutamente contínuo de multiplicidade no mínimo r , em que $\{k_1, \dots, k_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, l\}$. Suponha que x não pertença a este suporte; então, a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula, para toda

sequência (k_1, \dots, k_r) , existe um k_i tal que

$$x \notin \overline{\sigma(H_{k_i}^\phi)}^{ess}.$$

Se partimos, por exemplo, da sequência $\{1, 2, \dots, r\}$ em $\{1, 2, \dots, l\}$, existe $k_1 \in \{1, 2, \dots, r\}$ tal que

$$x \notin \overline{\sigma(H_{k_1}^\phi)}^{ess}.$$

Considere agora a sequência obtida retirando de $\{1, 2, \dots, r\}$ o elemento k_1 e substituindo-o pelo primeiro índice fora deste conjunto, ou seja, $r + 1$. Obtemos assim a sequência $\{1, 2, \dots, k_1 - 1, r + 1, k_1 + 1, \dots, r - 1, r\}$ em $\{1, 2, \dots, l\}$. Novamente, existe $k_2 \in \{1, 2, \dots, k_1 - 1, r + 1, k_1 + 1, \dots, r - 1, r\}$ tal que

$$x \notin \overline{\sigma(H_{k_2}^\phi)}^{ess}$$

e $k_2 \neq k_1$. Podemos repetir o raciocínio, substituindo k_2 em $\{1, 2, \dots, k_1 - 1, r + 1, k_1 + 1, \dots, r - 1, r\}$ por um número distinto de k_1 e obter k_3 , distinto de k_1 e k_2 , para o qual

$$x \notin \overline{\sigma(H_{k_3}^\phi)}^{ess}.$$

Desta maneira, repetindo o procedimento, existirão ao menos $l - r + 1$ valores distintos de k_i , para os quais

$$x \notin \overline{\sigma(H_{k_i}^\phi)}^{ess}.$$

Segue-se agora do Lema 5.2 a existência de $l - r + 1$ soluções distintas da equação de autovalores do operador H^ψ que crescem exponencialmente. Consequentemente, uma vez que as colunas $\psi_n(x)$ são formadas por soluções que satisfazem a condição de Neumann, e pela caracterização de aproximação de valores singulares (Proposição C.3),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{l-r+1}[\psi_n(x)] = \infty.$$

Logo,

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L s_{l-r+1}^2[\psi_n(x)] = \infty$$

e conseqüentemente, $x \notin \mathcal{S}_r$.

□

Demonstraremos, a seguir, a recíproca da Proposição 5.3.

Lema 5.4. *Seja G^ϕ a matriz da função de Green do operador H^ϕ , definida na Proposição 3.7. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,*

$$\int \lim_{y \downarrow 0} \mathfrak{S} G^\phi(n, n; x + iy) d\kappa(x) = \int \phi_n(x) \lim_{y \downarrow 0} \mathfrak{S} [M^\phi(x + iy)] \phi_n^t(x) d\kappa(x),$$

em que M^ϕ é a matriz da Definição 3.2.

Demonstração. Por definição, a matriz de Green do operador H^ϕ é dada, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, por

$$G(n, n; x + iy) = -\phi_n(x + iy) D_0^{-1} F_n^t(x + iy).$$

Como $F_n^t(x + iy) = \psi_n^t(x + iy) - D_0 M^\phi(x + iy) \phi_n^t(x + iy)$, segue-se da identidade (3.2) que

$$\begin{aligned} G(n, n; x + iy) &= -\phi_n(x + iy) D_0^{-1} (\psi_n^t(x + iy) - D_0 M^\phi(x + iy) \phi_n^t(x + iy)) \\ &= -\phi_n(x + iy) D_0^{-1} \psi_n^t(x + iy) + \phi_n(x + iy) M^\phi(x + iy) \phi_n^t(x + iy). \end{aligned}$$

Note que, para x, n fixados, $\psi_n(x + iy)$, $\phi_n(x + iy)$ e $M^\phi(x + iy)$ são funções complexas de y , e que

$$\begin{cases} \lim_{y \downarrow 0} \psi_n(x + iy) = \psi_n(x), \\ \lim_{y \downarrow 0} \phi_n(x + iy) = \phi_n(x), \end{cases}$$

sendo $\psi_n(x), \phi_n(x) \in M(l, \mathbb{R})$. Desta forma,

$$\lim_{y \downarrow 0} \mathfrak{S} [\phi_n(x + iy) D_0^{-1} \psi_n^t(x + iy)] = 0$$

e

$$\lim_{y \downarrow 0} \Im [\phi_n(x + iy) M^\phi(x + iy) \phi_n^t(x + iy)] = \phi_n(x) \lim_{y \downarrow 0} \Im [M^\phi(x + iy)] \phi_n^t(x),$$

caso $\lim_{y \downarrow 0} \Im [M^\phi(x + iy)]$ exista, e então

$$\lim_{y \downarrow 0} \Im [G(n, n; x + iy)] = \phi_n(x) \lim_{y \downarrow 0} \Im [M^\phi(x + iy)] \phi_n^t(x).$$

Como o limite $\lim_{y \downarrow 0} \Im [M^\phi(x + iy)]$ existe κ -q.t.p., o resultado se segue. □

Lema 5.5. *Seja M^ϕ como na Definição 3.2. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,*

$$\frac{1}{\pi} \int \phi_n(x) \lim_{y \downarrow 0} \Im [M^\phi(x + iy)] \phi_n^t(x) d\kappa(x) = \mathbb{I}, \quad (5.3)$$

com ϕ como na Definição 3.4.

Demonstração. Para $1 \leq k, j \leq l$,

$$G(n, n; x + iy)_{k,j} = \langle (H - z)^{-1} \mathbf{e}_{k,n}, \mathbf{e}_{j,n} \rangle = \int \frac{1}{t - z} d\mu_{\mathbf{e}_{k,n}, \mathbf{e}_{j,n}}(t).$$

Logo

$$\int \lim_{y \downarrow 0} \Im [G(n, n; x + iy)_{k,j}] d\kappa(x) = \int \lim_{y \downarrow 0} \Im \left[\int \frac{1}{t - (x + iy)} d\mu_{\mathbf{e}_{k,n}, \mathbf{e}_{j,n}}(t) \right] d\kappa(x).$$

Observe que se $0 < y < 1$, então

$$\Im \left[\frac{1}{t - (x + iy)} \right] = \frac{y}{(t - x)^2 + y^2} \leq \frac{1}{(t - x)^2 + 1},$$

de modo que existe uma constante $C < \infty$ tal que, para todo $0 < y < 1$,

$$\int \Im \left[\int \frac{1}{t - (x + iy)} d\mu_{\mathbf{e}_{k,n}, \mathbf{e}_{j,n}}(t) \right] d\kappa(x) \leq C.$$

Podemos assim utilizar o Teorema da Convergência Dominada para estabelecer

que

$$\int \lim_{y \downarrow 0} \Im \left[\int \frac{1}{t - (x + iy)} d\mu_{\mathbf{e}_{k,n}, \mathbf{e}_{j,n}}(t) \right] d\kappa(x) = \lim_{y \downarrow 0} \int \Im \left[\int \frac{1}{t - (x + iy)} d\mu_{\mathbf{e}_{k,n}, \mathbf{e}_{j,n}}(t) \right] d\kappa(x);$$

agora, pela fórmula de inversão de Stieltjes (Proposição D.5),

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int \Im \left[\int \frac{1}{t - (x + iy)} d\mu_{\mathbf{e}_{k,n}, \mathbf{e}_{j,n}}(t) \right] d\kappa(x) = \mu_{\mathbf{e}_{k,n}, \mathbf{e}_{j,n}}(\mathbb{R}).$$

Como

$$\mu_{\mathbf{e}_{k,n}, \mathbf{e}_{j,n}}(\mathbb{R}) = \langle \mathbf{e}_{k,n}, \mathbf{e}_{j,n} \rangle = \delta_{k,j},$$

concluimos que

$$\frac{1}{\pi} \int \lim_{y \downarrow 0} \Im [G(n, n; x + iy)_{k,j}] d\kappa(x) = \delta_{k,j},$$

isto é, que

$$\frac{1}{\pi} \int \lim_{y \downarrow 0} \Im [G(n, n; x + iy)] d\kappa(x) = \mathbb{I}.$$

O resultado é agora uma consequência do Lema 5.4. □

Dadas duas medidas de Borel finitas, μ_1 e μ_2 , definidas na reta real, considere a medida $\min(\mu_1, \mu_2)$ definida pela lei

$$\min(\mu_1, \mu_2)(\Lambda) := \inf\{\mu_1(\Lambda_1) + \mu_2(\Lambda_2); \Lambda \subseteq \Lambda_1 \cup \Lambda_2\}. \quad (5.4)$$

Teorema 5.6. *Sejam $1 \leq r \leq l$ e \mathcal{S}_r dado por (5.2). Então, para quase todo x com respeito à medida $\eta_r d\kappa$, $x \in \mathcal{S}_r$, em que $\eta_r d\kappa = \min(\eta_r^\phi d\kappa, \eta_r^\psi d\kappa)$, com as funções*

$$\eta_r^{\phi, \psi} : (\eta_r^{\phi, \psi}) \rightarrow (0, \infty)$$

definidas por

$$\eta_r^{\phi, \psi}(x) := s_r \left[\lim_{y \downarrow 0} \Im [M^{\phi, \psi}(x + iy)] \right],$$

em que

$$(\eta^{\phi, \psi}) := \{x \in \mathbb{R}; 0 < s_r \left[\lim_{y \downarrow 0} \Im [M^{\phi, \psi}(x + iy)] \right] < \infty\}.$$

Demonstração. Tomando o traço nos dois membros da identidade (5.3) obtemos, para $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\frac{1}{\pi} \int [\phi_n(x) \lim_{y \downarrow 0} \mathfrak{S} [M^\phi(x + iy)] \phi_n^t(x)] d\kappa(x) = l;$$

agora, segue-se da desigualdade da Proposição C.5–(c) e da ciclicidade do traço que

$$\begin{aligned} [\phi_n(x) \lim_{y \downarrow 0} \mathfrak{S} [M^\phi(x + iy)] \phi_n^t(x)] &= [\lim_{y \downarrow 0} \mathfrak{S} [M^\phi(x + iy)] \phi_n^t(x) \phi_n(x)] \\ &\geq (s_r[\lim_{y \downarrow 0} \mathfrak{S} [M^\phi(x + iy)]]) (s_{l-r+1}[\phi_n^t(x) \phi_n(x)]) \\ &= (s_r[\lim_{y \downarrow 0} \mathfrak{S} [M^\phi(x + iy)]]) (s_{l-r+1}^2[\phi_n(x)]). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int s_r[\lim_{y \downarrow 0} \mathfrak{S} [M^\phi(x + iy)]] s_{l-r+1}^2[\phi_n(x)] d\kappa(x) \leq l\pi, \quad (5.5)$$

e, analogamente,

$$\int s_r[\lim_{y \downarrow 0} \mathfrak{S} [M^\psi(x + iy)]] s_{l-r+1}^2[\psi_n(x)] d\kappa(x) \leq l\pi. \quad (5.6)$$

Note que se $x \in \bigcup_{i=r}^l \Sigma_{ac,r}^\phi$ (com $\Sigma_{ac,r}^\phi$ segundo a Proposição 3.8), então, para $1 \leq k \leq r$,

$$0 < s_k[\lim_{y \downarrow 0} \mathfrak{S} [M^\phi(x + iy)]] < \infty.$$

A Proposição 3.9 garante que os conjuntos $\Sigma_{ac,r}^\psi$ e $\Sigma_{ac,r}^\phi$, que são suportes minimais das medidas $\eta^\phi d\kappa, \eta^\psi d\kappa$, diferem, no máximo, por um conjunto de medidas de Lebesgue e espectral nulas. Segue-se, portanto, que as medidas $\eta^\phi d\kappa$ e $\eta^\psi d\kappa$ são equivalentes; assim temos, da definição de η e das relações (5.5) e (5.6), que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\int (s_{r-l+1}^2[\phi_n(x)] + s_{l-r+1}^2[\psi_n(x)]) \eta(x) d\kappa(x) \leq 2l\pi, \quad (5.7)$$

e portanto para todo $L \in \mathbb{N}$,

$$\int \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} ((s_{r-l+1}^2[\phi_n(x)] + s_{l-r+1}^2[\psi_n(x)]) \eta(x) d\kappa(x)) \leq 2l\pi.$$

Por fim, pelo Lema de Fatou,

$$\int \liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} ((s_{l-r+1}^2[\phi_n(x)] + s_{r-l+1}^2[\psi_n(x)]) \eta(x) d\kappa(x)) \leq 2l\pi,$$

e conseqüentemente, para quase todo x com respeito à medida $\eta d\kappa$,

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (s_{l-r+1}^2[\phi_n(x)] + s_{r-l+1}^2[\psi_n(x)]) < \infty.$$

□

Segue-se do Teorema 5.6 a seguinte caracterização:

Corolário 5.7. *Dado $1 \leq r \leq l$, a restrição do espectro absolutamente contínuo do operador H^ϕ , como no enunciado do Teorema 5.3, ao conjunto $\mathcal{S}_r \setminus \mathcal{S}_{r+1}$ tem multiplicidade no máximo r .*

Demonstração. Segue-se do Teorema 5.6 que se $x \notin \overline{\mathcal{S}_{r+1}}^{ess}$, então

$$x \notin \bigcup_{j=r+1}^l \sigma_{ac,j}(H^\phi);$$

logo, a restrição de espectro absolutamente contínuo ao conjunto $\mathcal{S}_r \setminus \mathcal{S}_{r+1}$ tem multiplicidade no máximo r .

□

Corolário 5.8. *Seja \mathcal{S}_r dado por (5.2). Então, o conjunto $\overline{\mathcal{S}_r \setminus \mathcal{S}_{r+1}}^{ess}$ corresponde à componente espectral absolutamente contínua de multiplicidade r de qualquer extensão auto-adjunta do operador H_{min}^+ , como definido em (2.14).*

Demonstração. Do Teorema 5.3 e do Corolário 5.7, temos que $\overline{\mathcal{S}_r \setminus \mathcal{S}_{r+1}}^{ess}$ corresponde à componente absolutamente contínua de multiplicidade r do operador H^ϕ .

Pela Proposição 3.9, o mesmo vale para o operador H^ψ e mais geralmente para qualquer extensão auto-adjunta de H_{min}^+ , uma vez que este operador podem ser escrito como uma perturbação de posto finito de H^ϕ (donde o resultado se segue, pela Proposição 3.9).

□

5.2 Componente Absolutamente Contínua de Multiplicidade Total

No caso da componente absolutamente contínua de multiplicidade total, tal qual obtido em Last & Simon [1999], o suporte minimal que obtivemos neste trabalho é diretamente caracterizado a partir do comportamento assintótico das soluções da equação de autovalores, sem a necessidade de eliminarmos conjuntos cujas medidas de Lebesgue nulas.

Além disso, como a caracterização se baseia no maior valor singular das matrizes ψ e ϕ , podemos relacionar o suporte diretamente com a norma das matrizes de transferência.

A desigualdade da Proposição 4.3 relaciona a norma da matriz M de Weyl-Titchmarsh (e portanto as propriedades espectrais do operador) com o comportamento assintótico das soluções da equação de autovalores do operador. Nosso primeiro objetivo nesta seção é combinar a desigualdade com o comportamento assintótico das matrizes de transferência (2.6).

Lema 5.9. *Sejam $(B_n)_n$ uma seqüência de matrizes $l \times l$ cujas colunas são soluções da equação de autovalores em $x \in \mathbb{R}$ do operador H^+ , como na Definição 2.2, e $(A_n)_n$ a seqüência de matrizes de transferência simpléticas $2l \times 2l$, dadas por (2.7) a partir das matrizes (2.9). Então, existe uma constante C , que depende de x e de $(B_n)_n$, tal que, para todo $L \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2 \leq C \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|A_n\|^2.$$

Demonstração. Considerando as matrizes de transferência definidas a partir das matrizes (2.9), segue-se da relação (2.8) que, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{bmatrix} B_{n+1} \\ D_n B_n \end{bmatrix} = A_n \begin{bmatrix} B_1 \\ D_0 B_0 \end{bmatrix}.$$

Logo, considerando a norma de Frobenius, temos que

$$(\|B_{n+1}\|^2 + \|D_n B_n\|^2) \leq \|A_n\|^2 (\|B_1\|^2 + \|D_0 B_0\|^2),$$

e, em particular,

$$\|D_n B_n\|^2 \leq \|A_n\|^2 (\|B_1\|^2 + \|D_0 B_0\|^2).$$

Desta forma

$$s_l^2[D_n] \|B_n\|^2 \leq \|A_n\|^2 (\|B_1\|^2 + \|D_0 B_0\|^2).$$

Por (5.1), tomando

$$a = \inf_{n \in \mathbb{N}} s_l[D_n],$$

segue-se que

$$\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2 \leq C \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|A_n\|^2,$$

com $C = \frac{1}{a^2} (\|B_1\|^2 + \|D_0 B_0\|^2)$.

□

Lema 5.10. *Sejam, para $x \in \mathbb{R}$, $(B_n)_n$ e $(A_n)_n$ seqüências de matrizes como definidas no enunciado do Lema 5.9. Então, existe uma constante $C > 0$, que depende de x e de $(B_n)_n$, tal que, para todo $L \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{1}{\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (s_l[B_n])^2} \leq C \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|A_n\|^2.$$

Demonstração. Podemos reescrever a relação

$$\begin{bmatrix} B_{n+1} \\ D_n B_n \end{bmatrix} = A_n \begin{bmatrix} B_1 \\ D_0 B_0 \end{bmatrix},$$

satisfeita para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ como

$$\begin{bmatrix} B_{n+1} & B_{n+1} \\ D_n B_n & D_n B_n \end{bmatrix} = A_n \begin{bmatrix} B_1 & B_1 \\ D_0 B_0 & D_0 B_0 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que as matrizes presentes na relação anterior são quadradas, segue-se da caracterização de valores singulares fornecida pela Proposição C.3 que

$$s_l[D_n B_n] \geq s_l \begin{bmatrix} B_{n+1} & B_{n+1} \\ D_n B_n & D_n B_n \end{bmatrix} = s_l \left[A_n \begin{bmatrix} B_1 & B_1 \\ D_0 B_0 & D_0 B_0 \end{bmatrix} \right],$$

e portanto,

$$s_l[D_n B_n] \geq s_{2l}[A_n] s_l \begin{bmatrix} B_1 & B_1 \\ D_0 B_0 & D_0 B_0 \end{bmatrix}.$$

Agora, pela Proposição C.5-(f),

$$s_1[D_n] s_l[B_n] \geq s_{2l}[A_n] s_l \begin{bmatrix} B_1 & B_1 \\ D_0 B_0 & D_0 B_0 \end{bmatrix},$$

o que resulta em

$$\alpha s_l[B_n] \geq s_{2l}[A_n],$$

com

$$\alpha = \left(\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} s_1[D_n] \right) \left(s_l \begin{bmatrix} B_1 & B_1 \\ D_0 B_0 & D_0 B_0 \end{bmatrix} \right)^{-1}.$$

Desse modo, existe uma constante C tal que, para todo $L \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (s_l[B_n])^2 \geq C \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (s_{2l}[A_n])^2,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{L}{\sum_{n=0}^{L-1} (s_{2l}[A_n])^2} \geq C \frac{L}{\sum_{n=0}^{L-1} (s_l[B_n])^2}.$$

Sendo a média aritmética de um conjunto finito de números positivos maior do que sua média harmônica, obtemos

$$\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \frac{1}{(s_{2l}[A_n])^2} \geq C \frac{L}{\sum_{n=0}^{L-1} (s_l[B_n])^2}.$$

Precisamos agora relacionar $s_{2l}[A_n]$ e $\|A_n\|$. Dado que as matrizes A_n são simpléticas², temos pelo Lema C.9-b, que

$$s_1[A_n] = \frac{1}{s_{2l}[A_n]},$$

e assim vale

$$\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (s_1[A_n])^2 \geq C \frac{L}{\sum_{n=0}^{L-1} (s_l[B_n])^2}.$$

Como a norma de Frobenius e o maior valor singular satisfazem, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$(s_1[A_n])^2 \leq \|A_n\|^2,$$

o resultado se segue. □

Lema 5.11. *Sejam, para $x \in \mathbb{R}$, $(B_n)_n$ e $(A_n)_n$ seqüências de matrizes como definidas no enunciado do Lema 5.9. Então, existe uma constante $C > 0$, que depende de x e de $(B_n)_n$, tal que, para todo $L \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{\sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2}{\sum_{n=0}^{L-1} (s_l[B_n])^2} \leq C \left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|A_n\|^2 \right)^2.$$

²Inicialmente, acreditávamos que este resultado se seguiria por argumentos análogos aos apresentados na demonstração do Lema 5.9, mas a exigência de que as matrizes de transição sejam simpléticas se mostrou essencial. De fato, sendo as matrizes apenas unimodulares, a melhor estimativa seria $(s_1[A])^{l-1} \geq \frac{1}{s_{2l}[A]}$ e a cota final dependeria da dimensão l .

Demonstração. Segue-se dos Lemas 5.9 e 5.10 a existência de constantes C_1 e C_2 tais que, para todo $L \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2 \leq C_1 \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|A_n\|^2,$$

e

$$\frac{1}{\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} (s_l[B_n])^2} \leq C_2 \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|A_n\|^2.$$

Logo,

$$\frac{\sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2}{\sum_{n=0}^{L-1} (s_l[B_n])^2} \leq C_1 C_2 \left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|A_n\|^2 \right)^2,$$

e o resultado se segue ao tomarmos $C = C_1 C_2$.

□

Lema 5.12. ³ *Sejam $(B_n)_n$ e $(E_n)_n$ seqüências de matrizes $l \times l$ cujas colunas são soluções da equação de autovalores em x do operador H^+ , dado pela Definição 2.2, tais que $W_{[B,E]}(1) \neq 0$ (segundo (2.11)). Se $(A_n)_n$ é a seqüência de matrizes transferência $2l \times 2l$ dadas por (2.7), então existe uma constante $C > 0$, que depende de x , $(B_n)_n$ e $(E_n)_n$, tal que, para todo $L \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{\sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2}{\sum_{n=0}^{L-1} \|E_n\|^2} < C \left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^L \|A_n\|^2 \right)^2.$$

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$. Pela definição de Wronskiano (Proposição 2.3) e pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \|W_{[B,E]}(n)\| &= \|B_{n-1}^t D_{n-1} E_n - B_n^t D_{n-1} E_{n-1}\| \\ &\leq \|B_{n-1}^t D_{n-1} E_n\| + \|B_n^t D_{n-1} E_{n-1}\|, \end{aligned}$$

³Seguimos a demonstração presente em Last & Simon [1999].

e agora pela Proposição C.5-(f),

$$\begin{aligned}
\|W_{[B,E]}(n)\| &\leq s_1 [D_{n-1}] \|B_{n-1}\| \|E_n\| + s_l [D_{n-1}] \|B_n\| \|E_{n-1}\| \\
&\leq 2s_1 [D_{n-1}] \sqrt{\|B_n\|^2 + \|B_{n-1}\|^2} \sqrt{\|E_n\|^2 + \|E_{n-1}\|^2} \\
&\leq 2a \sqrt{\|B_n\|^2 + \|B_{n-1}\|^2} \sqrt{\|E_n\|^2 + \|E_{n-1}\|^2},
\end{aligned}$$

em que $a = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} s_1 [D_n]$.

Logo, supondo sem perda de generalidade que $W_{[B,E]}(0) = 1$ e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos para todo $L \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2a} &\leq \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \sqrt{\|B_n\|^2 + \|B_{n+1}\|^2} \sqrt{\|E_n\|^2 + \|E_{n+1}\|^2} \\
&\leq \frac{1}{L} \sqrt{\left(\sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2 + \|B_{n+1}\|^2\right)} \sqrt{\left(\sum_{n=0}^{L-1} \|E_n\|^2 + \|E_{n+1}\|^2\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2 + \|B_{n+1}\|^2\right)} \sqrt{\left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|E_n\|^2 + \|E_{n+1}\|^2\right)},
\end{aligned}$$

e assim

$$\frac{1}{2a} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2 + \|B_{n+1}\|^2\right)}}{\sqrt{\left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|E_n\|^2 + \|E_{n+1}\|^2\right)}} \leq \left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2 + \|B_{n+1}\|^2\right). \quad (5.8)$$

Segue-se das desigualdades

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2 + \|B_{n+1}\|^2 \geq \sum_{n=0}^L \|B_n\|^2, \\ \sum_{n=0}^{L-1} \|E_n\|^2 + \|E_{n+1}\|^2 \leq 2 \sum_{n=0}^L \|E_n\|^2 \end{cases}$$

que

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2 + \|B_{n+1}\|^2\right)}}{\sqrt{\left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|E_n\|^2 + \|E_{n+1}\|^2\right)}} \geq \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^L \|B_n\|^2}}{\sqrt{2 \sum_{n=0}^L \|E_n\|^2}}.$$

Agora, pelo Lema 5.9, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2 \leq C_1 \sum_{n=0}^{L-1} \|A_n\|^2;$$

assim,

$$\left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|B_n\|^2 + \|B_{n+1}\|^2\right) \leq \frac{2}{L} \sum_{n=0}^L \|B_n\|^2 \leq C_1 \frac{2}{L} \sum_{n=0}^L \|A_n\|^2.$$

Combinando tais estimativas com (5.8), obtemos

$$\sqrt{\frac{\sum_{n=0}^L \|B_n\|^2}{2 \sum_{n=0}^L \|E_n\|^2}} \leq C_1 \frac{4a}{L} \sum_{n=0}^L \|A_n\|^2.$$

O resultado se segue ao tomarmos $C = 32a^2C_1^2$.

□

Combinaremos os resultados anteriores com a Proposição 4.3, a fim de mostrarmos que conjunto

$$\mathcal{S} := \left\{x \in \mathbb{R}; \liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=0}^L \|A_n(x)\|^2 < \infty\right\}, \quad (5.9)$$

sendo $(A_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de matrizes de transferência simpléticas dadas por (2.8) e (2.9), é um suporte essencial da componente absolutamente contínua de multiplicidade total do operador H^ϕ ; conseqüentemente, a componente singular da medida espectral atribui peso nula a este conjunto.

Lema 5.13. *Sejam Σ_s^ϕ como definido na Proposição 3.8 e \mathcal{S} o conjunto definido por (5.9). Então, $\Sigma_s^\phi \cap \mathcal{S} = \emptyset$.*

Demonstração. Defina o conjunto

$$\mathcal{P} := \{x \in \mathbb{R}; \liminf_{y \downarrow 0} \|\Im [M(x + iy)]\| < \infty\}.$$

Denote por \mathcal{Q} o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ para os quais todas as sequências $(B_n)_n, (E_n)_n$ de matrizes $l \times l$ formadas por soluções da equação de autovalores em x satisfazem

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{L-1} \|B_n(x)\|^2}{\sum_{n=0}^{L-1} \|E_n(x)\|^2} < \infty.$$

Ainda, denote por \mathcal{R} o conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ para os quais todas as sequências $(E_n)_n$ de matrizes $l \times l$ formadas por auto-soluções da equação de autovalores em x verificam

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{L-1} \|E_n(x)\|^2}{\sum_{n=0}^{L-1} (s_l[E_n(x)])^2} < \infty.$$

Segue-se dos Lemas 5.11 e 5.12 que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Q}$, respectivamente; logo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cap \mathcal{Q}$.

Agora, se $x \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$, tomando $B = \psi$ e $E = \phi$ no membro direito da desigualdade de Jitomirskaya-Last (Proposição 4.3), temos que

$$\liminf_{y \downarrow 0} \|M(x + iy)\| < \infty.$$

Portanto $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ e, conseqüentemente, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$. De acordo com a Proposição 3.8, $\mathcal{P} \subseteq (\Sigma_s^\phi)^c$, donde se segue que $\Sigma_s^\phi \cap \mathcal{S} = \emptyset$.

□

Teorema 5.14. *Sejam $\Sigma_{ac,l}^\phi$, como definido na Proposição 3.8, e \mathcal{S} o conjunto definido por (5.9). Então, o espectro do operador H^ϕ restrito a \mathcal{S} é puramente absolutamente contínuo de multiplicidade l .*

Demonstração. Segue-se do Teorema 5.3 que

$$\overline{\mathcal{S}}^{ess} \subseteq \sigma_{ac,l}(H^\phi).$$

Por outro lado, pelo Lema 5.13, $\Sigma_s^\phi \cap \mathcal{S} = \emptyset$.

□

Demonstraremos, a seguir, a recíproca do Teorema acima.

Teorema 5.15. *Seja \mathcal{S} dado por (5.9). Para quase todo x com respeito à medida $\eta_l d\kappa$, vale $x \in \mathcal{S}$, sendo η_l definida como enunciado do Teorema 5.6.*

Demonstração. Tomando $r = l$ nas desigualdades (5.5) e (5.6), obtemos

$$\frac{1}{\pi} \int s_l [\lim_{y \downarrow 0} \Im [M_\phi^t(x + iy)]] \|\phi_n^t(x)\|^2 d\kappa(x) \leq l, \quad (5.10)$$

e

$$\frac{1}{\pi} \int s_l [\lim_{y \downarrow 0} \Im [M_\psi^t(x + iy)]] \|\psi_n^t(x)\|^2 d\kappa(x) \leq l. \quad (5.11)$$

Temos ainda, de (3.4), que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{bmatrix} \phi_{n+1} & \psi_{n+1} \\ D_n \phi_n & D_n \psi_n \end{bmatrix} = A_n(x) \begin{bmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ D_0 \phi_0 & D_0 \psi_0 \end{bmatrix},$$

ou seja, que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$A_n(x) = \begin{bmatrix} \phi_{n+1} & \psi_{n+1} \\ D_n \phi_n & D_n \psi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & D_0^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{n+1} & \psi_{n+1} D_0^{-1} \\ D_n \phi_n & D_n \psi_n D_0^{-1} \end{bmatrix}.$$

Assim, assumindo a condição (5.1) e considerando a função mensurável η_l tal qual no enunciado, segue-se de (5.10) e (5.11) a existência de uma constante C tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\int \|A_n(x)\|^2 \eta_l(x) d\kappa(x) \leq C.$$

Logo, para todo $L \in \mathbb{N}$,

$$\int \left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|A_n(x)\|^2 \right) \eta_l(x) d\kappa(x) \leq C.$$

Portanto, pelo Lema de Fatou,

$$\int \liminf_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|A_n(x)\|^2 \right) \eta_l(x) d\kappa(x) \leq C$$

e por fim, para quase todo x com respeito a $\eta_l d\kappa$,

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \|A_n(x)\|^2 < \infty.$$

Agora, pela Proposição 3.8, $(\eta_l) \subseteq \Sigma_{ac,l}^\phi \cap \Sigma_{ac,l}^\psi$ e, pela Proposição 3.9, $\Sigma_{ac,l}^\phi \cap \Sigma_{ac,l}^\psi$ é um suporte minimal da componente absolutamente contínua de multiplicidade l .

□

Combinando os Teoremas 5.14 e 5.15, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.16. *O conjunto \mathcal{S} , dado por (5.9), é um suporte minimal da componente absolutamente contínua de multiplicidade l da medida espectral do operador H^ϕ .*

Pelas mesmas considerações presentes na demonstração do Corolário 5.8, temos que este resultado vale não somente para H^ϕ , mas para qualquer extensão auto-adjunta do operador H_{min}^+ , dado por (2.14).

Capítulo 6

Operadores Ergódicos

6.1 O Conceito de Operador Dinamicamente Definido

A partir de agora, estudaremos operadores dinamicamente definidos, isto é operadores da forma (2.1), em que as sequências $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ estão associadas a um dado sistema dinâmico. Esta estrutura permite-nos dar mais precisão a algumas idéias já exploradas, como a relação entre comportamento assintótico de auto-soluções e medidas espectrais, e também explorar novos conceitos e definições, como é o caso do expoente de Lyapunov (Definição 6.5).

A origem desta teoria está nos operadores de Schrödinger periódicos em $C^2(\mathbb{R})$, expressos por

$$h(g) = -\frac{d^2}{dx^2}g(x) + q(x),$$

onde q é uma função periódica. Tais operadores são, de fato, o tipo mais simples de operadores dinamicamente definidos. Neste contexto, uma estratégia possível para a análise espectral, conhecida como teoria de Floquet, é procurar, para $z \in \mathbb{C}$ fixado, auto-soluções compatíveis com o período do potencial q . Explicitamente, se L é o período do potencial, devemos buscar soluções da equação e autovalores em z que verifiquem

$$g_z(x + L) = \mu(z)g_z(x)$$

para algum $\mu \in \mathbb{C}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. O escalar μ fornece informação sobre o crescimento da função g . Na realidade, sabe-se que os escalares μ_+ e μ_- associados às duas soluções linearmente independentes são inversos multiplicativos um do outro, de modo que, como nos interessa lidar com o crescimento exponencial (de acordo com o que discutiremos), é mais conveniente lidar com o escalar $w(z)$, dado por

$$w(z) := \frac{1}{L} \log(\mu_+(z)), \quad (6.1)$$

denominado expoente de Floquet. Decompondo este fator em partes real e imaginária, isto é,

$$w(z) = -\gamma(z) + i\alpha(z), \quad (6.2)$$

temos que $\gamma(z)$ quantifica a mudança de amplitude de g_{\pm} em um período L , enquanto que $\alpha(z)$ quantifica a mudança de fase. Sendo o potencial periódico, o espectro é contínuo, coincide com os pontos em que $\gamma(z)$ se anula, e em geral é formado por uma união de intervalos¹. Portanto, neste exemplo, compreendemos bem a natureza espectral, e conseqüentemente, a dinâmica (quântica) do operador.

A generalização mais imediata desta classe de operadores consiste em considerar potenciais quase-periódicos, como por exemplo, funções do tipo

$$q(x) = a(\cos(2\pi x) + \cos(2\pi\beta x)),$$

com $a \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Espera-se então, neste caso, que o espectro do operador seja semelhante ou mesmo coincida com um conjunto de Cantor. Pode-se ainda indagar se para alguns valores dos parâmetros a e β , o espectro do operador possa ser puramente pontual.

Tanto no caso periódico como no caso quase-periódico, os potenciais são funções que assumem valores em órbitas de sistemas dinâmicos² em \mathbb{R} . Neste sentido, associaremos o conceito de operador dinamicamente definido ao operador de Jacobi por meio de um sistema dinâmico discreto:

Definição 6.1 (Operador de Jacobi Dinamicamente Definido). *Sejam $\Omega \neq \emptyset$ um conjunto arbitrário, $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma aplicação invertível, $l \in \mathbb{N}$ e aplicações*

¹Confira Magnus & Winkler [1979].

²Veja a Definição E.1.

$D, V : \Omega \rightarrow S(l, \mathbb{R})$. Um operador dinamicamente definido é uma família de operadores em $(\mathbb{C}^l)^\mathbb{Z}$ definidos, para cada $\omega \in \Omega$, pela lei

$$[H_\omega \mathbf{u}]_n := D(T^{n-1}\omega) \mathbf{u}_{n-1} + D(T^n\omega) \mathbf{u}_{n+1} + V(T^n\omega) \mathbf{u}_n, \quad (6.3)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Se (Ω, ν) é um espaço de probabilidade e $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma aplicação ergódica, dizemos que a família $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ é uma família de operadores ergódicos.

Neste caso, também podemos definir um cociclo³ através das matrizes de transferência definidas pela relações (2.6) e (2.8). Especificamente, podemos definir a função $A : \Omega \rightarrow M_{2l}(\mathbb{C})$ pela lei

$$A(z, \omega) := \begin{bmatrix} D^{-1}(\omega)(z - V(\omega)) & -D^{-1}(\omega) \\ D(\omega) & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

de acordo com a equação (2.4). O cociclo será então a aplicação

$$\begin{aligned} (T, A) : \Omega \times \mathbb{C}^{2l} &\rightarrow \Omega \times \mathbb{C}^{2l} \\ (\omega, \mathbf{u}) &\mapsto (T(\omega), A(z, \omega)\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (6.5)$$

A partir de um cociclo é possível definir novamente as matrizes de transferência como

$$A_n(z, \omega) = \begin{cases} A(T^{n-1}(\omega))A(T^{n-2}(\omega))\dots A(T(\omega))A(\omega), & \text{se } n \geq 1, \\ \mathbb{I}_{2l}, & \text{se } n = 0, \\ A^{-1}(T^n(\omega))\dots A^{-1}(T^{n-2}(\omega))A^{-1}(T^{n-1}(\omega)), & \text{se } n \leq -1. \end{cases} \quad (6.6)$$

Logo, cada auto-solução está associada a uma órbita do cociclo através da relação

$$(\omega, \mathbf{u}) \mapsto (T(\omega), A(z, \omega)\mathbf{u}).$$

³Confira a Definição E.3.

Se (Ω, ν) for um espaço de probabilidade e T for uma transformação ergódica, podemos definir, a partir do Teorema Ergódico de Birkhoff (Proposição F.2), diversas grandezas através do valor esperado de funções integráveis com respeito a ν . Temos como exemplo a densidade integrada de estados:

Definição 6.2 (Densidade Integrada de Estados). *Seja $(H_\omega)_\omega$ como na Definição 6.1, com (Ω, ν) um espaço de probabilidade e T uma aplicação ergódica. Definimos densidade integrada de estados pela lei*

$$k(\Lambda) := \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^l \langle \mathcal{P}_\omega(\Lambda) \mathbf{e}_{1,j}, \mathbf{e}_{1,j} \rangle \right) d\nu(\omega), \quad (6.7)$$

em que $\Lambda \in \mathcal{A}$, sendo \mathcal{A} a σ -álgebra dos borelianos de \mathbb{R} , $\mathcal{P}_\omega : \mathcal{A} \rightarrow B(l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^l))$ a resolução da identidade associada ao operador H_ω^ϕ (Proposição B.12) e $\mathbf{e}_{1,j}$ os vetores canônicos, dados por (3.7).

O expoente de Floquet, definido por (6.1) no caso escalar, também pode ser generalizado⁴:

Definição 6.3 (Expoente de Floquet). *Seja $(H_\omega)_\omega$ como na Definição 6.2. Para cada $\omega \in \Omega$, denote por $M^\phi(z, \omega)$ a função de Weyl-Titchmarsh associada ao operador H_ω^ϕ , como na Definição 3.2. Denominamos expoente de Floquet a quantidade*

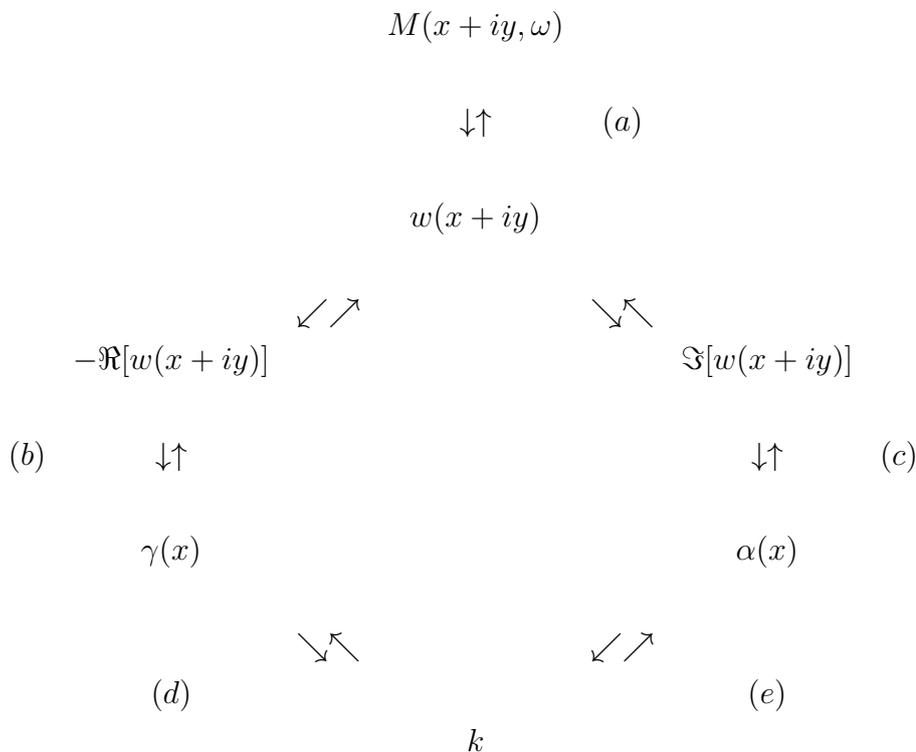
$$w(z) = \int [\log(M^\phi(z, \omega))] d\nu(\omega). \quad (6.8)$$

Na Seção 6.3, utilizaremos a densidade de estados para obter propriedades de regularidade de uma função associada ao expoente de Floquet.

Assim como o que ocorre no caso escalar de operadores de Schrödinger periódicos, podemos especular se há conexão entre o expoente γ , segundo a relação (6.2), e o espectro de operadores de Jacobi dinamicamente definidos. Como veremos na Seção 6.4, a expectativa é confirmada: em um certo sentido, a componente absolutamente contínua da medida espectral é dada pelos pontos em que γ se anula. O caminho que seguiremos para demonstrarmos tal resultado, denominado Teoria

⁴Veja, por exemplo, Kotani & Simon [1988].

de Kotani, pode ser esclarecido por meio do seguinte diagrama⁵:



onde a passagem (a) é dada pela relação (6.8). As passagens (b) e (c) são análises do limite $y \downarrow 0$. Na realidade, realizaremos apenas a passagem (b), através do Lema 6.12. No caso de operadores de Schrödinger escalares, a passagem (e) corresponde à Teoria de oscilação de Sturm e a passagem (d) ao Teorema da Fatorização de Hadamard, ou, alternativamente, à Fórmula de Thouless, que abordaremos na Seção 6.3.

Primeiramente, empregaremos a Fórmula de Thouless para mostrar que o expoente γ é uma função sub-harmônica; abordaremos, em seguida, a relação entre γ e M , estendendo assim os resultados da Teoria de Kotani para a classe de operadores de Jacobi a valores matriciais ergódicos (Definição 6.1). Sequencialmente, segundo o diagrama, o que faremos, ao longo das Seções 6.3 e 6.4, equivale ao caminho $(d) \rightarrow (b) \rightarrow (a)$.

Quando consideramos uma família de operadores $(H_\omega)_\omega$, a princípio, o espec-

⁵Adaptado de Lang [1991], página 86.

tro de cada operador pode variar em relação a ω . Esta é uma questão importante que não trataremos aqui. Para o caso de operadores de Schrödinger escalares, se T é uma aplicação ergódica, existem conjuntos $\Sigma_{ac}, \Sigma_{sc}, \Sigma_{pp}$ que coincidem, para quase todo ω , com os respectivos suportes espectrais do operador H_ω (Kunz & Souillard [1981]). O Teorema de Kotani responde parcialmente à questão em relação à componente absolutamente contínua.

6.2 Expoentes de Lyapunov do Operador

Assumiremos, a partir de agora, que o conjunto (Ω, ν) presente na definição do cociclo (6.5) é um espaço de medida. Com estas hipóteses, podemos definir os expoentes de Lyapunov do cociclo graças ao Teorema de Oseledets:

Teorema 6.4 (Teorema de Oseledets⁶). *Seja (T, A) um cociclo em $M(p, \mathbb{C})$ tal que*

$$\log^+ \|A(\omega)\| : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in L^1(\nu).$$

Então, para ν -quase todo $\omega \in \Omega$, existem um inteiro $m = m(\omega)$, números reais $\gamma_1(\omega), \dots, \gamma_m(\omega)$ e uma decomposição

$$\mathbb{C}^p = E_\omega^1 \oplus E_\omega^2 \oplus \dots \oplus E_\omega^{m-1} \oplus E_\omega^m \quad (6.9)$$

tais que, para $j \in \{1, \dots, m\}$ e ν -quase todo $\omega \in \Omega$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) *(Invariância):*

$$\begin{cases} m(T(\omega)) &= m(\omega), \\ \gamma_j(T\omega) &= \gamma_j(\omega), \\ A(\omega)E_\omega^j &= E_{T(\omega)}^j. \end{cases}$$

⁶Resultado publicado originalmente em Oseledets [1968]. Adotamos o enunciado exposto em Oliveira & Viana [2014], página 80.

(ii) Para todo $v \in E_\omega^j \setminus \{0\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|A_n(\omega)v\| = \gamma_j(\omega). \quad (6.10)$$

(iii) Seja $d_j(\omega) := \dim E_\omega^j$; então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \det(A_n(\omega)) = \sum_{j=1}^m d_j(\omega) \gamma_j(\omega). \quad (6.11)$$

Os números $m(\omega), \gamma_j(\omega)$, e os subespaços E_ω^j são mensuráveis com respeito a ω .

Podemos caracterizar⁷ os expoentes (6.10) do cociclo (T, A) em função dos valores singulares das matrizes de transferência:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (s_j[A_n(\omega)]) = \gamma_j(\omega). \quad (6.12)$$

Como os expoentes são constantes nas órbitas, se T for um automorfismo ergódico, a decomposição é constante em um conjunto de medida total, e assim podemos considerar os expoentes independentes de ω .

Definição 6.5 (Expoentes de Lyapunov). *Seja (T, A) um cociclo definido por um automorfismo ergódico T . Os números γ_j , definidos por (6.12), são chamados de expoentes de Lyapunov do cociclo (T, A) . Os números γ_1 e γ_m são chamados de expoentes de Lyapunov extremais. Cada d_j , segundo o Teorema 6.4, é chamado multiplicidade do expoente de Lyapunov γ_j .*

Supondo que a aplicação D da Definição 6.1 seja limitada, para cada ω , o operador $H_{\omega, \min}^+$ associado à restrição de H_ω a \mathbb{Z}_+ é ponto limite, segundo a Definição 2.11. Podemos então considerar a sequência de matrizes $(F_n^{(+)}(z, \omega))_{n \in \mathbb{Z}_+} \in l^2(\mathbb{Z}_+, M(l, \mathbb{C}))$, formada pelas soluções de Jost (Definição 3.1), que geram o su-

⁷Veja Ruelle [1979].

bespaço $\mathcal{J}_+(z, \omega)$ e satisfazem

$$\begin{bmatrix} F_{n+1}^{(+)}(z, \omega) \\ D(T^n \omega) F_n^{(+)}(z, \omega) \end{bmatrix} = A_n(z, \omega) \begin{bmatrix} M_+(z, \omega) \\ D(\omega) \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

bem como a sequência $(F_{-n}^{(-)}(z, \omega))_{n \in \mathbb{Z}_+} \in l^2(\mathbb{Z}_-, M(l, \mathbb{C}))$, formada pelas soluções de Jost que geram o subespaço $\mathcal{J}_-(z, \omega)$ e satisfazem

$$\begin{bmatrix} F_{-n-1}^{(-)}(z, \omega) \\ D(T^n \omega) F_{-n}^{(-)}(z, \omega) \end{bmatrix} = A_{-n}(z, \omega) \begin{bmatrix} M_-(z, \omega) \\ D(\omega) \end{bmatrix}; \quad (6.14)$$

aqui, as matrizes $A_{-n}(z, \omega)$ são definidas por (6.6).

Os subespaços satisfazem $\dim(\mathcal{J}_+(z, \omega)) = \dim(\mathcal{J}_-(z, \omega)) = l$ e geram o espaço das soluções da equação de autovalores.

Como as matrizes A_n são simpléticas, a relação (6.12) garante que os expoentes de Lyapunov são pares de números opostos. Mais ainda, como as sequências $(F_n^{(\pm)})_{n \in \mathbb{Z}_+}$ se relacionam com as matrizes de transferência pelas equações (6.13) e (6.14), temos, ao assumirmos que as matrizes D são uniformemente limitadas, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s_j[A_n(z, \omega)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s_j[F_n^{(-)}(z, \omega)]),$$

para $j = 1, 2, \dots, l$, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s_j[A_n(z, \omega)]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(s_j[F_n^{(+)}(z, \omega)]),$$

para $j = l + 1, l + 2, \dots, 2l$.

Aplicando tais considerações, especificamente ao cociclo (6.5), podemos estabelecer o seguinte resultado:

Proposição 6.6. *Existe, associado ao operador dinamicamente definido $(H_\omega)_\omega$ e a cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, um cociclo simplético⁸ em $SP(l, \mathbb{C})$, definido por (6.5), com $2l$*

⁸Veja a Definição C.8.

expoentes de Lyapunov (não necessariamente distintos) satisfazendo

$$\gamma_1^+(z) \geq \dots \geq \gamma_{l-1}^+(z) \geq \gamma_l^+(z) \geq 0 \geq \gamma_l^-(z) \geq \gamma_{l-1}^-(z) \geq \dots \geq \gamma_1^-(z),$$

com $\gamma_j^+(z) = -\gamma_j^-(z)$, para todo j . Para cada $1 \leq j \leq l$, tais expoentes se relacionam com as soluções de Jost da seguinte maneira:

$$\gamma_1^+(z) + \gamma_2^+(z) + \dots + \gamma_j^+(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\Lambda^j(F_n^{(-)}(z, \omega))\|, \quad (6.15)$$

e

$$\gamma_1^-(z) + \gamma_2^-(z) + \dots + \gamma_j^-(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\Lambda^j(F_n^{(+)}(z, \omega))\|, \quad (6.16)$$

para ν -quase todo ω .

6.3 Fórmula de Thouless

A fim de demonstrarmos propriedades de regularidade destes expoentes, mostraremos, através da fórmula de Thouless,⁹ que a quantidade

$$\gamma(z) := \gamma_1^+(z) + \gamma_1^-(z) + \dots + \gamma_l^+(z), \quad (6.17)$$

definida no enunciado da Proposição 6.6, é uma função sub-harmônica (Definição A.1). Para tanto, necessitamos da densidade integrada de estados (Definição 6.2).

Dada uma família de operadores dinamicamente definidos $(H_\omega)_\omega$, segundo a Definição 6.1, considere, para cada $N \in \mathbb{N}$ e cada $\omega \in \Omega$, a restrição H_ω^N de H_ω^ϕ ao espaço $l^2(\{0, 1, \dots, N-1, N\})$. Considere, ainda, a função $k_\omega^N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}_+$, definida pela lei

$$k_\omega^N(x) := \frac{1}{N} \# \{\text{autovalores de } H_\omega^N \text{ menores ou iguais a } x\}. \quad (6.18)$$

Mostraremos, a seguir, que a sequência de medidas $(k_\omega^N d\kappa)_{N \in \mathbb{N}}$ converge fracamente para a densidade integrada de estados k .

⁹Baseamo-nos na demonstração exposta em Cycon et al. [1987], página 183 e na demonstração de Kotani & Simon [1988]. A única diferença na fórmula que obtivemos para o operador de Jacobi é termo constante adicional $\int_\Omega \log \det(D(\omega)) d\nu(\omega)$, de acordo com o Teorema 6.9.

Proposição 6.7. *Sejam $(H_\omega)_\omega$ uma família de operadores de Jacobi ergódicos, como na Definição 6.1, k a medida de densidade integrada de estados, segundo a Definição 6.2, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e limitada, $(k_\omega^N)_{N \in \mathbb{N}}$ a sequência definida por (6.18), e κ a medida de Lebesgue. Então, existe um conjunto mensurável Ω_f tal que $\nu(\Omega_f) = 1$ e, para todo $\omega \in \Omega_f$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int f(x) k_\omega^N(x) d\kappa(x) = \int f(x) dk(x).$$

Demonstração. Seja \mathcal{P}_ω a resolução da identidade correspondente ao operador H_ω^ϕ (segundo a Proposição B.12). Pela definição de traço de um operador (Definição B.20),

$$\int f(x) k_\omega^N(x) d\kappa(x) = \frac{1}{N} [\mathcal{P}_\omega(f) \chi_N]. \quad (6.19)$$

Como os vetores canônicos $\mathbf{e}_{n,k}$ formam uma base ortonormal de $l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l)$,

$$\frac{1}{N} [\mathcal{P}_\omega(f) \chi_N] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^l \langle \mathcal{P}_\omega(f) \mathbf{e}_{n,k}, \mathbf{e}_{n,k} \rangle. \quad (6.20)$$

Por outro lado, como o operador $H_{T^n \omega}^\phi$ é obtido do operador H_ω^ϕ por meio de uma translação, segue-se que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\langle \mathcal{P}_\omega(f) \mathbf{e}_{n,k}, \mathbf{e}_{n,k} \rangle = \langle \mathcal{P}_{T^n \omega}(f) \mathbf{e}_{1,k}, \mathbf{e}_{1,k} \rangle. \quad (6.21)$$

Desta maneira, se definirmos

$$\bar{f}(\omega) = \sum_{k=1}^l \langle \mathcal{P}_\omega(f) \mathbf{e}_{1,k}, \mathbf{e}_{1,k} \rangle,$$

concluimos de (6.19), (6.20) e (6.21) que

$$\int f(x) k_\omega^N(x) d\kappa(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \bar{f}(T^n \omega).$$

Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff (Proposição F.2), existe um conjunto

mensurável Ω_f tal que $\nu(\Omega_f) = 1$ e, para todo $\omega \in \Omega_f$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{f}(T^n \omega) = \mathbb{E}[\bar{f}]$$

Pela definição de k ,

$$\mathbb{E}[\bar{f}] = \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^l \langle \mathcal{P}_\omega(f) \mathbf{e}_{1,k}, \mathbf{e}_{1,k} \rangle \right] = \int f(x) dk(x).$$

Das últimas três identidades, concluímos que, para todo $\omega \in \Omega_f$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int f(x) k_\omega^N(x) d\kappa(x) = \int f(x) dk(x).$$

□

Proposição 6.8. *Sejam $(H_\omega)_\omega$, k e $(k_\omega^N)_{N \in \mathbb{N}}$ como no enunciado da Proposição 6.7. Então, $(k_\omega^N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge fracamente para a medida k , para ν -quase todo ω .*

Demonstração. Seja C_0 o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas de suporte compacto. Seja $(g_n)_n$ uma sequência de funções reais mensuráveis limitadas densa em C_0 no sentido da convergência uniforme. Defina

$$\Omega_0 := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{g_n},$$

sendo Ω_{g_n} como no enunciado da Proposição 6.7; então, $\nu(\Omega_0) = 1$.

Agora, dados $f \in C_0$ e $\omega \in \Omega_0$, segue-se da Proposição 6.7 que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int f(x) k_\omega^N(x) d\kappa(x) = \int f(x) dk(x).$$

□

Podemos, agora, demonstrar a fórmula de Thouless, de maneira análoga à demonstração exibida em [Kotani & Simon \[1988\]](#).

Teorema 6.9 (Fórmula de Thouless). *Sejam $(H_\omega)_\omega$ como no enunciado da Proposição 6.7, $\gamma(z)$ a soma dos expoentes de Lyapunov, dada por (6.17), e k a densidade de estados (Definição 6.2). Então, para todo $z \in \mathbb{C}$,*

$$\gamma(z) = \int_{\mathbb{R}} \log |z - x| dk(x) - \int_{\Omega} \log \det (D(\omega)) d\nu(\omega).$$

Demonstração. Considere primeiramente o caso $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Fixado $\omega \in \Omega$, sejam $F^{(\pm)}(z, \omega)$ as soluções de Jost (Definição 3.1) para o operador H_ω . Segue-se da Proposição 6.6 que, para ν -quase todo ω ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \det (F_n^{(-)}(z, \omega)) = \gamma_1(z) + \dots + \gamma_l(z).$$

Como $z \in \rho(H_\omega)$, o espaço das soluções da equação de autovalores tem dimensão $2l$ e é gerado pelas soluções de Jost. Se considerarmos a solução de Dirichlet $\phi_n(\omega, z)$, cada sequência de colunas das matrizes $\phi_n(\omega, z)$ pode ser escrita como combinação linear de sequências de colunas das matrizes $F_n^{(+)}(z, \omega)$ e $F_n^{(-)}(z, \omega)$. Desta maneira, existem matrizes B, C tais que, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\phi_n(z, \omega) = F_n^{(-)}(z, \omega)B + F_n^{(+)}(z, \omega)C. \quad (6.22)$$

Se B não fosse invertível, existiria um $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $B\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e, conseqüentemente, $\phi(z, \omega)\mathbf{v} = F_n^{(+)}(z, \omega)C\mathbf{v}$ seria quadrado-somável em $+\infty$; assim, z seria um autovalor de H_ω^ϕ , o que é um absurdo. Concluimos, portanto, que B é invertível. Como, para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $F_n^{(-)}(z, \omega)$ é invertível, podemos reescrever (6.22) como

$$\phi_n(z, \omega) = \left[\mathbb{I} + F_n^{(+)}(z, \omega)CB^{-1} (F_n^{(-)}(z, \omega))^{-1} \right] F_n^{(-)}(z, \omega)B.$$

Das relações (6.15) e (6.16), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \det (\phi_n(z, \omega)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \det (F_n^{(-)}(z, \omega)) = \gamma(z). \quad (6.23)$$

Como ϕ satisfaz a relação de recorrência

$$D_n \phi_{n+1} = (z - V_n) \phi_n - D_{n-1} \phi_{n-1},$$

considerada como função de z , $D_n\phi_{n+1}$ é uma matriz cujas entradas são formadas por polinômios mônicos de graus menores ou iguais a n . Desta maneira, $\det(D_n\phi_{n+1})$ é um polinômio¹⁰ de grau nl .

Observe que se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é tal que $\phi_{N+1}(z, \omega)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então existe uma solução da equação de autovalores em z que é combinação linear das colunas de $(\phi_n(z, \omega))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ e que se anula nos sítios 0 e $N+1$. Neste caso, z é um auto-valor de H_ω^N . Logo, como D_N é invertível, $\det(D_N(\omega)\phi_{N+1}(z, \omega)) = 0$ se, e somente se, z é um autovalor de H_ω^N .

Assim $\det(D_N(\omega)\phi_{N+1}(z, \omega))$ é um polinômio em z cujas raízes são os autovalores de H_ω^N . Se denotarmos por $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq Nl}$ os autovalores de H_ω^N , temos que

$$\det(D_N(\omega)\phi_{N+1}(z, \omega)) = \prod_{k=1}^{Nl} (z - \lambda_k). \quad (6.24)$$

Portanto, se considerarmos, para $N \in \mathbb{N}$ e $\omega \in \Omega$, a medida β definida nos borelianos de \mathbb{R} , definida pela lei

$$\beta_\omega^N(\Lambda) = \# \{x \in \Lambda; x \text{ é um autovalor de } H_\omega^N\}, \quad (6.25)$$

então, para todos $\omega \in \Omega$ e $N \in \mathbb{N}$, segue-se de (6.24) que

$$\log \det(D_N(\omega)) + \log \det(\phi_{N+1}(z, \omega)) = \int \log |z - x| d\beta_\omega^N(x).$$

Consequentemente, pela definição de k_ω^N ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\log \det(D_{N+1}(\omega)) + \log \det(\phi_{N+1}(z, \omega))) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \log |z - x| k_\omega^N(x) d\kappa(x).$$

Concluimos da Proposição 6.8 que, para ν -quase todo $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\log \det(D_N(\omega)) + \log \det(\phi_N(z, \omega))) = \int \log |z - x| dk(x). \quad (6.26)$$

Por outro lado, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff (Proposição F.2), uma

¹⁰Em analogia ao argumento utilizado em [Cycon et al. \[1987\]](#), página 185.

vez que $D_n(\omega) = D(T^n\omega)$, segue-se que para ν -quase todo $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\log \det (D_N(\omega))) = \int_{\Omega} \log \det (D(\omega)) d\nu(\omega). \quad (6.27)$$

Combinando as identidades (6.26), (6.23) e (6.27), obtemos

$$\int_{\Omega} \log \det (D(\omega)) d\nu(\omega) + \gamma(z) = \int_{\mathbb{R}} \log |z - x| dk(x). \quad (6.28)$$

Resta-nos demonstrar a identidade para $x \in \mathbb{R}$. Dado $r > 0$, segue-se de (6.28) que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tomando a média em um disco de raio r em \mathbb{C} ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi r^2} \int_{|x-(p+qi)| \leq r} \gamma(p+qi) d\kappa(p) d\kappa(q) = \\ & - \int_{\Omega} \log \det (D(\omega)) d\nu(\omega) \\ & + \frac{1}{\pi r^2} \int_{|x-(p+qi)| \leq r} \int_{\mathbb{R}} \log |(p+qi) - s| dk(s) d\kappa(p) d\kappa(q). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Agora, pelo Lema A.4, a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{-\infty\}$, definida pela lei

$$f(z) := - \int_{\Omega} \log \det (D(\omega)) d\nu(\omega) + \int \log |z - s| dk(s),$$

é sub-harmônica. Logo, fazendo r tender a zero em ambos os membros de (6.29), obtemos, pelo Lema A.2,

$$\gamma(x) = f(x) = - \int_{\Omega} \log \det (D(\omega)) d\nu(\omega) + \int \log |x - s| dk(s).$$

□

Corolário 6.10. *Seja $\gamma(z)$ como no enunciado do Teorema 6.9. Então, para κ -quase todo $x \in \mathbb{R}$, a derivada normal*

$$\frac{\partial \gamma(x + iy)}{\partial y} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{\gamma(x) - \gamma(x + iy)}{y}$$

existe e é finita.

Demonstração. Segue-se do Teorema 6.9 e da Proposição A.5. \square

6.4 Teorema de Kotani

Demonstraremos agora o Teorema de Kotani, que relaciona os expoentes de Lyapunov do cociclo (6.5) às esperanças dos valores singulares da matriz espectral. Especificamente, demonstraremos que um expoente de Lyapunov nulo implica em que a esperança do respectivo valor singular da matriz espectral seja positiva e finita.

O ponto de partida da demonstração é a existência da derivada de $\gamma(z)$ (Corolário 6.10). Seguiremos a sequência de argumentos utilizados em Kotani & Simon [1988], que trata do caso do operador de Schrödinger a valores matriciais¹¹, com as adaptações necessárias.

A maior dificuldade é a presença das matrizes D_n nas relações de recorrência. A solução que adotamos foi incorporar tais matrizes à grandeza dinâmica que estimamos para, posteriormente, relacionar esta grandeza à matriz espectral, graças à Lei Inércia de Sylvester (Proposição C.6).

No caso de um operador dinamicamente definido, podemos generalizar a função M^ϕ de Weyl-Titchmarsh a partir da sequência

$$M_n^\phi(z, \omega) = -F_{n+1}(z, \omega)F_n^{-1}(z, \omega)D_n^{-1}(\omega), \quad (6.30)$$

em que $z \in \mathbb{C}_+$, $\omega \in \Omega$ e $F_n(z, \omega) = F_n^{(+)}(z, \omega)$; omitiremos o super-índice (+) para simplificarmos a notação. Por definição,

$$M_{n+1}^\phi(z, \omega) = M_n(z, T\omega).$$

Lema 6.11. *Sejam, para $z \in \mathbb{C}_+$ e $\omega \in \Omega$, $(F_n(z, \omega))_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de matrizes de Jost em z , e $(M_n^\phi(z, \omega))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ a sequência de matrizes de Weyl-Titchmarsh associadas ao operador H_ω^ϕ , definida por (6.30). Então, para todos $m, n \in \mathbb{Z}_+$,*

$$(a) \quad F_n(T^m \omega)F_m(\omega) = F_{n+m}(\omega);$$

¹¹A demonstração para o caso do operador de Jacobi escalar foi apresentada em Teschl [2000], página 98.

$$(b) \quad M_0^\phi(T^m\omega)D_m(\omega) = F_{m+1}(\omega)F_m^{-1}(\omega);$$

$$(c) \quad -(M_0^\phi)^{-1}(T^{m-1}\omega) - D_n(\omega)M_0^\phi(T^n\omega)D_n(\omega) + V_n(\omega) = z\mathbb{I}.$$

Demonstração. Para simplificar a notação, omitiremos a dependência das funções em z .

(a):

Seja $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^l$. A sequência $\mathbf{u}_n = F_n(\omega)\mathbf{a}$ corresponde à auto-solução $\mathbf{u} \in \mathcal{J}_+(\omega)$ do operador H_ω que satisfaz $\mathbf{u}_0 = \mathbf{a}$. Logo, $\mathbf{v}_n = F_n(T^m\omega)\mathbf{a}$ corresponde à solução $\mathbf{v} \in \mathcal{J}_+(T^m\omega)$ do operador $H_{T^m\omega}$ que satisfaz $\mathbf{v}_0 = \mathbf{a}$.

Por outro lado, $\mathbf{w}_n = F_{n+m}(\omega)\mathbf{a}$ corresponde à auto-solução $\mathbf{u} \in \mathcal{J}_+(\omega)$ que satisfaz $\mathbf{w}_m = \mathbf{a}$.

Portanto, cada coluna de $F_n(T^m\omega)F_m(\omega)$ é a solução em $\mathcal{J}_+(T^m\omega)$ do operador $H_{T^m\omega}$, que no sítio 0 é a coluna correspondente de $F_m(\omega)$.

(b):

Na alínea (a), demonstramos que

$$F_1(T^m\omega)F_m(\omega) = F_{1+m}(\omega).$$

Pela relação (6.30), considerando que $F_1(T^m\omega) = \mathbb{I}$ e $D_m(\omega) = D(T^m\omega)$, temos

$$M^\phi(T^m\omega) = -F_1(T^m\omega)D_m^{-1}(\omega);$$

segue-se das relações anteriores que

$$M^\phi(T^m\omega) = -F_{m+1}(\omega)F_m^{-1}(\omega)D_m^{-1}(\omega).$$

(c):

Segue-se da equação de autovalores que

$$D_{n-1}(\omega)F_{n-1}(\omega)F_n^{-1}(\omega) + D_n(\omega)F_{n+1}(\omega)F_n^{-1}(\omega) + V_n(\omega) = z\mathbb{I},$$

e da alínea (b) que

$$-(M^\phi)^{-1}(T^{n-1}\omega) - D_n(\omega)M^\phi(T^n\omega)D_n(\omega) + V_n(\omega) = z\mathbb{I}.$$

□

Lema 6.12. *Sejam z e $M^\phi(\omega)$ como definidos no enunciado do Lema 6.11, e $\gamma(z)$ a soma dos expoentes de Lyapunov, definida por (6.17). Então, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,*

$$\mathbb{E} \left[\log \det \left(\mathbb{I} + \frac{\mathfrak{S}[z]}{D_n \mathfrak{S}[M_n^\phi] D_n} \right) \right] = 2\gamma(z). \quad (6.31)$$

Demonstração. Fixe $\omega \in \Omega$. Segue-se, ao tomarmos a parte imaginária no dois membros da identidade do Lema 6.11-(c), que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$-D_n \mathfrak{S}[M_n^\phi] D_n - \mathfrak{S}[(M_{n-1}^\phi)^{-1}] = \mathfrak{S}[z] \mathbb{I}. \quad (6.32)$$

Logo,

$$\mathbb{I} + \frac{\mathfrak{S}[z]}{D_n \mathfrak{S}[M_n^\phi] D_n} = ((M_{n-1}^\phi)^*)^{-1} \mathfrak{S}[M_{n-1}^\phi] (M_{n-1}^\phi)^{-1} (D_n \mathfrak{S}[M_n^\phi] D_n)^{-1},$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\log \det \left(\mathbb{I} + \frac{\mathfrak{S}[z]}{D_n \mathfrak{S}[M_n^\phi] D_n} \right) \right] &= -\mathbb{E} \left[\log \det \left((M_{n-1}^\phi)^* \right) \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\log \det \left(\mathfrak{S}[M_{n-1}^\phi] \right) \right] \\ &\quad - \mathbb{E} \left[\log \det \left(M_{n-1}^\phi \right) \right] - 2\mathbb{E} \left[\log \det \left(D_n \right) \right] \\ &\quad - \mathbb{E} \left[\log \det \left(\mathfrak{S}[M_n^\phi] \right) \right]. \end{aligned}$$

Como

$$\mathbb{E} \left[\log \det \left(\mathfrak{S}[M_{n-1}^\phi] \right) \right] = \mathbb{E} \left[\log \det \left(\mathfrak{S}[M_n^\phi] \right) \right]$$

e

$$\mathbb{E} \left[\log \det \left(M_{n-1}^\phi \right) \right] = \mathbb{E} \left[\log \det \left((M_{n-1}^\phi)^* \right) \right],$$

concluimos que

$$\mathbb{E} \left[\log \det \left(\mathbb{I} + \frac{\mathfrak{S}[z]}{D_n \mathfrak{S}[M_n^\phi] D_n} \right) \right] = -2\mathbb{E} \left[\log \det \left(M_{n-1}^\phi \right) + \log \det \left(D_n \right) \right]. \quad (6.33)$$

Por outro lado, $M_n^\phi = -F_{n+1}F_n^{-1}D_n^{-1}$, pela definição (6.30). Logo, para todo $\omega \in \Omega$ e todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\log \det (M_n^\phi(\omega)) = \log \det (-F_{n+1}(\omega)) + \log \det (F_n^{-1}(\omega)) + \log \det (D_n^{-1}(\omega)).$$

O Teorema Ergódico (Proposição F.2) estabelece que, para ν -quase todo $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{E} [\log \det (M_n^\phi)] = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \log \det (M_n^\phi(\omega)),$$

e portanto que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\log \det (M_n^\phi)] &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} (\log \det (F_L(\omega)) - \log \det (F_0(\omega))) \\ &\quad + \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \left(\sum_{n=0}^{L-1} \log \det (D_n^{-1}(\omega)) \right). \end{aligned}$$

Computemos, agora, os membros desta identidade. Naturalmente,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \log \det (F_0(\omega)) = 0.$$

Pela Proposição 6.6,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} (\log \det (F_L(\omega))) = -\gamma(z),$$

e além disso, novamente pelo Teorema Ergódico,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \log \det (D_n^{-1}(\omega)) = -\mathbb{E} [\log \det (D_n)],$$

para ν -quase todo $\omega \in \Omega$. Segue-se que

$$\mathbb{E} [\log \det (M_n^\phi)] = -\gamma(z) - \mathbb{E} [\log \det (D_n)]. \quad (6.34)$$

O resultado é agora uma consequência das identidades (6.33) e (6.34). \square

Proposição 6.13. *Sejam z , $M^\phi(\omega)$ e $\gamma(z)$ como definidos no enunciado do Lema*

6.11. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{\left[D_n \mathfrak{S}[M_n^\phi] D_n + \frac{\mathfrak{S}[z]}{2} \right]} \right] \leq 2 \frac{\gamma(z)}{\mathfrak{S}[z]}.$$

Demonstração. Para toda matriz quadrada A , sabemos que¹²

$$\det(e^A) = e^{[A]}.$$

Se B for tal que $\mathbb{I} + B = e^A$, segue-se que¹³

$$\det(\mathbb{I} + B) = e^{[\log(\mathbb{I} + B)]},$$

ou seja,

$$\log \det(\mathbb{I} + B) = [\log(\mathbb{I} + B)].$$

A igualdade (6.31) pode, então, ser reescrita como

$$\mathbb{E} \left[\left[\log \left(\mathbb{I} + \frac{\mathfrak{S}[z]}{D_n \mathfrak{S}[M_n^\phi] D_n} \right) \right] \right] = 2\gamma(z),$$

que por sua vez, pela Proposição C.5-(e), pode ser traduzida em termos dos valores singulares, μ_k , de $D_0 \mathfrak{S}[M_0^\phi] D_0$ como

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^l \left(\log \left(1 + \frac{\mathfrak{S}[z]}{\mu_k} \right) \right) \right] = 2\gamma(z).$$

Segue-se da desigualdade

$$\log(1 + x) \geq \frac{x}{1 + \frac{x}{2}}, \quad (6.35)$$

¹²Veja, por exemplo, [Taylor \[2011\]](#), página 25.

¹³O logaritmo está definido para qualquer matriz com autovalores positivos, [Higham \[2008\]](#), página 269.

válida para todo $x \geq 0$, que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^l \frac{\left(\frac{\Im[z]}{\mu_k} \right)}{1 + \left(\frac{\Im[z]}{2\mu_k} \right)} \right] \leq 2\gamma(z),$$

e assim que

$$\Im[z] \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^l \frac{1}{\mu_k + \frac{\Im[z]}{2}} \right] \leq 2\gamma(z).$$

E finalmente, uma vez que a média aritmética de um conjunto finito de números não-negativos é maior do que sua média harmônica,

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{\left[D_n \Im[M_n^\phi] D_n + \frac{\Im[z]}{2} \right]} \right] \leq \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^l \frac{1}{\mu_k + \frac{\Im[z]}{2}} \right] \leq 2 \frac{\gamma(z)}{\Im[z]}.$$

□

O Corolário 6.10 garante que a derivada normal $\frac{\partial \gamma(x+iy)}{\partial y}(x)$ existe para quase todo x com respeito à medida de Lebesgue. Desta maneira, para todo $x \in \mathbb{R}$ em que a derivada normal existe e $\gamma(x) = 0$,

$$\frac{\partial \gamma(x+iy)}{\partial y}(x) = \lim_{y \downarrow 0} \frac{\gamma(x+iy) - \gamma(x)}{y} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{\gamma(x+iy)}{y}.$$

Então, como consequência da Proposição 6.13,

$$\limsup_{y \downarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\left[D_n \Im[M_n^\phi(x+iy)] D_n + \frac{\Im[z]}{2} \right]} \right] < \infty$$

para κ -quase todo x e, pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\liminf_{y \downarrow 0} \frac{1}{\left[D_n \Im[M_n^\phi(x+iy)] D_n + \frac{\Im[z]}{2} \right]} \right] \leq \\ & \leq \limsup_{y \downarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\left[D_n \Im[M_n^\phi(x+iy)] D_n + \frac{\Im[z]}{2} \right]} \right]. \end{aligned}$$

Logo, para κ -quase-todo x tal que $\gamma(x) = 0$ e ν -quase todo $\omega \in \Omega$,

$$\liminf_{y \downarrow 0} [D_n \Im[M_n^\phi(x + iy, \omega)] D_n] > 0.$$

Por outro lado, por (3.8), a função $M^\phi(z)$ é Herglotz, e conseqüentemente, o limite

$$\lim_{y \downarrow 0} [D_n \Im[M_n^\phi(x + iy, \omega)] D_n]$$

é finito para κ -quase todo x e todo $\omega \in \Omega$. Portanto, para κ -quase todo x tal que $\gamma(x) = 0$ e ν -quase todo $\omega \in \Omega$,

$$0 < \lim_{y \downarrow 0} [D_n \Im[M_n^\phi(x + iy, \omega)] D_n] < \infty. \quad (6.36)$$

Se definirmos os conjuntos¹⁴

$$\mathcal{Z}_j := \{x \in \mathbb{R}; \text{exatamente } 2j \text{ expoentes } \gamma \text{ se anulam}\}, \quad (6.37)$$

segue-se de (6.36) que $\overline{\mathcal{Z}_l}^{ess} \subseteq \sigma_{ac,l}(H_\omega^\phi)$ para ν -quase todo $\omega \in \Omega$. De fato, pela Lei de Inércia de Sylvester (Proposição C.6), obtemos de (6.36) que, para κ -quase todo x tal que $\gamma(x) = 0$ e ν quase todo $\omega \in \Omega$,

$$0 < \lim_{y \downarrow 0} [\Im[M_n^\phi(x + iy, \omega)]] < \infty;$$

a afirmação agora é uma consequência da Proposição 3.8.

Podemos, assim como realizado em Kotani & Simon [1988], prosseguir na análise e obter, a partir da Proposição 6.13, uma caracterização estratificada com respeito à multiplicidade, expressa por meio dos conjuntos (6.37).

A saber, relacionaremos os maiores valores singulares da matriz espectral M^ϕ com os menores expoentes de Lyapunov:

Lema 6.14. *Sejam $z, M^\phi(\omega)$ e $\gamma(z)$ definidos como no enunciado do Lema 6.12. Sejam $\mu_1(\omega) \geq \mu_2(\omega) \geq \dots \geq \mu_l(\omega)$ os valores singulares de $D_0 \Im[M_0^\phi(\omega)] D_0$.*

¹⁴Os expoentes se Lyapunov do operador, por serem pares de números opostos, se anulam aos pares.

Então,

$$\sum_{k=1}^j \mathbb{E} \left[\log \left(1 + \frac{\Im[z]}{\mu_k} \right) \right] \leq 2(\gamma_{l+1-j} + \dots + \gamma_l).$$

Demonstração. Partindo novamente da Equação (6.32), temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$-D_n \Im[M_n^\phi] D_n = \Im[z] \mathbb{I} - ((M_{n-1}^\phi)^*)^{-1} \Im[M_{n-1}^\phi] (M_{n-1}^\phi)^{-1}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação anterior à esquerda por F_n^* e à direita por F_n , obtemos

$$-F_n^* D_n \Im[M_n^\phi] D_n F_n = F_n^* \Im[z] F_n - F_n^* ((M_{n-1}^\phi)^*)^{-1} \Im[M_{n-1}^\phi] (M_{n-1}^\phi)^{-1} F_n.$$

Como

$$\begin{cases} F_n^* ((M_{n-1}^\phi)^*)^{-1} &= -F_{n-1}^* D_{n-1}, \\ (M_{n-1}^\phi)^{-1} F_n &= -D_{n-1} F_{n-1}, \end{cases}$$

a igualdade pode ser reescrita como

$$-F_n^* D_n \Im[M_n^\phi] D_n F_n = \Im[z] F_n^* F_n - F_{n-1}^* D_{n-1} \Im[M_{n-1}^\phi] D_{n-1} F_{n-1},$$

que é uma relação entre matrizes positivas semi-definidas. Denotando por $P_n := \sqrt{D_n \Im[M_n^\phi] D_n} F_n$, temos a identidade

$$P_{n-1}^* P_{n-1} = \Im[z] F_n^* F_n + P_n^* P_n,$$

que resulta na relação de recorrência

$$P_{n-1}^* P_{n-1} = P_n^* \left(\mathbb{I} + \frac{\Im[z]}{D_n \Im[M_n^\phi] D_n} \right) P_n. \quad (6.38)$$

O próximo passo consiste em aplicarmos os operadores Λ^k a ambos os mem-

bros de (6.38)¹⁵. Para cada $0 \leq j \leq l-1$, temos

$$\begin{aligned} \Lambda^{l-j}(P_{n-1}^* P_{n-1}) &= \Lambda^{l-j} \left(P_n^* \left(\mathbb{I} + \frac{\mathfrak{S}[z]}{D_n \mathfrak{S}[M_n^\phi] D_n} \right) P_n \right) \\ &= \Lambda^{l-j} \left(\left(\mathbb{I} + \frac{\mathfrak{S}[z]}{D_n \mathfrak{S}[M_n^\phi] D_n} \right) P_n P_n^* \right), \end{aligned}$$

de modo que

$$\|\Lambda^{l-j}(P_{n-1}^* P_{n-1})\| \leq \left\| \Lambda^{l-j} \left(\mathbb{I} + \frac{\mathfrak{S}[z]}{D_n \mathfrak{S}[M_n^\phi] D_n} \right) \right\| \|\Lambda^{l-j}(P_n^* P_n)\|. \quad (6.39)$$

Como

$$\left\| \Lambda^{l-j} \left(\mathbb{I} + \frac{\mathfrak{S}[z]}{D_n \mathfrak{S}[M_n^\phi] D_n} \right) \right\| = \prod_{k=1}^{l-j} \left(1 + \frac{\mathfrak{S}[z]}{\mu_{l+1-k}(T^n \omega)} \right),$$

a desigualdade (6.39) pode ser reescrita como

$$\log \|\Lambda^{l-j}(P_{n-1}^* P_{n-1})\| \leq \sum_{k=1}^{l-j} \log \left(1 + \frac{\mathfrak{S}[z]}{\mu_{l+1-k}(T^n \omega)} \right) + \log \|\Lambda^{l-j}(P_n^* P_n)\|. \quad (6.40)$$

Segue-se da relação recursiva (6.40) que

$$\log \|\Lambda^{l-j}(P_0^* P_0)\| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{l-j} \log \left(1 + \frac{\mathfrak{S}[z]}{\mu_{l+1-k}(T^j \omega)} \right) + \log \|\Lambda^{l-j}(P_n^* P_n)\|.$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade anterior por n e fazendo $n \rightarrow \infty$, segue-se do Teorema Ergódico de Birkhoff (Proposição F.2) que, para ν -quase todo $\omega \in \Omega$,

$$0 \leq \sum_{k=1}^l \mathbb{E} \left[\log \left(1 + \frac{\mathfrak{S}[z]}{\mu_{l+1-k}} \right) \right] + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\Lambda^{l-j}(P_n^* P_n)\|. \quad (6.41)$$

Por outro lado, por definição, F e P satisfazem, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$P_n^* P_n = F_n^* D_n \mathfrak{S}[M_n^\phi] D_n F_n,$$

¹⁵Vide o Lema C.7 e a relação (C.3) para a definição e algumas propriedades destes operadores.

de modo que, pela relação (C.2),

$$\begin{aligned}\Lambda^{l-j}(P_n^*P_n) &= \Lambda^{l-j}(F_n^*D_n\mathfrak{S}[M_n^\phi]D_nF_n) \\ &= \Lambda^{l-j}(D_n\mathfrak{S}[M_n^\phi]D_nF_nF_n^*),\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{1}{n} \log \|\Lambda^{l-j}(P_n^*P_n)\| \leq \frac{1}{n} \log \|\Lambda^{l-j}(D_n\mathfrak{S}[M_n^\phi]D_n)\| + \frac{1}{n} \log \|\Lambda^{l-j}(F_n^*F_n)\|. \quad (6.42)$$

Segue-se agora da Proposição 6.6 que, para ν -quase todo $\omega \in \Omega$,

$$-\gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\Lambda^{l-j}(F_n(\omega, z))\|,$$

e como $\log \|\Lambda^{l-j}(D_0\mathfrak{S}[M_0^\phi]D_0)(\omega)\|$ é limitada superiormente, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\Lambda^{l-j}(P_n^*P_n)\| \leq -2\gamma(z). \quad (6.43)$$

Segue-se das relações (6.43) e (6.41) que

$$\sum_{k=1}^{l-j} \mathbb{E} \left[\log \left(1 + \frac{\mathfrak{S}[z]}{\mu_{l+1-k}} \right) \right] \geq 2(\gamma_1 + \dots + \gamma_{l-j}). \quad (6.44)$$

Por fim, obtemos do Lema 6.12 e de (6.44) que

$$\sum_{k=1}^j \mathbb{E} \left[\log \left(1 + \frac{\mathfrak{S}[z]}{\mu_k} \right) \right] = \sum_{k=l-j+1}^l \mathbb{E} \left[\log \left(1 + \frac{\mathfrak{S}[z]}{\mu_{l+1-k}} \right) \right] \leq 2(\gamma_{l+1-j} + \dots + \gamma_l),$$

como queríamos demonstrar. \square

Suponha agora que para um $x \in \mathbb{R}$ dado exista uma auto-solução do operador H_ω como na Definição 6.1. Dado $y > 0$, uma vez que $x + iy$ pertence ao conjunto resolvente, também existe a auto-solução correspondente à energia $x + iy$. Podemos, assim, utilizar a fórmula de Green para comparar as normas $l^2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^l)$ destas duas auto-soluções.

Lema 6.15. *Seja $(H_\omega)_\omega$ como na Definição 6.1. Fixados $\omega \in \Omega$, $1 \leq k \leq l$ e $n \in \mathbb{Z}_+$, seja $\mathbf{f}_n^{(k)}(x+iy, \omega)$ a k -ésima coluna da matriz $F_n(x+iy, \omega)$. Se a solução de Jost $\mathbf{f}^{(k)}(x, \omega)$ for quadrado-somável em $+\infty$, então*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\| \mathbf{f}_m^{(k)}(x+iy) \right\|_{\mathbb{C}^l}^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \mathbf{f}_m^{(k)}(x) \right\|_{\mathbb{C}^l}^2.$$

Demonstração. Para simplificar a notação, omitiremos a dependência em ω . Seja $z = x + iy$. Aplicando o Lema 2.6 a $\mathbf{f}^{(k)}(z)$ e $\mathbf{f}^{(k)}(x)$, obtemos

$$\Im[z] \left(2 \left\| \mathbf{f}^{(k)}(z) \right\|^2 - \left\langle \mathbf{f}^{(k)}(z), \mathbf{f}^{(k)}(x) \right\rangle - \left\langle \mathbf{f}^{(k)}(x), \mathbf{f}^{(k)}(z) \right\rangle \right) = 0,$$

pois sendo as auto-soluções quadrado-somáveis,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_{[\mathbf{f}^{(k)}(z) - \mathbf{f}^{(k)}(x), \bar{\mathbf{f}}^{(k)}(z) - \bar{\mathbf{f}}^{(k)}(x)]}(n+1) = 0,$$

e como $\mathbf{f}_0^{(k)}(z) - \mathbf{f}_0^{(k)}(x) = \mathbf{0}$,

$$W_{[\mathbf{f}^{(k)}(z) - \mathbf{f}^{(k)}(x), \bar{\mathbf{f}}^{(k)}(z) - \bar{\mathbf{f}}^{(k)}(x)]}(1) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{f}^{(k)}(z) - \mathbf{f}^{(k)}(x) \right\|^2 &= \left\| \mathbf{f}^{(k)}(z) \right\|^2 + \left\| \mathbf{f}^{(k)}(x) \right\|^2 \\ &\quad - \left\langle \mathbf{f}^{(k)}(z), \mathbf{f}^{(k)}(x) \right\rangle - \left\langle \mathbf{f}^{(k)}(x), \mathbf{f}^{(k)}(z) \right\rangle \\ &= \left\| \mathbf{f}^{(k)}(x) \right\|^2 - \left\| \mathbf{f}^{(k)}(z) \right\|^2, \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\left\| \mathbf{f}^{(k)}(x) \right\|^2 - \left\| \mathbf{f}^{(k)}(z) \right\|^2 > 0.$$

□

Corolário 6.16. *Sejam z , $(H_\omega)_\omega$, $M^\phi(\omega)$ e $\gamma(z)$ como no enunciado do Lema 6.12. Dado $x \in \mathbb{R}$, se, para um $1 \leq j \leq l$, $\gamma_j(x) > 0$, então, para todo $y > 0$, $\gamma_j(x) \leq$*

$\gamma(x + iy)$.

Demonstração. Se $\gamma_j(x) > 0$, para ν -quase todo ω , há uma auto-solução $\mathbf{f}(x, \omega)$ em x que decai exponencialmente. O Lema 6.15 estabelece que, para ν -quase todo ω , a auto-solução correspondente $\mathbf{f}(x + iy, \omega)$ deve decair no mínimo com a mesma taxa. Logo $\gamma_j(x) \leq \gamma_j(x + iy)$. \square

Proposição 6.17. *Sejam $(H_\omega)_\omega, M^\phi(\omega), \gamma$ e $(\mu_k)_{k=1}^l$ como definidos no enunciado do Lema 6.14. Fixados $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq j \leq l - 1$, suponha que existam, para cada $k = 1, 2, \dots, l - j$, os limites*

$$\gamma_k(x) = \lim_{y \downarrow 0} \gamma_k(x + iy).$$

Então, para todo $y > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^j \frac{1}{\mu_k(x+iy) + \frac{y}{2}} \right) &\leq \frac{2}{y} \left(\sum_{k=1}^j \gamma_{l+1-k}(x + iy) \right) \\ &\quad + \frac{2}{y} \left(\sum_{k=j+1}^l (\gamma_{l+1-k}(x + iy) - \gamma_{l+1-k}(x)) \right). \end{aligned}$$

Demonstração. Do Lema 6.14, temos que

$$\sum_{k=1}^j \mathbb{E} \left[\log \left(1 + \frac{y}{\mu_k} \right) \right] \leq 2(\gamma_{l+1-j} + \dots + \gamma_l).$$

Desta desigualdade, utilizando argumentos análogos àqueles empregados na demonstração da Proposição 6.13, podemos mostrar que

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^j \frac{1}{\mu_k(x + iy) + \frac{y}{2}} \right) \leq \frac{2}{y} \sum_{k=1}^j \gamma_{l+1-k}(x + iy). \quad (6.45)$$

Por outro lado, pelo Corolário 6.16,

$$\sum_{k=j+1}^l (\gamma_{l+1-k}(x + iy) - \gamma_{l+1-k}(x)) \geq 0,$$

e, como $y > 0$,

$$0 \leq \frac{2}{y} \sum_{k=j+1}^l (\gamma_{l+1-k}(x+iy) - \gamma_{l+1-k}(x)). \quad (6.46)$$

Somando, membro a membro, (6.45) e (6.46), o resultado se segue. \square

Teorema 6.18 (Teorema de Kotani). *Sejam $(H_\omega)_\omega$ uma família de operadores ergódicos, como na Definição 6.1, e para cada $1 \leq j \leq l$, \mathcal{Z}_j o conjunto dado por (6.37). Então, para ν -quase todo ω , a restrição do espectro absolutamente contínuo ao conjunto \mathcal{Z}_j tem multiplicidade no mínimo $2j$.*

Demonstração. Considere os conjuntos

$$Q_1 := \{x \in \mathbb{R}; \exists \lim_{y \downarrow 0} \gamma(x+iy)\},$$

$$Q_2 := \{x \in \mathbb{R}; \exists \lim_{y \downarrow 0} \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x+iy)\},$$

$$Q_3 := \{x \in Q_1 \cap Q_2; \lim_{y \downarrow 0} \left[\frac{\gamma(x+iy) - \gamma(x)}{y} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x+iy) \right] = 0\},$$

$$Q_4 := \{x \in \mathbb{R}; \exists \lim_{y \downarrow 0} \Im[M(x+iy, \omega)], \text{ para } \nu\text{-quase todo } \omega\}.$$

Segue-se do Corolário 6.10 que $\kappa(\mathbb{R} \setminus Q_3) = 0$, para ν -quase todo $\omega \in \Omega$. Para todo x_0 em $\mathcal{Z}_j \cap Q_3$, existe o limite

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{y} \left[\sum_{k=1}^j \gamma_k(x_0+iy) + \sum_{k=j+1}^l (\gamma_k(x_0+iy) - \gamma_k(x_0)) \right] = \lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{y} [\gamma(x_0+iy) - \gamma(x_0)].$$

Segue-se, portanto, da Proposição 6.17 que para todos $x_0 \in \mathcal{Z}_j \cap Q_3$ e todo $1 \leq k \leq j$,

$$\limsup_{y \downarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\mu_k(x_0+iy) + \frac{y}{2}} \right] < \infty,$$

e conseqüentemente, pelo Lema de Fatou, que

$$\mathbb{E} \left[\liminf_{y \downarrow 0} \frac{1}{\mu_k(x_0+iy) + \frac{y}{2}} \right] \leq \limsup_{y \downarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\mu_k(x_0+iy) + \frac{y}{2}} \right] < \infty.$$

Logo, para ν -quase todo ω , todo $x_0 \in \mathcal{Z}_j \cap Q_3$ e todo $1 \leq k \leq j$, temos

$$\liminf_{y \downarrow 0} \mu_k(x_0 + iy, \omega) > 0.$$

Por outro lado, por (3.8), M^ϕ é uma função Herglotz. Logo, $\kappa(\mathbb{R} \setminus Q_4) = 0$. Portanto, se $x_0 \in \mathcal{Z}_j \cap Q_3 \cap Q_4$, então, para ν -quase todo ω e todo $1 \leq k \leq j$,

$$0 < \lim_{y \downarrow 0} \mu_k(x_0 + iy, \omega) < \infty.$$

Concluimos que, nestas condições,

$$[D_0(\omega)\mathfrak{S}[M(x_0, \omega)]D_0(\omega)] \geq j.$$

Pela Lei da Inércia de Sylvester (Proposição C.6), o mesmo vale para a matriz $\mathfrak{S}[M(x_0, \omega)]$.

Utilizando argumentos análogos, podemos demonstrar o mesmo resultado para a família $(H_\omega^{\phi, (-)})_\omega$ definida em $\{-1, -2, \dots\}$ e, a partir da Proposição 3.10, podemos estender, com multiplicidade $2j$, o resultado à família de operadores $(H_\omega)_\omega$ definidos em \mathbb{Z} . \square

6.5 Teorema de Ishii-Pastur

Discutiremos na presente seção o Teorema de Ishii-Pastur, a recíproca do Teorema de Kotani (demonstrado para o caso escalar de operadores de Schrödinger, por exemplo, em Ishii [1973] e Pastur [1980]). No contexto de operadores de Schrödinger a valores matriciais, podemos citar a demonstração exposta em Kotani & Simon [1988]. Demonstraremos uma versão do resultado para o caso de operadores de Jacobi a valores matriciais através de relações provenientes da Fórmula de Green. Ao combinarmos os teoremas de Kotani e de Ishii-Pastur, obtemos aquilo que se conhece na literatura por Teoria de Kotani.

Proposição 6.19. *Sejam $(H_\omega)_\omega$ como na Definição 6.1, $M^\phi(z, \omega)$ a matriz de Weyl-Titchmarsh para o operador H_ω^ϕ e $\mathbf{f}^{(k)}(z)$ como no Lema 6.15. Fixados $\omega \in \Omega$*

e $x \in \mathbb{R}$, se a solução de Jost $\mathbf{f}^{(k)}(x)$ for quadrado-somável em $+\infty$, então

$$\lim_{y \downarrow 0} (D_0 \mathfrak{S}[M^\phi(x + iy, \omega)] D_0)_{kk} = 0.$$

Demonstração. Sabemos, da Proposição 3.3-(b), que para todo $y > 0$,

$$(D_0 \mathfrak{S}[M(x + iy, \omega)] D_0)_{kk} = y \sum_{n=1}^{\infty} (F_n^* F_n)_{kk} = y \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \mathbf{f}_n^{(k)}(x + iy) \right\|_{\mathbb{C}^l}^2.$$

O Lema 6.15 garante, sob as hipóteses do enunciado, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \mathbf{f}_n^{(k)}(x + iy) \right\|_{\mathbb{C}^l}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \mathbf{f}_n^{(k)}(x) \right\|_{\mathbb{C}^l}^2.$$

Consequentemente, como x é fixado,

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{(D_0 \mathfrak{S}[M(x + iy, \omega)] D_0)_{kk}}{y} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \mathbf{f}_n^{(k)}(x) \right\|_{\mathbb{C}^l}^2 < \infty,$$

e assim, necessariamente, $\lim_{y \downarrow 0} (D_0 \mathfrak{S}[M(x + iy, \omega)] D_0)_{kk} = 0$. \square

Teorema 6.20 (Teorema de Ishii-Pastur). *Seja $(H_\omega)_\omega$ uma família de operadores ergódicos, como na Definição 6.1, e seja para cada $1 \leq j \leq l$, \mathcal{Z}_j o conjunto dado por (6.37). Então, a multiplicidade do espectro absolutamente contínuo restrito a \mathcal{Z}_j é no máximo $2j$.*

Demonstração. Suponha que $x \in \mathcal{Z}_j$. Desta hipótese e do Teorema de Oseledets temos que, para ν -quase todo ω , existem $l - j + 1$ auto-soluções $\mathbf{f}_\omega^{(k)}(x)$ linearmente independentes com decaimento exponencial em $+\infty$.

Pela Proposição 6.19, segue-se que, para $l - j + 1$ valores do índice k ,

$$\lim_{y \downarrow 0} (D_0 \mathfrak{S}[M^\phi(x + iy)] D_0)_{kk} = 0.$$

Logo, pela Lei da Inércia de Sylvester, existem $l - j + 1$ valores do índice k tais que

$$\lim_{y \downarrow 0} (\mathfrak{S}[M^\phi(x + iy)])_{kk} = 0,$$

e, portanto,

$$[\lim_{y \downarrow 0} \Im[M^\phi(x + iy)]] \leq j.$$

Analogamente, como na demonstração do Teorema 6.18, a mesma conclusão vale para a família $(H_\omega^{\phi, (-)})_\omega$ definida em $\{-1, -2, \dots\}$, e novamente a partir da Proposição 3.10, podemos estender o resultado, para Lebesgue quase todo $x \in \mathcal{Z}_j$, à família de operadores $(H_\omega)_\omega$ definidos em \mathbb{Z} , com multiplicidade $2j$. \square

Segue-se dos Teoremas 6.18 e 6.20 o seguinte resultado.

Corolário 6.21. *Sejam $(H_\omega)_\omega$ e \mathcal{Z}_j como no enunciado do Teorema 6.20. Então,*

(a) *o conjunto \mathcal{Z}_j é o suporte essencial do espectro absolutamente contínuo de multiplicidade $2j$;*

(b) *não existe espectro absolutamente contínuo de multiplicidade ímpar.*

Capítulo 7

Operadores Minimais

Uma outra situação natural a ser considerada no contexto de operadores dinamicamente definidos (Definição 6.1), é aquela em que Ω é um espaço topológico e T é uma transformação contínua minimal. Se Ω é um espaço métrico compacto e T é uma transformação minimal, pode-se demonstrar uma versão fraca da chamada dicotomia exponencial entre o espectro e o conjunto resolvente, além da constância em ω das componentes absolutamente contínuas de multiplicidades quaisquer dos operadores da família $(H_\omega)_\omega$ (ou seja, que $\sigma_{ac,r}(H_{\omega_1}) = \sigma_{ac,r}(H_{\omega_2})$, para todos $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, com $1 \leq r \leq l$). Demonstraremos esta última afirmação, na Seção 7.1, utilizando os resultados estabelecidos no Capítulo 5. Já a referida versão da dicotomia exponencial será demonstrada na Seção 7.3.

7.1 Constância do Espectro Absolutamente Contínuo

Dentre os potenciais dinamicamente definidos a partir de transformações minimais em espaços métricos, destacam-se no estudo de operadores de Schrödinger escalares aqueles chamados *almost – periodic*; em particular, temos os chamados potenciais periódicos, *limit – periodic* e *quasi – periodic*.

Podemos estender tais definições para o caso do operador de Jacobi a valores matriciais.

Definição 7.1 (Potencial *almost – periodic*). Uma função $V : \mathbb{Z} \rightarrow M(l, \mathbb{C})$ limitada é dita um potencial *almost – periodic* se a sequência $(S^n(V))_{n \in \mathbb{Z}}$ é compacta em $l^\infty(\mathbb{Z}; M(l, \mathbb{C}))$, em que

$$\begin{aligned} S : l^\infty(\mathbb{Z}; M(l, \mathbb{C})) &\rightarrow l^\infty(\mathbb{Z}; M(l, \mathbb{C})) \\ (V_n) &\hookrightarrow (V_{n+1}) \end{aligned}$$

é a aplicação deslocamento.

Dada uma aplicação $W : \mathbb{N} \rightarrow M(l, \mathbb{C})$, a envoltória de W é o conjunto

$$(W) := \overline{\{S^n(W), n \in \mathbb{N}\}}, \quad (7.1)$$

com o fecho tomado com respeito à topologia da convergência uniforme no espaço $l^\infty(\mathbb{Z}; M(l, \mathbb{C}))$. Se W é *almost – periodic*, (W) é compacto. Claramente, toda função periódica é *almost – periodic*. Em geral, operadores de Schrödinger definidos por potenciais *almost – periodic* são estudados no âmbito dos operadores ergódicos, tais como definidos na Capítulo 6.

Definição 7.2 (Potencial *Limit – periodic*). Um potencial $V : \mathbb{Z} \rightarrow M(l, \mathbb{C})$ é dito *limit – periodic* se existem sequências periódicas $W^{(m)} : \mathbb{Z} \rightarrow M(l, \mathbb{C})$ tais que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|V_k - W_k^{(m)}\| = 0.$$

Novamente, se V é uma função periódica, então V é um potencial *limit – periodic*. Se V é um potencial *limit – periodic*, então é um potencial *almost – periodic*. Em contrapartida, para o caso escalar, suponha que V seja *almost – periodic*, mas que não seja periódico; então, V é *limit – periodic* se, e somente se, (V) é totalmente desconexo, onde (V) é a envoltória de V , dada por (7.1).

Definição 7.3 (Potencial *quasi – periodic*). Sejam \mathbb{T}^d o toro d -dimensional e $f \in C(\mathbb{T}^d, M(l, \mathbb{C}))$ uma função contínua. Uma aplicação $V : \mathbb{Z} \rightarrow M(l, \mathbb{C})$ é dita um potencial *quasi – periodic* se é da forma

$$V(n) = f(\omega + n\alpha),$$

com $\omega, \alpha \in \mathbb{T}^d$, e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ é tal que se

$$\sum_{j=1}^d k_j \alpha_j = 0 \in \mathbb{T},$$

com $k_j \in \mathbb{Z}$, então $k_j = 0$ para $1 \leq j \leq d$.

Em outras palavras, um potencial *quasi-periodic* é dado por uma translação minimal no toro d -dimensional.

Se V é um potencial *almost-periodic*, denote (V) por Ω . O conjunto Ω é um subespaço topológico compacto de $l^\infty(\mathbb{Z}; M(l, \mathbb{C}))$, e podemos definir em Ω uma estrutura de grupo abeliano. De fato, se W_1, W_2 são potenciais tais que $W_1 = S^{k_1}(V)$ e $W_2 = S^{k_2}(V)$, para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, definimos

$$W_1 * W_2 := S^{k_1+k_2}(V).$$

E ainda podemos estender continuamente esta operação a Ω , que passa a ser um grupo topológico compacto, no qual podemos definir a medida de Haar.

Portanto, um potencial *almost-periodic* pode ser representado por uma translação minimal $T : \Omega \rightarrow \Omega$ em um grupo abeliano compacto Ω como

$$V_n = V_\omega(n) = f(T^n \omega), \quad (7.2)$$

em que $f : \Omega \rightarrow M(l, \mathbb{C})$ é uma aplicação contínua.

Podemos generalizar o resultado anterior e definir o conceito de operador dinamicamente definido minimal, ou seja, um operador como na Definição 6.1, com Ω um espaço topológico compacto e T uma transformação minimal. Uma das consequências dos Teoremas 5.3 e 5.6, conforme resultados apresentados em Last & Simon [1999] para o caso escalar, é a constância da componente absolutamente contínua do espectro para operadores minimais.

A definição de potencial minimal tem certas implicações topológicas:

Definição 7.4 (Limite à Direita e à Esquerda de um Potencial). *Sejam $V, W : \mathbb{Z} \rightarrow M(l, \mathbb{C})$ funções limitadas. Dizemos que W é limite à direita de V se existe*

uma sequência $(n_j)_j$ com $\lim_{j \rightarrow \infty} n_j = \infty$ tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} V(n - n_j) = W(n).$$

Nas mesmas condições, dizemos que W é limite à esquerda de V se, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} V(n + n_j) = W(n)$$

Se V é um potencial minimal e $W \in (V)$, por definição, W é limite à esquerda de V .

Proposição 7.5. *Sejam $H_{(1)}$ e $H_{(2)}$ operadores de Jacobi, segundo a Definição 2.1, associados, respectivamente, aos pares de sequências de matrizes reais e simétricas $(D_n^{(1)})_n, (V_n^{(1)})_n$ e $(D_n^{(2)})_n, (V_n^{(2)})_n$. Se $(D_n^{(2)})_n$ é limite à esquerda de $(D_n^{(1)})_n$ e $(V_n^{(2)})_n$ é limite à esquerda de $(V_n^{(1)})_n$, então, para todo $k \in \{1, 2, \dots, l\}$,*

$$\sigma_{ac,k}(H_{(1)}^\phi) = \sigma_{ac,k}(H_{(2)}^\phi),$$

em que $\sigma_{ac,k}(H_{(j)}^\phi)$ é o espectro absolutamente contínuo de multiplicidade k do operador $H_{(j)}^\phi$.

Demonstração. Por hipótese, existe uma sequência $(n_j)_j$ de números inteiros com $\lim_{j \rightarrow \infty} n_j = \infty$ tal que, para todo $m \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} D_{m+n_j}^{(1)} &= D_m^{(2)}, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} V_{m+n_j}^{(1)} &= V_m^{(2)}. \end{aligned}$$

Considere as soluções de Dirichlet e Neumann do operador $H_{(1)}$, respectivamente $\phi^{(1)}$ e $\psi^{(1)}$. Como $\phi^{(1)}$ e $\psi^{(1)}$ satisfazem a equação de autovalores, temos, para todos $m, j \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{cases} D_{m+n_j}^{(1)} \phi_{m+n_j+1}^{(1)} + D_{m+n_j-1}^{(1)} \phi_{m+n_j-1}^{(1)} + V_{m+n_j}^{(1)} \phi_{m+n_j}^{(1)} = x \phi_{m+n_j}^{(1)} \\ D_{m+n_j}^{(1)} \psi_{m+n_j+1}^{(1)} + D_{m+n_j-1}^{(1)} \psi_{m+n_j-1}^{(1)} + V_{m+n_j}^{(1)} \psi_{m+n_j}^{(1)} = x \psi_{m+n_j}^{(1)}. \end{cases} \quad (7.3)$$

Por compacidade, tomando uma subsequência se necessário, podemos considerar para cada $m \in \mathbb{Z}_+$, os limites

$$B_m := \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_{m+n_j}^{(1)},$$

$$C_m := \lim_{j \rightarrow \infty} \psi_{m+n_j}^{(1)}.$$

Tomando o limite em j nas identidades (7.3), temos que estas seqüências satisfazem

$$\begin{cases} D_m^{(2)} B_{m+1} + D_{m-1}^{(2)} B_{m-1} + V_m^{(2)} B_m = x B_m, \\ D_m^{(2)} C_{m+1} + D_{m-1}^{(2)} C_{m-1} + V_m^{(2)} C_m = x C_m. \end{cases}$$

Portanto, $(B_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ e $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ são soluções da equação de autovalores do operador $H_{(2)}$.

Como discutido na demonstração do Lema 3.5, aplicando a equação (2.11) sobre $\phi^{(1)}$ e $\psi^{(1)}$, obtemos, para todos $m, j \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{cases} (\psi_{m+n_j}^{(1)})^t D_{m+n_j}^{(1)} \psi_{m+n_j+1}^{(1)} - (\psi_{m+n_j+1}^{(1)})^t D_{m+n_j}^{(1)} \psi_{m+n_j}^{(1)} = 0, \\ (\psi_{m+n_j}^{(1)})^t D_{m+n_j}^{(1)} \phi_{m+n_j+1}^{(1)} - (\psi_{m+n_j+1}^{(1)})^t D_{m+n_j}^{(1)} \phi_{m+n_j}^{(1)} = D_0^{(1)}, \\ (\phi_{m+n_j}^{(1)})^t D_{m+n_j}^{(1)} \psi_{m+n_j+1}^{(1)} - (\phi_{m+n_j+1}^{(1)})^t D_{m+n_j}^{(1)} \psi_{m+n_j}^{(1)} = -D_0^{(1)}, \\ (\phi_{m+n_j}^{(1)})^t D_{m+n_j}^{(1)} \phi_{m+n_j+1}^{(1)} - (\phi_{m+n_j+1}^{(1)})^t D_{m+n_j}^{(1)} \phi_{m+n_j}^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Tomando novamente o limite em j , segue-se que

$$\begin{cases} (C_m)^t D_m^{(2)} C_{m+1} - (C_{m+1})^t D_m^{(2)} C_m = 0, \\ (C_m)^t D_m^{(2)} B_{m+1} - (C_{m+1})^t D_m^{(2)} B_m = D_0^{(1)}, \\ (B_m)^t D_m^{(2)} C_{m+1} - (B_{m+1})^t D_m^{(2)} C_m = -D_0^{(1)}, \\ (B_m)^t D_m^{(2)} B_{m+1} - (B_{m+1})^t D_m^{(2)} B_m = 0. \end{cases}$$

Logo, as sequências $(B_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ e $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ satisfazem relações análogas às que foram necessárias, na Seção 5.1, para definir os suportes (5.2) a partir de ψ e ϕ . Disso concluímos que B e C formam uma base para o espaço gerado pelas soluções da equação de autovalores associado a $H_{(2)}$. Logo, pelo Corolário 5.8, para $1 \leq r \leq l$, os conjuntos

$$\mathcal{T}_r := \left\{ x \in \mathbb{R}; \liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L s_{l-r+1}^2[B_n(x)] + s_{l-r+1}^2[C_n(x)] < \infty \right\}$$

são tais que $\overline{\mathcal{T}_r \setminus \mathcal{T}_{r+1}}^{ess}$ corresponde à componente espectral absolutamente contínua de multiplicidade r de qualquer extensão auto-adjunta do operador $(H_{(2)})_{min}^+$, em particular $H_{(2)}^\phi$.

Assim, como na demonstração do Teorema 5.6 (Desigualdade (5.7)), para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ e todo $1 \leq r \leq k$,

$$\int (s_{l-r+1}^2[\phi_n^{(1)}(x)] + s_{l-r+1}^2[\psi_n^{(1)}(x)]) \eta^{(1)}(x) d\kappa(x) \leq 2l\pi,$$

(com $\eta^{(1)} d\kappa$ suportada em $\sigma_{ac,k}(H_{(1)}^\phi)$) e, conseqüentemente, para $L, j \in \mathbb{Z}_+$ arbitrários,

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \left(s_{l-r+1}^2[\phi_{k+n_j}^{(1)}(x)] + s_{l-r+1}^2[\psi_{k+n_j}^{(1)}(x)] \right) \eta^{(1)}(x) d\kappa(x) = \\ & = \int \frac{1}{L} \sum_{m=n_j+1}^{n_j+L} \left(s_{l-r+1}^2[\phi_m^{(1)}(x)] + s_{l-r+1}^2[\psi_m^{(1)}(x)] \right) \eta^{(1)}(x) d\kappa(x) \leq 2l\pi. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L (s_{l-r+1}^2[B_k(x)] + s_{l-r+1}^2[C_k(x)]) \eta^{(1)}(x) d\kappa(x) \leq 2l\pi,$$

e, finalmente, utilizando o Lema de Fatou, obtemos

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L s_{l-r+1}^2[B_k(x)] + s_{l-r+1}^2[C_k(x)] < \infty, \quad (7.4)$$

para quase todo x com o respeito à medida $\eta^{(1)}d\kappa$. Logo, pelo Teorema 5.3, $\sigma_{ac,k}(H_{(2)}^\phi) \subseteq \sigma_{ac,k}(H_{(1)}^\phi)$.

Como a outra inclusão se demonstra analogamente, o resultado se segue. \square

Teorema 7.6. *Seja $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ uma família de operadores de Jacobi dinamicamente definidos minimal. Então, para todos $\omega_0, \omega_1 \in \Omega$ e $1 \leq k \leq l$,*

$$\sigma_{ac,k}(H_{\omega_1}^\phi) = \sigma_{ac,k}(H_{\omega_0}^\phi),$$

sendo H_ω^ϕ e $\sigma_{ac,k}(H_\omega^\phi)$ como no enunciado da Proposição 7.5.

Demonstração. Para cada $\omega \in \Omega$, denote por D^ω a sequência $(D_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$. Dados $\omega_0, \omega_1 \in \Omega$, $D^{\omega_1} \in (D^{\omega_0})$. Logo, D^{ω_0} é limite à direita de D^{ω_1} . Da mesma maneira, V^{ω_0} é limite à direita de V^{ω_1} e o resultado decorre da proposição anterior. \square

Este resultado pode ser diretamente estendido ao operador definido em \mathbb{Z} no seguinte sentido:

Corolário 7.7. *Seja $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ uma família de operadores de Jacobi dinamicamente definidos minimal. Então, para todos $\omega_0, \omega_1 \in \Omega$ e $1 \leq k \leq l$,*

$$\sigma_{ac,2k}(H_{\omega_0}) = \sigma_{ac,2k}(H_{\omega_1}),$$

e existem apenas componentes absolutamente contínuas de multiplicidade par.

Demonstração. Fixe $\omega_0 \in \Omega$ associado aos potenciais V, D , segundo (7.2). Como $\omega_1 \in (\omega_0)$, seja n_j tal que $S^{n_j}\omega_1 = \omega_0$. Dessa maneira, se denotarmos por ψ^{ω_0} e ϕ^{ω_0} as soluções de Neumann e Dirichlet associadas ao operador H_{ω_0} , assim como na demonstração da Proposição 7.5, existirão sequências $(B_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ e $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de soluções da equação de autovalores do operador H_{ω_1} tais que, para cada $m \in \mathbb{Z}$,

$$B_m := \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_{m+n_j}^{\omega_0},$$

$$C_m := \lim_{j \rightarrow \infty} \psi_{m+n_j}^{\omega_0}.$$

Em particular, para todos $1 \leq r \leq l$ e $L \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L} \sum_{m=-1}^{-L} s_{l-r+1}^2 [B_m(x)] + s_{l-r+1}^2 [C_m(x)] = \\ & = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{m=-1}^{-L} s_{l-r+1}^2 [\phi_{m+n_j}^{\omega_0}(x)] + s_{l-r+1}^2 [\psi_{m+n_j}^{\omega_0}(x)]. \end{aligned}$$

Assim como na demonstração da Proposição 7.5, para todo $m \in \mathbb{Z}$, $1 \leq r \leq k$ e todo n_j ,

$$\int \left(\frac{1}{L} \sum_{m=-1}^{-L} s_{l-r+1}^2 [\phi_{m+n_j}^{\omega_0}(x)] + s_{l-r+1}^2 [\psi_{m+n_j}^{\omega_0}(x)] \right) d\eta^{\omega_0}(x) d\kappa(x) \leq 2\pi l,$$

com $\eta^{\omega_0} d\kappa$ suportada em $\sigma_{ac,k}((H_+^\phi)_{\omega_0})$. Pelo Teorma da Convergência Dominada,

$$\int \left(\frac{1}{L} \sum_{m=-1}^{-L} s_{l-r+1}^2 [B_m(x)] + s_{l-r+1}^2 [C_{m+n_j}(x)] \right) d\eta^{\omega_0}(x) d\kappa(x) \leq 2\pi l,$$

e pelo Lema de Fatou,

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{m=-1}^{-L} s_{l-r+1}^2 [B_m(x)] + s_{l-r+1}^2 [C_{m+n_j}(x)] < \infty,$$

para quase todo x com respeito à $\eta^{\omega_0} d\kappa$. Portanto, pelo Teorema 5.3 e por considerações análogas às utilizadas na demonstração da Proposição 7.5,

$$\sigma_{ac,k}((H_-^\phi)_{\omega_1}) \subseteq \sigma_{ac,k}((H_+^\phi)_{\omega_0}).$$

Trocando os papéis de ω_0 e ω_1 , obtemos

$$\sigma_{ac,k}((H_-^\phi)_{\omega_0}) \subseteq \sigma_{ac,k}((H_+^\phi)_{\omega_1}),$$

e pela Proposição 7.5,

$$\sigma_{ac,k}((H_-^\phi)_{\omega_0}) = \sigma_{ac,k}((H_-^\phi)_{\omega_1})$$

e

$$\sigma_{ac,k}((H_+^\phi)_{\omega_0}) = \sigma_{ac,k}((H_+^\phi)_{\omega_1}).$$

O resultado se segue como consequência da Proposição 3.10. \square

7.2 Cociclos e Crescimento Exponencial Uniforme

Nosso objetivo nesta seção é explorar propriedades topológicas do cociclo 6.5, em especial, a compacidade de Ω e a continuidade das aplicações T e A , e assim demonstrar uma caracterização de crescimento exponencial uniforme que nos permitirá demonstrar, na Seção 7.3, uma versão mais fraca da dicotomia exponencial; a saber, o conjunto resolvente consiste no conjunto de pontos em que o cociclo associado ao operador, dado por (6.5), cresce uniformemente (Definição 7.8).

Há em Sacker & Sell [1976] uma caracterização da dicotomia exponencial para a dinâmica de fluxos em espaços compactos. Preferimos seguir, com as adaptações necessárias, argumentos presentes em Zhang [2018], que considera cociclos em $SL(2, \mathbb{R})$.

Definição 7.8 (Condição de Crescimento Exponencial Uniforme). *Um cociclo (T, A) satisfaz a condição de crescimento exponencial uniforme se existem constantes $\beta > 0$ e $\lambda > 1$ tais que, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ e todo $\omega \in \Omega$,*

$$\frac{\|A_n(\omega)\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \geq \beta\lambda^n, \forall n \in \mathbb{N},$$

ou

$$\frac{\|A_{-n}(\omega)\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \geq \beta\lambda^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Denotamos o fato do cociclo (T, A) satisfazer a condição de crescimento exponencial uniforme por $(T, A) \in \mathcal{UG}$

Observamos que apesar de ser simples mostrar que hiperbolicidade uniforme implica condição de crescimento exponencial uniforme, a recíproca não é imediata.

Lema 7.9. *Seja (T, A) um cociclo definido em um espaço topológico compacto Ω . Se existem $\epsilon > 0$ e $L \in \mathbb{N}$ tais que, para todos $(\omega, \mathbf{v}) \in \Omega \times \mathbb{C}^N$ com $\|\mathbf{v}\| = 1$, existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $|l| \leq L$ e*

$$\|A_l(\omega)\mathbf{v}\| \geq 1 + \epsilon, \quad (7.5)$$

então (T, A) satisfaz a condição de crescimento exponencial uniforme.

Demonstração. Dado (ω, \mathbf{v}) nas condições do enunciado, denote por $l(\omega, \mathbf{v})$ o número natural definido como

$$l(\omega, \mathbf{v}) := m; |m| = \min\{|l| \mid |l| \leq L, l \text{ e } \omega, \mathbf{v} \text{ satisfazem (7.5)}\}.$$

Definiremos indutivamente uma sequência $(l_k, \mathbf{v}_k, \omega_k)_k$ em $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^N \times \Omega$. Para $k = 0$, sejam $l_0 = 0$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$, e $\omega_0 = \omega$. Para $k > 0$, sejam

$$\begin{cases} l_k & := l(\omega_{k-1}, \mathbf{v}_{k-1}), \\ \mathbf{v}_k & := \frac{A_{l_k}(\omega_{k-1})\mathbf{v}_{k-1}}{\|A_{l_k}(\omega_{k-1})\mathbf{v}_{k-1}\|}, \\ \omega_k & := T^{l_k}(\omega_{k-1}). \end{cases}$$

Desta maneira, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\|A_{l_{k+1}}(\omega_k)\mathbf{v}_k\| \geq 1 + \epsilon,$$

ou seja, da definição de \mathbf{v}_k ,

$$\left\| A_{l_{k+1}}(\omega_k) \frac{A_{l_k}(\omega_{k-1})\mathbf{v}_{k-1}}{\|A_{l_k}(\omega_{k-1})\mathbf{v}_{k-1}\|} \right\| \geq 1 + \epsilon$$

Assim, como

$$A_{l_{k+1}}(\omega_k)A_{l_k}(\omega_{k-1})\mathbf{v}_{k-1} = A_{l_{k+1}+l_k}(\omega_{k-1})\mathbf{v}_{k-1},$$

segue-se que

$$\frac{\|A_{l_{k+1}+l_k}(\omega_{k-1})\mathbf{v}_{k-1}\|}{\|A_{l_k}(\omega_{k-1})\mathbf{v}_{k-1}\|} \geq 1 + \epsilon,$$

ou seja, que

$$\|A_{l_{k+1}+l_k}(\omega_{k-1})\mathbf{v}_{k-1}\| \geq (1 + \epsilon)^2.$$

Prosseguindo indutivamente, temos, para $k > p > 1$,

$$\|A_{l_{k+1}+\dots+l_{k-j}}(\omega_{k-j-1})\mathbf{v}_{k-j-1}\| \geq (1 + \epsilon)^{j+2}. \quad (7.6)$$

Defina, para $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}_+$, o intervalo

$$Y_p(q) := \begin{cases} [p - q + 1, p + q - 1], & \text{se } q \neq 0, \\ [p - 1, p + 1], & \text{se } q = 0, \end{cases}$$

em \mathbb{Z} , centrado em p e de comprimento $2(q - 1)$. Denote também, para $k \in \mathbb{Z}_+$, $L_k := \sum_{j=1}^k l_j$ e

$$I_k := \bigcup_{j=1}^k Y_{l_j}(|L_{j-1}|).$$

Segue-se da definição de l_k , que $L_k \notin I_{k-1}$, pois se existisse j tal que $L_k \in Y_{l_j}(|L_{j-1}|)$, então

$$|L_k - L_{j-1}| \leq |l_j| - 1.$$

Agora, como $L_k - L_{j-1} = l_k + \dots + l_{j+1}$, segue-se de (7.6) que

$$\|A_{L_k-L_{j-1}}(\omega_{j-1})\mathbf{v}_{j-1}\| \geq (1 + \epsilon)^{k-j} > (1 + \epsilon),$$

o que contraria a minimalidade de l_j .

Por outro lado, também por definição, I_k é um intervalo em \mathbb{Z} , com um extremo em L_k e, mais ainda, $|I_{k+1}| \geq |I_k| + 1$. Portanto, sendo L tal qual no enunciado, existe $0 \leq t \leq L$ tal que $|I_k| > L$ para todo $k > t$. Desta maneira, como $|l_k| \leq L$, segue-se que

$$\text{ou } L_{k+1} > L_k, \quad \text{para todo } k \geq t,$$

$$\text{ou } L_{k+1} < L_k, \quad \text{para todo } k \geq t.$$

Assuma inicialmente a primeira possibilidade. Neste caso,

$$0 < L_{t+1} = \sum_{j=1}^{t+1} l_j \leq \sum_{j=1}^{t+1} |l_j| \leq L(L+1).$$

Então, dado $n > L_t$, existe $Q \in \mathbb{N}$ tal que $L_Q \leq n < L_{Q+1}$. Observe ainda que $L_{Q+1} - L_t < L_{Q+1-t}$, donde se segue que $Q > \frac{n}{L}$. Logo, pela Proposição C.5-f,

$$\|A_n(\omega)\mathbf{v}\| = \|A_{n-L_Q}(T^{L_Q}\omega)A_{L_Q}(\omega)\mathbf{v}\| \geq s_N [A_{n-L_Q}(T^{L_Q}\omega)] \|A_{L_Q}(\omega)\mathbf{v}\|.$$

Como $n - L_Q \leq L$ e as matrizes são simpléticas, pela continuidade de A e por compacidade, existe uma constante uniforme $C > 0$ tal que

$$s_N [A_{n-L_Q}(T^{L_Q}\omega)] \geq C.$$

Deste modo,

$$\|A_n(\omega)\mathbf{v}\| \geq C \|A_{L_Q}(\omega)\mathbf{v}\| \geq C(1+\epsilon)^{Q-1} \geq C(1+\epsilon)^{\frac{n}{L}-1}.$$

Assumindo a segunda possibilidade, dado $n \in \mathbb{N}$ tal que $-n < L_t$, existe $Q \in \mathbb{N}$ tal que $L_{Q+1} < -n \leq L_Q$, de forma que $Q > \frac{n}{L}$. Assim, por argumentos análogos aos do caso anterior, existe uma constante D tal que

$$\|A_{-n}(\omega)\mathbf{v}\| \geq D \|A_{L_Q}(\omega)\mathbf{v}\| \geq D(1+\epsilon)^{Q-1} \geq D(1+\epsilon)^{\frac{n}{L}-1}.$$

Concluimos, portanto, que (T, A) satisfaz a condição de crescimento exponencial uniforme. \square

Proposição 7.10. *Seja (T, A) um cociclo definido em Ω , um espaço topológico compacto, com T um homeomorfismo em Ω e $A : \Omega \rightarrow SP(l, \mathbb{C})$ uma aplicação contínua. O cociclo (T, A) não satisfaz a condição de crescimento exponencial uniforme se, e somente se, existem $\omega \in \Omega$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{2l}$, com $\|\mathbf{v}\| = 1$, tais que*

$$\|A_n(\omega)\mathbf{v}\| \leq 1, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Se $(T, A) \in \mathcal{UG}$, então claramente por definição o cociclo não pode

satisfazer à propriedade do enunciado.

Suponha agora que (T, A) não satisfaça a condição de crescimento exponencial uniforme. Neste caso, pelo Lema 7.9, dados $k \in \mathbb{N}$ e $L > 0$, existe um par $(\omega_k, \mathbf{v}_k) \in \Omega \times \mathbb{C}^{2l}$ com $\|\mathbf{v}_k\| = 1$, tal que para todo $l \in \mathbb{Z}$ com $|l| \leq L$,

$$\|A_l(\omega_k)\mathbf{v}_k\| < 1 + \frac{1}{k}.$$

Como Ω é compacto, existem $\omega \in \Omega$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{2l}$ tais que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \omega_{k_j} = \omega,$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{v}_{k_j} = \mathbf{v},$$

para determinadas subsequências $(\omega_{k_j})_j$ e $(\mathbf{v}_{k_j})_j$. Pela continuidade de A , segue-se para todo $n \in \mathbb{Z}$ que

$$\|A_n(\omega)\mathbf{v}\| \leq 1.$$

□

7.3 Dicotomia Exponencial

Podemos, a partir da análise da seção anterior, fornecer uma caracterização dinâmica para o espectro do operador dinamicamente definido H_ω . Especificamente, demonstraremos que, para cada $\omega \in \Omega$, o conjunto resolvente associado ao operador H_ω , como na Definição 6.1, consiste nos pontos em que o cociclo definido pela relação (6.5) satisfaz a condição de crescimento exponencial uniforme. Tal resultado é uma versão fraca da chamada dicotomia exponencial, sendo esta última demonstrada para o operador de Schrödinger escalar primeiramente em Johnson [1986]. Em Marx [2014], há uma demonstração da dicotomia exponencial para um operador de Jacobi escalar e, em Haro & Puig [2013], encontra-se uma demonstração para um operador da forma (2.1) com a sequência $(D_n)_n$ constante (apesar de constantes, nesse trabalho, as matrizes D_n não são necessariamente simétricas).

Reforçaremos, em um contexto mais específico, o resultado do Lema 5.1. Necessitamos primeiramente de uma caracterização espectral através do critério

de Weyl (Proposição B.10):

Lema 7.11. *Seja $(H_\omega)_\omega$ como na Definição 6.1, com $(H_\omega) = l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^l)$ para todo $\omega \in \Omega$, e seja $x \in \mathbb{R}$. Então, para cada $\omega \in \Omega$, $x \in \sigma(H_\omega)$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existir um vetor unitário $\mathbf{u} \in c_{00}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^l)$ tal que*

$$\|(H_\omega - x)\mathbf{u}\| < \epsilon.$$

Demonstração. Fixado ω , suponha que $x \in \sigma(H_\omega)$. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, tome $\delta > 0$ tal que $\frac{\delta}{2-\delta} \leq \epsilon$. Pelo Critério de Weyl (Proposição B.10), existe um vetor unitário $\mathbf{v} \in l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^l)$ tal que

$$\|(H_\omega - x)\mathbf{v}\| < \frac{\delta}{4}.$$

Para cada $q \in \mathbb{N}$, defina o vetor $\mathbf{v}^{(q)} \in (\mathbb{C}^l)^\mathbb{Z}$ pela lei

$$\mathbf{v}_n^{(q)} := \begin{cases} \mathbf{v}_n, & n \in [-q, q], \\ \mathbf{0}, & n \notin [-q, q]. \end{cases}$$

Desta maneira, segue-se das continuidades da norma e do operador que, para $L \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $\|\mathbf{v}^{(L)} - \mathbf{v}\| < \frac{\delta}{2}$ e

$$\|(H_\omega - x)\mathbf{v}^{(L)}\| < \frac{\delta}{2}.$$

Portanto, basta tomarmos $\mathbf{u} := \frac{\mathbf{v}^{(L)}}{\|\mathbf{v}^{(L)}\|}$ para chegarmos ao resultado. De fato, pela desigualdade triangular,

$$1 = \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}^{(L)}\| + \|\mathbf{v}^{(L)} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}^{(L)}\| + \frac{\delta}{2},$$

ou seja, $\|\mathbf{v}^{(L)}\| \geq \frac{2-\delta}{2}$. Assim,

$$\|(H_\omega - x)\mathbf{u}\| = \frac{\|(H_\omega - x)\mathbf{v}^{(L)}\|}{\|\mathbf{v}^{(L)}\|} \leq \|(H_\omega - x)\mathbf{v}^{(L)}\| \left(\frac{2}{2-\delta} \right) \leq \frac{\delta}{2} \left(\frac{2}{2-\delta} \right) \leq \epsilon.$$

A recíproca decorre diretamente do Critério de Weyl. \square

Proposição 7.12. *Seja $(H_\omega)_\omega$ como na Definição 6.1, com $(H_\omega) = l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^l)$ para todo $\omega \in \Omega$, sendo Ω um espaço topológico compacto e T uma aplicação minimal. Então, para todo $\omega \in \Omega$,*

$$\sigma(H_\omega) \supseteq \{x \in \mathbb{R}; (T, A(\omega, x)) \notin \mathcal{UG}\}.$$

Demonstração. Fixado ω , considere as sequências $V = (V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $D = (D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ reais e simétricas que definem o operador H_ω . Denote por S o operador *shift* no espaço das sequências de matrizes e defina, considerando a topologia produto e as envoltórias (dadas por (7.1)) $\Lambda_1 = (D_n)$, $\Lambda_2 = (V_n)$, o espaço $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$.

Seja g a função que, dada uma sequência de matrizes em Λ_1 ou Λ_2 , fornece a matriz da posição 0, ou seja, $g(B) = B_0$. Podemos então, fixado $x \in \mathbb{R}$, definir o cociclo

$$(S, F(x)) : \Lambda \times \mathbb{C}^{2l} \longrightarrow \Lambda \times \mathbb{C}^{2l}$$

$$(\lambda; \mathbf{v}) \longmapsto (S(\lambda); F(x; \lambda)\mathbf{v})$$

em que, denotando por $\lambda = (B, C) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$,

$$F(x; \lambda) := \begin{bmatrix} g(B)^{-1}(x - g(C)) & -g(B)^{-1} \\ g(B) & 0 \end{bmatrix}.$$

Evidentemente, se o cociclo (T, A) , definido pela equação (6.5) e associado ao operador H_ω , não satisfaz a condição de crescimento exponencial uniforme, então $(S, F) \notin \mathcal{UG}$. Neste caso, pela Proposição 7.10, existem¹ $(\lambda, \mathbf{v}) \in \Lambda \times \mathbb{S}^{2l-1}$ tais que

$$\|F_n(x; \lambda)\mathbf{v}\| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (7.7)$$

Defina $\mathbf{u} \in (\mathbb{C}^l)^\mathbb{Z}$ pela lei

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_{n+1} \end{bmatrix} := F_n(x; \lambda)\mathbf{v}. \quad (7.8)$$

¹Confira também Sacker & Sell [1976].

Denote por H_λ o operador de Jacobi formado pelas sequências de matrizes $\lambda = (B, C)$. Claramente, por (7.7), $\|\mathbf{u}\|_\infty < \infty$, e por (7.8), $H_\lambda \mathbf{u} = x\mathbf{u}$. Se $\mathbf{u} \in l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^l)$, então $x \in \sigma(H_\lambda)$. Caso contrário, fixado $L \in \mathbb{N}$, defina $\mathbf{u}^{(L)}$ pela lei

$$\mathbf{u}_n^{(L)} = \begin{cases} \mathbf{u}_n, & |n| \leq L, \\ \mathbf{0}, & |n| > L. \end{cases}$$

Se $|n| < L$, como \mathbf{u} é solução da equação de autovalores, então

$$[(H_\lambda - x\mathbb{I})\mathbf{u}^{(L)}]_n = \mathbf{0},$$

e, especificamente nos sítios $n = L - 1, L, L + 1$, temos que

$$\begin{cases} [(H_\lambda - x\mathbb{I})\mathbf{u}^L]_{L-1} &= g(S^{L-2}B)\mathbf{u}_{L-2} + g(S^{L-1}B)\mathbf{u}_L + (x\mathbb{I} - g(S^{L-1}C))\mathbf{u}_{L-1}, \\ [(H_\lambda - x\mathbb{I})\mathbf{u}^L]_L &= g(S^{L-1}B)\mathbf{u}_{L-1} + g(S^L C)\mathbf{u}_L, \\ [(H_\lambda - x\mathbb{I})\mathbf{u}^L]_{L+1} &= g(S^L B)\mathbf{u}_L. \end{cases}$$

Um comportamento análogo ocorre para $n = -L + 1, -L, -L - 1$, de forma que existe uma constante K tal que, para todo $L \in \mathbb{N}$,

$$\|(H_\lambda - x\mathbb{I})\mathbf{u}^{(L)}\| \leq K$$

(note que $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ são sequências uniformemente limitadas). Se tomarmos o vetor unitário $\mathbf{w}^{(L)} := \frac{\mathbf{u}^{(L)}}{\|\mathbf{u}^{(L)}\|}$, dividindo ambos os membros da desigualdade por $\|\mathbf{u}^{(L)}\|$, temos que

$$\|(H_\lambda - x\mathbb{I})\mathbf{w}^L\| \leq \frac{K}{\|\mathbf{u}^L\|}.$$

Logo, como $\lim_{L \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}^L\| = \infty$, segue-se do Lema 7.11, $x \in \sigma(H_\lambda)$.

Para demonstrar que, neste caso, $x \in \sigma(H_\omega)$, note que é possível tomar N suficientemente grande de maneira que $S^N \lambda$ esteja tão próximo de $(D(\omega), V(\omega))$

quanto se queira. Ou seja, dado ϵ arbitrariamente pequeno, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(S^N(B) - D)_k\| \leq \frac{\epsilon}{4},$$

$$\|(S^N(C)) - V)_k\| \leq \frac{\epsilon}{4},$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Logo, dados $\epsilon > 0$ e $\mathbf{v} \in l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^l)$, existe N tal que

$$\|(H_\omega - x\mathbb{I})\mathbf{v} - (H_{S^N\lambda} - x\mathbb{I})\mathbf{v}\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, se $x \in \sigma(H_\lambda)$, novamente pelo Lema 7.11, existe \mathbf{u} (que pode ser assumido como finitamente suportado) tal que

$$\|(H_{S^N\lambda} - x\mathbb{I})\mathbf{u}\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim,

$$\|(H_\omega - x\mathbb{I})\mathbf{u}\| \leq \|(H_\omega - x\mathbb{I})\mathbf{u} - (H_{S^N\lambda} - x\mathbb{I})\mathbf{u}\| + \|(H_{S^N\lambda} - x\mathbb{I})\mathbf{u}\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, novamente pelo Lema 7.11, $x \in \sigma(H_\omega)$. □

A recíproca à Proposição 7.12, que fornece enfim a caracterização, é mais simples de se demonstrar.

Proposição 7.13. *Seja $(H_\omega)_\omega$ como na Definição 6.1 definido em $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^l)$. Então, para todo $\omega \in \Omega$,*

$$\sigma(H_\omega) \subseteq \{x \in \mathbb{R}; (T, A(\omega, x)) \notin \mathcal{UG}\}.$$

Demonstração. Suponha que $x \in \mathbb{R}$ seja tal que $(T, A(\omega, x)) \in \mathcal{UG}$. Assim, temos $2l$ soluções da equação de autovalores crescendo exponencialmente em $+\infty$ (e decaindo em $-\infty$) ou crescendo exponencialmente em $-\infty$ (e decaindo em $+\infty$). Como as matrizes de transferência são simpléticas, a dimensão do espaço das soluções que crescem em $+\infty$ é igual à dimensão do espaço das soluções que crescem em $-\infty$. Estes espaços são, respectivamente, os espaços $\mathcal{J}_-(x, \omega)$ e $\mathcal{J}_+(x, \omega)$ formados pela solução de Jost (Definição 3.1).

Uma vez definidas as sequências de matrizes $(F_n^{(+)})_n$ e $(F_n^{(-)})_n$ formadas pelas soluções de Jost, podemos obter a função de Green associada ao operador resolvente de H_ω de forma semelhante ao apresentado na Proposição 3.7, isto é, como

$$G(p, q) = \begin{cases} F_p^{(-)}(W_{[F^{(+)}, F^{(-)}]}(0))^{-1}(F_q^{(+)})^t, & p \leq q, \\ F_p^{(+)}(W_{[F^{(+)}, F^{(-)}]}(0))^{-1}(F_q^{(-)})^t, & p > q, \end{cases}$$

onde $W_{[F^{(+)}, F^{(-)}]}(0)$ é o Wronskiano das sequências de matrizes em 0. Desta maneira, para todo $p \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}} G(p, q) \mathbf{u}_q = ((H_\omega - x)^{-1} \mathbf{u})_p,$$

ou seja, $x \in \rho(H_\omega)$. □

Capítulo 8

O Operador de Dirac em $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$

8.1 Dedução da Equação de Dirac

Duas das principais teorias físicas desenvolvidas no século XX são a teoria da relatividade especial e a mecânica quântica. A tentativa mais bem sucedida¹ de conciliar estas duas abordagens foi empreendida em Dirac [1928] e consiste em descrever a equação de onda de um elétron do ponto de vista relativístico.

O ponto de partida é o Hamiltoniano relativístico de uma partícula de massa m , expresso por

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

sendo c a velocidade da luz e $p_k = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}$ os momentos lineares. Este Hamiltoniano conduz à equação de onda

$$\left[p_0 - \sqrt{m^2c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \right] \mathbf{u} = 0.$$

Podemos eliminar² a raiz na expressão 'multiplicando' os dois lados da igualdade por $\left[p_0 + \sqrt{m^2c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \right]$ e obter

$$\left[p_0^2 - m^2c^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \right] \mathbf{u} = 0,$$

¹Sakurai [1967], página 77.

²Veja Esposito [1998].

que é uma equação de segunda ordem e quadrática em p_0 , o que a torna incompatível com a equação de evolução de Schrödinger (1.1). No caso unidimensional, considerando $p_0 = 0$, podemos reescrever a equação como

$$\left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)\left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)u = m^2c^2u. \quad (8.1)$$

Se definirmos

$$\begin{cases} u^{(R)} & := \frac{1}{mc}\left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)u, \\ u^{(L)} & := u, \end{cases}$$

a equação (8.1) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} \left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)u^{(R)} & := mcu^{(L)}, \\ \left(i\hbar\frac{d}{dx}\right)u^{(L)} & := mcu^{(R)}. \end{cases}$$

Os índices R, L dizem respeito ao *spin* associado ao elétron. Tomando-se o limite $m \downarrow 0$, a função $u^{(R)}$ modela o *spin* paralelo à direção do momento e $u^{(L)}$ se refere ao *spin* perpendicular à direção do momento.

Uma maneira mais direta de definir a equação de Dirac³ é considerar um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e para $\mathbf{u} \in C_0^\infty(I; \mathbb{C}^2)$ o operador

$$H \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} (x) = \begin{bmatrix} mc^2 & -ic\frac{d}{dx} \\ -ic\frac{d}{dx} & mc^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} (x).$$

Temos então um modelo⁴ do operador de Dirac com potencial nulo, densamente definido no espaço $L^2(I; \mathbb{C}^2)$.

Há também modelos discretos para o operador de Dirac, em particular o modelo proposto em [de Oliveira & Prado \[2005a\]](#) e [de Oliveira & Prado \[2005b\]](#) :

³[de Oliveira \[2009\]](#), página 77.

⁴Existem outros modelos e abordagens para a equação de Dirac, veja, por exemplo, [Sakurai & Napolitano \[1994\]](#), página 486.

Definição 8.1 (Operador de Dirac). *O operador de Dirac H em $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ é definido pela lei*

$$(H\mathbf{u})_k = \begin{bmatrix} mc^2 + v_k & cd^* \\ cd & -mc^2 + v_k \end{bmatrix} \mathbf{u}_k,$$

em que $m, c \in \mathbb{R}$; a sequência real $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ é chamada de potencial do operador e os operadores de diferença finita d, d^* agem da seguinte maneira:

$$\begin{cases} (dx)_k = x_{k+1} - x_k, \\ (d^*x)_k = x_{k-1} - x_k. \end{cases}$$

Uma interessante questão é determinar se, em algum sentido, é possível obter a equação de Schrödinger a partir da equação de Dirac⁵.

8.2 O Cociclo Associado ao Operador de Dirac

Observe que operador de Dirac, segundo a Definição 8.1, pode ser escrito na forma da equação (2.1) que define um operador de Jacobi com $l = 2$; a saber,

$$\begin{bmatrix} (H\mathbf{u})_{n,1} \\ (H\mathbf{u})_{n,2} \end{bmatrix} = D_{n-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n-1,1} \\ \mathbf{u}_{n-1,2} \end{bmatrix} + D_n^* \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n+1,1} \\ \mathbf{u}_{n+1,2} \end{bmatrix} + V_n \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n,1} \\ \mathbf{u}_{n,2} \end{bmatrix},$$

com

$$D_n = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V_n = \begin{bmatrix} mc^2 + v_n & -c \\ -c & -mc^2 + v_n \end{bmatrix}.$$

Uma vez que as matrizes D_n não são invertíveis, não podemos definir as matrizes de transferência da maneira usual, isto é, não faz sentido definir as matrizes na forma (2.9). Porém, como realizado em [Carvalho et al. \[2011\]](#), há uma maneira de

⁵Em [de Oliveira \[2009\]](#), página 269, há uma análise deste problema, através da demonstração que, no limite não-relativístico (isto é, $c \rightarrow \infty$), o resolvente do operador de Dirac converge para o resolvente do operador de Schrödinger.

se contornar esta dificuldade. Se escrevermos a equação de autovalores

$$\begin{cases} (mc^2 - z + v_k)\mathbf{u}_{k,1} + c(\mathbf{u}_{k-1,2} - \mathbf{u}_{k,2}) = 0, \\ c(\mathbf{u}_{k+1,1} - \mathbf{u}_{k,1}) + (-mc^2 - z + v_k)\mathbf{u}_{k,2} = 0, \end{cases} \quad (8.2)$$

ao isolarmos $\mathbf{u}_{k,2}$ na primeira equação e substituí-lo na segunda equação, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} \left(\frac{mc^2 - z + v_k}{c} \right) \mathbf{u}_{k,1} + \mathbf{u}_{k-1,2} = \mathbf{u}_{k,2}, \\ \left(\frac{1 - (mc^2 - z + v_k)(-mc^2 - z + v_k)}{c^2} \right) \mathbf{u}_{k,1} - (-mc^2 - z + v_k)\mathbf{u}_{k-1,2} = \mathbf{u}_{k+1,1}, \end{cases}$$

que pode ser representado matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k+1,1} \\ \mathbf{u}_{k,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{(z-v_k)^2 - m^2c^4}{c^2} & -\frac{(-mc^2 - z + v_k)}{c} \\ \frac{(mc^2 - z + v_k)}{c} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k,1} \\ \mathbf{u}_{k-1,2} \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

Observe que, nesta relação de recorrência, há uma mescla de componentes em sítios diferentes. Por outro lado, a matriz que estabelece a recorrência é uma matriz unimodular, e no caso em que $(\mathbf{v}_n)_n$ é um potencial dinamicamente definido, podemos ainda definir um cociclo baseado em matrizes 2×2 (vide Seção 8.4).

Podemos, então, definir novamente o Wronskiano de duas seqüências, analogamente ao realizado na Seção 2.3, como

$$W_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(k) = \mathbf{u}_{k,1}\mathbf{v}_{k-1,2} - \mathbf{u}_{k-1,2}\mathbf{v}_{k,1},$$

de maneira a termos uma fórmula de Green:

$$\sum_{k=m}^n \langle (H\mathbf{u})_k, \bar{\mathbf{v}}_k \rangle - \langle (H\mathbf{v})_k, \bar{\mathbf{u}}_k \rangle = c(W_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(n+1) - W_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(m)). \quad (8.4)$$

8.3 Função de Green do Operador de Dirac

O operador de Dirac, como na Definição 8.1, é ponto limite (vide Definição 2.11), com $n_+(H_{min}^+) = 1$, sendo H_{min}^+ a restrição do operador a \mathbb{Z}_+ sem condição de contorno (com efeito, como c é uma constante, a sequência dos coeficientes é limitada). Neste caso, analogamente à discussão apresentada na Seção 3.1, o operador possui, para $z \in \rho(H)$ fixado, uma solução $\mathbf{u}^{(+)}$ da equação de autovalores em z que é quadrado somável em $+\infty$ (a saber, a solução de Jost). Da mesma maneira, obtemos uma solução $\mathbf{u}^{(-)}$, quadrado somável em $-\infty$.

Da constância do Wronskiano para as soluções da equação de autovalores, podemos escolher $\mathbf{u}^{(+)}$ e $\mathbf{u}^{(-)}$ de forma que, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$c = \mathbf{u}_{n-1,2}^{(-)} \mathbf{u}_{n,1}^{(+)} - \mathbf{u}_{n,1}^{(-)} \mathbf{u}_{n-1,2}^{(+)}. \quad (8.5)$$

Analogamente à demonstração da Proposição 3.7, podemos computar explicitamente a função de Green do operador Dirac definido em \mathbb{Z} (em Carvalho et al. [2011], é exibida a função de Green para o operador de Dirac em \mathbb{Z}_+):

Proposição 8.2 (Função de Green do Operador de Dirac). *Seja H o operador de Dirac como na Definição 8.1. Para $z \in \rho(H)$ fixado, considere $\mathbf{u}^{(+)}$ e $\mathbf{u}^{(-)}$ as auto-soluções quadrado-somáveis em $\pm\infty$, respectivamente, satisfazendo (8.5). Então, a função de Green associada ao operador, ou seja, a função $G : \mathbb{Z}^2 \rightarrow M(2, \mathbb{C})$ que satisfaz, para todo $\mathbf{u} \in l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$,*

$$((H - z)^{-1} \mathbf{u})_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G(k, n) \mathbf{u}_k,$$

é dada por

$$G_{1,1}(p, q) = \begin{cases} \frac{1}{c} \mathbf{u}_{q,1}^{(+)} \mathbf{u}_{p,1}^{(-)}, & p < q, \\ \frac{1}{c} \mathbf{u}_{q,1}^{(-)} \mathbf{u}_{p,1}^{(+)}, & p = q, \\ \frac{1}{c} \mathbf{u}_{q,1}^{(-)} \mathbf{u}_{p,1}^{(+)}, & p > q, \end{cases} \quad G_{1,2}(p, q) = \begin{cases} \frac{1}{c} \mathbf{u}_{q,1}^{(+)} \mathbf{u}_{p,2}^{(-)}, & p < q, \\ \frac{1}{c} \mathbf{u}_{q,1}^{(-)} \mathbf{u}_{p,2}^{(+)}, & p = q, \\ \frac{1}{c} \mathbf{u}_{q,1}^{(-)} \mathbf{u}_{p,2}^{(+)}, & p > q, \end{cases}$$

$$G_{2,1}(p, q) = \begin{cases} \frac{1}{c} \mathbf{u}_{q,2}^{(+)} \mathbf{u}_{p,1}^{(-)}, & p < q, \\ \frac{1}{c} \mathbf{u}_{q,2}^{(+)} \mathbf{u}_{p,1}^{(-)}, & p = q, \\ \frac{1}{c} \mathbf{u}_{q,2}^{(-)} \mathbf{u}_{p,1}^{(+)}, & p > q, \end{cases} \quad G_{2,2}(p, q) = \begin{cases} \frac{1}{c} \mathbf{u}_{q,2}^{(+)} \mathbf{u}_{p,2}^{(-)}, & p < q, \\ \frac{1}{c} \mathbf{u}_{q,2}^{(-)} \mathbf{u}_{p,2}^{(+)}, & p = q, \\ \frac{1}{c} \mathbf{u}_{q,2}^{(-)} \mathbf{u}_{p,2}^{(+)}, & p > q. \end{cases}$$

Podemos definir as soluções Neumann e Dirichlet, naturalmente, como as soluções da equação de autovalores que satisfazem as condições iniciais

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{0,1}^N = 1, \\ \mathbf{u}_{-1,2}^N = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_{0,1}^D = 0, \\ \mathbf{u}_{-1,2}^D = 1, \end{cases} \quad (8.6)$$

e as funções de Weyl-Titchmarsh como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(+)} &= \mathbf{u}^D + M^{(+)} \mathbf{u}^N, \\ \mathbf{u}^{(-)} &= \mathbf{u}^N + M^{(-)} \mathbf{u}^D. \end{aligned}$$

Segue-se das definições anteriores que

$$M^{(+)} = \frac{\mathbf{u}_{0,1}^{(+)}}{\mathbf{u}_{-1,2}^{(+)}}, M^{(-)} = \frac{\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)}}{\mathbf{u}_{0,1}^{(-)}}. \quad (8.7)$$

Podemos ainda definir as sequências, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$M_n^{(+)} = \frac{\mathbf{u}_{n,1}^{(+)}}{\mathbf{u}_{n-1,2}^{(+)}}, M_n^{(-)} = \frac{\mathbf{u}_{n-1,2}^{(-)}}{\mathbf{u}_{n,1}^{(-)}}. \quad (8.8)$$

Considerando a constância do Wronskiano (Equação (8.5)) para as auto-soluções $\mathbf{u}^{(-)}$ e $\mathbf{u}^{(-)}$, podemos reescrever $G_{1,1}(0, 0, z)$ e $G_{2,2}(-1, -1, z)$, respectiva-

mente, como

$$G_{1,1}(0, 0, z) = \frac{1}{c} \mathbf{u}_{0,1}^{(-)} \mathbf{u}_{0,1}^{(+)} = \frac{\mathbf{u}_{0,1}^{(-)} \mathbf{u}_{0,1}^{(+)}}{\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)} \mathbf{u}_{0,1}^{(+)} - \mathbf{u}_{0,1}^{(-)} \mathbf{u}_{-1,2}^{(+)}} = \left(\frac{\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)}}{\mathbf{u}_{0,1}^{(-)}} - \frac{\mathbf{u}_{-1,2}^{(+)}}{\mathbf{u}_{0,1}^{(+)}} \right)^{-1}$$

e

$$G_{2,2}(-1, -1, z) = \frac{1}{c} \mathbf{u}_{-1,2}^{(-)} \mathbf{u}_{-1,2}^{(+)} = \frac{\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)} \mathbf{u}_{-1,2}^{(+)}}{\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)} \mathbf{u}_{0,1}^{(+)} - \mathbf{u}_{0,1}^{(-)} \mathbf{u}_{-1,2}^{(+)}} = \left(\frac{\mathbf{u}_{0,1}^{(+)}}{\mathbf{u}_{-1,2}^{(+)}} - \frac{\mathbf{u}_{0,1}^{(-)}}{\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)}} \right)^{-1},$$

de tal modo que

$$\begin{aligned} G_{1,1}(0, 0, z) &= \left(M_0^{(-)} - \frac{1}{M_0^{(+)}} \right)^{-1}, \\ G_{2,2}(-1, -1, z) &= \left(M_0^{(+)} - \frac{1}{M_0^{(-)}} \right)^{-1}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Ao computarmos as partes imaginárias de ambos os membros das identidades acima, obtemos

$$\begin{aligned} \Im[G_{1,1}(0, 0, z)] &= \left| M_0^{(-)} - \frac{1}{M_0^{(+)}} \right|^{-2} \left(-\frac{\Im[M_0^{(+)}]}{|M_0^{(+)}|^2} - \Im[M_0^{(-)}] \right), \\ \Im[G_{2,2}(-1, -1, z)] &= \left| M_0^{(+)} - \frac{1}{M_0^{(-)}} \right|^{-2} \left(-\frac{\Im[M_0^{(-)}]}{|M_0^{(-)}|^2} - \Im[M_0^{(+)}] \right). \end{aligned}$$

Pela Fórmula de Inversão de Stieltjes (D.5), segue-se do mesmo argumento empregado na demonstração do Lema 5.5 que

$$\frac{d\mu_{\mathbf{e}_{0,1}}}{d\kappa}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \downarrow 0} \Im[G_{1,1}(0, 0, x + iy)] d\kappa(x)$$

e

$$\frac{d\mu_{\mathbf{e}_{-1,2}}}{d\kappa}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \downarrow 0} \Im[G_{2,2}(-1, -1, x + iy)] d\kappa(x),$$

em que $\mathbf{e}_{0,1}, \mathbf{e}_{-1,2}$ são vetores canônicos que formam uma base espectral para o operador (é justamente o fato de $\{\mathbf{e}_{0,1}, \mathbf{e}_{-1,2}\}$ constituir uma base espectral para

o operador de Dirac em \mathbb{Z} que nos permite implementar a abordagem discutida aqui) e κ a medida de Lebesgue.

Temos portanto, em analogia à Proposição 3.8, que o conjunto

$$\Sigma_{ac} := \{x \in \mathbb{R}; 0 < -\lim_{y \downarrow 0} \Im \left[M_0^{(\pm)}(x + iy) \right] < \infty\} \quad (8.10)$$

é um suporte minimal para a componente absolutamente contínua de multiplicidade 2 do espectro do operador de Dirac segundo a Definição 8.1.

8.4 Classificação do Espectro

Apresentaremos uma demonstração do Teorema de Kotani para o operador de Dirac. Diferentemente do que fizemos na Seção 6.4, em que partimos da análise do operador definido em \mathbb{Z}_+ a fim de obter a informação referente ao operador definido em \mathbb{Z} , consideraremos desde o início o operador de Dirac definido em \mathbb{Z} , pois já determinamos um suporte referente à componente absolutamente contínua de multiplicidade 2 deste operador (relação (8.10)). A sequência de passos na demonstração é, no entanto, a mesma que seguimos nas Seções 6.4 e 6.5.

Definição 8.3 (Operador de Dirac Dinamicamente Definido). *Sejam $\Omega \neq \emptyset$ um conjunto arbitrário, $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma transformação e $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação. Um operador de Dirac dinamicamente definido é uma família de operadores em $(\mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}}$ definidos, para cada $\omega \in \Omega$, dada pela lei*

$$(H_\omega \mathbf{u})_k = \begin{bmatrix} mc^2 + v(T^k \omega) & cd^* \\ cd & -mc^2 + v(T^k \omega) \end{bmatrix} \mathbf{u}_k,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, sendo m, c, d e d^* como na Definição 8.1.

Podemos definir um cociclo em $SU(2)$ a partir das matrizes (8.3), estando este associado a uma família de operadores de Dirac com potencial dinamicamente definido por uma transformação ergódica. Especificamente, temos:

Definição 8.4 (Cociclo associado ao operador de Dirac). *Sejam (Ω, ν) um espaço de medida, $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma aplicação ergódica, e $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Fixado*

$z \in \mathbb{C}$, definimos o cociclo associado ao operador de Dirac como a aplicação $(T, A) : \Omega \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \Omega \times \mathbb{C}^2$, dada pela lei

$$(T, A)(\omega, \mathbf{v}) = (T\omega, A(z, \omega)\mathbf{v}),$$

sendo as matrizes $A(z, \omega)$ tais que

$$A(z, \omega) := \begin{bmatrix} 1 - \frac{(z-v(\omega))^2 - m^2 c^4}{c^2} & -\frac{(-mc^2 - z + v(\omega))}{c} \\ \frac{(mc^2 - z + v(\omega))}{c} & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.11)$$

Este cociclo possui dois expoentes de Lyapunov, definidos para ν -quase todo $\omega \in \Omega$ por

$$\gamma_1(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_1[A_n(z, \omega)]$$

e

$$\gamma_2(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_2[A_n(z, \omega)].$$

Como as matrizes $A(z, \omega)$ são unimodulares, $\gamma_1(z) = -\gamma_2(z)$, de maneira que de agora em diante, referir-nos-emos apenas ao expoente $\gamma_1(z)$ como simplesmente $\gamma(z)$.

Para $z \in \rho(H)$, é possível mostrar, a partir da relação (8.3) (em analogia à Proposição 6.6), que

$$\gamma(z) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sqrt{|\mathbf{u}_{n-2,2}^{(+)}(\omega)|^2 + |\mathbf{u}_{n-1,1}^{(+)}(\omega)|^2},$$

ou ainda que

$$\gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sqrt{|\mathbf{u}_{n-2,2}^{(-)}(\omega)|^2 + |\mathbf{u}_{n-1,1}^{(-)}(\omega)|^2}.$$

Nosso objetivo é mostrar que o conjunto

$$\mathcal{Z} := \{x \in \mathbb{R}; \gamma(x) = 0\} \quad (8.12)$$

satisfaz $\overline{\mathcal{Z}}^{ess} = \sigma_{ac,2}(H_\omega)$ para ν -quase todo $\omega \in \Omega$, isto é, que a restrição do

espectro absolutamente contínuo a \mathcal{Z} tem multiplicidade 2, para ν -quase todo $\omega \in \Omega$.

Lema 8.5. *Considere $(H_\omega)_\omega$ como na Definição 8.3. Sejam $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\mathbf{u}^{(-)}(\omega)$ e $\mathbf{u}^{(+)}(\omega)$ as soluções da equação de autovalores quadrado-somáveis em $-\infty$ e $+\infty$, respectivamente. Então,*

$$\int_{\Omega} \log \left| \frac{\Im[\mathbf{u}_{0,2}^{(-)}(\omega)]}{\Im[\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)}(\omega)]} \right| d\nu(\omega) \leq \gamma(z),$$

e

$$\int_{\Omega} \log \left| \frac{\Im[\mathbf{u}_{-1,1}^{(+)}(\omega)]}{\Im[\mathbf{u}_{0,1}^{(+)}(\omega)]} \right| d\nu(\omega) \leq \gamma(z),$$

em que $\gamma(z)$ é o expoente de Lyapunov do cociclo definido por (8.11).

Demonstração. Pelo Teorema Ergódico (Proposição F.2), segue-se que, para ν -quase todo $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \int \log \left| \frac{\Im[\mathbf{u}_{0,2}^{(-)}(\omega)]}{\Im[\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)}(\omega)]} \right| d\mu(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \left| \frac{\Im[\mathbf{u}_{k,2}^{(-)}(\omega)]}{\Im[\mathbf{u}_{k-1,2}^{(-)}(\omega)]} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \prod_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\Im[\mathbf{u}_{k,2}^{(-)}(\omega)]}{\Im[\mathbf{u}_{k-1,2}^{(-)}(\omega)]} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{\Im[\mathbf{u}_{n-1,2}^{(-)}(\omega)]}{\Im[\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)}(\omega)]} \right|. \end{aligned}$$

Agora, como $\left| \Im[\mathbf{u}_{n-1,2}^{(-)}(\omega)] \right| \leq \sqrt{\left| \mathbf{u}_{n-1,2}^{(-)}(\omega) \right|^2 + \left| \mathbf{u}_{n,1}^{(-)}(\omega) \right|^2}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{\Im[\mathbf{u}_{n-1,2}^{(-)}(\omega)]}{\Im[\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)}(\omega)]} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{\sqrt{\left| \mathbf{u}_{n-1,2}^{(-)}(\omega) \right|^2 + \left| \mathbf{u}_{n,1}^{(-)}(\omega) \right|^2}}{\left| \Im[\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)}(\omega)] \right|},$$

e também, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{|\Im[\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)}(\omega)]|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)}(\omega)|^2 + |\mathbf{u}_{0,1}^{(-)}(\omega)|^2}} = 0,$$

temos que, para ν -quase todo $\omega \in \Omega$,

$$\int \log \left| \frac{\Im[\mathbf{u}_{0,2}^{(-)}(\omega)]}{\Im[\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)}(\omega)]} \right| d\mu(\omega) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{\sqrt{|\mathbf{u}_{n-2,2}^{(-)}(\omega)|^2 + |\mathbf{u}_{n-1,1}^{(-)}(\omega)|^2}}{\sqrt{|\mathbf{u}_{-2,2}^{(-)}(\omega)|^2 + |\mathbf{u}_{-1,1}^{(-)}(\omega)|^2}} \right| = \gamma(z).$$

□

Lema 8.6. *Considere $(H_\omega)_\omega$ como na Definição 8.3. Então, para todo $z \in \mathbb{C}^+$,*

$$\int_{\Omega} \log \left(1 - \frac{\Im[z]}{c \Im[M_{(z,\omega)}^{(\pm)}]} \right) d\nu(\omega) \leq \gamma(z), \quad (8.13)$$

em que $\gamma(z)$ é o expoente de Lyapunov do cociclo definido por (8.11) e $M^{(\pm)}$ são as funções de Weyl-Titchmarsh, definidas por (8.7).

Demonstração. A primeira das equações de recorrência do sistema (8.2) nos fornece, para $n = 0$, a identidade

$$\begin{aligned} 0 &= (mc^2 + v_0 - z)\mathbf{u}_{0,1}^{(-)} + c \left(\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)} - \mathbf{u}_{0,2}^{(-)} \right) \\ &= (mc^2 + v_0 - z) + c \left(\frac{\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)}}{\mathbf{u}_{0,1}^{(-)}} - \frac{\mathbf{u}_{0,2}^{(-)}}{\mathbf{u}_{0,1}^{(-)}} \right). \end{aligned}$$

Logo, tomando as partes imaginárias em ambos os membros da equação, obtemos

$$-\Im[z] + c \left(\Im \left[M_{(z,\omega)}^{(-)} \right] - \Im \left[\frac{\mathbf{u}_{0,2}^{(-)}}{\mathbf{u}_{0,1}^{(-)}} \right] \right) = 0,$$

e como $\Im \left[M_{(z,\omega)}^{(-)} \right] \neq 0$, segue-se que

$$-\frac{\Im[z]}{c\Im[M_{(z,\omega)}^{(-)}]} + \left(1 - \frac{\Im \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_{0,2}^{(-)} \\ \mathbf{u}_{0,1}^{(-)} \end{array} \right]}{\Im \left[M_{(z,\omega)}^{(-)} \right]} \right) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\Im[z]}{c\Im[M_{(z,\omega)}^{(-)}]} &= \frac{\Im \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_{0,2}^{(-)} \\ \mathbf{u}_{0,1}^{(-)} \end{array} \right]}{\Im \left[M_{(z,\omega)}^{(-)} \right]} \\ &= \left(\Im \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_{0,2}^{(-)} \\ \mathbf{u}_{0,1}^{(-)} \end{array} \right] \right) \left(\Im \left[M_{(z,\omega)}^{(-)} \right] \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\Im \left[\mathbf{u}_{0,2}^{(-)} \overline{\mathbf{u}_{0,1}^{(-)}} \right]}{|\mathbf{u}_{0,1}^{(-)}|^2} \right) \left(\frac{\Im \left[\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)} \overline{\mathbf{u}_{0,1}^{(-)}} \right]}{|\mathbf{u}_{0,1}^{(-)}|^2} \right)^{-1} \\ &= \frac{\Im \left[\mathbf{u}_{0,2}^{(-)} \overline{\mathbf{u}_{0,1}^{(-)}} \right]}{\Im \left[\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)} \overline{\mathbf{u}_{0,1}^{(-)}} \right]}. \end{aligned}$$

Uma vez que $\mathbf{u}_{0,1}^{(-)} = 1$,

$$1 - \frac{\Im[z]}{c\Im \left[M_{(z,\omega)}^{(-)} \right]} = \frac{\Im[\mathbf{u}_{0,2}^{(-)}]}{\Im[\mathbf{u}_{-1,2}^{(-)}]}.$$

Do Lema 8.5, concluímos que

$$\int_{\Omega} \log \left(1 - \frac{\Im[z]}{c\Im \left[M_{(z,\omega)}^{(-)} \right]} \right) d\nu(\omega) \leq \gamma(z).$$

A demonstração do resultado para $M^{(+)}$ se segue de maneira análoga, empregando-se agora a segunda das equações de recorrência do sistema (8.2). \square

Lema 8.7. *Considere $(H_\omega)_\omega$ como na Definição 8.3. Então, para todo $z \in \mathbb{C}^+$,*

$$\int_{\Omega} \frac{1}{-c\Im[M_{(z,\omega)}^{(\pm)}] + \frac{\Im[z]}{2}} d\nu(\omega) \leq \frac{\gamma(z)}{\Im[z]}.$$

em que $\gamma(z)$ e $M^{(\pm)}$ são definidos como no enunciado do Lema 8.6.

Demonstração. Como, para todo $\omega \in \Omega$,

$$\frac{1}{-c\Im[M_{(z,\omega)}^{(\pm)}] + \frac{\Im[z]}{2}} = \frac{1}{\Im[z]} \frac{\left(-\frac{\Im[z]}{c\Im[M_{(z,\omega)}^{(\pm)}]} \right)}{1 - \frac{\left(\frac{\Im[z]}{c\Im[M_{(z,\omega)}^{(\pm)}]} \right)}{2}},$$

e, para todo $x \geq 0$, vale a desigualdade (6.35), obtemos

$$\frac{1}{-c\Im[M_{(z,\omega)}^{(\pm)}] + \frac{\Im[z]}{2}} \leq \frac{1}{\Im[z]} \log \left(1 - \frac{\Im[z]}{c\Im[M_{(z,\omega)}^{(\pm)}]} \right).$$

Logo, integrando em ω , temos

$$\int_{\Omega} \frac{1}{-c\Im[M_{(z,\omega)}^{(\pm)}] + \frac{\Im[z]}{2}} d\nu(\omega) \leq \frac{1}{\Im[z]} \int_{\Omega} \log \left(1 - \frac{\Im[z]}{c\Im[M_{(z,\omega)}^{(\pm)}]} \right) d\nu(\omega).$$

O resultado é agora uma consequência do Lema 8.6. □

Proposição 8.8 (Fórmula de Thouless). *Sejam $(H_\omega)_\omega$ como na Definição 8.3 e k a densidade integrada de estados, definida em analogia a (6.7) por*

$$k(\Lambda) := \int_{\Omega} (\langle \mathcal{P}^\omega(\Lambda) \mathbf{e}_{0,1}, \mathbf{e}_{0,1} \rangle + \langle \mathcal{P}^\omega(\Lambda) \mathbf{e}_{-1,2}, \mathbf{e}_{-1,2} \rangle) d\nu(\omega),$$

para todo boreliano $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$. Então,

$$\gamma(z) = -\log(c) + \int \log |z - x| dk(x),$$

sendo c como na Definição 8.1.

Demonstração. Considere inicialmente o caso $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dado $\omega \in \Omega$, observe que podemos escrever as matrizes de transferência associadas ao operador H_ω em z como

$$A_n(z, \omega) = \begin{bmatrix} P_{1,1}^n(z, \omega) & P_{1,2}^n(z, \omega) \\ P_{2,1}^n(z, \omega) & P_{2,2}^n(z, \omega) \end{bmatrix},$$

em que $P_{i,j}^n(z, \omega)$ são polinômios em z . Em especial, $P_{1,1}^n(z, \omega)$ tem grau $2n$, $P_{1,2}^n(z, \omega)$ tem grau $2n - 1$, $P_{2,1}^n(z, \omega)$ tem grau $2n - 1$, $P_{2,2}^n(z, \omega)$ tem grau $2n - 2$ e

$$P_{1,1}^n(z, \omega) = 0 \Leftrightarrow \exists \mathbf{u}, \quad H_\omega \mathbf{u} = z\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_{1,n+1} = \mathbf{u}_{2,0} = 0,$$

$$P_{1,2}^n(z, \omega) = 0 \Leftrightarrow \exists \mathbf{u}, \quad H_\omega \mathbf{u} = z\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_{1,n+1} = \mathbf{u}_{1,1} = 0,$$

$$P_{2,1}^n(z, \omega) = 0 \Leftrightarrow \exists \mathbf{u}, \quad H_\omega \mathbf{u} = z\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_{2,n} = \mathbf{u}_{2,0} = 0,$$

$$P_{2,2}^n(z, \omega) = 0 \Leftrightarrow \exists \mathbf{u}, \quad H_\omega \mathbf{u} = z\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_{2,n} = \mathbf{u}_{1,0} = 0.$$

Assim, as raízes dos polinômios $P_{i,j}^n(z, \omega)$ são autovalores da restrição do operador H_ω a $l^2([0, n], \mathbb{C}^2)$. Dessa maneira, se denotarmos por $(\lambda_{i,j}^{(n),\omega}(k))_{k=1}^n$ as raízes de $P_{i,j}^n(z, \omega)$, teremos

$$P_{1,1}^n(z, \omega) = \left(\frac{1}{c}\right)^n \prod_{k=1}^n (z - \lambda_{1,1}^{(n),\omega}(k)),$$

$$P_{1,2}^n(z, \omega) = \left(\frac{1}{c}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (z - \lambda_{1,2}^{(n),\omega}(k)),$$

$$P_{2,1}^n(z, \omega) = \left(\frac{1}{c}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (z - \lambda_{2,1}^{(n),\omega}(k)),$$

$$P_{2,2}^n(z, \omega) = \left(\frac{1}{c}\right)^{n-2} \prod_{k=1}^{n-2} (z - \lambda_{2,2}^{(n),\omega}(k)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\log |P_{1,1}^n(z, \omega)| &= n(-\log(c)) + \sum_{k=1}^n \log \left| z - \lambda_{1,1}^{(n),\omega}(k) \right|, \\ \log |P_{1,2}^n(z, \omega)| &= (n-1)(-\log(c)) + \sum_{k=1}^{n-1} \log \left| z - \lambda_{1,2}^{(n),\omega}(k) \right|, \\ \log |P_{2,1}^n(z, \omega)| &= (n-1)(-\log(c)) + \sum_{k=1}^{n-1} \log \left| z - \lambda_{2,1}^{(n),\omega}(k) \right|, \\ \log |P_{2,2}^n(z, \omega)| &= (n-2)(-\log(c)) + \sum_{k=1}^{n-2} \log \left| z - \lambda_{2,2}^{(n),\omega}(k) \right|.\end{aligned}$$

Se definirmos, como (6.25), as medidas $\beta_{1,1}^{\omega,n}, \beta_{1,2}^{\omega,n}, \beta_{2,1}^{\omega,n}, \beta_{2,2}^{\omega,n}$ associadas aos autovalores das restrições do operador H_ω a $l^2([0, n], \mathbb{C}^2)$ que satisfazem as condições de contorno verificadas pelos respectivos polinômios, podemos reescrever as identidades acima como

$$\begin{aligned}\log |P_{1,1}^n(z, \omega)| &= n(-\log(c)) + \int \log |z - s| \beta_{1,1}^{\omega,n}, \\ \log |P_{1,2}^n(z, \omega)| &= (n-1)(-\log(c)) + \int \log |z - s| \beta_{1,2}^{\omega,n}, \\ \log |P_{2,1}^n(z, \omega)| &= (n-1)(-\log(c)) + \int \log |z - s| \beta_{2,1}^{\omega,n}, \\ \log |P_{2,2}^n(z, \omega)| &= (n-2)(-\log(c)) + \int \log |z - s| \beta_{2,2}^{\omega,n}.\end{aligned}$$

Logo, de maneira análoga à demonstração do Teorema 6.9, segue-se para ν -quase todo $\omega \in \Omega$ que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |P_{i,j}^n(z, \omega)| = -\log(c) + \int \log |z - s| dk(s),$$

e portanto, pela definição de γ e pelo Teorema Ergódico de Birkhoff (Proposição F.2),

$$\gamma(z) = -\log(c) + \int \log |z - s| dk(s). \quad (8.14)$$

Para demonstrar que a identidade vale para $x \in \mathbb{R}$, basta seguir os passos apresentados no final da demonstração do Teorema 6.9. \square

Proposição 8.9. *Seja $(H_\omega)_\omega$ como na Definição 8.3. Então, para κ -quase todo $x \in \mathcal{Z}$ (dado por 8.12) e para ν -quase todo $\omega \in \Omega$,*

$$-\infty < \lim_{y \downarrow 0} \Im[M^{(\pm)}(x + iy, \omega)] < 0,$$

com $M^{(\pm)}$ as funções de Weyl-Titchmarsh definidas por (8.7).

Demonstração. Seja $z \in \mathbb{C}$. Pela Fórmula de Thouless (Proposição 8.8),

$$\gamma(z) = -\log(c) + \int \log|z - x| dk(x).$$

Como $\gamma(z) \in \mathbb{R}$, segue-se que $\Im[\int \log(z - x) dk(x)] = 0$, e portanto

$$\gamma(z) = -\log(c) + \Re \left[\int \log(z - x) dk(x) \right].$$

Logo, $\gamma(z)$ é a parte real de uma função cuja derivada é a transformada de Borel da medida dk ; segue-se que existe um conjunto Lebesgue mensurável Λ_1 , com $\kappa(\mathbb{R} \setminus \Lambda_1) = 0$, tal que

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\gamma(x + iy) - \gamma(x)}{y - 0}$$

existe para cada $x \in \Lambda_1$, e em particular, para cada $x \in \mathcal{Z} \cap \Lambda_1$. Se $x \in \mathcal{Z} \cap \Lambda_1$ (neste caso, $\gamma(x) = 0$), então

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\gamma(x + iy) - \gamma(x)}{y - 0} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{\gamma(x + iy)}{y} = \lim_{\Im[z] \downarrow 0} \frac{\gamma(z)}{\Im[z]}$$

existe e é finito. Segue-se agora, a partir do Lema 8.7, que para todo $x \in \mathcal{Z} \cap \Lambda_1$ vale

$$\limsup_{y \downarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{-c \Im[M_{(x+iy, \omega)}^{(\pm)}] + \frac{y}{2}} d\nu(\omega) \leq \limsup_{y \downarrow 0} \frac{\gamma(x + iy)}{y} < \infty,$$

e consequentemente

$$\limsup_{y \downarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{-c \Im[M_{(x+iy, \omega)}^{(\pm)}]} d\nu(\omega) < \infty.$$

Pelo Lema de Fatou,

$$\int_{\Omega} \liminf_{y \downarrow 0} \frac{1}{-\Im[M_{(x+iy, \omega)}^{\pm}]} d\nu(\omega) < \infty,$$

Fixado $\omega \in \Omega$, as funções $-M^{(\pm)}$ são Herglotz (pois se tratam das transformadas de Borel das medidas espectrais associadas aos vetores $\mathbf{e}_{0,1}$ e $\mathbf{e}_{-1,2}$, respectivamente); portanto, existe um conjunto Λ_{ω} de medida total em \mathbb{R} tal que o limite $\lim_{y \downarrow 0} M_{(x+iy, \omega)}^{\pm}$ existe e é finito. Logo, para $x \in \mathcal{Z} \cap \Lambda_1 \cap \Lambda_{\omega}$,

$$0 < \lim_{y \downarrow 0} -\Im[M_{(x+iy, \omega)}^{(\pm)}] < \infty. \quad (8.15)$$

□

Teorema 8.10 (Teorema de Kotani). *Sejam $(H_{\omega})_{\omega}$ e \mathcal{Z} como no enunciado da Proposição 8.9. Então, para ν -quase todo ω , $\overline{\mathcal{Z}}^{ess} \subseteq \sigma_{ac}(H_{\omega})$.*

Demonstração. Da Proposição anterior, segue-se que Lebesgue quase todo $x \in \mathcal{Z}$ satisfaz (8.15) para ν -quase todo $\omega \in \Omega$. Neste caso, $x \in \Sigma_{ac}^{\omega}$, o suporte minimal para componente absolutamente contínua do operador H_{ω} , dado por (8.10). □

Demonstraremos agora a outra inclusão, conhecida como o Teorema de Ishii-Pastur.

Lema 8.11. *Seja $(H_{\omega})_{\omega}$ como no enunciado da Proposição 8.9. Fixado ω , se para um dado $x \in \mathbb{R}$, a solução de Neumann $\mathbf{u}^N(x)$, dada por (8.6), é quadrado-somável em $+\infty$, então*

$$\lim_{y \downarrow 0} \Im [M^{(+)}(x + iy, \omega)] = \infty.$$

Demonstração. Ao computarmos explicitamente o Wronskiano para a solução de Neumann $\mathbf{u}^N(x, \omega)$ e a solução de Jost $\mathbf{u}_k^{(+)}(x + iy, \omega)$, obtemos

$$W_{\mathbf{u}^N, \mathbf{u}^{(+)}}(0) = \mathbf{u}_{0,1}^N \mathbf{u}_k^{(+)}{}_{-1,2} - \mathbf{u}_{-1,2}^N \mathbf{u}_k^{(+)}{}_{0,1} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot M^{(+)} = 1.$$

Pela fórmula de Green (Equação (8.9)), fazendo $m = 0$ e tomando o limite em n , segue-se que

$$iy \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \mathbf{u}_k^{(+)}(x + iy, \omega), \mathbf{u}_k^N(x, \omega) \right\rangle_{\mathbb{C}^2} = -c.$$

Agora, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\frac{c}{y}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \mathbf{u}_k^{(N)}(x, \omega) \right\|_{\mathbb{C}^2}^2\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \mathbf{u}_k^{(+)}(x + iy, \omega) \right\|_{\mathbb{C}^2}^2\right).$$

Por outro lado, aplicando a fórmula de Green para $\mathbf{u}^{(+)}(x + iy, \omega)$ e $\bar{\mathbf{u}}^{(+)}(x + iy, \omega)$, obtemos

$$\Im [M^{(+)}(x + iy, \omega)] = y \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \mathbf{u}_k^{(+)}(x + iy, \omega) \right\|_{\mathbb{C}^2}^2. \quad (8.16)$$

Logo,

$$\left(\frac{c}{y}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \mathbf{u}_k^{(N)}(x, \omega) \right\|_{\mathbb{C}^2}^2\right) \left(\frac{\Im [M^{(+)}(x + iy, \omega)]}{y}\right),$$

e conseqüentemente,

$$\frac{c^2}{y \Im [M^{(+)}(x + iy, \omega)]} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \mathbf{u}_k^{(N)}(x, \omega) \right\|_{\mathbb{C}^2}^2.$$

Portanto,

$$\lim_{y \downarrow 0} \Im [M^{(+)}(x + iy, \omega)] = \infty.$$

□

Lema 8.12. *Seja $(H_\omega)_\omega$ como no enunciado da Proposição 8.9. Fixado ω , se para um dado $x \in \mathbb{R}$ a solução de Dirichlet $\mathbf{u}^D(x)$, dada por (8.6), é quadrado-somável em $+\infty$, então*

$$\lim_{y \downarrow 0} \Im [M^{(+)}(x + iy, \omega)] = 0.$$

Demonstração. Aplicando a fórmula de Green (Equação (8.9)) sobre $\mathbf{u}^{(+)} - \mathbf{u}^D$ e

$\bar{\mathbf{u}}^{(+)} - \bar{\mathbf{u}}^D$, temos que

$$-cW_{[\mathbf{u}^{(+)} - \mathbf{u}^D, \bar{\mathbf{u}}^{(+)} - \bar{\mathbf{u}}^D]}(0) = iy \left(2 \langle \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{u}^{(+)} \rangle - \langle \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{u}^D \rangle - \langle \mathbf{u}^D, \mathbf{u}^{(+)} \rangle \right).$$

Como

$$W_{[\mathbf{u}^{(+)} - \mathbf{u}^D, \bar{\mathbf{u}}^{(+)} - \bar{\mathbf{u}}^D]} = (M^{(+)} - 0)(1 - 1) - (1 - 1)(\bar{M}^{(+)} - 0) = 0,$$

segue-se que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \mathbf{u}_k^{(+)}(x + iy, \omega) \right\|_{\mathbb{C}^2}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \mathbf{u}_k^{(N)}(x, \omega) \right\|_{\mathbb{C}^2}^2.$$

Portanto, de (8.16),

$$-c \frac{\Im [M^{(+)}(x + iy, \omega)]}{y} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \mathbf{u}_k^{(+)}(x + iy, \omega) \right\|_{\mathbb{C}^2}^2,$$

e conseqüentemente,

$$\lim_{y \downarrow 0} \Im [M^{(+)}(x + iy, \omega)] = 0.$$

□

Teorema 8.13 (Teorema de Ishii-Pastur). *Sejam $(H_\omega)_\omega$ e \mathcal{Z} como no enunciado da Proposição 8.9. Então, para ν -quase todo $\omega \in \Omega$, $\sigma_{ac}^\omega \subseteq \overline{\mathcal{Z}}^{ess}$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(x) > 0$. Neste caso, ou $\mathbf{u}^D(x)$ ou $\mathbf{u}^N(x)$ decai exponencialmente em $+\infty$. Portanto, segue-se dos Lemas 8.11 e 8.12 que ou $\lim_{y \downarrow 0} \Im [M^{(+)}(x + iy, \omega)] = 0$, ou $\lim_{y \downarrow 0} \Im [M^{(+)}(x + iy, \omega)] = \infty$. O resultado é agora uma consequência da relação (8.10). □

Capítulo 9

Considerações Finais

Discutiremos neste último capítulo algumas questões naturais aos temas considerados, mas que não foram abordadas ao longo do texto, e que desse modo podem ser estudadas futuramente.

9.1 Regularidade do Operador

No Capítulo 2, o primeiro problema que se apresenta, logo em seguida à definição do operador Jacobi, é conhecer os índices de deficiência de H_{min}^+ , a fim de se estabelecerem suas possíveis extensões auto-adjuntas. Idealmente, gostaríamos de obter uma determinação dos índices a partir da própria lei que define o operador.

Na Seção 2.4 garantimos, sob a hipótese (2.15), que o operador H_{min}^+ é ponto limite, ou seja, que $n_-(H_{min}^+) = n_+(H_{min}^+) = l$. Apresentamos também, segundo a abordagem de Teschl [2000], um critério para o caso ponto limite baseado na expressão do operador, a saber, a propriedade (2.20).

Observe que se a sequência de matrizes $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ satisfaz (2.20), então também satisfaz (2.15). Tornou-se necessário, no entanto, assumir a partir do Capítulo 5 as hipóteses (5.1), mais fortes que as anteriores.

Poderíamos tentar caracterizar as situações distintas do caso ponto limite por relações semelhantes a (2.20), considerando os valores singulares das matrizes D_n isoladamente.

Vale ressaltar que no caso contínuo, dado por (1.7), a regularidade da função $a(x)$ próxima à origem se torna um fator importante para a análise dos índices de deficiência.

9.2 Auto-soluções e Propriedades Espectrais

A fórmula de Green é o ponto de partida para análise, realizada no Capítulo 4, do comportamento assintótico das soluções da equação de autovalores. A fórmula de Green pode oferecer ainda algumas identidades que não exploramos ao longo do trabalho.

Por exemplo, para $z = x + iy$ fixado, sejam $(F_n(z))_n$ a sequência das matrizes formadas pelas soluções de Jost e $(\psi_n)_n$ a sequência de matrizes formada pelas soluções de Neumann para a energia x . Então, aplicando o Lema 2.8 com $B = F$ e $C = \psi$ obtemos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$y \sum_{k=1}^n 2F_k^* F_k - F_k^* \psi_k - \psi_k^* F_k = 2\Im [F_n^t D_n F_{n+1}] - 2\Im [F_n^t] D_n \psi_{n+1} - 2\psi_n^t D_n \Im [F_{n+1}].$$

Considerando a sequência $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como incógnita, esta identidade é um tipo de equação de Volterra. Poderíamos aplicar a teoria conhecida para este tipo de equação a fim de extrair alguma informação relevante sobre $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a partir das sequências $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$. A sequência $(F_n(z))_n$, por sua vez, está estritamente relacionada à matriz M^ϕ .

Por outro lado, como realizado em Jitomirskaya & Last [1999], poderíamos utilizar a Proposição 4.3 para obter mais informações relevantes sobre a medida espectral como, por exemplo, a sua continuidade com respeito a uma família de medidas de Hausdorff.

Ainda, talvez seja possível aprimorar o resultado da Proposição 4.3, obtendo relações separadas para os valores singulares de M^ϕ e os valores singulares das matrizes ϕ e ψ . Tais relações poderiam ser empregadas na determinação de suportes minimais para as componentes absolutamente contínuas da medida espectral.

9.3 Caracterização e Invariância das Componentes Espectrais

Há uma clara concordância entre as caracterizações obtidas nos Capítulos 5 e 6, no sentido de que ambas relacionam o espectro absolutamente contínuo com a limitação do crescimento das soluções da equação de autovalores. Em particular, ambos permitem concluir que as componentes absolutamente contínuas assumem apenas multiplicidades pares.

Além disso, comparando os Corolários 5.7 e 6.21, concluímos que dada uma família de operadores de Jacobi ergódicos, para ν -quase todo $\omega \in \Omega$ e κ -quase todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\gamma_r(x) = 0 \Leftrightarrow \liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L s_{l-r+1}^2[\phi_n(x, \omega)] + s_{l-r+1}^2[\psi_n(x, \omega)] < \infty.$$

Os resultados do Capítulo 5 possibilitam demonstrar, no Capítulo 7, a constância das componentes espectrais absolutamente contínuas de multiplicidades arbitrárias para operadores minimais

Vale notar que, no Capítulo 7, para que os operadores sejam simétricos, exigimos que os potenciais *almost – periodic* (ou que satisfaçam outra propriedade de recorrência) tenham como imagens matrizes simétricas. Talvez não seja simples obter exemplos não-triviais desse tipo de aplicação. Evidentemente, o exemplo mais simples é o produto de uma matriz simétrica constante por um função *almost – periodic* escalar.

Não discutimos uma caracterização da componente singular da medida espectral. Para o caso de operadores de Schrödinger minimais escalares, no entanto, a constância é conhecida em geral apenas para a componente absolutamente contínua. Foi conjecturado por Simon (vide Marx & Jitomirskaya [2017], página 5) que a componente singular também é constante.

Sabe-se, devido ao trabalho de Kunz e Souillard em Kunz & Souillard [1981], que para o caso de uma família ergódica $(H_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de operadores de Schrödinger

escalares, existem conjuntos Σ_{ac} , Σ_{sc} e Σ_{pp} tais que, para ν -quase todo $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\sigma_{ac}(H_\omega) &= \Sigma_{ac}, \\ \sigma_{sc}(H_\omega) &= \Sigma_{sc}, \\ \sigma_{pp}(H_\omega) &= \Sigma_{pp}.\end{aligned}$$

A versão fraca da dicotomia exponencial, demonstrada na Seção 7.3, permite-nos caracterizar o espectro de uma família minimal de operadores de Jacobi. Talvez outras propriedades dinâmicas do cociclo, como por exemplo a hiperbolicidade parcial, possam estar relacionadas a propriedades espectrais mais finas do operador.

Referências Bibliográficas

- Allahverdiev, B. P. (2003). Extensions of the symmetric operator generated by an infinite Jacobi matrix. *Mathematical and Computer Modelling*, (37):1093–1098.
- Atkinson, F. V. (1964). *Discrete and Continuous Boundary Problems*. Academic Press, London.
- Atkinson, F. V. (1981). A class of limit-point criteria. *Spectral theory of differential operators*, (55):13–35.
- Braeutigam, I. N. (2017). Limit-point criteria for the matrix Sturm-Liouville operator and its powers. *Opuscula Mathematica*, (1):5–19.
- Carmona, R. & Lacroix, J. (1990). *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*. Birkhäuser, Boston.
- Carvalho, S. L.; de Oliveira, C. R. & Prado, R. A. (2011). Sparse one-dimensional discrete Dirac operators II: Spectral properties. *Journal of Mathematical Physics*, (52).
- Chen, J. & Shi, Y. (2004). The limit circle and limit point criteria for second-order linear difference equations. *Computers and Mathematics with Applications*, (47):967–976.
- Coddington, E. A. & Levinson, N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York.
- Cycon, H.; R.C.Froese; Kirsch, W. & B.Simon (1987). *Schrödinger Operators: with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*. Springer-Verlag, Berlin.

- de Oliveira, C. & Prado, R. (2005a). Dynamical delocalization for the 1d Bernoulli discrete Dirac operator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, (38):115–119.
- de Oliveira, C. & Prado, R. (2005b). Spectral and localization properties for the one-dimensional Bernoulli discrete Dirac operator. *Journal of Mathematical Physics*, (46).
- de Oliveira, C. R. (2009). *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*. Birkhäuser, Basel.
- Dirac, P. A. M. (1928). The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London*, 117(778):610–624.
- Esposito, G. (1998). *Dirac Operators and Spectral Geometry*. Cambridge University Press, New York.
- Everitt, W. N.; Knowles, I. W. & Read, T. T. (1986). Limit-point and limit-circle criteria for Sturm-Liouville equations with intermittently negative principal coefficients. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, (103A):215–228.
- Gesztesy, F.; Kiselev, A. & Makarov, K. A. (2002). Uniqueness results for matrix-valued Schrödinger, Jacobi, and Dirac-type operators. *Mathematische Nachrichten*, (239-240):103–145.
- Gesztesy, F. & Tsekanovskii, E. (2004). On matrix-valued Herglotz functions.
- Gilbert, D. J. (1984). *Subordinacy and Spectral Analysis of Schrödinger Operators*. Tese de doutorado, University of Hull, Cottingham, United Kingdom.
- Haro, A. & Puig, J. (2013). A Thouless formula and Aubry duality for long-range Schrödinger skew-products. *Nonlinearity*, (26):1163–1187.
- Hartman, P. (2002). *Ordinary Differential Equations*. SIAM, Boston.
- Hartman, P. & Wintner, A. (1947). An oscillation theorem for continuous spectra. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, (33):376–379.

- Hartman, P. & Wintner, A. (1949a). Oscillatory and non-oscillatory linear differential equations. *American Journal of Mathematics*, 71(3):627–649.
- Hartman, P. & Wintner, A. (1949b). A separation theorem for continuous spectra. *American Journal of Mathematics*, 71(3):650–662.
- Hiai, F. & Petz, D. (2014). *Introduction to Matrix Analysis and Applications*. Springer, New Delhi.
- Higham, N. J. (2008). *Functions of Matrices, Theory and Computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Hinton, D. B. & Shaw, J. K. (1981). On Titchmarsh-Weyl $m(\lambda)$ -functions for linear Hamiltonian systems. *Journal of Differential Equations*, (40):316–342.
- Ishii, K. (1973). Localization of eigenstates and transport phenomena in the one dimensional disordered system. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, (53):77–138.
- Jitomirskaya, S. & Last, Y. (1999). Power-law subordinacy and singular spectra I. Half-line operators. *Acta Mathematica*, (183):171–189.
- Johnson, R. (1986). Exponential dichotomy, rotation number, and linear differential operators with bounded coefficients. *Journal of Differential Equations*, (61):54–78.
- Katok, A. & Hasselblatt, B. (1995). *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Khan, S. & Gilbert, D. J. (1992). Subordinacy and spectral theory for infinite matrices. *Helvetica Physica Acta*, 65:505–527.
- Kostyuchenko, A. G. & Mirzoev, K. A. (1998). Three-term recursion relations with matrix coefficients. the completely indeterminate case. *Matematicheskie Zametki*, 5(63):709–716.
- Kostyuchenko, A. G. & Mirzoev, K. A. (1999). Generalized Jacobi matrices and deficiency numbers of ordinary differential operators with polynomial coefficients. *Functional Analysis and Its Applications*, (33):25–37.

- Kostyuchenko, A. G. & Mirzoev, K. A. (2001). Complete indefiniteness tests for Jacobi matrices with matrix entries. *Functional Analysis and Its Applications*, (35):266–269.
- Kotani, S. & Simon, B. (1988). Stochastic Schrödinger operators and Jacobi matrices on the strip. *Communications in Mathematical Physics*, (119):403–429.
- Krabs, W. & Pickl, S. (2010). *Dynamical Systems*. Springer, London.
- Kunz, H. & Souillard, B. (1981). Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires. *Communications in Mathematical Physics*, (78):201–246.
- Landau, L. & Lifshitz, E. (1965). *Quantum Mechanics, A Course of Theoretical Physics*, volume 3. Pergamon Press, Oxford.
- Lang, R. (1991). Spectral theory of random Schrödinger operators, a genetic introduction. *Lecture Notes in Mathematics*.
- Last, Y. & Simon, B. (1999). Eigenfunctions, transfer matrices, and absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators. *Inventiones mathematicae*, (135):329–367.
- Magnus, W. & Winkler, S. (1979). *Hill's Equation*. Dover Publications.
- Marx, C. A. (2014). Dominated splittings and the spectrum for quasi periodic Jacobi operators. *Nonlinearity*, (27):3059–3072.
- Marx, C. A. & Jitomirskaya, S. (2017). Dynamics and spectral theory of quasi-periodic Schrödinger-type operators. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, (37):2353–2393.
- Oliveira, K. & Viana, M. (2014). *Fundamentos da Teoria Ergódica*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.
- Oseledets, V. I. (1968). A multiplicative ergodic theorem. characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, (19):179–210.

- Pastur, L. (1980). Spectral properties of disordered systems in the one-body approximation. *Communications in Mathematical Physics*, (75):179–196.
- Pearson, D. B. & Gilbert, D. J. (1987). On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrödinger operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 128:30–56.
- Pleijel, A. (1969). Some remarks about the limit point and limit circle theory. *Arkiv för Matematik*, (7):543–550.
- Qi, J. & Chen, S. (2004). Strong limit-point classification of singular hamiltonian expressions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132(6):1667–1674.
- Rudin, W. (1970). *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill.
- Ruelle, D. (1979). Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Institut des Hautes Études Scientifiques*, (50):275.
- Sacker, R. & Sell, G. R. (1976). Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems II. *Journal of Differential Equations*, (22):478–496.
- Sakurai, J. J. . (1967). *Advanced Quantum Mechanics*. Boston.
- Sakurai, J. J. . & Napolitano, J. (1994). *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Boston.
- Schneider, H. (1966). Topological aspects of Sylvester’s theorem on the inertia of hermitian matrices. *The American Mathematical Monthly*, 73(8):817–821.
- Schrödinger, E. (1926). An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical Review*, 6(28):1049–1070.
- Shi, Y. (2004). On the rank of the matrix radius of the limiting set for a singular linear hamiltonian system. *Linear Algebra and its Applications*, (376):109–123.
- Stone, M. H. (1932). *Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis*. American Mathematical Society, New York.

- Taylor, M. E. (2011). *Partial Differential Equations I*. Springer, New York.
- Teschl, G. (2000). *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices, Mathematical Surveys and Monographs 72*. American Mathematical Society, Providence.
- Wang, B. & Xi, B. (1997). Some inequalities for singular values of matrix products. *Linear Algebra and its Applications*, (264):109–115.
- Weidmann, J. (1980). *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer, Berlin.
- Zhang, Z. (2018). Uniform hyperbolicity and its applications to spectral analysis of 1d discrete Schrödinger operators. *preprint*.

Apresentamos neste apêndice alguns conceitos e resultados importantes utilizados ao longo do texto.

Apêndice A

Análise Complexa

Definição A.1 (Função Sub-harmônica). *Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ é dita sub-harmônica se, para todos $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$,*

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz,$$

e toda sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $z_n \rightarrow z_0$ satisfaz

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \leq f(z_0).$$

Lema A.2. *Se f é uma função sub-harmônica, então, para todo $z_0 \in \mathbb{C}$,*

$$f(z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-z_0| \leq r} f(z) dz.$$

Demonstração. Veja [Cycon et al. \[1987\]](#), página 183.

□

Lema A.3. *Se f_n é uma sequência decrescente de funções sub-harmônicas, então a função f_0 dada por*

$$f_0(z) := \inf_n f_n(z)$$

é sub-harmônica.

Demonstração. Veja [Cycon et al. \[1987\]](#), página 183.

□

Lema A.4. *Dada uma medida de Borel μ finita, definida em \mathbb{R} , a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, dada pela lei*

$$f(z) := \int_{\mathbb{R}} \log |z - x| d\mu(x),$$

é sub-harmônica (convencionando que $f(z) = -\infty$ caso a integral divirja em $-\infty$).

Demonstração. Veja [Cycon et al. \[1987\]](#), página 186.

□

Proposição A.5. *Seja $f(z)$ a função definida no enunciado do Lema A.4. Então, a derivada normal de f existe para κ -quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\begin{aligned} \lim_{y \downarrow 0} \frac{f(x+iy) - f(x)}{y} &= \lim_{y \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\log|x+iy-s| - \log|x-s|}{y} d\mu(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}} i \frac{1}{|x-s|} d\mu(s) \end{aligned}$$

Logo, como a transformada de Borel da medida μ existe em κ -quase todo x , o mesmo vale para o limite $\lim_{y \downarrow 0} \frac{f(x+iy) - f(x)}{y}$.

□

Apêndice B

Teoria Espectral

Todos os resultados desta seção podem ser encontrados em [de Oliveira \[2009\]](#).

B.1 Operadores Auto-adjuntos

Definição B.1 (Operadores Simétricos e Hermitianos). *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert. Um operador linear $T : (T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é simétrico se, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in (T)$,*

$$\langle T\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T\mathbf{v} \rangle.$$

O operador T será dito hermitiano se for simétrico e se (T) for um subespaço denso em \mathcal{H} .

Definição B.2 (Operador Adjunto). *Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert. Seja $T : (T) \subset \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ uma aplicação linear, com (T) um subespaço denso em \mathcal{H}_1 . Defina o conjunto*

$$(T^*) := \{ \mathbf{x} \in \mathcal{H}_2 \mid \exists \mathbf{y} \in \mathcal{H}_1, \langle \mathbf{x}, T\mathbf{u} \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{H}_1}, \forall \mathbf{u} \in (T) \}$$

Como (T) é denso, \mathbf{y} é unicamente definido. A aplicação linear $T^ : (T^*) \rightarrow \mathcal{H}_1$, chamada de adjunto de T , é a aplicação $T^*(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ como definida acima, de modo que*

$$\langle \mathbf{x}, T(\mathbf{u}) \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle T^*(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{H}_1},$$

para todos $\mathbf{u} \in (T)$ e $\mathbf{x} \in (T^*)$.

Definição B.3 (Subespaços de Deficiência e Índices de Deficiência). *Se T é um operador hermitiano, os subespaços fechados*

$$\begin{aligned} K_+(T) &:= [T^* + i\mathbb{I}] = ([T - i\mathbb{I}])^\perp, \\ K_-(T) &:= [T^* - i\mathbb{I}] = ([T + i\mathbb{I}])^\perp, \end{aligned}$$

são chamados de espaços de deficiência de T e os números

$$\begin{aligned} n_+(T) &:= \dim([T^* + i\mathbb{I}]) = \dim([T - i\mathbb{I}])^\perp, \\ n_-(T) &:= \dim([T^* - i\mathbb{I}]) = \dim([T + i\mathbb{I}])^\perp, \end{aligned}$$

são chamados de números de deficiência de T .

O gráfico de um operador T é o conjunto $[T] \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dado por

$$[T] := \{(\mathbf{u}, T\mathbf{u}); \mathbf{u} \in (T)\}$$

Um segundo operador T_1 é dito uma extensão de T , denotando-se por $T \subset T_1$, se $[T] \subset [T_1]$. No caso de um operador T possuir extensões, a menor destas extensões será denominada fecho de T e denotada por \overline{T} . É possível mostrar que se T é fechável (algo sempre possível caso T seja densamente definido em \mathcal{H}), então $\overline{[T]} = [\overline{T}]$, sendo o fecho definido com respeito à topologia produto em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ (veja, por exemplo, [Carmona & Lacroix \[1990\]](#), página 2).

Definição B.4 (Forma de Fronteira). *Seja T um operador hermitiano. A forma de fronteira de T é a aplicação $\Gamma : (T^*) \times (T^*) \rightarrow \mathbb{C}$ definida pela lei*

$$\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \langle \mathbf{v}, T^* \mathbf{u} \rangle - \langle T^* \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle.$$

Definição B.5 (Tripla de Fronteira). *Seja T um operador hermitiano com $n_+(T) = n_-(T)$. Uma tripla de fronteira é uma terna $(\mathcal{H}, \rho_1, \rho_2)$, em que \mathcal{H} é um espaço de Hilbert e $\rho_1, \rho_2 : (T^*) \rightarrow \mathcal{H}$ são aplicações lineares com imagens densas tais que $\exists a \neq 0$ de modo que, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in (T^*)$,*

$$a\Gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \rho_1(\mathbf{u}), \rho_1(\mathbf{v}) \rangle - \langle \rho_2(\mathbf{u}), \rho_2(\mathbf{v}) \rangle.$$

Proposição B.6 (Teorema 7.1.13 em de Oliveira [2009]). *Seja $T : (T) \rightarrow \mathcal{H}_1$ um operador hermitiano com $n_+(T) = n_-(T)$. Se $(\mathcal{H}_2, \rho_1, \rho_2)$ é uma tripla de fronteira para T , então existe uma bijeção entre as extensões auto-adjuntas de T e as aplicações unitárias em \mathcal{H}_2 ; a saber, associa-se a cada aplicação unitária $U : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ a aplicação $T_U : (T_U) \rightarrow \mathcal{H}_2$ definida em*

$$(T_U) : \{v \in (T^*); \rho_2(v) = U\rho_1(v)\}$$

e dada pela lei $T_U v = T^* v$.

Proposição B.7 (Primeira Identidade do Resolvente; Proposição 1.5.9 em de Oliveira [2009]). *Sejam $T : (T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear e $z, s \in \rho(T)$. Então,*

$$R_z(T) - R_s(T) = (z - s)R_s(T)R_z(T).$$

Como consequência, $R_s(T)$ e $R_z(T)$ comutam.

Proposição B.8 (Segunda Identidade do Resolvente; Exercício 1.5.10 em de Oliveira [2009]). *Sejam $T : (T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $S : (S) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ operadores lineares tais que $(S) \subset (T)$. Se $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(T)$, então*

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(T)(S - T)R_\lambda(S).$$

Agora, se $\rho(S) = \rho(T)$, então

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(S)(S - T)R_\lambda(T).$$

Proposição B.9 (Terceira Identidade do Resolvente; Proposição 1.5.11 em de Oliveira [2009]). *Sejam $T : (T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $S : (S) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ operadores lineares tais que $(S) \subset (T)$. Se $z, z_0 \in \rho(S) \cap \rho(T)$, então*

$$R_z(T) - R_z(S) = [\mathbb{I} + (z - z_0)R_z(T)] [R_{z_0}(T) - R_{z_0}(S)] [\mathbb{I} + (z - z_0)R_z(S)].$$

Proposição B.10 (Critério de Weyl; Teorema 2.4.8 em de Oliveira [2009]). *Sejam $T : (T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear e $z \in \mathbb{C}$. Se existe uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$*

de vetores unitários em (T) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T - z)v_n = \mathbf{0},$$

então $z \in \sigma(T)$.

B.2 Decomposição Espectral

Definição B.11 (Resolução da Identidade). *Sejam \mathcal{A} a σ -álgebra de Borel em \mathbb{R} e (\mathcal{H}) o conjunto das projeções ortogonais definidas em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Uma resolução da identidade em \mathcal{H} é uma aplicação*

$$\mathcal{P} : \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{H})$$

tal que:

- (a) $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \mathbb{I}$
- (b) *Seja $(\Lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma família de elementos de \mathcal{A} dois a dois disjuntos e considere $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Lambda_j$ (união disjunta). Então,*

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mathcal{P}(\Lambda_j) = \mathcal{P}(\Lambda),$$

ou seja, $\sum_{j=1}^n \mathcal{P}(\Lambda_j)$ converge fortemente a $\mathcal{P}(\Lambda)$.

Se \mathcal{P} é uma resolução da identidade em \mathcal{H} , podemos associar a cada $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ uma medida de Borel positiva em \mathbb{R} , $\mu_{\mathbf{u}}$, através da relação

$$\mu_{\mathbf{u}}(\Lambda) := \langle \mathcal{P}(\Lambda)\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle.$$

É possível estender uma resolução da identidade $\mathcal{P} : \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{H})$ para $\mathcal{P} : B^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow B(\mathcal{H})$, onde $B^{\infty}(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial das funções limitadas em \mathbb{R} . Desta maneira, se $f \in B^{\infty}(\mathbb{R})$, então

$$\langle \mathcal{P}(f)\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_{\mathbf{u}}(t). \quad (\text{B.1})$$

Proposição B.12 (Teorema Espectral; Teorema 8.3.8 em [de Oliveira \[2009\]](#)). *A cada operador auto-adjunto $T : (T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ corresponde uma resolução da identidade \mathcal{P}^T em \mathcal{H} tal que*

$$T = \int t d\mathcal{P}^T(t).$$

Definição B.13 (Espectro Discreto). *Se $T : (T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador auto-adjunto, o espectro discreto de T é o conjunto $\sigma_d(T)$ dos autovalores isolados de T que possuem multiplicidade finita.*

Definição B.14 (Espectro Essencial). *Se $T : (T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador auto-adjunto, o espectro essencial de T é o conjunto $\sigma_{\text{ess}}(T)$ formado pelos pontos de acumulação do espectro $\sigma(T)$ e pelos autovalores isolados de T que possuem multiplicidade infinita.*

Seja μ uma medida σ -finita definida na σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} . Então, existem únicas¹ μ_p e μ_c tais que

$$\mu = \mu_p + \mu_c,$$

em que μ_c , denominada componente contínua, satisfaz $\mu_c(\{t\}) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ e μ_p , denominada componente pontual, satisfaz $\mu_p(\mathbb{R} \setminus \Omega) = 0$, para algum $\Omega \subset \mathbb{R}$ enumerável.

Podemos prosseguir e utilizar o Lema da decomposição de Lebesgue a fim de obter únicas μ_{ac} e μ_{sc} tais que

$$\mu_c = \mu_{ac} + \mu_{sc}$$

em que μ_{ac} , denominada componente absolutamente contínua, é absolutamente contínua com respeito a κ e μ_{sc} , denominada componente singular contínua, é singular com respeito a κ .

Definição B.15 (Subespaços Pontual e Contínuo). *Seja $T : (T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto. O subespaço pontual, denotado por $\mathcal{H}_p(T)$, é o fecho do*

¹Veja, por exemplo, [Rudin \[1970\]](#), página 151.

subespaço gerado pelas auto-soluções de T . O subespaço contínuo, denotado por $\mathcal{H}_c(T)$ é o complemento ortogonal de $\mathcal{H}_p(T)$, ou seja, $\mathcal{H}_c(T) := (\mathcal{H}_p(T))^\perp$.

É possível demonstrar que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_c$. A justificativa para a nomenclatura reside no fato que se denotarmos por Λ o conjunto dos autovalores de T , que é um conjunto enumerável, então

$$\mathcal{H}_p(T) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{H} \mid \mu_{\mathbf{u}}(\mathbb{R} \setminus \Lambda) = 0\}.$$

Por outro lado,

$$\mathcal{H}_c(T) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{H} \mid \mu_{\mathbf{u}}(\{t\}) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Sejam P_p^T, P_c^T as projeções em $\mathcal{H}_p(T), \mathcal{H}_c(T)$. Se denotarmos por

$$\begin{aligned} T_p &:= TP_p^T, \\ T_c &:= TP_c^T, \end{aligned}$$

podemos demonstrar que $T = T_p \oplus T_c$. Neste caso, definimos o espectro pontual de T como $\sigma_p(T) := \sigma(T_p)$ e o espectro contínuo de T como $\sigma_c(T) := \sigma(T_c)$, que não são necessariamente disjuntos, mas satisfazem

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T). \quad (\text{B.2})$$

Definição B.16 (Subespaços Singular, Singular-contínuo e Absolutamente Contínuo). *Seja $T : (T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto.*

(a) *O subespaço singular de T é o conjunto*

$$\mathcal{H}_s(T) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{H} \mid \mu_{\mathbf{u}} \perp \kappa\}.$$

(b) *O subespaço absolutamente contínuo de T é o conjunto*

$$\mathcal{H}_{ac}(T) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{H} \mid \mu_{\mathbf{u}} \ll \kappa\}.$$

(c) *O subespaço singular contínuo de T é o conjunto*

$$\mathcal{H}_{sc}(T) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{H} \mid \mu_{\mathbf{u}} \perp \kappa, \mu_{\mathbf{u}}(\{t\}) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Temos as relações

$$\mathcal{H}_p(T) \subset \mathcal{H}_s(T),$$

$$\mathcal{H}_{ac}(T) \subset \mathcal{H}_c(T),$$

$$\mathcal{H}_{sc}(T) \subset \mathcal{H}_c(T) \cap \mathcal{H}_s(T),$$

e também as decomposições

$$\mathcal{H}_s(T) = \mathcal{H}_p(T) \oplus \mathcal{H}_{sc}(T),$$

$$\mathcal{H}_c(T) = \mathcal{H}_{ac}(T) \oplus \mathcal{H}_{sc}(T),$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p(T) \oplus \mathcal{H}_{ac}(T) \oplus \mathcal{H}_{sc}(T).$$

Definição B.17 (Subespaço Cíclico Gerado). *Seja $T : (T) \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto. Dado um conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ de elementos de \mathcal{H} , o subespaço cíclico gerado por \mathcal{B} é o subespaço*

$$\overline{\left\{ \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^n(\mathbf{u}_j) \right\}}. \quad (\text{B.3})$$

Definição B.18 (Base Espectral). *Seja $T : (T) \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto. Dizemos que um conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ é uma base espectral para T se \mathbf{u}_j forem linearmente independentes e o subespaço gerado por \mathcal{B} coincide com \mathcal{H} , com k sendo o menor inteiro tal que (B.3) coincide com \mathcal{H} .*

Definição B.19 (Multiplicidade Espectral). *Dado $T : (T) \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto, seja $\mathcal{B} := \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ uma base espectral para T . Dizemos que em um ponto $x \in \sigma_{ac}(T)$ da componente absolutamente contínua tem multiplicidade m se existir uma sequência $x_n \rightarrow x$ tal que para exatamente m vetores de \mathcal{B} , as respectivas medidas espectrais têm derivadas de Radon-Nikodym positivas e não nulas em cada x_n . Denotamos o conjunto formado por estes pontos por $\sigma_{ac,m}(T)$.*

Definição B.20 (Operador Classe-Traço). *Seja $Q : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador limitado positivo, isto é, $\langle \mathbf{u}, Q\mathbf{u} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{u} \in \mathcal{H}$. Dada uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_k\}_k$ em \mathcal{H} , o traço de Q é a quantidade*

$$[Q] := \sum_k \langle \mathbf{e}_k, Q\mathbf{e}_k \rangle.$$

Um operador B é dito classe-traço se $[B] < \infty$.

Proposição B.21 (Kato-Rosenblum; Proposição 12.3.24 em [de Oliveira \[2009\]](#)). *Sejam $T : (T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ operadores auto-adjuntos no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Se B é classe-traço, então $\sigma_{ac}(T) = \sigma_{ac}(T + B)$.*

Apêndice C

Matrizes e Valores Singulares

Denotaremos por $M(l, \mathbb{K})$ a álgebra de matrizes $l \times l$ no corpo \mathbb{K} , e por $GL(l, \mathbb{K})$ o grupo, chamado de grupo linear, dos elementos de $M(l, \mathbb{K})$ cujo determinante é diferente de zero.

As matrizes A de $M(l, \mathbb{K})$ que satisfazem, para todos $x, y \in \mathbb{K}^n$,

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle,$$

formam o chamado grupo ortogonal $O(l, \mathbb{K})$. Se $A \in O(l, \mathbb{R})$, então $\det(A) \in \{-1, +1\}$. Os elementos de $O(l, \mathbb{R})$ cujo determinante vale 1 formam o subgrupo $SO(l)$, chamado grupo ortogonal especial.

No caso específico em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $O(l, \mathbb{K})$ é denominado grupo unitário e denotado por $U(l)$. Se $A \in U(l)$, então $|\det(A)| = 1$. Os elementos de $U(l)$ cujo determinante vale 1 formam o subgrupo $SU(l)$, chamado de grupo unitário especial.

Uma matriz $A \in M(l, \mathbb{K})$ é dita hermitiana se $A^* = A$. Uma matriz hermitiana A é dita positiva semi-definida se, para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^l \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{u}A\mathbf{u}^t \geq 0$. Escrevemos, neste caso, $A \geq 0$. Observe que, para todo $A \in M(l, \mathbb{K})$, A^*A é hermitiana e positiva semi-definida.

Podemos definir uma ordenação parcial no conjunto das matrizes positivas semi-definidas. Se A, B são matrizes positivas semi-definidas de mesma ordem, dizemos que $A \geq B$ se $\mathbf{u}A\mathbf{u}^t \geq \mathbf{u}B\mathbf{u}^t$, para todo \mathbf{u} . Em outras palavras, $A \geq B$

se $A - B$ é positiva semi-definida.

Se A é uma matriz positiva semi-definida, existe uma única matriz positiva semi-definida B tal que $B^2 = A$. A matriz B é chamada raiz quadrada¹ da matriz A e denotada por \sqrt{A} .

Dado $A \in M(l, \mathbb{K})$, A^*A é uma matriz positiva semi-definida. Denominamos valor absoluto de A , denotado por $|A|$, a matriz $\sqrt{A^*A}$.

Dadas $A, B \in M(l, \mathbb{K})$, a aplicação

$$\langle A, B \rangle := [A^*B]$$

define um produto interno em $A \in M(l, \mathbb{K})$.

Definição C.1 (Norma de Frobenius²). *A norma em $M(l, \mathbb{K})$ proveniente do produto interno definido acima é chamada de norma de Frobenius:*

$$\|A\|_F := \sqrt{[A^*A]}.$$

Definição C.2 (Valor Singular). *Dada $A \in M(l, \mathbb{K})$, os valores singulares de A são os autovalores de $|A|$. Denotamo-los por*

$$s_1[A] \geq s_2[A] \geq \dots \geq s_{l-1}[A] \geq s_l[A],$$

com $s_k[A] = \lambda_k(|A|) \geq 0$, contando a multiplicidade.

Proposição C.3 (Expressão Minimax e Expressão de Aproximação; Teorema 6.7 em Hiai & Petz [2014]). *Se $A \in M(l, \mathbb{K})$, então, para $1 \leq k \leq l$,*

$$s_k[A] = \min\{\|A \circ (\mathbb{I} - P)\|; P \text{ é uma projeção de posto } k - 1\}.$$

Se $A \geq 0$, então, para $1 \leq k \leq l$,

$$s_k[A] = \min\{\max\{\langle \mathbf{u}, A\mathbf{u} \rangle; \mathbf{u} \in \mathcal{M}^\perp, \|\mathbf{u}\| = 1\}; \mathcal{M} \text{ é um sub-espaco de dimensão } k - 1\}.$$

¹Confira Hiai & Petz [2014], página 28.

²Também denominada norma de Hilbert-Schmidt.

Tais expressões são chamadas de expressões mínimas dos valores singulares. Se $A \in M(l, \mathbb{K})$, então, para $1 \leq k \leq l$,

$$s_k[A] = \inf\{\|A - X\|; X \in M(l, \mathbb{K}), [X] < k\};$$

tal expressão é chamada de aproximação dos valores singulares.

Proposição C.4 (Valores Singulares e Normas; Teorema 6.7 em [Hiai & Petz \[2014\]](#)). Dada $A \in M(l, \mathbb{K})$, a norma matricial usual satisfaz

$$\|A\| = s_1[A].$$

Já a norma de Frobenius satisfaz

$$\|A\|_F = \sqrt{s_1^2[A] + s_2^2[A] + \dots + s_l^2[A]} = \sqrt{\sum_{ij=1}^l |a_{ij}|^2}.$$

Mais ainda, para cada $1 \leq k \leq l$,

$$\|A\|_{(k)} := \sqrt{s_1^2[A] + s_2^2[A] + \dots + s_k^2[A]}$$

define uma norma.

Proposição C.5 (Propriedades de Valores Singulares; Teorema 6.7 em [Hiai & Petz \[2014\]](#)). Sejam $A, B \in M(l, \mathbb{K})$.

(a) Se $0 \leq A \leq B$, então, para $1 \leq k \leq l$,

$$s_k[A] \leq s_k[B].$$

(b) Se $k + m - 1 \leq l$, então

$$s_{k+m-1}[A + B] \leq s_k[A] + s_m[B].$$

(c)³ Para todo $1 \leq k \leq l$,

$$\sum_{i=1}^k s_i[AB] \geq \sum_{i=1}^k s_i[A]s_{l-i+1}[B].$$

(d) Se $1 \leq k \leq l$, então

$$|s_k[A] - s_k[B]| \leq \|A - B\|.$$

(e) Se $A \geq 0$ e $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função crescente, então para $1 \leq k \leq l$,

$$s_k[f(A)] = f(s_k[A]).$$

(f) Se $1 \leq k, m \leq l$ e $k + m - 1 \leq l$, então

$$s_l[B]s_m[B] \leq s_{k+m-1}[AB] \leq s_1[B]s_m[B].$$

Proposição C.6 (Princípio da Inércia de Sylvester; Teorema único em [Schneider \[1966\]](#)). *Seja A uma matriz hermitiana. Sejam*

$$\begin{aligned} \pi(A) &= \text{número de autovalores positivos de } A, \\ \nu(A) &= \text{número de autovalores negativos de } A, \\ \delta(A) &= \text{número de autovalores nulos de } A. \end{aligned}$$

Então, para toda matriz X não-singular,

$$\begin{aligned} \pi(A) &= \pi(X^*AX), \\ \nu(A) &= \nu(X^*AX), \\ \delta(A) &= \delta(X^*AX). \end{aligned}$$

Denote⁴ por $\Lambda^p(\mathbb{C}^l)$ o espaço vetorial das p -formas alternadas no espaço dual de \mathbb{C}^l . Dados $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p \in \mathbb{C}^l$ e $f_1, f_2, \dots, f_p \in (\mathbb{C}^l)^*$, defina a matriz N pela lei $N_{i,j} := f_i(u_j)$. Podemos então definir a aplicação $\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_p \in \Lambda^p(\mathbb{C}^l)$

³Resultado de [Wang & Xi \[1997\]](#).

⁴Confira [Carmona & Lacroix \[1990\]](#), página 179 e [Hiai & Petz \[2014\]](#), página 43.

como

$$\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_p(f_1, f_2, \dots, f_p) = \det(N)$$

Os elementos de $\Lambda^p(\mathbb{C}^l)$ da forma $U = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_p$ são chamados vetores p -decomponíveis. O elemento U pode ser representado pela matriz $l \times p$ cujas colunas são coordenadas dos vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ em \mathbb{C}^l . Podemos, a partir desta representação, definir um produto interno nos vetores p -decomponíveis de $\Lambda^p(\mathbb{C}^l)$ pela lei

$$\langle \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p \rangle := \det(U^*V). \quad (\text{C.1})$$

Lema C.7 (Lema IV.2.1 em [Carmona & Lacroix \[1990\]](#)). *Seja $\Lambda^p(\mathbb{C}^l)$ o espaço vetorial das p -formas alternantes em $(\mathbb{C}^l)^*$. Então,*

- (a) *o conjunto dos vetores p -decomponíveis gera o espaço $\Lambda^p(\mathbb{C}^l)$;*
- (b) *um vetor p -decomponível $\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_p$ é não nulo se o sistema $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ é linearmente independente;*
- (c) *a extensão da fórmula (C.1) em $\Lambda^p(\mathbb{C}^l)$ define um produto interno.*

Se $B \in GL(l, \mathbb{C})$, podemos definir um automorfismo linear em $\Lambda^p(\mathbb{C}^l)$ pela lei

$$\Lambda^p(B)(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_p) := (B\mathbf{u}_1 \wedge B\mathbf{u}_2 \wedge \dots \wedge B\mathbf{u}_p).$$

Desta maneira, se $B, C \in GL(l, \mathbb{C})$, então

$$\Lambda^p(BC) = \Lambda^p(B)\Lambda^p(C) \quad (\text{C.2})$$

E mais, se calcularmos a norma da aplicação $\Lambda^p(B)$, obteremos

$$\|\Lambda^p(B)\| = s_1[B]s_2[B] \dots s_p[B]. \quad (\text{C.3})$$

Definição C.8 (Grupo Simplético). *O subconjunto das matrizes $B \in GL(2l, \mathbb{C})$ que satisfazem $B^* \mathbb{J} B = \mathbb{J}$, com*

$$\mathbb{J} := \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{bmatrix},$$

é chamado grupo simplético e denotado por $SP(l, \mathbb{C})$.

Lema C.9 (Lema IV.2.3 em [Carmona & Lacroix \[1990\]](#)). *Seja $B \in SP(l, \mathbb{C})$. Então,*

- (a) $B^* \in SP(l, \mathbb{C})$ e $\det(B) = 1$;
- (b) se λ é autovalor de B , então $\frac{1}{\lambda}$ também o é.

Apêndice D

Medidas a Valores Matriciais

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [Geszttesy & Tsekanovskii \[2004\]](#).

Definição D.1 (Função de Herglotz a valores matriciais). *Seja $Q : \mathbb{C}_+ \rightarrow M(l, \mathbb{C})$ uma função que associa a cada número complexo uma matriz $l \times l$. Q é dita uma função de Herglotz a valores matriciais se Q é analítica e $\Im[Q(z)] \geq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}_+$.*

Proposição D.2 (Regularidade de Funções Herglotz; Teorema 5.4 em [Geszttesy & Tsekanovskii \[2004\]](#)). *Se Q é uma função Herglotz a valores matriciais, então:*

(a) *cada elemento da diagonal $Q_{k,k}(z)$ é uma função Herglotz escalar;*

(b) *o limite*

$$\lim_{y \downarrow 0} Q(x \pm iy)$$

existe para κ -quase todo $x \in \mathbb{R}$;

(c) *se, para todo $1 \leq k \leq l$ e todo x em um conjunto de medida de Lebesgue positiva,*

$$\lim_{y \downarrow 0} Q_{k,k}(x \pm iy) = 0,$$

então $Q(z) \equiv P$, sendo P uma matriz auto-adjunta com todos os elementos da diagonal nulos.

Proposição D.3 (Representação de Funções de Herglotz; Teorema 5.4 em [Gesztesy & Tsekanovskii \[2004\]](#)). *Se Q é uma função Herglotz a valores matriciais, então existe uma medida a valores matriciais Ω , definida nos borelianos de \mathbb{R} , tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)} \langle \mathbf{u}, d\Omega(x)\mathbf{u} \rangle_{\mathbb{C}^l} < \infty,$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{C}$ e

$$Q(z) = C + Ez + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x-z} - \frac{x}{1+x^2} \right) d\Omega(x),$$

com $C = \Re[M(i)]$ e $E \geq 0$ dada por

$$E = \lim_{\eta \uparrow 0} \left(\frac{1}{i\eta} M(i\eta) \right).$$

Proposição D.4 (Fórmula de Inversão de Stieltjes; Teorema 5.4 em [Gesztesy & Tsekanovskii \[2004\]](#)). *Se Q é uma função de Herglotz a valores matriciais e Ω é a medida matricial correspondente, então*

$$\frac{1}{2}\Omega(\{\lambda_1\}) + \frac{1}{2}\Omega(\{\lambda_2\}) + \Omega((\{\lambda_1, \lambda_2\})) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \downarrow 0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Im[Q(x+iy)] d\kappa(x),$$

e a componente absolutamente contínua de Ω é expressa por

$$\frac{d\Omega}{d\kappa}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \downarrow 0} \Im[Q(x+iy)].$$

No caso escalar, a fórmula de inversão de Stieltjes pode ser enunciada como

Proposição D.5 (Fórmula de Inversão de Stieltjes). *Seja μ uma medida de probabilidade com momentos de todas as ordens finitos, e para $z \in \mathbb{C} \setminus [\mu]$, seja*

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z} d\mu(x)$$

a correspondente transformada de Stieljes. Então,

$$\mu((a, b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a\}) + \frac{1}{2}\mu(\{b\}) = \lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \Im[F(x + iy)] d\kappa(x).$$

Proposição D.6 (Teorema 5.5 em [Gesztesy & Tsekanovskii \[2004\]](#)). *Se Q é uma função de Herglotz a valores matriciais e Ω é a medida matricial correspondente, então, para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{cases} \lim_{y \downarrow 0} y \Re[Q(x \pm iy)] = 0, \\ \lim_{y \downarrow 0} y \Im[Q(x \pm iy)] = \Omega(\{x\}). \end{cases}$$

Proposição D.7 (Teorema 5.5 em [Gesztesy & Tsekanovskii \[2004\]](#)). *Seja Q é uma função de Herglotz a valores matriciais. Se para Lebesgue quase todo $x \in (\lambda_1, \lambda_2) \subset \mathbb{R}$,*

$$\lim_{y \downarrow 0} \Re[Q(x + iy)] = 0,$$

então Q possui continuação analítica entre \mathbb{C}_+ e \mathbb{C}_- através de (λ_1, λ_2) e

$$\lim_{y \downarrow 0} \Im[Q(x \pm iy)] > 0,$$

para todo $x \in (\lambda_1, \lambda_2)$.

É necessário caracterizar suportes para as medidas espectrais e suas componentes. Começemos com o conceito de suporte minimal:

Definição D.8 (Suporte Minimal de uma Medida). *Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ é um suporte minimal de uma medida μ se*

$$(i) \quad \mu(\mathbb{R} \setminus S) = 0,$$

$$(ii) \quad \text{Se } S_0 \text{ é subconjunto de } S \text{ com } \mu(S_0) = 0, \text{ então } \kappa(S_0) = 0.$$

A ideia de suporte minimal é fornecer um conjunto no qual a medida se concentra e simultaneamente é bem comportada em relação à medida de Lebesgue. Pode-se demonstrar que um suporte minimal de μ é uma classe de equivalência

pela relação

$$S_1 \approx S_2 \iff \kappa(S_1 \Delta S_2) = \mu(S_1 \Delta S_2) = 0,$$

em que $S_1 \Delta S_2 := (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$ é a diferença simétrica dos conjuntos S_1 e S_2 (Lema 2.20 em [Gilbert \[1984\]](#)).

Definição D.9. *Seja Q uma função de Herglotz a valores matriciais. Defina os conjuntos*

$$S_{ac,r} := \{x \in \mathbb{R}; \exists \lim_{y \downarrow 0} Q(x + iy), [\lim_{y \downarrow 0} \Im[Q(x + iy)]] = r\};$$

$$S_{ac} := \bigcup_{r=1}^l S_{ac,r};$$

$$S_{pp,r} := \{x \in \mathbb{R}; [\lim_{y \downarrow 0} yQ(x + iy)] = r\};$$

$$S_{pp} := \bigcup_{r=1}^l S_{pp,r};$$

$$S_s := \{x \in \mathbb{R}; \lim_{y \downarrow 0} \Im[[Q(x + iy)]] = \infty\};$$

$$S_{sc} := \{x \in S_s, \lim_{y \downarrow 0} y[Q(x + iy)] = 0\}.$$

Proposição D.10 (Teorema 6.1 em [Gesztesy & Tsekanovskii \[2004\]](#)). *Sejam Q uma função de Herglotz a valores matriciais e Ω a medida matricial correspondente. Então*

- (a) $S_{ac,r}$ é um suporte minimal para $\Omega_{ac,r}$;
- (b) S_{ac} é um suporte minimal para Ω_{ac} ;
- (c) $S_{pp,r}$ é um suporte minimal para $\Omega_{pp,r}$;
- (d) S_{pp} é um suporte minimal para Ω_{pp} ;
- (e) $S := S_{ac} \cup S_s$ é um suporte minimal para Ω_{pp} .

Definição D.11 (Fecho essencial de um conjunto). *Seja $B \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto da reta Lebesgue mensurável. O fecho essencial de B é definido como o conjunto*

$$\bar{B}^{ess} := \{x \in \mathbb{R}, \kappa((x - \epsilon, x + \epsilon) \cap B) > 0, \forall \epsilon > 0\},$$

onde κ é a medida de Lebesgue.

É simples demonstrar que conjunto B possui fecho essencial vazio se, e somente se, $\kappa(B) = 0$.

Apêndice E

Sistemas Dinâmicos e Cociclos

Definição E.1 (Sistema Dinâmico¹). *Sejam X um espaço topológico e G um semi-grupo. Um sistema dinâmico em X é uma aplicação contínua $\pi : X \times G \rightarrow X$ tal que*

$$(i) \quad \pi(x, 0) = x; \forall x \in X \quad (\text{propriedade de identidade}),$$

$$(ii) \quad \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s); \forall x \in X, \forall s, t \in G \quad (\text{propriedade de semi-grupo}).$$

Se G é não-enumerável, o sistema dinâmico é dito contínuo; caso G seja enumerável, o sistema é dito discreto.

Definição E.2 (Aplicação Minimal). *Seja X um espaço topológico. Uma aplicação $T : X \rightarrow X$ é dita minimal se, para todo $x \in X$,*

$$\overline{\{T^n x \mid n \in \mathbb{Z}_+\}} = X.$$

Definição E.3 (Cociclo Linear²). *Sejam $X \neq \emptyset$ um conjunto arbitrário e $T : X \rightarrow X$ uma aplicação. Um cociclo linear sobre T é uma aplicação $A : X \times \mathbb{Z} \rightarrow GL(l, \mathbb{K})$ que satisfaz, para todo $x \in X$ e todos $m, k \in \mathbb{Z}$,*

$$A(x, m + k) = A(T^k(x), m)A(x, k).$$

¹Krabs & Pickl [2010], página 1.

²Katok & Hasselblatt [1995], página 661.

Apêndice F

Teoria Ergódica

Definição F.1 (Aplicação que Preserva Medida). *Seja (X, μ) um espaço de medida. Uma aplicação $T : X \rightarrow X$ mensurável é dita uma aplicação que preserva medida se, para todo $A \subseteq X$ mensurável, $T^{-1}(A)$ é mensurável e $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.*

Proposição F.2 (Teorema Ergódico de Birkhoff¹). *Seja (X, μ) um espaço de medida. Se $T : X \rightarrow X$ é uma aplicação que preserva a medida μ e $\varphi \in L^1(X, \mu)$, então*

$$\varphi_T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(T^k x)$$

existe para μ -quase todo $x \in X$ e

$$\int_X \varphi_T d\mu = \int_X \varphi d\mu.$$

Definição F.3 (Aplicação Ergódica). *Sejam (X, μ) um espaço de medida e $T : X \rightarrow X$ uma aplicação que preserva a medida. T é dita ergódica se, para todo conjunto T -invariante $A \subset X$, ou $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.*

Proposição F.4. *Sejam (X, μ) um espaço de medida e $T : X \rightarrow X$ uma aplicação*

¹Katok & Hasselblatt [1995], página 136 e Oliveira & Viana [2014], página 67.

ergódica. Se $\mu(X) = 1$ e $\varphi \in L^1(X, \mu)$, então, para μ -quase todo $x \in X$,

$$\varphi_T(x) = \int_X \varphi d\mu.$$