

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



**CLASSIFICAÇÃO DE HIPERSUPERFÍCIES CMC DE
FRONTEIRA LIVRE EM UMA CLASSE DE DOMÍNIOS
CONFORMES A DOMÍNIOS EUCLIDIANOS**

EDNO ALAN PEREIRA
ORIENTADOR: EZEQUIEL RODRIGUES BARBOSA

BELO HORIZONTE - MG

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLASSIFICAÇÃO DE HIPERSUPERFÍCIES CMC DE FRONTEIRA
LIVRE EM UMA CLASSE DE DOMÍNIOS CONFORMES A DOMÍNIOS
EUCLIDIANOS

Tese de Doutorado submetida ao
Programa de Pós-Graduação em
Matemática, como parte dos requi-
sitos exigidos para a obtenção do
título de Doutor em Matemática.

EDNO ALAN PEREIRA
ORIENTADOR: EZEQUIEL RODRIGUES BARBOSA

BELO HORIZONTE - MG

2018

”Ao meu pai Juvenal e minha mãe Marlene”

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Deus que me provera os sentidos necessários à contemplação de toda beleza que no mundo habita.

Estou realizando um sonho que sempre existiu em mim, antes mesmo de eu saber do que se tratava. A todos aqueles que torceram e de alguma forma contribuíram para que eu alcançasse esse objetivo, deixo o meu profundo sentimento de gratidão.

A toda minha família, de onde o incentivo sempre foi algo do qual nunca tive carência, em especial meu pai Juvenal, minha mãe Marlene, minhas irmãs Ediane e Jéssica, meus irmãos Jerlis, Esrom e Daniel. Obrigado pelo afeto tão necessário para manter o foco e a perseverança na caminhada rumo aos objetivos.

À minha amada esposa Dafne pelo companherismo, paciência e carinho. Por todo tempo caminhamos juntos, gozando da cumplicidade que a sorte do destino realizou em nós.

Ao meu sogro Marcos, minha sogra Rosângela e meus cunhados Débora e Matheus. Obrigado por todo carinho e pelos momentos divertidos que tanto recarregavam as energias, em especial, nossos passeios na Serra do Cipó.

Ao Celso Viana, por quem cultivo uma longa amizade. Nossas discussões sobre matemática sempre foram muito proveitosas.

A todos os meus professores que contribuíram para minha formação desde as séries iniciais.

Ao departamento de matemática da UFMG por toda estrutura que tive durante o mestrado e doutorado. Em especial, a todos os professores com os quais tive aulas durante minha formação.

Às secretárias Andrea e Kelly pela disposição e prestatividade nos momentos que precisei.

Ao professor Rosivaldo pelo incentivo e apoio durante a minha graduação. Sou muito grato a todo direcionamento que tive e tenho profunda admiração pelo seu trabalho e dedicação em preparar e encaminhar alunos da Unimontes a outras instituições.

Ao professor Ezequiel pela amizade e confiança em mim depositada. Foi através da sua valiosa orientação que conheci o caminho de aprender e produzir matemática. Entretanto, nossas conversas ensinou-me muito mais que isso através de sua integridade, ética e conduta profissional. Sua pessoa inspira o conceito de grandeza como ser humano.

Aos professores Feliciano Vitória, Marcos Petrúcio, Susana Fornari, Rosivaldo Gonçalves e Emerson Abreu por aceitarem compor a banca de defesa. Muito obrigado pelo tempo dedicado a estudar nossos resultados e pelas valiosas sugestões de mudanças nos textos.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nessa tese, exploramos as subvariedades compactas, orientáveis, CMC e de fronteira livre $\Sigma^k \hookrightarrow (\Omega^{n+1}, \bar{g})$ com $k \leq n$, em que Ω^{n+1} é uma bola euclidiana \mathbb{B}_r^{n+1} ou um anel $\mathcal{A}(r_1, r_2) := \mathbb{B}_{r_2}^{n+1} \setminus \mathbb{B}_{r_1}^{n+1}$ e $\bar{g} := \rho^2 \langle \cdot, \cdot \rangle$, onde ρ é uma função radial suave em Ω . Assim, obtemos vários resultados de classificação em três casos:

1. $\Sigma^2 \hookrightarrow \mathbb{B}_1^3$, em que \mathbb{B}_1^3 denota a bola euclidiana tridimensional de raio unitário,
2. $\Sigma^k \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$, em que Σ^k é uma subvariedade mínima,
3. $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$, em que Σ^n é uma hipersuperfície mínima.

Nos itens acima, mostramos que sob uma determinada condição de pinching na segunda forma fundamental da imersão, ou no tensor de umbilicidade no caso 1, as subvariedades são de determinados tipos topológicos, que em alguns casos, podem ser classificadas de forma mais rígida, isto é, podemos obter propriedades geométricas adicionais.

Palavras-chaves: Hipersuperfícies mínimas de fronteira livre; Resultados do tipo gap; Superfícies de Delaunay.

Abstract

In this thesis we explored the compact, orientable and CMC free boundary submanifolds $\Sigma^k \hookrightarrow (\Omega^{n+1}, \bar{g})$ with $k \leq n$, where Ω^{n+1} is a euclidean ball \mathbb{B}_r^{n+1} or an annulus $\mathcal{A}(r_1, r_2) := \mathbb{B}_{r_2}^{n+1} \setminus \mathbb{B}_{r_1}^{n+1}$ and $\bar{g} := \rho^2 \langle \cdot, \cdot \rangle$, where ρ is a smooth radial function in Ω . Thus, we obtain several classification results in three cases:

1. $\Sigma^2 \hookrightarrow \mathbb{B}_1^3$, where \mathbb{B}_1^3 denotes the three dimensional euclidean ball of unit radius.
2. $\Sigma^k \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$, where Σ^k is a minimal submanifold,
3. $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$, where Σ^n is a minimal hypersurface.

In the above items we show that under appropriated pinching condition in the second fundamental form of the immersion, or in umbilicity tensor to first case, the submanifolds are of determined topological types and in some cases, we obtain rigidity, is that, we can obtain more geometric properties.

Keywords: Free boundary minimal hypersurfaces; Gap results; Delaunay surfaces.

Sumário

1	Preliminares	15
1.1	Conceitos iniciais	15
1.2	Geometria das subvariedades	16
1.3	Formulação do problema de fronteira livre	19
1.4	Métricas conformes	20
2	Resultados de classificação via existência de uma função convexa	33
2.1	Superfícies CMC de fronteira livre na bola euclidiana \mathbb{B}_1^3	33
2.2	Subvariedades mínimas de fronteira livre em uma classe de variedades conforme a bola euclidiana $\mathbb{B}_r^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$	48
3	Classificação via condição de gap na segunda forma fundamental	64
3.1	Condição de gap para $ A ^2$ em hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em uma classe de variedades conforme à \mathbb{B}_r^{n+1}	64
3.2	Resultados de gap para $ A ^2$ em hipersuperfícies mínimas de fronteira livre imersas em um domínio anelar	73
4	Warped products	83
4.1	Métrica warped	83
4.2	Resultados de gap em warped products	86
	Referências Bibliográficas	94

Introdução

Considere uma variedade riemanniana (M^{n+1}, g) , um domínio $\Omega \subset M$ com $\partial\Omega$ suave e uma subvariedade $\Sigma^k \hookrightarrow \Omega$ (com $\text{int}(\Sigma) \subset \text{int}(\Omega)$ e $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$) imersa isometricamente em M^{n+1} , em que $k \leq n$. Dizemos que Σ^k é CMC de fronteira livre quando o seu vetor curvatura média, denotado por \vec{H} , tem comprimento constante e Σ^k intersecta $\partial\Omega$ ortogonalmente. Se $\vec{H} \equiv 0$, dizemos que Σ^k é uma subvariedade mínima de fronteira livre. A primeira fórmula de variação diz que uma subvariedade mínima de fronteira livre é um ponto crítico do funcional $t \rightarrow |\Sigma_t|$, em que $|\Sigma_t|$ denota o volume k -dimensional induzido por uma variação admissível $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \Omega$ qualquer. Para o caso em que $k = n$, uma subvariedade CMC de fronteira livre, não necessariamente mínima, é um ponto crítico do funcional $t \rightarrow |\Sigma_t|$ para variações admissíveis que preservam volume (veja sec. 1.3).

Nos últimos anos, muitos autores tem mostrado interesse no estudo de subvariedades CMC de fronteira livre tendo como principal foco os resultados de existência e classificação. Por exemplo, podemos citar os trabalhos de Struwe [30] sobre existência de discos mínimos de fronteira livre em uma classe de domínios em \mathbb{R}^3 , ou citamos também os trabalhos de Máximo-Nunes-Smith [26] sobre a existência de superfícies mínimas de fronteira livre com topologia de um anel e imersas em domínios estritamente convexos do espaço \mathbb{R}^3 . Já o clássico teorema de Nitsche [28] classifica um disco CMC de fronteira livre na bola euclidiana tridimensional como sendo totalmente umbílico. Uma versão desse teorema para superfícies CMC de fronteira livre em bolas do espaço forma tridimensional foi dada por Ros-Souam em [29].

Recentemente, o interesse pelo estudo das superfícies mínimas de fronteira livre tem aumentado, uma vez que Fraser-Schoen estabeleceram uma relação entre métricas que maximizam o primeiro autovalor de Steklov em uma superfície com bordo e as superfícies mínimas de fronteira livre na bola euclidiana tridimensional [18], [20] e [19].

Considere a variedade $(\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$, em que \mathbb{B}_r^{n+1} denota a bola euclidiana de raio $r \leq \infty$ e $\bar{g} = e^{2h} \langle, \rangle$ é uma métrica conforme à métrica euclidiana com $h(x) = u(|x|^2)$ para alguma função $u : [0, r^2] \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Seja $\mathcal{A}(r_1, r_2) := \mathbb{B}_{r_2}^{n+1} \setminus \mathbb{B}_{r_1}^{n+1}$ ($r_1 < r_2 < r$) o anel euclidiano

$(n + 1)$ -dimensional, e de maneira análoga, considere também a variedade $(\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$. O principal objetivo desse trabalho diz respeito ao estudo de subvariedades CMC de fronteira livre em três casos essencialmente;

- i) $\Sigma^2 \hookrightarrow \mathbb{B}_1^3$, em que \mathbb{B}_1^3 denota a bola euclidiana tridimensional de raio unitário,
- ii) $\Sigma^k \hookrightarrow (\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}, \bar{g})$ ($r_0 < r$), em que Σ^k é uma subvariedade mínima,
- iii) $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$, em que Σ^n é uma hipersuperfície mínima.

Nos três casos supracitados, obtemos resultados de classificação sob uma condição de pinching no quadrado da norma do tensor de umbilicidade das respectivas imersões, como deixaremos claro a seguir.

Resultados de classificação via existência de uma função convexa

O trabalho pioneiro que serviu de motivação aos nossos resultados é teorema dado a seguir.

Teorema 0.1 (Ambrozio-Nunes'2016,[3]). *Seja Σ^2 uma superfície mínima compacta de fronteira livre na bola euclidiana \mathbb{B}_1^3 . Assuma que em todos dos pontos $x \in \Sigma^2$,*

$$|A|^2(x) \langle \vec{x}, N(x) \rangle^2 \leq 2, \tag{1}$$

em que $N(x)$ denota o vetor normal unitário em um ponto $x \in \Sigma$ e A denota a segunda forma fundamental de Σ . Então, uma das seguintes situações deve ocorrer;

- i) $|A|^2(x) \langle \vec{x}, N(x) \rangle^2 \equiv 0$ e Σ é um disco equatorial plano,
- ii) ou $|A|^2(x) \langle \vec{x}, N(x) \rangle^2 = 2$ em algum ponto $p \in \Sigma$ e Σ é o catenóide crítico.

O ponto chave na demonstração do teorema acima consiste no fato de que a hipótese (1) garante que para $f(x) = |x|^2$, temos $\text{Hess}_\Sigma f \geq 0$ condição à qual, impõe restrições topológicas sobre o conjunto $C = \{p \in \Sigma; |p| = \min_\Sigma f(x) = \frac{|x|^2}{2}\}$ que são então traduzidas em propriedades topológicas e geométricas para Σ .

Apesar de ter uma demonstração bem diferente, o teorema acima possui uma certa semelhança com o clássico teorema;

Teorema 0.2 (Chern-do Carmo-Kobayashi'1970, [14]). *Seja $\Gamma^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície mínima fechada imersa isometricamente na esfera unitária. Suponha que a segunda forma fundamental A_1 de Γ^{n-1} satisfaça*

$$|A_1|^2 \leq n - 1.$$

Então, ocorre uma das duas situações;

- 1) $|A_1|^2 \equiv 0$ e Γ^{n-1} é um equador \mathbb{S}^{n-1} de \mathbb{S}^n ,
- 2) ou $|A_1|^2 \equiv n-1$ e Γ^{n-1} é um toro de Clifford $\mathbb{T}_{m,n} := \mathbb{S}_{\lambda_1}^m \times \mathbb{S}_{\lambda_2}^{(n-1)-m}$, em que $\lambda_1 = \sqrt{\frac{m}{n-1}}$, $\lambda_2 = \sqrt{\frac{(n-1)-m}{n-1}}$ e $1 \leq m \leq n-2$.

Uma primeira questão interessante é saber se existe uma versão do teorema do Ambrozio-Nunes para superfícies de curvatura média constante não necessariamente mínima, já que o **Teorema 0.2** possui sua generalização como segue.

Teorema 0.3 (Alencar-do Carmo'1994, [1]). *Seja $\Gamma^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície fechada de curvatura média constante $H > 0$ imersa isometricamente na esfera unitária. Suponha que o tensor de umbilicidade $\mathring{A} = \Pi - \frac{H}{n-1}g_{\mathbb{S}^n}$ de Γ^{n-1} satisfaça*

$$|\mathring{A}|^2 \leq C(n, H),$$

em que $C(n, H)$ denota uma constante que depende apenas de n e H . Então, ocorre uma das duas situações;

- 1) $|\mathring{A}|^2 \equiv 0$ e Γ^{n-1} é totalmente umbílica em \mathbb{S}^n ,
- 2) ou $|\mathring{A}|^2 \equiv C(n, H)$ e Γ^{n-1} é um toro $\mathbb{T}_{n,H} := \mathbb{S}_{\lambda_1}^{n-2} \times \mathbb{S}_{\lambda_2}^1$, em que $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = \sqrt{1-r^2}$ e $0 < r < 1$.

Nesse sentido, obtivemos o resultado:

Teorema 0.4. *Seja $\Sigma^2 \subset \mathbb{B}_1^3$ uma superfície CMC de fronteira livre tal que a condição*

$$|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2 \tag{2}$$

seja satisfeita sobre Σ^2 . Então, uma das duas situações deve ocorrer;

- i) $|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \equiv 0$ e Σ é uma calota esférica,
- ii) ou $|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 = \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2$ em algum ponto $p \in \Sigma^2$ e Σ^2 é parte de uma superfície de Delaunay.

A **Figura 1.** dá uma descrição dos únicos tipos topológicos de superfícies CMC de fronteira livre na bola unitária euclidiana que satisfazem a condição (2). É curioso o fato de que na classe das superfícies CMC, cumprindo as condições do teorema anterior, o tensor de umbilicidade apresenta um comportamento do tipo "gap", isto é, ou Σ^2 é totalmente umbílica e nesse caso $|\mathring{A}|^2 \equiv 0$, ou então o tensor de umbilicidade cumpre $|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 = \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2$ em algum ponto $p \in \Sigma^2$ e nesse caso, Σ^2 é um anel de rotação, mais precisamente, é parte de uma superfície de Delaunay.

A prova do **Teorema 0.4** segue os mesmos passos da demonstração do teorema do Ambrozio-Nunes, entretanto, três dificuldades contornadas merecem destaque: a primeira, trata-se de encontrar corretamente a condição de gap que generaliza a condição (1); a segunda, trata-se de garantir que a condição (2) assegure que para $f(x) = |x|^2$, $\text{Hess}_\Sigma f \geq 0$. Para isso, precisamos usar que os pontos umbílicos de Σ^2 são isolados, propriedade a qual, obtém-se explorando a estrutura complexa das superfícies CMC; e por fim, a verificação de que existem porções de algumas superfícies de Delaunay que são de fronteira livre na bola unitária e que satisfazem a condição (2), constitui uma parte significativa e não trivial do teorema.

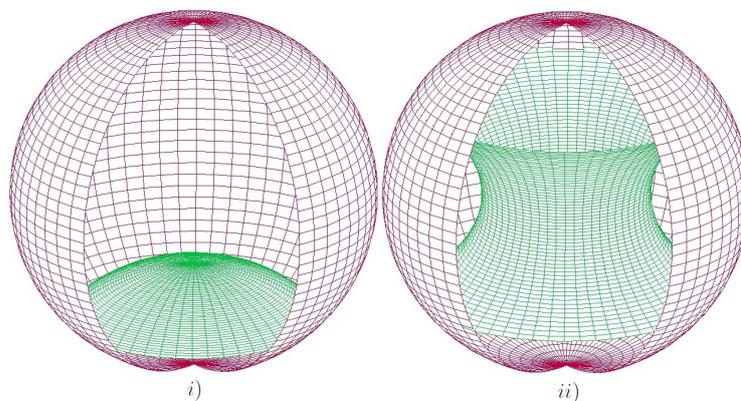


Figura 1: *i)* calota esférica; *ii)* anel de revolução CMC.

Os autores Li-Xiong em [23] provaram que o teorema do Ambrozio-Nunes também permanece válido para o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 e semi esfera \mathbb{S}_+^3 . Entretanto, os mesmos usaram uma abordagem ligeiramente diferente ao considerar tais espaços como warped products descritos a seguir.

Considere a variedade produto $M^3 = [0, R_\infty) \times \mathbb{S}^2$ com uma métrica warped $\langle \cdot, \cdot \rangle = dr^2 + \lambda(r)^2 g_{\mathbb{S}^2}$. Assim, M^3 é o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 ou o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 para $\lambda(r) = r$ e $\lambda(r) = \sinh(r)$ com $R_\infty = \infty$, respectivamente, ou M^3 é a semi-esfera \mathbb{S}_+^3 para $\lambda(r) = \sin(r)$ e $R_\infty = \frac{\pi}{2}$. Considerando então o campo vetorial $X = \lambda(r)\partial_r$, o teorema é enunciado como:

Teorema 0.5 (Li-Xiong'2017, [23]). *Seja Σ^2 uma superfície mínima compacta de fronteira livre em uma bola geodésica $B_R \subset M^3$ com raio $R < R_\infty$. Suponha que para todo $x \in \Sigma$ temos*

$$\frac{|A|^2 \langle X, N(x) \rangle^2}{(\lambda')^2} \leq 2, \quad (3)$$

em que $N(x)$ denota o vetor normal unitário em um ponto $x \in \Sigma$ e A denota a segunda forma fundamental de Σ . Então,

- 1) $|A|^2 \langle X, N(x) \rangle^2 \equiv 0$ e Σ é um disco totalmente geodésico,

2) ou $\frac{|A|^2 \langle X, N(x) \rangle^2}{(\lambda')^2} = 2$ em algum ponto $p \in \Sigma$ e Σ é um anel rotacional.

A abordagem dada por Li-Xiong ao teorema acima nos faz intuir que o resultado, na verdade, pode ser válido para uma classe maior de espaços que tem \mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 e \mathbb{S}_+^3 como casos particulares. Nosso próximo resultado aponta exatamente nessa direção. Mas antes, fixaremos uma breve notação.

Como veremos no capítulo preliminar, o campo posição \vec{x} em $(\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ é conforme cuja função potencial é dada por $\sigma(x) = 1 + 2u'(|x|^2)|x|^2$, isto é, a derivada de Lie da métrica \bar{g} na direção do campo \vec{x} cumpre

$$\mathcal{L}_{\vec{x}}\bar{g} = 2\sigma\bar{g}.$$

Além disso, se $\bar{\nabla}$ denota a conexão riemanniana de $(\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$, então

$$\bar{\nabla}_Y \vec{x} = \sigma Y \tag{4}$$

para qualquer vetor $Y \in T_p(\mathbb{B}_r^{n+1})$ e qualquer $p \in \mathbb{B}_r^{n+1}$. Observe que $\sigma(\vec{0}) = 1 > 0$, e por continuidade, existe sempre um $r_0 > 0$ tal que $\sigma > 0$ em $\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}$. A propriedade da função potencial do campo conforme \vec{x} ser positiva juntamente com (4) é suficiente pra demonstrar o próximo lema que certamente é o ingrediente crucial que nos permitiu generalizar os **Teoremas 0.1** e **0.5** acima.

Lema 0.6. *Seja $\Sigma^k \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ ($k \leq n$) uma subvariedade mínima suave, em que r é tal que a função potencial $\sigma : \mathbb{B}_r^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ do campo \vec{x} cumpre $\sigma > 0$. Suponha que a condição*

$$\frac{1}{\sigma^2} |B|^2 |\vec{x}^\perp|_{\bar{g}}^2 \leq \frac{k}{k-1} \tag{5}$$

seja satisfeita para todo ponto $x \in \Sigma$, em que $|\vec{x}^\perp|_{\bar{g}}^2 = \bar{g}(\vec{x}^\perp, \vec{x}^\perp)$ e B denota a segunda forma fundamental de Σ^k . Então, existe uma função $\Psi : \Sigma^k \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Hess}_\Sigma \Psi$ é positivo semidefinido, isto é, $\text{Hess}_\Sigma \Psi(p)(Y, Y) \geq 0$ para qualquer $p \in \Sigma$ e $Y \in T_p \Sigma$.

Para o caso de codimensão 1, a condição (5) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\sigma^2} |A|^2 \bar{g}(\vec{x}, \bar{N})^2 \leq \frac{n}{n-1}, \tag{6}$$

em que \bar{N} denota o vetor normal a Σ^k .

No caso $k = n = 2$, o lema acima nos permite obter a generalização dos **Teoremas 0.1** e **0.5** como segue.

Teorema 0.7. *Considere $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ tal que a função potencial $\sigma : \mathbb{B}_r^3 \rightarrow \mathbb{R}$ do campo \vec{x} cumpra $\sigma > 0$. Seja $\Sigma^2 \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ uma imersão de uma superfície mínima compacta orientável com bordo estritamente convexo em que a condição*

$$\frac{1}{\sigma^2} |A|^2 \bar{g}(\vec{x}, \bar{N})^2 \leq 2 \tag{7}$$

seja satisfeita sobre Σ . Então, uma das duas situações deve ocorrer;

- i)* Σ tem a topologia de um disco,
- ii)* ou Σ é de rotação e tem topologia não trivial.

A prova do resultado acima segue os mesmos passos da demonstração do teorema do Ambrozio-Nunes e Li-Xiong, mas novamente, algumas dificuldades contornadas merecem destaque: a primeira, trata-se de encontrar corretamente a condição de gap que generaliza as condições (1) e (3) para o espaço geral aqui tratado de forma que seja garantido que $\text{Hess}_\Sigma \Psi \geq 0$ para alguma função Ψ adequada, o que é essencialmente o conteúdo do **Lema 0.6**; a segunda, diz respeito ao fato de que a classificação obtida no item *ii)* segue uma abordagem diferente da usada por Li-Xiong como ficará claro; e por fim, a construção de modelos de superfícies do tipo descrito em *i)* e que satisfaz a condição (7) é, de certa forma, imediato. Porém, o caso *ii)* trata-se de um exemplo importante e não trivial para o teorema. Para isso, escolhemos o espaço gaussiano $(\mathbb{R}^3, e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4}} \langle, \rangle)$ onde verificamos que existem superfícies de revolução com bordo estritamente convexo em uma bola $(\mathbb{B}_{r_0}^3, e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4}} \langle, \rangle)$ para algum r_0 adequado e que satisfaz a condição de gap (7).

Observe que apenas uma classificação topológica é obtida no item *i)*. Isso ocorre porque no espaço aqui trabalhado não sabemos se vale um análogo do teorema de Nitsche [28] ou sua extensão [29], que no caso dos **Teoremas 0.1** e **0.5**, permitiu concluir que se Σ^2 é um disco mínimo de fronteira livre, então é totalmente geodésico. Entretanto, ainda conseguimos uma rigidez geométrica no item *ii)* se comparado com o caso de dimensão alta tratada nos teoremas seguintes como ficará evidente. Isso porque usamos aqui um resultado do Cheng [13] que dá informação sobre a distribuição dos pontos críticos sobre linhas nodais de funções que são soluções de certas EDP's, e tal resultado vale apenas para superfícies em variedades tridimensionais. Como exemplo particularmente interessante para o teorema anterior, verificamos que existe r_0 tal que a porção do Toro de Angenet [4] intersectando $(\mathbb{B}_{r_0}^3, e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4}} \langle, \rangle)$, é um anel de revolução que satisfaz a condição de (7).

Os autores Ambrosio-Nunes questionaram em seu trabalho [3] se o **Teorema 0.1** poderia ser generalizado em algum sentido para o caso de uma hipersuperfície mínima de fronteira livre $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{B}_1^{n+1}$ e também para o caso de uma subvariedade $\Sigma^k \hookrightarrow \mathbb{B}_1^{n+1}$ de codimensão alta. Nessa direção, Barbosa-Cavalcante-Viana obtiveram em [6] o seguinte resultado:

Teorema 0.8 (Barbosa-Cavalcante-Viana'2017, [6]). *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima de fronteira livre em \mathbb{B}_1^{n+1} , em que $n \geq 3$. Suponha que condição*

$$|A|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{n}{n-1} \tag{8}$$

seja satisfeita sobre Σ^n . Então, uma das duas situações deve ocorrer;

- 1) Σ^n é difeomorfa a um disco n -dimensional \mathbb{D}^n ,
- 2) ou Σ^n é difeomorfa a uma variedade produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{n-1}$ e o conjunto $\mathcal{C}(\Sigma) := \{x \in \Sigma : |x| = d(0, \Sigma)\}$ é um grande círculo em $\mathbb{S}_{d(0, \Sigma)}^n$ sobre o qual ocorre a igualdade em (8). E além disso, $|A|^2$ é constante sobre $\mathcal{C}(\Sigma)$ possuindo apenas duas curvaturas principais distintas: $-\frac{1}{d(0, \Sigma)}$ e $\frac{1}{(n-1)d(0, \Sigma)}$.

Assim como Li-Xiong [23] generalizaram o **Teorema 0.1** de Ambrozio-Nunes [3], obtemos uma generalização do **Teorema 0.8** de Barbosa-Cavalcante-Viana como segue:

Teorema 0.9. *Considere $(\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ tal que a função potencial $\sigma : \mathbb{B}_r^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ do campo \vec{x} cumpra $\sigma > 0$. Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ (para $n \geq 3$) uma imersão isométrica de uma subvariedade mínima de fronteira livre. Suponha que condição*

$$\frac{1}{\sigma^2} |A|^2 \bar{g}(\vec{x}, \bar{N})^2 \leq \frac{n}{n-1} \quad (9)$$

seja satisfeita sobre Σ^n . Então, uma das duas situações deve ocorrer;

- 1) Σ^n é difeomorfa a um disco n -dimensional \mathbb{D}^n ,
- 2) ou Σ^n é difeomorfa a uma variedade produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{n-1}$ e o conjunto \mathcal{C} dado por $\mathcal{C} = \{p \in \Sigma^k; \Psi(p) = \min_{\Sigma} \Psi(x)\}$ é um grande círculo $\gamma \subset \mathbb{S}_{r_0}^n$ (r_0) sobre o qual ocorre a igualdade em (9). E além disso, $|A|^2$ é constante sobre \mathcal{C} possuindo apenas duas curvaturas principais distintas: $-\frac{\alpha}{r_0}$ e $\frac{\alpha}{(n-1)r_0}$, em que $\alpha = \frac{\sigma|_{\gamma}}{e^{u(r_0^2)}}$.

Resultados de classificação em espaços de Hadamard

Em uma bola geodésica

Em [7], Batista-Mirandola-Vitório obtiveram como generalização ao trabalho de Carron [10], a seguinte desigualdade (para versão mais geral, veja ref.):

Teorema 0.10 (Mirandola-Batista-Vitório'2017, [7]). *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade mínima, compacta e com bordo em uma variedade de Hadamard \bar{M} . Seja $\bar{r} = d_{\bar{M}}(\cdot, \xi)$ a distância em \bar{M} a um ponto fixado $\xi \in \bar{M}$. Considere também $1 \leq p < \infty$ e $-\infty < \gamma < k$. Então, para toda função $0 \leq \psi \in C^1(M)$ vale,*

$$\frac{(n-\gamma)^2}{p^p} \int_{\Sigma} \frac{\psi^p}{\bar{r}^{\gamma}} + \frac{\gamma(n-\gamma)^{p-1}}{p^{p-1}} \int_{\Sigma} \frac{\psi^p}{\bar{r}^{\gamma}} |\bar{\nabla} \bar{r}^{\perp}|^2 \leq \int_{\Sigma} \frac{|\nabla^{\Sigma} \psi|^p}{\bar{r}^{\gamma-p}} + \frac{(n-\gamma)^{p-1}}{p^{p-1}} \int_{\partial \Sigma} \frac{\psi^p}{\bar{r}^{\gamma-1}} \langle \bar{\nabla} \bar{r}, \nu \rangle \quad (10)$$

e além disso se $p > 1$ a igualdade ocorre se e somente se a função ψ for identicamente nula em Σ .

Seja $(\mathbb{B}_{\bar{r}}^{n+1}, \bar{g})$, em que $\bar{g} = e^{2u(|x|^2)} \langle \cdot, \cdot \rangle$ como enunciamos no início, e de maneira que a função u cumpra em seu domínio de definição;

$$H.1) \quad u''(|x|^2) - u'(|x|^2)^2 \leq 0,$$

$$H.2) \quad -u''(|x|^2) |\bar{x}|^2 - u'(|x|^2) \leq 0.$$

As condições $H.1)$ e $H.2)$ garantem que a variedade $(\mathbb{B}_{\bar{r}}^{n+1}, \bar{g})$ seja um espaço de Hadamard, isto é, possua curvatura seccional não positiva. Portanto, é um espaço onde o **Teorema 0.10** pode ser explorado.

Observe que se $x \in (\mathbb{B}_{\bar{r}}^{n+1}, \bar{g})$, então o comprimento \bar{r} da geodésica radial ligando a origem $\vec{0}$ ao ponto x com respeito à métrica \bar{g} é dado por

$$\bar{r} = rI(r) \quad , \text{ em que } r = |x|$$

$$e \quad I(r) = \int_0^1 e^{u(t^2 r^2)} dt.$$

Assumindo então que $(\mathbb{B}_{\bar{r}}^{n+1}, \bar{g})$ é uma variedade em que as condições $H.1)$ e $H.2)$ são satisfeitas, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 0.11. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}, \bar{g})$ ($r_0 < \bar{r}$) uma hipersuperfície mínima de fronteira livre que cumpre a condição*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4\bar{r}_0^2}. \tag{11}$$

Então, Σ^n é um disco totalmente geodésico passando pela origem.

A demonstração do resultado acima é obtida com base no seguinte roteiro.

Sob a condição de pinching

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4\bar{r}_0^2} \tag{12}$$

no comprimento da segunda forma fundamental de Σ^n , o **Teorema 0.10** garante que o primeiro autovalor λ_1 do problema:

$$(*) \quad \begin{cases} L[v] := \Delta v + |A|^2 v + qv & = -\lambda v & \Sigma \\ v & = 0 & \partial\Sigma \end{cases}$$

é estritamente positivo, onde $q : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua não positiva qualquer. A propriedade conforme do campo \bar{x} e a condição de Σ^n ser de fronteira livre garante que a função suporte $v = \bar{g}(\bar{x}, \bar{N})$ de Σ^n seja solução de (*) para $\lambda = 0$ e

$$q := \bar{Ric}(\bar{N}, \bar{N}) + 4ne^{-2h}[u''(|x|^2) |x|^2 + u'(|x|^2)],$$

em que $\bar{Ric}(\bar{N}, \bar{N})$ denota a curvatura de Ricci de $(\mathbb{B}_{\bar{r}}^{n+1}, \bar{g})$ na direção do vetor \bar{N} normal à Σ^n . Entretanto, a condição $H.1)$ sobre a função u garante que $q \leq 0$. Logo, o fato do primeiro autovalor λ_1 do problema (*) ser estritamente positivo força a função v ser

identicamente nula, isto é, Σ^n é tangente ao campo posição. Usando o fato que a métrica \bar{g} é obtida por uma mudança conforme na métrica euclidiana, concluiremos que Σ^n também é uma hipersuperfície mínima de fronteira livre em $(\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}, \langle, \rangle)$, cuja função suporte $v_\delta = \langle \vec{x}, N \rangle$ também é identicamente nula. Assim, Σ^n necessariamente é um disco totalmente geodésico passando pela origem.

De maneira inteiramente análoga ao **Teorema 0.11**, obtemos também o seguinte resultado:

Teorema 0.12. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}, \bar{g})$ ($r_0 < \tilde{r}$ e $n \geq 3$) uma hipersuperfície mínima de fronteira livre que cumpre*

$$|A|^2 \leq \frac{(n-2)^2}{4\bar{r}^2} \quad (13)$$

em todo ponto $x \in \Sigma \setminus \vec{0}$, em que $\bar{r} = \bar{r}(x)$ é a distância em $(\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}, \bar{g})$ de um ponto $x \in \Sigma^n$ até o ponto $\vec{0}$. Então, Σ^n é um disco totalmente geodésico passando pela origem.

Observe que a hipótese (13) do teorema anterior permite (quando $n \geq 3$) que $|A|^2$ fique arbitrariamente grande quando avaliado em pontos próximos do centro da bola B_{r_0} , enquanto que no **Teorema 0.11** exigimos um controle mais rígido sobre o comprimento total de $|A|^2$.

Em um domínio anelar

Seja $(\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ a bola euclidiana com uma métrica conforme à métrica canônica dada por $\bar{g} = e^{2u(|x|^2)} \langle, \rangle$, em que u satisfaz as condições H.1) e H.2). Para $r_1 < r_2 < r$, considere o anel $(n+1)$ -dimensional $(\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$. Quando quisermos enfatizar que a métrica \bar{g} é a canônica escreveremos apenas $\mathcal{A}(r_1, r_2)$. O principal teorema obtido nesse contexto é enunciado como segue.

Teorema 0.13. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ uma imersão de uma hipersuperfície mínima de fronteira livre. Suponha que*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4\bar{r}_2^2}. \quad (14)$$

Então, Σ^n é tangente ao campo posição e além disso, $\partial\Sigma$ intersecta as duas componentes conexas de $\partial\mathcal{A}(\bar{r}_1, \bar{r}_2)$.

Uma primeira observação interessante com respeito ao teorema acima é que a condição (14) independe de r_1 .

Procedemos de maneira semelhante ao **Teorema 0.11** para concluir que a hipótese (14) no **Teorema 0.13** garante que a função suporte $v = \bar{g}(\vec{x}, \bar{N})$ é identicamente nula sobre Σ^n . Se considerarmos Σ^n munida da métrica euclidiana, isto é, $\Sigma_\delta^n := \Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$ cuja

função suporte será denotada por $v_\delta = \langle \vec{x}, N \rangle$, temos que $v \equiv 0 \Rightarrow v_\delta \equiv 0$. E além disso, a expressão

$$\bar{k}_i = e^{-h} (k_i - N(h)),$$

que relaciona as curvaturas principais \bar{k}_i de Σ^n com as curvaturas principais k_i de Σ_δ^n , garante que $\Sigma_\delta^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$ é também uma hipersuperfície mínima de fronteira livre. Devemos então estudar esse caso inicialmente. Observe que aqui não podemos concluir imediatamente que Σ_δ^n é totalmente geodésica, já que $v_\delta \equiv 0$ diz apenas que Σ_δ^n está contida em algum cone mínimo com vértice na origem. Denote então por A_δ a segunda forma fundamental da imersão $\Sigma_\delta^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$. Se o cone suporte de Σ_δ^n não é totalmente geodésico, isto é, possui uma singularidade no vértice, devemos esperar que $|A_\delta(x)|^2$ fique arbitrariamente grande se x estiver muito próximo da origem. Isso sugere a necessidade de uma condição de distanciamento entre os raios para que possamos obter alguma classificação rígida.

Nesse sentido, obtemos o seguinte corolário do **Teorema 0.13**:

Corolário 1. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$ uma imersão de uma hipersuperfície mínima de fronteira livre em um anel euclidiano $(n+1)$ -dimensional cuja segunda forma fundamental é denotada por A . Suponha que*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4r_2^2} \tag{15}$$

sobre Σ^n . Então,

- i) Se $n = 2$, então $\Sigma^2 \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$ é um anel totalmente geodésico.
- ii) Se $n \geq 3$ e $r_1^2 < \frac{4(n-1)}{n^2} r_2^2$, então $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$ é um anel totalmente geodésico.
- iii) Se $n \geq 3$ e $r_1^2 = \frac{4(n-1)}{n^2} r_2^2$, então ou $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$ é um anel totalmente geodésico ou Σ^n é um tronco de cone cujo cone suporte é tomado sobre um toro de Clifford em \mathbb{S}^n .

É curioso o fato de termos um gap para o comprimento da segunda forma fundamental no item *iii*), isto é, ou $|A|^2 \equiv 0$ e Σ^n é um anel n -dimensional, ou ocorre a igualdade em (15) para algum ponto e conseqüentemente a hipersuperfície é topologicamente um produto $[r_1, r_2] \times \mathbb{T}$, onde \mathbb{T} (exem. 3.14) é um toro de Clifford em \mathbb{S}^n .

A observação chave na demonstração do resultado acima é que as duas componentes conexas do bordo $\partial\Sigma = \partial\Sigma_1 \cup \partial\Sigma_2$ são subvariedades mínimas de $\partial\mathcal{A}(r_1, r_2) = \mathbb{S}_{r_1}^n \cup \mathbb{S}_{r_2}^n$ com $\partial\Sigma_i \subset \mathbb{S}_{r_i}^n$ com $i = 1, 2$. Por conseguinte, a condição de pinching (15) impõe uma limitação no comprimento da segunda forma fundamental de $\partial\Sigma_i$ com subvariedade mínima de $\mathbb{S}_{r_i}^n$, limitação a qual, dependerá explicitamente da distância entre os raios r_1 e r_2 . Isso nos deixa em plenas condições de invocar o teorema Chern-do Carmo-Kobayashi [14] para classificar $\partial\Sigma_i$ como sendo um equador $\mathbb{S}_{r_i}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}_{r_i}^n$ ou um toro de Clifford $\mathbb{T}_i \hookrightarrow \mathbb{S}_{r_i}^n$. Como Σ^n está

contida em um tronco de cone cujos bordos são $S_{r_1}^{n-1} \cup S_{r_2}^{n-1}$ ou $\mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$, seguem então os resultados.

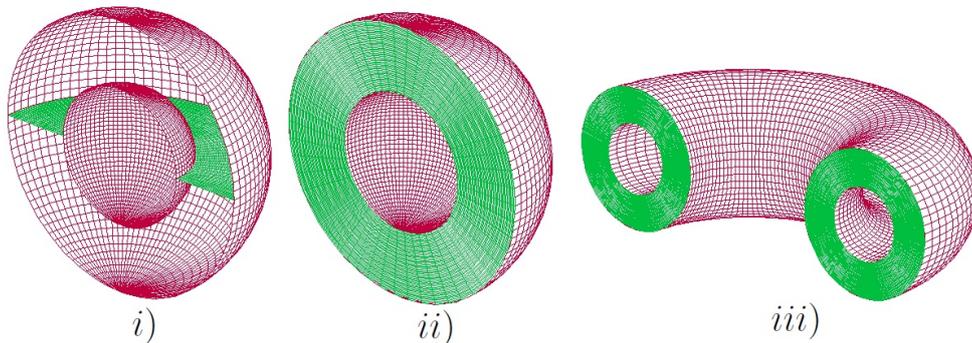


Figura 2: *i*) calota esférica; *ii*) anel de revolução CMC.

A figura acima mostra os tipos topológicos das subvariedades que ocorrem nos itens *i*), *ii*) e *iii*) do **Corolário 1**, sendo que nos itens *ii*) e *iii*) da respectiva figura, estamos considerando $n = 3$. Assim, para o caso *ii*) temos uma hipersuperfície bidimensional cujos bordos são esferas $\mathbb{S}_{r_1}^2$ e $\mathbb{S}_{r_2}^2$ e para o item *iii*) temos uma hipersuperfície tridimensional cujos bordos são toros de Clifford.

Para o caso de uma imersão $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$, o resultado segue de maneira análoga com ligeiras modificações. Diferentemente do caso euclidiano, onde a condição de distanciamento entre os raios depende apenas da dimensão n , teremos nesse caso uma condição de distanciamento entre r_1 e r_2 que dependerá, em um certo sentido, da geometria de $\mathcal{A}(r_1, r_2)$ imposta pela métrica \bar{g} como ficará claro a seguir.

Defina,

$$m_0 := \sup\{e^{2u(|x|^2)}; x \in \mathcal{A}(r_1, r_2)\}.$$

Obtemos então o resultado:

Corolário 2. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ uma imersão de uma hipersuperfície mínima de fronteira livre em um anel $(n + 1)$ -dimensional conforme ao anel Euclidiano $\mathcal{A}(r_1, r_2)$. Suponha que*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4r_2^2}. \quad (16)$$

Temos,

- 1) *Se $n = 2$, então $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ é um anel totalmente geodésico.*
- 2) *Se $\frac{n^2}{(n-1)} \leq 4 \left(\frac{I(r_2)^2}{m_0} \right)$, então $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ é um anel totalmente geodésico.*
- 3) *Se $\frac{n^2}{(n-1)} > 4 \left(\frac{I(r_2)^2}{m_0} \right)$ e $r_1^2 < \frac{4(n-1)}{n^2} \left(\frac{I(r_2)^2}{m_0} \right) r_2^2$, então $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ é um anel totalmente geodésico.*

4) Se $\frac{n^2}{(n-1)} > 4 \left(\frac{I(r_2)^2}{m_0} \right)$ e $r_1^2 = \frac{4(n-1)}{n^2} \left(\frac{I(r_2)^2}{m_0} \right) r_2^2$, então ou $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ é um anel totalmente geodésico ou Σ^n é um tronco de cone cujo cone suporte é tomado sobre um toro de Clifford em \mathbb{S}^n quando considerada como $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$.

O Exemplo [3.21] dá uma aplicação do corolário acima ao espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} .

Resultados de classificação em espaços warped product

Neste último capítulo, mostraremos que todos os resultados sobre superfícies mínimas obtidos anteriormente podem ser formulados no contexto de um espaço warped product (W^{n+1}, g^w) , em que $W^{n+1} = [0, b) \times \mathbb{S}^n$ com $(b \leq \infty)$, $g^w = ds^2 + \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n}$ sendo $g_{\mathbb{S}^n}$ a métrica canônica da esfera \mathbb{S}^n e $\lambda : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, positiva em $(0, b)$ e cumprindo as condições

$$(*) \quad \lambda(0) = 0, \quad \lambda'(0) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{d^{2k}\lambda}{ds^{2k}}(0) = 0 \quad \text{para } k \geq 1 \text{ com } k \in \mathbb{N}.$$

A justificativa à exigência acima deve-se ao fato de que sob tais condições, a métrica g^w admite uma extensão suave ao ponto $\mathcal{O} = \{0\} \times \mathbb{S}^n$ (Lema 2.10,[15]).

O ponto de partida inicial para que os resultados mencionados anteriormente sejam traduzidos à esse contexto é a observação que os espaços $(\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ e (W^{n+1}, g^w) são isométricos (Observação 4.5).

Classificação via existência de uma função convexa

Considere a bola geodésica $B_R = [0, R] \times \mathbb{S}^n \subset W^{n+1}$, em que $R < b$ é tal que $\lambda'(s) > 0 \forall s \in [0, R]$ e seja $\Sigma^n \hookrightarrow B_R$ uma hipersuperfície mínima de fronteira livre. Suponha que

$$\frac{1}{(\lambda')^2} |A|^2 g^w(X, N)^2 \leq \frac{n}{n-1}$$

sobre Σ^n , em que X é o campo conforme dado por $X = \lambda(s)\partial_s$. Então, por uma construção análoga ao **Lema 0.6** podemos mostrar a existência de uma função $\Psi : B_R \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Hess}_\Sigma \Psi \geq 0$. Sendo assim, definimos o conjunto $\mathcal{C}_w := \{ p \in \Sigma^n; \Psi(p) = \min_\Sigma \Psi \}$.

O primeiro resultado obtido, enunciado abaixo, pode ser pensado como um análogo do **Teorema 0.7** e uma generalização do **Teorema 0.5**.

Teorema 0.14. *Seja $\Sigma^2 \hookrightarrow B_R \subset W^3$ uma imersão isométrica de uma superfície mínima compacta de fronteira livre em uma bola geodésica de W^3 . Suponha que*

$$\frac{1}{(\lambda')^2} |A|^2 g^w(X, N)^2 \leq 2 \tag{17}$$

sobre Σ , em que N denota o campo normal unitário. Então, uma das seguintes situações deve ocorrer:

1. Ou Σ^2 é difeomorfa a um disco,
2. ou Σ^2 é um anel rotacional.

O análogo ao **Teorema 0.9** é obtido no contexto warped product como:

Corolário 3. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow B_R \subset W^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície mínima compacta de fronteira livre em uma bola geodésica de W^{n+1} . Suponha que*

$$\frac{1}{(\lambda')^2} |A|^2 g^w(X, N)^2 \leq \frac{n}{n-1} \quad (18)$$

sobre Σ^n , em que N denota o campo normal unitário. Então, uma das seguintes situações deve ocorrer:

1. Σ^n é difeomorfa a um disco \mathbb{D}^n ,
2. ou Σ^n é difeomorfa a uma variedade produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{n-1}$ e o conjunto \mathcal{C}_w é um grande círculo $\gamma \subset \mathbb{S}_{s_0}^n$ ($s_0 \leq R$) sobre o qual ocorre a igualdade em (2.52). E além disso, $|A|^2$ é constante sobre \mathcal{C}_w possuindo apenas duas curvaturas principais distintas: $-\frac{\lambda'(s_0)}{\lambda(s_0)}$ e $\frac{\lambda'(s_0)}{(n-1)\lambda(s_0)}$.

Resultados de classificação em espaços de Hadamard

Se a variedade $(\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ é isométrica a um warped product $W^{n+1} = [0, b) \times \mathbb{S}^n$, então as condições H.1) e H.2) que tornam $(\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ um espaço de curvatura seccional não positiva são traduzidas para a função warping $\lambda : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\tilde{H}.1) \lambda''(s)\lambda(s) + 1 \leq \lambda'(s)^2,$$

$$\tilde{H}.2) \lambda''(s) \geq 0.$$

Sob as condições acima obtemos:

Teorema 0.15. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow B_{s_0} \subset W^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima de fronteira livre que cumpra*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4s_0^2}. \quad (19)$$

Então, Σ^n é um disco totalmente geodésico passando pelo ponto $\mathcal{O} = \{0\} \times \mathbb{S}^n$.

A demonstração se faz de maneira inteiramente análoga à demonstração do **Teorema 0.11**. Semelhante ao teorema **Teorema 0.12** obtemos também:

Teorema 0.16. *Seja $n \geq 3$ e $\Sigma^n \hookrightarrow B_{s_0} \subset W^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima de fronteira livre que cumpre*

$$|A|^2 \leq \frac{(n-2)^2}{4s^2} \quad (20)$$

em todo ponto $p \in \Sigma \setminus \mathcal{O}$, em que $s = s(p)$ é tal que $0 \leq s \leq s_0$. Então, Σ^n é um disco totalmente geodésico passando pelo ponto \mathcal{O}

Definiremos um domínio anelar de um espaço warped product como $\mathcal{A}^w(s_1, s_2) := [s_1, s_2] \times \mathbb{S}^n \subset W^{n+1}$. Nesse caso, o análogo ao **Corolário 2** é enunciado como:

Teorema 0.17. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}^w(s_1, s_2)$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície mínima de fronteira livre domínio anelar de warped product. Suponha que*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4s_2^2}. \quad (21)$$

Então,

- 1)** *Se $n = 2$, então $\Sigma^2 \hookrightarrow \mathcal{A}^w(s_1, s_2)$ é um anel totalmente geodésico.*
- 2)** *Se $n \geq 3$ e $\lambda(s_1)^2 < \frac{4(n-1)}{n^2} s_2^2$, então $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}^w(s_1, s_2)$ é um anel totalmente geodésico.*
- 3)** *Se $n \geq 3$ e $\lambda(s_1)^2 = \frac{4(n-1)}{n^2} s_2^2$, então ou $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}^w(s_1, s_2)$ é um anel totalmente geodésico ou $\Sigma^n = [s_1, s_2] \times \Gamma^{n-1}$, onde Γ é um toro de Clifford $\mathbb{T}_{m,n}$.*

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo fixaremos notações e daremos uma descrição sucinta dos conceitos básicos necessários aos capítulos seguintes. Como referência padrão, citamos [16], e as demais necessárias serão inseridas no decorrer do texto.

1.1 Conceitos iniciais

Seja (M^{n+1}, g) uma variedade riemanniana com uma métrica g . O teorema de Levi-Civita garante a existência de uma única aplicação denominada conexão riemanniana de M ou derivada covariante

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (Y, X) &\longmapsto \bar{\nabla}_Y X\end{aligned}$$

cumprindo as condições:

- i) $\bar{\nabla}_{fY+hZ}X = f\bar{\nabla}_YX + h\bar{\nabla}_ZX$
- ii) $\bar{\nabla}_Y(X+Z) = \bar{\nabla}_YX + \bar{\nabla}_YZ$
- iii) $\bar{\nabla}_YfX = Y(f)X + f\bar{\nabla}_YX$
- iv) $X(g(Y, Z)) = g(\bar{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \bar{\nabla}_X Z)$
- v) $\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = [X, Y]$

para todo campo de vetores $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e para toda função f e $h \in C^\infty(M)$, em que $[X, Y] = XY - YX$ denota o colchete de Lie dos campos X e Y .

A partir da conexão $\bar{\nabla}$ podemos estudar várias propriedades geométricas e topológicas impostas pela métrica g sobre M . A principal ferramenta que permite esse estudo em suas várias vertentes é o conceito de curvatura o qual definiremos a seguir.

Definição 1.1. *Dada uma variedade riemanniana (M, g) , o tensor curvatura de M é defi-*

nido por

$$R(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z.$$

A partir do tensor curvatura definimos a curvatura seccional de M em p na direção de um plano π como

$$K(E_1, E_2) = g(R(E_1, E_2)E_2, E_1),$$

em que $\{E_1, E_2\}$ é uma base ortonormal de π .

Definição 1.2. Dada uma variedade riemanniana (M^{n+1}, g) , o tensor simétrico dado por

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^{n+1} g(R(E_i, X)Y, E_i)$$

é chamado de tensor de Ricci, em que $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e o conjunto $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ forma uma base ortonormal do espaço $T_p M$.

Fixado um vetor unitário $N \in T_p M$, escolha E_1, \dots, E_n de forma que o conjunto $\{E_1, \dots, E_n, N\}$ seja um base ortonormal para $T_p M$. Definimos a curvatura de Ricci em p na direção de N por:

$$Ric(N, N) = \sum_{i=1}^n g(R(E_i, N)N, E_i),$$

e escrevemos $Ric(N)$ para denotar $Ric(N, N)$.

Definição 1.3. Dada uma variedade riemanniana (M^{n+1}, g) , a curvatura escalar de M em p é definida por

$$R_g(p) = \sum_{i=1}^{n+1} Ric(E_i),$$

em que o conjunto $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ forma uma base ortonormal de $T_p M$.

1.2 Geometria das subvariedades

Seja $\psi : \Sigma^k \rightarrow M^{n+1}$ ($k \leq n$) uma imersão isométrica de uma variedade Σ^k em uma variedade M . Isso significa que estamos considerando Σ^k como um subconjunto de M^{n+1} cuja geometria será dada pela restrição da métrica de M^{n+1} sobre Σ^k e assim chamamos Σ^k de subvariedade de M^{n+1} . Usaremos fortemente a notação $\Sigma^k \hookrightarrow M^{n+1}$ para denotar uma imersão isométrica como descrita acima. Em cada ponto p de Σ^k o espaço tangente $T_p M$ se decompõe como

$$T_p M = T_p \Sigma \oplus (T_p \Sigma)^\perp.$$

A conexão riemanniana de Σ^k com respeito à métrica induzida de M^{n+1} é dada por

$$\nabla_Y X = (\bar{\nabla}_Y X)^\top,$$

em que $X, Y \in T_p \Sigma$.

Um conceito importante associado à geometria de Σ^k , induzida pela geometria de (M^{n+1}, g) , é o da segunda forma fundamental dada a seguir.

Definição 1.4. *Seja $\Sigma^k \hookrightarrow M^{n+1}$ uma subvariedade de M^{n+1} . A segunda forma fundamental de Σ^k em M^{n+1} é uma aplicação bilinear simétrica definida por*

$$B(X, Y) := (\bar{\nabla}_X Y)^\perp = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

Em um ponto $p \in \Sigma^k$, escolha um vetor normal unitário $N \in (T_p \Sigma)^\perp$. Podemos então definir uma forma bilinear simétrica por

$$\Pi_N(X, Y) = g(B(X, Y), N),$$

à qual está associada a uma aplicação linear auto adjunta

$$A_N : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$$

que cumpre $g(A_N(X), Y) = g(B(X, Y), N)$. A Equação de Weingarten relaciona a forma bilinear Π_N com a derivada covariante através da expressão:

$$\Pi_N(X, Y) = -g(\bar{\nabla}_X N, Y).$$

Decorre então que a aplicação A é dada por

$$A_N(X) = -(\bar{\nabla}_X N)^\top.$$

Observação 1.5. *Escolhendo um vetor normal unitário $N \in (T_p \Sigma)^\perp$, as aplicações A_N e Π_N são chamadas de segunda forma fundamental de Σ^k segundo o vetor normal N . Quando $k = n$, existe apenas uma escolha (a menos de sinal) para N , e assim, escreveremos apenas A e Π para denotar A_N e Π_N respectivamente. Além disso, usaremos a expressão segunda forma fundamental de Σ^k para se referir a qualquer uma das aplicações A , Π ou B .*

Dado um ponto $p \in \Sigma^k$ e um plano π gerado por vetores ortonormais $\{E_1, E_2\}$, as curvaturas seccionais intrínsecas de Σ^k e M^{n+1} na direção de π são relacionadas pela segunda forma fundamental através da Equação de Gauss:

$$K_M(\pi) - K_\Sigma(\pi) = |B(e_1, e_2)|^2 - g(B(e_1, e_1), B(e_1, e_1)).$$

Seja $\Sigma^k \hookrightarrow M^{n+1}$ e $\{E_1, \dots, E_k\}$ uma base ortonormal de $T_p\Sigma$. Definimos o vetor curvatura média de Σ^k em p por,

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^n B(E_i, E_i)$$

e o quadrado da norma da segunda forma fundamental por,

$$|B|^2 = \sum_{i,j=1}^k |B(E_i, E_j)|^2.$$

Consideremos agora uma imersão $\Sigma^k \hookrightarrow M^{n+1}$ de codimensão um, isto é, $(k = n)$. O traço do tensor Π , que é equivalente ao traço da aplicação linear auto adjunta A associada, dado por

$$H := \text{traço}(A) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\Pi_{ji}$$

é chamado de curvatura média de Σ^n em p . Dizemos que Σ^n é uma hipersuperfície CMC (ou de curvatura média constante) se $H \equiv c$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

O tensor livre de traço definido por

$$\mathring{A}(X, Y) = \Pi(X, Y) - \frac{H}{n}g(X, Y),$$

é chamado de tensor de umbilicidade (ou umbilicalidade) de Σ^n . Se $\{E_1, \dots, E_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p\Sigma$, definimos o quadrado da norma da segunda forma fundamental por

$$|A|^2 = \sum_{i,j=1}^n |\Pi(E_i, E_j)|^2,$$

e de forma semelhante,

$$|\mathring{A}|^2 = \sum_{i,j=1}^n |\mathring{A}(E_i, E_j)|^2 = \left(|A|^2 - \frac{H^2}{n} \right)$$

Observação 1.6. Fixe $p \in \Sigma$. Se $|A|^2(p) = 0$, então as curvaturas principais de Σ , definidas como sendo os autovalores $\{k_1, \dots, k_n\}$ de A , são todas nulas em p . De forma semelhante, se $|\mathring{A}|^2(p) = 0$, então $k_i = \frac{H}{n}$ $i = 1, \dots, n$, ou seja, as curvaturas principais nesse caso são todas iguais. Se $|A|^2 \equiv 0$ em Σ^n , dizemos que Σ^n é totalmente geodésica, e se $|\mathring{A}|^2 \equiv 0$, dizemos que Σ^n é totalmente umbilica.

Seja $X \in \mathcal{X}(M)$ um campo suave. Definimos o divergente de X sobre Σ como uma função $\text{div}_\Sigma X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\text{div}_\Sigma X = \sum_{i=1}^n g(\bar{\nabla}_{E_i} X, E_i),$$

em que $\{E_1, \dots, E_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p\Sigma$.

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ . Definimos o gradiente de f como sendo um vetor $\nabla f \in T_pM$ que cumpre

$$g(\nabla f, v) = v(f) \quad \forall v \in T_pM.$$

Sejam $\Sigma^k \hookrightarrow M$ uma imersão isométrica e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em M . O gradiente de f restrito a Σ denotado por $\nabla^\Sigma f$ é dado pela projeção de $\nabla^M f$ sobre $T_p\Sigma$. Já o laplaciano de f restrito a Σ , denotado por $\Delta_\Sigma f$, é definido por

$$\Delta_\Sigma f = \operatorname{div}_\Sigma(\nabla^\Sigma f).$$

Em termos de um referencial geodésico $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathcal{X}(U)$, em que U é uma vizinhança de p em Σ temos

$$\Delta_\Sigma f = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f)).$$

O hessiano da função f restrita a Σ é definido como um tensor simétrico dado por,

$$(Hess_\Sigma f(p))(X, Y) = XY(f) - (\nabla_X Y)(f),$$

em que X, Y são campos tangentes a Σ e ∇ é a conexão riemanniana de Σ na métrica induzida pela imersão isométrica. De maneira equivalente podemos também definir $Hess_\Sigma f$ por

$$(Hess_\Sigma f(p))(X, Y) = g(\nabla_X \nabla^\Sigma f, Y).$$

1.3 Formulação do problema de fronteira livre

Sejam (M^{n+1}, g) uma variedade riemanniana, $\Omega \subset M^{n+1}$ um domínio com $\partial\Omega$ suave e $\Sigma^k \hookrightarrow \Omega$ uma imersão isométrica de uma subvariedade compacta com bordo tal que $\operatorname{int}(\Sigma) \subset \operatorname{int}(\Omega)$ e $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$. Uma variação admissível de Σ^k é uma aplicação $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \Omega$ suave tal que para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\psi_t := \psi(t, \cdot) : \Sigma \rightarrow \Omega$ é uma imersão satisfazendo $\psi_t(\operatorname{int} \Sigma) \subset \operatorname{int}(\Omega)$, $\psi_t(\partial\Sigma) \subset \partial\Omega$ e $\psi(0, x) = x$. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ defina $\Sigma_t := \psi_t(\Sigma)$ e denote por $|\Sigma_t|$ a área de Σ_t com respeito a métrica induzida da imersão $\Sigma_t \hookrightarrow \Omega$.

Proposição 1.7 (Fórmula de Variação, prop. 14 [2]). *Sob as condições acima temos*

$$\left. \frac{d}{dt} (|\Sigma_t|) \right|_{t=0} = \int_\Sigma g\left(\vec{H}, \frac{\partial\psi}{\partial t}(0, x)\right) d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} g\left(\nu, \frac{\partial\psi}{\partial t}(0, x)\right) d(\partial\Sigma),$$

em que ν denota o vetor normal exterior à $\partial\Sigma$.

A fórmula de variação acima dá ao vetor curvatura média \vec{H} o seu principal significado geométrico que é justificado na definição a seguir.

Definição 1.8. *Uma subvariedade $\Sigma^k \hookrightarrow \Omega$ tal que $\text{int}(\Sigma) \subset \text{int}(\Omega)$ e $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$ e dita ser mínima de fronteira livre quando $\vec{H} \equiv 0$ e Σ intersecta $\partial\Omega$ ortogonalmente.*

Assim, uma subvariedade mínima de fronteira livre é um ponto crítico do funcional área para variações que não necessariamente mantém o bordo fixo.

Consideremos agora o caso $k = n$. Defina a função $W : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$W(t) = \int_{[0,t] \times \Sigma} \psi^* d\Omega,$$

isto é, $W(t)$ representa o volume compreendido entre $\psi_t(\Sigma)$ e $\psi_0(\Sigma)$. Dizemos que a variação ψ preserva volume se $W(0) = W(t) = 0 \forall t$. A fórmula de variação para a função W fornece (lema 2.1, [5]):

$$W'(0) = \int_{\Sigma} g\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(0, x), N\right) d\Sigma.$$

Dizemos que uma hipersuperfície $\Sigma^n \hookrightarrow \Omega$ é CMC de fronteira livre se $|\vec{H}| \equiv c$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$ e $\partial\Sigma$ encontra $\partial\Omega$ ortogonalmente. Assim, uma hipersuperfície CMC de fronteira livre é um ponto crítico do funcional $t \rightarrow |\Sigma_t|$ para variações que preservam volume.

1.4 Métricas conformes

Nesta seção apresentamos alguns resultados básicos sobre métricas conformes que serão usados nas seções 2.2 e 3.1

Proposição 1.9. *Sejam \bar{g} e g métricas riemannianas em uma variedade M^{n+1} , em que $\bar{g} = e^{2h}g$ para alguma função $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Denote por ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões riemannianas de (M^{n+1}, g) e (M^{n+1}, \bar{g}) respectivamente. Considere os campos suaves X e $Y \in \mathcal{X}(M)$. Então,*

$$i) \bar{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + Y(h)X + X(h)Y - g(X, Y)\nabla h$$

$$ii) \bar{R}(Y, Z)X = R(Y, Z)X + g(Y, X)\nabla_Z \nabla h - g(Z, X)\nabla_Y \nabla h \\ - \{(Hess h)(Z, X) - X(h)Z(h) + g(\nabla h, \nabla h)g(X, Z)\} Y \\ + \{(Hess h)(Y, X) - Y(h)X(h) + g(\nabla h, \nabla h)g(Y, X)\} Z \\ + \{Y(h)g(Z, X) - Z(h)g(Y, X)\} \nabla h$$

$$iii) \bar{Ric}(Z, X) = Ric(Z, X) - (n-1)(Hess h)(Z, X) \\ + (n-1)Z(h)X(h) - \left\{ \Delta h + (n-1)g(\nabla h, \nabla h) \right\} g(Z, X)$$

$$iv) \bar{R}_{\bar{g}} = e^{-2h} \left\{ R_g - 2n\Delta h - n(n-1)g(\nabla h, \nabla h) \right\},$$

em que ∇h , $(Hess h)$ e Δh são calculados com respeito à métrica g

Demonstração. *i)* Desenvolvendo a identidade de Kozul obtemos,

$$\begin{aligned}
2\bar{g}(\bar{\nabla}_Y X, Z) &= X\bar{g}(Y, Z) + Y\bar{g}(X, Z) - Z\bar{g}(X, Y) \\
&\quad - \bar{g}([X, Z], Y) - \bar{g}([Y, Z], X) - \bar{g}([X, Y], Z) \\
&= X(e^{2h})g(Y, Z) + e^{2h}Xg(Y, Z) + Y(e^{2h})g(X, Z) + e^{2h}Yg(X, Z) \\
&\quad - Z(e^{2h})g(X, Y) - e^{2h}Zg(X, Y) \\
&\quad + e^{2h}\{-g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Y], Z)\} \\
&= 2e^{2h}X(h)g(Y, Z) + 2e^{2h}Y(h)g(X, Z) - e^{2h}Z(h)g(X, Y) + e^{2h}2g(\nabla_Y X, Z) \\
&= 2\{\bar{g}(X(h)Y, Z) + \bar{g}(Y(h)X, Z) - \bar{g}(g(X, Y)\nabla h, Z) + \bar{g}(\nabla_Y X, Z)\} \\
&= 2\bar{g}(\nabla_Y X + Y(h)X + X(h)Y - g(X, Y)\nabla h, Z).
\end{aligned}$$

Como a identidade acima vale para todo Z temos que

$$\bar{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + Y(h)X + X(h)Y - g(X, Y)\nabla h,$$

em que ∇h denota o gradiente da função com respeito à métrica g .

ii) temos que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_Z X &= \bar{\nabla}_Y(\nabla_Z X + Z(h)X + X(h)Z - g(Z, X)\nabla h) \\
&= \bar{\nabla}_Y \nabla_Z X + \bar{\nabla}_Y Z(h)X + \bar{\nabla}_Y X(h)Z - \bar{\nabla}_Y(g(Z, X)\nabla h) \\
&= \nabla_Y \nabla_Z X + Y(h)\nabla_Z X + (\nabla_Z X)(h)Y - g(Y, \nabla_Z X)\nabla h \\
&\quad + YZ(h)X + Z(h)\nabla_Y X + Y(h)Z(h)X + Z(h)X(h)Y - Z(h)g(Y, X)\nabla h \\
&\quad + YX(h)Z + X(h)\nabla_Y Z + Y(h)X(h)Z + X(h)Z(h)Y - X(h)g(Y, Z)\nabla h \\
&\quad - g(\nabla_Y Z, X)\nabla h - g(Z, \nabla_Y X)\nabla h - g(Z, X)\nabla_Y \nabla h - g(Z, X)g(\nabla h, \nabla h)Y,
\end{aligned}$$

e de forma semelhante,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_Z \bar{\nabla}_Y X &= \nabla_Z \nabla_Y X + Z(h)\nabla_Y X + (\nabla_Y X)(h)Z - g(Z, \nabla_Y X)\nabla h \\
&\quad + ZY(h)X + Y(h)\nabla_Z X + Z(h)Y(h)X + Y(h)X(h)Z - Y(h)g(Z, X)\nabla h \\
&\quad + ZX(h)Y + X(h)\nabla_Z Y + Z(h)X(h)Y + X(h)Y(h)Z - X(h)g(Z, Y)\nabla h \\
&\quad - g(\nabla_Z Y, X)\nabla h - g(Y, \nabla_Z X)\nabla h - g(Y, X)\nabla_Z \nabla h - g(Y, X)g(\nabla h, \nabla h)Z.
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{[Y, Z]} X &= \nabla_{[Y, Z]} X + [Y, Z](h)X + X(h)[Y, Z] - g([Y, Z], X)\nabla h \\
&= \nabla_{[Y, Z]} X + YZ(h)X - ZY(h)X + X(h)\nabla_Y Z - X(h)\nabla_Z Y \\
&\quad - g(\nabla_Y Z, X) + g(\nabla_Z Y, X)\nabla h,
\end{aligned}$$

resultando então em

$$\begin{aligned}
\bar{R}(Y, Z)X &= \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_Z X - \bar{\nabla}_Z \bar{\nabla}_Y X - \bar{\nabla}_{[Y, Z]} X \\
&= R(Y, Z)X + g(Y, X) \nabla_Z \nabla h - g(Z, X) \nabla_Y \nabla h \\
&\quad - \{(ZX - \nabla_Z X)(h) - X(h)Z(h) + g(\nabla h, \nabla h)g(X, Z)\} Y \\
&\quad + \{YX - \nabla_Y X)(h) - Y(h)X(h) + g(\nabla h, \nabla h)g(Y, X)\} Z \\
&\quad + \{Y(h)g(Z, X) - Z(h)g(Y, X)\} \nabla h.
\end{aligned}$$

iii) Seja $\{\bar{E}_i, \dots, \bar{E}_{n+1}\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ com respeito à métrica \bar{g} , então, $\{E_i, \dots, E_{n+1}\}$ para $E_i = e^h \bar{E}_i$ é uma base ortonormal de $T_p M$ com respeito à métrica g . Assim,

$$\begin{aligned}
\bar{R}ic(Z, X) &= \sum_{i=1}^{n+1} \bar{g}(\bar{R}(\bar{E}_i, Z)X, \bar{E}_i) = \sum_{i=1}^{n+1} e^{2h} g(\bar{R}(e^{-h} E_i, Z)X, e^{-h} E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} g(\bar{R}(E_i, Z)X, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ g(R(E_i, Z)X, E_i) + g(X, E_i)g(\nabla_Z \nabla h, E_i) - g(Z, X)g(\nabla_{E_i} \nabla h, E_i) \right. \\
&\quad - \left[(Hess h)(Z, X) - Z(h)X(h) + g(\nabla h, \nabla h)g(Z, X) \right] g(E_i, E_i) \\
&\quad + \left[(Hess h)(E_i, X) - E_i(h)X(h) + g(\nabla h, \nabla h)g(E_i, X) \right] g(Z, E_i) \\
&\quad \left. + \left[E_i(h)g(Z, X) - Z(h)g(E_i, X) \right] g(\nabla h, E_i) \right\} \\
&= Ric(Z, X) + (Hess h)(Z, X) - g(Z, X)\Delta h \\
&\quad - \left[(Hess h)(Z, X) - Z(h)X(h) + g(\nabla h, \nabla h)g(Z, X) \right] (n+1) \\
&\quad + \left[(Hess h)(Z, X) - Z(h)X(h) + g(\nabla h, \nabla h)g(Z, X) \right] \\
&\quad + \left[g(\nabla h, \nabla h)g(Z, X) - Z(h)g(\nabla h, X) \right] \\
&= Ric(Z, X) - (n-1)(Hess h)(Z, X) \\
&\quad + (n-1)Z(h)X(h) - \left\{ \Delta h + (n-1)g(\nabla h, \nabla h) \right\} g(Z, X).
\end{aligned}$$

iv) Por fim, temos então

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\bar{g}}(p) &= \sum_{i=1}^{n+1} \bar{R}ic(\bar{E}_i, \bar{E}_i) = e^{-2h} \sum_{i=1}^{n+1} \bar{R}ic(E_i, E_i) \\
&= e^{-2h} \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ Ric(E_i, E_i) - (n-1)(Hess h)(E_i, E_i) \right. \\
&\quad \left. + (n-1)E_i(h)E_i(h) - \{ \Delta h + (n-1)g(\nabla h, \nabla h) \} g(E_i, E_i) \right\} \\
&= e^{-2h} \left\{ R_g - 2n\Delta h - n(n-1)g(\nabla h, \nabla h) \right\}.
\end{aligned}$$

■

Definição 1.10. *Seja M^n uma variedade riemanniana com uma métrica g e X um campo de vetores sobre M^n . A derivada de Lie da métrica g na direção do campo X é um tensor definido por*

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) := Xg(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y).$$

Observação 1.11. *Decorre imediatamente da definição anterior que para uma métrica conforme $\bar{g} = \phi^2 g$ devemos ter,*

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \bar{g})(Y, Z) &= X(\phi^2 g(Y, Z)) - \phi^2 g([X, Y], Z) - \phi^2 g([X, Z], Y) \\ &= X(\phi^2)g(Y, Z) + \phi^2(Xg(Y, Z) - \phi^2 g([X, Y], Z) - \phi^2 g([X, Z], Y)) \\ &= X(\phi^2)g(Y, Z) + \phi^2(\mathcal{L}_X g)(Y, Z). \end{aligned}$$

Definição 1.12. *Seja M^n uma variedade Riemanniana com uma métrica g . Dizemos que um campo de vetores X sobre M é conforme se existe uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathcal{L}_X g = 2fg, \tag{1.1}$$

em que \mathcal{L} denota a derivada de Lie.

A função f é chamada de potencial. Se $f \equiv 0$ dizemos então que X é um Campo de Killing. Neste caso, o fluxo de X é dado por isometrias de M .

Proposição 1.13. *Seja X um campo de vetores sobre uma variedade riemanniana (M, g) . Se*

$$\mathcal{L}_X g = 2fg$$

, então sob uma mudança conforme na métrica g dada por $\bar{g} = e^{2h} g$ temos:

$$\mathcal{L}_X \bar{g} = 2\sigma \bar{g}, \tag{1.2}$$

em que $\sigma = f + X(h)$

Demonstração. Pela **Observação 1.11** temos,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \bar{g})(Y, Z) &= X(e^{2h})g(Y, Z) + e^{2h}(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) \\ &= 2X(h)e^{2h}g(Y, Z) + 2fe^{2h}g(Y, Z) \\ &= 2(f + X(h))\bar{g}(Y, Z). \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.14. Em $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ o campo posição \vec{x} é conforme cuja função potencial é $f \equiv 1$

Assim, pela proposição anterior, o campo posição \vec{x} também é conforme se considerarmos em \mathbb{R}^n uma métrica conforme $\bar{g} = e^{2h} \langle, \rangle$. Nesse caso, a função potencial é dada por $\sigma(x) = 1 + \langle \text{grad } h, \vec{x} \rangle$.

Para o contexto ao qual estamos interessados vamos considerar uma mudança conforme $\bar{g} = e^{2h} \langle, \rangle$ em uma bola euclidiana de raio r centrada na origem de forma que o fator e^{2h} seja radial, isto é, seu valor em um ponto x depende apenas da distância euclidiana à origem. A descrição formal dessa situação é dada a seguir.

Seja $u : [0, a^2) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, em que $a < \infty$, ou $a = \infty$. Defina a função $h : \mathbb{B}_a^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(x) = u(|x|^2)$, onde \mathbb{B}_a^{n+1} é uma bola de raio a centrada na origem de \mathbb{R}^{n+1} (se $a = \infty$ então denotaremos \mathbb{B}_a^{n+1} por \mathbb{R}^{n+1}). Considere \bar{g} uma métrica em \mathbb{B}_a^{n+1} obtida por uma mudança conforme na métrica euclidiana \langle, \rangle dada por

$$\bar{g} = e^{2h} \langle, \rangle. \quad (1.3)$$

Com respeito à métrica canônica os gradientes das funções h e e^{2h} são dados respectivamente por

$$\text{grad}(h) = 2u'(|\vec{x}|^2)\vec{x} \quad \text{e} \quad \text{grad}(e^{2h}) = 4e^{2h}u'(|\vec{x}|^2)\vec{x}. \quad (1.4)$$

Escreveremos $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ para denotar uma imersão isométrica de uma hipersuperfície Σ em uma bola euclidiana centrada na origem de raio $r < a$ com uma métrica conforme \bar{g} dada por (1.3).

Exemplo 1.15. Considere $u : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(t) = \ln\left(\frac{2}{1-t}\right)$. Assim, $(\mathbb{B}_1^{n+1}, \bar{g})$ é o espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} modelado no disco de Poincaré.

Exemplo 1.16. Seja $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(t) = \ln\left(\frac{2}{1+t}\right)$. Então, $(\mathbb{R}^{n+1}, \bar{g})$ é isométrica à $\mathbb{S}^{n+1} \setminus \{p\}$, isto é, a esfera menos um polo.

Exemplo 1.17. Seja $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(t) = -\frac{t}{2n}$. Então, $(\mathbb{R}^{n+1}, \bar{g}) = \left(\mathbb{R}^{n+1}, e^{-\frac{|x|^2}{2n}} \langle, \rangle\right)$ é uma variedade denominada Espaço Gaussiano.

Exemplo 1.18. Por fim, fazendo $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(t) = 0$ teremos que $(\mathbb{R}^{n+1}, \bar{g})$ é o espaço euclidiano com a métrica canônica.

Sempre consideraremos coordenadas canônicas $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ em $(\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$. O campo de vetores denotado por \vec{x} será aquele que em um ponto $x \in (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ associa o vetor $\sum x_i \partial_i$.

Lema 1.19. Dado um ponto fixo $x_0 = ((x_0)_1, \dots, (x_0)_{n+1}) \in (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ o segmento de reta que liga a origem $\vec{0}$ à x_0 é uma geodésica com respeito à métrica \bar{g} .

Seja $x \in (\mathbb{B}_a^{n+1}, \bar{g})$ e considere $\gamma(t) = tx$ a geodésica que liga o ponto x à origem $\vec{0}$. Então, o comprimento de γ , denotado por \bar{r} , com respeito à métrica \bar{g} é dado por

$$\bar{r} = \int_0^1 \sqrt{\bar{g}(\gamma', \gamma')} dt = \int_0^1 \sqrt{\bar{g}(\vec{x}, \vec{x})} dt = \int_0^1 e^{u(|tx|^2)} |x| dt = r \int_0^1 e^{u(t^2 r^2)} dt, \quad (1.5)$$

em que $r = |x|$ denota a distância euclidiana de x à origem. Por exemplo, se $(\mathbb{B}_1^3, \bar{g})$ é o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 , então a distância hiperbólica $\bar{r}_{\mathbb{H}}$ até a origem é dada por

$$\bar{r}_{\mathbb{H}} = r \int_0^1 \frac{2}{1 - t^2 r^2} dt = 2 \tanh^{-1}(r).$$

De maneira semelhante, se (\mathbb{R}^3, \bar{g}) é a esfera $\mathbb{S}^3 \setminus \{p\}$ menos um polo, então a distância esférica $\bar{r}_{\mathbb{S}}$ até a origem é dada por,

$$\bar{r}_{\mathbb{S}} = r \int_0^1 \frac{2}{1 + t^2 r^2} dt = 2 \tan^{-1}(r).$$

Lema 1.20. *Seja $(\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ a bola euclidiana com uma métrica $\bar{g} = e^{2h} \langle \cdot, \cdot \rangle$, em que $h(x) = u(|x|^2)$ para alguma função suave u definida em $I = [0, r^2)$. Considere a função $\sigma(x) = 1 + 2u'(|\vec{x}|^2) |\vec{x}|^2$. Então temos*

i) $\bar{\nabla}_Y \vec{x} = \sigma Y$ e

ii) $\bar{\nabla} \sigma = 4e^{-2h}(u''(|x|^2) |x|^2 + u'(|x|^2)) \vec{x}$.

Demonstração. i) Usando a expressão de $\bar{\nabla}$, dada pelo lema **Lema 1.9**, temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Y \vec{x} &= \nabla_Y \vec{x} + Y(h) \vec{x} + \vec{x}(h) Y - \langle \vec{x}, Y \rangle \nabla h \\ &= Y + \langle \nabla h, \vec{x} \rangle Y + \langle \nabla h, Y \rangle \vec{x} - \langle \vec{x}, Y \rangle \nabla h \\ &= Y + 2u'(|x|^2) \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle Y + 2u'(|x|^2) \langle \vec{x}, Y \rangle \vec{x} - 2u'(|\vec{x}|^2) \langle \vec{x}, Y \rangle \vec{x} \\ &= (1 + 2u'(|\vec{x}|^2) |\vec{x}|^2) Y \\ &= \sigma Y. \end{aligned}$$

ii) Se $\text{grad}(\sigma)$ e $\bar{\nabla} \sigma$ denotam os gradientes da função σ com respeito às métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e \bar{g} respectivamente, devemos ter $\bar{\nabla} \sigma = e^{-2h} \text{grad}(\sigma)$. Para a função σ temos

$$\begin{aligned} \text{grad}(\sigma) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (1 + 2u'(|x|^2) |x|^2) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n 4(u''(|x|^2) |x|^2 + u'(|x|^2)) x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= 4(u''(|x|^2) |x|^2 + u'(|x|^2)) \vec{x}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\bar{\nabla} \sigma = 4e^{-2h}(u''(|x|^2) |x|^2 + u'(|x|^2)) \vec{x}.$$

■

Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (M^{n+1}, g)$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície suave Σ^n em uma variedade Riemanniana M^{n+1} . Uma questão importante a ser considerada é como a mudança conforme na métrica inicial g dada por $\bar{g} = e^{2h}g$ interfere na geometria de Σ^n herdada da métrica g . O objeto que nos interessa nesse contexto é o conteúdo dos dois próximos lemas.

Lema 1.21 (Lema 10.1.1, [25]). *Sejam (M^{n+1}, g) e (M^{n+1}, \bar{g}) variedades Riemannianas com conexões ∇ e $\bar{\nabla}$ respectivamente. Suponha que \bar{g} seja uma mudança conforme da métrica g , isto é, $\bar{g} = e^{2h}g$ para alguma função suave h . Fixe uma hipersuperfície suave $\Sigma^n \subset M^{n+1}$. Suponha que Σ^n seja orientável com respeito à métrica g . Escolha então um ponto $p \in \Sigma$ e uma orientação N com respeito à métrica g . Se k_i e \bar{k}_i denotam as curvaturas principais em p de $\Sigma^n \hookrightarrow (M^{n+1}, g)$ e de $\Sigma^n \hookrightarrow (M^{n+1}, \bar{g})$ respectivamente, então*

$$\bar{k}_i = e^{-h} (k_i - N(h)), \quad (1.6)$$

em que \bar{k}_i é a curvatura principal de $\Sigma^n \hookrightarrow (M^{n+1}, \bar{g})$ em p com respeito à orientação $\bar{N} = e^{-h}N$.

Demonstração. Seja N uma orientação de Σ^n como subvariedade de (M^{n+1}, g) e considere $\bar{N} = e^{-h}N$ a orientação de Σ^n como subvariedade de (M^{n+1}, \bar{g}) . Suponha que E_i seja uma direção principal de $\Sigma^n \hookrightarrow (M^{n+1}, g)$ em p , isto é, $-\nabla_{E_i}N = k_iE_i$. Usando a expressão que relacionam as conexões $\bar{\nabla}$ e ∇ obtidas no item *i*) da **Proposição 1.9**, temos

$$\begin{aligned} -\bar{\nabla}_{\bar{E}_i}\bar{N} &= -\nabla_{\bar{E}_i}\bar{N} - \bar{E}_i(h)\bar{N} - \bar{N}(h)\bar{E}_i + g(\bar{N}, \bar{E}_i)\nabla h \\ &= -\bar{E}_i(e^{-h}N) - e^{-h}\nabla_{\bar{E}_i}N - \bar{E}_i(h)\bar{N} - e^{-h}N(h)\bar{E}_i \\ &= e^{-h}\bar{E}_i(h)N + e^{-h}k_i\bar{E}_i - e^{-h}\bar{E}_i(h)N - e^{-h}N(h)\bar{E}_i \\ &= e^{-h}k_i\bar{E}_i - e^{-h}N(h)\bar{E}_i = e^{-h}(k_i - N(h))\bar{E}_i. \end{aligned}$$

Isso diz que \bar{E}_i é uma direção principal de $\Sigma^n \hookrightarrow (M^{n+1}, \bar{g})$ em p cujo valor da curvatura principal \bar{k}_i é dado por $\bar{k}_i = e^{-h}(k_i - N(h))$ como queríamos. ■

Seja $\Sigma^2 \hookrightarrow (M^{n+1}, g)$ uma imersão isométrica de uma superfície com bordo $\partial\Sigma$. Considere ν o vetor normal interior a $\partial\Sigma$ e ∇ a conexão de M com respeito à métrica g . Se γ é uma parametrização de $\partial\Sigma$ pelo comprimento de arco, definimos a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ por

$$k_{g_e} := g(\nabla_{\gamma'}\gamma', \nu). \quad (1.7)$$

Dizemos que o bordo de Σ é estritamente convexo se $k_{g_e} > 0$ sobre $\partial\Sigma$. Observe que se $k_{g_e} \equiv 0$, então γ é uma geodésica em Σ .

Lema 1.22. *Seja $\Sigma^2 \subset \mathbb{B}_r^3$ uma superfície com bordo não vazio. Se k_{g_e} e \bar{k}_{g_e} denotam as curvaturas geodésicas de $\partial\Sigma$ com respeito às imersões isométricas $\Sigma^2 \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e $\Sigma^2 \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ respectivamente, então*

$$\bar{k}_{g_e} = e^{-h} (k_{g_e} - \nu(h)),$$

em que ν denota o vetor normal interior ao bordo com respeito à métrica canônica $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Demonstração. Sejam ν e $\bar{\nu}$ os vetores normais interiores ao bordo $\partial\Sigma$ com respeito à métrica canônica e a métrica \bar{g} respectivamente, temos então que $\bar{\nu} = e^{-h}\nu$. Se $\bar{\nu}$ denota o campo de vetores tangentes unitários ao bordo $\partial\Sigma$ com respeito à \bar{g} , então $v = e^h\bar{\nu}$ é um campo tangente unitário com respeito à métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Assim,

$$\begin{aligned} \bar{k}_{g_e} &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\nu}}\bar{\nu}, \bar{\nu}) = \bar{g}(\nabla_{\bar{\nu}}\bar{\nu} + 2\bar{\nu}(h)\bar{\nu} - \langle \bar{\nu}, \bar{\nu} \rangle \mathbf{grad}(h), e^{-h}\nu) \\ &= \bar{g}(\nabla_{\bar{\nu}}\bar{\nu} - \langle \bar{\nu}, \bar{\nu} \rangle \mathbf{grad}(h), e^{-h}\nu) = \bar{g}(\nabla_{e^{-h}\nu}e^{-h}\nu - \langle \bar{\nu}, \bar{\nu} \rangle \mathbf{grad}(h), e^{-h}\nu) \\ &= e^{-h} (e^{-2h}\bar{g}(\nabla_{\nu}v, \nu) - (e^{-2h}\bar{g}(\mathbf{grad}(h), \nu))) = e^{-h} (\langle \nabla_{\nu}v, \nu \rangle - \langle \mathbf{grad}(h), \nu \rangle) \\ &= e^{-h} (k_{g_e} - \langle \mathbf{grad}(h), \nu \rangle) \\ &= e^{-h} (k_{g_e} - \nu(h)). \end{aligned}$$

■

O próximo lema trata-se de um resultado puramente algébrico. Ele fornece uma condição suficiente para que os números reais em uma lista $\{a_1, \dots, a_n\}$ tenham todos o mesmo sinal. Anunciaremos-o diretamente na forma como nos interessa. O caso geral pode ser consultado na referência mencionada.

Lema 1.23 (Lema 4.1, [12]). *Sejam $\{a_1, \dots, a_n\}$ números reais. Se*

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2,$$

então $a_i a_j \geq 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Lema 1.24. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (M^{n+1}, g)$ uma hipersuperfície imersa isometricamente em uma variedade riemanniana e seja $\tau : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que as condições*

$$\tau^2(p) \left(|A|^2 - \frac{1}{n} H^2 \right) \leq \frac{n}{n-1} \left(1 + \tau(p) \frac{1}{n} H \right)^2 \quad (1.8)$$

$$0 \leq n + \tau H \quad (1.9)$$

sejam satisfeitas para cada $p \in \Sigma^n$, em que $H = H(p)$ denota a curvatura média de Σ^n em p . Então, a forma bilinear $B_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$B_p(Y, Z) = g(Y + \tau(p)A(Y), Z), \quad (1.10)$$

em que A denota a segunda forma fundamental, é positiva semidefinida.

Demonstração. Escolha um referencial ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ que diagonaliza a segunda forma fundamental A de Σ , isto é $A(E_i) = k_i E_i$ em que k_i denota a i -ésima curvatura principal. Desse modo, a matriz que representa B_p é dada por:

$$(B_p)_{ij} = \delta_{ij} + \tau(p)k_i \delta_{ij},$$

cujos autovalores são $\lambda_i = 1 + \tau(p)k_i$, $i = 1, \dots, n$. Afim de mostrar que B_p é positiva semidefinida, vamos verificar que $\lambda_i \geq 0$ para todo i . Primeiro observe que,

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 = n^2 + 2n\tau(p)H + (\tau(p)H)^2.$$

Usando então a condição (1.8) podemos estimar que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 &= \sum_{i=1}^n (1 + \tau(p)k_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (1 + 2\tau(p)k_i + \tau(p)^2 k_i^2) \\ &= n + 2\tau(p)H + \tau(p)^2 |A|^2 \\ &= n + 2\tau(p)H + \tau(p)^2 \left(|A|^2 - \frac{1}{n}H^2 + \frac{1}{n}H^2 \right) \\ &\leq n + 2\tau(p)H + \frac{n}{n-1} \left(1 + \tau(p)\frac{1}{n}H \right)^2 + \tau(p)^2 \frac{1}{n}H^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \left(n^2 + (n-1)2\tau(p)H + 2\tau(p)H + \tau(p)^2 \frac{1}{n}H^2 + (n-1)\tau(p)^2 \frac{1}{n}H^2 \right) \\ &= \frac{1}{n-1} (n^2 + n\tau(p)H + \tau(p)^2 H^2) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2. \end{aligned}$$

Agora, pelo **Lema 1.23**, temos que $\lambda_i \lambda_j \geq 0$ para todo par $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Como a condição (1.9) garante que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$, concluímos que λ_i são todos não negativos e o resultado segue.

■

A próxima proposição tem uma importância sutil na obtenção dos resultados do próximo capítulo. Em suma, trata-se de uma construção que permite simplificar o cálculo do Hessiano de uma determinada função Ψ a fim de obter uma propriedade de convexidade, mediante uma hipótese geométrica, para tal função quando restrita a uma hipersuperfície Σ .

Proposição 1.25. *Sejam $a, b : [0, r_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ($r_0 \leq \infty$) funções suaves tal que*

- i) $b(t) > 0 \forall t \in [0, r_0)$,*
- ii) $a(0) = 0, a(t) > 0 \forall t \in (0, r_0)$*
- iii) $a'(t) > 0 \forall t \in (0, r_0)$, então a equação diferencial*

$$\Phi''(a)a'b + \Phi'(a)b' = 0 \quad (1.11)$$

admite uma solução $\Phi : (0, \tilde{r}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpre $\Phi'(s) > 0$, em que $(0, \tilde{r}_0)$ é a imagem do intervalo $(0, r_0)$ pela função a .

Demonstração. Fazemos $f(t) = \Phi'(a(t))$, logo, $f'(t) = \Phi''(a(t))a'(t)$. Portanto, a equação (1.11) fica equivalente à

$$f'(t)b(t) + f(t)b'(t) = 0.$$

Resolvendo a equação acima na variável t encontraremos

$$f(t) = \frac{c_1}{b(t)},$$

isto é,

$$\Phi'(a(t)) = \frac{c_1}{b(t)}.$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $a'(t)$ e integrando com respeito à t obtemos,

$$\int_0^r \Phi'(a(t))a'(t)dt = c_1 \int_0^r \frac{a'(t)}{b(t)}dt.$$

Como $a'(t) > 0$ para $0 < t < r_0$, a função $a : [0, r_0) \rightarrow [0, \tilde{r}_0)$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Então, podemos considerar a mudança de variável $a(t) = \xi$. Desse modo, $d\xi = a'(t)dt$, o que resulta em

$$\int_0^s \Phi'(\xi)d\xi = c_1 \int_0^s \frac{1}{b(a^{-1}(\xi))}d\xi,$$

onde $s = a(r) \in [0, \tilde{r}_0)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\Phi(s) - \Phi(0) = c_1 \int_0^s \frac{1}{b(a^{-1}(\xi))}d\xi.$$

Escolhendo $\Phi(0) = 0$ e $c_1 = 1$ temos que

$$\Phi(s) = \int_0^s \frac{1}{b(a^{-1}(\xi))}d\xi$$

é uma solução da equação (1.11) que cumpre $\Phi'(s) > 0 \forall s \in [0, \tilde{r}_0)$ como queríamos. ■

Lema 1.26. *Seja $\Sigma^k \hookrightarrow (M^{n+1}, \bar{g})$ uma imersão isométrica de uma subvariedade Σ^k em uma variedade Riemanniana M^{n+1} . Suponha que exista um campo $X \in \mathcal{X}(M)$ tal que*

$$\bar{\nabla}_Y X = \sigma Y \quad \forall Y \in \mathcal{X}(M)$$

e para alguma função suave $\sigma : M \rightarrow \mathbb{R}$. Defina $\varphi : M^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi(x) = \bar{g}(X, X)$, então temos que

$$\text{Hess}_\Sigma \varphi(x)(Y, Z) = 2(\bar{g}(\bar{\nabla}\sigma, Y)\bar{g}(X, Z) + \sigma^2\bar{g}(Z, Y) + \sigma\bar{g}(B(Y, Z), X)),$$

em que $\bar{\nabla}\sigma$ denota o gradiente da função σ com respeito à métrica \bar{g} .

Demonstração. Denotemos por ∇ a conexão $\bar{\nabla}$ restrita à Σ . Assim, $Hess_{\Sigma}\varphi$ é dado por

$$\begin{aligned}
Hess_{\Sigma}\varphi(x)(Y, Z) &= YZ(\varphi) - (\nabla_Y Z)(\varphi) \\
&= YZ\bar{g}(X, X) - (\nabla_Y Z)\bar{g}(X, X) \\
&= 2 \left(Y\bar{g}(\bar{\nabla}_Z X, X) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\nabla_Y Z} X, X) \right) \\
&= 2 (Y\bar{g}(\sigma Z, X) - \bar{g}(\sigma \nabla_Y Z, X)) \\
&= 2 (Y(\sigma)\bar{g}(Z, X) + \sigma\bar{g}(\bar{\nabla}_Y Z, X) + \sigma^2\bar{g}(Z, Y) - \sigma\bar{g}(\nabla_Y Z, X)) \\
&= 2 (\bar{g}(\bar{\nabla}\sigma, Y)\bar{g}(Z, X) + \sigma^2\bar{g}(Z, Y) + \sigma\bar{g}(\bar{\nabla}_Y Z - \nabla_Y Z, X)) \\
&= 2 (\bar{g}(\bar{\nabla}\sigma, Y)\bar{g}(Z, X) + \sigma^2\bar{g}(Z, Y) + \sigma\bar{g}(B(Y, Z), X)).
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.27. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície suave e orientável. Suponha que as condições*

$$\frac{1}{\sigma^2} \left(|A|^2 - \frac{1}{n} H^2 \right) \bar{g}(\vec{x}, \bar{N})^2 \leq \frac{n}{n-1} \left(1 + \frac{1}{n\sigma} H\bar{g}(\vec{x}, \bar{N}) \right)^2, \quad (1.12a)$$

$$0 \leq n + \frac{1}{\sigma} H\bar{g}(\vec{x}, \bar{N}) \quad (1.12b)$$

sejam satisfeitas para todo ponto $x \in \Sigma$, em que $\sigma : \mathbb{B}_r^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\sigma = 1 + 2u'(|\vec{x}|^2) |\vec{x}|^2$ cumpre $\sigma > 0$ e \bar{N} denota o vetor normal a Σ^n . Então, existe uma função $\Psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Hess_{\Sigma}\Psi$ é positivo semidefinido, isto é,

$$Hess_{\Sigma}\Psi(p)(Y, Y) \geq 0, \text{ para todo } Y \in T_p\Sigma \text{ e } p \in \Sigma.$$

Demonstração. Pelo **Lema 1.20** temos que $\bar{\nabla}_Y \vec{x} = \sigma Y$, em que $\sigma = 1 + 2u'(|\vec{x}|^2) |\vec{x}|^2$. Escolha

$$a(t) = e^{2u(t)}t, \quad b(t) = 1 + 2u'(t)t$$

e considere Φ uma solução da equação (1.11) dada pela **Proposição 1.25**, isto é,

$$\Phi''(e^{2u(t)}t)e^{2u(t)}(1 + 2u'(t)t)^2 + 2\Phi'(e^{2u(t)}t)(u''(t)t + u'(t)) = 0. \quad (1.13)$$

Defina $\Psi : \mathbb{B}_r^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Psi(x) = \Phi(\varphi(x)), \quad (1.14)$$

em que $\varphi(x) = \bar{g}(\vec{x}, \vec{x}) = e^{2u(|x|^2)} |\vec{x}|^2$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
Hess_{\Sigma}\Psi(x)(Y, Z) &= YZ(\Phi(\varphi)) - \nabla_Y Z(\Phi(\varphi)) \\
&= Y(\Phi'(\varphi)Z(\varphi)) - \Phi'(\varphi)\nabla_Y Z(\varphi) \\
&= Y(\Phi'(\varphi))Z(\varphi) + \Phi'(\varphi)YZ(\varphi) - \Phi'(\varphi)\nabla_Y Z(\varphi) \\
&= \Phi''(\varphi)Y(\varphi)Z(\varphi) + \Phi'(\varphi)Hess_{\Sigma}\varphi(x)(Y, Z) \\
&= 4\sigma^2\Phi''(\varphi)\bar{g}(Y, \vec{x})\bar{g}(Z, \vec{x}) + \Phi'(\varphi)Hess_{\Sigma}\varphi(x)(Y, Z).
\end{aligned}$$

Usando a expressão para $Hess_{\Sigma}\varphi(x)$ obtida no lema anterior obtemos

$$\begin{aligned} Hess_{\Sigma}\Psi(x)(Y, Z) &= 4\sigma^2\Phi''(\varphi)\bar{g}(Y, \vec{x})\bar{g}(Z, \vec{x}) \\ &\quad + 2\Phi'(\varphi) (\bar{g}(\bar{\nabla}\sigma, Y)\bar{g}(Z, X) + \sigma^2\bar{g}(Z, Y) + \sigma\bar{g}(B(Y, Z), X)) \\ &= \{4\sigma^2\Phi''(\varphi) + 2\Phi'(\varphi)G(x)\} \bar{g}(Y, \vec{x})\bar{g}(Z, \vec{x}) \\ &\quad + 2\sigma^2\Phi'(\varphi) \left(\bar{g}(Z, Y) + \frac{1}{\sigma}\bar{g}(B(Y, Z), \vec{x}) \right), \end{aligned} \quad (1.15)$$

em que $G(x) = 4e^{-2u(|\vec{x}|^2)}(u''(|\vec{x}|^2)|\vec{x}|^2 + u'(|\vec{x}|^2))$. Portanto, por (1.13) devemos ter

$$\{4\sigma^2\Phi''(\varphi) + 2\Phi'(\varphi)G(x)\} \equiv 0.$$

Assim, (1.15) fornece:

$$Hess_{\Sigma}\Psi(x)(Y, Z) = 2\sigma^2\Phi'(\varphi) \left(\bar{g}(Z, Y) + \frac{1}{\sigma}\bar{g}(B(Y, Z), \vec{x}) \right). \quad (1.16)$$

Como nesse caso, $B(Y, Z) = \bar{g}(A(Y), Z)\bar{N}$, a expressão acima fica

$$\begin{aligned} Hess_{\Sigma}\Psi(x)(Y, Z) &= 2\sigma^2\Phi'(\varphi) \left(\bar{g}(Z, Y) + \frac{1}{\sigma}\bar{g}(\bar{g}(A(Y), Z)\bar{N}, \vec{x}) \right) \\ &= 2\sigma^2\Phi'(\varphi)\bar{g} \left(Y + \frac{1}{\sigma}\bar{g}(\vec{x}, \bar{N})A(Y), Z \right). \end{aligned}$$

Sendo $\Phi'(\varphi) > 0$, temos $2\sigma^2\Phi'(\varphi) > 0$ e o resultado segue do **Lema 1.24.** para $\tau(x) = \frac{1}{\sigma}\bar{g}(\vec{x}, \bar{N})$. \blacksquare

Se considerarmos $\Sigma^k \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ uma subvariedade tal que $k \leq n$ então, o **Lema 1.24.** não pode ser usado diretamente na prova de um teorema análogo ao anterior. Entretanto sob a hipótese de Σ^k ser uma subvariedade mínima temos o seguinte resultado.

Teorema 1.28. *Seja $\Sigma^k \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ ($k \leq n$) uma subvariedade mínima suave. Suponha que a condição*

$$\frac{1}{\sigma^2} |B|^2 |\vec{x}^\perp|_{\bar{g}}^2 \leq \frac{k}{k-1} \quad (1.17)$$

seja satisfeita para todo ponto $x \in \Sigma$, em que $\sigma = 1 + 2u'(|\vec{x}|^2)|\vec{x}|^2$ é positiva em \mathbb{B}_r^{n+1} e $|\vec{x}^\perp|_{\bar{g}}^2 = \bar{g}(\vec{x}^\perp, \vec{x}^\perp)$. Então, existe uma função $\Psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Hess_{\Sigma}\Psi$ é positivo semidefinido.

Demonstração. Faz-se de maneira semelhante ao teorema anterior. Considerando a função Ψ como em (1.14) temos

$$Hess_{\Sigma}\Psi(x)(Y, Z) = 2\sigma^2\Phi'(\varphi) \left(\bar{g}(Z, Y) + \frac{1}{\sigma}\bar{g}(B(Y, Z), \vec{x}) \right).$$

Considere a forma bilinear simétrica dada por, $\mathcal{B}_0(Y, Z) = \bar{g}(Y, Z) + \frac{1}{\sigma} \bar{g}(B(Y, Z), \vec{x})$ e seja $\{\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_k\}$ referencial ortonormal que diagonaliza \mathcal{B}_0 . Então, os autovalores de \mathcal{B}_0 são dados por $\lambda_i = 1 + \frac{1}{\sigma} \bar{g}(B(\bar{E}_i, \bar{E}_i), \vec{x})$. Logo,

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i^2 = k + \frac{2}{\sigma} \bar{g}(\vec{H}, \vec{x}) + \sum_{i=2}^k \frac{1}{\sigma^2} \bar{g}(B(\bar{E}_i, \bar{E}_i), \vec{x})^2. \quad (1.18)$$

Como Σ^k é mínima, temos $\vec{H} \equiv 0$ e portanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 &= k + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=2}^k \bar{g}(B(\bar{E}_i, \bar{E}_i), \vec{x})^2 \leq k + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=2}^k |B(\bar{E}_i, \bar{E}_i)|_{\bar{g}}^2 |\vec{x}^\perp|_{\bar{g}}^2 \\ &\leq k + \frac{1}{\sigma^2} |B|_{\bar{g}}^2 |\vec{x}^\perp|_{\bar{g}}^2 \leq k + \frac{k}{k-1} = \frac{k^2}{k-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^k \left\{ 1 + \frac{1}{\sigma} \bar{g}(B(\bar{E}_i, \bar{E}_i), \vec{x}) \right\} \right)^2 = \left(k + \frac{1}{\sigma} \bar{g}(\vec{H}, \vec{x}) \right)^2 = k^2,$$

e portanto,

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i^2 \leq \frac{k^2}{k-1} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^2}{k-1}.$$

Agora, pelo **Lema 1.23**, $\lambda_l \lambda_j \geq 0$ ($l, j \in \{1, \dots, k\}$) e portanto, todos os λ_i 's tem o mesmo sinal. Como nesse caso $\sum_{i=1}^k \lambda_i = k > 0$, temos que $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Desse modo, \mathcal{B}_0 é positiva semidefinida e a mesma conclusão vale para $Hess_{\Sigma} \Psi(x) = 2\sigma^2 \Phi'(\varphi) \mathcal{B}_0$.

■

Capítulo 2

Resultados de classificação via existência de uma função convexa

Neste capítulo mostraremos como a existência de uma função convexa, obtida no capítulo anterior, sobre uma subvariedade mínima $\Sigma^k \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ ou CMC $\Sigma^2 \hookrightarrow (\mathbb{B}_1^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de fronteira livre traz implicações topológicas, que em alguns casos, possibilita obtermos uma rigidez geométrica das mesmas.

2.1 Superfícies CMC de fronteira livre na bola euclidiana \mathbb{B}_1^3

Nessa primeira secção, exibiremos um resultado que generaliza o teorema de Ambrozio-Nunes [3] para o caso CMC.

Proposição 2.1. *Considere $\mathbb{B}^3 \subset \mathbb{R}^3$ a bola euclidiana de raio unitário centrada na origem e $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{B}^3$ uma superfície CMC compacta orientável de fronteira livre. Considere também $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $\varphi(x) = |\vec{x}|^2$ e suponha que a condição*

$$|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2 \quad (2.1)$$

seja satisfeita em todo ponto $x \in \Sigma$. Então, $Hess_{\Sigma}\varphi(x)(Y, Y) \geq 0$ para todo $Y \in T_x\Sigma$.

Demonstração. Temos duas situações: Σ é totalmente umbílica ou não. Suponha inicialmente o primeiro caso. Então, Σ é uma calota esférica. Seja $\mathbb{S}_{\lambda}^2(p_0)$ a esfera de raio λ centrada no ponto p_0 tal que $\Sigma \subset \mathbb{S}_{\lambda}^2(p_0)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que p_0 está sobre o semi-eixo positivo Oz , e vamos denotá-lo por $p_0 = (0, 0, z_0)$. Considere o

cone C com vértice na origem tangente à $\mathbb{S}_\lambda^2(p_0)$ cujo ângulo da reta geratriz com o eixo Oz é α com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Parametrize Σ por

$$X(s, \theta) = (\cos(\theta)x(s), \sin(\theta)x(s), z(s)),$$

em que $0 \leq s \leq (\frac{\pi}{2} - \alpha)\lambda$, $x(s) = -\lambda \sin(\frac{s}{\lambda} + \pi)$, $z(s) = z_0 + \lambda \cos(\frac{s}{\lambda} + \pi)$ e $z_0 = \frac{1}{\cos(\alpha)}$. Seja N o campo normal a Σ^2 dado por

$$N = (-\cos(\theta)z'(s), -\sin(\theta)z'(s), x'(s)),$$

e seja \vec{x} o campo posição dado por $\vec{x} = X(s, \theta)$.

Como a curvatura média de Σ é $H = \frac{2}{\lambda}$ temos que

$$\begin{aligned} -H \langle \vec{x}, N \rangle &= -\frac{2}{\lambda} \left(-\lambda \sin^2 \left(\frac{s}{\lambda} + \pi \right) (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) - \frac{\cos(\frac{s}{\lambda} + \pi)}{\cos(\alpha)} - \lambda \cos^2 \left(\frac{s}{\lambda} + \pi \right) \right) \\ &= \frac{2}{\lambda} \left(\lambda + \frac{\cos(\frac{s}{\lambda} + \pi)}{\cos(\alpha)} \right) = 2 \left(1 + \frac{\cos(\frac{s}{\lambda} + \pi)}{\lambda \cos(\alpha)} \right) = 2 \left(1 + \frac{\cos(\frac{s}{\lambda} + \pi)}{\tan(\alpha) \cos(\alpha)} \right) \\ &= 2 \left(1 + \frac{\cos(\frac{s}{\lambda} + \pi)}{\sin(\alpha)} \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, segue que

$$0 \leq s \leq (\frac{\pi}{2} - \alpha)\lambda < \frac{\pi}{2}\lambda \Rightarrow 0 \leq s < \frac{\pi}{2}\lambda.$$

Assim, $\cos(\frac{s}{\lambda} + \pi) < 0$ e portanto

$$\frac{\cos(\frac{s}{\lambda} + \pi)}{\sin(\alpha)} < 0,$$

e conseqüentemente,

$$1 + \frac{\cos(\frac{s}{\lambda} + \pi)}{\sin(\alpha)} < 1.$$

Logo, (2.2) fornece

$$-H \langle \vec{x}, N \rangle < 2 \Rightarrow 0 < 2 + H \langle \vec{x}, N \rangle. \quad (2.3)$$

Pelo **Teorema 1.27**, as condições (2.1) e (2.3) garantem então que $Hess_{\Sigma}\varphi(x)(Y, Y) \geq 0$.

Suponha agora que Σ^2 não seja totalmente umbílica. Vamos mostrar que nesse caso a condição (2.1) garante que $0 \leq v = 2 + H \langle \vec{x}, N \rangle$. Suponha que para algum ponto $p \in \Sigma$ tenhamos $v(p) < 0$. Como Σ encontra o bordo $\partial\mathbb{B}^3$ ortogonalmente devemos ter $v = 2 + H \langle \vec{x}, N \rangle = 2 > 0$ sobre $\partial\Sigma$. Escolha $q \in \partial\Sigma$ e seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma^2$ uma curva suave em Σ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$ (veja fig. 2.1). Como v muda de sinal sobre α , existe um ponto p_0 sobre α tal que $v(p_0) = 0$ e mais, podemos escolher p_0 de maneira que para algum ε pequeno e t_0 tal que $\alpha(t_0) = p_0$ tenhamos $v(\alpha(t)) < 0$ para $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]$ e $v(\alpha(t)) > 0$

para $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon]$. Como $0 = v(p_0) = 2 + H \langle \vec{x}, N \rangle$, devemos ter $\langle \vec{x}, N \rangle(p_0) \neq 0$ e assim, a desigualdade (2.1) diz que $|\mathring{A}|^2(p_0) = 0$ e portanto p_0 é um ponto umbílico de Σ^2 . Como assumimos que Σ^2 não é totalmente umbílica, p_0 é isolado (**Teorema 2.2.2**, [25]). Seja $\mathbb{D}_{r_0}(p_0)$ um disco geodésico de raio r_0 centrado em p_0 tal que este, seja o único ponto umbílico em $\mathbb{D}_{r_0}(p_0)$. Podemos escolher ε suficientemente pequeno de modo que $\alpha(t) \in \mathbb{D}_{r_0}(p_0) \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Escolha $\tilde{r}_0 < r_0$ tal que $\alpha(t_0 - \varepsilon), \alpha(t_0 + \varepsilon) \notin \mathbb{D}_{\tilde{r}_0}(p_0)$. Considere o anel $\mathcal{A} = \mathbb{D}_{r_0}(p_0) \setminus \mathbb{D}_{\tilde{r}_0}(p_0)$ e seja β um caminho em \mathcal{A} ligando os pontos $\alpha(t_0 - \varepsilon)$ e $\alpha(t_0 + \varepsilon)$. Como v muda de sinal ao longo de β , existe um ponto $\tilde{q} \in \mathbb{D}_{r_0}(p_0)$ tal que $v(\tilde{q}) = 0$ e assim $|\mathring{A}|^2(\tilde{q}) = 0$ o que contradiz a hipótese de p_0 ser o único ponto umbílico em $\mathbb{D}_{r_0}(p_0)$. Concluimos assim que não existe um ponto $p \in \Sigma^2$ tal que $v(p) < 0$ e portanto

$$0 \leq v = 2 + H \langle \vec{x}, N \rangle. \quad (2.4)$$

Pelo **Teorema 1.27**, as condições (2.1) e (2.4) garantem então que $Hess_{\Sigma} \varphi(x)(Y, Y) \geq 0$ como queríamos. ■

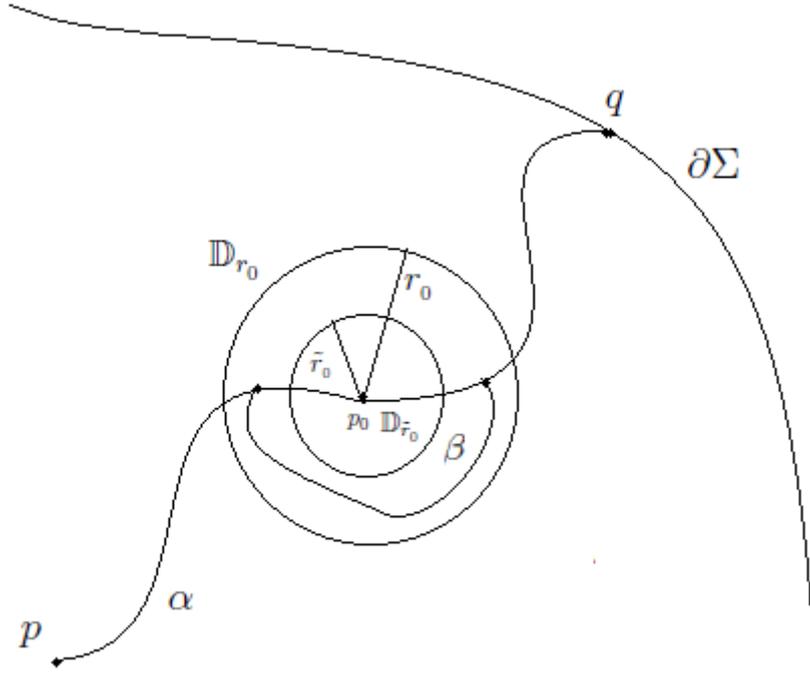


Figura 2.1:

Lema 2.2. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície CMC de bordo livre. Suponha que a condição*

$$|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2$$

seja satisfeita em todo ponto $p \in \Sigma$. Então,

- i) A curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ cumpre $k_{ge} = 1$, em particular $\partial\Sigma$ é estritamente convexo.
 ii) O conjunto

$$\mathcal{C} = \{p \in \Sigma; \varphi(p) = \min_{\Sigma} \varphi(x)\}$$

é totalmente convexo, em que $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(x) = |\vec{x}|^2$

Demonstração. Seja $\alpha : I \rightarrow \partial\Sigma$ uma parametrização do bordo de Σ pelo comprimento de arco. Derivando duas vezes a expressão $\langle \alpha, \alpha \rangle = 1$ e usando o fato que $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$ obtemos $\langle \alpha'', \alpha \rangle = -1$. Seja ν o normal interior ao bordo $\partial\Sigma$. Como o ângulo de contato entre Σ e $\partial\mathbb{B}^3$ é $\theta = \frac{\pi}{2}$ devemos ter $\nu = -\alpha$. Calculando a curvatura geodésica k_{ge} do bordo $\partial\Sigma$ temos

$$k_{ge} = \langle \alpha'', \nu \rangle = \langle \alpha'', -\alpha \rangle = 1.$$

Assim, $k_{ge} > 0$ e segue o item i).

Para provar ii) consideremos $p_1, p_2 \in \mathcal{C}$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ uma geodésica com $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma(1) = p_2$, cuja existência segue da convexidade do bordo $\partial\Sigma$. Considere $h(t) = (\varphi \circ \gamma)(t)$, pela **Proposição 2.1.**, a condição de Gap sobre a $|\mathring{A}|^2$ garante que $\text{Hess}_{\Sigma} \varphi \geq 0$ o que implica que $h'' \geq 0$ e assim, h é uma função convexa. Como h tem um mínimo em $t = 0$ e em $t = 1$, decorre que $h(t) \equiv \min_{\Sigma} \varphi(x)$ e portanto $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{C}$. Assim, qualquer geodésica ligando dois pontos de \mathcal{C} está inteiramente contida em \mathcal{C} de onde se conclui que \mathcal{C} é totalmente convexo. ■

Lema 2.3. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície CMC de fronteira livre tal que a condição*

$$|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2$$

seja satisfeita sobre Σ^2 . Considere ainda o conjunto \mathcal{C} como no lema anterior. Então uma das seguintes situações deve ocorrer:

- i) \mathcal{C} contém um único ponto p ,
 ii) ou \mathcal{C} contém mais de um ponto, e nesse caso, quaisquer p_1 e $p_2 \in \mathcal{C}$ podem ser ligados por uma geodésica minimizante $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ tal que $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{C}$. Portanto, \mathcal{C} é um conjunto conexo.

Demonstração. Como Σ é compacta e φ é contínua, segue que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Se \mathcal{C} contém um único ponto ocorre o item i) e não há mais o que provar. Agora, se \mathcal{C} contém mais de um ponto, digamos p_1 e p_2 , a convexidade estrita do bordo $\partial\Sigma$ (**Lema 2.2**) garante que existe uma geodésica minimizante $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ tal que $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma(1) = p_2$. Pelo item ii) do mesmo lema, temos que $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{C}$ e portanto \mathcal{C} é conexo. ■

Teorema 2.4. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície CMC de fronteira livre tal que a condição*

$$|A|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2$$

seja satisfeita sobre Σ^2 . Então, uma das duas situações deve ocorrer:

- i) Σ é uma calota esférica*
- ii) ou Σ é uma parte de uma superfície de Delaunay.*

Demonstração. Se ocorre o item *i)* do **Lema 2.3**, afirmamos que Σ tem a topologia de um disco. De fato, suponha que existe um loop α não homotópico ao trivial e com base em $p \in \mathcal{C}$. Usando o fato de que o bordo de Σ é estritamente convexo podemos minimizar o comprimento na classe de homotopia $[\alpha]$ e encontrar um loop geodésico β em $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ com base em p . Porém, como \mathcal{C} é totalmente convexo devemos ter $\beta \subset \mathcal{C}$, absurdo! pois $\mathcal{C} = \{p\}$. Assim, $\pi_1(\Sigma, p) = 0$ e portanto, Σ tem a topologia de um disco. Pelo teorema de Nitsche [28], temos que Σ é totalmente umbílica e portanto é uma calota esférica.

Agora, se \mathcal{C} tem mais de um ponto, ocorre precisamente o item *ii)* do **Lema 2.3**. Seja então $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$ uma geodésica minimizante ligando dois pontos em \mathcal{C} e $c = \min_{\Sigma} \varphi(x)$. Como $\gamma(t)$ é ponto crítico de $\varphi|_{\Sigma} \forall t$, temos que $\nabla^{\Sigma} \varphi|_{\gamma} = 0$ e sendo $\nabla^{\Sigma} \varphi$ a projeção de $\nabla^{\mathbb{R}^3} \varphi$ sobre $T_q \Sigma$, devemos ter $\nabla^{\mathbb{R}^3} \varphi = aN$ sobre $\gamma(t)$ para alguma constante a . Para x tal que $|\vec{x}|^2 = c$ o campo vetorial $\nabla^{\mathbb{R}^3} \varphi$ é normal à curva de nível $\mathbb{S}^2(\sqrt{c}) = \{x \in \mathbb{R}^3; \varphi(x) = c\}$ e sendo $\nabla^{\mathbb{R}^3} \varphi = aN$ sobre $\gamma(t)$ temos que N também é normal à esfera $\mathbb{S}^2(\sqrt{c})$. Logo, $\gamma(t)$ é geodésica em $\mathbb{S}^2(\sqrt{c})$ e portanto é um arco de círculo.

Seja E o vetor normal unitário ao plano que contém γ . Consideremos então o campo de Killing;

$$V = \vec{x} \wedge E \tag{2.5}$$

que é induzido por rotações de \mathbb{R}^3 em torno de E . Dessa forma, defina a função $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$v(x) = \langle V, N \rangle. \tag{2.6}$$

A função v é solução da equação (veja [17], proposição 1.),

$$\Delta_{\Sigma} v + |A|^2 v = 0. \tag{2.7}$$

Entretanto, observe que

$$v(\gamma(t)) = \langle V(\gamma(t)), N(\gamma(t)) \rangle = \langle \gamma(t) \wedge E, N(\gamma(t)) \rangle = 0,$$

já que $N(\gamma(t))$ é paralelo à $\gamma(t)$. Logo,

$$\frac{d}{dt}(v \circ \gamma)(t) = 0 \quad \forall t. \tag{2.8}$$

Para cada $t_0 \in [0, 1]$, seja $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ uma curva tal que $\beta(0) = \gamma(t_0)$, $\beta'(0) \perp \gamma'(t_0)$. Considere $N(s)$ a restrição do campo normal N à β , então

$$\frac{d}{ds}(v \circ \gamma)(s)|_{s=0} = \langle \beta'(0) \wedge E, N(s) \rangle + \langle \beta(0) \wedge E, N'(0) \rangle = 0, \quad (2.9)$$

pois $\gamma'(t_0) \perp \beta'(0)$, $\gamma'(t_0) \perp E$ e $\gamma'(t_0) \perp N(0)$. Assim $\beta'(0)$, E e $N(0)$ estão no mesmo plano e portanto $\langle \beta'(0) \wedge E, N(s) \rangle = 0$. Por outro lado, $\gamma'(t_0)$ é direção principal de Σ em $\gamma(t_0)$, e como $\beta'(0) \perp \gamma'(t_0)$, $\beta'(0)$ também é direção principal de Σ em $\beta(0) = \gamma(t_0)$ e portanto $N'(0) // \beta'(0)$. Assim, $\gamma'(t_0) \perp N'(0)$, $\gamma'(t_0) \perp E$, $\gamma'(t_0) \perp \beta(0)$ e por uma razão semelhante à anterior devemos ter $\langle \beta(0) \wedge E, N'(0) \rangle = 0$. Dessa forma, $\gamma(t)$ é um ponto críticos para a função $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \forall t$. Por S. Y. Cheng [13], (Teorema 2.5) os pontos críticos sobre as linhas nodais de uma solução não trivial de uma equação como (2.7) devem ser isolados, o que não ocorre nesse caso. Logo, $v \equiv 0$, o que significa que o campo de killing V é tangente a Σ e portanto, é invariante pelo mesmo. Como o campo de killing é induzido por rotações, é equivalente dizer que Σ é de rotação. ■

Corolário 4. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície CMC de fronteira livre tal que a condição*

$$|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 < \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2$$

seja satisfeita sobre Σ^2 . Então, Σ^2 é uma calota esférica.

Demonstração. A desigualdade estrita nesse caso equivale a $\text{Hess}_\Sigma \varphi > 0$. Assim, existe apenas um ponto crítico no conjunto \mathcal{C} e portanto Σ deve ser uma calota esférica. ■

Corolário 5. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície CMC de fronteira livre tal que a condição,*

$$|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2$$

seja satisfeita sobre Σ^2 . Suponha ainda que a desigualdade acima seja satisfeita com a igualdade para algum ponto p . Então Σ é parte de uma superfície de Delaunay.

Demonstração. Primeiro afirmamos que Σ não é uma calota esférica. De fato, pois caso contrário, como vimos na **Proposição 2.1**, se Σ^2 é uma calota esférica, devemos ter $(2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)(q) > 0 \forall q \in \Sigma$. Assim, em p ocorre

$$0 = |\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 = \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2 > 0$$

absurdo! Logo, precisamente a situação *ii*) do **Teorema 2.4** deve ocorrer. ■

Vimos até agora que a desigualdade (2.1) da **Proposição 2.1** classifica as superfícies CMC de fronteira livre $\Sigma^2 \hookrightarrow \mathbb{B}^3$, mais precisamente, uma das duas situações podem ocorrer: Σ^2 é uma calota esférica ou uma porção de uma superfície de Delaunay. É bastante

intuitivo, porém não imediato, que podemos intersectar uma bola euclidiana com uma superfície de Delaunay de forma que a parte confinada em \mathbb{B}^3 seja uma superfície CMC de bordo livre, isto é, com curvatura média constante e encontrando o bordo $\partial\mathbb{B}^3$ ortogonalmente. O que faremos adiante é mostrar que existe uma porção de um ondolóide, por exemplo, confinada em uma bola euclidiana de raio r centrada na origem que satisfaz a desigualdade

$$|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2.$$

Observação 2.5. Pela **Proposição 2.1**, a condição acima é equivalente a $Hess_{\Sigma}\varphi \geq 0$ para $\phi(x) = |\vec{x}|^2$. Como os autovalores de $Hess_{\Sigma}\varphi$ são dados por $\lambda_i = 1 + k_i \langle \vec{x}, N \rangle$, $i = 1, 2$ temos que (2.1) é equivalente à

$$(1 + k_1 \langle \vec{x}, N \rangle) \geq 0 \quad e \quad (1 + k_2 \langle \vec{x}, N \rangle) \geq 0. \quad (2.10)$$

As desigualdades acima, por serem mais simples, tornam-se mais úteis para testar se algumas porções de superfícies de Delaunay são exemplos de superfícies que satisfazem a condição do **Teorema 2.4**.

Seja $X : [s_1, s_2] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(s, \theta) = (x(s) \cos(\theta), x(s) \sin(\theta), z(s)), \quad (2.11)$$

uma parametrização de uma superfície obtida pela revolução da curva $\beta(s) = (x(s), 0, z(s))$ em torno do eixo Oz , em que $x, z : [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves no intervalo (s_1, s_2) . Vamos assumir que β esta parametrizada pelo comprimento de arco e não toca o eixo de revolução, isto é, $x'(s)^2 + z'(s)^2 = 1$ e $x(s) > 0 \forall s \in (s_1, s_2)$. À curva $\beta(s) = X(s, 0) = (x(s), 0, z(s))$ damos o nome de *curva geratriz*. Os vetores

$$X_s(s, \theta) = (x'(s) \cos(\theta), x'(s) \sin(\theta), z'(s)) \quad e \quad X_{\theta}(s, \theta) = (-x(s) \sin(\theta), x(s) \cos(\theta), 0),$$

formam uma base para o espaço tangente $T_{X(s,\theta)}\Sigma$. Escolha a orientação N em um ponto $X(s, \theta)$ dada pelo vetor normal:

$$N = \frac{X_s \wedge X_{\theta}}{|X_s \wedge X_{\theta}|} = (-z'(s) \cos(\theta), -z'(s) \sin(\theta), x'(s)). \quad (2.12)$$

Os coeficientes da primeira forma de Σ são dados por

$$E = \langle X_s, X_s \rangle = 1, \quad F = \langle X_s, X_{\theta} \rangle = 0, \quad G = \langle X_{\theta}, X_{\theta} \rangle = x(s)^2 \quad (2.13)$$

e os da segunda forma fundamental,

$$e = \langle X_{ss}, N \rangle = x'(s)z''(s) - x''(s)z'(s), \quad f = \langle X_{s\theta}, N \rangle = 0, \quad g = \langle X_{\theta\theta}, N \rangle = x(s)z'(s). \quad (2.14)$$

As curvaturas Gaussiana e média são dadas por:

$$K = k_1 k_2 = \frac{e}{E} \frac{g}{G} \quad \text{e} \quad H = k_1 + k_2 = \frac{e}{E} + \frac{g}{G},$$

sendo as curvaturas principais k_1 e k_2 dadas por, $k_1 = \frac{e}{E} = (x'(s)z''(s) - x''(s)z'(s))$ e $k_2 = \frac{g}{G} = \frac{z'(s)}{x(s)}$. Por razões que ficarão claras posteriormente, vamos considerar a curvatura principal k_1 da maneira como sugere o próximo lema.

Lema 2.6. *Seja $\beta(s) = (x(s), 0, z(s))$, com $s \in (s_1, s_2)$, uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e seja Σ , a superfície de obtida pela revolução de β em torno do eixo Oz parametrizada por (2.11). Para cada $s \in (s_1, s_2)$ tal que $z'(s) \neq 0$ temos*

$$k_1(s) = -\frac{x''(s)}{z'(s)}.$$

Demonstração. De fato, como assumimos $z'(s) \neq 0$, podemos fazer,

$$\begin{aligned} k_1(s) &= (x'(s)z''(s) - x''(s)z'(s)) \frac{z'(s)}{z'(s)} \\ &\stackrel{*}{=} \frac{x'(s)z''(s)z'(s) - x''(s)z'(s)^2}{z'(s)} \\ &= \frac{-x''(s)x'(s)^2 - x''(s)z'(s)^2}{z'(s)} \\ &= -\frac{x''(s)}{z'(s)}, \end{aligned}$$

em que (*) segue do fato que $\langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle = 0$, já que β está parametrizada pelo comprimento de arco. ■

Desse modo, a curvatura Gaussiana pode ser reescrita como

$$K = -\left(\frac{x''(s)}{z'(s)}\right) \left(\frac{z'(s)}{x(s)}\right) = -\frac{x''(s)}{x(s)}, \quad (2.15)$$

e a curvatura média como

$$H = -\frac{x''(s)}{z'(s)} + \frac{z'(s)}{x(s)}, \quad \text{se } z'(s) \neq 0, \quad \text{ou} \quad H = x'(s)z''(s) + \frac{z'(s)}{x(s)}, \quad \text{se } z'(s) = 0 \quad (2.16)$$

Lema 2.7. *Seja Σ uma superfície de revolução cuja parametrização é dada por (2.11). Então a função $f(s, \theta) = \langle \vec{x}, N \rangle$, em que \vec{x} denota o vetor posição e N é dado por (2.12) depende apenas do parâmetro s .*

Demonstração. De fato,

$$\langle \vec{x}, N \rangle = -x(s)z'(s) \cos^2(\theta) - x(s)z'(s) \sin^2(\theta) + x'(s)z(s) = x'(s)z(s) - x(s)z'(s)$$
■

Corolário 6. *Seja β uma curva geratriz de uma superfície de revolução Σ cuja parametrização é dada por (2.11). Se a condição*

$$|A|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2$$

é satisfeita sobre β , então é satisfeita sobre toda superfície.

Lema 2.8. *Seja Σ uma superfície de revolução parametrizada por (2.11) cuja curva geratriz $\beta(s) = (x(s), 0, z(s))$, com $s \in (s_1, s_2)$, está parametrizada pelo comprimento de arco. Suponha que para cada $s \in (s_1, s_2)$ as condições*

$$-1 \leq x''(s) \left(x(s) - \frac{x'(s)}{z'(s)} z(s) \right), \text{ se } z'(s) \neq 0 \quad (2.17)$$

$$-1 \leq z(s)z''(s), \text{ se } z'(s) = 0 \quad (2.18)$$

$$-x(s)x'(s)^2 \leq z'(s)x'(s) \quad (2.19)$$

sejam satisfeitas $\forall s$, então temos que

$$|A|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2$$

sobre Σ .

Demonstração. Pela **Observação 2.5** basta verificar que

$$\lambda_1 = 1 + k_1(s) \langle \vec{x}, N \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 + k_2(s) \langle \vec{x}, N \rangle \geq 0.$$

Pelo **Corolário 6**, basta testar as funções λ_1 e λ_2 sobre a curva β . Para $s \in (s_1, s_2)$ tal que $z'(s) \neq 0$, usamos a expressão obtida para k_1 no **Lema 2.6** para obter

$$\begin{aligned} \lambda_1(s) &= 1 - \frac{x''(s)}{z'(s)} (x'(s)z(s) - x(s)z'(s)) \\ &= 1 + x''(s) \left(x(s) - \frac{x'(s)}{z'(s)} z(s) \right). \end{aligned}$$

Portanto, a condição (2.17) garante que $\lambda_1(s) \geq 0$. Por outro lado, se $z'(s) = 0$, então $x'(s)^2 + z'(s)^2 = 1 \Rightarrow x'(s)^2 = 1$ e como $k_1(s) = x'(s)z''(s)$ decorre que,

$$\lambda_1(s) = 1 + x'(s)^2 z(s)z''(s) = 1 + z(s)z''(s).$$

Então, a condição (2.18) garante que $\lambda_1(s) \geq 0$ e em todo caso teremos $\lambda_1(s) \geq 0$. Por fim,

$$\begin{aligned} \lambda_2(s) &= 1 + \frac{z'(s)}{x(s)} (x'(s)z(s) - x(s)z'(s)) \\ &= \frac{x(s) + z'(s)x'(s)z(s) - x(s)z'(s)^2}{x(s)} \\ &= \frac{x(s) + z'(s)x'(s)z(s) - x(s)(1 - x'(s)^2)}{x(s)} \\ &= \frac{z'(s)x'(s)z(s) + x(s)x'(s)^2}{x(s)}. \end{aligned}$$

A condição (2.19) garante que o numerador da expressão acima é não negativo e portanto $\lambda_2(s) \geq 0$ como queríamos. ■

Observação 2.9. *As desigualdades (2.17), (2.18) e (2.19) podem ser obtidas em uma situação mais particular. Por exemplo, suponha que a curva $\beta(s) = (x(s), 0, z(s))$, $s \in [s_1, s_2]$ parametrizada pelo comprimento de arco é tal que $z'(s) \neq 0 \forall s$. Se $x''(s) \geq 0$ e $x(s) - \frac{x'(s)}{z'(s)}z(s) \geq 0$, então $\lambda_1 \geq 0$. Por outro lado, como $z'(s) \neq 0 \forall s$ devemos ter $z'(s) > 0$ ou $z'(s) < 0 \forall s$. Se $x'(s)z(s) \geq 0$ para o caso em que $z'(s) > 0$, a desigualdade em (2.19) é satisfeita e portanto $\lambda_2 \geq 0$. Já para o caso em que $z'(s) < 0$, se tivermos $x'(s)z(s) \leq 0$ o mesmo motivo garante $\lambda_2 \geq 0$.*

A quantidade $x(s) - \frac{x'(s)}{z'(s)}z(s)$ que aparece em (2.17) tem uma interpretação geométrica importante que daremos a seguir.

Lema 2.10. *Seja Σ uma superfície obtida pela revolução da curva $\beta(s) = (x(s), 0, z(s))$ em torno do eixo Oz , em que $x, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis. Considere o conjunto $\mathcal{Z} = \{s \in [a, b]; z'(s) = 0\}$ e defina a função $g : [a, b] \setminus \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$g(s) := x(s) - \frac{x'(s)}{z'(s)}z(s). \quad (2.20)$$

Sejam $s_1 < s_2 \in [a, b]$ tais que,

i) $g(s_1) = g(s_2) = 0$

ii) $x^2(s_1) + z^2(s_1) = x^2(s_2) + z^2(s_2) =: R^2$

iii) $x^2(s) + z^2(s) < R^2 \forall s \in (s_1, s_2)$. Então, a rotação de $\bar{\beta} := \beta|_{[s_1, s_2]}$ produz uma superfície S dentro da bola de raio R cujo bordo ∂S encontra o bordo $\partial \mathbb{B}_R^3$ ortogonalmente.

Demonstração. Basta observar que se $g(s_i) = 0$, $i = 1, 2$ então

$$x(s_i) - \frac{x'(s_i)}{z'(s_i)}z(s_i) = 0 \Rightarrow \frac{x(s_i)}{z(s_i)} = \frac{x'(s_i)}{z'(s_i)}$$

Isto é, as direções determinadas pelo vetor posição da curva β no ponto $\beta(s_i)$ e a direção dada pelo vetor velocidade da curva no respectivo ponto são coincidentes. Assim, a rotação da curva $\bar{\beta}(s)$ em torno do eixo Oz produz uma superfície cujo bordo intersecta ortogonalmente a esfera de raio R . Como por hipótese, $x^2(s) + z^2(s) < R^2 \forall s \in (s_1, s_2)$ temos $S \subset \mathbb{B}_R^3(0)$ ■

Exemplo 2.11. *Seja $a > 0$ e considere Σ o catenóide obtido pela revolução da curva $\beta(t) = (x(t), 0, z(t)) = (a \cosh(\frac{t}{a}), 0, t)$ em torno do eixo Oz . Um estudo sobre os zeros da função*

$g(t) = x(t) - \frac{x'(t)}{z'(t)}z(t)$ conduz a

$$\begin{aligned} 0 &= x(t) - \frac{x'(t)}{z'(t)}z(t) \\ &= a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) - \sinh\left(\frac{t}{a}\right)t \\ \Rightarrow \frac{a}{t} &= \frac{\sinh\left(\frac{t}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{t}{a}\right)}. \end{aligned}$$

Escolhendo y como solução da equação $\tanh(y) = \frac{1}{y}$ ($y = \pm 1,19968\dots$) e tomando $t_1 = -a|y|$ e $t_2 = a|y|$ obtemos $g(t_i) = 0$ $i = 1, 2$. A paridade da função $\cosh(t)$ garante que $(a \cosh(t_1/a))^2 + t_1^2 = (a \cosh(t_2/a))^2 + t_2^2 =: r^2$, já que $t_2 = -t_1$. Além disso, da forma como definimos r , o decréscimo e o crescimento de $\cosh(t)$ respectivamente em $(t_1, 0)$ e $(0, t_2)$ garante que $(a \cosh(t/a))^2 + t^2 < r^2 \forall t \in (t_1, t_2)$. Usando o **Lema 2.10** concluímos que a rotação de $\bar{\beta} = \beta_{|[t_1, t_2]}$ produz uma superfície mínima de fronteira livre na bola de raio r .

Mostraremos agora, que existem superfícies de Delaunay Σ com $H \neq 0$ que nos permite construir uma superfície CMC de fronteira livre na bola unitária dada por $\tilde{\Sigma} := \Sigma \cap \mathbb{B}^3$ de maneira que a condição

$$|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2}(2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2$$

seja satisfeita sobre $\tilde{\Sigma}$.

Consideremos a superfície de revolução Σ cuja curva geratriz é dada pela solução de Kenmotsu ([22], secção 2. equação (11)): Para $B, H \in \mathbb{R}$ com $H > 0$, $B \geq 0$ e $B \neq 1$ consideremos a curva parametrizada pelo comprimento de arco:

$$\beta_{B,H}(s) = (x_{B,H}(s), 0, z_{B,H}(s)) \quad s \in \mathbb{R}, \quad (2.21)$$

em que

$$\begin{aligned} x_{B,H}(s) &= \frac{1}{H} \sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(Hs + \frac{3\pi}{2})}, \\ z_{B,H}(s) &= \int_{\frac{3\pi}{2H}}^{s + \frac{3\pi}{2H}} \frac{1 + B \sin(Ht)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(Ht + \frac{3\pi}{2})}} dt. \end{aligned}$$

Usando a paridade das funções $\sin(Ht + \frac{3\pi}{2})$ e $\sin(Ht)$ podemos obter

$$\beta_{B,H}(-s) = (x_{B,H}(-s), 0, z_{B,H}(-s)) = (x_{B,H}(s), 0, -z_{B,H}(s)). \quad (2.22)$$

Isso nos diz que a curva $\beta_{B,H}$ é simétrica com relação ao eixo Ox . Para simplificar a notação, escreveremos $x_{B,H}(s)$ como $x(s)$ apenas e o mesmo vale para $z_{B,H}(s)$ que denotaremos por $z(s)$.

As componentes do vetor velocidade da curva $\beta_{B,H}(s)$ no plano xz são dadas por:

$$x'(s) = \frac{B \cos(Hs + \frac{3\pi}{2})}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(Hs + \frac{3\pi}{2})}} \quad \text{e} \quad z'(s) = \frac{1 + B \sin(Hs + \frac{3\pi}{2})}{\sqrt{1 + B^2 + 2B \sin(Hs + \frac{3\pi}{2})}}. \quad (2.23)$$

Já as componentes da aceleração são dadas por:

$$x''(s) = \frac{-BH(B + \sin(Hs + \frac{3\pi}{2}))(B \sin(Hs + \frac{3\pi}{2}) + 1)}{(1 + B^2 + 2B \sin(Hs + \frac{3\pi}{2}))^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.24)$$

$$z''(s) = \frac{HB^2 \cos(Hs + \frac{3\pi}{2})(B + \sin(Hs + \frac{3\pi}{2}))}{(1 + B^2 + 2B \sin(Hs + \frac{3\pi}{2}))^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.25)$$

Usando as equações em (2.16) podemos verificar que Σ é uma superfície de revolução em torno do eixo Oz e com curvatura média constante H .

Teorema 2.12 (*Teorema de Delaunay*). *Uma superfície de revolução completa com curvatura média constante deve ser uma esfera, um catenóide ou uma superfície cuja curva geratriz é dada por $\beta_{B,H}(s)$ em (2.21).*

As superfícies obtidas como descrito acima são chamadas superfícies de Delaunay e suas curvas geratrizes são descritas na figura 2.2.

Observe que para $B = 0$, $\beta_{0,H}(s)$ gera um cilindro de raio $r = 1/H$. Para valores de B tal que $0 < B < 1$ a função $z(s)$ cresce monotonicamente e a superfície obtida recebe o nome de *ondolóide*. Se $B > 1$, a função $z(s)$ não cresce monotonicamente e a superfície obtida recebe o nome de *Nodóide* (veja fig. 2.3).

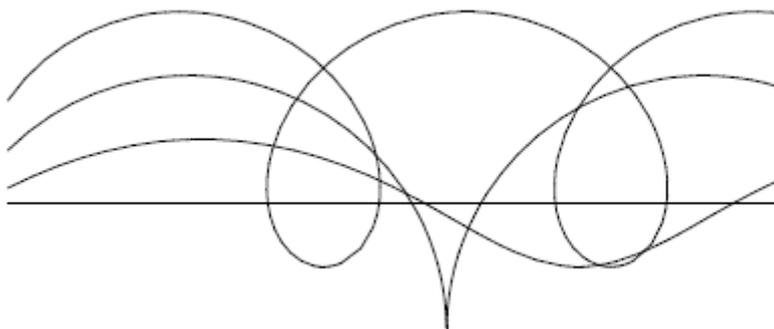


Figura 2.2: Curva geratriz para os casos $H = 0.5$ e $B = 0, 0.5, 1, 1.5$. Fonte: [24].

Inicialmente, vamos restringir nossa atenção para valores de $0 < B < 1$. Uma observação importante para esse caso é que a função z cumpre $z'(s) > 0 \forall s$. Considere s_0 o menor valor positivo para o qual se tem $x''(s_0) = 0$, a saber, $s_0(H, B) = \frac{1}{H} \sin^{-1}(-B) + \frac{\pi}{2H}$, em que $\sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Para $s \in (-s_0, s_0)$ temos $z'(s) > 0$ e $x''(s) > 0$.

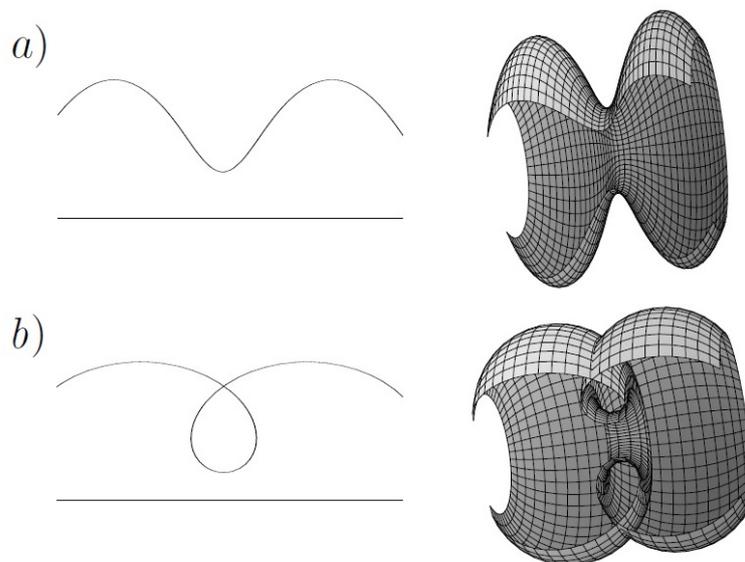


Figura 2.3: a) porção de um ondolóide; b) porção de um nodóide. Fonte: [24].

Lema 2.13. Fixados $0 < B < 1$ e $H > 0$, considere a função $g : [-s_0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (2.20). Então,

i) $g(0) > 0$,

ii) $g'(0) = g'(s_0) = 0$, g é crescente em $(-s_0, 0)$ e decrescente em $(0, s_0)$.

Demonstração. i) é imediato, pois,

$$g(0) = x(0) - \frac{x'(0)}{z'(0)}z(0) = \frac{1-B}{H} > 0$$

ii) Primeiro, observe que

$$g'(s) = - \left(\frac{x'(s)}{z'(s)} \right)' z(s).$$

Como $z(0) = 0$, segue que $g'(0) = 0$. Por outro lado, usando a expressão obtida para a curvatura principal k_1 no **Lema 2.6** obtemos

$$\begin{aligned} g'(s) &= - \left(\frac{x'(s)}{z'(s)} \right)' z(s) \\ &= - \frac{(x''(s)z'(s) - x'(s)z''(s))}{z'(s)^2} z(s) \\ &= \frac{k_1(s)}{z'(s)^2} z(s) \\ &= - \frac{x''(s)}{z'(s)^3} z(s). \end{aligned}$$

Sendo s_0 tal que $x''(s_0) = 0$, devemos ter $g'(s_0) = 0$. Além disso, como $x''(s) > 0$ no intervalo $(-s_0, s_0)$, o sinal de $g'(s)$ depende apenas do sinal de $z(s)$ já que $z'(s)$ é positivo em $(-s_0, s_0)$. Portanto,

i) Sendo $z(s) < 0$ em $(-s_0, 0)$, temos $g'(s) < 0$ em $(-s_0, 0)$

ii) Equivalentemente, $z(s) > 0$ em $(0, -s_0)$, e portanto, $g'(s) > 0$ em $(0, -s_0)$ ■

Lema 2.14. *Dados $0 < B < 1$ e $H > 0$ considere $\beta_{B,H}(s) = (x_{B,H}(s), 0, z_{B,H}(s))$ como em (2.21). Fixe $z_0 = \frac{1-B^2}{HB}$ e defina g como em (2.20). Fazendo $s_0 = s_0(H, B) = \frac{1}{H} \sin^{-1}(-B) + \frac{\pi}{2H}$ temos as seguintes situações;*

i) Se $z(s_0) < z_0$, então $g(s) > 0 \forall s \in (0, s_0)$.

ii) Se $z(s_0) \geq z_0$, então $g(\bar{s}) = 0$ para algum $\bar{s} \in (0, s_0]$. Consequentemente, a superfície obtida pela rotação de $\tilde{\beta}(s) = \beta_{B,H}(s)$, com $s \in [-\bar{s}, \bar{s}]$, gera uma superfície CMC de fronteira livre em $\mathbb{B}_{R_0}^3$, em que $R_0^2 = x^2(\bar{s}) + z^2(\bar{s})$.

Demonstração. *i)* Pelo item *ii)* do **Lema 2.13** g é decrescente em $(0, s_0)$, e portanto, $g(s_0) < g(s) \forall s \in (0, s_0)$. Levando em conta que $\sin(Hs_0 + \frac{3\pi}{2}) = -B$ e $z(s_0) < z_0$, temos

$$\begin{aligned} g(s_0) &= x(s_0) - \frac{x'(s_0)}{z'(s_0)}z(s_0) \\ &> x(s_0) - \frac{x'(s_0)}{z'(s_0)}z_0 \\ &= \frac{\sqrt{1-B^2}}{H} - \frac{B\sqrt{1-B^2}}{1-B^2} \frac{(1-B^2)}{BH} \\ &= 0, \end{aligned}$$

e portanto, $g(s) > 0$.

ii) De modo semelhante, se $z(s_0) \geq z_0$, então

$$\begin{aligned} g(s_0) &= x(s_0) - \frac{x'(s_0)}{z'(s_0)}z(s_0) \\ &\leq x(s_0) - \frac{x'(s_0)}{z'(s_0)}z_0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto é, $g(s_0) \leq 0$. Pelo item *i)* do **Lema 2.13**, $g(0) > 0$ e decorre então por continuidade que existe $\bar{s} \in (0, s_0]$ tal que $g(\bar{s}) = 0$. Por (2.22) temos $x(-s) = x(s)$ e $z(-s) = -z(s)$, portanto $x'(-s) = -x'(s)$ e $z'(-s) = z'(s)$. Assim, $g(-\bar{s}) = g(\bar{s}) = 0$ e além disso, como $x'(0) = 0$ e $x''(s) > 0$ temos $x'(s) > 0 \forall s \in (0, \bar{s}]$. Desse modo, $x'(s) > 0$ e $z'(s) > 0$ garantem que $x^2(s) + z^2(s) < R_0^2 := x^2(\bar{s}) + z^2(\bar{s}) \forall s \in (0, \bar{s}]$. Novamente, a equação (2.22) nos diz que a curva $\beta_{B,H}$ é simétrica com relação ao eixo x no plano zx , e portanto, $x^2(s) + z^2(s) \leq R_0^2 \forall s \in [-\bar{s}, \bar{s}]$. Então, o item *ii)* do **Lema 2.10** garante o resultado. ■

Exemplo 2.15. *Considere $\beta_{B,H}(s) = (x_{B,H}(s), 0, z_{B,H}(s))$ como em (2.21) para $B = 0.9$ e $H = 0.1$. Fixe $z_0 = \frac{1-B^2}{HB} = 2.\bar{1}$, nesse caso teremos $s_0 = s_0(H, B) = 10 \sin^{-1}(-0.9) + 5\pi \approx$*

4.51026.... Assim,

$$z(s_0) = \int_{15\pi}^{4,51026\dots+15\pi} \left(\frac{1 + 0,9 \sin(0,1t)}{\sqrt{1 + (0,9)^2 + 1,8 \sin(0,1t)}} \right) dt \approx 2,71697\dots$$

Portanto, $z(s_0) \geq z_0$. Pelo item ii) do **Lema 2.14** existe $\bar{s} \in (0, s_0]$ tal que $g(\bar{s}) = 0$. Considerando então, a rotação da curva $\tilde{\beta}(s) := \beta_{B,H}(s)$ $s \in [-\bar{s}, \bar{s}]$ em torno do eixo Oz , temos uma superfície CMC de fronteira livre na bola $\mathbb{B}_{R_0}^3$, em que $R_0 = \sqrt{x^2(\bar{s}) + z^2(\bar{s})}$.

Exemplo 2.16. Dados $0 < B < 1$ e $H > 0$ considere $\beta_{B,H}(s) = (x_{B,H}(s), 0, z_{B,H}(s))$ como em (2.21). Fixe $z_0 = \frac{1-B^2}{HB}$ e considere o menor valor positivo s_0 tal que $x''(s_0) = 0$, a saber, $s_0 = s_0(H, B) = \frac{1}{H} \sin^{-1}(-B) + \frac{\pi}{2H}$. Suponha também que $z(s_0) \geq z_0$. Pelo item ii) do **Lema 2.14** a rotação de $\tilde{\beta}(s) = \beta_{B,H}(s)$ tal que $s \in [-\bar{s}, \bar{s}]$ para algum $\bar{s} \in (0, s_0]$ gera uma superfície CMC de fronteira livre na bola $\mathbb{B}_{R_0}^3$ de raio $R_0 = \sqrt{x^2(\bar{s}) + z^2(\bar{s})}$. Nesse caso, para todo $s \in [-\bar{s}, \bar{s}]$ temos,

i) $x''(s) \geq 0$. De fato, pois $[-\bar{s}, \bar{s}] \subset [-s_0, s_0]$ em que $[-s_0, s_0]$ foi escolhido pra ser a maior vizinhança do zero onde $x''(s) \geq 0$.

ii) $g(s) = x(s) - \frac{x'(s)}{z'(s)}z(s) \geq 0$. Decorre do **Lema 2.13**. e do fato que \bar{s} é o menor valor positivo tal que $g(\bar{s}) = 0$.

iii) $z(s)x'(s) \geq 0$. Pela equação (2.22) temos, $x(-s) = x(s) \Rightarrow x'(-s) = -x'(s)$ e $z(-s) = -z(s) \Rightarrow z'(-s) = z'(s)$ de onde segue o resultado.

Os itens i), ii) e iii) acima garantem que as desigualdades (2.17) do **Lema 2.8** sejam satisfeitas e portanto,

$$|\mathring{A}|^2 \langle \vec{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle \vec{x}, N \rangle)^2 \quad (2.26)$$

sobre Σ .

Pela proposição **Proposição 2.1** a condição acima é equivalente à $Hess_{\Sigma}\varphi(x) \geq 0$ para $\varphi(x) = |\vec{x}|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$. Por uma mudança de escala na métrica euclidiana dada por $\bar{g} = \frac{1}{R_0^2} \langle \cdot, \cdot \rangle$, obtemos uma isometria entre a bola unitária $(\mathbb{B}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e a bola $(\mathbb{B}_{R_0}^3, \bar{g})$ de raio R_0 com a métrica \bar{g} . Agora, observe que para $\tilde{\varphi}(x) = \bar{g}(\vec{x}, \vec{x}) = \frac{1}{R_0^2} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \frac{1}{R_0^2} \varphi(x)$ temos

$$Hess_{\Sigma}\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{R_0^2} Hess_{\Sigma}\varphi(x).$$

A identidade acima nos diz que a condição (2.26) é invariante por escalonamento da métrica euclidiana. Isto é, se $\Sigma \hookrightarrow (\mathbb{B}_{R_0}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ satisfaz (2.26). Então $\Sigma \hookrightarrow (\mathbb{B}_{R_0}^3, \bar{g})$ satisfaz,

$$|\mathring{A}_1|^2 \bar{g}(\vec{x}, \bar{N})^2 \leq \frac{1}{2} (2 + \bar{H} \bar{g}(\vec{x}, \bar{N}))^2,$$

em que \bar{N} , \bar{H} e $|\mathring{A}_1|^2$ denotam respectivamente o vetor normal, a curvatura média e a umbilicidade total de Σ com respeito à métrica \bar{g} .

O próximo exemplo diz essencialmente que existe também uma porção de um nodóide dentro da bola unitária e com fronteira livre que satisfaz a condição (2.17).

Exemplo 2.17. *Dados $B > 1$ e $H > 0$ considere $\beta(r) = (x(r), 0, z(r))$ como em (2.21), onde x, z estão definidas no intervalo $I_0 = (-r_0, r_0)$ sendo r_0 o menor valor real positivo tal que $z'(r_0) = 0$. Nesse caso teremos $z'(r) < 0 \forall r \in I_0$. Considere também a função g definida em I_0 como em (2.20). Temos,*

i) Para algum $\bar{r} \in (0, r_0)$, $g(\bar{r}) = g(-\bar{r}) = 0$ e $g(r) \geq 0 \forall r \in [-\bar{r}, \bar{r}]$. De fato, pois nesse caso $g(0) > 0$ e $g(r) \rightarrow -\infty$ quando $r \rightarrow r_0$, portanto deve existir \bar{r} tal que $g(\bar{r}) = 0$ e $g(r) \geq 0 \forall r \in (0, \bar{r}]$ e pela definição de g devemos ter também $g(-\bar{r}) = 0$ com $g(r) \geq 0 \forall r \in [-\bar{r}, \bar{r}]$.

ii) $x''(r) > 0 \forall r \in [-\bar{r}, \bar{r}]$. De fato, a conclusão segue da expressão de $x''(r)$ em (2.24). Visto que $z'(r) < 0$ para $r \in [-\bar{r}, \bar{r}]$, expressão de $z'(r)$ em (2.23) garante que $1 + B \sin(Hr + \frac{3\pi}{2}) < 0$ em $[-\bar{r}, \bar{r}]$. Assim, (2.24) garante que $x''(r) > 0 \forall r \in [-\bar{r}, \bar{r}]$, como queríamos.

iii) $x'(r)z(r) \leq 0 \forall r \in [-\bar{r}, \bar{r}]$. Segue da análise das expressões de x' e z no intervalo em questão.

Os itens *i) ii) e iii)* garantem pelos **Lemas 2.8 e 2.10** que a rotação revolução de β restrita ao intervalo $[-\bar{r}, \bar{r}]$ produz uma superfície Σ de curvatura média constante H de fronteira livre na bola de raio $R_0 = \sqrt{x^2(\bar{r}) + z^2(\bar{r})}$ e como fizemos no exemplo anterior, podemos reescalonar a métrica e assumir que a condição

$$|\mathring{A}|^2 \langle \bar{x}, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle \bar{x}, N \rangle)^2$$

é satisfeita sobre Σ .

2.2 Subvariedades mínimas de fronteira livre em uma classe de variedades conforme a bola euclidiana

$$\mathbb{B}_r^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Seja $u : [0, a^2) \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < \infty$ ou $a = \infty$) uma função suave. Considere $(\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ a bola euclidiana de raio r centrada na origem com uma métrica conforme $\bar{g} = e^{2u(|x|^2)} \langle \cdot, \cdot \rangle$, em que

$r < a$ é tal que condição $1 + 2u'(t)t > 0 \forall s \in [0, r^2]$ seja satisfeita. Como vimos no primeiro capítulo, o campo posição \vec{x} em $(\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ é conforme na métrica \bar{g} , cuja função potencial é dada por $\sigma(x) = 1 + 2u'(|x|^2)|x|^2$. Se para um dado $r < a$, temos $\sigma > 0$ em \mathbb{B}_r^{n+1} , então o **Teorema 1.27** garante a existência de uma função $\Psi : \mathbb{B}_r^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que se $\Sigma^k \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ é uma imersão isométrica de uma hipersuperfície ($k = n$) suave qualquer, onde são satisfeitas as condições geométricas (1.12.a) e (1.12.b), então $\text{Hess}_\Sigma \Psi \geq 0$. Observe ainda que se Σ^k é mínima, ($k \leq n$), então a desigualdade (1.12.b) é trivialmente satisfeita e (1.12.a) é escrita apenas como

$$\frac{1}{\sigma^2} |A|^2 \bar{g}(\vec{x}, N)^2 \leq \frac{n}{n-1}.$$

A condição $\text{Hess}_\Sigma \Psi \geq 0$ desempenha um papel importante no estudo de algumas propriedades topológicas e geométricas de Σ^n . Entretanto, tal função Ψ com a propriedade de ser convexa sobre Σ^n pode ser garantida apenas onde a função potencial do campo conforme \vec{x} é positiva e por isso, exigiremos no decorrer desta seção, que $r < a$ seja escolhido de forma que $\sigma > 0$ em \mathbb{B}_r^{n+1} . Além disso, consideraremos que uma imersão isométrica $\Sigma^k \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ cumpre sempre as condições $\text{int}(\Sigma) \subset \text{int}(\mathbb{B}_r^{n+1})$ e $\partial\Sigma \subset \partial\mathbb{B}_r^{n+1}$.

Superfícies em uma bola conforme à bola tridimensional

O próximo lema diz essencialmente que se a superfície $\Sigma \subset \mathbb{B}_r^3$ é tal que Σ encontra o bordo $\partial\mathbb{B}_r^3$ ortogonalmente, então a imersão $\Sigma \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ é tal que o bordo $\partial\Sigma$ é estritamente convexo desde que a função potencial σ do campo conforme \vec{x} seja positiva em \mathbb{B}_r^3 .

Lema 2.18. *Seja $\Sigma^2 \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma superfície suave. Suponha que Σ encontra o bordo $\partial\mathbb{B}_r^3$ ao longo de um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$. Então $\Sigma \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ tem bordo estritamente convexo.*

Demonstração. Pelo **Lema 1.22** temos

$$\bar{k}_{g_e} = e^{-h} (k_{g_e} - \nu(h)).$$

Calculando k_{g_e} como fizemos no **Lema 2.2** encontraremos $k_{g_e} = \frac{1}{r}$. Além disso, temos

$$\nu(h) = \langle \text{grad}(h), \nu \rangle = 2u'(r^2) \langle \vec{x}, \nu \rangle = 2u'(r^2) \langle -r\nu, \nu \rangle = -2u'(r^2)r.$$

Portanto

$$\bar{k}_{g_e} = e^{-u(r^2)} \left(\frac{1}{r} + 2u'(r^2)r \right) = \frac{e^{-u(r^2)}}{r} (1 + 2u'(r^2)r^2) = \frac{\sigma}{e^{u(r^2)}r}.$$

Como $\sigma > 0$, temos $\bar{k}_{g_e} > 0$ e o resultado segue. ■

Pelo lema acima, podemos pensar no caso de uma imersão mínima $\Sigma \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ de fronteira livre como uma situação particular do principal resultado dessa seção, o **Teorema 2.21**.

Lema 2.19. *Seja $\Sigma \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ uma imersão de uma superfície compacta mínima orientável com bordo estritamente convexo. Se a condição*

$$\frac{1}{\sigma^2} |A|^2 \bar{g}(\vec{x}, \bar{N})^2 \leq 2 \quad (2.27)$$

é satisfeita sobre Σ , então o conjunto

$$\mathcal{C} = \{p \in \Sigma^2; \Psi(p) = \min_{\Sigma} \Psi(x)\} \quad (2.28)$$

*é totalmente convexo, em que Ψ é dada pelo **Teorema 1.27**.*

Demonstração. O lema prova-se de maneira inteiramente análoga ao que fizemos no

Lema 2.2. Basta observar que sob a hipótese (2.27) a função Ψ restrita a Σ é convexa, assim, $\text{Hess}_{\Sigma} \Psi \geq 0$. ■

Lema 2.20. *Seja $\Sigma \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ uma imersão de uma superfície compacta mínima orientável com bordo estritamente convexo tal que a condição (2.27) do lema anterior é satisfeita. Então, o conjunto \mathcal{C} em (2.28)*

- i) contém um único ponto p , ou*
- ii) contém mais de um ponto, e nesse caso, quaisquer p_1 e $p_2 \in \Sigma$ podem ser ligados por uma geodésica minimizante $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ tal que $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{C}$ e portanto, \mathcal{C} é um conjunto conexo.*

O lema acima prova-se de maneira análoga ao que fizemos no **Lema 2.3**.

Teorema 2.21. *Seja $\Sigma \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ uma imersão de uma superfície compacta mínima orientável com bordo estritamente convexo. Suponha que a condição*

$$\frac{1}{\sigma^2} |A|^2 \bar{g}(\vec{x}, \bar{N})^2 \leq 2$$

seja satisfeita sobre σ . Então, uma das duas situações deve ocorrer:

- i) Σ é difeomorfa a um disco,*
- ii) ou Σ é de rotação e tem topologia não trivial.*

A demonstração segue de maneira análoga à do **Teorema 2.4**. Entretanto, faremos aqui a título de completude.

Demonstração. Obtemos o item *i)* de maneira análoga ao fizemos no **Teorema 2.4**. A exceção importante aqui é que não é possível concluir qualquer classificação além da topológica, haja vista que não temos um resultado análogo ao teorema de Nitsche [28], ou A. Ros e R. Souam ([29], Teorema 2.1) para o espaço aqui trabalhado.

ii) Como fizemos no **Teorema 2.4**, suponha agora que ocorre o item ii) do **Lema 2.20**. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$ uma geodésica minimizante ligando dois pontos em \mathcal{C} e $c = \min_{\Sigma} \Psi(x)$. Denotemos por $\bar{\nabla}\Psi$ o gradiente da função Ψ em $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ e por $\nabla\Psi$ o gradiente de Ψ quando restrita a Σ . Como $\gamma(t)$ é um ponto crítico de $\Psi|_{\Sigma} \forall t$, temos que $(\nabla\Psi)|_{\gamma} = 0$ e sendo $\nabla\Psi = (\bar{\nabla}\Psi)^T$, isto é, a projeção de $\bar{\nabla}\Psi$ sobre $T_q\Sigma$, devemos ter $\bar{\nabla}\Psi = aN$ sobre $\gamma(t)$ para alguma constante a . Como a função Ψ é radial, o campo vetorial $\bar{\nabla}\Psi$ é normal às curvas de níveis que são esferas. Considere então \mathbb{S}_{λ}^2 a esfera de raio $\lambda < r$ centrada na origem e tal que $\Psi(x) = c \forall x \in \mathbb{S}_{\lambda}^2$. Como $\bar{\nabla}\Psi = aN$ sobre $\gamma(t)$, temos que N também é normal à esfera \mathbb{S}_{λ}^2 sobre os pontos $x = \gamma(t)$. Logo, como $\gamma(t)$ é geodésica em Σ , também será geodésica em \mathbb{S}_{λ}^2 e portanto é um arco de um grande círculo.

Seja $\pi \subset \mathbb{R}^3$ o plano passando pela origem e que contém γ , e seja E o vetor normal unitário em \mathbb{R}^3 ortogonal a π . Considere o campo V como fizemos em (2.5). A derivada de Lie do campo V cumpre $\mathcal{L}_V \langle, \rangle = 2f \langle, \rangle$ para $f \equiv 0$ e assim, V é um campo de Killing em \mathbb{R}^3 com respeito à métrica canônica. Como estamos considerando $\bar{g} = e^{2h} \langle, \rangle$ segue pela **Proposição 1.13** que $\mathcal{L}_V \bar{g} = 2\sigma \bar{g}$ para $\sigma = f + V(h)$. Usando (1.4) obtemos

$$\sigma = f + V(h(x)) = \langle \nabla h, V \rangle = 2u'(|\vec{x}|^2) \langle \vec{x}, V \rangle = 2u'(|\vec{x}|^2) \langle \vec{x}, \vec{x} \wedge E \rangle = 0,$$

isto é, V também é um campo de Killing na métrica \bar{g} . Defina a função $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$v(x) = \bar{g}(V, \bar{N}). \tag{2.29}$$

Novamente, a função v é solução do problema:

$$\Delta_{\Sigma} v + (\bar{Ric}(\bar{N}) + |A|^2) v = 0, \tag{2.30}$$

(veja [17], Proposição 1), em que $\bar{Ric}(\bar{N})$ denota a curvatura de Ricci de $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ na direção \bar{N} . Observe que sobre $\gamma(t)$ temos

$$v(\gamma(t)) = \bar{g}(V, \bar{N}) = \bar{g}(\vec{x} \wedge E, \bar{N}) = e^{2h} \langle \vec{x} \wedge E, \bar{N} \rangle = 0,$$

já que \bar{N} é paralelo a \vec{x} quando restritos a $\gamma(t)$. Então,

$$\frac{d}{dt}(v \circ \gamma)(t) = 0 \quad \forall t. \tag{2.31}$$

Para cada $t_0 \in [0, 1]$, considere $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ uma curva tal que $\beta(0) = \gamma(t_0)$ e $\beta'(0) \perp \gamma'(t_0)$.

Seja $\bar{N}(s)$ a restrição do campo normal \bar{N} à β , então

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds}(v \circ \beta)(s)|_{s=0} &= \frac{d}{ds}\bar{g}(V, \bar{N})|_{s=0} \\
 &= \frac{d}{ds}(e^{2h} \langle V, \bar{N} \rangle)|_{s=0} \\
 &= \frac{d}{ds}(e^{2h})|_{s=0} \langle V, \bar{N} \rangle|_{s=0} + e^{2h} \frac{d}{ds} \langle V, \bar{N} \rangle|_{s=0} \\
 &= \frac{d}{ds}(e^{2h})|_{s=0} \langle V, \bar{N} \rangle|_{s=0} + e^{2h} \{ \langle \beta'(0) \wedge E, \bar{N}(s) \rangle + \langle \beta(0) \wedge E, \bar{N}'(0) \rangle \} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato de que todas as parcelas na penúltima linha são nulas. A justificativa desse fato segue de maneira inteiramente análoga ao **Teorema 2.4**. ■

Corolário 7. *Seja $\Sigma^2 \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ uma superfície mínima de fronteira livre. Se ocorre a desigualdade estrita em (2.27), então Σ é difeomorfa a um disco.*

Observação 2.22. *O Teorema de Nitshce [28], ou **Teorema 2.1** de A. Ros e R. Souam [29], classificam os discos mínimos de fronteira livre $\Sigma^2 \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ como sendo discos totalmente geodésicos quando $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ tem curvatura seccional constante. Assim, se a condição (2.27) é satisfeita sobre Σ ocorrendo a igualdade em algum ponto p , Σ não pode ser um disco, pois caso fosse, $|A|^2 \equiv 0$ e conseqüentemente,*

$$0 = \frac{1}{\sigma^2} |A|^2 \bar{g}(\vec{x}, \bar{N})^2 = 2 \text{ em } p \in \Sigma,$$

*gerando uma contradição. Como uma das condições i) ou ii) do **Teorema 2.21** deve ocorrer, e acabamos de ver que a condição i) não ocorre, resta apenas a condição ii) para ser satisfeita. Agora, se $(\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ não tem curvatura seccional constante, e $\Sigma^2 \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ é uma superfície mínima de fronteira livre que satisfaz a condição (2.27) ocorrendo a igualdade em algum ponto, não é possível concluir que ocorre precisamente a situação ii) do **Teorema 2.21**, pois como não sabemos se o análogo ao **Teorema 2.1** de A. Ros e R. Souam [29] vale para esses espaços, pode ser possível que ocorra a igualdade na condição (2.27), como acima, e ainda assim Σ ter a topologia de um disco.*

Vamos agora verificar que existem exemplos concretos para o **Teorema 2.21**. Primeiramente, observe que se $\Sigma^2 \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um disco totalmente geodésico de fronteira livre, então a equação (1.6) nos diz que $\Sigma^2 \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$ também é um disco totalmente geodésico de fronteira livre e a condição de gap no **Teorema 2.21** é trivialmente satisfeita.

Seja $x : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ ($c > 0$) uma função suave com $x(t) > 0 \forall t \in (-c, c)$. Considere então a superfície $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ obtida pela revolução da curva $\beta(t) = (x(t), 0, t)$ em torno do

eixo Oz , cuja parametrização é dada por

$$X(t, \theta) = (x(t) \cos(\theta), x(t) \sin(\theta), t). \quad (2.32)$$

Considere também em Σ a orientação dada por

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + x'(t)^2}} (-\cos(\theta), -\sin(\theta), x'(t)).$$

Para evitar confusão com respeito à notação, convém ressaltar que até o final dessa secção, x será usado sempre para representar a função $x : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$, enquanto que \vec{x} denotará o vetor posição que quando avaliado sobre Σ é dado por $\vec{x} = X(t, \theta)$. Calculando os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental, encontraremos as curvaturas principais dadas por

$$k_1 = \frac{-x''(t)}{\sqrt{(1 + x'(t)^2)^3}}, \quad (2.33)$$

$$k_2 = \frac{1}{x(t)\sqrt{1 + x'(t)^2}}. \quad (2.34)$$

Para cada $t \in (-c, c)$, considere a curva

$$\alpha_t(s) = X(\{t\} \times [0, 2\pi x(t)]) = \left(x(t) \cos\left(\frac{s}{x(t)}\right), x(t) \sin\left(\frac{s}{x(t)}\right), t \right)$$

parametrizada pelo comprimento de arco. Seja ν o campo vetorial normal à curva α dado por

$$\nu_t(s) = \frac{-1}{\sqrt{1 + x'(t)^2}} \left(x'(t) \cos\left(\frac{s}{x(t)}\right), x'(t) \sin\left(\frac{s}{x(t)}\right), 1 \right).$$

Defina também a função

$$f(t) := f(t, s) = \langle \alpha_t''(s), \nu_t(s) \rangle = \frac{x'(t)}{x(t)\sqrt{1 + x'(t)^2}}. \quad (2.35)$$

Observação 2.23. *Observe que se α_t é o bordo de uma superfície $X([t - \epsilon, t] \times [0, 2\pi x(t)])$, a curvatura geodésica de α_t é dada por $k_{g_e}(t) = f(t)$. E se α_t for o bordo de uma superfície $X([t, t + \epsilon] \times [0, 2\pi x(t)])$, nesse caso temos $k_{g_e}(t) = -f(t)$.*

Pelo **Lema 1.21**, sob a mudança conforme $\bar{g} = e^{2h} \langle, \rangle$ na métrica euclidiana, as curvaturas principais k_1 e k_2 tornam-se

$$\bar{k}_i = e^{-h} (k_i - N(h)) \quad i = 1, 2, \quad (2.36)$$

em que $N(h) = \langle \text{grad } h, N \rangle$. Como nesse caso $h = u(|\vec{x}|^2)$, segue que

$$\text{grad } h = 2u'(|\vec{x}|^2)\vec{x},$$

e a equação (2.36) é escrita como

$$\bar{k}_i = e^{-h} (k_i - 2u'(|\bar{x}|^2) \langle \bar{x}, N \rangle) \quad i = 1, 2. \quad (2.37)$$

Se Σ , parametrizada por (2.32), é uma superfície mínima na métrica $\bar{g} = e^{2h} \langle \cdot, \cdot \rangle$, então a equação acima fornece

$$k_1 + k_2 = 4u'(|\bar{x}|^2) \langle \bar{x}, N \rangle \quad (2.38)$$

Considerando a expressão do vetor normal N e o vetor posição \bar{x} acima, a expressão da função suporte fica

$$\langle \bar{x}, N \rangle = -\frac{x(t) - x'(t)t}{\sqrt{1 + x'(t)^2}}. \quad (2.39)$$

Usando as expressões de k_1 , k_2 e da função suporte em (2.39), podemos reescrever (2.38) como

$$\frac{x''(t)}{1 + x'(t)^2} = \frac{1}{x(t)} + 4u'(|\bar{x}|^2)(x(t) - x'(t)t). \quad (2.40)$$

Assim, o problema de encontrar superfícies mínimas em $(\mathbb{B}_a^3, \bar{g})$ que sejam parametrizadas por (2.32) é equivalente ao problema de encontrar soluções da equação diferencial (2.40) dadas as condições iniciais de interesse. Por exemplo, se $u \equiv 0$ então $(\mathbb{B}_a^3, \bar{g})$ (para $a = \infty$) é o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 e uma solução da equação acima com condição inicial $x(0) = c_0$ e $x'(0) = 0$ é dada por

$$x(t) = c_0 \cosh\left(\frac{t}{c_0}\right),$$

e está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Entretanto, as soluções da equação (2.40) em geral não podem ser obtidas por uma solução explícita como veremos adiante.

Como vimos na **Observação 2.5**, a condição

$$\frac{1}{\sigma^2} |\bar{A}|^2 \bar{g}(\bar{x}, \bar{N})^2 \leq 2 \quad (2.41)$$

é equivalente à

$$\left(1 + \frac{\bar{k}_1}{\sigma} \bar{g}(\bar{x}, \bar{N})\right) \geq 0 \text{ e } \left(1 + \frac{\bar{k}_2}{\sigma} \bar{g}(\bar{x}, \bar{N})\right) \geq 0. \quad (2.42)$$

Nesse caso, $\bar{k}_1 + \bar{k}_2 = 0$ e assim, as duas desigualdades acima são equivalentes à

$$-1 \leq \frac{\bar{k}_i}{\sigma} \bar{g}(\bar{x}, \bar{N}) \leq 1 \text{ para } i = 1 \text{ ou } i = 2. \quad (2.43)$$

Escolhendo $i = 2$ obtemos,

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_2 \bar{g}(\bar{x}, \bar{N}) &= e^{-h} (k_2 - 2u'(|\bar{x}|^2) \langle \bar{x}, N \rangle) e^{2h} \langle \bar{x}, e^{-h} N \rangle = (k_2 - 2u'(|\bar{x}|^2) \langle \bar{x}, N \rangle) \langle \bar{x}, N \rangle \\
 &= \left(\frac{1}{x(t) \sqrt{1+x'(t)^2}} - 2u'(|\bar{x}|^2) \left(-\frac{x(t) - x'(t)t}{\sqrt{1+x'(t)^2}} \right) \right) \left(-\frac{x(t) - x'(t)t}{\sqrt{1+x'(t)^2}} \right) \\
 &= \left(-\frac{1}{x(t)(1+x'(t)^2)} - 2u'(|\bar{x}|^2) \frac{x(t) - x'(t)t}{1+x'(t)^2} \right) (x(t) - x'(t)t) \\
 &= -\frac{\left(1 + 2u'(|\bar{x}|^2)(x(t) - x'(t)t)x(t) \right) (x(t) - x'(t)t)}{x(t)(1+x'(t)^2)}. \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

Como $\sigma = 1 + 2u'(|\bar{x}|^2) |\bar{x}|^2 = 1 + 2u'(|\bar{x}|^2)(x(t)^2 + t^2)$, temos

$$\frac{\bar{k}_2}{\sigma} \bar{g}(\bar{x}, \bar{N}) = -\frac{\left(1 + 2u'(|\bar{x}|^2)(x(t) - x'(t)t)x(t) \right) (x(t) - x'(t)t)}{(1 + 2u'(x(t)^2 + t^2)(x(t)^2 + t^2))x(t)(1+x'(t)^2)},$$

e a condição (2.43) é então equivalente à

$$-1 \leq \frac{\left(1 + 2u'(|\bar{x}|^2)(x(t) - x'(t)t)x(t) \right) (x(t) - x'(t)t)}{(1 + 2u'(|\bar{x}|^2)(x(t)^2 + t^2))x(t)(1+x'(t)^2)} \leq 1. \tag{2.45}$$

Uma vez que exista uma solução $x : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ da equação (2.40), suponha que existam $t_1, t_2 \in (-c, c)$ nas condições do **Lema 2.10**. Então, (2.32) para $x : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$, é uma parametrização de uma superfície mínima de fronteira livre em $(\mathbb{B}_{r_0}^3, \bar{g})$. Assim, basta verificarmos a equação (2.45) para a função $x : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ para que a condição

$$\frac{1}{\sigma^2} |A|^2 \bar{g}(\bar{x}, \bar{N})^2 \leq 2$$

seja satisfeita sobre Σ .

Exemplo 2.24. *Seja $(\mathbb{B}_a^3, \bar{g})$ para $a = \infty$ e $\bar{g} = \langle, \rangle$, isto é, o espaço euclidiano. Como vimos anteriormente, uma solução da equação (2.40) com $x'(0) = 0$ e $x(0) = 1$ é dada por,*

$$x(t) = \cosh(t).$$

Usando a função acima na equação (2.44) e levando em conta que $u \equiv 0$, temos

$$\frac{\cosh(t) - \sinh(t)t}{\cosh(t)(1 + \sinh^2(t))} = \frac{\cosh(t) - \sinh(t)t}{\cosh^3(t)}.$$

Como a expressão acima satisfaz a condição (2.43), isto é,

$$-1 \leq \frac{\cosh(t) - \sinh(t)t}{\cosh^3(t)} \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

em particular, satisfaz também na porção restrita ao intervalo dado pelo **Exemplo 2.11**.

Para o caso euclidiano com mencionado acima, temos uma solução explícita para a equação (2.40). Entretanto, para o caso geral em que se considera uma métrica conforme $\bar{g} = e^{2u(|\vec{x}|^2)} \langle \cdot, \cdot \rangle$ para uma função suave u qualquer, não se tem, em geral, uma solução explícita para a equação citada acima. Assim, a verificação da condição (2.43) para esses casos, torna-se uma tarefa menos trivial.

Vamos agora concentrar nossa atenção para o caso em que a métrica canônica no espaço \mathbb{R}^3 é mudada conformemente para $\bar{g} = e^{2h} \langle \cdot, \cdot \rangle = e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle$. Assim, $h(x) = u(|\vec{x}|^2) = -\frac{|\vec{x}|^2}{8}$ e o espaço $(\mathbb{R}^3, e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado Espaço Gaussiano. Existe um grande interesse no estudo de superfícies mínimas no espaço Gaussiano por estarem relacionadas com o fluxo de curvatura média. Tais superfícies quando vistas como subvariedades do \mathbb{R}^3 são chamadas de Self-Shrinkers.

Pela **Proposição 1.13**, o campo posição \vec{x} é conforme na métrica $\bar{g} = e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle$ e cumpre, $\mathcal{L}_{\vec{x}}\bar{g} = 2\sigma\bar{g}$ para $\sigma = \frac{4-|\vec{x}|^2}{4}$.

Observe que para uma imersão isométrica $\Sigma \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, \bar{g})$, a existência de uma função $\Psi : \mathbb{B}_r^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Hess}_\Sigma \Psi \geq 0$ é garantida pelo **Teorema 1.27** desde que a função potencial σ do campo conforme \vec{x} cumpra $\sigma > 0$. Assim, para $\sigma = \frac{4-|\vec{x}|^2}{4}$ devemos ter $r < 2$.

Agora, para $u(|\vec{x}|^2) = -\frac{|\vec{x}|^2}{8}$ a equação (2.40) fica:

$$\frac{x''(t)}{1+x'(t)^2} = \frac{1}{x(t)} - \frac{1}{2}(x(t) - x'(t)t). \quad (2.46)$$

Lema 2.25. *Seja $x : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução da equação acima com condições iniciais $x(0) < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $x'(0) = 0$. Então, existe $0 < \delta < c$ tal que a parametrização dada por (2.32) com $x : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ gera uma superfície mínima $\Sigma_\delta \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle)$ cujo bordo é estritamente convexo, em que $r = \sqrt{\delta^2 + x(\delta)^2}$.*

Demonstração. Primeiro, observe que

$$x(-t) = x(t) \forall t \in (-c, c). \quad (2.47)$$

De fato, defina $\tilde{x} : (-c, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ por $\tilde{x}(s) = x(-s)$. Então, $\tilde{x}'(s) = -x'(-s)$, $\tilde{x}''(s) = x''(-s)$ e assim

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{x}''(s)}{1+\tilde{x}'(s)^2} &= \frac{x''(-s)}{1+x''(-s)^2} \\ &= \frac{1}{x(-s)} - \frac{1}{2}(x(-s) - x'(-s)(-s)) \\ &= \frac{1}{\tilde{x}(s)} - \frac{1}{2}(\tilde{x}(s) - \tilde{x}'(s)s). \end{aligned}$$

Portanto, \tilde{x} também é uma solução da equação (2.46) e além disso satisfaz, $\tilde{x}(0) = x(0)$ e $\tilde{x}'(0) = x'(0) = 0$. Pela unicidade da solução da equação diferencial em questão devemos ter $\tilde{x}(s) = x(s)$ em $(-c, 0]$, de onde segue a afirmação.

Assim, a função f definida em (2.35) cumpre $f(t) = -f(-t)$ e a função

$$\bar{f}(t) := e^{\left(\frac{x(t)^2+t^2}{8}\right)} \left(f(t) - \frac{x(t)x'(t)+t}{4\sqrt{1+x'(t)^2}} \right) \quad t \in (-c, c)$$

cumpra $\bar{f}(t) = -\bar{f}(-t)$. Fixe $0 < s < c$ e considere Σ_s a superfície parametrizada por (2.32), em que x é restrita ao intervalo $[-s, s]$. Pela **Observação 2.23**, as curvaturas geodésicas dos bordos de Σ_s com respeito à métrica canônica induzida de \mathbb{R}^3 cumpre, $k_{g_e}(-s) = -f(-s) = f(s) = k_{g_e}(s)$. Considere agora $\Sigma_s \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{4}} \langle, \rangle)$. Pelo **Lema 1.22**, a curvatura geodésica do bordo de Σ_s é dado por $\bar{k}_{g_e} = e^{\frac{|\bar{x}|^2}{8}} (k_{g_e} - \nu(h))$. Assim,

$$\begin{aligned} \bar{k}_{g_e}(s) &= e^{-h} (k_{g_e} - \nu(h)) \\ &= e^{\left(\frac{x(s)^2+s^2}{8}\right)} \left(\frac{x'(s)}{x(s)\sqrt{1+x'(s)^2}} - \frac{x(s)x'(s)+s}{4\sqrt{1+x'(s)^2}} \right) \\ &= \bar{f}(s), \end{aligned}$$

e de maneira semelhante, temos que $\bar{k}_{g_e}(-s) = -\bar{f}(-s)$. Observe que $\bar{k}_{g_e}(0) = 0$, isto é, a curva $X(\{0\} \times [0, 2\pi])$ é uma geodésica em $\Sigma_s \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{4}} \langle, \rangle)$.

Então, a função \bar{f} quando avaliada em um ponto $s \in (0, c)$ mede a curvatura geodésica do bordo de uma superfície Σ_s , como descrito anteriormente, com a geometria induzida do espaço $(\mathbb{R}^3, e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{4}} \langle, \rangle)$. Ou de maneira semelhante, podemos considerar que \bar{f} quando avaliada em $t \in (-c, c)$ mede a curvatura geodésica do slice $\alpha : X(\{t\} \times [0, 2\pi])$ (em $\Sigma^2 \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{4}} \langle, \rangle)$) com respeito à direção que aponta no sentido oposto ao vetor velocidade da curva geratriz. Como $\bar{f}(s) = -\bar{f}(-s)$, temos que \bar{f} é uma função ímpar. Façamos então

$$\bar{f}(t) = a(t)b(t),$$

em que

$$a(t) = \frac{e^{\left(\frac{x(t)^2+t^2}{8}\right)}}{\sqrt{1+x'(t)^2}}, \quad b(t) = \left(\frac{x'(t)}{x(t)} - \frac{x(t)x'(t)+t}{4} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}}{dt}(0) &= a'(0)b(0) + a(0)b'(0) \\ &= 0 + e^{\left(\frac{x(0)^2}{8}\right)} \left(\frac{x''(0)}{x(0)} - \frac{x(0)x''(0)+1}{4} \right) \\ &= e^{\left(\frac{x(0)^2}{8}\right)} \left(\frac{2-x(0)^2}{2x(0)^2} - \frac{4-x(0)^2}{8} \right) \\ &= e^{\left(\frac{x(0)^2}{8}\right)} \left(\frac{x(0)^4 - 8x(0)^2 + 8}{8x(0)^2} \right). \end{aligned}$$

Um estudo de sinal no polinômio $p(z) = z^4 - 8z^2 + 8$ fornece $0 < p(z)$ para $0 < z < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. Isso significa que se escolhermos uma condição inicial $x(0) < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$, então $\frac{d\bar{f}}{dt}(0) > 0$ e assim, \bar{f} é crescente em uma vizinhança de 0. Logo, existe $0 < \delta$ tal que $\bar{f}(\delta) > 0$ e a superfície Σ_δ como descrita acima é tal que $\bar{k}_{ge}(-\delta) = \bar{k}_{ge}(\delta) = \bar{f}(\delta) > 0$. Assim, $\Sigma^2 \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^3, e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle)$ com $r = \sqrt{\delta^2 + x(\delta)^2}$ é uma imersão de uma superfície mínima de rotação com bordo estritamente convexo, de onde segue o resultado. ■

Lema 2.26. *Seja $x : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução da equação (2.46) com condições iniciais, $x'(0) = 0$ e $x(0) = x_0 < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. Defina,*

$$\mathcal{F}(t) := \frac{[4 - x(t)(x(t) - x'(t)t)](x(t) - x'(t)t)}{x(t)(4 - x(t)^2 - t^2)(1 + x'(t)^2)}. \quad (2.48)$$

Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$-1 \leq \mathcal{F}(t) \leq 1 \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Demonstração. Como $x'(0) = 0$, temos $x(t) = x(-t)$ e portanto

i) $\mathcal{F} : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função par,

e além disso,

$$ii) \mathcal{F}(0) = \frac{(4 - x(0)^2)x(0)}{x(0)(4 - x(0)^2)} = 1.$$

Façamos então,

$$\mathcal{F}(t) = a(t)b(t)c(t), \quad (2.49)$$

em que

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{4}{x(t)} - (x(t) - x'(t)t), \\ b(t) &= x(t) - x'(t)t, \\ c(t) &= \frac{1}{c_1(t)c_2(t)}, \text{ em que, } c_1(t) = 4 - x(t)^2 - t^2 \text{ e } c_2(t) = 1 + x'(t)^2. \end{aligned}$$

Usando o fato que x satisfaz a equação (2.46), um longo cálculo, porém direto, fornece

$$1) a(0) = \frac{4 - x(0)^2}{x(0)}, \quad a'(0) = 0, \quad a''(0) = \frac{x''(0)(x(0)^2 - 4)}{x(0)^2},$$

$$2) b(0) = x(0), \quad b'(0) = 0, \quad b''(0) = -x''(0),$$

$$3) c(0) = \frac{1}{4 - x(0)^2}, \quad c'(0) = 0, \quad c''(0) = \frac{2(x(0)x''(0) + 1 - (4 - x(0)^2)x''(0)^2)}{(4 - x(0)^2)^2}.$$

Segue das identidades acima que

$$iii) \mathcal{F}'(0) = a'(0)b(0)c(0) + a(0)b'(0)c(0) + a(0)b(0)c'(0) = 0,$$

isto é, $0 \in (-c, c)$ é um ponto crítico de \mathcal{F} . Derivando novamente, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}''(0) &= a''(0)b(0)c(0) + a(0)b''(0)c(0) + a(0)b(0)c''(0) \\ &\quad + 2\left(a'(0)b'(0)c(0) + a'(0)b(0)c'(0) + a(0)b'(0)c'(0)\right) \\ &= 2\left(\frac{x''(0)\left(x(0) - (4 - x(0)^2)x''(0)\right) + 1 - \frac{x''(0)}{x(0)}}{4 - x(0)^2}\right) \\ &= 2\left(\frac{(1 + x''(0)x(0))\left(x(0) - (4 - x(0)^2)x''(0)\right)}{x(0)(4 - x(0)^2)}\right). \end{aligned}$$

Usando que $x''(0) = \frac{2-x(0)^2}{2x(0)}$ segue

$$\mathcal{F}''(0) = \frac{-x(0)^4 + 8x(0)^2 - 8}{2x(0)^2}. \quad (2.50)$$

Um estudo de sinal no polinômio $p(z) = -z^4 + 8z^2 - 8$, $z \in \mathbb{R}$ fornece que $p(z) < 0$ se $0 < z < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. Assim, escolhendo uma condição inicial que satisfaça $0 < x(0) < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ temos

iv) $\mathcal{F}''(0) < 0$,

e por continuidade, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{F}''(t) < 0 \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Segue então dos itens *i)*, *ii)*, *iii)* e *iv)* que $-1 \leq \mathcal{F}(t) \leq 1 \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ como queríamos. ■

S. Angenet [4], mostrou a existência de um toro mínimo $\mathbb{T}_{\mathcal{A}} \hookrightarrow \left(\mathbb{R}^3, e^{\frac{-|x|^2}{4}} \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$, não circular, obtido pela revolução de uma curva plana fechada simples em torno de um eixo fixo. No contexto em que estamos trabalhando, considere que tal curva está no plano xz sendo rotacionada em torno do eixo Oz . Angenet mostrou que tal curva é simétrica com respeito ao eixo Ox intersectando o mesmo ortogonalmente em dois pontos $0 < x_1 < x_2$. No trabalho de N. M. Moller [27] sobre existência de superfícies fechadas self-shrinkers Σ_g^2 de gênero alto $g = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, é obtido (**Proposição 2.1**) informações sobre localização do toro $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$, e dentre elas, a que nos interessa é sobre o valor de x_1 , mais precisamente, é obtido que

$$\frac{7}{16} - \frac{3}{98} < x_1 < \frac{7}{16} + \frac{3}{98}.$$

Utilizando métodos numéricos com o auxílio do software winplot, traçamos algumas curvas integrais da equação diferencial (2.46), veja fig. 2.4. As curvas plotadas são simétricas com relação ao eixo x e as respectivas superfícies de revolução são obtidas rotacionando tais curvas em torno do eixo z .

Considere uma parametrização $\alpha(t) = (x(t), 0, t)$ local da curva geratriz de $\mathbb{T}_{\mathcal{A}}$ tal que $x : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}$, $x(0) = x_1$ e $x'(0) = 0$. Temos que $x(0) = x_1 < \frac{7}{16} + \frac{3}{98} \approx 0,46811... < \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \approx 1,08239$. Assim, os dois lemas anteriores garantem próximo exemplo.

Teorema 2.28. *Seja $\Sigma^k \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ ($k \geq 3$) uma imersão isométrica de uma subvariedade mínima de fronteira livre. Suponha que condição*

$$\frac{1}{\sigma^2} |B|^2 |\bar{x}^\perp|_{\bar{g}}^2 \leq \frac{k}{k-1} \quad (2.51)$$

seja satisfeita sobre Σ^k . Então, uma das seguintes situações deve ocorrer.

- i) Σ^k é difeomorfa a um disco k -dimensional \mathbb{D}^k ou,*
- ii) Σ é difeomorfa a uma variedade produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{k-1}$ e o conjunto*

$$\mathcal{C} = \{p \in \Sigma^k; \Psi(p) = \min_{\Sigma} \Psi(x)\}$$

*é uma geodésica fechada em Σ^k , em que Ψ é dada pelo **Teorema 1.28**.*

Demonstração. Pelo **Teorema 1.28**, existe uma função $\Psi : \mathbb{B}_r^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Hess_{\Sigma} \Psi \geq 0$. De maneira análoga ao **Lema 2.2** mostramos que a convexidade da função Ψ restrita a Σ^k garante que o conjunto \mathcal{C} seja totalmente convexo, isto é, qualquer segmento de geodésica ligando dois pontos em \mathcal{C} está inteiramente contido no mesmo. Esse fato é sem dúvida o mais importante derivado da condição de Gap (2.51), essencialmente, ele diz que o conjunto de pontos críticos da função Ψ sobre Σ^k coincide com \mathcal{C} . Assim, algumas informações topológicas \mathcal{C} podem ser deduzidas para Σ^k como faremos a seguir. Se \mathcal{C} contém apenas um ponto p_0 , então podemos usar teoria de Morse para garantir que Σ^k tem a topologia de um disco \mathbb{D}^k . Agora, suponha que \mathcal{C} contém mais de um ponto. Vamos mostrar que a $\dim(\mathcal{C}) = 1$. Seja γ uma geodésica ligando dois pontos, p_1 e $p_2 \in \mathcal{C}$. Como \mathcal{C} é totalmente convexo, temos que $\gamma \subset \mathcal{C}$. Considere $\tilde{\gamma}$ o prolongamento máximo de γ e suponha que exista um ponto $\tilde{p} \in \mathcal{C} \setminus \tilde{\gamma}$. Considere então os segmentos de geodésica γ_1 ligando \tilde{p} e p_1 , e γ_2 ligando \tilde{p} e p_2 . Como estamos supondo $\tilde{p} \notin \tilde{\gamma}$, devemos ter $\gamma'_1(\tilde{p})$ e $\gamma'_2(\tilde{p})$ linearmente independentes e além disso,

$$Hess_{\Sigma} \Psi(\tilde{p})(\gamma'_i, \gamma'_i) = 0 \quad i = 1, 2.$$

Assim, $\dim(ker(Hess_{\Sigma} \Psi(\tilde{p}))) \geq 2$. Sejam E_1 e E_2 dois autovetores nulos de $Hess_{\Sigma} \Psi(\tilde{p})$. Como

$$Hess_{\Sigma} \Psi(x)(Y, Z) = 2\sigma^2 \Phi'(\varphi) \left(\bar{g}(Z, Y) + \frac{1}{\sigma} \bar{g}(B(Y, Z), \bar{x}) \right),$$

devemos ter $\frac{1}{\sigma} \bar{g}(B(E_i, E_i), \bar{x}) = -1$ e assim,

$$2 = \frac{1}{\sigma^2} (\bar{g}(B(E_1, E_1), \bar{x})^2 + \bar{g}(B(E_2, E_2), \bar{x})^2) \leq \frac{1}{\sigma^2} |B|^2 |\bar{x}^\perp|_{\bar{g}}^2 \leq \frac{k}{k-1},$$

um absurdo já que $k \geq 3$, portanto, $\mathcal{C} = \tilde{\gamma}$. Segue então da teoria clássica de Morse que Σ^k pode ser retraída a uma vizinhança tubular de $\tilde{\gamma}$. Agora, se $\tilde{\gamma}$ é uma geodésica fechada, Σ^k deve ser difeomorfa a um produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{k-1}$, caso contrário, Σ^k deve ser difeomorfa a um produto $I \times \mathbb{D}^{k-1}$ que por sua vez é difeomorfo a \mathbb{D}^k . ■

Corolário 8. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ ($n \geq 3$) uma imersão isométrica de uma subvariedade mínima de bordo livre. Suponha que condição*

$$\frac{1}{\sigma^2} |A|^2 \bar{g}(\vec{x}, \bar{N})^2 \leq \frac{n}{n-1} \quad (2.52)$$

seja satisfeita sobre Σ^n . Então, uma das duas situações deve ocorrer.

c.1) Σ^n é difeomorfa a um disco n -dimensional \mathbb{D}^n ou,

c.2) Σ^n é difeomorfa a uma variedade produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{n-1}$ e o conjunto \mathcal{C} é um grande círculo $\gamma \subset \mathbb{S}_{r_0}^n$ (r_0) sobre o qual ocorre a igualdade em (2.52). Além disso, $|A|^2$ é constante sobre \mathcal{C} possuindo apenas duas curvaturas principais distintas: $-\frac{\alpha}{r_0}$ e $\frac{\alpha}{(n-1)r_0}$, em que $\alpha = \frac{\sigma|\gamma|}{u(r_0^2)}$.

Demonstração. Se no teorema anterior ocorre a situação *i*), então temos c.1). Mas, se ocorrer a situação *ii*), procedemos da seguinte maneira. Considere $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathcal{C}$ uma parametrização de \mathcal{C} , faça $c_0 = \min_{\Sigma} \Psi$ e $\mathbb{S}_{r_0}^n := \Psi^{-1}(c_0)$. Para cada $t \in [0, l]$ temos

$$T_{\gamma(t)}\Sigma = T_{\gamma(t)}\mathbb{S}_{r_0}^n \Rightarrow (T_{\gamma(t)}\Sigma)^\perp = (T_{\gamma(t)}\mathbb{S}_{r_0}^n)^\perp. \quad (2.53)$$

Como γ é uma geodésica em Σ^n , temos $\bar{\nabla}_{\gamma'}\gamma' \in T\Sigma^\perp$ e por (2.53) segue que γ também é uma geodésica em $\mathbb{S}_{r_0}^n$. Logo, γ é um grande círculo $\mathbb{S}_{r_0}^1 \subset \mathbb{S}_{r_0}^n$. Reescreva $Hess_{\Sigma}\Psi$ como

$$Hess_{\Sigma}\Psi(x)(Y, Z) = 2\sigma^2\Phi'(\varphi)\mathcal{B}_0(Y, Z),$$

em que $\mathcal{B}_0(Y, Z) = (\bar{g}(Z, Y) + \frac{1}{\sigma}\bar{g}(A(Y), Z)\bar{g}(\vec{x}, \bar{N}))$. Seja $\{E_1, \dots, E_n\}$ um frame ortonormal tal que $A(E_i) = \bar{k}_i E_1$. Assim, \bar{k}_i são as curvaturas principais de Σ^n e os autovetores de A são também autovetores de \mathcal{B}_0 com

$$\mathcal{B}_0(E_i, E_i) = \bar{\lambda}_i = \left(1 + \frac{\bar{k}_i}{\sigma}\bar{g}(\vec{x}, \bar{N})\right). \quad (2.54)$$

Como estamos assumindo que $Hess_{\Sigma}\Psi$ tem um autovalor nulo ao longo de γ , podemos assumir então que $\bar{\lambda}_1 = 0$. Denote por \mathcal{B}_0^\perp a restrição de \mathcal{B}_0 à $(\gamma')^\perp \subset T\Sigma^n$, assim, os autovalores de \mathcal{B}_0^\perp são $\{\bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n\}$. Temos então

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \bar{\lambda}_i^2 &= \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{\bar{k}_i}{\sigma}\bar{g}(\vec{x}, \bar{N})\right)^2 = n + \frac{|A|^2}{\sigma^2}\bar{g}(\vec{x}, \bar{N})^2 \\ &\leq \frac{n^2}{n-1} = \frac{(\sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i)^2}{n-1} = \frac{(\sum_{i=2}^n \bar{\lambda}_i)^2}{n-1}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy Schwarz nos vetores de $(n-1)$ entradas $w = (\bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n)$ e $v = (1, \dots, 1)$ obtemos

$$\langle w, v \rangle^2 \leq |w|^2 |v|^2 \Rightarrow \left(\sum_{i=2}^n \bar{\lambda}_i\right)^2 \leq (n-1) \sum_{i=2}^n \bar{\lambda}_i^2.$$

Combinando as desigualdades acima com (2.55) obteremos $w = \lambda v$ e assim, $\lambda := \bar{\lambda}_2 = \dots = \bar{\lambda}_n$. Como $\sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i = n$ e $\bar{\lambda}_1 = 0$ segue que $\lambda = \frac{n}{n-1}$. Observe que, sobre γ , o vetor \vec{x} está na mesma direção do vetor normal \vec{N} e assim temos $\bar{g}(\vec{x}, \vec{N}) = e^{2h} \langle \vec{x}, \vec{N} \rangle = e^{u(r_0^2)} r_0$, portanto, (2.54) fornece

$$\bar{k}_1 = -\frac{\alpha}{r_0} \quad \bar{k}_i = \frac{\alpha}{(n-1)r_0} \quad (i \geq 2),$$

em que $\alpha = \frac{\sigma|_\gamma}{e^{\frac{u(r_0^2)}{2}}}$. ■

Capítulo 3

Classificação via condição de gap na segunda forma fundamental

3.1 Condição de gap para $|A|^2$ em hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em uma classe de variedades conforme à \mathbb{B}_r^{n+1}

O próximo teorema foi a motivação aos resultados dessa seção. Aqui, vamos enunciá-lo na forma que nos interessa, isto é, no contexto de variedades mínimas de codimensão 1 e com bordo. O caso geral pode ser consultado em [7]. Lembrando que uma variedade \bar{M} completa simplesmente conexa é de Hadamard se a curvatura seccional é não positiva em qualquer ponto p na direção de qualquer plano $\pi \subset T_p\bar{M}$.

Teorema 3.1 (Mirandola-Batista-Vitório). *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade mínima, compacta e com bordo em uma variedade de Hadamard \bar{M} . Seja $\bar{r} = d_{\bar{M}}(\cdot, \xi)$ a distância em \bar{M} a um ponto fixado $\xi \in \bar{M}$. Considere também $1 \leq p < \infty$ e $-\infty < \gamma < k$. Então, para toda função $0 \leq \psi \in C^1(M)$ vale,*

$$\frac{(n - \gamma)^2}{p^p} \int_{\Sigma} \frac{\psi^p}{\bar{r}^\gamma} + \frac{\gamma(n - \gamma)^{p-1}}{p^{p-1}} \int_{\Sigma} \frac{\psi^p}{\bar{r}^\gamma} |\bar{\nabla} \bar{r}^\perp|^2 \leq \int_{\Sigma} \frac{|\nabla^\Sigma \psi|^p}{\bar{r}^{\gamma-p}} + \frac{(n - \gamma)^{p-1}}{p^{p-1}} \int_{\partial\Sigma} \frac{\psi^p}{\bar{r}^{\gamma-1}} \langle \bar{\nabla} \bar{r}, \nu \rangle, \quad (3.1)$$

e além disso, se $p > 1$ a igualdade ocorre se, e somente se, a função ψ for identicamente nula em Σ

Observe que o teorema acima se enunciado para os casos particulares em que $0 \leq \gamma < n$

e $p = 2$ a desigualdade (3.1) torna-se

$$\frac{(n - \gamma)^2}{4} \int_{\Sigma} \frac{\psi^2}{\bar{r}^\gamma} \leq \int_{\Sigma} |\nabla^{\Sigma} \psi|^2 \bar{r}^{(2-\gamma)} + \frac{(n - \gamma)}{2} \int_{\partial\Sigma} \frac{\psi^2}{\bar{r}^{\gamma-1}} \langle \bar{\nabla} \bar{r}, \nu \rangle, \quad (3.2)$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, a função ψ for identicamente nula.

Vamos agora, construir um modelo de variedade de Hadamard em que pode-se aplicar o teorema acima para obter resultados de classificação para subvariedades mínimas sob algumas condições.

Seja $(\mathbb{B}_a^{n+1}, \bar{g})$ a bola Euclidiana de raio a centrada na origem com uma métrica conforme $\bar{g} = e^{2h} \langle \cdot, \cdot \rangle$, em que $a < \infty$ ou $a = \infty$ e $h(x) = u(|x|^2)$, sendo $u : [0, a^2) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Observe que se r é a distância Euclidiana de um ponto $x \in \mathbb{B}_a^{n+1}$ à origem, então a distância \bar{r} de x à origem com respeito à métrica \bar{g} é dada pela equação (1.5).

Lema 3.2. *Considere \mathbb{B}_a^{n+1} com a métrica euclidiana e a conexão $\bar{\nabla}$ associada. Então, o Hessiano da função $h(x) = u(|x|^2)$ é dado por*

$$(Hess h)(x)(Y, Z) = 4u''(|x|^2) \langle \bar{x}, Y \rangle \langle \bar{x}, Z \rangle + 2u'(|x|^2) \langle Y, Z \rangle.$$

Demonstração. Observe que os gradientes das funções h e $u'(|x|^2)$ são dados respectivamente por,

$$\mathbf{grad}(h) = 2u'(|x|^2)\bar{x} \quad \text{e} \quad \mathbf{grad}(u'(|x|^2)) = 2u''(|x|^2)\bar{x}.$$

Decorre que

$$\begin{aligned} (Hess h)(x)(Y, Z) &= \langle \bar{\nabla}_Y \mathbf{grad}(h), Z \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_Y u'(|x|^2)\bar{x}, Z \rangle \\ &= 2 \langle Y(u'(|x|^2))\bar{x} + u'(|x|^2)\bar{\nabla}_Y \bar{x}, Z \rangle \\ &= 2 \langle \langle \mathbf{grad}(u'(|x|^2)), Y \rangle \bar{x} + u'(|x|^2)Y, Z \rangle \\ &= 2 \langle 2 \langle u''(|x|^2)\bar{x}, Y \rangle \bar{x} + u'(|x|^2)Y, Z \rangle \\ &= 4u''(|x|^2) \langle \bar{x}, Y \rangle \langle \bar{x}, Z \rangle + 2u'(|x|^2) \langle Y, Z \rangle. \end{aligned}$$

■

Lema 3.3. *Seja $(\mathbb{B}_a^{n+1}, \bar{g})$ como descrito inicialmente. Suponha que a função u cumpra em seu domínio de definição a condição $u''(|x|^2) - u'(|x|^2)^2 \leq 0$. Então se \bar{N} é um vetor unitário no espaço tangente $T_x \mathbb{B}_a^{n+1}$, temos que*

$$\bar{Ric}(\bar{N}, \bar{N})(x) \leq -4ne^{-2h}[u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2)^2].$$

Demonstração. Primeiro observe que se $\bar{N} \in T_x \mathbb{B}_a^{n+1}$ cumpre $\bar{g}(\bar{N}, \bar{N}) = 1$ o vetor $N = e^h \bar{N}$ é tal que $\langle N, N \rangle = 1$. Usando a expressão para mudança conforme na curvatura de

Ricci obtida na **Proposição 1.9**, temos

$$\begin{aligned}
 \bar{Ric}(\bar{N}, \bar{N}) &= e^{-2h} \bar{Ric}(N, N) \\
 &= e^{-2h} \left\{ Ric_{\mathbb{R}^{n+1}}(N, N) - (n-1)(Hess h)(N, N) + (n-1)N(h)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \{\Delta h + (n-1)|\nabla h|^2\} \langle N, N \rangle \right\} \\
 &= e^{-2h} \left\{ -4(n-1)u''(|x|^2) \langle \bar{x}, N \rangle^2 - 2(n-1)u'(|x|^2) \right. \\
 &\quad \left. + 4(n-1)u'(|x|^2)^2 \langle \bar{x}, N \rangle^2 \right. \\
 &\quad \left. - 4u''(|x|^2) |\bar{x}|^2 - 2(n+1)u'(|x|^2) - 4(n-1)u'(|x|^2)^2 |\bar{x}|^2 \right\} \\
 &= e^{-2h} \left\{ 4(n-1)[u'(|x|^2)^2 - u''(|x|^2)] \langle \bar{x}, N \rangle^2 - 4nu'(|x|^2) \right. \\
 &\quad \left. - 4u''(|x|^2) |\bar{x}|^2 - 4(n-1)u'(|x|^2)^2 |\bar{x}|^2 \right\} \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} e^{-2h} \left\{ 4(n-1)[u'(|x|^2)^2 - u''(|x|^2)] |x|^2 - 4nu'(|x|^2) \right. \\
 &\quad \left. - 4u''(|x|^2) |\bar{x}|^2 - 4(n-1)u'(|x|^2)^2 |\bar{x}|^2 \right\} \\
 &= -4ne^{-2h} \left\{ u''(|x|^2) |\bar{x}|^2 + u'(|x|^2) \right\},
 \end{aligned}$$

em que (*) segue da hipótese feita sobre a função u . Portanto,

$$\bar{Ric}(\bar{N}, \bar{N}) \leq -4ne^{-2h}[u''(|x|^2) |x|^2 + u'(|x|^2)]$$

como queríamos. ■

Lema 3.4. *Seja $(\mathbb{B}_a^{n+1}, \bar{g})$ como descrito inicialmente. Suponha que a função u cumpra em seu domínio de definição as condições*

i) $u''(|x|^2) - u'(|x|^2)^2 \leq 0$ e

ii) $-u''(|x|^2) |\bar{x}|^2 - u'(|x|^2) \leq 0$.

Então, $(\mathbb{B}_a^{n+1}, \bar{g})$ é uma variedade de Hadamard.

Demonstração. Vamos mostrar que a curvatura seccional \bar{K} , cumpre $\bar{K}(x)(\pi) \leq 0$ para qualquer ponto $x \in (\mathbb{B}_a^{n+1}, \bar{g})$ e qualquer plano $\pi \subset T_x \mathbb{B}_a^{n+1}$. Considere \bar{E}_i , $i = 1, 2$, vetores que geram $\pi \subset T_x \mathbb{B}_a^{n+1}$ com $\bar{g}(\bar{E}_i, \bar{E}_j) = \delta_{ij}$. Assim, para $E_i = e^h \bar{E}_i$ temos $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$. Usando o lema anterior e a expressão obtida na **Proposição 1.9** para a mudança conforme

na curvatura obtemos

$$\begin{aligned}
 \bar{K}(x)(\pi) &= \bar{g}(\bar{R}(\bar{E}_1, \bar{E}_2)\bar{E}_2, \bar{E}_1) \\
 &= e^{-2h} \langle \bar{R}(E_1, E_2)E_2, E_1 \rangle \\
 &= e^{-2h} \left\{ \langle R(E_1, E_2)E_2, E_1 \rangle + \langle E_1, E_2 \rangle \langle \nabla_{E_2} \nabla h, E_1 \rangle - \langle E_2, E_2 \rangle \langle \nabla_{E_1} \nabla h, E_1 \rangle \right. \\
 &\quad - \{ (Hess h)(E_2, E_2) - E_2(h)^2 + |\nabla h|^2 \langle E_2, E_2 \rangle \} \langle E_1, E_1 \rangle \\
 &\quad + \{ (Hess h)(E_1, E_2) - E_1(h)E_2(h) + |\nabla h|^2 \langle E_1, E_2 \rangle \} \langle E_2, E_1 \rangle \\
 &\quad \left. + \{ E_1(h) \langle E_2, E_2 \rangle - E_2(h) \langle E_1, E_2 \rangle \} \langle \nabla h, E_1 \rangle \right\} \\
 &= e^{-2h} \left\{ - (Hess h)(E_1, E_1) - (Hess h)(E_2, E_2) + E_2(h)^2 - |\nabla h|^2 + E_1(h)^2 \right\} \\
 &= e^{-2h} \left\{ - 4u''(|x|^2) \langle \vec{x}, E_1 \rangle^2 - 2u'(|x|^2) - 4u''(|x|^2) \langle \vec{x}, E_2 \rangle^2 - 2u'(|x|^2) \right. \\
 &\quad \left. + 4u'(|x|^2)^2 \langle \vec{x}, E_1 \rangle^2 + 4u'(|x|^2)^2 \langle \vec{x}, E_2 \rangle^2 - 4u'(|x|^2)^2 |\vec{x}|^2 \right\} \\
 &= 4e^{-2h} \left\{ [u'(|x|^2)^2 - u''(|x|^2)] (\langle \vec{x}, E_1 \rangle^2 + \langle \vec{x}, E_2 \rangle^2) - u'(|x|^2) - u'(|x|^2)^2 |\vec{x}|^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Observe que,

$$\langle \vec{x}, E_1 \rangle^2 + \langle \vec{x}, E_2 \rangle^2 = |x|^2 (\cos^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_2)),$$

em que θ_i , denota o angulo entre \vec{x} e E_i , $i = 1, 2$. Como o ângulo entre E_1 e E_2 é $\frac{\pi}{2}$ para qualquer $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ fixo, devemos ter $\frac{\pi}{2} - \theta_1 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} + \theta_1$, e portanto, $\cos^2(\theta_2) \leq \cos^2(\frac{\pi}{2} + \theta_1)$.

Assim,

$$\cos^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_2) \leq \cos^2(\theta_1) + \cos^2(\frac{\pi}{2} + \theta_1) \leq \cos^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_1) = 1,$$

e conseqüentemente, $\langle \vec{x}, E_1 \rangle^2 + \langle \vec{x}, E_2 \rangle^2 \leq |\vec{x}|^2$. Pela hipótese *i*) devemos ter

$$[u'(|x|^2)^2 - u''(|x|^2)] (\langle \vec{x}, E_1 \rangle^2 + \langle \vec{x}, E_2 \rangle^2) \leq [u'(|x|^2)^2 - u''(|x|^2)] |\vec{x}|^2.$$

Segue então da hipótese *ii*) que

$$\begin{aligned}
 \bar{K}(x)(\pi) &\leq 4e^{-2h} \{ [u'(|x|^2)^2 - u''(|x|^2)] |\vec{x}|^2 - u'(|x|^2) - u'(|x|^2)^2 |\vec{x}|^2 \} \\
 &\leq 4e^{-2h} \{ -u''(|x|^2) |\vec{x}|^2 - u'(|x|^2) \} \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.5. Considere $u_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u_1 \equiv 0$ e $u_2 : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u_2(t) = \ln(\frac{2}{1-t})$. As funções u_1 e u_2 satisfazem evidentemente as condições *i*) e *ii*) do lema anterior. De fato, $M_1 := (\mathbb{B}_\infty^{n+1}, \bar{g})$ para $\bar{g} = e^{2u_1(|x|^2)} \langle \cdot, \cdot \rangle$ é o espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} e $M_2 := (\mathbb{B}_1^{n+1}, \bar{g})$ para $\bar{g} = e^{2u_2(|x|^2)} \langle \cdot, \cdot \rangle$ é o espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} . Ambos são variedades de Hadamard.

Exemplo 3.6. *Seja $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(t) = \frac{t}{4n}$, então as condições do lema acima são satisfeitas para todo t . Logo, $(\mathbb{B}_r^{n+1}, e^{\frac{|x|^2}{2n}} \langle \cdot, \cdot \rangle)$ com $r = \infty$ é uma variedade de Hadamard.*

De agora em diante consideraremos sempre $(\mathbb{B}_a^{n+1}, \bar{g})$ com uma métrica $\bar{g} = e^{2u(|x|^2)} \langle \cdot, \cdot \rangle$ para alguma função u que cumpre as condições do lema anterior, o que torna $(\mathbb{B}_a^{n+1}, \bar{g})$, uma variedade de Hadamard. Denotaremos por $(\mathbb{B}_r^{n+1}, \bar{g})$ a subvariedade de $(\mathbb{B}_a^{n+1}, \bar{g})$ para $r < a$.

Lema 3.7. *Seja $(\mathbb{B}_a^{n+1}, \bar{g})$ uma variedade de Hadamard, e para $r_0 < a$, considere $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}, \bar{g})$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície mínima compacta com bordo. Considere sobre Σ^n o operador $L := \Delta + |A|^2 + q$, em que $q : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não positiva. Suponha que a desigualdade*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4\bar{r}_0^2} \tag{3.3}$$

seja satisfeita sobre Σ^n . Então, o primeiro autovalor λ_1 do operador L para o problema:

$$(*) \begin{cases} L[v] = -\lambda v & \Sigma \\ v = 0 & \partial\Sigma \end{cases}$$

é estritamente positivo, consequentemente, uma solução $L[v] = 0$ do problema $()$ acima tem que ser nula.*

Demonstração. Vamos provar por contradição, suponha $\lambda_1 \leq 0$. Seja v_1 tal que,

$$\begin{cases} \Delta v_1 + (|A|^2 + q)v_1 = -\lambda_1 v_1 & \Sigma \\ v_1 = 0 & \partial\Sigma \end{cases}$$

Então, v_1 não muda de sinal já que é uma função associada ao primeiro autovalor do operador L . Suponha então, $v_1 > 0$. Usando integração por partes, a desigualdade (3.3) e a hipótese que $\lambda_1 + q \leq 0$ obtemos

$$\int_{\Sigma} |\nabla v_1|^2 = \int_{\Sigma} -v_1 \Delta v_1 d\Sigma = \int_{\Sigma} (\lambda_1 + |A|^2 + q)v_1^2 \leq \int_{\Sigma} |A|^2 v_1^2 \leq \frac{n^2}{4\bar{r}_0^2} \int_{\Sigma} v_1^2. \tag{3.4}$$

Considerando \bar{r} a distância de um ponto $p \in \Sigma$ ao ponto $\vec{0} \in B_{\bar{r}}$ temos que $\bar{r} \leq \bar{r}_0$. Sendo $v_1 \equiv 0$ sobre $\partial\Sigma$, a desigualdade (3.2) para $\gamma = 0$ fornece

$$\frac{n^2}{4} \int_{\Sigma} v_1^2 \leq \int_{\Sigma} |\nabla v_1|^2 \bar{r}^2 \leq \bar{r}_0^2 \int_{\Sigma} |\nabla v_1|^2. \tag{3.5}$$

Usando agora a estimativa (3.4) a desigualdade acima torna-se

$$\frac{n^2}{4} \int_{\Sigma} v_1^2 \leq \bar{r}_0^2 \frac{n^2}{4\bar{r}_0^2} \int_{\Sigma} v_1^2 = \frac{n^2}{4} \int_{\Sigma} v_1^2.$$

Isso significa que ocorre a igualdade em (3.5) e pelo **Teorema 3.1**, a função v_1 deve ser identicamente nula, gerando uma contradição. Portanto, devemos ter $\lambda_1 > 0$. ■

Observação 3.8. *Seja $\gamma = 2$ e $n > \gamma$. Considere mesmo enunciado do **Lema** acima com a condição,*

$$|A|^2 \leq \frac{(n-2)^2}{4\bar{r}^2} \quad \text{em } \Sigma \setminus \vec{0} \quad (3.6)$$

no lugar de (3.3), em que $\bar{r} = \bar{r}(x)$ denota a distância em $B_{\bar{R}}$ de um ponto $x \in \Sigma$ até o ponto $\vec{0}$, podemos então obter o mesmo resultado, isto é, o primeiro autovalor do operador L para o problema (*) é estritamente positivo.

Observe que a desigualdade (3.3) impõe uma restrição mais rígida no comprimento total de $|A|^2$, enquanto que a desigualdade (3.6) impõe apenas um controle no crescimento de $|A|^2$, fazendo com que esse último caso seja uma condição menos restritiva, permitindo por exemplo, uma situação em que $|A|^2$ fica arbitrariamente grande próximo do ponto $\vec{0}$.

Lema 3.9. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}, \bar{g})$ uma imersão de uma hipersuperfície mínima de fronteira livre. Considere a função $v = \bar{g}(\vec{x}, \bar{N})$ definida sobre Σ , em que \bar{N} denota o campo vetorial normal à Σ . Então, a função v é solução do seguinte problema,*

$$\begin{cases} L[v] = 0 & \Sigma \\ v = 0 & \partial\Sigma \end{cases}$$

em que L denota o operador definido por $L[v] = \Delta v + |A|^2 v + qv$ para,

$$q := \bar{Ric}(\bar{N}, \bar{N}) + 4ne^{-2h}[u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2)]$$

Demonstração. De fato, considere $\bar{\nabla}$ a conexão de B_{r_0} com respeito à métrica \bar{g} . Pelo

Lema 1.20, temos que $(\bar{\nabla}_Y \vec{x})(p) = \sigma Y$ para qualquer $p \in \Sigma$ e $Y \in T_p \Sigma$, em que $\sigma(x) = 1 + 2u'(|x|^2)|x|^2$. Para um ponto $p \in \Sigma$ considere $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal tangente a Σ e geodésico em p , isto é, $\nabla_{E_k} E_l(p) = 0$, em que ∇ denota a conexão $\bar{\nabla}$ restrita a Σ . Considere $\{\bar{E}_k\}$ uma extensão de $\{E_k\}$ a uma vizinhança de p em B_{r_0} de maneira que $(\bar{\nabla}_{\bar{N}} \bar{E}_k)(p) = 0$ para todo k . Abusando um pouco da notação, escreveremos apenas $\bar{\nabla}_{\bar{N}} E_k$ para denotar $\bar{\nabla}_{\bar{N}} \bar{E}_k$. Façamos

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n \bar{g}(\vec{x}, E_k) E_k + \bar{g}(\vec{x}, \bar{N}) \bar{N}. \quad (3.7)$$

Então,

$$E_k(v) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_k} \vec{x}, \bar{N}) + \bar{g}(\vec{x}, \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}) = \bar{g}(\sigma E_k, \bar{N}) + \bar{g}(\vec{x}, \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}) = \bar{g}(\vec{x}, \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}),$$

e portanto,

$$E_k E_k(v) = \sigma \bar{g}(E_k, \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}) + \bar{g}(\vec{x}, \bar{\nabla}_{E_k} \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}),$$

o que resulta em

$$\Delta v = \sum_{k=1}^n E_k E_k(v) = \sum_{k=1}^n \sigma \bar{g}(E_k, \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}) + \sum_{k=1}^n \bar{g}(\bar{x}, \bar{\nabla}_{E_k} \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}). \quad (3.8)$$

Seja h_{kl} os coeficientes da segunda forma fundamental dados por

$$h_{kl} = \bar{g}(-\bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}, E_l) \Rightarrow \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N} = - \sum_{l=1}^n h_{kl} E_l.$$

Se H denota a curvatura média de Σ , temos então que $H = \sum_{k=1}^n h_{kk}$. Como que $H = 0$ a equação (3.8) fica,

$$\Delta v = \sum_{k=1}^n E_k E_k(v) = \sum_{k=1}^n \bar{g}(\bar{x}, \bar{\nabla}_{E_k} \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}). \quad (3.9)$$

Desenvolvendo o último termo nas igualdades acima obtemos

$$\Delta v = - \sum_{k,l=1}^n \bar{g}(\bar{x}, \bar{\nabla}_{E_k} (h_{kl} E_l)) = - \sum_{k,l=1}^n \bar{g}(\bar{x}, E_l) E_k(h_{kl}) - \sum_{k,l=1}^n h_{kl} \bar{g}(\bar{x}, \bar{\nabla}_{E_k} E_l). \quad (3.10)$$

Usando que $\bar{\nabla}_{E_k} E_l = h_{kl} \bar{N}$, a equação (3.10) pode ser reescrita como

$$\Delta v = - \sum_{k,l=1}^n \bar{g}(\bar{x}, E_l) E_k(h_{kl}) - \bar{g}(\bar{x}, \bar{N}) |A|^2. \quad (3.11)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{x}, \bar{N}) \bar{\text{Ric}}(\bar{N}, \bar{N}) &= \bar{\text{Ric}}(\bar{N}, \bar{g}(\bar{x}, \bar{N}) \bar{N}) = \bar{\text{Ric}}(\bar{N}, \bar{x} - \sum_{k=1}^n \bar{g}(\bar{x}, E_k) E_k) \\ &= \bar{\text{Ric}}(\bar{N}, \bar{x}) - \sum_{k=1}^n \bar{g}(\bar{x}, E_k) \bar{\text{Ric}}(\bar{N}, E_k). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vamos calcular os dois termos na última parcela acima. Em primeiro lugar temos,

$$\begin{aligned} \bar{\text{Ric}}(\bar{N}, \bar{x}) &= \sum_{k=1}^n \bar{g}(\bar{R}(E_k, \bar{N}) \bar{x}, E_k) = \sum_{k=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_k} \bar{\nabla}_{\bar{N}} \bar{x} - \bar{\nabla}_{\bar{N}} \bar{\nabla}_{E_k} \bar{x} - \bar{\nabla}_{[E_k, \bar{N}]} \bar{x}, E_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \{ \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_k} (\sigma \bar{N}), E_k) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{N}} (\sigma E_k), E_k) - \bar{g}(\sigma [E_k, \bar{N}], E_k) \} \\ &= \sum_{k=1}^n \{ \bar{g}(\sigma \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}), E_k) - \bar{g}(\bar{N}(\sigma) E_k + \sigma \bar{\nabla}_{\bar{N}} E_k, E_k) - \bar{g}(\sigma [E_k, \bar{N}], E_k) \} \\ &= -n \bar{N}(\sigma) - \sigma \sum_{k=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{N}} E_k, E_k) - \sigma \sum_{k=1}^n \bar{g}([E_k, \bar{N}], E_k). \end{aligned}$$

Avaliando a expressão acima no ponto p temos que $(\bar{\nabla}_{\bar{N}} E_k)(p) = 0$ e $[E_k, \bar{N}](p) = (\bar{\nabla}_{E_k} \bar{N} - \bar{\nabla}_{\bar{N}} E_k)(p) = (\bar{\nabla}_{E_k} \bar{N})(p)$. Resulta então

$$\bar{\text{Ric}}(\bar{N}, \bar{x})(p) = -n \bar{N}(\sigma). \quad (3.13)$$

em segundo lugar temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \bar{g}(\vec{x}, E_k) \bar{\text{Ric}}(\bar{N}, E_k) &= \sum_{k=1}^n \bar{g}(\vec{x}, E_k) \bar{\text{Ric}}(E_k, \bar{N}) = \sum_{k=1}^n \bar{g}(\vec{x}, E_k) \sum_{l=1}^n \bar{g}(\bar{\text{R}}(E_l, E_k) \bar{N}, E_l) \\
 &= \sum_{k,l=1}^n \bar{g}(\vec{x}, E_k) \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_l} \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N} - \bar{\nabla}_{E_k} \bar{\nabla}_{E_l} \bar{N} - \bar{\nabla}_{[E_l, E_k]} \bar{N}, E_l) \\
 &= \sum_{k,l=1}^n \bar{g}(\vec{x}, E_k) \{ \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_l} \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}, E_l) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_k} \bar{\nabla}_{E_l} \bar{N}, E_l) \}.
 \end{aligned}$$

Como $(\nabla_{E_k} E_l)(p) = 0$, devemos ter $(\bar{\nabla}_{E_k} E_l)^T(p) = 0$, o que resulta em $\bar{g}(\bar{\nabla}_{E_j} \bar{N}, \bar{\nabla}_{E_k} E_l)(p) = 0$. Sendo $h_{kl} = -\bar{g}(\bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}, E_l)$ devemos ter

$$E_l(h_{kl})(p) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_{E_l} \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}, E_l)(p) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}, \bar{\nabla}_{E_l} E_l)(p) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_{E_l} \bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}, E_l)(p),$$

e de forma análoga,

$$E_k(h_{kl})(p) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_{E_k} \bar{\nabla}_{E_l} \bar{N}, E_l)(p) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_k} \bar{N}, \bar{\nabla}_{E_k} E_l)(p) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_{E_k} \bar{\nabla}_{E_l} \bar{N}, E_l)(p).$$

Decorre então que em $p \in \Sigma$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \bar{g}(\vec{x}, E_k) \bar{\text{Ric}}(\bar{N}, E_k)(p) &= \sum_{k,l=1}^n \bar{g}(\vec{x}, E_k) \{ -E_l(h_{kl}) + E_k(h_{kl}) \} \\
 &= -\sum_{k,l=1}^n \bar{g}(\vec{x}, E_k) E_l(h_{kl}) + \sum_{k=1}^n \bar{g}(\vec{x}, E_k) \left\{ E_k \sum_{l=1}^n (h_{kl}) \right\} \\
 &= -\sum_{k,l=1}^n \bar{g}(\vec{x}, E_k) E_l(h_{kl}). \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Combinando (3.14), (3.13) e (3.12) obtemos

$$\sum_{k,l=1}^n \bar{g}(\vec{x}, E_k) E_l(h_{kl}) = \bar{g}(\vec{x}, \bar{N}) \bar{\text{Ric}}(\bar{N}, \bar{N}) + n\bar{N}(\sigma), \tag{3.15}$$

e por fim, usando (3.15) em (3.11) obtemos

$$\Delta v + |A|^2 v + \bar{\text{Ric}}(\bar{N}, \bar{N})v = -n\bar{N}(\sigma). \tag{3.16}$$

O gradiente da função σ com respeito à métrica canônica é dado por

$$\text{grad}(\sigma) = 4[u''(|x|^2) |x|^2 + u'(|x|^2)]\vec{x}.$$

Como o gradiente de σ com respeito à métrica \bar{g} é dado por $\bar{\nabla}\sigma = e^{-2h}\text{grad}(\sigma)$, decorre que

$$\bar{\nabla}\sigma = 4e^{-2h}[u''(|x|^2) |x|^2 + u'(|x|^2)]\vec{x},$$

portanto,

$$\bar{N}(\sigma) = \bar{g}(\bar{\nabla}\sigma, \bar{N}) = 4e^{-2h}[u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2)]\bar{g}(\vec{x}, \bar{N}). \quad (3.17)$$

substituindo (3.17) em (3.16) temos

$$\Delta v + |A|^2 v + \bar{\text{Ric}}(\bar{N}, \bar{N})v + 4ne^{-2h}[u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2)]v = 0.$$

Por outro lado, $v \equiv 0$ sobre $\partial\Sigma$. De fato, pois se Σ é de fronteira livre, então $\tilde{N} = \nu$, em que \tilde{N} denota o vetor normal a $\partial\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}$ e ν o co-normal a Σ sobre $\partial\Sigma$. Como $\vec{x}/\tilde{N} = \nu$ sobre $\partial\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}$ e $\bar{g}(\nu, \bar{N}) = 0$ devemos ter $\bar{g}(\vec{x}, \bar{N}) = 0$ sobre $\partial\Sigma$. ■

Teorema 3.10. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}, \bar{g})$ uma hipersuperfície mínima de fronteira livre que cumpre*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4r_0^2}. \quad (3.18)$$

Então, Σ^n é um disco totalmente geodésico passando pela origem.

Demonstração.. Considere a função $v = \bar{g}(\vec{x}, \bar{N})$, onde \bar{N} é o campo vetorial normal a Σ . Definida sobre Σ e o operador $L := \Delta + |A|^2 + q$ para

$$q = \bar{\text{Ric}}(\bar{N}, \bar{N}) + 4ne^{-2h}[u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2)].$$

Pelo **Lema 3.3** temos que $q \leq 0$, e sob a hipótese (3.18), o **Lema 3.7** garante que o primeiro autovalor do operador $L := \Delta + |A|^2 + q$ para o problema $L[v_1] = -\lambda_1 v_1$ com $v_1 = 0$ sobre o bordo $\partial\Sigma$ é estritamente positivo. Como nesse caso temos $L[v] = 0$, decorre que $v \equiv 0$ em Σ . Assim, $0 \equiv v = \bar{g}(\vec{x}, \bar{N}) = e^{2h} \langle \vec{x}, \bar{N} \rangle$ e portanto $\langle \vec{x}, \bar{N} \rangle \equiv 0$. As curvaturas principais k_i e \bar{k}_i , $i = 1, \dots, n$ de Σ com respeito a métrica canônica \langle, \rangle de \mathbb{R}^{n+1} e \bar{g} de $(\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}, \bar{g})$ respectivamente, são relacionadas pela equação (2.37), a saber,

$$\bar{k}_i = \frac{1}{e^h} (k_i - 2u'(|\vec{x}|^2) \langle \vec{x}, N \rangle) \quad i = 1, \dots, n,$$

em que N denota o vetor normal a Σ na métrica \langle, \rangle dado por $N = e^h \bar{N}$. Como Σ^n é mínima na métrica \bar{g} devemos ter,

$$0 = \sum_{i=1}^n \bar{k}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{e^h} (k_i - 2u'(|\vec{x}|^2) \langle \vec{x}, N \rangle) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{e^h} (k_i - 2u'(|\vec{x}|^2)e^h \langle \vec{x}, \bar{N} \rangle) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{e^h} k_i,$$

isto é, $\sum_{i=1}^n k_i = 0$ e portanto Σ^n também é mínima em \mathbb{R}^{n+1} e cumpre $\langle \vec{x}, N \rangle \equiv 0$. Desse modo, concluímos que Σ é um disco totalmente geodésico passando pela origem. ■

Com base na **Observação 3.8**, temos também o seguinte teorema análogo ao resultado acima.

Teorema 3.11. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}, \bar{g})$ ($n \geq 3$) uma hipersuperfície mínima de fronteira livre que cumpre*

$$|A|^2 \leq \frac{(n-2)^2}{4\bar{r}^2} \quad (3.19)$$

em todo ponto $x \in \Sigma \setminus \vec{0}$, em que $\bar{r} = \bar{r}(x)$ denota a distância em $B_{\bar{R}}$ de um ponto $x \in \Sigma$ até o ponto $\vec{0}$. Então, Σ é um disco totalmente geodésico passando pela origem.

A demonstração do teorema acima se faz de maneira análoga à demonstração do **Teorema 3.10**, mudando o que for necessário.

3.2 Resultados de gap para $|A|^2$ em hipersuperfícies mínimas de fronteira livre imersas em um domínio anelar

Seja $r_0 < a \leq \infty$ e considere $(\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}, \bar{g})$, em que $\bar{g} = e^{2h} \langle, \rangle$ com $h(x) = u(|x|^2)$ e u nas condições do **Lema 3.4**. Para $r_1 < r_2 \leq r_0$, seja $\mathcal{A}(r_1, r_2) := \mathbb{B}_{r_2}^{n+1} \setminus \mathbb{B}_{r_1}^{n+1}$ o anel $(n+1)$ -dimensional e considere a variedade $(\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$. Quando quisermos enfatizar que a métrica \bar{g} coincide com a métrica canônica (isto é, para $u \equiv 0$) escreveremos $\mathcal{A}(r_1, r_2)$ em vez de $(\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$, salvo menção explícita em contrário.

Teorema 3.12. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ uma imersão de uma hipersuperfície mínima de fronteira livre. Suponha que*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4\bar{r}_2^2}. \quad (3.20)$$

Então, Σ é tangente ao campo posição, além disso, $\partial\Sigma$ intersecta as duas componentes conexas de $\partial\mathcal{A}(r_1, r_2)$.

Demonstração. A demonstração é feita de maneira análoga ao **Teorema 3.10**. Isto é, concluímos que a função $v = \bar{g}(\vec{x}, \vec{N})$ tem que ser identicamente nula sobre Σ^n , o que força Σ^n ser também uma hipersuperfície mínima de fronteira livre no domínio $\mathbb{B}_{r_2}^{n+1} \setminus \mathbb{B}_{r_1}^{n+1}$. A diferença aqui, é que o fato de Σ^n não passar pela origem não nos permite concluir que a hipersuperfície é totalmente geodésica. Entretanto, como vimos no **Teorema 3.10**, $\bar{g}(\vec{x}, \vec{N}) \equiv 0$ implica que $\langle \vec{x}, N \rangle \equiv 0$ sobre Σ^n como hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1} . Assim, o bordo $\partial\Sigma$ necessariamente intersecta cada uma das componentes conexas do bordo $\partial\mathcal{A}(r_1, r_2)$, pois caso contrário, a função $f(x) = |x|^2$ restrita a Σ^n teria um ponto de mínimo ou um ponto de máximo local em algum ponto $x_0 \in \Sigma$, o que implica que $\nabla f(x_0) = \vec{x}_0$ deve estar na direção do vetor normal N em x_0 e assim $\langle \vec{x}_0, N \rangle \neq 0$, o que não ocorre. ■

O teorema acima diz que uma hipersuperfície mínima $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ de fronteira livre satisfazendo a condição (3.20), necessariamente tem sua função suporte $v = \bar{g}(\vec{x}, \bar{N})$ identicamente nula, e além disso, o bordo $\partial\Sigma$ deve intersectar cada uma das componentes conexas de $\partial\mathcal{A}$. Observe que no caso específico do espaço euclidiano o qual o teorema engloba, não é possível dizer de imediato que uma tal hipersuperfície é totalmente geodésica, já que em dimensão $n \geq 3$ o espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} admite hipersuperfícies mínimas não totalmente geodésicas, como cones, cuja porção que intersecta um anel $\mathcal{A}(r_1, r_2)$, forma uma hipersuperfície mínima de fronteira livre em $\mathcal{A}(r_2, r_1)$. Entretanto, tais hipersuperfícies possui uma singularidade na origem $\vec{0}$, logo, devemos ter $|A|^2(p)$ arbitrariamente grande quando p se aproxima de $\vec{0}$. Assim, é natural esperar que alguma restrição no raio menor r_1 seja necessária para caracterizar as hipersuperfícies satisfazendo (3.20) como totalmente geodésicas. Isso é o que faremos nas próximas secções.

O caso de um anel Euclidiano

Seja $C_\Gamma := \{\lambda y; y \in \Gamma^{n-1}, \lambda \in (0, \infty)\}$ um cone em \mathbb{R}^{n+1} com vértice na origem e tomado sobre uma hipersuperfície fechada $\Gamma \subset \mathbb{S}^n$. Observe que a função suporte $v = \langle \vec{x}, N \rangle$ e tal que $v \equiv 0$ sobre C_Γ e que se $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície que tem a propriedade de ter a função suporte identicamente nula então Σ está contida em algum cone C_Λ para alguma hipersuperfície $\Lambda^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$.

Lema 3.13. *C_Γ é uma hipersuperfície mínima em \mathbb{R}^{n+1} se, e somente se, Γ é uma hipersuperfície mínima em \mathbb{S}^n .*

Demonstração. Seja $\bar{\nabla}$ a conexão do \mathbb{R}^{n+1} e N o campo normal a C_Γ . A conexão de C_Γ é dada por $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T$ para quaisquer campos X e Y tangentes a C_Γ . A conexão de Γ como subvariedade de \mathbb{S}^n é dada por $\nabla_Z^{\Gamma} W = (\nabla_Z W)^T$ para quaisquer campos Z e W tangentes a Γ como subvariedade de \mathbb{S}^n . Seja $p \in C_\Gamma \cap \Gamma^{n-1}$, logo $|\vec{p}| = 1$, e como $\vec{x} \in T_x C_\Gamma \forall x \in C_\Gamma$ temos $\vec{p} \in T_p C_\Gamma$. Considere então $E_n = \vec{p}$ e complete a uma base $\{E_1, \dots, E_{n-1}, E_n\}$ ortonormal de $T_p C_\Gamma$. Se C_Γ é mínima em \mathbb{R}^{n+1} , então devemos ter

$$\sum_{k=1}^n \langle -\bar{\nabla}_{E_k} N, E_k \rangle (p) = 0. \quad (3.21)$$

Por outro lado,

$$\langle \vec{x}, N \rangle \equiv 0 \Rightarrow \vec{x} \langle \vec{x}, N \rangle = 0 \Rightarrow \langle \bar{\nabla}_{\vec{x}} \vec{x}, N \rangle + \langle \vec{x}, \bar{\nabla}_{\vec{x}} N \rangle = 0 \Rightarrow \langle -\bar{\nabla}_{\vec{x}} N, \vec{x} \rangle = 0,$$

já que $\langle \bar{\nabla}_{\vec{x}} \vec{x}, N \rangle = \langle \vec{x}, N \rangle = 0$. Em particular, para $\vec{x} = p$ devemos ter

$$\langle -\bar{\nabla}_{\vec{p}} N, \vec{p} \rangle = 0 \Rightarrow \langle -\bar{\nabla}_{E_n} N, E_n \rangle = 0. \quad (3.22)$$

Assim, a equação (3.21) fica

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n \langle -\bar{\nabla}_{E_k} N, E_k \rangle (p) = \sum_{k=1}^{n-1} \langle -\bar{\nabla}_{E_k} N, E_k \rangle (p) + \langle -\bar{\nabla}_{E_n} N, E_n \rangle (p) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \langle -\bar{\nabla}_{E_k} N, E_k \rangle (p). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como $p \in \mathbb{S}^n$, \vec{p} é ortogonal a $T_p \mathbb{S}^n$ e sendo $\langle \vec{p}, N \rangle = 0$, decorre que $N \in T_p \mathbb{S}^n$. Assim, N é normal a Γ^{n-1} como subvariedade de \mathbb{S}^n . Sendo $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$ uma base para $T_p \Gamma$, a equação (3.23) fornece

$$\sum_{k=1}^{n-1} \langle -\nabla_{E_k} N, E_k \rangle (p) = \sum_{k=1}^{n-1} \langle -(\bar{\nabla}_{E_k} N)^T, E_k \rangle (p) = \sum_{k=1}^{n-1} \langle -\bar{\nabla}_{E_k} N, E_k \rangle (p) = 0,$$

o que diz que Γ^{n-1} é uma subvariedade mínima de \mathbb{S}^n . A recíproca se faz de maneira análoga, mudando o que for necessário. ■

Exemplo 3.14. Para $n \geq 3$, consideremos o toro de Clifford $\mathbb{T}_{m,n} := \mathbb{S}_{\lambda_1}^m \times \mathbb{S}_{\lambda_2}^{(n-1)-m}$, em que $\lambda_1 = \sqrt{\frac{m}{n-1}}$, $\lambda_2 = \sqrt{\frac{(n-1)-m}{n-1}}$ e $1 \leq m \leq n-2$. Como $\mathbb{T}_{m,n}$ é um hipersuperfície mínima de \mathbb{S}^n o cone $C_{\mathbb{T}_{m,n}} = \{\lambda y; y \in \mathbb{T}_{m,n}, \lambda \in (0, \infty)\}$ é uma hipersuperfície mínima no espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} .

Dado $\lambda > 0$ considere a hipersuperfície $\Gamma_\lambda := C_\Gamma \cap \mathbb{S}_\lambda^n$, em que \mathbb{S}_λ^n denota a esfera de raio λ . Observe que Γ_λ é obtida a partir de $\Gamma^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ por uma homotetia, isto é, todo ponto $x_0 \in \Gamma_\lambda$ é tal que existe um ponto $p \in \Gamma^{n-1}$ de modo que $x_0 = \lambda p$. Sejam $|A|^2$ e $|A_\lambda|^2$ denotando o quadrado da norma da segunda forma fundamental de C_Γ como hipersuperfície do espaço \mathbb{R}^{n+1} e de Γ_λ como hipersuperfície de \mathbb{S}_λ^n , respectivamente. O próximo lema relaciona $|A|^2$ com $|A_\lambda|^2$.

Lema 3.15. Seja $\lambda > 0$ e considere $\Gamma_\lambda \hookrightarrow \mathbb{S}_\lambda^n$. Temos que

$$|A|^2(q) = |A_\lambda|^2(q)$$

para todo $q \in C_\Gamma \cap \Gamma_\lambda$.

Demonstração. Seja $q \in \Gamma_\lambda$. Considere $E_n = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$ e complete à uma base $\{E_1, \dots, E_{n-1}, E_n\}$ ortonormal de $T_q C_\Gamma$. Como vimos em (3.22), o fato de $\langle \vec{x}, N \rangle \equiv 0$ sobre C_Γ garante que $\langle -\bar{\nabla}_{\vec{x}} N, \vec{x} \rangle (q) = 0$, portanto, para $x = q$ temos $\langle -\bar{\nabla}_{\vec{q}} N, \vec{q} \rangle (q) = 0$ e multiplicando essa última expressão por $\frac{1}{|\vec{q}|^2}$, obtemos $\langle -\bar{\nabla}_{E_n} N, E_n \rangle (q) = 0$, isto é, o vetor $-\bar{\nabla}_{E_n} N$ é ortogonal a E_n ou é nulo. Afirmamos que $-\bar{\nabla}_{E_n} N = 0$. De fato, basta observar que se considerarmos a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C_\Gamma$ dada por $\alpha(t) = (1 + \frac{t}{|\vec{q}|})q$ temos $\alpha'(0) = E_n$, e como o espaço

tangente $T_{\alpha(t)}C_\Gamma$ é o mesmo para todo t , o vetor normal N não varia sobre α e portanto devemos ter $-\bar{\nabla}_{E_n}N = 0$. Sabemos que $A(\cdot) = -\bar{\nabla}_{(\cdot)}N$ é uma aplicação linear auto adjunta. Assim, $0 = \langle A(E_n), E_i \rangle(q) = \langle E_n, A(E_i) \rangle(q)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Logo,

$$\begin{aligned}
 |A|^2(q) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle A_C(E_l), E_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^n \langle A_C(E_l), E_k \rangle^2 + \sum_{l=1}^n \langle A_C(E_l), E_n \rangle^2 \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \sum_{l=1}^{n-1} \langle A_C(E_l), E_k \rangle^2 + \langle A_C(E_n), E_k \rangle^2 \right\} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \langle A_C(E_l), E_k \rangle^2 \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \langle -\bar{\nabla}_{E_l}N, E_k \rangle^2. \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de Γ_λ como subvariedade de \mathbb{S}_λ^n sendo que N é normal a Γ_λ com $N \in T_q\mathbb{S}^n$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 |A_\lambda|^2(q) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \langle -\nabla_{E_l}N, E_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \langle -(\bar{\nabla}_{E_l}N)^T, E_k \rangle^2 \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \langle -\bar{\nabla}_{E_l}N, E_k \rangle^2, \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

em que ∇ denota a conexão de \mathbb{S}^n com respeito à métrica induzida do \mathbb{R}^{n+1} . Comparando as equações (3.24) e (3.25), segue o resultado. ■

Lema 3.16. *Considere $\Gamma^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ uma superfície fechada e seja C_Γ o cone em \mathbb{R}^{n+1} com vértice na origem tomado sobre Γ^{n-1} . Dado um $q \in C_\Gamma$, façamos $\lambda = |\vec{q}|$ e $\Gamma_\lambda = C_\Gamma \cap \mathbb{S}_\lambda^n$. Assim, para $p = \frac{1}{\lambda}q \in \mathbb{S}^n$ temos*

$$|A_\lambda|^2(q) = \frac{1}{\lambda^2} |A_1|^2(p). \tag{3.26}$$

Observação 3.17. *Uma consequência da identidade (3.26) é que se Γ^{n-1} é uma hipersuperfície mínima em \mathbb{S}^n , então o cone C_Γ tomado sobre Γ^{n-1} é uma hipersuperfície mínima totalmente geodésica em \mathbb{R}^{n+1} se, e somente se, Γ^{n-1} é uma hipersuperfície mínima totalmente geodésica em \mathbb{S}^n .*

Pelos lemas (3.15) e (3.16), se C_Γ é um cone em \mathbb{R}^{n+1} tomado sobre alguma hipersuperfície de \mathbb{S}^n e $q \in C_\Gamma$, então para $p = \frac{1}{|\vec{q}|}q$ temos

$$|A|^2(q) = \frac{1}{|\vec{q}|^2} |A_1|^2(p). \tag{3.27}$$

Isso diz que o quadrado da segunda forma fundamental de C_Γ como hipersuperfície do \mathbb{R}^{n+1} quando calculado sobre $\Gamma_\lambda = C_\Gamma \cap \mathbb{S}_\lambda^n$, para algum λ , pode ser comparado com o quadrado

da segunda forma fundamental de uma hipersuperfície $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ obtida por uma homotetia $\Gamma = \frac{1}{\lambda}\Gamma_\lambda$. Tendo em vista o **Lema 3.13**, essa comparação torna-se útil no contexto em que estamos trabalhando se o cone C_Γ for uma hipersuperfície mínima \mathbb{R}^{n+1} devido ao seguinte teorema:

Teorema 3.18 (Chern-do Carmo-Kobayashi, [14]). . *Seja $\Gamma^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície mínima fechada imersa isometricamente na esfera unitária. Suponha que a segunda forma fundamental A_1 de Γ^{n-1} satisfaça*

$$|A_1|^2 \leq n - 1.$$

Então, ocorre uma das duas situações,

- (1) $|A_1|^2 \equiv 0$ e Γ^{n-1} é um equador \mathbb{S}^{n-1} de \mathbb{S}^n
- (2) ou $|A_1|^2 \equiv n - 1$ e Γ^{n-1} é um toro de Clifford $\mathbb{T}_{n,m}$.

Exemplo 3.19. *Seja $n \geq 3$ e considere $C_{\mathbb{T}}$ o cone mínimo em \mathbb{R}^{n+1} tomado sobre o toro de Clifford $\mathbb{T}_{m,n} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$. Considere $\mathcal{A}(r_1, r_2)$ para $r_2 = 1$ e $r_1^2 = \frac{4(n-1)}{n^2}r_2^2$ e seja também $C_{\mathbb{T}}(r_1, r_2) = C_{\mathbb{T}} \cap \mathcal{A}(r_1, r_2)$ a porção de $C_{\mathbb{T}}$ compreendida em $\mathcal{A}(r_1, r_2)$. Pela equação (3.27), para um dado ponto $q \in C_{\mathbb{T}}(r_1, r_2)$ temos*

$$|A|^2(q) = \frac{1}{|\bar{q}|^2} |A_1|^2(p).$$

Mas, pelo teorema acima, devemos ter $|A_1|^2 \equiv n - 1$. Assim,

$$|A|^2(q) = \frac{n-1}{|\bar{q}|^2} \leq \frac{n-1}{r_1^2} = \frac{n^2}{4r_2^2},$$

isto é,

$$|A|^2(q) \leq \frac{n^2}{4r_2^2} \quad \forall q \in C_{\mathbb{T}}(r_1, r_2).$$

Observe que o exemplo acima diz que apenas a condição $|A|^2(q) \leq \frac{n^2}{4r_2^2}$ não é suficiente para caracterizar uma superfície mínima de fronteira livre no domínio $\mathcal{A}(r_1, r_2)$ como sendo totalmente geodésica como fizemos no **Teorema 3.10**. Para esse caso precisaremos de uma hipótese adicional que em suma diz respeito a uma condição de distanciamento entre os raios r_1 e r_2 de $\mathcal{A}(r_1, r_2)$ como veremos precisamente no **Corolário 9.**, mas antes, vamos mostrar um caso um pouco mais geral que será útil para estudar o caso de hipersuperfícies mínimas de fronteira livre no domínio $(\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$.

Proposição 3.20. *Seja C_Γ um cone mínimo em \mathbb{R}^{n+1} com vértice na origem tomado sobre uma hipersuperfície mínima fechada de \mathbb{S}^n . Considere $C_\Gamma(r_1, r_2) = C_\Gamma \cap \mathcal{A}(r_1, r_2)$ o tronco*

do cone C_Γ confinado no anel $\mathcal{A}(r_1, r_2)$. Suponha que para alguma constante a_0 ,

$$|A|^2(q) \leq \frac{n^2}{4r_2^2} a_0 \quad (3.28)$$

para todo $q \in C_\Gamma(r_1, r_2)$. Então,

i) Se

$$r_1^2 < \frac{4(n-1)}{n^2 a_0} r_2^2, \quad (3.29)$$

então $C_\Gamma(r_1, r_2)$ é um anel totalmente geodésico. Em particular se a dimensão n cumpre $\frac{n^2}{n-1} \leq \frac{4}{a_0}$ a desigualdade (3.29) é sempre satisfeita já que $r_1 < r_2$, e assim, C_Γ será um disco totalmente geodésico apenas sob a condição (3.28).

ii) Se $\frac{n^2}{n-1} > \frac{4}{a_0}$,

$$r_1^2 = \frac{4(n-1)}{n^2 a_0} r_2^2 \quad (3.30)$$

e a igualdade (3.28) ocorre em algum ponto $q \in C_\Gamma(r_1, r_2)$, temos que Γ é um toro de Clifford $\mathbb{T}_{m,n}$.

Demonstração. Fazamos $\Gamma_\lambda = C_\Gamma(r_1, r_2) \cap \mathbb{S}_\lambda^n$, em que $r_1 \leq \lambda \leq r_2$, e denotemos por A_λ a segunda forma fundamental das respectivas hipersuperfícies como subvariedades de \mathbb{S}_λ^n . Observe que $\Gamma = \frac{1}{\lambda} \Gamma_\lambda$. Denotaremos a segunda forma fundamental de Γ por A_1 . Para cada $q \in C_\Gamma(r_1, r_2)$ escolha $p = \frac{1}{\lambda} q \in \mathbb{S}^n$. Pela identidade (3.27) temos

$$|A|^2(q) = \frac{1}{|q|^2} |A_1|^2(p),$$

isto é,

$$|A_1|^2(p) = |A|^2(q) |q|^2 \quad (3.31)$$

para todo $q \in C_\Gamma(r_1, r_2)$.

i) Assim, pela hipótese (3.28) e a condição (3.29) sobre os raios r_1 e r_2 temos

$$|A_1|^2(p) = |A|^2(q) |q|^2 \leq \frac{n^2}{4r_2^2} a_0 |q|^2 < \frac{n-1}{r_1^2} |q|^2,$$

isto é,

$$|A_1|^2(p) < \frac{n-1}{r_1^2} |q|^2.$$

Como a desigualdade acima vale para todo $q \in C_\Gamma(r_1, r_2)$ e $p \in \Gamma$ tal que $p = \frac{1}{\lambda} q$, sendo $r_1 \leq |q| \leq r_2$, em particular para $|q| = r_1$ tem-se

$$|A_1|^2(p) < n - 1$$

para todo $p \in \Gamma$, decorre então do **Teorema 3.18** que $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície totalmente geodésica, e pela **Observação 3.17**, $C_\Gamma(r_1, r_2)$ é uma hipersuperfície mínima totalmente geodésica.

ii) Desenvolvendo (3.31) e usando as hipóteses (3.28) e (3.30) obtemos

$$|A_1|^2(p) = |A|^2(q) |q|^2 \leq \frac{n^2}{4r_2^2} a_0 |q|^2 = \frac{n-1}{r_1^2} |q|^2. \quad (3.32)$$

Novamente, a equação é satisfeita para todo $q \in C_\Gamma(r_1, r_2)$ e $p \in \Gamma$ tal que $p = \frac{1}{\lambda}q$, sendo $r_1 \leq |q| \leq r_2$, em particular, para $|q| = r_1$ tem-se

$$|A_1|^2(p) \leq n-1. \quad (3.33)$$

Mas por hipótese, a igualdade em (3.28) ocorre para algum ponto $q \in C_\Gamma(r_1, r_2)$, portanto, deve ocorrer também em (3.33) para algum ponto $p \in \Gamma$. Agora, o **Teorema 3.18** garante que $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ é um toro de Clifford e o cone suporte do tronco $C_\Gamma(r_1, r_2)$ é tomado sobre o mesmo. ■

O próximo resultado segue como um Corolário do **Teorema 3.12**.

Corolário 9. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$ uma imersão de uma hipersuperfície mínima de fronteira livre em um anel Euclidiano $(n+1)$ -dimensional. Suponha que*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4r_2^2}. \quad (3.34)$$

Então, temos que

- i) *Se $n = 2$ então $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$ é um anel totalmente geodésico.*
- ii) *Se $n \geq 3$ e $r_1^2 < \frac{4(n-1)}{n^2} r_2^2$ então $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$ é um anel totalmente geodésico.*
- iii) *Se $n \geq 3$ e $r_1^2 = \frac{4(n-1)}{n^2} r_2^2$ então ou $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$ é um anel totalmente geodésico ou Σ^n é um tronco de cone cujo cone suporte é tomado sobre um toro de clifford em \mathbb{S}^n .*

Demonstração. Pelo **Teorema 3.12**, a função suporte $v = \langle \vec{x}, N \rangle$ é identicamente nula sobre Σ^n e o bordo $\partial\Sigma$ intersecta as duas componentes conexas de $\partial\mathcal{A}(r_1, r_2)$. Isso diz que Σ está contida em um cone mínimo de \mathbb{R}^{n+1} . As conclusões seguem então da proposição **Proposição 3.20**, escolhendo $a_0 = 1$. ■

O caso de um anel conforme ao anel Euclidiano

Vamos agora estudar o caso de uma imersão mínima de fronteira livre $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$, em que o anel $\mathcal{A}(r_1, r_2)$ esta munido de uma métrica não é necessariamente euclidiana.

Quando Σ^n estiver munida da geometria euclidiana de $\mathbb{B}_{r_2}^{n+1} \setminus \mathbb{B}_{r_1}^{n+1}$ escreveremos Σ_δ^n , e a segunda forma fundamental da respectiva geometria será denotada por A_δ . Se $p \in \Sigma^n$ tem distância euclidiana até a origem dada por $r = |p|$, então a distância de p até a origem com respeito à métrica $\bar{g} = e^{2u(|x|^2)} \langle \cdot, \cdot \rangle$ é dada pela equação (1.5), a saber,

$$\bar{r} = rI(r), \quad (3.35)$$

em que $I(r) = \int_0^1 e^{u(t^2r^2)} dt$. Para os propósitos que seguem, definimos $m_0 = \sup\{e^{2u(|x|^2)}; x \in \mathcal{A}(r_1, r_2)\}$.

O próximo resultado segue como um Corolário do **Teorema 3.12**.

Corolário 10. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ uma imersão de uma hipersuperfície mínima de fronteira livre em um anel $(n+1)$ -dimensional conforme ao anel Euclidiano $\mathcal{A}(r_1, r_2)$. Suponha que*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4r_2^2}. \quad (3.36)$$

Então,

1) *Se $n = 2$, então $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ é um anel totalmente geodésico.*

2) *Se $\frac{n^2}{(n-1)} \leq 4 \left(\frac{I(r_2)^2}{m_0} \right)$, então $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ é um anel totalmente geodésico.*

3) *Se $\frac{n^2}{(n-1)} > 4 \left(\frac{I(r_2)^2}{m_0} \right)$ e $r_1^2 < \frac{4(n-1)}{n^2} \left(\frac{I(r_2)^2}{m_0} \right) r_2^2$, então $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ é um anel totalmente geodésico.*

4) *Se $\frac{n^2}{(n-1)} > 4 \left(\frac{I(r_2)^2}{m_0} \right)$ e $r_1^2 = \frac{4(n-1)}{n^2} \left(\frac{I(r_2)^2}{m_0} \right) r_2^2$, então ou $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ é um anel totalmente geodésico ou Σ^n é um tronco de cone cujo cone suporte é tomado sobre um toro de Clifford em \mathbb{S}^n quando considerada como $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \langle \cdot, \cdot \rangle)$*

Demonstração. Pelo **Teorema 3.12** a função suporte $v = \bar{g}(\vec{x}, \bar{N}) = e^{2h} \langle \vec{x}, \bar{N} \rangle$ é identicamente nula sobre Σ^n e o bordo $\partial\Sigma$ intersecta as duas componentes conexas de $\partial\mathcal{A}(r_1, r_2)$. As curvaturas principais \bar{k}_i e k_i de Σ^n e Σ_δ^n respectivamente, se relacionam pela equação (2.37), a saber,

$$\bar{k}_i = \frac{1}{e^h} k_i - 2u'(|x|^2) \langle \vec{x}, N \rangle, \quad (3.37)$$

em que N é o vetor normal a Σ_δ^n dado por $N = e^h \bar{N}$. Como $v \equiv 0$ devemos ter $0 \equiv \langle \vec{x}, \bar{N} \rangle = e^{-h} \langle \vec{x}, N \rangle$ e portanto $\langle \vec{x}, N \rangle \equiv 0$. Assim, a equação (3.37) nos diz que Σ^n também é uma superfície mínima de fronteira livre em $\mathcal{A}(r_1, r_2)$ e portanto Σ^n é o tronco de um cone mínimo C_n tomado sobre alguma hipersuperfície mínima $\Gamma_1 \hookrightarrow \mathbb{S}^n$. Além disso,

$$\bar{k}_i = \frac{1}{e^h} k_i \Rightarrow e^{2h} |A|^2 = |A_\delta|^2,$$

em que A_δ denota a segunda forma fundamental de Σ_δ^n . Se $n = 2$, pelo item *i*) do **Corolário 9**, temos que Σ^2 é um anel totalmente geodésico e o item 1) está provado. Agora, pela definição de m_0 temos

$$|A_\delta|^2 = |A|^2 e^{2h} \leq |A|^2 m_0.$$

Usando agora a hipótese sobre $|A|^2$ temos

$$|A_\delta|^2 \leq |A|^2 m_0 \leq \frac{n^2}{4\bar{r}_2^2} m_0 = \frac{n^2}{4r_2^2} \frac{r_2^2}{\bar{r}_2^2} m_0 = \frac{n^2}{4r_2^2} a_0,$$

onde fizemos $a_0 = \frac{r_2^2}{\bar{r}_2^2} m_0$. Temos então

$$|A_\delta|^2 \leq \frac{n^2}{4r_2^2} a_0. \quad (3.38)$$

Como $I(r_2)^2 = \frac{\bar{r}_2^2}{r_2^2}$, temos $a_0 = \frac{m_0}{I(r_2)^2}$ e portanto

$$\frac{n^2}{(n-1)} \leq 4 \left(\frac{I(r_2)^2}{m_0} \right) \Leftrightarrow \frac{n^2}{(n-1)} \leq \frac{4}{a_0}. \quad (3.39)$$

Logo, Σ^n é o tronco de um cone mínimo de fronteira livre em $\mathcal{A}(r_1, r_2)$ que cumpre as condições (3.38) e (3.39). Pelo item *i*) da **Proposição 3.20**, $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$ é um anel totalmente geodésico, isto é, $|A_\delta|^2 \equiv 0$, mas como $|A_\delta|^2 = |A|^2 e^{2h}$, segue que $|A|^2 = 0$, e portanto, $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ também é totalmente geodésica e o item 2) está provado. Além do mais, temos

$$\frac{n^2}{(n-1)} > 4 \left(\frac{I(r_2)^2}{m_0} \right) \Leftrightarrow \frac{n^2}{(n-1)} > \frac{4}{a_0} \quad (3.40)$$

e

$$r_1^2 < (=) \frac{4(n-1)}{n^2} \left(\frac{I(r_2)^2}{m_0} \right) r_2^2 \Leftrightarrow r_1^2 < (=) \frac{4(n-1)}{n^2 a_0} r_2^2. \quad (3.41)$$

De forma semelhante, o item *i*) da **Proposição 3.20** garante sob as condições (3.38), (3.40) e a desigualdade estrita em ambas as inequações de (3.41), que $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$ é um anel totalmente geodésico e pelo mesmo argumento feito anteriormente temos que $\Sigma^n \hookrightarrow (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$ também é um anel totalmente geodésico e o item 3) está provado. Finalmente, o item *ii*) da mesma **Proposição** garante sob as condições (3.38), (3.40) com a igualdade em (3.41) que duas situações podem ocorrer, ou $|A_\delta|^2 \equiv |A|^2 \equiv 0$ ou $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$ é um tronco de cone cujo cone suporte é tomado sobre um toro de Clifford e o item 4) está provado. ■

Exemplo 3.21. Considere o espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} modelado no disco de Poincaré; $\mathbb{H}^{n+1} = (\mathbb{B}_1^{n+1}, \bar{g})$, em que $\bar{g} = e^{2h} \langle \cdot, \cdot \rangle$ com $h(x) = u(|x|^2) = \ln \left(\frac{2}{1-|x|^2} \right)$. Dados $r_1 < r_2 < 1$ considere $\mathcal{A}(\bar{r}_1, \bar{r}_2) := (\mathcal{A}(r_1, r_2), \bar{g})$, onde por (3.35) temos

$$\bar{r}_i = r_i \frac{2 \tanh^{-1}(r_i)}{r_i} = 2 \tanh^{-1}(r_i).$$

Para esse caso, $m_0 = \frac{4}{(1-r_2^2)^2}$. Façamos então,

$$f(r) := \frac{4I(r)^2}{m_0} = 4[\tanh^{-1}(r)]^2 \left(\frac{1-r^2}{r} \right)^2.$$

Estudando mais a fundo a função $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ podemos verificar que $\lim_{r \rightarrow 0} f(r) = 4$, $\lim_{r \rightarrow 1} f(r) = 0$ e $f'(r) < 0$. Assim, a função f é decrescente, limitada superiormente por 4 e inferiormente por 0.

Seja $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(\bar{r}_1, \bar{r}_2)$ uma imersão mínima de fronteira livre satisfazendo,

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4\bar{r}_2^2}.$$

Observe que para todo $n \geq 2$ temos

$$\frac{n^2}{(n-1)} > f(r) = \frac{4I(r)^2}{m_0}.$$

Assim,

A) Se $n = 2$, então $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(\bar{r}_1, \bar{r}_2)$ é um anel totalmente geodésico.

B) Se $n \geq 3$ e $r_1^2 < \frac{(n-1)}{n^2} f(r_2) r_2^2$, então Σ^n é anel totalmente geodésico.

C) Se $n \geq 3$ e $r_1^2 = \frac{(n-1)}{n^2} f(r_2) r_2^2$, então podemos ter duas situações; Σ^n é um anel totalmente geodésico ou um tronco de cone cujo cone suporte é tomado sobre um toro de Clifford $\mathbb{T}_{m,n} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ quando consideramos $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}(r_1, r_2)$.

Capítulo 4

Warped products

Nesse capítulo trataremos especificamente dos espaços warped product. Mostraremos que todos os resultados dos capítulos anteriores podem ser reformulados nesse contexto modificando o que for necessário. Sugerimos [11] e [21] como referência para um estudo mais profundo sobre as propriedades geométrica desses espaços.

4.1 Métrica warped

Seja (N, g) uma variedade riemanniana com uma métrica g . Considere $I = (a, b)$ um intervalo com $0 \leq a < b \leq \infty$ e $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e positiva em I . A variedade riemanniana $W = I \times N$ com a métrica $g^w = dr^2 + \lambda^2(r)g$ é chamada de warped product. A função λ é chamada de função warping e a métrica g^w é chamada de métrica warped.

Exemplo 4.1. Considere o retângulo $A = (-\pi, \pi) \times [0, 2\pi]$, a esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ e a aplicação $\Phi_2 : A \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi_2(\theta_1, \theta_2) = (\sin(\theta_1) \cos(\theta_2), \sin(\theta_1) \sin(\theta_2), \cos(\theta_1)).$$

A métrica canônica de \mathbb{S}^2 induz em A uma métrica g^w dada por $g^w = d\theta_1^2 + \sin^2(\theta_1)d\theta_2^2$. Assim, \mathbb{S}^2 pode ser considerada como um warped product $A = (-\pi, \pi) \times [0, 2\pi]$ cuja métrica warped é g^w como descrita acima. A função warping nesse caso é dada por $\lambda(\theta_1) = \sin(\theta_1)$. De maneira indutiva, podemos considerar coordenadas $(r, \theta_1, \dots, \theta_n) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{S}^n$ em \mathbb{S}^{n+1} dadas pela imersão

$$\Phi_{n+1} : (-\pi, \pi) \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R},$$

em que $\Phi_{n+1}(r, \theta_1, \dots, \theta_n) = (\sin(r)\Phi_n(\theta_1, \dots, \theta_n), \cos(r))$. A métrica canônica de \mathbb{S}^{n+1} induz em $(-\pi, \pi) \times \mathbb{S}^n$ uma métrica warped dada por $g^w = dr^2 + \sin(r)^2g_{\mathbb{S}^n}$, em que $g_{\mathbb{S}^n}$ denota a

métrica canônica de \mathbb{S}^n . Dessa forma, $(-\pi, \pi) \times \mathbb{S}^n$ com a métrica $g^w = dr^2 + \sin(r)^2 g_{\mathbb{S}^n}$ é isométrico a \mathbb{S}^{n+1} .

Exemplo 4.2. Considere \mathbb{S}^n com a métrica warped $g_{\mathbb{S}^n}^w = dr^2 + \sin(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ como descrito anteriormente. Considere também o espaço $W = (0, \infty) \times \mathbb{S}^n$ e a imersão

$$\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

dada por $\Phi(r, \theta_1, \dots, \theta_n) = r\Phi_n(\theta_1, \dots, \theta_n)$. A métrica canônica do \mathbb{R}^{n+1} induz em W uma métrica g^w dada por $g^w = dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n}$. Isso diz que $W = (0, \infty) \times \mathbb{S}^n$ com a métrica warped $g^w = dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n}$ é isométrico a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$ com a métrica canônica.

Considere (W_1, g^{w_1}) e (W_2, g^{w_2}) warped products, em que $W_i = (a_i, b_i) \times \mathbb{S}^n$ com $g^{w_1} = dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n}$ e $g^{w_2} = ds^2 + \lambda^2(s) g_{\mathbb{S}^n}$ sendo $0 \leq a_i < b_i \leq \infty$.

Lema 4.3. Dado (W_2, g^{w_2}) , existe uma função $\phi : (a_1, b_1) \rightarrow \mathbb{R}$ positiva tal que $(W_1, \phi^2 g^{w_1})$ é isométrico a (W_2, g^{w_2}) . Reciprocamente, dado uma função $\phi : (a_1, b_1) \rightarrow \mathbb{R}$ positiva, existe $\lambda : (a_2, b_2) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que (W_2, g^{w_2}) é isométrico a $(W_1, \phi^2 g^{w_1})$.

Demonstração.

Considere coordenadas r em (a_1, b_1) e s em (a_2, b_2) . Precisamos encontrar a mudança de coordenadas $f : (a_1, b_1) \rightarrow (a_2, b_2)$ com $f(r) = s$ e $f^{-1}(s) = r$ de forma que

$$\phi^2(r) dr^2 + \phi^2(r) r^2 g_{\mathbb{S}^n} = ds^2 + \lambda^2(s) g_{\mathbb{S}^n},$$

isto é, precisamos resolver as equações

$$\begin{cases} \phi(r) dr = ds & (*) \\ \lambda(s) = \phi(r) r & (**) \end{cases}$$

para determinar $r = r(s)$ e $s = s(r)$.

Dado (W_2, g^{w_2}) , pela equação $(**)$ devemos ter $\phi(r) = \frac{\lambda(s)}{r}$. Assim, ϕ fica inteiramente determinada se encontrarmos a função $s = s(r)$. Resolvendo $(*)$ para $\phi(r) = \frac{\lambda(s)}{r}$ em termos de $s = s(r)$ obtemos

$$\phi(r) dr = ds \Rightarrow \frac{\lambda(s)}{r} dr = ds \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{\lambda(s)} \frac{ds}{dr},$$

o que conduz a uma solução dada implicitamente pela relação.

$$\ln(r) - \ln(r_0) = \int_{s_0}^{s(r)} \frac{1}{\lambda(\xi)} d\xi \tag{4.1}$$

Agora, resolvendo (*) para $r = r(s)$ encontraremos

$$r(s) = r_0 \exp \left[\int_{s_0}^s \frac{1}{\lambda(\xi)} d\xi \right].$$

Assim, o intervalo (a_1, b_1) de definição de $s = s(r)$ é dado pela imagem do intervalo (a_2, b_2) pela aplicação $r = r(s)$, em que $r_0 = r(s_0)$ para algum $s_0 \in (a_2, b_2)$ escolhido.

Reciprocamente, dado ϕ , pela equação (**) devemos ter $\lambda(s) = \phi(r)r$. Precisamos então resolver (*) para $r = r(s)$. Com um raciocínio semelhante, obtemos $r = r(s)$ dado implicitamente pela expressão

$$s - s_0 = \int_{r_0}^{r(s)} \phi(\xi) d\xi,$$

e para $s = s(r)$, temos

$$s(r) = \int_{r_0}^r \phi(\xi) d\xi + s_0,$$

em que $r_0 \in (a_1, b_1)$ é escolhido. O intervalo de definição da função λ será dado pela imagem do intervalo (a_1, b_1) pela aplicação $s = s(r)$. ■

Corolário 11. *Seja $M = (\mathbb{B}_R^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}, \bar{g})$ ($R \leq \infty$) uma bola no espaço euclidiano com uma métrica conforme $\bar{g} = \phi^2 \langle \cdot, \cdot \rangle$, em que $\phi = \phi(|x|)$ é uma função radial e suave em seu domínio de definição. Então, existe uma função $\lambda : (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (para algum $b \leq \infty$) tal que $(W = (0, b) \times \mathbb{S}^n, g^w)$ é isométrico à M , em que $g^w = ds^2 + \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n}$. Reciprocamente, dado um warped product $(W = (0, b) \times \mathbb{S}^n, ds^2 + \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n})$, existe uma função $\phi : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ para algum $R (\leq \infty)$ tal que $M = (\mathbb{B}_R^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}, \bar{g})$ é isométrico a W .*

Demonstração. Considere a imersão

$$\Phi : W \rightarrow \mathbb{B}_R^{n+1}$$

dada pelo **Exemplo 4.2**. A aplicação Φ induz em W uma métrica $\bar{g}^w = \phi^2(r) dr^2 + \phi^2(r) r^2 g_{\mathbb{S}^2}$. Pelo lema anterior, existe $\lambda : (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que \bar{g}^w é equivalente à g^w e assim devemos ter (W, g^w) isométrico a $(\mathbb{B}_R^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}, \bar{g})$. Reciprocamente, dado um warped product (W, g^w) existe uma função $\phi : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que \bar{g}^w é equivalente à g^w . Defina em $(\mathbb{B}_R^{n+1} \setminus \{\vec{0}\})$ a métrica conforme $\bar{g} = \phi(|x|)^2 \langle \cdot, \cdot \rangle$, a mesma aplicação Φ induz em W uma métrica que é equivalente à \bar{g}^w e portanto equivalente à g^w . ■

Seja $W = I \times \mathbb{S}^n$ com $I = (0, b)$ um warped product com uma métrica $g^w = dr^2 + \lambda^2(r) g_{\mathbb{S}^n}$ para alguma função warping $\lambda : (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ suave em $(0, b)$. Observe que λ está definida em um intervalo aberto, não sendo possível determinar g^w , na maioria das vezes, quando $r \rightarrow \partial I$. Por exemplo, se $I = (0, \infty)$ e $g^w = dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n}$ temos que $\lambda^2(r) = r^2 \rightarrow 0$ e assim a métrica se degenera quando $r \rightarrow 0$. Entretanto, como vimos no **Exemplo 4.2**,

$W = ((0, \infty) \times \mathbb{S}^n, dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n})$ é isométrico ao espaço euclidiano $M = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}, \langle, \rangle)$ com $\lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r, \cdot) = \vec{0}$. Evidentemente, a métrica euclidiana se estende de maneira C^∞ a $\vec{0} \in M$ e nesse sentido escrevemos $([0, b) \times \mathbb{S}^n, dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n})$ para denotar o espaço \mathbb{R}^{n+1} .

De maneira geral, se $\lim_{s \rightarrow 0} \lambda(s) = 0$ escrevemos $W = ([0, b) \times \mathbb{S}^n, ds^2 + \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n})$ no sentido de que o espaço $(\mathbb{B}_R^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}, \phi^2(|x|) \langle, \rangle)$ ao qual W é isométrico, admite uma extensão diferenciável da função $\phi(|x|)$ ao ponto $\vec{0}$ com $\phi(0) > 0$. Uma questão interessante é saber quais condições devemos ter sobre a função warping para que um warped product $W = ([0, b) \times \mathbb{S}^n, ds^2 + \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n})$ com $\lim_{s \rightarrow 0} \lambda(s) = 0$ admita uma extensão diferenciável da métrica quando $s \rightarrow 0$ no sentido descrito acima. O Resultado a seguir esclarece essa questão e pode ser encontrado em [15], Lema 2.10.

Lema 4.4. *Considere o warped product $W = ([0, b) \times \mathbb{S}^n, ds^2 + \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n})$ com $\lim_{s \rightarrow 0} \lambda(s) = 0$. Uma condição necessária e suficiente para que W tenha uma extensão diferenciável da métrica g^w quando $\lim_{s \rightarrow 0} \lambda(s) = 0$ é que λ e possua derivada de todas as ordens em 0 com $\lambda'(0) = 1$ e $\frac{d^m \lambda}{ds^m}(0) = 0$ para todo m par.*

Observação 4.5. *Pelo Corolário 11 e Lema 4.4, dado um espaço $M = (\mathbb{B}_R^{n+1} \setminus \{e^{2u(|x|^2)}\}, \langle, \rangle)$ existe uma função λ definida em um domínio apropriado de maneira que M é isométrica a $W = ([0, b) \times \mathbb{S}^n, ds^2 + \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n})$. Assim, um warped product $W = ([0, b) \times \mathbb{S}^n, ds^2 + \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n})$ e uma variedade $M = (\mathbb{B}_R^{n+1} \setminus \{\bar{g}\})$ são essencialmente o mesmo espaço no sentido de que um determina o outro via uma isometria. Eles se diferem apenas na forma de representá-los.*

4.2 Resultados de gap em warped products

Resultados de gap via existência de uma função convexa

Considere um warped product $W^{n+1} = ([0, b) \times \mathbb{S}^n, g^w)$ ($g^w = ds^2 + \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n}$) com uma conexão riemanianna $\bar{\nabla}$. Suponha que a função warping λ cumpra as condições:

- i) $\lambda(0) = 0, \lambda(s) > 0 \forall s \in (0, b)$ e
- ii) $\lambda'(0) = 1, \frac{d^m \lambda}{ds^m}(0) = 0$ para todo n par.

O campo $X \in \mathcal{X}(W)$ dado por $X = \lambda(s) \partial_s$ é conforme, isto é,

$$\mathcal{L}_X g^w = 2\lambda'(s) g^w$$

e cumpre

$$\bar{\nabla}_Y X = \lambda'(s) Y \tag{4.2}$$

para qualquer campo $Y \in \mathcal{X}(W)$ (veja [8], Lema 2.2). Considere a bola geodésica $B_R = [0, R] \times \mathbb{S}^n \subset W^{n+1}$ em que $R < b$ é tal que $\lambda'(s) > 0 \forall s \in [0, R]$ e as as funções

$$a(s) = \lambda(s)^2 \quad \text{e} \quad b(s) = \lambda'(s).$$

Pelo **Lema 1.25** existe uma função $\Phi : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$2\Phi''(\lambda^2(s))\lambda(s)\lambda'(s)^2 + \Phi'(\lambda^2(s))\lambda''(s) = 0. \quad (4.3)$$

Considere $\varphi : W^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi = g^w(X, X)$, em que $X = \lambda(s)\partial_s$. Defina então a função $\Psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Psi(p) = \Phi(\varphi). \quad (4.4)$$

Observe que

$$\Psi(p) = \Phi(g^w(\lambda(s)\partial_s, \lambda(s)\partial_s)) = \Phi(\lambda^2(s)),$$

em que $s = s(p)$. Como o gradiente da função $\lambda'(s)$ com respeito à métrica g^w é dado por $\bar{\nabla}\lambda' = \lambda''\partial_s$, o **Lema 1.26** fornece

$$Hess_{\Sigma}\varphi(p)(Y, Z) = 2(\lambda''g^w(\partial_s, Y)g^w(X, Z) + (\lambda')^2g^w(Z, Y) + \lambda'g^w(B(Y, Z), X)). \quad (4.5)$$

Semelhante ao que fizemos na equação (1.15) do **Teorema 1.27** podemos obter

$$\begin{aligned} Hess_{\Sigma}\Psi(p)(Y, Z) &= 4(\lambda')^2\Phi''(\varphi)g^w(Y, X)g^w(Z, X) + \Phi'(\varphi)Hess_{\Sigma}\varphi(x)(Y, Z) \\ &= 2\lambda[2\lambda(\lambda')^2\Phi''(\varphi) + \Phi'(\varphi)\lambda'']g^w(\partial_s, Y)g^w(\partial_s, Z) \\ &\quad + 2\Phi'(\varphi)((\lambda')^2g^w(Z, Y) + \lambda'g^w(B(Y, Z), X)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Decorre então de (4.3) que

$$Hess_{\Sigma}\Psi(p)(Y, Z) = 2\Phi'(\varphi)[(\lambda')^2g^w(Z, Y) + \lambda'g^w(B(Y, Z), X)]. \quad (4.7)$$

Defina o conjunto

$$\mathcal{C}_w = \{p \in \Sigma; \Psi(p) = \min_{\Sigma}\Psi\}. \quad (4.8)$$

Sob as condições acima temos os seguintes resultados.

Teorema 4.6. *Seja $\Sigma^2 \hookrightarrow B_R \subset W^3$ uma imersão isométrica de uma superfície mínima compacta de fronteira livre em uma bola geodésica de W^3 . Suponha que*

$$\frac{1}{(\lambda')^2}|A|^2g^w(X, N)^2 \leq 2 \quad (4.9)$$

sobre Σ , em que N denota o campo normal unitário. Então,

1. Σ é difeomorfa a um disco.

2. ou Σ é um anel rotacional.

Demonstração. Considere a função Ψ definida em (4.4). Então, a equação (4.7) fornece

$$\begin{aligned} \text{Hess}_\Sigma \Psi(p)(Y, Z) &= 2\Phi'(\varphi) [(\lambda')^2 g^w(Z, Y) + \lambda' g^w(B(Y, Z), X)] \\ &= 2\Phi'(\varphi)(\lambda')^2 g^w \left(Z + \frac{1}{\lambda'} g^w(X, N)A(Z), Y \right). \end{aligned}$$

Pelo **Lema 1.24**, a condição (4.9) garante que $\text{Hess}_\Sigma \Psi$ é positivo semidefinido. Se o conjunto \mathcal{C}_w tem apenas um ponto então como no **Teorema 2.21** podemos concluir que Σ tem a topologia de um disco. Agora, suponha que existam p_1 e p_2 em \mathcal{C}_w . Segue de maneira semelhante como fizemos no **Lema 2.3**, que a geodésica minimizante γ ligando p_1 e p_2 em Σ está contida em um grande círculo do slice $\mathbb{S}_0 := \{s_0\} \times \mathbb{S}^2$, em que s_0 é tal que $\Phi(\lambda^2(s_0)) = \min_\Sigma \Psi$. Pelo **Corolário 11** podemos considerar uma isometria

$$\tilde{F} : (W^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^2, g^w) \rightarrow (\mathbb{B}_R^3 \setminus \{\vec{0}\}, \bar{g}),$$

em que $\bar{g} = \phi(|x|) \langle \cdot, \cdot \rangle$ e ϕ é determinada pelo **Lema 4.3**. Façamos $\tilde{\mathbb{S}}_0 := \tilde{F}(\mathbb{S}_0)$ e $\tilde{\gamma} := \tilde{F}(\gamma)$. Então, $\tilde{\mathbb{S}}_0$ é uma esfera em \mathbb{B}_R^3 centrada na origem e $\tilde{\gamma}$ está contida em um grande círculo de $\tilde{\mathbb{S}}_0$. Seja E o eixo ortogonal ao plano que contém $\tilde{\gamma}$ e considere o campo de Killing V definido em (2.5). De maneira inteiramente análoga ao que fizemos no **Teorema 2.21**, concluiremos que o campo V é tangente à $\tilde{\Sigma} = \tilde{F}(\Sigma)$. \blacksquare

Corolário 12. *Seja $\Sigma^2 \hookrightarrow B_R \subset W^3$ uma imersão isométrica de uma superfície mínima compacta de fronteira livre em uma bola geodésica de W^3 . Se a desigualdade em (4.9) é estrita, então Σ é difeomorfa a um disco.*

A demonstração do Corolário acima segue de maneira inteiramente análoga ao **Corolário 7**.

Teorema 4.7. *Seja $\Sigma^k \hookrightarrow (W^{n+1}, g^w)$ uma imersão isométrica de uma subvariedade mínima de bordo livre. Suponha que a condição*

$$\frac{1}{(\lambda')^2} |B|^2 |X^\perp|_{g^w}^2 \leq \frac{k}{k-1} \quad (4.10)$$

seja satisfeita sobre Σ^k . Então, uma das duas situações deve ocorrer.

- i) Σ^k é difeomorfa a um disco k -dimensional \mathbb{D}^k .
- ii) ou Σ é difeomorfa a uma variedade produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{k-1}$

A demonstração do teorema acima se faz de forma inteiramente análoga à demonstração do **Teorema 2.52**. Basta observar que sob a condição (4.10), a função dada em (4.4) cumpre $\text{Hess}_\Sigma \Psi(p) \geq 0$ e assim o conjunto \mathcal{C}_w é totalmente convexo.

Corolário 13. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow B_R \subset W^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície mínima compacta de fronteira livre em uma bola geodésica de W^{n+1} . Suponha que*

$$\frac{1}{(\lambda')^2} |A|^2 g^w(X, N)^2 \leq \frac{n}{n-1} \quad (4.11)$$

sobre Σ^n , em que N denota o campo normal unitário. Então, uma das duas situações deve ocorrer.

1. Σ^n é difeomorfa a um disco \mathbb{D}^n .
2. ou Σ^n é difeomorfa a uma variedade produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{n-1}$ e o conjunto \mathcal{C}_w é um grande círculo $\gamma \subset \mathbb{S}_{s_0}^n$ ($s_0 \leq R$) sobre o qual ocorre a igualdade em (2.52). E além disso, $|A|^2$ é constante sobre \mathcal{C}_w possuindo apenas duas curvaturas principais distintas: $-\frac{\lambda'(s_0)}{\lambda(s_0)}$ e $\frac{\lambda'(s_0)}{(n-1)\lambda(s_0)}$.

A demonstração do corolário acima se faz de maneira inteiramente à demonstração do **Corolário 8**

Classificação via condição de Gap na segunda forma fundamental

Lema 4.8. *Considere um warped product $W^{n+1} = [0, b) \times \mathbb{S}^n$ com uma métrica $g^w = ds^2 + \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n}$. Suponha que a função warping λ cumpra a seguinte condição*

i) $\lambda''(s)\lambda(s) + 1 \leq \lambda'(s)^2$

então, a curvatura de Ricci em W^{n+1} na direção de um vetor normal N qualquer cumpre

$$\text{Ric}_w(N, N) \leq -n \frac{\lambda''(s)}{\lambda(s)} \quad (4.12)$$

e se além disso,

ii) $\lambda''(s) \geq 0$, então a curvatura seccional de W^{n+1} é não positiva.

Demonstração. Considere a função ϕ dada pelo **Lema 4.3** de forma que $(W_1^{n+1}, \phi^2 g^{w_1})$, com $(g^{w_1} = dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n})$ e $W_1^{n+1} = [0, r(b)) \times \mathbb{S}^n$, seja isométrico a (W^{n+1}, g^w) . Então, temos

$$(\star) \begin{cases} \phi(r) &= s'(r) \\ \lambda(s) &= \phi(r)r \end{cases},$$

em que $s = s(r)$ é dado implicitamente pela equação (4.1). As equações acima fornecem

$$\lambda'(s) = \frac{\phi'(r)}{\phi(r)} r + 1$$

e

$$\lambda''(s) = \frac{1}{\phi(r)^2} \left(\phi''(r)r + \phi'(r) - \frac{\phi'(r)^2}{\phi(r)} r \right),$$

façamos $\phi(r) = e^{u(r^2)}$ e assim, as equações acima podem ser reescritas respectivamente como

$$\lambda'(s) = 1 + 2u'(r^2)r^2 \quad (4.13)$$

e

$$\lambda''(s)\lambda(s) = 4(u''(r^2)r^2 + u'(r^2))r^2. \quad (4.14)$$

Dessa forma obtemos

$$4(u''(r^2) - u'(r^2)^2)r^4 = \lambda''(s)\lambda(s) + 1 - \lambda'(s)^2,$$

e pela hipótese *i*) devemos ter,

$$a) \quad u''(r^2) - u'(r^2)^2 \leq 0.$$

Como $(W_1^{n+1}, \phi^2 g^{w_1})$ é isométrico a $(\mathbb{B}_{r_0}^{n+1}, \bar{g})$ em que $\bar{g} = \phi(|x|)^2 \langle \cdot, \cdot \rangle = e^{2u(|x|^2)} \langle \cdot, \cdot \rangle$, a condição

a) acima garante pelo **Lema 3.3** que

$$Ric_{\mathbb{B}}(\eta, \eta) \leq -4ne^{-2u(r^2)}[u''(r^2)r^2 + u'(r^2)],$$

em que $r = |x|$. Mas, por (4.14) devemos ter

$$4ne^{-2u(r^2)}[u''(r^2)r^2 + u'(r^2)] = n \frac{\lambda''(s)\lambda(s)}{(e^{u(r^2)}r)^2} = n \frac{\lambda''(s)\lambda(s)}{\lambda(s)^2} = n \frac{\lambda''(s)}{\lambda(s)},$$

e pela isometria entre $(W_1^{n+1}, \phi^2 g^{w_1})$ e (W^{n+1}, g^w) temos

$$Ric_W(N, N) \leq -n \frac{\lambda''(s)}{\lambda(s)}.$$

Além disso, a condição *ii*) garante que,

$$b) \quad -u''(r^2)r^2 - u'(r^2) \leq 0,$$

assim, as condições *a*) e *b*) garantem pelo **Lema 3.4**, que W_1^{n+1} tem curvatura seccional não positiva e portanto, o mesmo resultado segue para (W^{n+1}, g^w) . \blacksquare

De agora em diante consideraremos um warped product (W^{n+1}, g^w) , em que a função warping λ satisfaz também as condições *i*) e *ii*) do Lema anterior.

Seja $B_{s_0} = [0, s_0] \times \mathbb{S}^n \subset W^{n+1}$ bola geodésica. Observe que a distância do ponto $p = (s, \theta) \in B_{s_0}$ ao ponto $\mathcal{O} := \{0\} \times \mathbb{S}^n$ como respeito à métrica warped é $d(\mathcal{O}, p) = s$. Assim, para o contexto de warped products o **Lema 3.7** é enunciado como segue.

Lema 4.9. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow B_{s_0} \subset W^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície mínima compacta com bordo $\partial\Sigma$. Considere sobre Σ^n o operador $L := \Delta + |A|^2 + q$, em que $q : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não positiva. Suponha que a desigualdade*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4s_0^2} \quad (4.15)$$

seja satisfeita sobre Σ . Então, o primeiro autovalor λ_1 do operador L para o problema:

$$\begin{cases} L[v] = -\lambda v & \Sigma \\ v = 0 & \partial\Sigma \end{cases}$$

é estritamente positivo e conseqüentemente, uma solução $L[v] = 0$ do problema (*) acima tem que ser nula.

A demonstração do lema anterior se faz de forma inteiramente análoga ao **Lema 3.7** mudando o quer for necessário.

Lema 4.10. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow B_{s_0}$ uma imersão de uma hipersuperfície mínima de fronteira livre. Considere a função $v = g^w(X, N)$ definida sobre Σ , em que N denota o campo vetorial normal à Σ^n . Então a função v é solução do seguinte problema,*

$$\begin{cases} L[v] = 0 & \Sigma \\ v = 0 & \partial\Sigma \end{cases},$$

em que L é operador definido por $L[v] = \Delta v + |A|^2 v + qv$ para

$$q := Ric_W(N, N) + n \frac{\lambda''(s)}{\lambda(s)}.$$

A demonstração do lema anterior se faz de maneira inteiramente análoga à demonstração do **Lema 3.9** à qual pode ser encontrada em [9] (Proposição 2.1) e usa essencialmente a propriedade do campo X ser conforme cuja função potencial é $\lambda'(s)$.

Dado uma hipersuperfície fechada $\Gamma^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ o cone $C_\Gamma^w \hookrightarrow W^{n+1}$ tomado sobre Γ é definido por $C_\Gamma^w = [0, b) \times \Gamma^{n-1}$. Assim, C_Γ^w pode ser parametrizado localmente por (s, θ) , em que $\theta = \theta(u_1, \dots, u_{n-1})$ é um sistema de coordenadas locais em Γ^{n-1} . Observe que se N é o campo normal a C_Γ^w então a função suporte $v : C_\Gamma^w \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $v = g^w(X, N)$ é identicamente nula. Reciprocamente, se uma hipersuperfície $\Sigma^n \hookrightarrow B_R \subset W^{n+1}$ de fronteira livre tem a função suporte identicamente nula então, Σ^n é um cone $C_{\partial\Sigma}^w$ tomado sobre o bordo de Σ . Considere o slice $\Gamma_s := \Sigma \cap \{s\} \times \mathbb{S}^n$ ($0 \leq s \leq s_0$) e denotemos por A_s a segunda forma fundamental de Γ_s como hipersuperfície de $(\mathbb{S}^n, \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n})$. De maneira semelhante ao que mostramos no **Lema 3.13** podemos verificar que C_Γ^w é uma hipersuperfície mínima de fronteira livre em $B_R \subset W^{n+1}$ se e somente se Γ_s é uma hipersuperfície mínima em $(\mathbb{S}^n, \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n})$ para cada $s \leq R$. E semelhante ao **Lema 3.15** podemos mostrar também que

$$|A|^2(s, \theta) = |A_s|^2(\theta). \quad (4.16)$$

Um análogo do **Teorema 3.10** para o espaço Warped aqui trabalhado é dado a seguir.

Teorema 4.11. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow B_{s_0} \subset W^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima de fronteira livre, que cumpre*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4s_0^2}. \quad (4.17)$$

Então, Σ é um disco totalmente geodésico que passa pelo ponto $\mathcal{O} = \{0\} \times \mathbb{S}^n$.

Demonstração. Procedemos de forma análoga ao **Teorema 3.10** para demonstrar que sob a condição (4.17), a função $v = g^w(X, N)$ é identicamente nula sobre Σ^n , em que N denota o campo normal. Agora, vamos mostrar que $v \equiv 0$ garante que Σ^n é um disco totalmente geodésico. Primeiro observe que $\mathcal{O} \in \Sigma^n$, de fato, pois caso contrário existiria um ponto $p_0 \in \Sigma$ tal que X_{p_0} seria paralelo a N e consequentemente $g^w(X, N)(p_0) \neq 0$, absurdo.

Como $g^w(X, N) = 0$, cada slice $\Gamma_s := \Sigma \cap \{s\} \times \mathbb{S}^n$ ($0 \leq s \leq s_0$) é uma hipersuperfície mínima em $(\mathbb{S}^n, \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n})$, além disso,

$$|A|^2(s, \theta) = |A_s|^2(\theta). \quad (4.18)$$

Se $|A|^2 \neq 0$ em algum ponto $(\tilde{s}, \tilde{\theta})$, então $|A_{\tilde{s}}|^2(\tilde{\theta}) \neq 0$. Como $\lambda(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$ temos que $|A_s|^2(\theta)$ fica arbitrariamente grande quando $s \rightarrow 0$ e por (4.18), o mesmo vale para $|A|^2$. Portanto, a condição (4.17) garante que $|A|^2 \equiv 0$ e o slice Γ_s para cada s é necessariamente um equador \mathbb{S}^{n-1} em \mathbb{S}^n . ■

Teorema 4.12. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow B_{s_0} \subset W^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima de fronteira livre que cumpre*

$$|A|^2 \leq \frac{(n-2)^2}{4s^2} \quad (4.19)$$

em todo ponto $p \in \Sigma \setminus \mathcal{O}$, em que $s = s(p)$ é tal que $0 \leq s \leq s_0$. Então, Σ é um disco totalmente geodésico passando pelo ponto \mathcal{O} .

A demonstração do teorema acima se faz de maneira análoga à demonstração do **Teorema 4.11** da mesma maneira como obtemos o **Teorema 3.11**.

Classificação via condição de Gap na segunda forma fundamental em um domínio anelar de um warped product

Consideremos agora um warped product $W^{n+1} = [0, b) \times \mathbb{S}^n$ ($b \leq \infty$), onde a função warping satisfaz as condições do **Lema 4.8**. Defina um domínio anelar $\mathcal{A}^w \subset W^{n+1}$ por,

$$\mathcal{A}^w(s_1, s_2) = B_{s_2} \setminus B_{s_1}.$$

Semelhante como fizemos no capítulo anterior, pretendemos classificar uma hipersuperfície $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}^w(s_1, s_2)$ mínima de fronteira livre via condição de gap na segunda forma fundamental de Σ^n .

Teorema 4.13. *Seja $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}^w(s_1, s_2)$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície mínima de fronteira livre em um domínio anelar de warped product. Suponha que*

$$|A|^2 \leq \frac{n^2}{4s_2^2}. \quad (4.20)$$

Então,

- 1) *Se $n = 2$, então $\Sigma^2 \hookrightarrow \mathcal{A}^w(s_1, s_2)$ é um anel totalmente geodésico.*
- 2) *Se $n \geq 3$ e $\lambda(s_1)^2 < \frac{4(n-1)}{n^2} s_2^2$, então $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}^w(s_1, s_2)$ é um anel totalmente geodésico.*
- 3) *Se $n \geq 3$ e $\lambda(s_1)^2 = \frac{4(n-1)}{n^2} s_2^2$, então $\Sigma^n \hookrightarrow \mathcal{A}^w(s_1, s_2)$ é um anel totalmente geodésico ou $\Sigma^n = [s_1, s_2] \times \Gamma^{n-1}$, em que Γ é um toro de Clifford $\mathbb{T}_{m,n}$.*

Demonstração. Com raciocínio análogo ao que foi usado no **Teorema 4.11**, podemos mostrar que $g^w(X, N) \equiv 0$, e conseqüentemente, Σ^n intersecta as duas componentes conexas de $\partial\mathcal{A}^w$. Como vimos anteriormente, $\Sigma^n = [s_1, s_2] \times \Gamma^{n-1}$ para alguma hipersuperfície $\Gamma \subset \mathbb{S}^n$. Se A_Γ denota a segunda forma fundamental de $\Gamma^{n-1} \hookrightarrow (\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$, então

$$|A_s|^2(\theta) = \frac{1}{\lambda^2(s)} |A_\Gamma|^2(\theta),$$

em que A_s denota a segunda forma fundamental de $\Gamma_s = \Sigma \cap \{s\} \times \mathbb{S}^n$ ($s_1 \leq s \leq s_2$) como subvariedade de $(\mathbb{S}^n, \lambda(s)^2 g_{\mathbb{S}^n})$. A equação (4.16) fornece

$$|A|^2(s, \theta) = |A_s|^2(\theta).$$

Assim,

$$|A_\Gamma|^2(\theta) = |A|^2(s, \theta) \lambda^2(s),$$

e pela condição (4.20), devemos ter

$$|A_\Gamma|^2(\theta) \leq \frac{n^2}{4s_2^2} \lambda^2(s)$$

para todo $s \in [s_1, s_2]$, e em particular,

$$|A_\Gamma|^2(\theta) \leq \frac{n^2}{4s_2^2} \lambda^2(s_1). \quad (4.21)$$

Se $n = 2$, então como $\partial\Sigma^2$ é uma hipersuperfície mínima em \mathbb{S}^2 a única possibilidade é $\Sigma^2 = [s_1, s_2] \times \mathbb{S}^1$ e portanto $\Sigma^2 \hookrightarrow \mathcal{A}^w(s_1, s_2)$ é um anel totalmente geodésico e o item 1) está provado. Agora se $n \geq 3$ e $\lambda(s_1)^2 < \frac{4(n-1)}{n^2} s_2^2$, então a equação (4.21) fornece

$$|A_\Gamma|^2 < n - 1.$$

Pelo **Teorema 3.18** devemos ter $|A_\Gamma|^2 = 0$ e assim $\Sigma^n = [s_1, s_2] \times \mathbb{S}^{n-1}$. Conseqüentemente, Σ^n é totalmente geodésica pela equação (4.16) e o item 2) está provado. De maneira semelhante, prova-se o item 3). ■

Referências Bibliográficas

- [1] H. Alencar, M. do Carmo, *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 120, no. 4, (1994), 1223-1229.
- [2] L. Ambrozio, *Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds*, Journal of Geometric Analysis, vol. 25, Issue 2, (2015), 1001-1017.
- [3] L. Ambrozio, I. Nunes, *A gap theorem for free boundary minimal surfaces in the unit ball*, to appear in Communications in Analysis and Geometry.
- [4] S. Angenent, *Shrinking Doughnuts*, Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states, 3 (Gregynog, 1989), vol. 7 of Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhäuser, Boston, MA, (1992), 21-38.
- [5] J. L. Barbosa, M. do Carmo, J. Eschenburg, - *Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds*, Mathematische Zeitschrift, vol. 197, (1988), 123-138.
- [6] E. Barbosa, M. P. Cavalcante, C. Viana, *Topological gap results for free boundary minimal hypersurfaces in the euclidean ball*, Preprint, (2017).
- [7] M. Batista, H. Mirandola, F. Vitória, *Hardy and Rellich inequalities for submanifolds in Hadamard spaces*, J. Differential Equations, vol. 263, Issue 9, (2017), 5813-5829.
- [8] S. Brendle, *Constant Mean Curvature Surfaces in Warped Product Manifolds*, Publications mathématiques de l'IHÉS, vol. 117, Issue 1, (2012), 247-269.
- [9] A. Caminha, H. Lima, *Complete Vertical Graphs with Constant Mean Curvature in Semi-Riemannian Warped Products*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Simon Stevin, vol. 16, no. 1, (2009), 91-105.
- [10] G. Carron, *Inégalités de Hardy sur les variétés riemanniennes non-compactes*, J.Math. Pures Appl., vol. 76, Issue 10, (1997), 883 - 891.

- [11] B. Y. Chen, *Differential geometry of warped product manifolds and submanifolds*, New Jersey, World Scientific, (2017).
- [12] B. Y. Chen, *Geometry of Submanifolds*, Pure and Applied Mathematics - A Series of Monographs and Textbooks, (1973).
- [13] S. Y. Cheng, *Eigenfunctions and Nodal Sets*, Comment. Math. Helvetici, vol. 51, Issue 1, (1976), 43-55.
- [14] S.S. Chern, M. do Carmo, S. Kobayashi, *Minimal submanifolds of sphere with second fundamental form of constant length*, Functional Analysis and Related Fields, (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Chicago, Ill., 1968), Springer-Verlag, Berlin and New York, (1970), 59-75.
- [15] B. Chow, D. Knopf, *The Ricci Flow: An introduction*, American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 110, (2004).
- [16] M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (2008).
- [17] S. Fornari, J. Ripoll, *Killing fields, mean curvature, translation maps*, Illinois J. Math., vol. 48, no. 4, (2004), 1385-1403.
- [18] A. Fraser, R. Schoen, *Minimal surfaces and eigenvalue problems*, Contemp. Math., vol. 599, (2013), 105-121.
- [19] A. Fraser, R. Schoen, *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball*, Invent. Math., vol. 203, (2016), 823-890.
- [20] A. Fraser, R. Schoen, *Steklov eigenvalue, conformal geometry and minimal surfaces*, Adv. Math., vol. 226, Issue 5, (2011), 4011-4030.
- [21] R. E. Greene, H. Wu, *Function theory on manifolds which possess a pole*, Springer-Verlang, Berlin Heidelberg, New York, (1979).
- [22] K. Kenmotsu, *Surfaces of revolution with prescribed mean curvature*, Tôhoku Math. J., vol. 32, Issue 1, (1980), 147-153.
- [23] H. Li, C. Xiong, *A Gap Theorem for Free Boundary Minimal Surfaces in Geodesic Balls of Hyperbolic Space and Hemisphere*, The Journal of Geometric Analysis., (2017).

- [24] K. J. Lejdfors, *Surfaces of constant mean curvature*, Master thesis, Lund University, (2003).
- [25] R. Lopez, *Constant mean curvature surfaces with boundary*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Heidelberg, (2013).
- [26] D. Máximo, I. Nunes, G. Smith, *Free boundary minimal annuli in convex three-manifolds*, Journal of Differential Geometry, vol. 106, no. 1, (2017), 139-186.
- [27] N. M. Moller, *Closed Self-Shrinking Surfaces in \mathbb{R}^3 Via the Torus*, arXiv.org. (2011).
- [28] J. C. C. Nitsche, *Stationary partitioning of convex bodies*, Arch. Rational Mech. Anal., vol. 89, Issue 1, (1985), 1-19.
- [29] A. Ros, R. Souam, *On stability of capillary surfaces in a ball*, Pacific J. Math., vol. 178, no. 2, (1997), 345-361.
- [30] M. Struwe, *The existence of surfaces of constant mean curvature with free boundaries*, Acta Math., vol. 160, (1988), 19-64.