

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Weversson Dalmaso Sellin

Enumeração de hipersuperfícies com
subesquemas singulares

Belo Horizonte - MG
2018

Weversson Dalmaso Sellin

Enumeração de hipersuperfícies com subesquemas singulares

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Algébrica

Orientador: Israel Vainsencher

**Belo Horizonte - MG
2018**

Dedicatória



Eu vejo a barra do dia surgindo

Pedindo pra gente cantar

Eu tenho tanta alegria, adiada

Abafada, quem dera gritar

...

Chico Buarque

Agradecimentos

Já dizia o escritor Machado de Assis: "A gratidão de quem recebe um benefício é sempre menor que o prazer daquele de quem o faz".

No intuito de maximizar o prazer àqueles que algum benefício me proporcionou durante a minha trajetória é que venho agradecer-los.

Aos meus pais, pela vida e pelo amor incondicional que nos momentos de sucesso pode até parecer irrelevante, mas que nas ocasiões de fracasso se torna um consolo e uma segurança que não se encontram em qualquer outro lugar.

A minha esposa Lucineide e meu filho Gabriel, pelo apoio, paciência e por serem meu porto seguro nessa jornada.

Aos amigos que ganhei no decorrer da vida e que tanto me enriqueceu ao revelarem cada vez mais de mim. Não vou nomeá-los para evitar o risco de pecar por omissão.

Aos mestres professores que tive durante a trajetória acadêmica e que tanto contribuíram para minha formação, não só como pesquisador na área de Matemática, mas acima de tudo, como um ser humano melhor. Em especial, ao meu orientador Israel Vainsencher, pois sem sua ajuda essa tese não se tornaria realidade.

Aos colegas do DCEX/UFVJM pela confiança e apoio.

Por fim, à Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, pelo apoio aos meus estudos.

Resumo

Nesta tese estuda-se o lugar das hipersuperfícies com singularidades não isoladas. Especificamente, fixada uma subvariedade irredutível fechada de um esquema de Hilbert, $\mathbb{W} \subset \text{Hilb}_{p_{\mathbb{W}}(t)}(\mathbb{P}^n)$, considera-se a subvariedade $\Sigma(\mathbb{W}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d} = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)))$, formada pelas hipersuperfícies de grau d em \mathbb{P}^n , que são singulares em algum elemento (variável) $W \in \mathbb{W}$. Sob a condição de que um membro geral $W \in \mathbb{W}$ é suave, irredutível e de dimensão positiva, mostra-se que o grau de $\Sigma(\mathbb{W}, d)$ se expressa por um polinômio $p^{\mathbb{W}}(d)$ para $d \gg 0$. O polinômio $p^{\mathbb{W}}(d)$ é calculado explicitamente para certas famílias \mathbb{W} , distinguidas pela existência de literatura com descrição adequada. Notadamente, estudam-se os casos

- $\mathbb{W}_{(k+1, n+1)} := \{ \mathbb{P}^k - \text{linear em } \mathbb{P}^n \}$,
- $\mathbb{W}_m := \{ \text{curvas planas de grau } m \text{ em } \mathbb{P}^3 \}$,
- $\mathbb{W}_{twc} := \{ \text{curvas cúbicas reversas em } \mathbb{P}^3 \}$,
- $\mathbb{W}_{rc} := \{ \text{superfícies cúbicas regradas em } \mathbb{P}^4 \}$,
- $\mathbb{W}_{sg} := \{ 3\text{-variedades de Segre em } \mathbb{P}^5 \}$ e
- $\mathbb{W}_{eqc} := \{ \text{curvas quárticas elípticas em } \mathbb{P}^3 \}$.

O método consiste em descrever uma dessingularização $\mathbb{W}' \rightarrow \mathbb{W}$ que parametriza uma família plana de subesquemas de \mathbb{P}^n cujo membro geral é definido por um ideal da forma I_W^2 , quadrado do ideal de um membro geral $W \in \mathbb{W}$. A variedade \mathbb{W}' é munida de um subfibrado \mathcal{E}_d do fibrado trivial $\mathbb{W}' \times H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ para $d \gg 0$, cuja fibra sobre um membro geral $W' \in \mathbb{W}'$ é formada pelas $F \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ com gradiente nulo ao longo de W . Além disso, o mapa induzido na projetivização $\mathbb{P}(\mathcal{E}_d) \rightarrow \mathbb{P}^{N_d}$ tem imagem a variedade $\Sigma(\mathbb{W}, d)$ e é genericamente injetivo para $d \gg 0$. Polinomialidade do grau de $\Sigma(\mathbb{W}, d)$ é provada usando Grothendieck-Riemann-Roch. Nos casos acima destacados, usa-se a fórmula de resíduos de Bott para o cálculo explícito do grau de $\Sigma(\mathbb{W}, d)$.

Palavras-chave: Geometria enumerativa, fórmula de resíduos de Bott, singularidades.

Abstract

This thesis investigates the locus of hypersurfaces with nonisolated singularities. More precisely, given a closed, irreducible subvariety of a Hilbert scheme, $\mathbb{W} \subset \text{Hilb}_{p_{\mathbb{W}}(t)}(\mathbb{P}^n)$, we define a subvariety $\Sigma(\mathbb{W}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d} = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)))$, formed by the hypersurfaces of degree d in \mathbb{P}^n which are singular along some (variable) member $W \in \mathbb{W}$. Assuming that a general member $W \in \mathbb{W}$ is smooth, irreducible and positive dimensional, we show that the degree of $\Sigma(\mathbb{W}, d)$ is expressed by a polynomial $p^{\mathbb{W}}(d)$ for all $d \gg 0$. The polynomial $p^{\mathbb{W}}(d)$ is made explicit for a few families \mathbb{W} , distinguished by the existence of an adequate description in the literature. Notably, we study the cases

- $\mathbb{W}_{(k+1, n+1)} := \{ \mathbb{P}^k - \text{linear in } \mathbb{P}^n \}$,
- $\mathbb{W}_m := \{ \text{plane curves of degree } m \text{ in } \mathbb{P}^3 \}$,
- $\mathbb{W}_{twc} := \{ \text{twisted cubic curves in } \mathbb{P}^3 \}$,
- $\mathbb{W}_{rc} := \{ \text{ruled cubic surfaces in } \mathbb{P}^4 \}$,
- $\mathbb{W}_{sg} := \{ \text{Segre cubic 3-folds in } \mathbb{P}^5 \}$ and
- $\mathbb{W}_{eqc} := \{ \text{elliptic quartic curves in } \mathbb{P}^3 \}$.

The method consists in describing a desingularization $\mathbb{W}' \rightarrow \mathbb{W}$ such that \mathbb{W}' parameterizes a flat family of subschemes of \mathbb{P}^n the general member of which is defined by an ideal of the form I_W^2 , square of the ideal of a general member $W \in \mathbb{W}$. The variety \mathbb{W}' comes equipped, for $d \gg 0$, with a vector subbundle \mathcal{E}_d of the trivial bundle $\mathbb{W}' \times H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, with fiber over a general member $W' \in \mathbb{W}'$ formed by the $F \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ such that the gradient vanishes along W . Moreover, the map $\mathbb{P}(\mathcal{E}_d) \rightarrow \mathbb{P}^{N_d}$ induced in the projectivization has image the variety $\Sigma(\mathbb{W}, d)$ and is generically injective for $d \gg 0$. Polynomiality follows using Grothendieck-Riemann-Roch. In the cases above displayed Bott's localization at fixed points is employed to derive explicit formula for the degree of $\Sigma(\mathbb{W}, d)$.

Keywords: Enumerative Geometry, Bott's residues formula, singularities.

Notações etc

K := corpo algebricamente fechado, em geral de característica zero.

$K[x_0, \dots, x_n]$:= anel de polinômios nas variáveis x_0, \dots, x_n .

$\mathcal{F}_d = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d))$:= fibrado vetorial trivial com fibra o espaço de polinômios homogêneos de grau d nas variáveis x_0, \dots, x_n .

$S_i(_)$:= i -ésima potência simétrica.

$\wedge^i _$:= i -ésima potência exterior.

$Hilb_{p_W(t)}(\mathbb{P}^n)$:= o esquema de Hilbert de subesquemas de \mathbb{P}^n com polinômio de Hilbert fixado $p_W(t)$

$\mathbb{P}^{N_d} = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)))$:= o espaço de parâmetros de hipersuperfícies de grau d em \mathbb{P}^n

$\mathcal{N}_{Y/X}$:= fibrado normal

$\mathcal{T}\mathbb{X}$:= fibrado tangente

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	15
1.1 Potência Simbólica \times Potência Ordinária	16
1.2 Existem um fibrado vetorial e uma fórmula polinomial	17
1.3 Fórmula de resíduos de Bott	22
2 Hipersuperfícies singulares ao longo de um \mathbb{P}^k-linear	25
2.1 Impondo uma reta singular	25
2.1.1 Impondo uma reta singular via Bott	26
2.2 Impondo um \mathbb{P}^k -linear como lugar singular de hipersuperfícies	29
3 Superfícies singulares ao longo de curvas planas	31
3.1 Impondo uma curva plana singular via Bott	33
4 Hipersuperfícies singulares ao longo de redes de quádricas do tipo de-terminantal	37
4.1 Superfícies singulares ao longo de cúbicas reversa	37
4.1.1 O espaço de parâmetros	38
4.1.2 Aplicando Bott	39
4.2 Hipersuperfícies singulares ao longo de uma superfície cúbica regradada em \mathbb{P}^4	50
4.2.1 O espaço de parâmetros	51
4.2.2 Aplicando Bott	51
4.3 Hipersuperfícies singulares ao longo de uma 3-variedade de Segre em \mathbb{P}^5 . .	58

4.3.1	O espaço de parâmetros	58
4.3.2	Aplicando Bott	58
5	Superfícies singulares ao longo de quárticas elípticas	63
5.1	O espaço de parâmetros	65
5.2	Aplicando Bott	66
A	Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d)$ via Schubert2	78
B	Código: Cálculo do $\deg \Sigma(W_m, d)$ via Schubert2	79
C	Funções e procedimentos gerais do Macaulay2 e Maple	81
D	Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(k+1, n+1)}, d)$	89
E	Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_m, d)$	92
F	Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{twc}, d)$	94
G	Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{rc}, d)$	103
H	Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{sg}, d)$	117
I	Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{eqc}, d)$	124
	Referências Bibliográficas	134

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar o lugar das hipersuperfícies que apresentam certas singularidades não isoladas.

Especificamente, seja $Hilb_{p_{\mathbb{W}}(t)}(\mathbb{P}^n)$ o esquema de Hilbert de subesquemas de \mathbb{P}^n com polinômio de Hilbert fixado $p_{\mathbb{W}}(t)$ e seja \mathbb{W} uma subvariedade irreduzível fechada do $Hilb_{p_{\mathbb{W}}(t)}(\mathbb{P}^n)$ cujo membro geral estamos admitindo ser suave. Denotamos por $\Sigma(\mathbb{W}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d} = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)))$, o lugar das hipersuperfícies de grau d em \mathbb{P}^n que são singulares em algum elemento (variável) $W \in \mathbb{W}$. O propósito aqui é determinar o grau de $\Sigma(\mathbb{W}, d)$ para certas famílias \mathbb{W} , distinguidas pela existência de literatura com descrição adequada. Notadamente, estudam-se os casos

- $\mathbb{W}_{(k+1, n+1)} := \{ \mathbb{P}^k - \text{linear em } \mathbb{P}^n \}$,
- $\mathbb{W}_m := \{ \text{curvas planas de grau } m \text{ em } \mathbb{P}^3 \}$,
- $\mathbb{W}_{twc} := \{ \text{curvas cúbicas reversas em } \mathbb{P}^3 \}$,
- $\mathbb{W}_{rc} := \{ \text{superfícies cúbicas regradas em } \mathbb{P}^4 \}$,
- $\mathbb{W}_{sg} := \{ \text{3-variedades de Segre em } \mathbb{P}^5 \}$ e
- $\mathbb{W}_{eqc} := \{ \text{curvas quárticas elípticas em } \mathbb{P}^3 \}$.

Em cada caso, descreve-se uma dessingularização $\mathbb{W}' \rightarrow \mathbb{W}$ que parametriza uma família plana de subesquemas de \mathbb{P}^n cujo membro geral é definido por um ideal da forma $I_{W'}^2$, quadrado do ideal de um membro geral $W \in \mathbb{W}$. A variedade \mathbb{W}' é munida de um subfibrado \mathcal{E}_d do fibrado trivial $\mathbb{W}' \times H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ para $d \gg 0$, cuja fibra sobre um membro geral $W' \in \mathbb{W}'$ é formada pelas $F \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ com gradiente nulo ao longo de W . Além disso, o mapa induzido na projetivização $\mathbb{P}(\mathcal{E}_d) \rightarrow \mathbb{P}^{N_d}$ tem imagem a variedade $\Sigma(\mathbb{W}, d)$ e é genericamente injetivo para $d \gg 0$ (vide Proposição 1.5 e Teorema 1.7). E então, seguimos a estratégia de usar a fórmula de resíduos de Bott (vide Teorema 1.10), como explicado em Ellingsrud & Strømme [12], para o cálculo do grau de $\Sigma(\mathbb{W}, d)$.

A utilização da fórmula de resíduos de Bott é justificada pelo fato que nos problemas tratados neste trabalho, em geral, precisamos efetuar a explosão de alguma variedade X ao longo de uma subvariedade Y (não singular) e considerar o divisor excepcional, o qual é a projetivização do fibrado normal, $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y/X})$. No entanto, na maioria dos problemas considerados, conhecemos os sucessivos fibrados normais somente fibra a fibra e isso não

é suficiente para fazermos cálculos enumerativos usando a teoria de interseção clássica. Nessa conjuntura é que a fórmula de resíduos de Bott torna-se uma ferramenta indispensável, pois requer apenas certos dados das fibras do fibrado normal $\mathcal{N}_{Y/X}$ sobre os pontos fixos por uma ação de um toro (vide seção 1.3 para maiores detalhes). Observação análoga se aplica aos fibrados \mathcal{E}_d acima mencionados.

É conhecido que o grau de $\Sigma(\mathbb{W}, d)$, para $d \gg 0$, é um polinômio em d cujo grau $\deg_{\mathbb{W}}$ é menor do que ou igual a $n \times \dim \mathbb{W}$ (vide Proposição 1.9). No entanto, em todos os casos efetivamente tratados, encontramos $\deg_{\mathbb{W}} = (k + 1) \times \dim(\mathbb{W})$, onde $k = \dim(W)$ para $W \in \mathbb{W}$. A validade para \mathbb{W} qualquer resta conjectural. No caso de singularidades isoladas Vainsencher [33] obtém fórmulas polinomiais explícitas para o número de hipersuperfícies em uma família k -dimensional adequada apresentando $k \leq 6$ pontos duplos ordinários, cujo grau obedece a fórmula acima. Ainda no caso de singularidades isoladas para curvas δ -nodal, isto é, curvas que apresentam δ nós e nenhuma outra singularidade, temos o resultado conhecido como conjectura de Göttsche, a qual possui várias provas (cf. [21], [22], [23] e [30]). A conjectura de Göttsche afirma que para um fibrado em retas L suficientemente amplo sobre uma superfície S , o número de curvas δ -nodal em um sistema linear geral δ -dimensional é dado por um polinômio universal de grau δ em 4 variáveis, independentes de S e L , $N_{\delta}(c_1(L)^2, c_1(L) \cdot c_1(S), c_1(S)^2, c_2(S))$. Em Rennemo [29], encontra-se uma generalização da conjectura de Göttsche, onde é permitido outros tipos de singularidades isoladas, além de nós, para o caso de curvas (cf. [29], Prop. 7.2, pág. 4). O mesmo método utilizado para o caso de curvas com singularidades isoladas aplica-se para hipersuperfícies em dimensão arbitrária (cf. [29], Prop. 7.8, pág. 4). Cabe ressaltar que o método utilizado na demonstração dos resultados em [29] não é construtivo e não apresenta um caminho aparente de transformar a prova em um algoritmo para obtenção de informação sobre o polinômio em questão.

No que segue faremos uma breve descrição dos conteúdos dos respectivos capítulos e apêndices que formam o corpo desta tese. No Capítulo 1 estabelecemos os resultados gerais que são necessários ao desenvolvimento e entendimento dos demais capítulos. Especificamente, na seção 1.1 tratamos da relação entre potência simbólica e potência ordinária de um ideal e como essa relação se reflete na condição de uma hipersuperfície ser singular em algum subesquema de \mathbb{P}^n . Verifica-se que uma hipersuperfície F de \mathbb{P}^n é singular ao longo de $W \in \mathbb{W}$ (pelo menos nos casos considerados aqui) se, e somente se, ela contém a primeira vizinhança infinitesimal de W em \mathbb{P}^n , isto é, o subesquema fechado de \mathbb{P}^n tendo $(\mathcal{I}_W)^2$ como o feixe ideal. Na seção 1.2 é estabelecida a existência do subfibrado \mathcal{E}_d do fibrado trivial $\mathbb{W}' \times H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$, cuja projetivização $\mathbb{P}(\mathcal{E}_d)$ produz um mapa genericamente injetivo (ao menos para $d \gg 0$)

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_d) \rightarrow \mathbb{P}^{N_d}$$

com imagem o conjunto $\Sigma(\mathbb{W}, d)$ (vide Proposição 1.5 e Teorema 1.7). Aqui $\mathbb{W}' \rightarrow \mathbb{W}$ denota uma dessingularização, composta de explosões com centros lisos e tal que \mathbb{W}' parametriza uma família plana de subesquemas com membro geral dado pelo quadrado do ideal de um membro geral de \mathbb{W} . E nessa seção também é enunciado o resultado que garante o comportamento polinomial do grau de $\Sigma(\mathbb{W}, d)$ em função de d (vide Proposição 1.9). Na seção 1.3 apresentamos a principal ferramenta para o cálculo do grau de $\Sigma(\mathbb{W}, d)$, a saber a fórmula de resíduos de Bott (vide Teorema 1.10).

No Capítulo 2 tratamos do caso de hipersuperfícies em \mathbb{P}^n singulares ao longo de um \mathbb{P}^k -linear, $k < n - 1$. Aqui, o espaço de parâmetros consiste na grassmanniana $\mathbb{G}(k+1, n+1)$. E determinamos o grau da família de hipersuperfícies de grau d singulares em algum membro de $\mathbb{G}(k+1, n+1)$, o qual vamos denotar por $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(k+1, n+1)}, d)$, para os seguintes valores de $(k+1, n+1)$ explicitados nas fórmulas 2.4, 2.7, 2.8 e 2.9.

No Capítulo 3 consideramos o caso de curvas planas em \mathbb{P}^3 , onde obtemos resultados explícitos para o grau da família de superfícies de grau d singulares ao longo de alguma curva plana (variável) e com grau m fixado, denotada por $\Sigma(\mathbb{W}_m, d)$. Explicitamente, obtemos fórmulas polinomiais que expressam o grau de $\Sigma(\mathbb{W}_m, d)$ em função de d para os casos $m = 2, 3$ (vide as fórmulas 3.3 e 3.13). Indicamos o Apêndice E para o leitor interessado em obter o $\deg \Sigma(\mathbb{W}_m, d)$ para outros valores de m .

No Capítulo 4 tratamos dos casos de hipersuperfícies em \mathbb{P}^n ($n = 3, 4, 5$) singulares ao longo do lugar de base de uma rede de quádricas (variável) do tipo determinantal, isto é, gerada pelos menores 2×2 de uma matriz 3×2 de formas lineares. Especificamente, na seção 4.1 é considerada a família \mathbb{W}_{twc} de cúbicas reversa em \mathbb{P}^3 . Uma cúbica reversa é uma curva racional, suave de grau 3 em \mathbb{P}^3 ; seu polinômio de Hilbert é $3t + 1$. Piene & Schlessinger [28] mostraram que a componente \mathbb{W}_{twc} de cúbicas reversa do esquema de Hilbert $Hilb_{3t+1}(\mathbb{P}^3)$ é uma variedade projetiva suave de dimensão 12. Posteriormente, Ellingsrud, Piene & Strømme [14] provam que a subvariedade \mathbb{X} da Grassmanniana $G(3, 10)$ formada pelas redes de quádricas do tipo determinantal, é uma variedade suave e que a componente \mathbb{W}_{twc} é a explosão de \mathbb{X} ao longo da subvariedade de redes com uma componente fixa. Ellingsrud & Strømme [13] também mostraram que \mathbb{X} é um quociente geométrico da variedade de matrizes de formas lineares 2×3 semiestáveis. Essa descrição permite então o cálculo do Anel de Chow de \mathbb{X} e \mathbb{W}_{twc} . Vainsencher & Xavier [36] apresentam uma compactificação suave explícita de um espaço de parâmetros para a família de cúbicas reversa adequada para a aplicação da fórmula de resíduos de Bott. Aqui utilizamos de início a descrição dos pontos fixos e respectivos tangentes explicitados em Ellingsrud & Strømme [12]. Entretanto, a família definida por $(\mathcal{I}_W)^2$ para algum $W \in \mathbb{W}_{twc}$ não é plana (flat). Faz-se necessário efetuar uma explosão $\mathbb{W}'_{twc} \rightarrow \mathbb{W}_{twc}$ ao longo de uma certa subvariedade suave para obtermos uma família plana, para a qual obtemos de fato o fibrado \mathcal{E}_d (vide subseção 4.1.2). Na subseção 4.1.1 fazemos uma breve descrição do espaço de parâmetros \mathbb{W}_{twc} baseada em Ellingsrud, Piene & Strømme [14] e Vainsencher [32]. Na subseção 4.1.2

damos a descrição dos pontos fixos oriundos da ação induzida do toro $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$, bem como as descrições do espaço tangente e das fibras de \mathcal{E}_d sobre cada ponto fixo, necessárias à aplicação da fórmula de resíduos de Bott. Para o grau da família de superfícies singulares ao longo de alguma cúbica reversa (variável), denotada por $\Sigma(\mathbb{W}_{twc}, d)$, obtemos a fórmula polinomial explicitada em 4.14.

Na seção 4.2 tomamos como espaço de parâmetros a família de superfícies cúbicas regradas em \mathbb{P}^4 , \mathbb{W}_{rc} , e obtemos uma fórmula polinomial que expressa o grau da família de hipersuperfícies de grau d singulares em algum membro $W \in \mathbb{W}_{rc}$ (variável), denotada por $\Sigma(\mathbb{W}_{rc}, d)$. Inicialmente, na subseção 4.2.1, fazemos um resumo da construção do espaço de parâmetros \mathbb{W}_{rc} de acordo com Elingsrud & Strømme [13]. Posteriormente, efetuamos a descrição dos pontos fixos para uma escolha adequada da ação de um toro e em seguida aplicamos a fórmula de resíduos de Bott no cálculo do grau de $\Sigma(\mathbb{W}_{rc}, d)$. Cabe ressaltar que para a obtenção do fibrado \mathcal{E}_d , mostrou-se necessário efetuar uma explosão análoga ao caso de cúbicas reversa (vide subseção 4.2.2). Por fim, obtemos uma fórmula polinomial explícita que dá o grau de $\Sigma(\mathbb{W}_{rc}, d)$ em função de d (vide 4.30).

Na seção 4.3, a família de 3-variedades de Segre em \mathbb{P}^5 é tomada como espaço de parâmetros sobre o qual impomos que uma hipersuperfície de grau d seja singular em algum membro variável da família. Denotamos por \mathbb{W}_{sg} a família de 3-variedades de Segre em \mathbb{P}^5 e por $\Sigma(\mathbb{W}_{sg}, d)$ a família de hipersuperfícies de grau d em \mathbb{P}^5 singulares em algum membro (variável) $W \in \mathbb{W}_{sg}$. Na subseção 4.3.1 é descrito o espaço de parâmetros \mathbb{W}_{sg} e na subseção 4.3.2 são reunidas as informações necessárias à aplicação da fórmula de resíduos de Bott: descrição dos pontos fixos, contribuição numérica, etc, para o cálculo do grau de $\Sigma(\mathbb{W}_{sg}, d)$. Embora teoricamente o grau de $\Sigma(\mathbb{W}_{sg}, d)$ seja dado por uma fórmula polinomial em d (vide Proposição 1.9), por limitações computacionais não conseguimos calcular o $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{sg}, d)$ para valores suficientes de d , a saber, pelo menos $120 + 1 (= 5 \times 24 + 1)$ valores distintos de d , para então interpolar os resultados e obter a fórmula polinomial em questão. Na Tabela 4.5 explicitamos os valores obtidos para $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{sg}, d)$ com $4 \leq d \leq 28$.

No Capítulo 5 estudamos o caso da família de quárticas elípticas. Cada curva quártica elíptica é a interseção completa de um feixe de superfícies quádricas. Vainsencher & Avritzer [35] obtiveram uma descrição explícita da componente \mathbb{W}_{eqc} de quárticas elípticas do esquema de Hilbert $Hilb_{4t}(\mathbb{P}^3)$, a qual tem dimensão 16, que é a dimensão da grassmanniana de feixes de quádricas em \mathbb{P}^3 . Essa descrição foi utilizada em Ellingsrud & Strømme [12] para enumerar curvas em certos Calabi-Yau 3-folds e em Cukierman, Lopez & Vainsencher [7] para enumerar superfícies contendo uma curva quártica elíptica. Para o cálculo do grau de $\Sigma(\mathbb{W}_{eqc}, d)$, análogo ao caso de cúbicas reversas, mostrou-se necessário efetuar uma explosão adicional para obtermos efetivamente um subfibrado \mathcal{E}_d (vide subseção 5.2.4). Na seção 5.1 é apresentada uma descrição sumária do espaço de parâmetros \mathbb{W}_{eqc} construído em [35]. Na seção 5.2 é efetuada a descrição dos pontos fixos para a

escolha adequada da ação de um toro, para posterior aplicação da fórmula de resíduos de Bott no cálculo do grau da família de superfícies de grau d singulares ao longo de alguma quártica elíptica (variável), denotada por $\Sigma(\mathbb{W}_{eqc}, d)$. O resultado obtido para o grau de $\Sigma(\mathbb{W}_{eqc}, d)$ é uma fórmula polinômial em d (vide 5.31).

Por fim, incluímos nos Apêndices A, . . . , I os códigos em Macaulay2 [17], Singular [9] e Maple [24] utilizados nos cálculos enumerativos presentes nesta tese.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados de caráter geral que usaremos no decorrer do trabalho. Inicialmente tratamos da relação entre potência simbólica e potência ordinária de um ideal e como essa relação se reflete na condição de uma hipersuperfície ser singular em algum subesquema de \mathbb{P}^n . Especificamente, seja \mathbb{W} uma subvariedade irreduzível fechada do esquema de Hilbert, $Hilb_{P_{\mathbb{W}}(t)}(\mathbb{P}^n)$, de subesquemas em \mathbb{P}^n com polinômio de Hilbert $P_{\mathbb{W}}(t)$ fixado, cujo membro geral estamos admitindo ser suave. Consideremos a família de subesquemas de \mathbb{P}^n definido por $(\mathcal{I}_W)^2$ para algum membro W em \mathbb{W} , onde $(\mathcal{I}_W)^2$ indica o quadrado do feixe ideal de W . Esta nova família não é plana em geral. Entretanto, existe um morfismo birracional $\mathbb{W}' \rightarrow \mathbb{W}$, com \mathbb{W}' liso e projetivo, que planifica a família. Isto significa dizer que o mapa racional de \mathbb{W} em $Hilb(\mathbb{P}^n)$ definido por $W \mapsto W'$ onde o ideal $\mathcal{I}_{W'} = \mathcal{I}_W^2$ estende-se a um morfismo de \mathbb{W}' em $Hilb$. Na seção 1.1, verifica-se que uma hipersuperfície F de \mathbb{P}^n é singular ao longo de $W \in \mathbb{W}$ (pelo menos nos casos aqui considerados) se, e somente se, ela contém a primeira vizinhança infinitesimal de W em \mathbb{P}^n , isto é, o subesquema fechado de \mathbb{P}^n com o feixe ideal $(\mathcal{I}_W)^2$. Na seção 1.2 obtém-se um subfibrado vetorial \mathcal{E}_d do fibrado trivial $\mathbb{W}' \times H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, cuja projetivização produz um mapa genericamente injetivo (ao menos para $d \gg 0$)

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_d) \rightarrow \mathbb{P}^{N_d}$$

com imagem o conjunto $\Sigma(\mathbb{W}, d)$, este último indicando o lugar das hipersuperfícies de grau d em \mathbb{P}^n que são singulares em algum elemento (variável) $W \in \mathbb{W}$, (vide Proposição 1.5 e Teorema 1.7). E nessa seção também é enunciado o resultado que garante o comportamento polinomial do grau de $\Sigma(\mathbb{W}, d)$ em função de d (vide Proposição 1.9). Na seção 1.3 apresentamos a principal ferramenta para o cálculo do grau de $\Sigma(\mathbb{W}, d)$, a saber a fórmula de resíduos de Bott (vide Teorema 1.10).

1.1 Potência Simbólica \times Potência Ordinária

No que segue, K é um corpo algebricamente fechado de característica zero e $S = K[x_1, \dots, x_n]$ é o anel de polinômios em n variáveis.

Seja \mathfrak{p} um ideal primo de um anel noetheriano R . A componente \mathfrak{p} -primária da n -ésima potência de \mathfrak{p} é chamada a n -ésima potência simbólica de \mathfrak{p} , e denotada por $\mathfrak{p}^{(n)}$. Temos que

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \text{Ker}(R \rightarrow R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}}) = \{r \in R; sr \in \mathfrak{p}^n \text{ para algum } s \in R \setminus \mathfrak{p}\}.$$

Observe que $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{p}^{(n)}$, no entanto, a igualdade não é sempre válida. Por exemplo, em [8] encontramos o ideal primo

$$\mathfrak{p} = \langle x^4 - yz, y^2 - xz, x^3y - z^2 \rangle \subseteq K[x, y, z]$$

para o qual temos $\mathfrak{p}^{(2)} \neq \mathfrak{p}^2$. De fato, a potência ordinária

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^2 = \langle & y^4 - 2xy^2z + x^2z^2, x^3y^3 - x^4yz - y^2z^2 + xz^3, \\ & x^4y^2 - x^5z - y^3z + xyz^2, x^7z + x^2y^3z - 3x^3yz^2 + z^4, \\ & x^7y - x^3y^2z - x^4z^2 + yz^3, x^8 - 2x^4yz + y^2z^2 \rangle, \end{aligned}$$

ao passo que a componente \mathfrak{p} -primária é dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^{(2)} = \langle & y^4 - 2xy^2z + x^2z^2, x^3y^3 - x^4yz - y^2z^2 + xz^3, \\ & x^4y^2 - x^5z - y^3z + xyz^2, x^7 + x^2y^3 - 3x^3yz + z^3 \rangle. \end{aligned}$$

No caso geométrico, as potências simbólicas de \mathfrak{p} têm uma descrição dada pelo Teorema 1.1, devido a Zariski e Nagata.

Seja $\mathfrak{p} \subset S$ um ideal primo e X a variedade afim correspondente. Definimos

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \{f \in S; f \text{ anula-se à ordem } \geq n \text{ em cada ponto de } X\}.$$

A condição que f anula-se à ordem n em cada ponto $x \in X$, significa que $f \in \mathfrak{m}_x^n$, onde \mathfrak{m}_x é o ideal maximal do ponto x . De forma equivalente, significa que a expansão de Taylor de f em torno de x inicia com termos de ordem maior do que ou igual a n . Daí podemos escrever

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \bigcap_{x \in X} \mathfrak{m}_x^n.$$

Além disso, se a característica de K é zero, podemos descrever $\mathfrak{p}^{(n)}$ como o conjunto de polinômios que anulam-se junto com suas derivadas parciais de ordem menor do que n em todos os pontos de X .

Teorema 1.1 (Zariski, Nagata). *Seja $S = K[x_1, \dots, x_n]$ e \mathfrak{p} um ideal primo de S . Então $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^{(n)}$, a n -ésima potência simbólica de \mathfrak{p} .*

Demonstração. Ver Eisenbud [10], Teorema 3.14. □

Em [20], M. Hochster estabelece vários critérios para igualdade entre a n -ésima potência \mathfrak{p}^n de um primo \mathfrak{p} em um anel Noetheriano R e sua n -ésima potência simbólica $\mathfrak{p}^{(n)}$ para cada inteiro positivo n . Como aplicação desses critérios tem-se que $\mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^{(n)}$ no caso em que \mathfrak{p} é um primo gerado por uma R -sequência (uma interseção completa). Já em Dao et al. [8] é mostrado que se I é o ideal homogêneo saturado definindo um subesquema $X \subset \mathbb{P}^n$ tal que $\text{codim}(X) = 2$, X é aritmeticamente Cohen-Macaulay e uma interseção completa local então $I^{(m)} = I^m$ para todo $m \geq 1$. Como consequência, se $W \subset \mathbb{P}^n$ é um elemento (suave) de uma das seguintes famílias

- \mathbb{P}^k -linear em \mathbb{P}^n , $k < n - 1$ (vide Capítulo 2),
- curva plana suave de grau m em \mathbb{P}^3 (vide Capítulo 3),
- curva quártica elíptica suave em \mathbb{P}^3 (vide Capítulo 5),
- cúbica reversa suave (vide seção 4.1),
- cúbica regradada suave em \mathbb{P}^4 (vide seção 4.2), ou
- uma 3-variedade de Segre em \mathbb{P}^5 (vide seção 4.3)

e W' a primeira vizinhança infinitesimal de W em \mathbb{P}^n , isto é, o subesquema fechado de \mathbb{P}^n tendo $(\mathcal{I}_W)^2$ como o feixe ideal, teremos que uma hipersuperfície F de \mathbb{P}^n é singular ao longo de W se, e somente se, ela contém W' .

1.2 Existem um fibrado vetorial e uma fórmula polinomial

No decorrer deste trabalho nos deparamos com o cálculo do grau de certas subvariedades de \mathbb{P}^N que surgem como imagem de certos subfibrados projetivos de um fibrado trivial $X \times \mathbb{P}^N$. Para essa finalidade o próximo resultado é de grande utilidade.

Lema 1.2. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão $N + 1$ e \mathcal{V} um subfibrado do fibrado trivial $X \times V$ sobre uma variedade X de dimensão n . Considere $\mathbb{P}(\mathcal{V}) \subset X \times \mathbb{P}^N$ a projetivização do fibrado \mathcal{V} e $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$. Então temos o seguinte diagrama induzido pelas projeções nos fatores:*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{P}(\mathcal{V}) & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ X & & \mathbb{P}^N \end{array}$$

Denote por $M \subseteq \mathbb{P}^N$ a imagem de p_2 e suponha p_2 genericamente injetiva. Então

$$\deg M = \int \text{Segre}(n, \mathcal{V}) \cap [X].$$

onde $\text{Segre}(n, _)$ indica a n -ésima classe de Segre.

Demonstração. Ver Cuadrado [6], Lema 1.22, pag. 14, ou Fulton [15], Exemplo 8.3.14, pág. 143. \square

Seja \mathbb{W} uma subvariedade irredutível fechada do esquema de Hilbert, $\text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}}(t)}(\mathbb{P}^n)$, de subesquemas em \mathbb{P}^n com polinômio de Hilbert $P_{\mathbb{W}}(t)$, cujo membro geral estamos admitindo ser suave. E considere a subvariedade fechada \mathbb{W}' em $\text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}'}(t)}(\mathbb{P}^n)$ obtida como o fecho da família de subesquemas de \mathbb{P}^n definido por $(\mathcal{I}_W)^2$ para um membro genérico W em \mathbb{W} , onde $(\mathcal{I}_W)^2$ indica o quadrado do feixe ideal de W . Note a aparição do novo polinômio de Hilbert, $P_{\mathbb{W}'}(t)$, graças a planitude genérica. Em geral, a família de subesquemas de \mathbb{P}^n definido por $(\mathcal{I}_W)^2$ para algum membro W em \mathbb{W} não é plana (vide Capítulo 5 e Seções 4.1, 4.2 e 4.3).

Denote por $\mathbb{P}^{N_d} = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)))$ o espaço de parâmetros das hipersuperfícies de grau d em \mathbb{P}^n . Pela seção 1.1, exigir que uma hipersuperfície F de grau d seja singular ao longo de um membro geral $W \in \mathbb{W}$ é equivalente dizer que F é um elemento de $H^0((\mathcal{I}_W)^2(d))$.

Escreveremos $\text{Sing}(F)$ o lugar singular de F .

Lema 1.3. *Suponha $\mathcal{J}_d := (\mathcal{I}_W)^2(d)$ globalmente gerado. Seja F um elemento geral de $H^0(\mathcal{J}_d)$. Então, o lugar singular de F é igual a W conjuntistamente.*

Demonstração. A hipótese de \mathcal{J}_d ser globalmente gerado, implica por Bertini (cf. [19, 10.9.2]) que $\text{Sing}(F) \subseteq W$.¹ A inclusão $W \subseteq \text{Sing}(F)$ é evidente. \square

Em geral a decomposição primária do lugar singular de F revela a existência de pontos imersos.

Exemplo 1.4. Considere o guarda-chuva de Whitney, $F := \langle x_0^2 x_3 - x_1^2 x_2 \rangle$, cujo lugar singular é dado por $\text{Sing}(F) = \langle 2x_0 x_3, -2x_1 x_2, -x_1^2, x_0^2 \rangle$. A decomposição primária de $\text{Sing}(F)$ revela, além da reta $l = \langle x_0, x_1 \rangle$, os pontos imersos $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle$ e $\langle x_0, x_1, x_3 \rangle$, os quais estão sobre l . Cabe ressaltar que sobre estes pontos especiais, “pinch points”, o cone tangente é um plano duplo.

Notação como em §1.2, considere os mapas de projeção de $\mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d}$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d} & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbb{W}' & & \mathbb{P}^{N_d} \end{array} \quad (1.1)$$

¹Obrigado a Angelo F. Lopez por esclarecer este ponto.

A regularidade de Castelnuovo-Mumford [27] mostra que para todo $d \gg 0$, o subconjunto $\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d)$ de pares $(Z, F) \in \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d}$ tal que $Z \subset F$, é um fibrado projetivo sobre \mathbb{W}' via a primeira projeção p_1 . Explicitamente, com base em Cukierman, Lopez & Vainsencher [7], seja $\tilde{Z} \subset \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^n$ o subesquema universal e da mesma forma $\tilde{F} \subset \mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^n$ a hipersuperfície universal de grau d . E indique por \hat{Z}, \hat{F} suas imagens inversas para $\mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^n$. Daí segue que temos o seguinte diagrama de feixes sobre $Y := \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^n$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_Y & \longrightarrow & \mathcal{O}_Y(\hat{F}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\hat{F}}(\tilde{F}) \\ & \searrow \rho & \downarrow & & \\ & & \mathcal{O}_{\hat{Z}}(\hat{F}) & & \end{array}$$

Por construção, a seta oblíqua ρ anula-se em um ponto $(Z, F, x) \in \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d} \times \mathbb{P}^n$ se, e somente se, $x \in F \cap Z$. Assim, temos que $Z \subset F$ quando a condição anterior é válida para todo $x \in Z$. Desse modo, $\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d)$ é igual ao esquema de zeros de ρ ao longo das fibras da projeção $p_{12} : \hat{Z} \rightarrow \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d}$. Relembrando Altman & Kleiman [1], (2.1) pag. 14, isto é igual aos zeros da seção adjunta do fibrado vetorial imagem direta $p_{12*}(\mathcal{O}_{\hat{Z}}(\hat{F}))$.

Denotamos por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^n & \xrightarrow{q_2} & \mathbb{P}^n \\ q_1 \downarrow & & \\ \mathbb{W}' & & \end{array}$$

os mapas de projeção de $\mathbb{W}' \times \mathbb{P}^n$. Como $\mathcal{O}(\tilde{F}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, pela fórmula de projeção temos que produzir uma seção de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(1) \otimes \mathcal{D}_d$, onde $\mathcal{D}_d = q_{1*}(\mathcal{O}_{\hat{Z}}(d))$. Por Castelnuovo-Mumford e teoria de mudança de base, existe um inteiro d_0 (= regularidade) tal que \mathcal{D}_d é um fibrado vetorial de posto $P_{\mathbb{W}'}(d)$ para todo $d \geq d_0$, onde $P_{\mathbb{W}'}(t)$ indica o polinômio de Hilbert dos membros de \mathbb{W}' . De fato, \mathcal{D}_d se encaixa na seguinte sequência de fibrados vetoriais sobre \mathbb{W}' :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & q_{1*}(\mathcal{I}_{\hat{Z}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) & \longrightarrow & q_{1*}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) & \longrightarrow & q_{1*}(\mathcal{O}_{\hat{Z}}(d)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \mathcal{E}_d & \longrightarrow & \mathcal{F}_d & \longrightarrow & \mathcal{D}_d & & \end{array} \quad (1.2)$$

onde $\mathcal{F}_d = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ indica (fibrado trivial com fibra) o espaço de polinômios homogêneos de grau d .

Tomando projetivização e a imagem inversa para $\mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d}$, obtemos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N_d}}(-1) & & \\ \downarrow & \searrow \bar{\rho} & \\ \mathcal{E}_d & \longrightarrow & \mathcal{F}_d & \longrightarrow & \mathcal{D}_d \end{array} \quad (1.3)$$

Por construção, $\bar{\rho}$ anula-se precisamente sobre $\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d)$. E isso nos diz que

$$\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_d).$$

Como $\text{codim}_{\mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d}} \tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d) = P_{\mathbb{W}'}(d)$, o que coincide com o posto de \mathcal{D}_d , segue que $\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d)$ representa a classe de Chern top dimensional de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \otimes \mathcal{D}_d$, (cf. Fulton [15], 3.2.16, p. 61).

Agora, denotamos por $\Sigma(\mathbb{W}, d)$ o subconjunto de \mathbb{P}^{N_d} formado pelas hipersuperfícies que contêm algum membro de \mathbb{W}' . Para um ponto geral de \mathbb{W}' , isto é equivalente a dizer que a superfície é singular em algum membro geral de \mathbb{W} . Assim, com a notação de (1.1), temos

$$\Sigma(\mathbb{W}, d) = p_2(\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d)). \quad (1.4)$$

E da injetividade genérica do mapa p_2 (vide Teorema 1.7)

$$\begin{aligned} \mathbb{W}' \times \mathbb{P}^{N_d} \supset \tilde{\Sigma}(\mathbb{W}', d) &\xrightarrow{p_2} \Sigma(\mathbb{W}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d} \\ (Z, F) &\mapsto F \end{aligned} \quad (1.5)$$

e do Lema 1.2, obtemos que

$$\text{deg } \Sigma(\mathbb{W}, d) = \int \text{Segre}(\omega, \mathcal{E}_d) \cap [\mathbb{W}'], \quad (1.6)$$

onde $\omega := \dim \mathbb{W}' = \dim \mathbb{W}$.

Para referências futuras registramos as argumentações acima na Proposição 1.5.

Proposição 1.5. *Seja $\mathbb{W} \subset \text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}}(t)}(\mathbb{P}^n)$ uma subvariedade fechada irredutível, cujo membro geral corresponde a uma subvariedade lisa de \mathbb{P}^n . Notação como acima, existe uma dessingularização $\mathbb{W}' \rightarrow \mathbb{W}$ tal que*

(i) *para $d \gg 0$ existe um subfibrado vetorial $\mathcal{E}_d \subset \mathbb{W}' \times \mathcal{F}_d$ cuja fibra sobre $W' \in \mathbb{W}'$ geral é o subespaço $H^0((\mathcal{I}_W)^2(d)) \subset \mathcal{F}_d$ formado pelos polinômios homogêneos de grau d com gradiente nulo em W ;*

(ii) *o mapa $\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}, d) := \mathbb{P}(\mathcal{E}_d) \rightarrow \mathbb{P}^{N_d} = \mathbb{P}(\mathcal{F}_d)$ induzido por projeção é genericamente injetivo e*

$$\text{deg } \Sigma(\mathbb{W}, d) = \int \text{Segre}(\omega, \mathcal{E}_d) \cap [\mathbb{W}'],$$

onde $\omega = \dim \mathbb{W}' = \dim \mathbb{W}$.

A seguir, pagamos nossa dívida quanto a injetividade genérica do mapa em (1.5). Para isso, fazemos inicialmente um lema técnico (Lema 1.6) necessário para garantir a existência do subfibrado \mathcal{E}_d acima mencionado.

Lema 1.6. *Seja $\mathbb{W} \subset \text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}}(t)}(\mathbb{P}^n)$ uma subvariedade fechada irredutível. A família formada pelos subesquemas de \mathbb{P}^n definidos por $(\mathcal{I}_W)^2$ para $W \in \mathbb{W}$ suave é plana.*

Demonstração. A afirmação decorre do seguinte fato bem conhecido. Seja B uma A -álgebra e I um ideal de B tal que $C = B/I$ é plano sobre A e I/I^2 é localmente livre como C -módulo. Então a vizinhança infinitesimal B/I^2 é plana sobre A . De fato, temos a sequência exata

$$I/I^2 \subset B/I^2 \twoheadrightarrow B/I,$$

onde os extremos são planos sobre A . Por fim, tomamos $A \rightarrow B \twoheadrightarrow C$ como anéis de coordenadas de abertos afins de $\mathbb{W}, \mathbb{W} \times \mathbb{P}^n \supset Z = \text{subesquema universal}$. \square

Enfim, vamos à injetividade genérica.

Teorema 1.7. *Seja $\mathbb{W} \subset \text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}}(t)}(\mathbb{P}^n)$, subvariedade fechada irredutível cujo membro geral é irredutível, liso, e de dimensão $\leq n - 2$. Seja $\overline{\mathbb{W}}' \subset \text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}'(t)}(\mathbb{P}^n)}$ o fecho da imagem do mapa racional que associa a cada $W \in \mathbb{W}$ liso, o subesquema W' com ideal $\mathcal{I}_{W'} = (\mathcal{I}_W)^2$. Então para $d \gg 0$ o mapa*

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{W}}' \times \mathbb{P}^{N_d} \supset \tilde{\Sigma}(\mathbb{W}, d) & \xrightarrow{p_2} & \Sigma(\mathbb{W}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d} \\ (Z \subset F) & \mapsto & F \end{array}$$

é genericamente injetivo.

Demonstração. Seja \mathbb{W}'_0 um aberto de $\overline{\mathbb{W}}'$ formado por subesquemas W' com ideal da forma $\mathcal{I}_{W'} = (\mathcal{I}_W)^2$ com $W \in \mathbb{W}$ liso. Fixe $W' \in \mathbb{W}'_0$. Seja F uma hipersuperfície geral de grau d contendo W' . Isto significa que F é geral em $H^0(\mathcal{I}_{W'}(d)) = H^0((\mathcal{I}_W)^2(d))$ com $W = W'_{red}$ suave, irredutível. Pelo Lema 1.3 segue que $\text{Sing}(F) = W$ (conjuntistamente). Seja $Z' \in \mathbb{W}'_0$ tal que $Z' \subset F$. Por construção de \mathbb{W}'_0 , temos $\mathcal{I}_{Z'} = (\mathcal{I}_Z)^2$ para $Z = Z'_{red} \in \mathbb{W}$ suave, irredutível. Em particular, o espaço tangente da hipersuperfície F em cada ponto de Z' é igual ao espaço tangente de \mathbb{P}^n . Daí vem $Z' \subseteq \text{Sing}(F) = W$ e, $(Z')_{red} = W$, seguindo $Z' = W'$. Isso mostra que

$$\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}, d)|_{\mathbb{W}'_0} \xrightarrow{p_2} \Sigma(\mathbb{W}, d)$$

é injetivo. \square

Observação 1.8. *Podemos mudar de base passando a uma dessingularização $\mathbb{W}' \rightarrow \overline{\mathbb{W}}'$.*

Em Cukierman, Lopez & Vainsencher [7] ou em Vainsencher [34], encontra-se um resultado que estabelece o comportamento polinomial do grau em (1.6) em função do grau d da hipersuperfície em \mathbb{P}^n , o qual registramos na Proposição 1.9 para referência futura.

Proposição 1.9. *Nas hipóteses anteriores e para $\mathbb{W} \subset \text{Hilb}_{P_{\mathbb{W}}(t)}(\mathbb{P}^n)$ fixado, temos que $\deg(\Sigma(\mathbb{W}, d))$ é um polinômio em d de grau $\leq n \dim(\mathbb{W})$, para todo $d \gg 0$.*

Demonstração. Seja $w = \dim \mathbb{W} = \dim \mathbb{W}'$. Como \mathcal{E}_d e \mathcal{D}_d são imagem direta de um feixe sobre $\mathbb{W}' \times \mathbb{P}^n$ (vide 1.2) e $\text{Segre}(w, \mathcal{E}_d) = \text{Chern}(w, \mathcal{D}_d)$, podemos aplicar Grothendieck-Riemann-Roch (c.f. [15, p. 286]) para expressar o caracter de Chern de \mathcal{D}_d como

$$ch(\mathcal{D}_d) = ch(q_1!(\mathcal{O}_{\tilde{Z}}(d))) = q_{1*}(ch(\mathcal{O}_{\tilde{Z}}) \cdot ch(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \cdot \text{todd}(\mathbb{P}^n)).$$

Note que o lado direito é um polinômio em d de grau $\leq n$. Por outro lado, a classe de Chern c_w é um polinômio de grau w sobre os coeficientes do caracter de Chern e isto nos leva a deduzir que $\text{Chern}(w, \mathcal{D}_d) = \text{Segre}(w, \mathcal{E}_d)$ é um polinômio em d de grau $\leq nw$. \square

No entanto, em todos os casos tratados neste trabalho, encontramos como grau do polinômio na Proposição 1.9 precisamente $(k + 1) \times \dim(\mathbb{W})$, onde k indica a dimensão de um membro de \mathbb{W} . A validade para \mathbb{W} arbitrário resta conjectural.

1.3 Fórmula de resíduos de Bott

Nesta seção apresentamos a principal ferramenta para tratar dos casos considerados neste trabalho, a saber a fórmula de resíduos de Bott. Os resultados aqui apresentados são baseados nas referências Ellingsrud & Strømme [12] e Meireles & Vainsencher [25].

No que segue, X será uma variedade completa suave de dimensão n munida de uma ação algébrica do toro $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$. O lugar dos pontos fixos indicamos por $X^{\mathbb{T}}$.

Sejam E_1, \dots, E_s fibrados vetoriais \mathbb{T} -equivariantes sobre X e

$$p(x_1^1, \dots, x_s^1, \dots, x_1^n, \dots, x_s^n)$$

um polinômio homogêneo ponderado de grau n nas variáveis x_j^i , onde x_j^i tem grau i . Denotemos por $p(E_1, \dots, E_s)$ o polinômio nas classes de Chern de E_1, \dots, E_s , obtido pela substituição $x_j^i = c_i(E_j)$.

A fórmula de integração de Bott (cf. [25], Corolário 2.4.7, pág. 33) calcula o grau do zero ciclo $p(E_1, \dots, E_s) \cap [X]$ em termos das restrições dos fibrados E_j 's ao lugar dos pontos fixos, $X^{\mathbb{T}} \subset X$.

Escrevemos, abreviadamente,

$$p(E) = p(E_1, \dots, E_s) \text{ e } p^{\mathbb{T}}(E) = p(E_{1T}, \dots, E_{sT})$$

para o polinômio correspondente às classes de Chern \mathbb{T} -equivariantes dos fibrados E_1, \dots, E_s . Note que

$$p(E) \cap [X] = i^*(p^{\mathbb{T}}(E) \cap [X]_{\mathbb{T}}),$$

onde $i : X^{\mathbb{T}} \hookrightarrow X$ indica o mapa de inclusão.

Teorema 1.10 (Fórmula de resíduos de Bott). *Sejam E_1, \dots, E_s , fibrados vetoriais \mathbb{T} -equivariantes sobre uma variedade suave e completa X . Então*

$$\int_X (p(E) \cap [X]) = \sum_{F \subset X^{\mathbb{T}}} \pi_{F*} \left(\frac{P^{\mathbb{T}}(E|_F \cap [F]_{\mathbb{T}})}{c_{d_F}(\mathcal{N}_{F/X})} \right), \quad (1.7)$$

onde d_F denota a codimensão da componente F em X .

Demonstração. Vide [25], Teorema 2.6, pág. 35. □

Dada uma componente conexa (= irredutível) $F \subset X^{\mathbb{T}}$ do lugar dos pontos fixos, temos que as classes de Chern \mathbb{T} -equivariantes $c_k^{\mathbb{T}}(E|_F)$ e $c_{d_F}^{\mathbb{T}}(\mathcal{N}_{F/X})$ podem ser calculadas no anel de Chow equivariante $A_*^{\mathbb{T}}(F)$ em termos dos caracteres que comparecem na decomposição de $E|_F$ e $\mathcal{N}_{F/X}$ em auto-subfibrados e das classes de Chern destes últimos.

No caso em que $X^{\mathbb{T}}$ é um conjunto finito de pontos, ou seja, os pontos fixos da ação de \mathbb{T} sobre X são isolados, as classes

$$c_k^{\mathbb{T}}(E|_F) \text{ e } c_{d_F}^{\mathbb{T}}(\mathcal{N}_{F/X}) = c_{\dim(X)}^{\mathbb{T}}(\mathcal{T}X)$$

podem ser descritas puramente em termos dos caracteres associados aos auto-fibrados. Precisamente, feita a decomposição $E|_F = \bigoplus_{\chi} E|_F^{\chi}$ em auto-espacos, as classes de Chern equivariantes de cada somando é dada por

$$c_k^{\mathbb{T}}(E|_F) = \binom{r}{k} \chi^k, \quad r = \text{posto de } E|_F^{\chi}. \quad (1.8)$$

Em particular, temos que a classe de Chern top dimensional $c_{max}^{\mathbb{T}}(E|_F)$, no caso em que o posto de $E = \dim(X)$ (por exemplo $E = \mathcal{T}_X$), é representada no anel de Chow equivariante do ponto fixo F pelo produto de todos os caracteres que aparecem na decomposição da fibra $E|_F$ em auto-espacos, com as respectivas multiplicidades.

Nos casos considerados neste trabalho, tipicamente tomamos \mathbb{T} como o grupo multiplicativo \mathbb{C}^* agindo sobre X de tal forma que o conjunto de pontos fixos $X^{\mathbb{T}}$ seja finito. Basicamente, a ação é tomada de maneira que cada caracter seja dado por $\chi_i = t^{a_i}$, $a_i \in \mathbb{Z}$ e assim o operador induzido no anel de Chow equivariante é $a_i \cdot t$, onde t agora indica a classe hiperplana.

No lado direito da fórmula de resíduos de Bott (1.10), o numerador $p^{\mathbb{T}}(E|_F)$ consiste em um polinômio homogêneo de grau $n = \dim X$ nas variáveis que são os caracteres que ocorrem na decomposição em auto-subfibrados. Tipicamente, suponha que o polinômio em questão contenha um termo igual a $c_1^{n-2} \cdot c_2$, enquanto que, digamos, $E|_F = 2\chi_1 + \chi_2$. Temos assim, $c_1^{\mathbb{T}}(E|_F) = 2\chi_1 + \chi_2$ e, analogamente, $c_2^{\mathbb{T}}(E|_F) = \chi_1^2 + 2\chi_1 \cdot \chi_2$. Daí segue que o operador de grau n é dado por $(2\chi_1 + \chi_2)^{n-2} \cdot (\chi_1^2 + 2\chi_1\chi_2)$, e o referido termo ganha a forma final $(2a_1 + a_2)^{n-2} \cdot (a_1^2 + 2a_1 \cdot a_2) \cdot t^n$ sobre o anel de Chow equivariante.

Portanto, o numerador e o denominador no lado direito de (1.10) são múltiplos inteiros de t^n . Ao simplificarmos, obtemos um número racional e, conseqüentemente, o lado direito da fórmula de resíduos de Bott (1.10) consiste em uma soma finita de números racionais obtidos a partir dos pesos como descrito em (1.8).

Mais precisamente, denote por $\tau_1(E, F), \dots, \tau_r(E, F)$ os pesos que ocorrem na decomposição de $E|_F$ em auto-subfibrados, e para cada inteiro $k \geq 0$, seja $\sigma_k(E, F)$ a k -ésima função simétrica elementar desses pesos. Temos então os seguintes corolários.

Corolário 1.11. *Nas notações acima, cada classe de Chern equivariante $c_k^{\mathbb{T}}(E|_F)$ é representada no anel de Chow equivariante do ponto fixo F por $\sigma_k(E, F)$.*

Corolário 1.12. *A classe de Chern equivariante top dimensional do fibrado tangente de X é dada no anel de Chow equivariante de um ponto fixo F pelo produto dos pesos que ocorrem na decomposição da respectiva fibra.*

Capítulo 2

Hipersuperfícies singulares ao longo de um \mathbb{P}^k -linear

Neste capítulo tratamos do caso de hipersuperfícies em \mathbb{P}^n singulares ao longo de um \mathbb{P}^k -linear, $k < n - 1$. Aqui, o espaço de parâmetros consiste na grassmanniana $\mathbb{G}(k + 1, n + 1)$, cuja dimensão é dada por $(k + 1) \times (n - k)$. O nosso interesse é determinar o grau da família de hipersuperfícies de grau d singulares em algum membro de $\mathbb{G}(k + 1, n + 1)$, o qual vamos denotar por $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(k+1, n+1)}, d)$.

Inicialmente, tratamos em detalhe do caso específico $k = 1$ e $n = 3$ (superfícies em \mathbb{P}^3 singulares ao longo de uma reta variável) explicitando a aplicação da fórmula de resíduos de Bott. Posteriormente, listamos os resultados obtidos para outros valores de k e n .

2.1 Impondo uma reta singular

Considere a família de retas em \mathbb{P}^3 parametrizada pela grassmanniana de retas $\mathbb{W}_{(2,4)} = \mathbb{G}(2, 4)$. Estamos interessados em determinar o grau de $\Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d}$, a família de superfícies de grau d que contém algum membro $W \in \mathbb{W}_{(2,4)}$ em seu lugar singular.

Pela Proposição 1.5 temos que para $d \gg 0$ existe um subfibrado \mathcal{E}_d do fibrado trivial $\mathbb{W}_{(2,4)} \times \mathbb{P}^{N_d}$, cuja projetivização $\mathbb{P}(\mathcal{E}_d) = \tilde{\Sigma}(\mathbb{W}_{(2,4)}, d)$ e temos um mapa p_2 obtido pela segunda projeção, o qual é genericamente injetivo (vide Teorema 1.7) e com imagem o conjunto $\Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d)$.

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\Sigma}(\mathbb{W}_{(2,4)}, d) & = & \mathbb{P}(\mathcal{E}_d) & \subset & \mathbb{W}_{(2,4)} \times \mathbb{P}^{N_d} \\ & \swarrow p_1 & & \searrow p_2 & \\ \mathbb{W}_{(2,4)} & & & & \Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d} \end{array}$$

Assim, pelo Lema 1.2 temos que

$$\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d) = \int \text{Segre}(4, \mathcal{E}_d) \cap [\mathbb{W}'_{(2,4)}]. \quad (2.1)$$

Neste caso, vamos explicitar o fibrado \mathcal{E}_d . Para isso, consideremos a sequência tautológica da grassmanniana de retas em \mathbb{P}^3

$$\mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{Q}, \quad (2.2)$$

onde \mathcal{F}_1 denota o fibrado trivial com fibra $\langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$, o espaço de formas lineares de grau um. Cada fibra de \mathcal{S} é um subespaço bidimensional das equações de uma reta e a correspondente fibra de \mathcal{Q} é o espaço bidimensional de coordenadas homogêneas sobre a reta.

Exigir que uma superfície de grau d em \mathbb{P}^3 contenha uma reta em seu lugar singular é equivalente requerer que a (equação da) superfície pertença ao quadrado do ideal que define a reta. Daí segue que obtemos um mapa de fibrados

$$S_2(\mathcal{S}) \otimes \mathcal{F}_{d-2} \twoheadrightarrow \mathcal{E}_d \subset \mathcal{F}_d,$$

o qual possui um núcleo dado por $\mathcal{S} \otimes \overset{2}{\wedge} \mathcal{S} \otimes \mathcal{F}_{d-3}$. Portanto, obtemos uma sequência exata

$$\mathcal{S} \otimes \overset{2}{\wedge} \mathcal{S} \otimes \mathcal{F}_{d-3} \twoheadrightarrow S_2(\mathcal{S}) \otimes \mathcal{F}_{d-2} \twoheadrightarrow \mathcal{E}_d \subset \mathcal{F}_d. \quad (2.3)$$

Usando o pacote Schubert2 para Macaulay2 [17] encontramos

$$\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d) = \frac{1}{64} d(d-1)(27d^6 - 117d^5 + 269d^4 - 375d^3 + 312d^2 - 132d + 48) \quad (2.4)$$

para o grau da subvariedade $\Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d}$ de superfícies em \mathbb{P}^3 de grau d singulares ao longo de alguma reta (variável). O leitor pode consultar o Apêndice A para obter o código utilizado no cálculo anterior. O valor para $d = 2$ é 10, como esperado para o grau da imagem de $\mathbb{P}(\mathcal{F}_1) \times \mathbb{P}(\mathcal{F}_1) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{F}_2)$, formada pelos pares de planos.

2.1.1 Impondo uma reta singular via Bott

Nesta seção, repetimos o cálculo anterior para obter o $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d)$ com o intuito de elucidar a aplicação da fórmula de resíduos de Bott, como explicado em Ellingsrud & Strømme[12] e Meurer [26], e que será utilizada nos demais casos tratados neste trabalho.

Considere o toro $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$ agindo diagonalmente sobre $(\mathbb{C}^4)^\vee$ via

$$t \circ x_i := t^{w_i} x_i,$$

com pesos apropriados, digamos:

$$w_0 = 4, w_1 = 11, w_2 = 17, w_3 = 32. \quad (2.5)$$

A ação de \mathbb{T} sobre $(\mathbb{C}^4)^\vee$ induz uma ação natural sobre \mathbb{P}^3 , de tal forma que os fibrados vetoriais $O_{\mathbb{P}^3}(d)$ e $\mathcal{T}\mathbb{P}^3$ são equivariantes. Assim, lembrando a sequência de Euler vemos que na fibra, digamos sobre $\langle e_0 \rangle \in \mathbb{P}^3$, o termo do meio é $\langle x_0 \rangle \otimes \langle e_0, \dots, e_3 \rangle$. Conseqüentemente, o espaço tangente $\mathcal{T}\mathbb{P}^3_{\langle e_0 \rangle} = \langle x_0 \rangle \otimes \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ como \mathbb{T} -espaços, o qual decompõe-se em \mathbb{T} -espaços unidimensional com pesos $u_i = w_0 - w_i$, $i = 1, 2, 3$. Nessas condições as classes de Chern \mathbb{T} -equivariantes de $\mathcal{T}\mathbb{P}^3$ no ponto fixo $f = \langle e_0 \rangle$ são apenas as funções simétricas elementares: $c_1^f = u_1 + u_2 + u_3$, $c_2^f = u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3$ e $c_3^f = u_1u_2u_3$.

De modo análogo, obtemos uma ação natural induzida sobre $\mathbb{W}_{(2,4)} = \mathbb{G}(2,4)$ tal que os fibrados vetoriais sobre $\mathbb{W}_{(2,4)}$ sejam \mathbb{T} -equivariantes. No caso da Grassmanniana de retas em \mathbb{P}^3 temos seis pontos fixos, correspondentes aos eixos coordenados $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_0, x_2 \rangle, \dots, \langle x_2, x_3 \rangle$. De (2.1), computamos

$$\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d) = \int_{\mathbb{W}'_{(2,4)}} \text{Segre}(4, \mathcal{E}_d) = \sum_f \frac{c_4^f(-\mathcal{E}_d)}{c_4^f(\mathcal{T}\mathbb{W}'_{(2,4)})} \quad (2.6)$$

localizando nos seis pontos fixos. A última igualdade em (2.6) é devido à fórmula de resíduos de Bott (vide Teorema 1.10) e, $c_4^f(\cdot)$ indica a classe de Chern \mathbb{T} -equivariante no ponto fixo f .

Observação 2.1. *Considere uma sequência de fibrados vetoriais*

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0,$$

onde \mathcal{T} indica um fibrado trivial. Pela fórmula de Whitney temos a seguinte igualdade envolvendo a classe de Chern total dos fibrados \mathcal{S} e \mathcal{Q} : $c(\mathcal{S})c(\mathcal{Q}) = 1$, o que implica $c(\mathcal{Q}) = c(\mathcal{S})^{-1}$. Além disso, temos que $c(\mathcal{Q}) = c(-\mathcal{S})$ e $c(\mathcal{S}) = \text{Segre}(\mathcal{S})^{-1}$, donde segue que $\text{Segre}(\mathcal{S}) = c(-\mathcal{S})$ e isto justifica a ocorrência do fibrado $-\mathcal{E}_d$ em (2.6).

O denominador em (2.6), digamos para $l = \langle x_0, x_1 \rangle$, é obtido da seguinte forma: primeiro encontramos a fibra do tangente

$$\mathcal{T}_l\mathbb{W}_{(2,4)} = \text{Hom}(S_l, Q_l) = \langle x_0, x_1 \rangle^\vee \otimes \langle x_2, x_3 \rangle = \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1},$$

onde $\frac{x_i}{x_j}$ indica o \mathbb{T} -espaço com peso $w_i - w_j$.

Dessa forma, obtemos $c_4^l(\mathcal{T}\mathbb{W}_{(2,4)}) = (w_2 - w_0)(w_3 - w_0)(w_2 - w_1)(w_3 - w_1)$, que com a escolha dos pesos em (2.5) nos fornece o valor 45864.

Da mesma forma, o numerador requer a decomposição em pesos do fibrado \mathcal{E}_d . A fibra sobre a reta $l = \langle x_0, x_1 \rangle$ consiste nas superfícies F de grau d que contêm l em seu lugar

singular, ou de forma equivalente que F pertence ao quadrado do ideal da reta l . Portanto, F é da forma $F = Ax_0^2 + Bx_0x_1 + Cx_1^2$, com $A \in K[x_0, \dots, x_3]$ e $B, C \in K[x_1, x_2, x_3]$ polinômios de grau $d - 2$. Efetuando uma simples contagem de monômios vemos que o posto do fibrado \mathcal{E}_d é dado por $rk(\mathcal{E}_d) = \binom{d+1}{3} + 2\binom{d}{2}$. Ou ainda, como a família de subesquemas de \mathbb{P}^3 definida pelo quadrado do ideal da reta l é plana, com polinômio de Hilbert constante $p_{\mathbb{W}'_{(2,4)}}(t) = 3t+1$, segue que $rk(\mathcal{E}_d) = \binom{d+3}{3} - p_{\mathbb{W}'_{(2,4)}}(d) = \binom{d+3}{3} - (3d+1)$. Daí segue que $\dim \Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d) = 4 + \binom{d+3}{3} - (3d+1) - 1$.

Para fixar as ideias tomamos $d = 3$, o que nos dá $\dim \Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, 3) = 13$ e $rk(\mathcal{E}_3) = 10$. Já a fibra de \mathcal{E}_3 sobre l , que consiste nas $F \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))$ com gradiente nulo ao longo de l , tem a decomposição em pesos dada por:

$$\mathcal{E}_{3_l} = x_0^3 + x_0^2x_1 + x_0^2x_2 + x_0^2x_3 + x_0x_1^2 + x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3$$

e, conseqüentemente, $-\mathcal{E}_{3_l}$ tem a decomposição em pesos dada por:

$$-\mathcal{E}_{3_l} = x_0x_2^2 + x_1x_2^2 + x_2^3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_0x_3^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_3^3,$$

onde $x_i^\alpha x_j^\beta x_k^\gamma$ indica o \mathbb{T} -espaço com peso $\alpha w_i + \beta w_j + \gamma w_k$.

A correspondente contribuição numérica referente a $c_4^l(-\mathcal{E}_3)$, utilizando os pesos em (2.5), é 3217978137. O ponto fixo escolhido produz a fração 3217978137/45864. A contribuição total dos seis pontos fixos fornece

$$\frac{3217978137}{45864} - \frac{2152229961}{17640} + \frac{774359841}{28665} + \frac{1227942219}{28665} - \frac{392711889}{17640} + \frac{218302833}{45864} = 504.$$

Este é o grau da subvariedade de \mathbb{P}^{19} consistindo nas superfícies de grau 3 em \mathbb{P}^3 que são singulares ao longo de alguma reta. Daí segue, por exemplo, que existem 504 "guarda-chuvas" de Whitney (Figura 2.1) passando por 13 pontos gerais (cf. Coray & Vainsencher [5]).

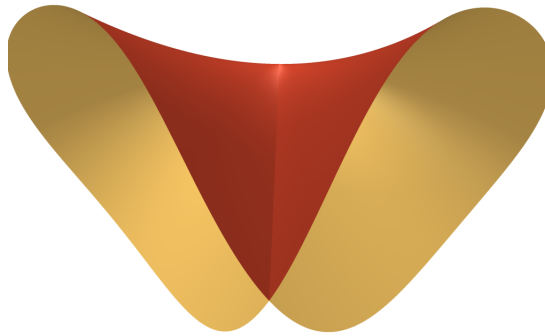


Figura 2.1: $x^2 = y^2z$

Como $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d)$ é um polinômio em d de grau menor do que ou igual $12(= 3 \times 4)$ (Vide Proposição 1.9) é suficiente encontrarmos o grau para 13 valores de d e interpolar

os resultados. No Apêndice D o leitor pode consultar um código para executar os cálculos acima usando o software Maple [24]. Encontramos a mesma expressão antecipada em (2.4) para o grau da subvariedade $\Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d}$ de superfícies em \mathbb{P}^3 de grau d singulares ao longo de alguma reta (variável). Observe que o grau em (2.4) é $(1 + 1) \times \dim(\mathbb{W}_{(2,4)})$.

2.2 Impondo um \mathbb{P}^k -linear como lugar singular de hipersuperfícies

Análogo ao caso de retas em \mathbb{P}^3 , consideremos hipersuperfícies singulares ao longo de um \mathbb{P}^k -linear em \mathbb{P}^n , $1 < k < n - 1$. Aqui, o espaço de parâmetros consiste na grassmanniana $\mathbb{G}(k + 1, n + 1)$. O nosso interesse é determinar o grau da família de hipersuperfícies de grau d singulares em algum membro de $\mathbb{G}(k + 1, n + 1)$, o qual vamos denotar por $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(k+1, n+1)}, d)$. No Apêndice D o leitor encontra os códigos utilizados para efetuar os cálculos necessários, utilizando a fórmula de resíduos de Bott, para obtenção do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(k+1, n+1)}, d)$. Abaixo listamos os resultados obtidos para $(k, n) = (2, 4), (2, 5)$ e $(3, 5)$.

$$\begin{aligned} \deg \Sigma(\mathbb{W}_{(3,5)}, d) &= \frac{1}{82944} d(d-1)(d+1)(d+2)(9d^{14} - 18d^{13} \\ &- 63d^{12} + 396d^{11} - 405d^{10} - 1530d^9 + 5328d^8 - 4176d^7 - 9414d^6 \\ &+ 27208d^5 - 24347d^4 - 4696d^3 + 36572d^2 - 32544d + 14400) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \deg \Sigma(\mathbb{W}_{(3,6)}, d) &= \frac{1}{4251528000} d(d-1)(d+1)(d+2) \\ &(12800d^{23} - 25600d^{22} - 224000d^{21} + 966400d^{20} + 520800d^{19} \\ &- 10632000d^{18} + 18128000d^{17} + 35186000d^{16} - 170677265d^{15} \\ &+ 145358830d^{14} + 449576760d^{13} - 1292773830d^{12} + 778144037d^{11} \\ &+ 2164141556d^{10} - 5208921230d^9 + 3728975455d^8 + 3332483181d^7 \\ &- 10452711042d^6 + 10781927010d^5 - 2523245175d^4 - 7609562253d^3 \\ &+ 11511503406d^2 - 8323547040d + 3637418400) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(4,6)}, d) &= \frac{1}{54358179840000} d(d-1)(d+2)(d+1)(1125d^{28} \\
&+ 15750d^{27} + 86625d^{26} + 168750d^{25} - 187875d^{24} - 38250d^{23} \\
&+ 8824725d^{22} + 23473350d^{21} - 32467725d^{20} - 128183670d^{19} \\
&\quad + 426415635d^{18} + 1377078570d^{17} - 2137554049d^{16} \\
&\quad - 7117020302d^{15} + 15925316455d^{14} + 37514746370d^{13} \\
&\quad - 82840806388d^{12} - 125157483544d^{11} + 422227932240d^{10} \\
&\quad + 287672117600d^9 - 1529648949952d^8 + 207120164224d^7 \\
&\quad + 4517312266240d^6 - 3047085731840d^5 - 6253154779136d^4 \\
&\quad + 11893749153792d^3 + 2911913902080d^2 \\
&\quad - 8455245004800d + 2378170368000)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Observe que novamente os graus em (2.7), (2.8) e 2.9), são iguais a $(k+1) \times \dim \mathbb{G}(k+1, n+1)$.

Capítulo 3

Superfícies singulares ao longo de curvas planas

A família, \mathbb{W}_m , de curvas planas de grau $m > 1$ em \mathbb{P}^3 é parametrizada por um \mathbb{P}^{N_m} -fibrado sobre $\check{\mathbb{P}}^3$

$$\mathcal{X}_m \rightarrow \check{\mathbb{P}}^3,$$

onde $N_m = \binom{m+2}{2} - 1$. De fato, tomemos a sequência tautológica de $\check{\mathbb{P}}^3$, o espaço projetivo dual:

$$\mathcal{S} = \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-1) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{Q}. \quad (3.1)$$

Temos que $\mathbb{W}_m = \mathbb{P}(S_m(\mathcal{Q}))$. E conseqüentemente, $\dim \mathbb{W}_m = N_m + 3$. A sequência tautológica sobre $\mathbb{W}_m = \mathbb{P}(S_m(\mathcal{Q}))$ é dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{W}_m}(-1) & \hookrightarrow & S_m(\mathcal{Q}) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{O}_{\check{\mathcal{Q}}}(m) \end{array}$$

Considere a curva universal C_m junto com o mapa de projeção π

$$\begin{array}{ccc} C_m \subset \mathbb{P}(\check{\mathcal{Q}}) \times_{\check{\mathbb{P}}^3} \overbrace{\mathbb{P}(S_m(\mathcal{Q}))}^{\mathbb{W}_m} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^3 \times \mathbb{W}_m \\ \pi \downarrow & & \\ \mathbb{W}_m & & \end{array}$$

Daí segue a sequência exata

$$S_{d-m}(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{W}_m}(-1) \twoheadrightarrow S_d(\mathcal{Q}) \twoheadrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{C_m}(d).$$

E por outro lado, temos

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) = \mathcal{O}_{\check{\mathcal{Q}}}(-1) & \twoheadrightarrow & \check{\mathcal{Q}} & \twoheadrightarrow & \mathbb{C}^4 \\ & \searrow & & & \downarrow \\ & & & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{c}
\mathcal{O}_{\mathbb{W}_m}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\check{\mathcal{Q}}}(d-k) \\
\downarrow \\
\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{\mathcal{Q}})|_{\mathbb{W}_m}}(d) \\
\downarrow \\
\mathcal{O}_{C_m}(d)
\end{array}$$

$$\left(\mathcal{I}_{C_m} / \mathcal{I}_{C_m}^2 \right) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d) \longrightarrow \left(\mathcal{O} / \mathcal{I}_{C_m}^2 \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{C_m}(d)$$

Agora, da seqüência conormal torcida por $\mathcal{O}_{C_m}(d)$, a saber

$$\left(\begin{array}{ccc}
(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\check{\mathcal{Q}}}(-1))|_{C_m} & & \\
\parallel & & \\
\check{\mathcal{N}}_{\mathbb{P}(\check{\mathcal{Q}})|_{\mathbb{P}^3}}|_{C_m} & \hookrightarrow & \check{\mathcal{N}}_{C_m}|_{\mathbb{P}^3_{\mathbb{W}_m}} \twoheadrightarrow \check{\mathcal{N}}_{C_m} \mathbb{P}(\check{\mathcal{Q}})_{\mathbb{W}_m}
\end{array} \right) \otimes \mathcal{O}_{C_m}(d)$$

segue que

$$\deg \Sigma(\mathbb{W}_m, d) = \int \text{chern}(N_m + 3, \mathcal{E}_d), \quad (3.2)$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_d = & (\mathcal{O}_{W_m}(-1) \otimes (S_{d-m}(\mathcal{Q}) - S_{d-2m}(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{W_m}(-1))) \oplus \\
& \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \otimes (S_{d-1}(\mathcal{Q}) - S_{d-1-m}(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{W_m}(-1)) \oplus \\
& (S_d(\mathcal{Q}) - S_{d-m}(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{W_m}(-1)).
\end{aligned}$$

No Apêndice B encontram-se os códigos para o cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_m, d)$, grau da família de superfícies de grau d singulares ao longo de uma curva plana de grau m , utilizando o pacote Schubert2 do Macaulay2 [17]. Por exemplo, para $m = 2$ encontramos

$$\begin{aligned}
\deg \Sigma(\mathbb{W}_2, d) = & \frac{1}{2580480} (d-2)(150903d^{15} - 3809754d^{14} \\
& + 44834472d^{13} - 317080224d^{12} + 1422290970d^{11} - 3579080844d^{10} \\
& - 455933988d^9 + 47928493544d^8 - 237841700217d^7 + 712127741206d^6 \\
& - 1498533401372d^5 + 2287674925704d^4 - 2504345972608d^3 \\
& + 1873638158208d^2 - 859900216320d + 182801203200)
\end{aligned} \quad (3.3)$$

para o grau da subvariedade $\Sigma(\mathbb{W}_2, d) \subset \mathbb{P}^{N_d}$ de superfícies de grau d singulares ao longo de alguma cônica (variável). Observe que o grau do polinômio em (3.3) é igual a $(1+1) \times \dim(\mathbb{W}_2)$.

O leitor interessado em obter $\deg \Sigma(\mathbb{W}_m, d)$ para outros valores de m , basta alterar seu valor no código do Apêndice B.

3.1 Impondo uma curva plana singular via Bott

Nesta seção, seguimos o mesmo princípio aplicado na seção 2.1.1 para obtermos o $\deg \Sigma(\mathbb{W}_m, d)$ via a fórmula de resíduos de Bott.

Tome, digamos, $\langle x_0, C_m \rangle \in \mathcal{X}_m$. Ponha $\overline{\mathcal{F}}_i = \mathcal{F}_i / \langle x_0 \mathcal{F}_{i-1} \rangle$ e considere o subespaço vetorial de polinômios homogêneos de grau d ,

$$x_0^2 \mathcal{F}_{d-2} + x_0 C_m \overline{\mathcal{F}}_{d-m-1} + C_m^2 \overline{\mathcal{F}}_{d-2m} \subset \mathcal{F}_d. \quad (3.4)$$

Seja F_d uma superfície em \mathbb{P}^3 de grau d singular ao longo da curva plana $\langle x_0, C_m \rangle$, ou seja, F_d pertence ao quadrado do ideal dessa curva e assim é um elemento do espaço vetorial definido em (3.4). Pela Proposição 1.9, para cada $d \gg 0$, obtemos um subfibrado $\mathcal{E}_d \subset \mathcal{X}_m \times \mathcal{F}_d$. Através de uma simples contagem de parâmetros em (3.4) vemos que o posto do fibrado \mathcal{E}_d é dado por

$$rk(\mathcal{E}_d) = \binom{d+1}{3} + \binom{d-m+1}{2} + \binom{d-2m+2}{2}. \quad (3.5)$$

Além disso, a projetivização $\mathbb{P}(\mathcal{E}_d)$ produz um mapa genericamente injetivo (ver Teorema 1.7)

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_d) \longrightarrow \mathbb{P}^{N_d}$$

com imagem, $\Sigma(\mathbb{W}_m, d) \subset \mathbb{P}^{N_d}$, a subvariedade formada pelas superfícies em \mathbb{P}^3 de grau d singulares ao longo de algum membro $W \in \mathbb{W}_m$. Daí segue que a dimensão de $\Sigma(\mathbb{W}_m, d)$ é dada por

$$\dim \Sigma(\mathbb{W}_m, d) = N_m + 3 + rk(\mathcal{E}_d) - 1. \quad (3.6)$$

Pelo Lema 1.2 temos que o grau de $\Sigma(\mathbb{W}_m, d)$ é dado por

$$\deg \Sigma(\mathbb{W}_m, d) = \int_{\mathbb{W}'_m} \text{Segre}(N_m + 3, \mathcal{E}_d). \quad (3.7)$$

Para o cálculo do grau em (3.7) utilizamos a fórmula de resíduos de Bott

$$\deg \Sigma(\mathbb{W}_m, d) = \int_{\mathbb{W}'_m} \text{Segre}(N_m + 3, \mathcal{E}_d) = \sum_f \frac{c_{N_m+3}^f(-\mathcal{E}_d)}{c_{N_m+3}^f(\mathcal{T}\mathbb{W}'_m)}. \quad (3.8)$$

Por exemplo, vamos analisar as contas para o caso de cônicas, $m = 2$. Assim, \mathbb{W}_2 , a família de cônicas em \mathbb{P}^3 , é parametrizada por um \mathbb{P}^5 -fibrado sobre $\check{\mathbb{P}}^3$

$$\mathcal{X}_2 \rightarrow \check{\mathbb{P}}^3,$$

o que nos dá $\dim \mathbb{W}_2 = 5 + 3 = 8$. Aqui o polinômio de Hilbert $p_{\mathbb{W}'_2}(t) = 6t - 3$ (quadrado

da cônica) e, conseqüentemente, o $rk(\mathcal{E}_d) = \binom{d+3}{3} - (6d - 3) = \binom{d+1}{3} + \binom{d-1}{2} + \binom{d-2}{2}$. O mapa $\mathbb{P}(\mathcal{E}_d) \rightarrow \mathbb{P}^{Nd}$ é genericamente injetivo para $d \geq 4$.

De modo análogo ao que fizemos para o cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d)$, tomamos o toro $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$ agindo diagonalmente sobre $(\mathbb{C}^4)^\vee$ via $t \circ x_i := t^{w_i} x_i$, com pesos apropriados, digamos:

$$w_0 = 11, w_1 = 17, w_2 = 32, w_3 = 55. \quad (3.9)$$

Tais pesos são escolhidos com a preocupação de não anular denominadores na aplicação da fórmula de Bott. A ação de \mathbb{T} induz uma ação natural sobre $\check{\mathbb{P}}^3$ de tal forma que os fibrados sobre este último sejam \mathbb{T} -equivariantes e com pontos fixos isolados. No caso de \mathbb{W}_2 , os pontos fixos são dados por $\langle x_i, x_j x_k \rangle, i \notin \{j, k\}$, o que nos fornece um total de 24 pontos fixos. Em geral, dado qualquer $m > 1$, o total de pontos fixos é $4 \times \binom{m+2}{2}$. A representação da fibra do denominador em (3.8), por exemplo no ponto fixo $f = \langle x_0, x_1^2 \rangle$, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_f \mathbb{W}_2 &= \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \otimes \langle x_0 \rangle^\vee + \langle x_1 x_2, x_1 x_3, x_2^2, x_2 x_3, x_3^2 \rangle \otimes \langle x_1^2 \rangle^\vee \\ &= \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_1 x_2}{x_1^2} + \frac{x_1 x_3}{x_1^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_2 x_3}{x_1^2} + \frac{x_3^2}{x_1^2}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde, digamos $\frac{x_2 x_3}{x_1^2}$, indica o \mathbb{T} -espaço com peso $w_2 + w_3 - 2w_1$.

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} c_8^f(\mathcal{T} \mathbb{W}_2) &= (w_1 - w_0)(w_2 - w_0)(w_3 - w_0)(w_2 - w_1) \\ &\quad (w_3 - w_1)(2w_2 - 2w_1)(w_2 + w_3 - 2w_1)(2w_3 - 2w_1), \end{aligned}$$

cujas contribuições numéricas com a escolha dos pesos em (3.9) nos fornece 381864067200.

Resta-nos determinar a contribuição numérica do numerador referente ao ponto fixo $f = \langle x_0, x_1^2 \rangle$. Fixamos, por exemplo $d = 4$. Neste caso, o posto do fibrado \mathcal{E}_4 é igual a 14, e a fibra sobre o ponto fixo $f = \langle x_0, x_1^2 \rangle$ tem a decomposição em pesos dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{4_f} &= x_0^4 + x_0^3 x_1 + x_0^2 x_1^2 + x_0 x_1^3 + x_1^4 + x_0^3 x_2 + x_0^2 x_1 x_2 + x_0 x_1^2 x_2 \\ &\quad + x_0^2 x_2^2 + x_0^3 x_3 + x_0^2 x_1 x_3 + x_0 x_1^2 x_3 + x_0^2 x_2 x_3 + x_0^3 x_3^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

e, conseqüentemente, a decomposição em pesos de $-\mathcal{E}_{4_f}$ é dada pelos monômios complementares,

$$\begin{aligned} -\mathcal{E}_{4_f} &= x_1^3 x_2 + x_0 x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + x_0 x_2^3 + x_1 x_2^3 + x_2^4 + x_1^3 x_3 \\ &\quad + x_0 x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3 + x_0 x_2^2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_2^3 x_3 \\ &\quad + x_0 x_1 x_3^2 + x_1^2 x_3^2 + x_0 x_2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + x_0 x_3^3 \\ &\quad + x_1 x_3^3 + x_2 x_3^3 + x_3^4. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A correspondente contribuição numérica referente a $c_8^f(-\mathcal{E}_4)$ é dada por 26219809342420614792105. O ponto fixo $f = \langle x_0, x_1^2 \rangle$ produz a fração 26219809342420614792105/381864067200. A

contribuição total dos 24 pontos fixos é

$$\begin{aligned}
& -\frac{8294254683787989619313}{1033322564736} + \frac{11480507816638689194433}{88599162960} - \frac{14346107840478803887953}{22095279360} \\
& + \frac{16213827152205024969825}{21115987200} - \frac{20531505056648637457965}{66503883600} + \frac{26219809342420614792105}{381864067200} \\
& + \frac{5140092469753813952921}{938689424640} - \frac{7188709550595989072715}{108659350800} + \frac{9956072891927111859681}{6396001920} \\
& - \frac{10279852364804860281657}{6382787040} + \frac{14535210787862565542283}{102263348880} - \frac{20933013157315975732425}{759177619200} \\
& - \frac{1535076342887470619756}{6643313994240} + \frac{2810740530320214286200}{138095496000} - \frac{3114225431344314975636}{102336030720} \\
& + \frac{5567673174379196709972}{48207882240} - \frac{6248256141284973091968}{35759465280} + \frac{7025744180090961243900}{100989504000} \\
& + \frac{550879843165884905497}{549474710400} - \frac{735813438864604392697}{29436145200} + \frac{830277686763712168477}{13736867760} \\
& - \frac{1000713635855169897697}{11213769600} + \frac{1137602715408000198097}{15699277440} - \frac{1297105409181088576537}{65936965248} \\
& = 151420.
\end{aligned}$$

Este é o grau da subvariedade $\Sigma(\mathbb{W}_2, 4) \subset \mathbb{P}^{N_4}$ consistindo nas superfícies de grau 4 que são singulares em alguma cônica (variável). Na figura 3.1 vemos o exemplo de uma quártica com uma cônica em seu lugar singular.

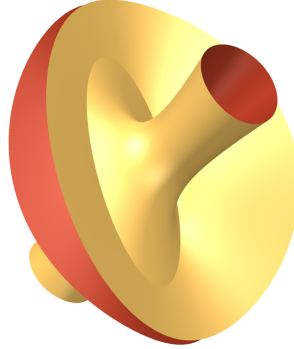


Figura 3.1: $-x^4 - 8x^2y^2 - 2xy^3 + 1/8y^4 + 6x^3z + x^2yz - 3xy^2z + 1/4y^3z - 6x^2z^2 - 3xyz^2 + 3/8y^2z^2 - xz^3 + 1/4yz^3 + 1/8z^4 - 2x^3 + x^2y - 2xy^2 + 1/4y^3 + 4x^2z - 3xyz + 1/2y^2z - xz^2 + 1/2yz^2 + 1/4z^3 + x^2 + 8xy - 7/8y^2 + 4xz - 3/4yz - 7/8z^2 - y - z + 2 = 0$

Além disso, vide Proposição 1.9, sabemos que $\deg \Sigma(\mathbb{W}_2, d)$ é um polinômio em d de grau menor do que ou igual a $24(= 3 \times 8)$. Isto nos diz que é suficiente obtermos os graus para 25 valores distintos de d e interpolar os resultados. No Apêndice E encontra-se à disposição do leitor um código para efetuar os cálculos acima com a utilização do software Macaulay2 [17]. Encontramos, como era de esperar, o mesmo resultado de (3.3).

O código do Apêndice E utilizado nas contas anteriores é facilmente adaptado para o cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_m, d)$ para qualquer outro valor de $m > 1$. No entanto, ao aumentar

o valor de m são necessárias mais iterações para obter o polinômio interpolador que dá o grau de $\Sigma(\mathbb{W}_m, d)$ e isto gera um custo computacional significativo. Por exemplo, para o caso $m = 3$ temos que $\dim \mathbb{W}_3 = 12$ e daí segue que é necessário o cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_3, d)$ para $37 (= 3 \times 12 + 1)$ valores distintos de d e depois efetuar a interpolação polinomial, o que fornece o resultado:

$$\begin{aligned}
\deg \Sigma(\mathbb{W}_3, d) = & \frac{1}{32699842560} (13286025d^{24} \\
& -1038081420d^{23} + 39146062158d^{22} - 946074434976d^{21} \\
& +16407919974303d^{20} - 216603408547548d^{19} + 2251372103607528d^{18} \\
& -18776305509313968d^{17} + 126579622223230407d^{16} \\
& -686155959955971780d^{15} + 2911999863446866566d^{14} \\
& -8886007643094113376d^{13} + 12799827743693355329d^{12} \\
& +50456388588134712812d^{11} - 483658040042985949724d^{10} \\
& +2229927488252098274992d^9 - 7358275057877141245584d^8 \\
& +18804143410678335462720d^7 - 38007885859704936084800d^6 \\
& +60658830486712279959808d^5 - 75133955486596446561280d^4 + \\
& 69793667761693681135616d^3 - 45744106516543857328128d^2 \\
& +18819557445986636267520d - 3636764182567924531200)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Novamente, observe que o grau em (3.13) é igual a $(1 + 1) \times \dim \mathbb{W}_3$.

Capítulo 4

Hipersuperfícies singulares ao longo de redes de quádricas do tipo determinantal

Neste capítulo tratamos do caso de hipersuperfícies em \mathbb{P}^n ($n = 3, 4, 5$) singulares ao longo de uma rede quádricas (variável) do tipo determinantal, isto é, gerada pelos menores 2×2 de uma matriz 3×2 de formas lineares. Especificamente, consideramos as famílias \mathbb{W}_{twc} de cúbicas reversas em \mathbb{P}^3 , \mathbb{W}_{rc} de cúbicas regradas em \mathbb{P}^4 e \mathbb{W}_{sg} de 3-variedades de Segre em \mathbb{P}^5 , para as quais aplicamos a fórmula de resíduos de Bott no cálculo do grau da família de hipersuperfícies de grau d que contém algum membro (variável) W da família (\mathbb{W}_{twc} , \mathbb{W}_{rg} ou \mathbb{W}_{sg}) em seu lugar singular.

4.1 Superfícies singulares ao longo de cúbicas reversa

Uma cúbica reversa é uma curva racional, suave de grau 3 em \mathbb{P}^3 . Seu polinômio de Hilbert é $3t + 1$. Piene & Schlessinger [28] mostraram que a componente \mathbb{W}_{twc} de cúbicas reversa do esquema de Hilbert $Hilb_{3t+1}(\mathbb{P}^3)$ é uma variedade projetiva suave de dimensão 12. Posteriormente, Ellingsrud, Piene & Strømme [14] provam que a subvariedade \mathbb{X} da Grassmanniana $G(3, \mathcal{F}_2)$ formada pelas redes de quádricas do tipo determinantal, isto é, gerada pelos menores 2×2 de uma matriz 3×2 de formas lineares, é uma variedade suave e que a componente \mathbb{W}_{twc} é a explosão de \mathbb{X} ao longo da subvariedade de redes com uma componente fixa, fato este também verificado por Vainsencher [32]. Ellingsrud & Strømme [13] mostraram que \mathbb{X} é um quociente geométrico da variedade de matrizes de formas lineares 2×3 semiestáveis. Essa descrição permite então o cálculo do Anel de Chow de \mathbb{X} e \mathbb{W}_{twc} . Vainsencher & Xavier [36] apresentam uma compactificação suave explícita de um espaço de parâmetros para a família de cúbicas reversa adequada para a aplicação da fórmula de Bott. No presente trabalho utilizamos a descrição dos pontos fixos e respectivos

tangentes explicitados em Ellingsrud & Strømme [11], [12], para aplicarmos a fórmula de resíduos de Bott no cálculo do grau de $\Sigma(\mathbb{W}_{twc}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d}$, a família de superfícies de grau d que contém algum membro $W \in \mathbb{W}_{twc}$ em seu lugar singular. Cabe ressaltar que o número de pontos fixos aumenta significativamente por conta da explosão adicional (vide Seção 4.1.2) necessária para a planificação da família formada pelos subesquemas de \mathbb{P}^3 definido por \mathcal{I}_W^2 para algum $W \in \mathbb{W}_{twc}$.

Mantendo a notação coerente com a seção 1.2, segue da Proposição 1.5 e Teorema 1.7 que para $d \gg 0$ existe um fibrado vetorial \mathcal{E}_d tal que $\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}_{twc}, d) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_d)$ e o grau

$$\deg \Sigma(\mathbb{W}_{twc}, d) = \int \text{Segre}(w, \mathcal{E}_d) \cap [\mathbb{W}'_{twc}], \quad (4.1)$$

onde $w = \dim(\mathbb{W}_{twc}) = 12$.

E pela fórmula de resíduos de Bott o grau em (4.1) é obtido por

$$\deg \Sigma(\mathbb{W}_{twc}, d) = \int_{\mathbb{W}'_{twc}} \text{Segre}(12, \mathcal{E}_d) = \sum_f \frac{c_{12}^f(-\mathcal{E}_d)}{c_{12}^f(\mathcal{T}\mathbb{W}'_{twc})}. \quad (4.2)$$

4.1.1 O espaço de parâmetros

No que segue fazemos um resumo da construção de \mathbb{W}_{twc} , diagrama (4.3), como descrito em Ellingsrud, Piene & Strømme [14] e Vainsencher [32]. Ponha $\mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$ a grassmanniana de redes de quádricas em \mathbb{P}^3 e \mathbb{X} a subvariedade de $\mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$ formada pelas redes de quádricas do tipo determinantal, isto é, gerada pelos menores 2×2 de uma matriz 3×2 de formas lineares. Temos que $\mathbb{W}_{twc} = \tilde{\mathbb{X}}$,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{W}_{twc} & = & \tilde{\mathbb{X}} & \supset & \tilde{\mathbb{E}} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2) & \supset & \mathbb{X} & \supset & Z & & \end{array} \quad (4.3)$$

onde $\tilde{\mathbb{X}}$ é a explosão de \mathbb{X} ao longo da subvariedade Z , esta última consistindo nas redes de quádricas determinantis com um plano fixado e um ponto imerso nesse plano, isto é, são da forma $L_0 \cdot \langle L_0, L_1, L_2 \rangle$ com $L_0 = 0$ a equação do plano e $L_0 = L_1 = L_2 = 0$ a equação do ponto imerso,

$$Z = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama de um plano com um ponto imerso} \\ \star \end{array} \right\}.$$

4.1.2 Aplicando Bott

Para a aplicação da fórmula de resíduos de Bott é necessário obter a contribuição numérica dos pontos fixos para uma escolha adequada da ação de um toro, tipicamente $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$ agindo diagonalmente sobre $(\mathbb{C}^4)^\vee$ via $t \circ x_i := t^{w_i} x_i$, com pesos apropriados, digamos:

$$w_0 = 11, w_1 = 17, w_2 = 32, w_3 = 55. \quad (4.4)$$

A ação de T induz ações naturais sobre $\mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$, $\mathbb{X} \subset \mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$ e $\tilde{\mathbb{X}}$ de tal forma que os pontos fixos resultam isolados.

No que segue fazemos uma descrição dos pontos fixos dessa ação, bem como a contribuição numérica do numerador e denominador em (4.2).

Pontos fixos em \mathbb{X}

De acordo com Ellingsrud & Stromme [12], os pontos fixos (isolados) da ação de \mathbb{T} induzida sobre \mathbb{X} são projetivamente equivalentes a um dos seguintes tipos:

- | | |
|--|---|
| (1) $\langle x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3 \rangle$ | (4) $\langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2 \rangle$ |
| (2) $\langle x_0x_1, x_1x_2, x_0x_2 \rangle$ | |
| (3) $\langle x_0x_1, x_2^2, x_0x_2 \rangle$ | (5) $\langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2 \rangle$ |

Observação 4.1. *Existem vários pontos fixos sobre cada classe de isomorfismo acima. De fato, verifica-se que permutando as variáveis de um dado \mathbb{P}^3 o número de pontos fixos do tipo (1) - (5) são, respectivamente, 12, 4, 24, 6 e 12*

Os pontos fixos que estão sobre o centro de explosão Z (vide diagrama (4.3)) são os do tipo (5). Deste modo, o centro de explosão Z contém 12 pontos fixos. Os demais 46 pontos fixos estão fora do centro de explosão Z e, sobre estes a contribuição é calculada sobre \mathbb{X} , ou seja, os divisores excepcionais não contribuem nestes pontos fixos. Portanto, temos contribuições imediatas para (4.2), ou seja, dado f em (1) - (4) temos:

$$f \Rightarrow \frac{c_{12}^f(-\mathcal{E}_d)}{c_{12}^f(\mathcal{T}\mathbb{X})},$$

onde o denominador $c_{12}^f(\mathcal{T}\mathbb{X})$ é o produto dos pesos da representação de $\mathbb{T}_f\mathbb{X}$ para cada um dos pontos fixos f em (1) - (4). De acordo com Ellingsrud & Stromme [12], Proposição 3.10, pág. 11, a representação de $\mathcal{T}_f\mathbb{X}$ para cada f do tipo (1) - (4) é dada por:

$$f \Rightarrow \mathcal{T}_f\mathbb{X} = \text{Hom}(F, E) \otimes (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) - \text{End}(E) - \text{End}(F) + 1 \quad (4.5)$$

onde as representações E e F são explicitadas na Tabela 4.1:

Tipo	\mathcal{I}_x	E	F
(1)	$\langle x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3 \rangle$	$x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3$	$x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3$
(1)	$\langle x_0x_1, x_1x_2, x_0x_2 \rangle$	$x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2$	$2x_0x_1x_2$
(3)	$\langle x_0x_1, x_2^2, x_0x_2 \rangle$	$x_0x_1 + x_2^2 + x_0x_2$	$x_0x_1x_2 + x_0x_2^2$
(4)	$\langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2 \rangle$	$x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2$	$x_0x_1^2 + x_0^2x_1$

Tabela 4.1: Representações de E e F

Intrinsecamente, E e F são descritos como $E = H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_x(2)) \subseteq H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$, $F = \text{Ker}(E \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \xrightarrow{\text{mult}} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}))$, onde \mathcal{I}_x indica o feixe ideal de uma cúbica reversa.

Observação 4.2. *Estamos cometendo um abuso de notação identificando x_i com o caracter λ_i sobre \mathbb{T} tal que para qualquer $t \in \mathbb{T}$ temos $t \cdot x_i = \lambda_i(t)x_i$. Assim, nas representações de E e F deveríamos trocar x_i por λ_i , mas para efeitos computacionais (vide Apêndice F) essa troca não causa confusão.*

Observação 4.3. *Outro ponto que merece destaque é o fato de que as mesmas representações dos espaços tangentes descritas na fórmula 4.5 podem ser obtidas utilizando os códigos no Apêndice G.1, onde basta alterarmos a variável n para 3.*

Tomando como exemplo o ponto fixo $f = \langle x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3 \rangle$ temos que a representação em (4.5) exprime-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_f\mathbb{X} &= \text{Hom}(x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3, x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3) \otimes (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) \\
&- \text{End}(x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3) - \text{End}(x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3) + 1 \\
&= (x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3)^\vee \otimes (x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3) \otimes (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) \\
&- (x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3)^\vee \otimes (x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3) \\
&- (x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3)^\vee \otimes (x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3) + 1 \\
&= \frac{x_0}{x_2} + \frac{x_0}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3^2}{x_0x_1} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_0^2}{x_2x_3} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_2}{x_3}
\end{aligned}$$

onde, por exemplo, $\frac{x_i}{x_j}$ indica o \mathbb{T} -espaço com peso $w_i - w_j$. A contribuição numérica do denominador em (4.6) é obtida como o produto dos pesos da representação acima.

Observação 4.4. *A contribuição numérica do numerador em (4.2) sobre cada ponto fixo será descrita na seção 4.1.2.*

Pontos fixos em $\tilde{\mathbb{X}}$

De acordo com Ellingsrud & Strømme [12] os pontos fixos do tipo (5), $f = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2 \rangle$, dão origem, a menos de equivalência projetiva, aos pontos fixos no divisor excepcional $\tilde{\mathbb{E}}$ listados a seguir:

$$(5.1) \quad \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2x_3 \rangle$$

$$(5.3) \quad \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_2^2x_3 \rangle$$

$$(5.2) \quad \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2^2 \rangle$$

$$(5.4) \quad \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_2^3 \rangle$$

Observação 4.5. *Verifica-se que permutando as variáveis de um dado \mathbb{P}^3 o número de pontos fixos dos tipos (5.1) - (5.4) são, respectivamente, 12, 24, 24, 24.*

Para os 84 pontos fixos provenientes de (5.1) - (5.4) a contribuição em (4.2) é calculada sobre $\tilde{\mathbb{X}}$ e, nestes casos, temos que considerar a contribuição dada pelo divisor excepcional $\tilde{\mathbb{E}}$. Sobre cada um dos pontos fixos f' do tipo (5.1) - (5.4) temos a contribuição

$$f' \Rightarrow \frac{c_{12}^{f'}(-\mathcal{E}_d)}{c_{12}^{f'}(\mathcal{T}_{f'}\tilde{\mathbb{X}})}. \quad (4.6)$$

De acordo com Ellingsrud & Strømme [12], Proposição 3.11, pág. 12, a representação de $\mathcal{T}_{f'}\tilde{\mathbb{X}}$ para cada um dos pontos fixos do tipo (5.1) - (5.4) é dada por

$$\mathcal{T}_{f'}\tilde{\mathbb{X}} = A + \mu^{-1}(B - \mu) + (x_0x_1x_2)^{-1}\mu, \quad (4.7)$$

onde μ é o caracter do gerador cúbico minimal, i.e, $x_1x_2x_3, x_1x_2^2, x_2^2x_3$ e x_2^3 , respectivamente, e $A = x_0^{-1}(x_1 + x_2 + x_3) + x_3(x_1^{-1} + x_2^{-1})$, $B = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_2^3 + x_2^2x_3$.

Por exemplo, para o ponto fixo $f' = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2x_3 \rangle$ a contribuição do denominador em (4.6) é obtida como o produto dos pesos da representação de $\mathcal{T}_{f'}\tilde{\mathbb{X}}$, onde:

$$\mathcal{T}_{f'}\tilde{\mathbb{X}} = \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{2x_3}{x_0} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1^2}{x_2x_3} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_2^2}{x_1x_3} + \frac{x_2}{x_1}. \quad (4.8)$$

Uma outra forma de analisarmos as contribuições dos pontos fixos no divisor excepcional $\tilde{\mathbb{E}} \subset \tilde{\mathbb{X}}$ da explosão de \mathbb{X} ao longo de Z é lembrarmos que este é a projetivização $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{X}})$ do fibrado normal $\mathcal{N}_{Z/\mathbb{X}}$. Este último é o quociente $\mathcal{T}_{\mathbb{X}}/\mathcal{T}_Z$. Assim, sobre cada ponto fixo $f \in Z$, a fibra $\tilde{\mathbb{E}}_f$ é o espaço projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}})$.

Observação 4.6. *Caso a decomposição do espaço normal $\mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}}$ apresente somente caracteres distintos, então em $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}})$ haverá somente um número finito de pontos fixos sobre o ponto fixo $f \in Z$, a saber, a dimensão de $\mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}}$.*

Agora, podemos calcular os espaços normais sobre cada um dos 12 pontos fixos do tipo (5), por exemplo, sobre $f = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2 \rangle$ temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}} &= \left(\frac{x_1^2}{x_0x_2} + 2\frac{x_1}{x_0} + 2\frac{x_2}{x_0} + \frac{x_2^2}{x_0x_1} + \frac{x_1x_3}{x_1x_2} + \frac{x_1x_3}{x_0x_2} + \frac{x_3}{x_1} + 2\frac{x_3}{x_0} + \frac{x_2x_3}{x_0x_1} \right) \\ &\quad - \left(\frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} \right) \\ &= \frac{x_1^2}{x_0x_2} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_2^2}{x_0x_1} + \frac{x_1x_3}{x_0x_2} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_2x_3}{x_0x_1} \end{aligned}$$

De modo análogo, efetuando o cálculo sobre os demais 11 pontos fixos, verificamos que a \mathbb{T} -ação induzida sobre $\widetilde{\mathbb{X}}$ tem um número finito de pontos fixos, ao todo $84 = (7 \times 12)$.

Agora, precisamos estudar o espaço tangente $\mathcal{T}_{f'}\widetilde{\mathbb{X}}$ em um ponto fixo f' do divisor excepcional, na fibra sobre $f \in Z$. Este espaço é dado pela decomposição

$$\mathcal{T}_{f'}\widetilde{\mathbb{X}} = \mathcal{L}_{f'} \oplus \mathcal{T}_f Z \oplus \mathcal{T}_{[\mathcal{L}_{f'}]} \mathbb{P}(\mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}}), \quad (4.9)$$

onde $\mathcal{L}_{f'}$ é a reta representada pelo ponto f' no espaço projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}})$. Assim, por exemplo, sobre o ponto fixo $f = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2 \rangle \in Z$ para o qual já obtemos a expressão

$$N_{fZ/\mathbb{X}} = \frac{x_1^2}{x_0x_2} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_2^2}{x_0x_1} + \frac{x_1x_3}{x_0x_2} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_2x_3}{x_0x_1}$$

segue que temos 7 pontos fixos, um para cada auto-espaço que aparece na decomposição acima. Tomando para f' o ponto correspondente ao auto-espaço com caracter $\frac{x_3}{x_0}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f'}\widetilde{\mathbb{X}} &= \left(\frac{x_3}{x_0} \right) + \left(\frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} \right) \\ &+ \left(\frac{x_1^2}{x_0x_2} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_2^2}{x_0x_1} + \frac{x_1x_3}{x_0x_2} + \frac{x_2x_3}{x_0x_1} \right) \otimes \left(\frac{x_3}{x_0} \right)^\vee \\ &= \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + 2\frac{x_3}{x_0} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1^2}{x_2x_3} + \frac{x_1}{x_3} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_2^2}{x_1x_3} + \frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

Note que a representação acima é a mesma que aparece em 4.8.

Por outro lado, em Vainsencher [32] temos a descrição geométrica do divisor excepcional $\widetilde{\mathbb{E}}_f$ como o espaço projetivo de curvas cúbicas no plano $x_0 = 0$ singulares no ponto $(0 : 0 : 0 : 1)$, ou seja, $\widetilde{\mathbb{E}}_f$ é a projetivização do espaço gerado pelas formas cúbicas $x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3, x_1^2x_3, x_1x_2x_3, x_2^2x_3$. Por comparação direta da auto-decomposição dos espaços tangentes obtemos

$$x_1^3 \leftrightarrow \frac{x_1^2}{x_0x_2}, \quad x_1^2x_2 \leftrightarrow \frac{x_1}{x_0}, \quad x_2^3 \leftrightarrow \frac{x_2^2}{x_0x_1}, \quad x_1^2x_3 \leftrightarrow \frac{x_1x_3}{x_0x_2}, \quad x_1x_2x_3 \leftrightarrow \frac{x_3}{x_0}, \quad x_2^2x_3 \leftrightarrow \frac{x_2x_3}{x_0x_1}.$$

De modo análogo, procedemos a análise das contribuições sobre cada um dos 84 pontos fixos provenientes do tipo (5) em $\widetilde{\mathbb{X}}$, bem como sobre os demais 46 pontos dos tipos (1) - (4). O cálculo efetivo das contribuições é realizado utilizando os códigos escritos no Macaulay2, [17], listados no Apêndice F.

Fibras de \mathcal{E}_d

Precisamos agora determinar a contribuição numérica do numerador em (4.2), o que exige o conhecimento da representação da fibra de \mathcal{E}_d sobre cada um dos pontos fixos. Temos que a família formada pelos subesquemas de \mathbb{P}^3 definido por \mathcal{I}_W^2 para algum $W \in \mathbb{W}_{twc}$ não é plana. De fato, o ponto fixo do tipo (4) $\langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2 \rangle$ é um membro de \mathbb{W}_{twc} (polinômio de Hilbert $p_{\mathbb{W}_{twc}}(t) = 3t + 1$), mas seu quadrado tem polinômio de Hilbert

"ruim", a saber $p_{\mathbb{W}_{twc}} = 10t - 10$, onde o esperado é $9t - 7$. O locus dos pontos fixos do tipo (4), o qual vamos denotar por \mathbb{G} , é a variedade contida em \mathbb{W}_{twc} obtida como imagem da Grassmanniana de retas em \mathbb{P}^3 , $\mathbb{G}(2, 4)$, via o mapa $\rho : \mathbb{G}(2, 4) \rightarrow \mathbb{W}_{twc}$ que associa a cada reta $l \in \mathbb{G}(2, 4)$ a cúbica reversa degenerada obtida como o quadrado do ideal definindo l . Cabe ressaltar que \mathbb{G} é disjunta do centro de explosão Z (vide diagrama 4.3), assim para uma eventual explosão de \mathbb{W}_{twc} ao longo de \mathbb{G} podemos nos restringir a $\mathbb{X} \subset \mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$ a variedade de rede de quádricas do tipo determinantal. As contas locais mostram que \mathbb{G} é o lugar de indeterminação do mapa $\mathbb{X} \dashrightarrow \mathbb{G}(6, \mathcal{F}_4)$ definido por $(q_1, q_2, q_3) \dashrightarrow (q_1, q_2, q_3)^2$.

Por exemplo, os pontos fixos do tipo (4): $\langle x_i^2, x_i x_j, x_j^2 \rangle$, são mapeados em $\langle x_i^4, x_i^3 x_j, x_i^2 x_j^2, x_i x_j^3, x_j^4 \rangle$. Observe que temos somente 5 monômios de grau 4, onde o esperado é $6 = \binom{4+3}{3} - (9 \times 4 - 7)$, indicando uma queda de posto do mapa em questão. Assim, para obtermos de fato um fibrado no caso $d = 4$ precisamos resolver a indeterminação do mapa, o que será efetivado na sequência.

Sejam \mathcal{C} o subfibrado tautológico de posto 3 da grassmanniana de redes de quádricas $\mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$ e \mathcal{D} o subfibrado tautológico de posto 6 da variedade grassmanniana de subespaços 6-dimensional do espaço de formas quárticas $\mathbb{G}(6, \mathcal{F}_4)$.

Proposição 4.7. *Seja $\mu : \mathcal{S}_2(\mathcal{C})|_{\mathbb{X}} \rightarrow \mathcal{D}$ o mapa natural induzido por multiplicação. O posto de μ fora de \mathbb{G} é 6 (seis) e \mathbb{G} é o esquema de zeros de $\overset{6}{\wedge} \mu$.*

Demonstração. Denote por \mathfrak{Z} o esquema de zeros em questão. Temos que a inclusão $\mathbb{G} \subset \mathfrak{Z}$ é imediata. Seja $o = (x_0^2, x_0 x_1, x_1^2)$ um representante da órbita fechada de \mathbb{G} dado como o ideal gerado pelos menores 2×2 da matriz

$$u = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ x_1 & x_0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Mostraremos a igualdade sobre os espaços tangentes $\mathcal{T}_o \mathbb{G} = \mathcal{T}_o \mathfrak{Z}$. Isto implica que \mathbb{G} é a única componente de \mathfrak{Z} através de o . Como \mathfrak{Z} é GL_4 -invariante, qualquer componente precisa conter a única órbita fechada e, deste modo, $\mathbb{G} = \mathfrak{Z}$ como afirmado. Observe que é suficiente verificarmos que

$$\dim \mathcal{T}_o \mathbb{G} \geq \dim \mathcal{T}_o \mathfrak{Z}.$$

Assim, precisamos apenas mostrar que o ideal de \mathfrak{Z} em uma vizinhança do ponto o contém codim \mathbb{G} elementos com termos lineares independentes. Para o cálculo de $\mathcal{T}_o \mathfrak{Z}$ precisamos escolher coordenadas. Para isso, c.f. Vainsencher [32], Proposição 1.2, pág. 83, temos que o mapa de fibrados sobre $\mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$ induzido por multiplicação $\lambda : \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_3$ tem posto menor do que ou igual a 10.

Sejam $\mathcal{U} = \mathbb{A}^{21}$ a vizinhança afim padrão de o com funções coordenadas a_{ij} , $i = 1, 2, 3$

e $j = 1, \dots, 7$, o que nos fornece

$$\begin{aligned} V_1 &= x_0^2 + a_{1,1}x_0x_2 + a_{1,2}x_0x_3 + a_{1,3}x_1x_2 + a_{1,4}x_1x_3 + a_{1,5}x_2^2 + a_{1,6}x_2x_3 + a_{1,7}x_3^2 \\ V_2 &= x_0x_1 + a_{2,1}x_0x_2 + a_{2,2}x_0x_3 + a_{2,3}x_1x_2 + a_{2,4}x_1x_3 + a_{2,5}x_2^2 + a_{2,6}x_2x_3 + a_{2,7}x_3^2 \\ V_3 &= x_1^2 + a_{3,1}x_0x_2 + a_{3,2}x_0x_3 + a_{3,3}x_1x_2 + a_{3,4}x_1x_3 + a_{3,5}x_2^2 + a_{3,6}x_2x_3 + a_{3,7}x_3^2 \end{aligned}$$

Agora, impondo a condição de posto explicitada acima (vide Apêndice F.1 para as contas locais feitas no Singular [9]), obtemos

$$\begin{aligned} V'_1 &= x_0^2 + a_{1,1}x_0x_2 + a_{1,3}x_1x_2 + (-a_{1,3}a_{2,1} + a_{1,1}a_{2,3} - a_{2,3}^2 + a_{1,3}a_{3,3})x_2^2 + a_{1,2}x_0x_3 + \\ &\quad a_{1,4}x_1x_3 + (-a_{1,4}a_{2,1} - a_{1,3}a_{2,2} + a_{1,2}a_{2,3} + a_{1,1}a_{2,4} - 2a_{2,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{3,3} + \\ &\quad a_{1,3}a_{3,4})x_2x_3 + (-a_{1,4}a_{2,2} + a_{1,2}a_{2,4} - a_{2,4}^2 + a_{1,4}a_{3,4})x_3^2 \\ V'_2 &= x_0x_1 + a_{2,1}x_0x_2 + a_{2,3}x_1x_2 + (a_{2,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{3,1})x_2^2 + a_{2,2}x_0x_3 + a_{2,4}x_1x_3 + (a_{2,2}a_{2,3} + \\ &\quad a_{2,1}a_{2,4} - a_{1,4}a_{3,1} - a_{1,3}a_{3,2})x_2x_3 + (a_{2,2}a_{2,4} - a_{1,4}a_{3,2})x_3^2 \\ V'_3 &= x_1^2 + a_{3,1}x_0x_2 + a_{3,3}x_1x_2 + (-a_{2,1}^2 + a_{1,1}a_{3,1} - a_{2,3}a_{3,1} + a_{2,1}a_{3,3})x_2^2 + a_{3,2}x_0x_3 + \\ &\quad a_{3,4}x_1x_3 + (-2a_{2,1}a_{2,2} + a_{1,2}a_{3,1} - a_{2,4}a_{3,1} + a_{1,1}a_{3,2} - a_{2,3}a_{3,2} + a_{2,2}a_{3,3} + \\ &\quad a_{2,1}a_{3,4})x_2x_3 + (-a_{2,2}^2 + a_{1,2}a_{3,2} - a_{2,4}a_{3,2} + a_{2,2}a_{3,4})x_3^2 \end{aligned}$$

o que nos fornece uma base para a restrição (trivial) do fibrado tautológico \mathcal{C} à vizinhança de (x_0^2, x_0x_1, x_1^2) . Note que aparecem somente 12 ($= \dim W_{twc}$) indeterminadas: $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{2,4}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, a_{3,4}$. Denotamos por

$$\mathcal{I} = \langle a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{2,4}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, a_{3,4} \rangle$$

o ideal gerado por essas indeterminadas.

Consideremos na sequência uma matriz de representação local de μ adequada para o cálculo de $\bigwedge^6 \mu$. Para isso, escolhendo bases adequadas para $\mathcal{S}_2(\mathcal{C})$ e \mathcal{F}_4 , segue que a representação local de μ , a menos de operações elementares nas linhas, toma a forma

$$\begin{pmatrix} J & A \\ B & C \end{pmatrix}_{6 \times 35},$$

onde J é uma matriz bloco 5×5 cujas entradas ao longo da diagonal principal são todas iguais a um. Efetuando operações elementares nas linhas módulo \mathcal{I}^2 , obtemos uma matriz na forma

$$\begin{pmatrix} J' & A' \\ 0 & C' \end{pmatrix}_{6 \times 35},$$

onde J' é uma matriz triangular superior de mesmo tamanho que J e com entradas na diagonal principal ainda igual a um.

A matriz $C'_{1 \times 35}$ contém as seguintes entradas módulo quadrados, em que entre parênteses indicamos os monômios correspondentes a cada coluna:

$$\begin{aligned} & -a_{3,1}(x_0^3x_2), -a_{3,2}(x_0^3x_3), (2a_{2,1} - a_{3,3})(x_0^2x_1x_2) \\ & (2a_{2,2} - a_{3,4})(x_0^2x_1x_3), (-a_{1,1} + 2a_{2,3})(x_0x_1^2x_2), \\ & (-a_{1,2} + 2a_{2,4})(x_0x_1^2x_3) - a_{1,3}(x_1^3x_2), -a_{1,4}(x_1^3x_3) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Isto mostra que $\mathcal{T}_o\mathfrak{Z}$ é de dimensão no máximo $12 - 8 = 4 = \dim \mathbb{G}$. \square

Observação 4.8. Denotemos por $\mathcal{F}_i^{(L)^j}$ o espaço de formas de grau i que se anulam sobre $(L)^j$, onde (L) indica o ideal definindo a reta L . Os monômios aparecendo em (4.10) formam uma base para o espaço de formas quárticas $\mathcal{F}_3^{(x_0, x_1)^3} \cdot \mathcal{F}_1$ módulo o espaço $\mathcal{F}_4^{(x_0, x_1)^4}$. O seu significado geométrico será esclarecido na Proposição 4.10.

A próxima proposição traz à luz o fibrado de formas quárticas. Para uma rede de quádricas $\pi = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{G}$, o espaço de formas quárticas $\mathcal{D}_\pi = \pi^2$ é de posto correto 6. Explodir \mathbb{X} ao longo de \mathbb{G} permite-nos estender a família $(\mathcal{D}_\pi)_{\pi \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{G}}$ sobre uma compactificação suave $\widehat{\mathbb{X}}$ de $\mathbb{X} \setminus \mathbb{G}$

Proposição 4.9. Considere o diagrama de explosão de \mathbb{X} ao longo de \mathbb{G}

$$\begin{array}{ccccc} & & \widehat{\mathbb{X}} & \supset & \widehat{\mathbb{E}} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2) & \supset & \mathbb{X} & \supset & \mathbb{G} \end{array} \quad (4.11)$$

Então $\widehat{\mathbb{X}}$ mergulha em $\mathbb{X} \times \mathbb{G}(6, \mathcal{F}_4)$ de tal forma que o pullback \mathcal{D} do subfibrado tautológico de posto 6 de \mathcal{F}_4 contém a imagem de $\mu_{\widehat{\mathbb{X}}}$.

Demonstração. O mapa racional $\mathbb{X} \dashrightarrow \mathbb{G}(6, \mathcal{F}_4)$ definido por μ , em vista da Proposição 4.7, estende a um morfismo $\widehat{\mathbb{X}} \rightarrow \mathbb{G}(6, \mathcal{F}_4)$. Assim, temos que seu gráfico produz o mergulho desejado. \square

A seguir descrevemos as fibras do fibrado \mathcal{Q} de formas quárticas sobre o divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$.

Proposição 4.10. Sejam $L = (H, H')$ uma reta, $\mathcal{F}_i^{(L)^i}$ o espaço de formas de grau i que se anulam sobre $(H, H')^i$. Dado $\widehat{e} \in \widehat{\mathbb{E}}$ na fibra sobre $e = (H^2, H \cdot H', H'^2) \in \mathbb{G}$ temos que

$$\mathcal{Q}_{\widehat{e}} = \mathcal{F}_4^{(L)^4} + \langle Q \rangle,$$

para alguma $Q \in \mathbb{P} \left(\frac{\mathcal{F}_3^{(L)^3} \cdot \mathcal{F}}{\mathcal{F}_4^{(L)^4}} \right)$.

Demonstração. Seja $e = (x_0^2, x_0x_1, x_1^2)$ um representante da órbita de \mathbb{G} . Ponha $L = (x_0, x_1)$. Temos que a imagem de μ_e é igual a $\mathcal{F}_4^{(L)^4}$. Agora, qualquer $Q \in \mathcal{F}_3^{(L)^3} \cdot \mathcal{F}$ pode

ser escrito na forma $x_0^2Q_1 - 2x_0x_1Q_2 + x_1^2Q_3$ para $Q_i \in \mathcal{F}_2$ adequadas. Forme a família a um parâmetro de redes de quádricas

$$\gamma_t = \langle x_0^2 + tQ_3, x_0x_1 + tQ_2, x_1^2 + tQ_1 \rangle, t \in \mathbb{A}^1.$$

Temos que a imagem de μ_{γ_t} é um espaço de formas quárticas que contém $t(x_0^2Q_1 - 2x_0x_1Q_2 + x_1^2Q_3)$. Assim, ela contém Q para todo t não nulo. Deste modo, se $Q \neq 0$ módulo $\mathcal{F}_4^{(L)^4}$ segue que o espaço de formas quárticas $\mathcal{F}_4^{(L)^4} + \langle Q \rangle$ é igual a segunda coordenada de algum ponto em $\widehat{\mathbb{E}}$ estando sobre e . Isto mostra que a imagem do mergulho natural

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{\mathcal{F}_3^{(L)^3} \cdot \mathcal{F}}{\mathcal{F}_4^{(L)^4}} \right) &\hookrightarrow \mathbb{G}(6, \mathcal{F}_4) \\ Q &\longmapsto \mathcal{F}_4^{(L)^4} + \langle Q \rangle \end{aligned}$$

está contido na imagem da fibra de $\widehat{\mathbb{E}}$ sobre e . E como as dimensões são as mesmas, segue a fórmula desejada. \square

Observação 4.11. *Mantendo em mente a inclusão $\widehat{\mathbb{X}} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{G}(6, \mathcal{F}_4)$ um ponto em $\widehat{\mathbb{X}}$ pode ser representado por um par (π, ω) consistindo de uma rede de quádricas do tipo determinantal e um espaço de quárticas, o qual, pela Proposição 4.10, para $\pi = (L)^2 \in \mathbb{G}$ é da forma $\mathcal{F}_4^{(L)^4} + \langle Q \rangle$ para uma única $Q \in \mathbb{P} \left(\frac{\mathcal{F}_3^{(L)^3} \cdot \mathcal{F}}{\mathcal{F}_4^{(L)^4}} \right)$. Portanto, um ponto $e' \in \widehat{\mathbb{E}}$ pode ser escrito como $\langle (L)^2, Q \rangle$.*

Passamos agora a descrever as contribuições dos pontos fixos no divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$ da explosão de \mathbb{X} ao longo de \mathbb{G} . Sobre cada ponto fixo $f \in \mathbb{G}$, a fibra $\widehat{\mathbb{E}}_f$ é o espaço projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{f\mathbb{G}/\mathbb{X}})$. Assim, calculando os espaços normais sobre cada um dos 6 pontos fixos do tipo (4), por exemplo, sobre $f = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2 \rangle$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{f\mathbb{G}/\mathbb{X}} &= \left(\frac{x_0x_2}{x_1^2} + \frac{2x_2}{x_1} + \frac{2x_2}{x_0} + \frac{x_1x_2}{x_0^2} + \frac{x_0x_3}{x_1^2} + \frac{2x_3}{x_1} + \frac{2x_3}{x_0} + \frac{x_1x_3}{x_0^2} \right) - \left(\frac{x_2}{x_0} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_3}{x_1} \right) \\ &= \frac{x_0x_2}{x_1^2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_1x_2}{x_0^2} + \frac{x_0x_3}{x_1^2} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_1x_3}{x_0^2} \end{aligned}$$

Note que a decomposição do espaço normal apresenta somente caracteres distintos, ao todo 8 ($= \dim \mathcal{N}_{f\mathbb{G}/\mathbb{X}}$). Assim, em $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{f\mathbb{G}/\mathbb{X}})$ teremos 8 pontos fixos sobre f . A mesma verificação pode ser realizada sobre os demais 5 pontos fixos em \mathbb{G} , totalizando 48 ($= 6 \times 8$) pontos fixos sobre o divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$.

Para obtermos a contribuição do denominador em $\frac{c_{12}^{f'}(-\mathcal{E}_d)}{c_{12}^{f'}(\mathcal{T}_{f'}\widehat{\mathbb{X}})}$ sobre um ponto fixo f' do divisor excepcional na fibra sobre $f \in \mathbb{G}$, precisamos estudar o espaço tangente $\mathcal{T}_{f'}\widehat{\mathbb{X}}$. Por exemplo, sobre o ponto fixo $f = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2 \rangle \in \mathbb{G}$ temos 8 pontos fixos, um para cada auto-espaço que aparece na decomposição do fibrado normal $\mathcal{N}_{f\mathbb{G}/\mathbb{X}}$. Tomando para f' o ponto fixo correspondente ao auto-espaço com caracter $\frac{x_0x_2}{x_1^2}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{f'}\widehat{\mathbb{X}} &= \left(\frac{x_0x_2}{x_1^2} \right) + \left(\frac{x_2}{x_0} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_3}{x_1} \right) \\
&+ \left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_1x_2}{x_0^2} + \frac{x_0x_3}{x_1^2} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_1x_3}{x_0^2} \right) \otimes \left(\frac{x_0x_2}{x_1^2} \right)^\vee \\
&= \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_1^2}{x_0^2} + \frac{x_1^3}{x_0^3} + \frac{x_0x_2}{x_1^2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1x_3}{x_0x_2} + \frac{x_1^2x_3}{x_0^2x_2} + \frac{x_1^3x_3}{x_0^3x_2} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_0}
\end{aligned}$$

E para a contribuição numérica do denominador em $\frac{c_{12}^{f'}(-\mathcal{E}_d)}{c_{12}^{f'}(\mathcal{T}_{f'}\widehat{\mathbb{X}})}$, obtemos o produto dos pesos da representação acima. De modo análogo, obtemos a contribuição numérica do denominador para todos os 48 pontos fixos sobre o divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$. Para os demais pontos fixos dos tipos (1) - (3) e (5.1) - (5.4) que estão fora do centro de explosão \mathbb{G} as contribuições do denominador em (4.2) podem ser calculadas pelas fórmulas expressas em (4.5) e (4.7).

Por outro lado, pela descrição da Proposição 4.10, temos que \widehat{E}_f é a projetivização do espaço gerado pelas formas quárticas $x_0^3x_2, x_0^2x_1x_2, x_0x_1^2x_2, x_1^3x_2, x_0^3x_3, x_0^2x_1x_3, x_0x_1^2x_3, x_1^3x_3$. E por comparação direta da auto-decomposição dos espaços tangentes segue que

$$\begin{aligned}
x_0^3x_2 &\leftrightarrow \frac{x_0x_2}{x_1^2}, x_0^2x_1x_2 \leftrightarrow \frac{x_2}{x_1}, x_0x_1^2x_2 \leftrightarrow \frac{x_2}{x_0}, x_1^3x_2 \leftrightarrow \frac{x_1x_2}{x_0^2}, \\
x_0^3x_3 &\leftrightarrow \frac{x_0x_3}{x_1^2}, x_0^2x_1x_3 \leftrightarrow \frac{x_3}{x_1}, x_0x_1^2x_3 \leftrightarrow \frac{x_3}{x_0}, x_1^3x_3 \leftrightarrow \frac{x_1x_3}{x_0^2}
\end{aligned}$$

Daí segue que podemos identificar cada um dos pontos fixos em \mathbb{W}' provenientes de $f = \langle x_i^2, x_ix_j, x_j^2 \rangle \in \mathbb{G}$, como:

$$f' = \langle x_i^4, x_i^3x_j, x_i^2x_j^2, x_ix_j^3, x_j^4, [Q] \rangle, \quad (4.12)$$

onde $[Q]$ indica a classe de uma das formas de grau 4:

$$x_i^3x_k, x_i^2x_jx_k, x_ix_j^2x_k, x_j^3x_k, x_i^3x_l, x_i^2x_jx_l, x_ix_j^2x_l, x_j^3x_l, \quad (4.13)$$

que corresponde aos geradores monomiais da fibra do divisor excepcional (vide Proposição 4.10).

Observação 4.12. *Cada um dos ideais da forma (4.12) possui polinômio de Hilbert igual a $9t - 7$, bem como os ideais obtidos como quadrado dos ideais do tipo (1) - (3) e (5.1) - (5.4).*

Em resumo, indicamos na Tabela 4.2 cada um dos tipos de classe de isomorfismo de pontos fixos em \mathbb{W}_{twc} e os correspondentes pontos em \mathbb{W}' , bem como o número de pontos fixos em cada classe.

Em referência a Tabela 4.2, os pontos fixos em \mathbb{W}' do tipo (1) - (4) são 4-regular no sentido de Castelnuovo-Mumford, ao passo que os pontos fixos do tipo (5.1) - (5.4) são

Tipo	Pontos fixos em \mathbb{W}_{twc}	Pontos fixos em \mathbb{W}'_{twc}	# pontos
(1)	$\langle x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3 \rangle$	$\langle x_2^2x_3^2, x_1x_2^2x_3, x_0x_1x_2x_3, x_1^2x_2^2, x_0x_1^2x_2, x_0^2x_1^2 \rangle$	12
(2)	$\langle x_0x_1, x_1x_2, x_0x_2 \rangle$	$\langle x_1^2x_2^2, x_0x_1x_2^2, x_0^2x_2^2, x_0x_1^2x_2, x_0^2x_1x_2, x_0^2x_1^2 \rangle$	4
(3)	$\langle x_0x_1, x_2^2, x_0x_2 \rangle$	$\langle x_2^4, x_0x_2^3, x_0x_1x_2^2, x_0^2x_2^2, x_0^2x_1x_2, x_0^2x_1^2 \rangle$	24
(4)	$\langle x_i^2, x_ix_j, x_j^2 \rangle$	$\langle x_i^4, x_i^3x_j, x_i^2x_j^2, x_ix_j^3, x_j^4, [Q] \rangle$	48 (= 6 × 8)
(5.1)	$\langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2x_3 \rangle$	$\langle x_0^2x_2^2, x_0^2x_1x_2, x_0^3x_2, x_0^2x_1^2, x_0^3x_1, x_0^4, x_0x_1x_2^2x_3, x_0x_1^2x_2x_3, x_1^2x_2^2x_3^2 \rangle$	12
(5.2)	$\langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2^2 \rangle$	$\langle x_0^2x_2^2, x_0^2x_1x_2, x_0^3x_2, x_0^2x_1^2, x_0^3x_1, x_0^4, x_0x_1x_2^3, x_0x_1^2x_2^2, x_1^2x_2^4 \rangle$	24
(5.3)	$\langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_2^2x_3 \rangle$	$\langle x_0^2x_2^2, x_0^2x_1x_2, x_0^3x_2, x_0^2x_1^2, x_0^3x_1, x_0^4, x_0x_2^3x_3, x_0x_1x_2^2x_3, x_2^4x_3^2 \rangle$	24
(5.4)	$\langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_2^3 \rangle$	$\langle x_0^2x_2^2, x_0^2x_1x_2, x_0^3x_2, x_0^2x_1^2, x_0^3x_1, x_0^4, x_0x_2^4, x_0x_1x_2^3, x_2^5 \rangle$	24
Total de pontos fixos			172

Tabela 4.2: Pontos fixos em \mathbb{W}_{twc}

6-regular e por semi-continuidade de cohomologia (Hartshorne [19], Teorema 12.8) segue que qualquer feixe ideal correspondendo a um ponto em \mathbb{W}' é 6-regular. A seguir veremos como essa informação se traduz na obtenção da representação das fibras de \mathcal{E}_d .

Para $d = 4$ temos que o posto do fibrado \mathcal{E}_4 é dado por $rk(\mathcal{E}_4) = \binom{4+3}{3} - (9 \times 4 - 7) = 6$ e assim, para obtermos a representação da fibra de \mathcal{E}_4 sobre cada um dos pontos fixos da Tabela 4.2, basta tomarmos os 6 monômios de grau 4 que aparecem no ideal de cada um dos pontos fixos. Por exemplo, tomando $f = \langle x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3 \rangle$ a representação da fibra \mathcal{E}_{4_f} é dada por

$$\mathcal{E}_{4_f} = x_2^2x_3^2 + x_1x_2^2x_3 + x_0x_1x_2x_3 + x_1^2x_2^2 + x_0x_1^2x_2 + x_0^2x_1^2,$$

onde os monômios indicam os geradores do espaço de formas de grau 4 com gradiente nulo sobre f e $x_0^{\alpha_0}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}$ indica o \mathbb{T} -espaço com pesos $\alpha_0w_0 + \alpha_1w_1 + \alpha_2w_2 + \alpha_3w_3$.

Na Figura 4.1 vemos um exemplo de uma superfície quártica singular ao longo de uma cúbica reversa.

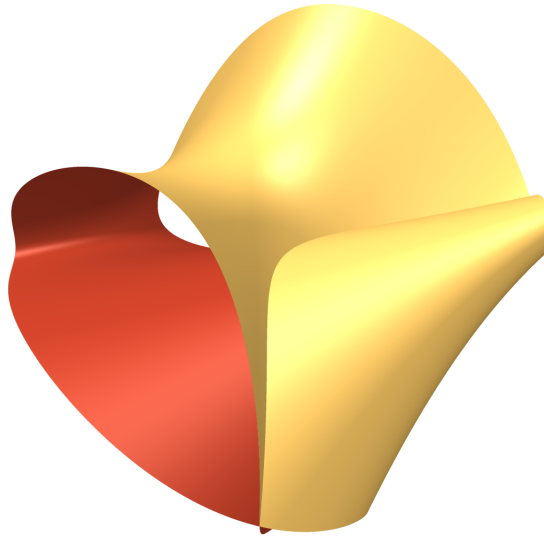


Figura 4.1: $-8y^4 + 16xy^2z + 8y^3z - 8x^2z^2 - 8xyz^2 - 8y^2z^2 + 2xz^3 + 2yz^3 + 4z^4 - 8xy^2 + 2y^3 + 8x^2z + 10xyz - 2y^2z - 2xz^2 - 8yz^2 - 6x^2 + 2xy + 4y^2 = 0$

Para $d = 5$ temos que o posto do fibrado \mathcal{E}_5 é dado por $rk(\mathcal{E}_5) = \binom{5+3}{3} - (9 \times 5 - 7) = 18$

e assim, a representação da fibra de \mathcal{E}_5 sobre cada um dos pontos fixos da Tabela 4.2 deverá conter 18 monômios de grau 5 que são os geradores do espaço de formas de grau 5 com gradiente anulando-se sobre f . Esses 18 monômios são obtidos da seguinte forma: no caso dos pontos fixos 4-regulares ((1)-(3) e (4)) basta completarmos o grau, i.e, tomarmos os monômios de grau 5 que aparecem no produto $\mathcal{E}_{4_f} \otimes (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$. Por exemplo, no caso de $f = \langle x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3 \rangle$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{5_f} &= x_2^2x_3^3 + x_2^3x_3^2 + x_1x_2^2x_3^2 + x_0x_2^2x_3^2 + x_0x_1x_2x_3^2 + x_1x_2^3x_3 \\ &+ x_1^2x_2^2x_3 + x_0x_1x_2^2x_3 + x_0x_1^2x_2x_3 + x_0^2x_1x_2x_3 + x_0^2x_1^2x_3 \\ &+ x_1^2x_2^3 + x_1^3x_2^2 + x_0x_1^2x_2^2 + x_0x_1^3x_2 + x_0^2x_1^2x_2 + x_0^2x_1^3 + x_0^3x_1^2. \end{aligned}$$

Já para os pontos fixos do tipo (5.1) - (5.4) que são 6-regular, a representação da fibra para \mathcal{E}_5 é obtida tomando inicialmente os monômios de grau 5 que já estão presentes no ideal (2 ao todo), e posteriormente completar os 18 monômios com aqueles provenientes do produto $\mathcal{E}_{4_f} \otimes (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$. Por exemplo, para

$$f^2 = \langle x_0^2x_2^2, x_0^2x_1x_2, x_0^3x_2, x_0^2x_1^2, x_0^3x_1, x_0^4, x_0x_1x_2^2x_3, x_0x_1^2x_2x_3, x_1^2x_2^2x_3^2 \rangle$$

devemos tomar inicialmente os monômios $x_0x_1x_2^2x_3, x_0x_1^2x_2x_3$ e posteriormente completar com os 16 monômios

$$\begin{aligned} &x_0^2x_2^2x_3, x_0^2x_1x_2x_3, x_0^3x_2x_3, x_0^2x_1^2x_3, x_0^3x_1x_3, x_0^4x_3, x_0^2x_2^3, \\ &x_0^2x_1x_2^2, x_0^3x_2^2, x_0^2x_1^2x_2, x_0^3x_1x_2, x_0^4x_2, x_0^2x_1^3, x_0^3x_1^2, x_0^4x_1, x_0^5, \end{aligned}$$

resultantes do produto $\mathcal{E}_{4_f} \otimes (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$. Portanto, para este exemplo, temos a representação:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{5_f} &= x_0^2x_2^2x_3 + x_0^2x_1x_2x_3 + x_0^3x_2x_3 + x_0^2x_1^2x_3 + x_0^3x_1x_3 + x_0^4x_3 \\ &+ x_0^2x_2^3 + x_0^2x_1x_2^2 + x_0^3x_2^2 + x_0^2x_1^2x_2 + x_0^3x_1x_2 + x_0^4x_2 + x_0^2x_1^3 \\ &+ x_0^3x_1^2 + x_0^4x_1 + x_0^5 + x_0x_1x_2^2x_3 + x_0x_1^2x_2x_3. \end{aligned}$$

Para $d = 6$ temos que o posto do fibrado é igual $rk(\mathcal{E}_6) = \binom{6+3}{3} - (9 \times 6 - 7) = 37$, e isto nos diz que a representação da fibra de \mathcal{E}_6 sobre cada um dos pontos fixos da Tabela 4.2 contém 37 monômios de grau 6, os quais são produzidos da seguinte forma: para os pontos do tipo (1) - (3) e (4) basta completarmos o grau, ou seja, tomarmos os monômios de grau 6 que aparecem no produto $\mathcal{E}_{5_f} \otimes (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$. Já para os pontos do tipo (5.1) - (5.4) procedemos como no caso $d = 5$, a saber, inicialmente tomamos o monômio de grau 6 presente no ideal do ponto e posteriormente coletamos os monômios de grau 6 (ao todo 36) presentes no produto $\mathcal{E}_{5_f} \otimes (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)$.

A partir da regularidade ($d > 6$), para obtermos a representação da fibra de \mathcal{E}_d sobre o ponto fixo f , basta tomarmos os monômios de grau d (ao todo $\binom{d+3}{3} - (9d - 7)$) presentes no produto $\mathcal{E}_{6_f} * S_{(d-6)}$, onde estamos indicando por S_i a soma de todos os monômios de grau i nas variáveis x_0, x_1, x_2, x_3 .

Reunidos os dados necessários para o cálculo de $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{twc}, d)$ para cada valor de $d \gg 0$, e sabendo que o grau da família de superfícies de grau d singulares ao longo de alguma cúbica reversa (variável) é polinomial em d (vide Proposição 1.9) de grau menor do que ou igual a $36 (= 3 \times 12)$, segue que para obtermos o polinômio em questão basta calcularmos $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{twc}, d)$, utilizando a fórmula de resíduos de Bott, para 37 valores distintos de d e em seguida utilizar interpolação polinomial. O polinômio que nos dá o grau de $\Sigma(\mathbb{W}_{twc}, d)$ é explicitado a seguir:

$$\begin{aligned}
\deg \Sigma(\mathbb{W}_{twc}, d) = & \frac{1095687}{50462720} d^{24} - \frac{19230291}{18022400} d^{23} + \frac{24114591}{985600} d^{22} \\
& - \frac{3932462817}{11468800} d^{21} + \frac{73665592101}{22937600} d^{20} - \frac{23321377833}{1146880} d^{19} + \frac{4087404048523}{51609600} d^{18} \\
& - \frac{205245946577}{2457600} d^{17} - \frac{79029321809671}{68812800} d^{16} + \frac{2854774357217311}{309657600} d^{15} \\
& - \frac{6688891988137}{143360} d^{14} + \frac{895445339622112187}{3406233600} d^{13} - \frac{4177328126526143027}{2270822400} d^{12} \\
& + \frac{1134029525022301939}{94617600} d^{11} - \frac{29052565860084958379}{464486400} d^{10} + \frac{1100107099486708819}{4300800} d^9 \\
& - \frac{31950097995158831119}{38707200} d^8 + \frac{365421773568911927}{172800} d^7 - \frac{8318629615873057099}{1935360} d^6 \\
& + \frac{615395937691427021}{89600} d^5 - \frac{337777058982513508747}{39916800} d^4 + \frac{5167781409451915223}{665280} d^3 \\
& - \frac{693707469384158233}{138600} d^2 + \frac{466431399017887}{231} d - 383398629664.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Observe que o grau do polinômio em (4.14) é igual a $2 \times \dim(\mathbb{W}_{twc}) = 2 \times 12$.

No Apêndice F.2 o leitor pode consultar os procedimentos/funções escritos no Macaulay2, [17], utilizados para obtenção do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{twc}, d)$ em (4.14).

4.2 Hipersuperfícies singulares ao longo de uma superfície cúbica regradada em \mathbb{P}^4

Uma superfície cúbica regradada em \mathbb{P}^4 é uma superfície de grau 3, com polinômio de Hilbert dado por $(3/2)t^2 + (5/2)t + 1$, formada por uma rede de quádricas do tipo determinantal, isto é, gerada pelos menores 2×2 de uma matriz 3×2 de formas lineares. É imagem da explosão de \mathbb{P}^2 em um ponto, mergulhada pelo sistema de cônicas com o ponto base (vide Beauville [4], Proposição IV.1 (iii), pág. 40). Denotemos por \mathbb{W}_{rc} a família de superfícies cúbicas regradadas em \mathbb{P}^4 . A construção que Vainsencher & Xavier [36] utilizaram para obter uma compactificação suave do espaço de cúbicas reversas em \mathbb{P}^3 também se aplica para o caso da família de subesquemata definido por redes de quádricas

do tipo determinantal, e.g., superfícies cúbicas regradas em \mathbb{P}^4 ou variedades de Segre em \mathbb{P}^5 . Em particular, segue da construção, que a família \mathbb{W}_{rc} tem dimensão 18, enquanto a família das variedades de Segre em \mathbb{P}^5 , denotada por \mathbb{W}_{sg} , tem dimensão 24.

Nesta seção obtemos o $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{rc}, d)$ da família de hipersuperfícies em \mathbb{P}^4 que são singulares em algum membro $W \in \mathbb{W}_{rc}$. Para isso, da Proposição 1.5 e do Teorema 1.7, segue que para $d \gg 0$ existe um fibrado \mathcal{E}_d tal que $\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}_{rc}, d) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_d)$ e o grau

$$\deg \Sigma(\mathbb{W}_{rc}, d) = \int \text{Segre}(18, \mathcal{E}_d) \cap [\mathbb{W}'_{rc}] = \sum_f \frac{c_{18}^f(-\mathcal{E}_d)}{c_{18}^f(\mathcal{T}\mathbb{W}'_{rc})}, \quad (4.15)$$

onde a última igualdade segue da fórmula de resíduos de Bott.

4.2.1 O espaço de parâmetros

Como no caso de redes de quádricas do tipo determinantal em \mathbb{P}^3 , cúbicas reversas, temos que o espaço de parâmetros para \mathbb{W}_{rc} é obtido como a explosão da rede de quádricas determinantis $\mathbb{X} \subset \mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$ ao longo da subvariedade Z consistindo nas redes de quádricas com um hiperplano fixado e uma reta imersa nesse hiperplano, i.e, são da forma $L_0 \cdot \langle L_0, L_1, L_2 \rangle$, com $L_0 = 0$ a equação do hiperplano e $L_0 = L_1 = L_2 = 0$ a equação da reta imersa. O diagrama de explosão 4.16 dá um resumo do exposto acima.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{W}_{rc} & = & \tilde{\mathbb{X}} & \supset & \tilde{\mathbb{E}} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2) & \supset & \mathbb{X} & \supset & Z & & \end{array} \quad (4.16)$$

4.2.2 Aplicando Bott

Aqui, como nos demais casos tratados no texto, tomamos uma ação do Toro $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$ agindo diagonalmente sobre $(\mathbb{C}^5)^\vee$ via $t \circ x_i := t^{w_i} x_i$, com pesos apropriados, digamos:

$$w_0 = 11, w_1 = 17, w_2 = 32, w_3 = 55, w_4 = 95. \quad (4.17)$$

A ação de T induz ações naturais sobre $\mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$, $\mathbb{X} \subset \mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$ e $\tilde{\mathbb{X}}$ de tal forma que os pontos fixos sejam isolados. Na sequência fazemos uma descrição dos pontos fixos dessa ação, bem como as contribuições numéricas em (4.15).

Pontos fixos em \mathbb{X}

Temos, como no caso de cúbicas reversas e a menos de permutação das variáveis de um dado \mathbb{P}^4 , que os pontos fixos (isolados) da ação induzida sobre \mathbb{X} são projetivamente equivalentes àqueles listados em (1) - (5) e em cada classe de isomorfismo temos, respectivamente, 60, 10, 60, 10 e 30 pontos fixos.

De acordo com a descrição do centro de explosão Z (vide (4.16)), temos que os pontos fixos do tipo (5) (30 pontos) estão sobre Z e assim, devemos considerar a contribuição proveniente do divisor excepcional sobre estes pontos. Os demais 140 pontos fixos, aqueles oriundos dos tipos (1) - (4), estão fora do centro de explosão Z e assim podemos calcular a contribuição em (4.15) diretamente sobre \mathbb{X} , ou seja, sem influência do divisor excepcional. Portanto, dado um ponto fixo f dos tipos (1) - (4), temos

$$f \Rightarrow \frac{c_{18}^f(-\mathcal{E}_d)}{c_{18}^f(\mathcal{T}\mathbb{W}_{rc})}, \quad (4.18)$$

onde o denominador em (4.18) é o produto dos pesos da representação de $\mathcal{T}_f\mathbb{X}$.

Para a determinação da representação de $\mathcal{T}_f\mathbb{X}$ sobre cada um dos pontos fixos dos tipos (1) - (5), utilizamos a receita presente em Vainsencher [32] e remetemos as contas para o Apêndice G, onde utilizamos o software Macaulay2. Os resultados obtidos para cada uma das classes de isomorfismo (1) - (5) são os seguintes:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3)}\mathbb{X} &= (x_0x_1x_2x_3)^\vee \otimes (x_0^3x_1 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 + x_0^2x_1x_3 \\ &+ x_0x_1^2x_3 + x_0^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_3 + x_0x_2^2x_3 + x_0x_1x_3^2 + x_0x_2x_3^2 + x_1x_2x_3^2 \\ &+ x_2x_3^3 + x_0^2x_1x_4 + x_0x_1x_2x_4 + x_0x_1x_3x_4 + x_0x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4 \\ &+ x_2x_3^2x_4) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(x_0x_1, x_1x_2, x_0x_2)}\mathbb{X} &= (x_0x_1x_2)^\vee \otimes (x_0^2x_1 + x_0x_1^2 + x_0^2x_2 + x_1^2x_2 + x_0x_2^2 \\ &+ x_1x_2^2 + 2x_0x_1x_3 + 2x_0x_2x_3 + 2x_1x_2x_3 + 2x_0x_1x_4 + 2x_0x_2x_4 + 2x_1x_2x_4) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(x_0x_1, x_2^2, x_0x_2)}\mathbb{X} &= (x_0x_1x_2^2)^\vee \otimes (x_0x_1^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 \\ &+ x_1x_2^3 + x_0x_1^2x_3 + 2x_0x_1x_2x_3 + x_0x_2^2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_2^3x_3 + x_0x_1^2x_4 \\ &+ 2x_0x_1x_2x_4 + x_0x_2^2x_4 + x_1x_2^2x_4 + x_2^3x_4) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(x_0^2, x_0x_1, x_1^2)}\mathbb{X} &= (x_0^2x_1^2)^\vee \otimes (x_0^3x_2 + 2x_0^2x_1x_2 + 2x_0x_1^2x_2 + x_1^3x_2 + x_0^3x_3 \\ &+ 2x_0^2x_1x_3 + 2x_0x_1^2x_3 + x_1^3x_3 + x_0^3x_4 + 2x_0^2x_1x_4 + 2x_0x_1^2x_4 + x_1^3x_4) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(x_0^2, x_0x_1, x_0x_2)}\mathbb{X} &= (x_0x_1x_2)^\vee \otimes (x_1^3 + 2x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 + x_2^3 + x_0x_1x_3 + x_1^2x_3 \\ &+ x_0x_2x_3 + 2x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_0x_1x_4 + x_1^2x_4 + x_0x_2x_4 + 2x_1x_2x_4 + x_2^2x_4) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Pontos fixos em $\widetilde{\mathbb{X}}$

De modo análogo ao caso de cúbicas reversas (seção 4.1), temos que os pontos fixos do tipo (5) dão origem, a menos de equivalência projetiva, aos pontos fixos no divisor excepcional $\widetilde{\mathbb{E}}$ listados em (5.1) à (5.4), sendo a quantidade de pontos fixos em cada classe de equivalência, respectivamente, 60, 60, 120 e 60. Além disso, a fibra do divisor excepcional $\widetilde{\mathbb{E}}$ sobre cada ponto fixo $f = \langle x_i^2, x_i x_j, x_i x_k \rangle$ é descrito geometricamente como o espaço projetivo de superfícies cúbicas no hiperplano $x_i = 0$ singulares no ponto $(0 : 0 : 0 : 1 : 1)$, ou seja, $\widetilde{\mathbb{E}}_f$ é a projetivização do espaço gerado pelas formas cúbicas

$$x_j^3, x_j^2 x_k, x_j x_k^2, x_k^3, x_j^2 x_l, x_j x_k x_l, x_k^2 x_l, x_j^2 x_m, x_j x_k x_m, x_k^2 x_m, \quad (4.24)$$

onde x_i, x_j, x_k, x_l, x_m indicam as funções coordenadas de \mathbb{P}^4 .

Dessa maneira, cada ponto fixo sobre o divisor excepcional $\widetilde{\mathbb{E}}$ toma a forma

$$f' = \langle x_i^2, x_i x_j, x_i x_k, [c] \rangle, \quad (4.25)$$

onde $[c]$ indica a classe de uma das formas cúbicas aparecendo em (4.24).

Para os 300 pontos fixos f' dos tipos (5.1) - (5.4) temos a contribuição imediata

$$f' \Rightarrow \frac{c_{18}^{f'}(-\mathcal{E}_d)}{c_{18}^{f'}(\mathcal{T}\widetilde{\mathbb{X}})}, \quad (4.26)$$

onde sobre o denominador devemos considerar também a contribuição dada pelo divisor excepcional $\widetilde{\mathbb{E}}$. Em virtude do divisor excepcional ser dado como o fibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{X}})$ e sobre $f = \langle x_i^2, x_i x_j, x_i x_k \rangle$ termos a sequência de representações

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_f Z \rightarrow \mathcal{T}_f \mathbb{X} \rightarrow \mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}} \rightarrow 0,$$

segue das fórmulas para os espaços tangentes $\mathcal{T}_f Z$ e $\mathcal{T}_f \mathbb{X}$ que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}} &= \mathcal{T}_f \mathbb{X} - \mathcal{T}_f Z \\ &= (x_i x_j x_k)^\vee \otimes (x_j^3 + 2x_j^2 x_k + 2x_j x_k^2 + x_k^3 + x_i x_j x_l + x_j^2 x_l \\ &\quad + x_i x_k x_l + 2x_j x_k x_l + x_k^2 x_l + x_i x_j x_m + x_j^2 x_m + x_i x_k x_m \\ &\quad + 2x_j x_k x_m + x_k^2 x_m) - ((x_i)^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - x_i)) \\ &\quad + (x_j + x_k)^\vee \otimes ((\mathcal{F}_1 - x_i) - (x_j + x_k)) \\ &= (x_i x_j x_k)^\vee \otimes (x_j^3 + x_j^2 x_k + x_j x_k^2 + x_k^3 + x_j^2 x_l \\ &\quad + x_j x_k x_l + x_k^2 x_l + x_j^2 x_m + x_j x_k x_m + x_k^2 x_m). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Note que a decomposição do espaço normal apresenta todos os caracteres distintos, ao todo $10 = \dim \mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}}$. Assim, em $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}})$ teremos 10 pontos fixos sobre $f = \langle x_i^2, x_i x_j, x_i x_k \rangle$, totalizando os $300 = (30 \times 10)$ pontos fixos mencionados no parágrafo anterior.

Passamos agora ao estudo do espaço tangente $\mathcal{T}_{f'}\widetilde{\mathbb{X}}$ sobre um ponto fixo do divisor excepcional na fibra sobre $f \in \mathbb{X}$, o qual é dado pela decomposição análoga à (4.9)

$$\mathcal{T}_{f'}\widetilde{\mathbb{X}} = \mathcal{L}_{f'} \oplus \mathcal{T}_f \mathbb{X} \oplus \mathcal{T}_{[\mathcal{L}_{f'}]}\mathbb{P}(\mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}}).$$

Por exemplo, sobre o ponto fixo $f = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 x_2 \rangle$ segue de (4.27) que

$$\mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}} = \frac{x_1^2}{x_0 x_2} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_2^2}{x_0 x_1} + \frac{x_1 x_3}{x_0 x_2} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_2 x_3}{x_0 x_1} + \frac{x_1 x_4}{x_0 x_2} + \frac{x_4}{x_0} + \frac{x_2 x_4}{x_0 x_1}$$

e tomando para f' o ponto correspondente ao auto-espaço com caracter $\frac{x_1^2}{x_0 x_2}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f'}\widetilde{\mathbb{X}} &= \left(\frac{x_1^2}{x_0 x_2} \right) + \left(\frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_4}{x_2} + \frac{x_4}{x_1} + \frac{x_4}{x_0} \right) \\ &+ \left(\frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_2^2}{x_0 x_1} + \frac{x_1 x_3}{x_0 x_2} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_2 x_3}{x_0 x_1} + \frac{x_1 x_4}{x_0 x_2} + \frac{x_4}{x_0} + \frac{x_2 x_4}{x_0 x_1} \right) \otimes \left(\frac{x_1^2}{x_0 x_2} \right)^\vee \\ &= \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_4}{x_2} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_0 x_2} + \frac{2x_1}{x_0} + \frac{x_1 x_3}{x_0 x_2} + \frac{x_1 x_4}{x_0 x_2} + \frac{2x_2}{x_0} + \frac{2x_3}{x_0} + \frac{2x_4}{x_0} + \frac{x_2^2}{x_0 x_1} + \frac{x_2 x_3}{x_0 x_1} + \frac{x_2 x_4}{x_0 x_1}. \end{aligned}$$

Por comparação direta da autodecomposição dos espaços tangentes, obtemos

$$\begin{aligned} x_1^3 &\leftrightarrow \frac{x_1^2}{x_0 x_2}, x_1^2 x_2 \leftrightarrow \frac{x_1}{x_0}, x_1 x_2^2 \leftrightarrow \frac{x_2}{x_0}, x_2^3 \leftrightarrow \frac{x_2^2}{x_0 x_1}, x_1^2 x_3 \leftrightarrow \frac{x_1 x_3}{x_0 x_2}, \\ x_1 x_2 x_3 &\leftrightarrow \frac{x_3}{x_0}, x_2^2 x_3 \leftrightarrow \frac{x_2 x_3}{x_0 x_1}, x_1^2 x_4 \leftrightarrow \frac{x_1 x_4}{x_0 x_2}, x_1 x_2 x_4 \leftrightarrow \frac{x_4}{x_0}, x_2^2 x_4 \leftrightarrow \frac{x_2 x_4}{x_0 x_1}. \end{aligned}$$

E para a contribuição do denominador em (4.26) obtemos o produto dos pesos da representação de $\mathcal{T}_{f'}\widetilde{\mathbb{X}}$. De modo análogo, procedemos sobre cada um dos 300 pontos fixos em $\widetilde{\mathbb{X}}$, bem como sobre os demais pontos fora do centro de explosão Z .

Fibras de \mathcal{E}_d

Seja a família formada pelos subesquemas de \mathbb{P}^4 definido por \mathcal{I}_W^2 para algum $W \in \mathbb{W}_{rc}$. Essa família não é plana, e.g., os pontos fixos do tipo (4): $\langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2 \rangle$ são membros legítimos de \mathbb{W}_{rc} (polinômio de Hilbert $p_{\mathbb{W}_{rc}}(t) = (3/2)t^2 + (5/2)t + 1$), mas seu quadrado tem polinômio de Hilbert $5t^2 - 5t + 5$ que é diferente do esperado, a saber: $p_{\mathbb{W}_{rc}} = (9/2)t^2 - (5/2)t + 2$. A subvariedade de \mathbb{W}_{rc} que contém os pontos fixos do tipo (4), a qual vamos denotar por \mathbb{G} , é obtida como imagem da grassmanniana $\mathbb{G}(3, 5)$ via o mapa $\rho : \mathbb{G}(3, 5) \rightarrow \mathbb{P}^4$ que associa a cada $l \in \mathbb{G}(3, 5)$ a superfície cúbica regrada limite obtida como quadrado do ideal definindo l .

Análogo ao caso de cúbicas reversas (Proposição 4.7) temos que a explosão de \mathbb{X} - rede de quádricas do tipo determinantal - ao longo de \mathbb{G} , que vamos denotar por $\widehat{\mathbb{X}}$, mergulha em $\mathbb{X} \times \mathbb{G}(6, \mathcal{F}_4)$ e a fibra do fibrado de formas quárticas sobre o divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$ é descrita como na Proposição 4.10.

Na sequência vamos descrever as contribuições dos pontos fixos no divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$. Sabemos que a fibra $\widehat{\mathbb{E}}_f$ sobre cada ponto fixo $f \in \mathbb{G}$ é o espaço projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{f\mathbb{G}/\mathbb{X}})$, e assim sobre cada um dos 10 pontos fixos em \mathbb{G} , por exemplo $f = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2 \rangle$ obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{f\mathbb{G}/\mathbb{X}} &= \left(\frac{x_0x_2}{x_1^2} + \frac{x_0x_3}{x_1^2} + \frac{x_0x_4}{x_1^2} + \frac{2x_2}{x_1} + \frac{2x_3}{x_1} + \frac{2x_4}{x_1} + \frac{2x_2}{x_0} + \frac{2x_3}{x_0} + \frac{2x_4}{x_0} + \frac{x_1x_2}{x_0^2} + \frac{x_1x_3}{x_0^2} + \frac{x_1x_4}{x_0^2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{x_2}{x_0} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_0} + \frac{x_4}{x_1} \right) \\ &= \frac{x_0x_2}{x_1^2} + \frac{x_0x_3}{x_1^2} + \frac{x_0x_4}{x_1^2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_1} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_4}{x_0} + \frac{x_1x_2}{x_0^2} + \frac{x_1x_3}{x_0^2} + \frac{x_1x_4}{x_0^2} \end{aligned}$$

Note que temos 12 auto-espacos na decomposição do fibrado normal e todos com caracteres distintos. Logo, sobre o ponto fixo f temos 12 pontos fixos isolados no divisor excepcional, um para cada auto-espaco na decomposição acima. De modo análogo, verifica-se que sobre cada um dos 10 pontos fixos em \mathbb{G} a decomposição do fibrado normal sempre apresenta caracteres distintos (12 ao todo) e dessa forma temos um total de $120 = (10 \times 12)$ pontos fixos isolados no divisor excepcional provenientes dos pontos do tipo (4).

Tomamos, por exemplo, o ponto fixo f' correspondente ao auto-espaco com caracter $\frac{x_0x_2}{x_1^2}$, o que nos fornece:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f'\widehat{\mathbb{X}}} &= \left(\frac{x_0x_2}{x_1^2} \right) + \left(\frac{x_2}{x_0} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_0} + \frac{x_4}{x_1} \right) \\ &\quad + \left(\frac{x_0x_3}{x_1^2} + \frac{x_0x_4}{x_1^2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_1} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_4}{x_0} + \frac{x_1x_2}{x_0^2} + \frac{x_1x_3}{x_0^2} + \frac{x_1x_4}{x_0^2} \right) \otimes \left(\frac{x_0x_2}{x_1^2} \right)^\vee \\ &= \frac{x_0x_2}{x_1^2} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_0} + \frac{x_4}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_4}{x_2} + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_1x_3}{x_0x_2} + \frac{x_1x_4}{x_0x_2} + \frac{x_1^2}{x_0^2} \\ &\quad + \frac{x_1^2x_3}{x_0^2x_2} + \frac{x_1^2x_4}{x_0^2x_2} + \frac{x_1^3}{x_0^3} + \frac{x_1^3x_3}{x_0^3x_2} + \frac{x_1^3x_4}{x_0^3x_2} \end{aligned}$$

e para a contribuição numérica do denominador em (4.15) obtemos o produto dos pesos da representação acima. De forma análoga, obtemos a contribuição numérica sobre todos os 120 pontos fixos sobre o divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$.

Ao efetuarmos comparações diretas da auto-decomposição dos espacos tangentes, obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned} x_0^3x_2 &\leftrightarrow \frac{x_0x_2}{x_1^2}, x_0^2x_1x_2 \leftrightarrow \frac{x_2}{x_1}, x_0x_1^2x_2 \leftrightarrow \frac{x_2}{x_0}, x_1^3x_2 \leftrightarrow \frac{x_1x_2}{x_0^2}, x_0^3x_3 \leftrightarrow \frac{x_0x_3}{x_1^2}, x_0^2x_1x_3 \leftrightarrow \frac{x_3}{x_1}, \\ x_0x_1^2x_3 &\leftrightarrow \frac{x_3}{x_0}, x_1^3x_3 \leftrightarrow \frac{x_1x_3}{x_0^2}, x_0^3x_4 \leftrightarrow \frac{x_0x_4}{x_1^2}, x_0^2x_1x_4 \leftrightarrow \frac{x_4}{x_1}, x_0x_1^2x_4 \leftrightarrow \frac{x_4}{x_0}, x_1^3x_4 \leftrightarrow \frac{x_1x_4}{x_0^2}. \end{aligned}$$

Como no caso de cúbicas reversas, os pontos fixos do tipo (4): $\langle x_i^2, x_ix_j, x_j^2 \rangle$, dão origem em \mathbb{W}' aos pontos da forma $\langle x_i^4, x_i^3x_j, x_i^2x_j^2, x_ix_j^3, x_j^4 \rangle$. Note que temos somente 5

monômios de grau 4, onde o esperado é $6 = \binom{4+4}{4} - [(9/2) \times 4^2 - (5/2) \times 4 + 2]$. Em vista de observação análoga a 4.11, temos que cada um desses pontos fixos produzem os 12 pontos fixos da forma:

$$f' = \langle x_i^4, x_i^3 x_j, x_i^2 x_j^2, x_i x_j^3, x_j^4, [Q] \rangle, \quad (4.28)$$

onde $[Q]$ indica a classe de uma das formas de grau 4:

$$\begin{aligned} & x_i^3 x_k, x_i^2 x_j x_k, x_i x_j^2 x_k, x_j^3 x_k, x_i^3 x_l, x_i^2 x_j x_l, \\ & x_i x_j^2 x_l, x_j^3 x_l, x_i^3 x_m, x_i^2 x_j x_m, x_i x_j^2 x_m, x_j^3 x_m \end{aligned} \quad (4.29)$$

que corresponde aos geradores da fibra do divisor excepcional que é dada como o espaço $\mathbb{P} \left(\frac{\mathcal{F}_3^{(x_i, x_j)^3}}{\mathcal{F}_4^{(x_i, x_j)^4}} \cdot \mathcal{F} \right)$.

Observação 4.13. *Todos os pontos fixos em \mathbb{W}' do tipo (4.28) possuem polinômio de Hilbert $p_{\mathbb{W}'_{rc}} = (9/2)t^2 - (5/2)t + 2$, bem como aqueles provenientes dos tipos (1) - (3) e (5.1) - (5.4).*

Indicamos na Tabela 4.3 cada uma das classes de isomorfismos de pontos fixos em \mathbb{W}_{rc} e os correspondentes pontos em \mathbb{W}'_{rc} , bem como o número de pontos fixos em cada classe.

Tipo	Pontos fixos em \mathbb{W}_{rc}	Pontos fixos em \mathbb{W}'_{rc}	# pontos
(1)	$\langle x_i x_j, x_j x_k, x_k x_l \rangle$	$\langle x_i^2 x_j^2, x_i x_j^2 x_k, x_i x_j x_k x_l, x_j^2 x_k^2, x_j x_k^2 x_l, x_k^2 x_l^2 \rangle$	60
(2)	$\langle x_i x_j, x_j x_k, x_i x_k \rangle$	$\langle x_i^2 x_j^2, x_i x_j^2 x_k, x_i^2 x_j x_k, x_j^2 x_k^2, x_i x_j x_k^2, x_i^2 x_k^2 \rangle$	10
(3)	$\langle x_i x_j, x_j x_k, x_i x_k \rangle$	$\langle x_i^2 x_j^2, x_i x_j x_k^2, x_i^2 x_j x_k, x_k^4, x_i x_k^3, x_i^2 x_k^2 \rangle$	60
(4)	$\langle x_i^2, x_i x_j, x_j^2 \rangle$	$\langle x_i^4, x_i^3 x_j, x_i^2 x_j^2, x_i x_j^3, x_j^4, [Q] \rangle$	120 (= 10 × 12)
(5)	$\langle x_i^2, x_i x_j, x_i x_k, c \rangle$	$\langle x_i^2 \cdot \langle x_i^2, x_i x_j, x_i x_k, c, x_j^2, x_j x_k, x_k^2 \rangle, x_i x_j c, x_i x_k c, c^2 \rangle$	300 (= 30 × 10)
Total de pontos fixos			550

Tabela 4.3: Pontos fixos em \mathbb{W}_{rc}

Em referência à Tabela 4.3, temos que os pontos fixos em \mathbb{W}' dos tipos (1) - (4) são 4-regular, enquanto os do tipo (5) são 6-regular. Como no caso de cúbicas reversas, segue que qualquer feixe ideal correspondendo a um ponto em \mathbb{W}_{rc} é 6-regular no sentido de Castelnuovo-Mumford.

O procedimento de obtenção da representação das fibras de \mathcal{E}_d é análogo ao apresentado na seção 4.1, onde, a partir da regularidade 6, obtemos a representação da fibra de \mathcal{E}_d sobre o ponto fixo f tomando os monômios de grau d (ao todo $\binom{d+4}{4} - [(9/2)d^2 - (5/2)d + 2]$) presentes no produto $\mathcal{E}_{6_f} * \mathcal{S}_{d-6}$.

Reunido as informações necessárias para o cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{rc}, d)$ via fórmula de resíduos de Bott e sabendo que o grau anterior é polinomial em d (vide Proposição 1.9) de grau no máximo $72 (= 4 \times 18)$, segue que é suficiente encontrarmos $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{rc}, d)$

para 73 valores diferentes de d e, posteriormente, interpolar os resultados para obter o polinômio em questão. O polinômio que nos dá o grau de $\Sigma(\mathbb{W}_{rc}, d)$ é explicitado a seguir:

$$\begin{aligned}
\deg \Sigma(\mathbb{W}_{rc}, d) = & \frac{1089331}{2820745970948505600} d^{54} - \frac{4609327}{138135296519700480} d^{53} \\
& + \frac{17053361977}{12432176686773043200} d^{52} - \frac{44006738257}{1243217668677304320} d^{51} + \frac{43540862009}{68559797904998400} d^{50} \\
& - \frac{6776065867607}{822717574859980800} d^{49} + \frac{25203282464989}{329087029943992320} d^{48} - \frac{95461703632727}{205679393714995200} d^{47} \\
& + \frac{3121945759267787}{329087029943992320} d^{46} + \frac{13975371538743871}{987261089831976960} d^{45} - \frac{1762263793046822003}{987261089831976960} d^{44} \\
& + \frac{1571373547792223293}{1645435149719961600} d^{43} - \frac{18657333817850689}{21095322432307200} d^{42} - \frac{21162893089184824063}{822717574859980800} d^{41} \\
& + \frac{8817237395388371983}{42070785078067200} d^{40} - \frac{7285835577039579827299}{7404458173739827200} d^{39} + \frac{18439965173115436460101}{2278294822689177600} d^{38} \\
& - \frac{30625726302752154570146789}{251751577907154124800} d^{37} + \frac{286671605346783151488709819}{201401262325723299840} d^{36} \\
& - \frac{5957731889573498708183240461}{503503155814308249600} d^{35} + \frac{946219385360559194318492423}{13078004047124889600} d^{34} \\
& - \frac{28843644632003758667785804741}{88853498084877926400} d^{33} + \frac{3586612308873070845414316631}{3702229086869913600} d^{32} \\
& - \frac{2772990057804229211772760003}{3173339217317068800} d^{31} - \frac{173239617944054456458227898277}{17770699616975585280} d^{30} \\
& + \frac{3107360934070968268891455300733}{44426749042438963200} d^{29} - \frac{1302777164405876523072798778669}{4936305449159884800} d^{28} \\
& + \frac{2175543494720246680252051667789}{3748506950455787520} d^{27} - \frac{15324266643945858395023213928441}{88853498084877926400} d^{26} \\
& - \frac{583723723691983350730395768869707}{133280247127316889600} d^{25} + \frac{295008612506350533900867771909281}{14808916347479654400} d^{24} \\
& - \frac{72882298518045984492971696381249}{1514548262810419200} d^{23} + \frac{3179423312365559691881647284007591}{59235665389918617600} d^{22} \\
& + \frac{65074915758634148942372090942475703}{799681482763901337600} d^{21} - \frac{17650658027740832446748837419090939}{33566877054287216640} d^{20} \\
& + \frac{43155219287681067897344483362302109}{35402565643193548800} d^{19} - \frac{30042531700267289895379997718912521}{22377918036191477760} d^{18} \\
& - \frac{749894075579299475576086383836784223}{906305680465754849280} d^{17} + \frac{1152884114126290978903651885817821}{176296623184281600} d^{16} \\
& - \frac{679247544279215190070362388445065693}{49980092672743833600} d^{15} + \frac{27244209645180356835326895182601977}{1851114543434956800} d^{14} \\
& - \frac{1418065552252589087869842457397769}{8330015445457305600} d^{13} - \frac{17786673868531949329900173945074227}{694167953788108800} d^{12} \\
& + \frac{8140256480874854682039834827204717}{148750275811737600} d^{11} - \frac{15847193428252892198587722393037621}{231389317929369600} d^{10} \\
& + \frac{51203085967146132778275681925029671}{851933397830860800} d^9 - \frac{415833099791358148948760413114949}{10846374277939200} d^8 \\
& + \frac{190922280640278098795730933090799}{10846374277939200} d^7 - \frac{47833769039838754264953305641}{8608233553920} d^6 \\
& + \frac{2764737243980163013076109790463}{2560949482291200} d^5 - \frac{1553358364438869321892260077}{17784371404800} d^4 \\
& - \frac{1981299728200259795937983}{242514155520} d^3 + \frac{15743878343562160667}{7623616} d^2 \\
& - \frac{655521591855018725}{7351344} d + 4625512425
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Observe que o grau em (4.30) é $54 = (2 + 1) \times 18$.

No Apêndice G encontra-se a disposição do leitor os procedimentos e funções escritos no Macaulay2 [17] e Maple [24] utilizados para obter o $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{rc}, d)$ em (4.30).

4.3 Hipersuperfícies singulares ao longo de uma 3-variedade de Segre em \mathbb{P}^5

A variedade de Segre em \mathbb{P}^5 é uma 3-variedade obtida pelo mergulho de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$. Seu polinômio de Hilbert é dado por $(1/2)t^3 + 2t^2 + (5/2)t + 1$. É bem conhecido (cf. Harris [18]) que a variedade de Segre é do tipo determinantal, definida por uma rede de quádricas obtidas pelos menores 2×2 de uma matriz 2×3 de formas lineares. Denotemos por \mathbb{W}_{sg} a família das variedades de Segre em \mathbb{P}^5 , a qual tem dimensão 24 (cf. Vainsencher & Xavier [36]).

O propósito desta seção é a obtenção do $\deg(\mathbb{W}_{sg}, d)$ da família de hipersuperfícies de grau d em \mathbb{P}^5 que são singulares em algum membro (variável) $W \in \mathbb{W}_{sg}$. De forma análoga à seção 4.1, para $d \gg 0$ existe um fibrado \mathcal{E}_d tal que $\tilde{\Sigma}(\mathbb{W}_{sg}, d) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_d)$. O $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{sg}, d)$ é obtido pela fórmula explicitada em (1.6), a saber

$$\deg \Sigma(\mathbb{W}_{sg}, d) = \int \text{Segre}(24, \mathcal{E}_d) \cap [\mathbb{W}'_{rc}] = \sum_f \frac{c_{24}^f(-\mathcal{E}_d)}{c_{24}^f(\mathcal{T}\mathbb{W}'_{rc})}, \quad (4.31)$$

onde a última igualdade segue da fórmula de resíduos de Bott.

4.3.1 O espaço de parâmetros

Analogamente ao caso de superfícies cúbicas regradas em \mathbb{P}^4 (vide seção 4.2), temos que \mathbb{W}_{sg} é obtido como a explosão da variedade das redes de quádricas determinantis $\mathbb{X} \subset \mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$ ao longo da subvariedade Z , consistindo nas redes de quádricas da forma $L_0 \cdot \langle L_0, L_1, L_2 \rangle$, com L_i sendo formas lineares. No diagrama (4.32) temos um resumo do exposto:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{W}_{sg} & = & \tilde{\mathbb{X}} & \supset & \tilde{\mathbb{E}} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2) & \supset & \mathbb{X} & \supset & Z & & \end{array} \quad (4.32)$$

4.3.2 Aplicando Bott

Novamente, tomamos o toro $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$ agindo diagonalmente sobre $(\mathbb{C}^6)^\vee$ via $t \circ x_i = t^{w_i} x_i$, com pesos apropriados, digamos:

$$w_0 = 11, w_1 = 17, w_2 = 32, w_3 = 55, w_4 = 95, w_5 = 160. \quad (4.33)$$

Temos ações naturais induzidas sobre $\mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$, $\mathbb{X} \subset \mathbb{G}(3, \mathcal{F}_2)$ e $\tilde{\mathbb{X}}$ de forma que os pontos fixos sejam isolados. A descrição dos pontos fixos e as contribuições numéricas necessárias a aplicação da fórmula de resíduos de Bott seguem de forma totalmente análoga

à seção 4.2. Por exemplo, os pontos fixos da ação induzida sobre \mathbb{X} são projetivamente equivalentes aqueles listados em (1) - (5), alterando somente a quantidade de pontos fixos em cada classe de equivalência, a saber: 180, 20, 120, 15 e 60. Para os 335 pontos, oriundos dos tipos (1) - (4), que estão fora do centro de explosão o cálculo das contribuições na fórmula de resíduos de Bott é feito diretamente sobre \mathbb{X} (vide subseção 4.2.2), com os pontos fixos do tipo (4) tratados como na subseção 4.2.2. A representação do $\mathcal{T}_f\mathbb{X}$ em cada ponto fixo dos tipos (1) - (5) segue o mesmo procedimento do Apêndice G, trocando-se o valor de $n = 4$ para $n = 5$ no código da seção G.1 . Já os pontos fixos do tipo (5): $\langle x_i^2, x_i x_j, x_i x_k \rangle$, dão origem aos pontos fixos no divisor excepcional $\tilde{\mathbb{E}}$, da forma:

$$f' = \langle x_i^2, x_i x_j, x_i x_k, [c] \rangle, \quad (4.34)$$

onde $[c]$ indica a classe de uma das seguintes formas cúbicas:

$$x_j^3, x_j^2 x_k, x_j x_k^2, x_k^3, x_j^2 x_l, x_j x_k x_l, x_k^2 x_l, x_j^2 x_m, x_j x_k x_m, x_k^2 x_m, x_j^2 x_n, x_j x_k x_n, x_k^2 x_n,$$

correspondendo aos geradores monomiais da fibra do divisor excepcional.

Para os pontos fixos f' temos a contribuição imediata

$$f' \Rightarrow \frac{c_{24}^{f'}(-\mathcal{E}_d)}{c_{24}^{f'}(\mathcal{T}\tilde{\mathbb{X}})}, \quad (4.35)$$

em que sobre o denominador devemos considerar a contribuição proveniente do divisor excepcional $\tilde{\mathbb{E}}$. Sobre $f = \langle x_i^2, x_i x_j, x_i x_k \rangle$ temos a sequência de representações

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_f Z \rightarrow \mathcal{T}_f \mathbb{X} \rightarrow \mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}} \rightarrow 0,$$

e das fórmulas para os espaços tangentes $\mathcal{T}_f Z$ e $\mathcal{T}_f \mathbb{X}$ segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}} &= \mathcal{T}_f \mathbb{X} - \mathcal{T}_f Z \\ &= (x_i x_j x_k)^\vee \otimes (x_j^3 + 2x_j^2 x_k + 2x_j x_k^2 + x_k^3 + x_i x_j x_l + x_j^2 x_l + x_i x_k x_l \\ &+ 2x_j x_k x_l + x_k^2 x_l + x_i x_j x_m + x_j^2 x_m + x_i x_k x_m + 2x_j x_k x_m + x_k^2 x_m \\ &+ x_i x_j x_n + x_j^2 x_n + x_i x_k x_n + 2x_j x_k x_n + x_k^2 x_n - ((x_i)^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - x_i)) \\ &+ (x_j + x_k)^\vee \otimes ((\mathcal{F}_1 - x_i) - (x_j + x_k))) \\ &= (x_i x_j x_k)^\vee \otimes (x_j^3 + x_j^2 x_k + x_j x_k^2 + x_k^3 + x_j^2 x_l + x_j x_k x_l + x_k^2 x_l \\ &+ x_j^2 x_m + x_j x_k x_m + x_k^2 x_m + x_j^2 x_n + x_j x_k x_n + x_k^2 x_n). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Como no caso de cúbicas reversas e superfícies cúbicas regradas, temos que por com-

paração direta da auto-decomposição dos espaços tangentes segue que

$$c \leftrightarrow \langle c \rangle = \frac{c}{x_i x_j x_k},$$

onde $\langle c \rangle$ indica um caracter específico da decomposição em auto-espacos do fibrado normal.

Para a contribuição do denominador em (4.35) obtemos o produto dos pesos da representação

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f'} \tilde{\mathbb{X}} &= \mathcal{T}_f \mathbb{Z} + \mathcal{T}_{[c]} \mathbb{P}(\mathcal{N}_{\mathbb{Z}/\mathbb{X}}) + \langle c \rangle \\ &= (x_i)^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - x_i) + (x_j + x_k)^\vee \otimes ((\mathcal{F}_1 - x_i) - (x_j + x_k)) \\ &+ (\mathcal{N}_{f' \mathbb{Z}/\mathbb{X}} - \langle c \rangle) \otimes \langle c \rangle^\vee + \langle c \rangle. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Fibras de \mathcal{E}_d

Análogo à seção 4.2, a família formada pelos subesquemas de \mathbb{P}^5 definido por \mathcal{I}_W^2 para algum $W \in \mathbb{W}_{sg}$ não é plana, e.g., os pontos fixos do tipo (4) : $\langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2 \rangle$ são membros legítimos de \mathbb{W}_{sg} (polinômio de Hilbert $p_{\mathbb{W}_{sg}}(t) = (1/2)t^3 + 2t^2 + (5/2)t + 1$), mas seu quadrado tem polinômio de Hilbert $(5/3)t^3 + (10/3)t + 1$ que é diferente do esperado, a saber: $p_{\mathbb{W}_{sg}^2} = (3/2)t^3 + t^2 + (3/2)t + 2$. A subvariedade de \mathbb{W}_{sg} que contém os pontos fixos do tipo (4), a qual vamos denotar por \mathbb{G} , é obtida como imagem da grassmanniana $\mathbb{G}(4, 6)$ via o mapa $\rho : \mathbb{G}(4, 6) \rightarrow \mathbb{P}^5$ que associa a cada $l \in \mathbb{G}(4, 6)$ a variedade de Segre limite obtida como quadrado do ideal definindo l .

Análogo à Proposição 4.7 temos que a explosão de \mathbb{X} - rede de quádras do tipo determinantal - ao longo de \mathbb{G} , que vamos denotar por $\widehat{\mathbb{X}}$, mergulha em $\mathbb{X} \times \mathbb{G}(6, \mathcal{F}_4)$ e a fibra do fibrado de formas quárticas sobre o divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$ é descrita como na Proposição 4.10.

A contribuição dos pontos fixos no divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$, provenientes dos pontos fixos da forma $f = \langle x_i^2, x_i x_j, x_j^2 \rangle$, segue os mesmos princípios como no caso de cúbicas reversas e superfície cúbica regrada. Primeiramente, a fibra $\widehat{\mathbb{E}}_f$ é o espaço projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{f \mathbb{G}/\mathbb{X}})$, em que a decomposição em auto-espacos de $\mathcal{N}_{f \mathbb{G}/\mathbb{X}}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{f\mathbb{G}/\mathbb{X}} &= \mathcal{T}_f\mathbb{W} - \mathcal{T}_f\mathbb{G} \\
&= (x_i^2x_j^2)^\vee \otimes (x_i^3x_k + 2x_i^2x_jx_k + 2x_ix_j^2x_k + x_j^3x_k + x_i^3x_l + 2x_i^2x_jx_l \\
&\quad + 2x_ix_j^2x_l + x_j^3x_l + x_i^3x_m + 2x_i^2x_jx_m + 2x_ix_j^2x_m + x_j^3x_m + x_i^3x_n \\
&\quad + 2x_i^2x_jx_n + 2x_ix_j^2x_n + x_j^3x_n) - (x_i + x_j)^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - (x_i + x_j)) \\
&= (x_i^2x_j^2)^\vee (x_i^3x_k + x_i^2x_jx_k + x_ix_j^2x_k + x_j^3x_k + x_i^3x_l + x_i^2x_jx_l + x_ix_j^2x_l \\
&\quad + x_j^3x_l + x_i^3x_m + x_i^2x_jx_m + x_ix_j^2x_m + x_j^3x_m + x_i^3x_n + x_i^2x_jx_n + x_ix_j^2x_n \\
&\quad + x_j^3x_n).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Note que os caracteres referentes à decomposição em auto-espacos de $\mathcal{N}_{f\mathbb{G}/\mathbb{X}}$ são todos distintos (16 ao todo), donde seque que sobre cada ponto fixo $f \in \mathbb{G}$, temos 16 pontos fixos isolados sobre o divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$. Daí segue que temos ao todo $240 (= 15 \times 16)$ pontos fixos sobre $\widehat{\mathbb{E}}$. Sobre cada um desses 240 pontos fixos o espaço tangente $\mathcal{T}_{f'}\widehat{\mathbb{X}}$ apresenta a seguinte decomposição em auto-espacos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{f'}\widehat{\mathbb{X}} &= \mathcal{T}_f\mathbb{G} + \mathcal{T}_{[q]}\mathbb{P}(\mathcal{N}_{\mathbb{G}/\mathbb{X}}) + \langle q \rangle \\
&= (x_i + x_j)^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - (x_i + x_j)) + (\mathcal{N}_{f\mathbb{G}/\mathbb{X}} - \langle q \rangle) \otimes \langle q \rangle^\vee + \langle q \rangle.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Além disso, da comparação direta da decomposição dos espacos tangentes, temos as seguinte relações

$$q \leftrightarrow \langle q \rangle = \frac{q}{x_i^2x_j^2},$$

onde $\langle q \rangle$ indica um caracter na decomposição do fibrado normal e q é a correspondente forma de grau 4 relacionada a esse caracter dentre as listadas abaixo:

$$\begin{aligned}
&x_i^3x_k, x_i^2x_jx_k, x_ix_j^2x_k, x_j^3x_k, x_i^3x_l, x_i^2x_jx_l, x_ix_j^2x_l, x_j^3x_l, \\
&x_i^3x_m, x_i^2x_jx_m, x_ix_j^2x_m, x_j^3x_m, x_i^3x_n, x_i^2x_jx_n, x_ix_j^2x_n, x_j^3x_n
\end{aligned} \tag{4.40}$$

A contribuição numérica do denominador em (4.31) referente aos pontos fixos no divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$ é obtida pelo produto dos pesos da decomposição em (4.39).

Indicamos na Tabela 4.4 cada uma das classes de isomorfismos de pontos fixos em \mathbb{W}_{sg} e os correspondentes pontos em $\mathbb{W}'sg$, bem como o número de pontos em cada classe.

Observação 4.14. *Todos os pontos fixos em \mathbb{W}'_{sg} possuem polinômio de Hilbert $p_{\mathbb{W}'_{sg}} = (3/2)t^3 + t^2 + (3/2)t + 2$.*

Em referência a Tabela 4.4, temos que os pontos fixos em \mathbb{W}'_{sg} dos tipos (1) - (4) são

Tipo	Pontos fixos em \mathbb{W}_{sg}	Pontos fixos em \mathbb{W}'_{sg}	# pontos
(1)	$\langle x_i x_j, x_j x_k, x_k x_l \rangle$	$\langle x_i^2 x_j^2, x_i x_j^2 x_k, x_i x_j x_k x_l, x_j^2 x_k^2, x_j x_k^2 x_l, x_k^2 x_l^2 \rangle$	180
(2)	$\langle x_i x_j, x_j x_k, x_i x_k \rangle$	$\langle x_i^2 x_j^2, x_i x_j^2 x_k, x_i^2 x_j x_k, x_j^2 x_k^2, x_i x_j x_k^2, x_i^2 x_k^2 \rangle$	20
(3)	$\langle x_i x_j, x_j x_k, x_i x_k \rangle$	$\langle x_i^2 x_j^2, x_i x_j x_k^2, x_i^2 x_j x_k, x_k^4, x_i x_k^3, x_i^2 x_k^2 \rangle$	120
(4)	$\langle x_i^2, x_i x_j, x_j^2 \rangle$	$\langle x_i^4, x_i^3 x_j, x_i^2 x_j^2, x_i x_j^3, x_j^4, [q] \rangle$	240 (= 15 × 16)
(5)	$\langle x_i^2, x_i x_j, x_i x_k, c \rangle$	$\langle x_i^2 \cdot \langle x_i^2, x_i x_j, x_i x_k, c, x_j^2, x_j x_k, x_k^2 \rangle, x_i x_j c, x_i x_k c, c^2 \rangle$	780 (= 60 × 13)
Total de pontos fixos			1340

Tabela 4.4: Pontos fixos em \mathbb{W}_{sg}

4-regular, enquanto os do tipo (5) são 6-regular. Como no caso de cúbicas reversas, segue que qualquer feixe ideal correspondendo a um ponto em \mathbb{W}'_{sg} é 6-regular no sentido de Castelnuovo-Mumford.

O procedimento de obtenção da representação das fibras de \mathcal{E}_d é análogo ao apresentado na seção 4.1, onde, a partir da regularidade 6, obtemos a representação da fibra de \mathcal{E}_d sobre o ponto fixo f tomando os monômios de grau d (ao todo $\binom{d+5}{5} - [(3/2) \times d^3 + d^2 + (3/2) \times d + 2]$) presentes no produto $\mathcal{E}_{6f} * \mathcal{S}_{d-6}$.

Temos as informações necessárias para o cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{sg}, d)$ via fórmula de resíduos de Bott e sabemos que o grau anterior é polinomial em d (Vide Proposição 1.9) de grau no máximo 120(= 5 × 24), donde segue que é suficiente encontrarmos $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{sg}, d)$ para 121 valores diferentes de d e, posteriormente, interpolar os resultados para obter o polinômio em questão. No entanto, por questões computacionais, conseguimos calcular até o momento o grau para $4 \leq d \leq 28$, cujos valores explicitamos na Tabela 4.5.

d	grau
4	4985292672535
5	38085453623924002125608
6	75285508677103874434199729447346
7	6919928722801305898152558631141006297978
8	42181954432466686484802366327946036350563667373
9	30538531184782134440883223805188165885850765266730973
10	4224340951726565859342587822879909669270072209918091111509
11	158437528281133532734337703310993668084277908103801228619349318
12	2080035353059957499641534559924163791462457116358313751435919907641
13	11549735996636189943619254985547139290129087463355134074887299468381440
14	31296770227603270473657644859463859788303319257226489697655766935282861144
15	46218251138854455896028288030807107836206397262026919058025989004860345865068
16	40573178025017053248163455791995253138333248830219749681901524680514920694647875
17	22696403460389782282918120220096612693066990902486735463037695748458355012102065130
18	8560094850432050145388608162764331545974912158826771912534187363304630242378140685505
19	2280218446179281906894436399299532691147069188695294809825377606946754403932028306244123
20	445913122370782785268625533245649250274532741301118606978525517483582671680154337345798650
21	66136044830890785552763166513088475675562647217232322960605533153943919181299528743949231995
22	7648060182749239379957328222725038044389468341441118678038359708033154622298562461760431031987
23	70612212380747079078375544027242773510506336035275026531817959540511125994738199269690002855831
24	53126049393404266440928946834127714486755547747259961078332514818104185788066175129628674092418346
25	3315561352388199144671538442416320830215174679718026171794913021436371907104234446224006732128647329
26	174334857471395667347731728239322112964231210603282356701591598514084204408291171080634141000772703155
27	782948298714351394499098694940745547636737747552625701320278751035638067417139596314040948040344857400
28	303991364820542511002698414336553281396075120749252336213971319871871164262548779281153647072907136671375

Tabela 4.5: (-:UAU:-) $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{sg}, d)$

No Apêndice H encontram-se a disposição do leitor os procedimentos e funções escritos no Macaulay2 [17] e Maple [24] utilizados para obter o $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{sg}, d)$ em (4.5).

Capítulo 5

Superfícies singulares ao longo de quárticas elípticas

Uma curva quártica elíptica é a interseção completa de um (único) feixe de superfícies quádricas. Avritzer & Vainsencher [35], [3] obtiveram uma descrição explícita da componente \mathbb{W}_{eqc} de quárticas elípticas do esquema de Hilbert $Hilb_{4t}(\mathbb{P}^3)$, a qual tem dimensão 16. Essa descrição foi utilizada em Ellingsrud & Strømme [12] para enumerar curvas na Calabi-Yau 3-folds e em Cukierman, Lopez & Vainsencher [7] para enumerar superfícies contendo uma curva quártica elíptica. G. Gotzmann [16] mostrou que $Hilb_{4t}(\mathbb{P}^3)$ é formado por duas componentes irredutíveis.

Para aplicarmos a fórmula de resíduos de Bott no cálculo do grau de $\Sigma(\mathbb{W}_{eqc}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d}$, a família de superfícies de grau d que contêm algum membro $W \in \mathbb{W}_{eqc}$ em seu lugar singular, utilizamos a descrição dos pontos fixos e respectivos tangentes explicitados em Araújo [2]. Aqui aparecem mais pontos fixos por conta da planificação da família formada pelos subesquemas de \mathbb{P}^3 definido por \mathcal{I}_W^2 para algum $W \in \mathbb{W}_{eqc}$ (vide Seção 5.2.4).

Como nos casos anteriores temos que

$$\deg \Sigma(\mathbb{W}_{eqc}, d) = \int \text{Segre}(16, \mathcal{E}_d) \cap [\mathbb{W}'_{eqc}] = \sum_f \frac{c_{16}^f(-\mathcal{E}_d)}{c_{16}^f(\mathcal{T}\mathbb{W}'_{eqc})}. \quad (5.1)$$

Na Figura 5.1 encontramos um exemplo de superfície de grau 6 singular ao longo da quártica elíptica $\langle x_0^2 + x_1^2 - x_3^2, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \rangle$ (redutível) no aberto afim $x_3 = 1$. Ao passo que na Figura 5.2 vemos um outro exemplo de uma superfície de grau 6 cujo lugar singular contém a quártica elíptica $\langle x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 100x_3^2, x_0^2 + 4x_1^2 + 90x_2x_3 \rangle$ (agora não redutível) no aberto afim $x_3 = 1$.

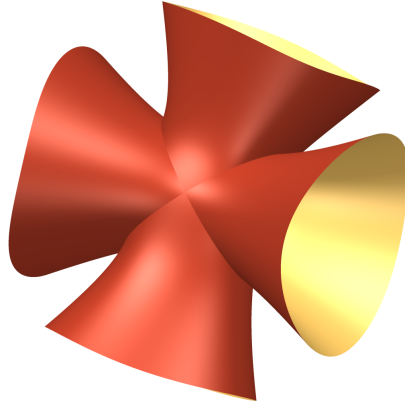


Figura 5.1: $-16x_0^6 - 6x_0^5x_1 + 42x_0^4x_1^2 - 9x_0^3x_1^3 + 63x_0^2x_1^4 - x_0x_1^5 + 19x_1^6 - 18x_0^5x_2 + 4x_0^4x_1x_2 - 14x_0^3x_1^2x_2 + 4x_0^2x_1^3x_2 - 3x_0x_1^4x_2 + 42x_0^4x_2^2 + 3x_0^3x_1x_2^2 + 13x_0^2x_1^2x_2^2 + 7x_0x_1^3x_2^2 - 6x_1^4x_2^2 + 22x_0^3x_2^3 - 4x_0^2x_1x_2^3 + 8x_0x_1^2x_2^3 - 4x_1^3x_2^3 - 2x_0^2x_2^4 + 2x_0x_1x_2^4 + 2x_1^2x_2^4 - 7x_0x_2^5 - 5x_2^6 - 4x_0^5 - 2x_0^4x_1 - 11x_0^3x_1^2 + 3x_0^2x_1^3 - 2x_0x_1^4 + x_1^5 - 13x_0^4x_2 - 21x_0^2x_1^2x_2 - 6x_1^4x_2 - 3x_0^3x_2^2 + 7x_0^2x_1x_2^2 + 7x_0x_1^2x_2^2 - x_1^3x_2^2 + 5x_0^2x_2^3 + 9x_1^2x_2^3 + 5x_0x_2^4 - 4x_1x_2^4 + 2x_2^5 - 16x_0^4 + 9x_0^3x_1 - 66x_0^2x_1^2 + 2x_0x_1^3 - 29x_1^4 + 14x_0^3x_2 - 4x_0^2x_1x_2 + 6x_0x_1^2x_2 - 5x_0^2x_2^2 - 7x_0x_1x_2^2 + 8x_1^2x_2^2 - 8x_0x_2^3 + 4x_1x_2^3 - 8x_2^4 + 11x_0^3 - 3x_0^2x_1 + 4x_0x_1^2 - 2x_1^3 + 21x_0^2x_2 + 12x_1^2x_2 - 7x_0x_2^2 + x_1x_2^2 - 9x_2^3 + 3x_0^2 - x_0x_1 + x_1^2 - 3x_0x_2 - 2x_2^2 - 2x_0 + x_1 - 6x_2 + 9$

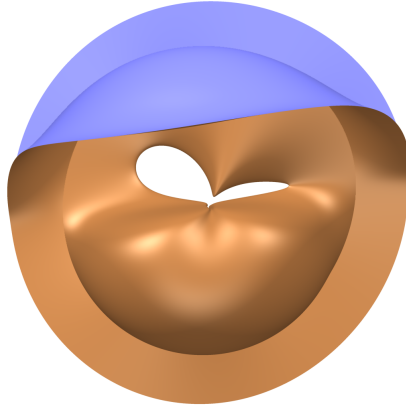


Figura 5.2: $(87017/364500000)x_0^6 - (137/270000)x_0^5x_1 - (57667/12150000)x_0^4x_1^2 - (29/33750)x_0^3x_1^3 - (975509/24300000)x_0^2x_1^4 - (437/270000)x_0x_1^5 - (25419073/364500000)x_1^6 + (18335489/2025000)x_0^5x_2 + (41726021/8100000)x_0^4x_1x_2 + (15068581/810000)x_0^3x_1^2x_2 + (17729639/1620000)x_0^2x_1^3x_2 + (10671493/1012500)x_0x_1^4x_2 + (12869111/2025000)x_1^5x_2 + (413143379/81000000)x_0^4x_2^2 - (2/1875)x_0^3x_1x_2^2 + (425307677/40500000)x_0^2x_1^2x_2^2 - (1/15000)x_0x_1^3x_2^2 + (109296941/20250000)x_1^4x_2^2 + (8074997/450000)x_0^3x_2^3 + (9079999/900000)x_0^2x_1x_2^3 + (1999997/112500)x_0x_1^2x_2^3 + (2329999/225000)x_1^3x_2^3 + (2840603/281250)x_0^2x_2^4 - (7/10000)x_0x_1x_2^4 + (46798403/4500000)x_1^2x_2^4 + 9x_0x_2^5 + 5x_1x_2^5 + 5x_2^6 + (1341817/135000)x_0^5 + (1145053/202500)x_0^4x_1 + (1336819/27000)x_0^3x_1^2 + (1157101/40500)x_0^2x_1^3 + (5268037/135000)x_0x_1^4 + (19285417/810000)x_1^5 + (22737131/2025000)x_0^4x_2 + (7/1500)x_0^3x_1x_2 + (22473893/405000)x_0^2x_1^2x_2 - (107/1500)x_0x_1^3x_2 + (174916543/4050000)x_1^4x_2 + (46543/1875)x_0^3x_2^2 + (744013/30000)x_0^2x_1x_2^2 + (1714349/15000)x_0x_1^2x_2^2 + (2256043/30000)x_1^3x_2^2 + (1513837/75000)x_0^2x_2^3 + (3/100)x_0x_1x_2^3 + (8016881/150000)x_1^2x_2^3 - 5x_0x_2^4 + 8x_1x_2^4 + 9x_2^5 + (198721/32400)x_0^4 + (8/75)x_0^3x_1 + (19985293/405000)x_0^2x_1^2 + (1/150)x_0x_1^3 + (16075727/162000)x_1^4 - (1018634/1125)x_0^3x_2 - (4419467/9000)x_0^2x_1x_2 - (4148009/4500)x_0x_1^2x_2 - (2088529/4500)x_1^3x_2 + 8x_0^2x_2^2 - x_0x_1x_2^2 + 7x_1^2x_2^2 - 8x_0x_2^3 + 6x_1x_2^3 + x_2^4 - (450049/450)x_0^3 - (124997/225)x_0^2x_1 - (900017/225)x_0x_1^2 - (999949/450)x_1^3 - 5x_0^2x_2 - 3x_0x_1x_2 + 9x_1^2x_2 + 5x_0x_2^2 + 4x_1x_2^2 + x_2^3 - x_2^0 - 7x_0x_1 - 4x_1^2 + x_0x_2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_0 + x_1 - 7x_2 + 7$

5.1 O espaço de parâmetros

A seguir fazemos um resumo/transcrição da construção de \mathbb{W}_{eqc} como explicado em Avritzer & Vainsencher [35], explicitada no diagrama (5.2) e que aparece em [7]. Ponha $\mathbb{X} = \mathbb{G}(2, \mathcal{F}_2)$, a grassmanniana de feixes de quádricas em \mathbb{P}^3 .

$$\begin{array}{rcccl}
 \mathbb{G}(19, \mathcal{F}_4) \supset \mathbb{W}_{eqc} & = & \widehat{\mathbb{X}} & \longleftarrow & \widehat{\mathbb{E}} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{G}(8, \mathcal{F}_3) \times \mathbb{X} & \supset & \widetilde{\mathbb{X}} & \supset & \widetilde{\mathbb{E}} & \supset & \widetilde{Y} & (5.2) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{G}(2, \mathcal{F}_2) & = & \mathbb{X} & \supset & Z & \supset & Y
 \end{array}$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l}
 Z \cong \check{\mathbb{P}}^3 \times \mathbb{G}(2, \mathcal{F}_1) \text{ consiste em feixes com um plano fixado;} \\
 Y \cong \{(p, l) | p \supset l\} = \text{órbita fechada de } Z; \\
 \widetilde{Y} \rightarrow Y = \mathbb{P}^2\text{-fibrado de divisores de grau 2 sobre a reta variável } l \subset p; \\
 \widetilde{\mathbb{X}} = \text{explosão de } \mathbb{X} \text{ ao longo de } Z \\
 \widehat{\mathbb{X}} = \text{explosão de } \widetilde{\mathbb{X}} \text{ ao longo de } \widetilde{Y}
 \end{array} \right.$$

$$Z = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama: um retângulo com uma linha vertical no centro} \end{array} \right\} \supset Y = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama: um retângulo com duas linhas diagonais} \end{array} \right\} \leftarrow \widetilde{Y} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama: um retângulo com duas linhas diagonais e dois pontos} \end{array} \right\}$$

Seja

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_2 \times \mathbb{X}$$

o subfibrado tautológico de posto 2 sobre nossa grassmanniana de feixes de quádricas. Existe um mapa natural de fibrados vetoriais sobre \mathbb{X} induzido por multiplicação,

$$\mu_3 : \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_3 \times \mathbb{X},$$

com posto genérico 8. Temos uma queda de posto precisamente sobre Z . Daí temos induzido um mapa racional $\kappa : \mathbb{X} \dashrightarrow \mathbb{G}(8, \mathcal{F}_3)$. Explodindo \mathbb{X} ao longo de Z , encontramos o fecho $\widetilde{\mathbb{X}} \subset \mathbb{G}(8, \mathcal{F}_3) \times \mathbb{X}$ do gráfico de κ . Similarmente, sobre $\widetilde{\mathbb{X}}$ temos um subfibrado $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}_3 \times \widetilde{\mathbb{X}}$ de posto 8 e um mapa de multiplicação

$$\mu_4 : \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_4 \times \widetilde{\mathbb{X}}$$

com posto genérico 19. O esquema de zeros de $\wedge^{19} \mu_4$ é igual a \widetilde{Y} . De fato, pode-se verificar que cada fibra de \mathcal{B} é um sistema linear de cúbricas que

- ou tem local de base igual a uma curva com polinômio de Hilbert $p_{\mathbb{W}_{eqc}}(t) = 4t$

- ou é da forma $p \cdot \mathcal{F}_2^{**}$, significando o sistema linear com componente fixada um plano p , e \mathcal{F}_2^{**} denotando um espaço de quádricas de dimensão 8 que define um subesquema de p de dimensão 0 e grau 2.

O divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$ é um \mathbb{P}^8 -fibrado sobre \widetilde{Y} . A fibra de $\widehat{\mathbb{E}}$ sobre $(p, y_1 + y_2) \in \widetilde{Y}$ é o sistema de curvas quárticas no plano p que são singulares no "doublet" $y_1 + y_2$. Precisamente, se x_0, \dots, x_3 denotam as coordenadas homogêneas sobre \mathbb{P}^3 , assumindo $p := x_0$, $l = \langle x_0, x_1 \rangle$, um típico "doublet" tem ideal homogêneo da forma $\langle x_0, x_1, f(x_2, x_3) \rangle$, com $\deg f = 2$. Nosso sistema de quárticas planas está no ideal $\langle x_1, f \rangle^2 = \langle x_1^2, x_1 f, f^2 \rangle$. Dada uma quártica não-nula g neste ideal, podemos formar o ideal $J = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_0 f, g \rangle$. Verifica-se que J contém precisamente 19 quárticas independentes e seu polinômio de Hilbert é correto. De fato, qualquer tal ideal é 4-regular (no sentido de Castelnuovo-Mumford).

5.2 Aplicando Bott

Novamente, tomamos o toro $\mathbb{T} = \mathbb{C}^*$ agindo diagonalmente sobre $(\mathbb{C}^4)^\vee$ via $t \circ x_i := t^{w_i} x_i$, com pesos apropriados (ver Apêndice I), digamos:

$$w_0 = 55, w_1 = 95, w_2 = 160, w_3 = 267. \quad (5.3)$$

A ação de T induz ações naturais sobre $\mathbb{X} = \mathbb{G}(2, \mathcal{F}_2)$, $\widetilde{\mathbb{X}}$ e $\widehat{\mathbb{X}}$. Na sequência damos uma descrição dos pontos fixos dessa ação, bem como as contribuições necessárias à aplicação da fórmula de Bott.

5.2.1 Pontos fixos em \mathbb{X}

Para uma escolha adequada dos pesos w_0, \dots, w_3 , o mergulho de Plücker mostra que os pontos fixos são isolados, dados pelos feixes de monômios da forma

$$\langle x_i x_j, x_r x_s \rangle, 0 \leq i, j, r, s \leq 3, x_i x_j \neq x_r x_s. \quad (5.4)$$

Isto nos dá um total de $\binom{3+2}{2} = \binom{10}{2} = 45$ pontos fixos.

É fácil observar que qualquer um dos pontos fixos da ação de \mathbb{T} sobre \mathbb{X} é projetivamente equivalente a um dos 5 tipos:

$$\begin{array}{lll} (1) \langle x_0^2, x_1^2 \rangle & (3) \langle x_0 x_1, x_2 x_3 \rangle & (5) \langle x_0 x_1, x_0 x_2 \rangle \\ (2) \langle x_0^2, x_1 x_2 \rangle & (4) \langle x_0^2, x_0 x_1 \rangle & \end{array}$$

Observação 5.1. *Existem vários pontos fixos sobre cada classe de isomorfismo acima. De fato, é fácil verificar que permutando as variáveis de um dado \mathbb{P}^3 o número de pontos*

fixos do tipo (1) ao (5) são, respectivamente, 6, 12, 3, 12 e 12.

Os pontos fixos que correspondem a um feixe com componente fixa x_i , isto é, são da forma $\langle x_i x_j, x_i x_k \rangle$ pertencem ao primeiro centro de explosão Z (vide 5.2). Deste modo, o primeiro centro de explosão Z contém $24(= (3+1) \cdot \binom{3+1}{2})$ pontos fixos, aqueles provenientes dos tipos (4) e (5). Os outros 21 pontos fixos, provenientes dos tipos (1), (2) e (3) estão fora do centro de explosão Z , bem como do segundo centro de explosão \tilde{Y} (vide 5.2). Dessa forma, para estes 21 pontos fixos a contribuição é calculada sobre \mathbb{X} , ou seja, os divisores excepcionais não contribuem nestes pontos fixos.

Portanto, temos contribuições imediatas para (5.1)

$$f = \langle x_i x_j, x_r x_s \rangle \Rightarrow \frac{c_{16}^f(-\mathcal{E}_d)}{c_{16}^f(\mathcal{T}\mathbb{X})},$$

onde o denominador $c_{16}^f(\mathcal{T}\mathbb{X})$ é o produto dos pesos da representação

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_f \mathbb{X} &= (\mathcal{F}_2 / \mathcal{A}|_f) \otimes \mathcal{A}|_f^\vee \\ &= \left(\left(\sum_{0 \leq i \leq j \leq 2} t^{w_i + w_j} \right) / \langle x_i x_j, x_r x_s \rangle \right) \otimes \langle x_i x_j, x_r x_s \rangle^\vee. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Por exemplo, tomando o ponto fixo do tipo (1), $f = \langle x_0^2, x_1^2 \rangle$, temos que a representação em (5.5) exprime-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_f \mathbb{X} &= \langle x_0 x_1, x_0 x_2, x_0 x_3, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2^2, x_2 x_3, x_3^2 \rangle \otimes \langle x_0^2, x_1^2 \rangle^\vee \\ &= \frac{x_0 x_1}{x_0^2} + \frac{x_0 x_2}{x_0^2} + \frac{x_0 x_3}{x_0^2} + \frac{x_1 x_2}{x_0^2} + \frac{x_1 x_3}{x_0^2} + \frac{x_2^2}{x_0^2} + \frac{x_2 x_3}{x_0^2} + \frac{x_3^2}{x_0^2} + \frac{x_0 x_1}{x_1^2} \\ &\quad + \frac{x_0 x_2}{x_1^2} + \frac{x_0 x_3}{x_1^2} + \frac{x_1 x_2}{x_1^2} + \frac{x_1 x_3}{x_1^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_2 x_3}{x_1^2} + \frac{x_3^2}{x_1^2} \end{aligned}$$

onde $\frac{x_r x_s}{x_i^2}$ indica o \mathbb{T} -espaço com peso $w_r + w_s - 2w_i$.

Observação 5.2. A contribuição do numerador em (5.1) para cada ponto fixo será descrita na seção 5.2.4.

5.2.2 Pontos fixos em $\tilde{\mathbb{X}}$

Consideremos a fibra de $\tilde{\mathbb{E}}$ sobre $f = \langle x_i x_j, x_i x_k \rangle$, ponto fixo em Z . De acordo com Avritzer & Vainsencher [3] esta fibra é dada por

$$\mathbb{P}^{3^2-1} \cong \mathbb{P} \left(\mathcal{F}_3^{\langle x_j, x_k \rangle} / x_i \cdot \mathcal{F}_2^{\langle x_j, x_k \rangle} \right) \quad (5.6)$$

isto é, o espaço projetivo de formas cúbicas que anulam-se ao longo da reta $l = \langle x_j, x_k \rangle$ módulo x_i vezes as formas quadráticas que anulam-se sobre a mesma reta l . Daí segue que os pontos fixos do tipo (4) dão origem aos pontos fixos no divisor excepcional $\tilde{\mathbb{E}}$ da forma:

$$\langle x_i \cdot \langle x_i, x_j \rangle, [c] \rangle, \quad (5.7)$$

onde $[c]$ indica a classe de uma forma cúbica descrita em (5.6), ou seja, c é uma das formas cúbicas $x_i x_k^2, x_i x_k x_l, x_i x_l^2, x_j^3, x_j^2 x_k, x_j^2 x_l, x_j x_k^2, x_j x_k x_l, x_j x_l^2$.

De modo análogo, os pontos fixos do tipo (5) dão origem aos pontos fixos no divisor excepcional $\tilde{\mathbb{E}}$ da forma:

$$\langle x_i \cdot \langle x_j, x_k \rangle, [c] \rangle, \quad (5.8)$$

onde $[c]$ indica a classe de uma forma cúbica descrita em (5.6), ou seja, c é uma das formas cúbicas $x_j^2 x_k, x_j x_k^2, x_j x_k x_l, x_k^3, x_k^2 x_l, x_k x_l^2, x_j^3, x_j^2 x_l, x_j x_l^2$.

Dessa forma, cada ponto fixo dos tipos (4) e (5) produzem 9 pontos fixos sobre o divisor excepcional $\tilde{\mathbb{E}}$. No entanto, temos que desconsiderar os pontos fixos que estão no segundo centro de explosão \tilde{Y} (vide (5.2)). Da descrição de \tilde{Y} temos que os únicos pontos fixos sobre este último são aqueles do tipo

$$\langle x_i \cdot \langle x_i, x_j, q \rangle \rangle, \quad (5.9)$$

onde q é uma das formas quadráticas: $x_k^2, x_k x_l$ ou x_l^2 , ou seja, q é uma forma quadrática que não se anula na reta $\langle x_i, x_j \rangle$. Portanto, os pontos fixos dos tipos (4) e (5) dão origem, a menos de permutação das variáveis, a $9+9-3 = 15$ pontos fixos fora do segundo centro de explosão \tilde{Y} . Para estes, a contribuição para (5.1) é calculada sobre $\tilde{\mathbb{X}}$ e o primeiro divisor excepcional $\tilde{\mathbb{E}}$ contribui nestes pontos fixos.

Para cada ponto fixo $f' = \langle x_i \cdot \langle x_j, x_k \rangle, [c] \rangle$, onde $[c]$ indica a classe da forma cúbica, temos a seguinte contribuição:

$$f' = \langle x_i \cdot \langle x_j, x_k \rangle, [c] \rangle \Rightarrow \frac{c_{16}^{f'}(-\mathcal{E}_d)}{c_{16}^{f'}(\mathcal{T}\tilde{\mathbb{X}})}. \quad (5.10)$$

Assim, para obtermos as contribuições do divisor excepcional $\tilde{\mathbb{E}}$ e do fibrado tangente $\mathcal{T}_{f'}\tilde{\mathbb{X}}$, precisamos lembrar que o divisor excepcional $\tilde{\mathbb{E}} \rightarrow Z$ é o fibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Z/\mathbb{X}})$. Agora, sobre $f = \langle x_i x_j, x_i x_k \rangle$, obtemos a sequência de representações

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_f Z \rightarrow \mathcal{T}_f \mathbb{X} \rightarrow \mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}} \rightarrow 0$$

e a partir das fórmulas para o espaço tangente da grassmanniana $\mathcal{T}_f \mathbb{X}$ e $\mathcal{T}_f Z$, escritos como decomposição de auto-espacos, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{fZ/\mathbb{X}} &= \mathcal{T}_f \mathbb{X} - \mathcal{T}_f Z \\ &= (x_i x_j + x_i x_k)^\vee \otimes (\mathcal{F}_2 - (x_i x_j + x_i x_k)) \\ &\quad - (\langle x_i \rangle^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - x_i) + (x_j + x_k)^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - (x_j + x_k))) \\ &= (x_i x_j + x_i x_k)^\vee \otimes (\mathcal{F}_2 - (x_i x_j + x_i x_k)) \\ &\quad - (\langle x_i \rangle^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - x_i) + (x_i x_j + x_i x_k)^\vee \otimes (x_i \mathcal{F}_1 - (x_i x_j + x_i x_k))) \\ &= (x_i x_j + x_i x_k)^\vee \otimes (\mathcal{F}_2 - x_i \mathcal{F}_1) - \langle x_i \rangle^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - x_i) \\ &= \langle x_i x_j x_k \rangle^\vee \otimes (x_k \mathcal{F}_2 + x_j \mathcal{F}_2 - x_i (x_j + x_k) \mathcal{F}_1 - x_j x_k \mathcal{F}_1 + x_i x_j x_k) \\ &= \langle x_i x_j x_k \rangle^\vee \otimes \left(\mathcal{F}_3^{\langle x_j, x_k \rangle} / x_i \cdot \mathcal{F}_2^{\langle x_j, x_k \rangle} \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Por comparação direta da descrição geométrica e dos pesos obtidos pela decomposição em auto-espacos do fibrado normal, obtemos

$$c \leftrightarrow \langle c \rangle = \frac{c}{x_i x_j x_k},$$

onde $\langle c \rangle$ indica o caracter da decomposição em auto-espacos do fibrado normal correspondente à cúbica c . E para a contribuição do denominador em (5.10) obtemos o produto dos pesos da representação

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f'} \tilde{\mathbb{X}} &= \mathcal{T}_f Z + \mathcal{T}_{[c]} \mathbb{P}(\mathcal{N}_{Z/X}) + \langle c \rangle \\ &= \langle x_i \rangle^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - x_i) + (x_j + x_k)^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - (x_j + x_k)) \\ &\quad + ((x_i x_j + x_i x_k)^\vee \otimes (\mathcal{F}_2 - x_i \mathcal{F}_1) - \langle x_i \rangle^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - x_i) - \langle c \rangle) \otimes \langle c \rangle^\vee \\ &\quad + \langle c \rangle \end{aligned} \tag{5.12}$$

5.2.3 Pontos fixos em $\widehat{\mathbb{X}}$

De modo análogo, consideremos a fibra de $\widehat{\mathbb{E}}$, divisor excepcional da explosão de $\tilde{\mathbb{X}}$ ao longo de \tilde{Y} , sobre o ponto fixo $x_i \cdot \langle x_i, x_j, q \rangle$ (vide (5.9)) em \tilde{Y} , a qual, cf. [3], é dada por

$$\mathbb{P}^8 \cong \mathbb{P} \left(\mathcal{F}_4^{\langle x_i, x_j, q \rangle^2} / x_i \cdot \mathcal{F}_3^{\langle x_i, x_j, q \rangle} \right), \tag{5.13}$$

isto é, o espaco projetivo das formas de grau 4 contidas no ideal $\langle x_i, x_j, q \rangle^2$ módulo x_i vezes as formas cúbicas contidas no ideal $\langle x_i, x_j, q \rangle$.

Agora, cada ponto fixo sobre o segundo centro de explosão \tilde{Y} (vide (5.9)), produz 9 pontos fixos sobre o divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$, a saber aqueles da forma

$$\langle x_i \cdot \langle x_i, x_j, q \rangle, [q_4] \rangle, \tag{5.14}$$

onde $[q_4]$ indica a classe de uma forma de grau 4 descrita por (5.13). Portanto, a menos de permutação das variáveis, temos um total de $27 (= 3 \times 9)$ pontos fixos sobre o divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}}$. Sobre estes pontos a contribuição dos pesos é calculada sobre $\widehat{\mathbb{X}}$ e os divisores excepcionais também contribuem para este cálculo. Assim, a partir de (5.1), temos que

$$f'' = (x_i \cdot \langle x_i, x_j, q \rangle, [q_4]) \Rightarrow \frac{c_{16}^{f''}(-\mathcal{E}_d)}{c_{16}^{f''}(\mathcal{T}\widehat{\mathbb{X}})}. \tag{5.15}$$

Sabemos que o divisor excepcional $\widehat{\mathbb{E}} \rightarrow \tilde{Y}$ é dado como a projetivização do fibrado normal, $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{\tilde{Y}/\tilde{\mathbb{X}}})$. Agora, sobre $f' = (x_i \cdot \langle x_i, x_j, q \rangle)$, obtemos a sequência de representações

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_{f'} \tilde{Y} \rightarrow \mathcal{T}_{f'} \tilde{\mathbb{X}} \rightarrow \mathcal{N}_{f' \tilde{Y}/\tilde{\mathbb{X}}} \rightarrow 0$$

e a partir das fórmulas para os espacos tangentes $\mathcal{T}_{f'} \tilde{Y}$ e $\mathcal{T}_{f'} \tilde{\mathbb{X}}$, escritos como decomposição

de auto-espacos, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{f', \tilde{Y}/\tilde{\mathbb{X}}} &= \mathcal{T}_{f'}\tilde{\mathbb{X}} - \mathcal{T}_{f'}\tilde{Y} = (\mathcal{T}_f Z + \mathcal{T}_{[c]}\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Z/X}) + \langle c \rangle) - \mathcal{T}_{f'}\tilde{Y} \\
&= \langle x_i \rangle^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - x_i) + (x_i + x_j)^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - (x_i + x_j)) \\
&+ \langle x_i q \rangle^\vee \otimes (x_i \mathcal{F}_2 + x_j \mathcal{F}_2 - x_i x_j \mathcal{F}_1 - x_i(x_i \mathcal{F}_1 + x_j \mathcal{F}_1 - x_i x_j) - x_i q) \\
&+ \langle \frac{x_i q}{x_i^2 x_j} \rangle - \langle x_i \rangle^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - x_i) + \langle x_j \rangle^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - (x_i + x_j)) \\
&- \langle q \rangle^\vee \otimes (\mathcal{F}_2 - x_i \mathcal{F}_1 - x_j \mathcal{F}_1 + x_i x_j \mathcal{F}_1 - q) \\
&= \langle x_i x_j q \rangle^\vee \otimes \left(\mathcal{F}_4^{\langle x_i, x_j, q \rangle^2} / x_i \cdot \mathcal{F}_3^{\langle x_i, x_j, q \rangle^2} \right).
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Por comparaçao direta da descriçao geométrica e dos pesos obtidos pela decomposiçao em auto-espacos do fibrado normal, obtemos

$$q_4 \leftrightarrow \langle q_4 \rangle = \frac{q_4}{x_i x_j q},$$

e para a contribuico do denominador em (5.15) obtemos o produto dos pesos da representaçao

$$\mathcal{T}_{f'}\hat{\mathbb{X}} = \mathcal{T}_{f'}\tilde{Y} + \mathcal{T}_{[q_4]}\mathbb{P}(\mathcal{N}_{\tilde{Y}/\tilde{\mathbb{X}}}) + \langle q_4 \rangle. \tag{5.17}$$

5.2.4 Fibras de \mathcal{E}_d

Para determinar a contribuico do numerador em (5.1), precisamos conhecer a representaçao da fibra de \mathcal{E}_d sobre cada um dos pontos fixos. Como no caso de redes de quadricas do tipo determinantal (vide Capitulo 4), a familia formada pelos subesquemas de \mathbb{P}^3 definido por \mathcal{I}_W^2 para algum $W \in \mathbb{W}_{eqc}$ não é plana. De fato, os pontos fixos do tipo

$$\langle x_i \cdot \langle x_i, x_j \rangle, [c] \rangle, \tag{5.18}$$

onde $[c]$ indica a classe de uma forma cubica do tipo $x_j^2 \cdot (\mathcal{F}_1 / \langle x_i \rangle)$, são membros legítimos de \mathbb{W}_{eqc} (polinômio de Hilbert $p_{\mathbb{W}_{eqc}}(t) = 4t$), mas seu quadrado tem polinômio de Hilbert "ruim", a saber $13t - 20$, enquanto o esperado é $12t - 16$.

As contas locais (vide Apêndice I.1) mostram que a variedade \mathbb{M} descrita no Lema 5.4 é o local onde \mathbb{W}' deixa de ser plana. Sejam $\check{\mathbb{P}}^3$ o espaco projetivo dual com sequencia tautologica

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-1) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{F}_1/\mathcal{L}, \tag{5.19}$$

$\mathbb{G}(2, \mathcal{F}_1)$ a grassmanniana de retas em \mathbb{P}^3 com sequencia tautologica

$$\mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathcal{F}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{Q}, \tag{5.20}$$

com $rk(\mathcal{S}) = 2$ e por fim, escrevemos $\mathbb{X} = \mathbb{G}(2, S_2(\mathcal{F}_1))$ para a variedade grassmanniana de feixes de quadricas em \mathbb{P}^3 e

$$\mathcal{A} \twoheadrightarrow S_2(\mathcal{F}_1) \twoheadrightarrow S_2(\mathcal{F}_1)/\mathcal{A} \tag{5.21}$$

a sequência tautológica de \mathbb{X} , onde o $\text{rk}(\mathcal{A}) = 2$.

Observação 5.3. Em referência ao diagrama 5.2 temos que um ponto $\tilde{e} \in \tilde{\mathbb{E}}$ pode ser escrito como uma trinca $\langle H, L, C \rangle$, onde $\langle H, L \rangle \in Z = \check{\mathbb{P}}^3 \times \mathbb{G}(2, \mathcal{F}_1)$ e $C \in \mathbb{P}(S_3 \mathcal{F}_1^L / H \cdot S_2 \mathcal{F}_1^L)$ (cf. Avritzer & Vainsencher [3], Corolário 1.6, pág. 2999).

Lema 5.4. Seja $\mathbb{M} = \mathbb{P}((\mathcal{S}/\mathcal{L})^2 \otimes \mathcal{F}_1/\mathcal{L}) \times_{\mathbb{X}} Y$ o \mathbb{P}^2 -fibrado sobre Y que parametriza as trincas $\langle H, L, C \rangle$, onde H denota um plano, $L = \langle H, H' \rangle$ uma reta no plano H e C uma cúbica da forma $(H')^2 \cdot (H'')$ com $H'' \in \mathcal{F}_1$ um representante de $\overline{H''} \in \mathcal{F}_1/\mathcal{L}|_H$. Então, temos um mergulho

$$\mathbb{M} = \mathbb{P}((\mathcal{S}/\mathcal{L})^2 \otimes \mathcal{F}_1/\mathcal{L}) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{R}_3/\mathcal{L} \otimes \mathcal{R}_2) \cong \tilde{\mathbb{E}},$$

onde $\mathcal{R}_i = \ker(S_i(\mathcal{F}_1) \rightarrow S_i(\mathcal{Q}))$.

Demonstração. Temos um mapa natural injetivo localmente split de fibrados sobre Y , $(\mathcal{S}/\mathcal{L})^2 \otimes \mathcal{F}_1/\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}_3/\mathcal{L} \otimes \mathcal{R}_2$ definido a seguir. Na fibra sobre um par $H \supset L = \langle H, H' \rangle$ seja $\overline{H''} \in \mathcal{F}_1/\mathcal{L}|_H$ representado por $H'' \in \mathcal{F}_1$. Então, $(H')^2 \cdot H''$ é uma forma cúbica anulando-se sobre L e mapeamos $(H')^2 \cdot H''$ na classe $\overline{(H')^2 \cdot H''}$. \square

Note que \mathbb{M} é disjunta do segundo centro de explosão \tilde{Y} (vide diagrama 5.2) e $\dim(\mathbb{M}) = 7 (= 5 + 2)$. Além disso, em \mathbb{M} temos uma única órbita fechada sob a ação de GL_4 , representada por $\tilde{\delta}_1 = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^3 \rangle$ (cf. [3], Lema 1.8, pág. 3000).

Sejam \mathcal{A} o subfibrado de posto 2 descrito em 5.21, \mathcal{B} o subfibrado de posto 8 da variedade grassmanniana $\mathbb{G}(8, \mathcal{F}_3)$ (vide 5.2) e \mathcal{D} o subfibrado tautológico de posto 12 da variedade grassmanniana $\mathbb{G}(12, \mathcal{F}_5)$. Temos um mapa natural de fibrados vetoriais sobre $\tilde{\mathbb{X}}$ induzido por multiplicação com posto genérico 12 (vide Proposição 5.5), onde a queda de posto ocorre precisamente sobre \mathbb{M} .

Proposição 5.5. Seja $\nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ o mapa definido por multiplicação. O posto de ν fora de \mathbb{M} é 12 e \mathbb{M} é o esquema de zeros de $\overset{12}{\wedge} \nu$.

Demonstração. Denote por \mathfrak{Z} o esquema de zeros do enunciado. Temos que $\mathbb{M} \subseteq \mathfrak{Z}$. Como na prova da Proposição 4.7, resta mostrarmos que o espaço tangente de \mathbb{M} e \mathfrak{Z} coincidem na órbita fechada $\tilde{\delta}_1 = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^3 \rangle$. Para isso, precisamos computar o ideal de \mathfrak{Z} módulo quadrados em uma vizinhança dessa órbita e mostrar que ele contém o número correto de elementos com termos lineares independentes, a saber, a $\text{codim} \mathbb{M}$ em \mathbb{W}_{eq} : $16 - 7 = 9$.

Para o cálculo de $\mathcal{T}_{\tilde{\delta}_1} \mathfrak{Z}$ precisamos introduzir coordenadas. Tome $U \cong \mathbb{A}^{16}$ a vizinhança padrão afim de $\langle x_0^2, x_0 x_1 \rangle$ em \mathbb{X} com funções coordenadas $a_{i,j}$ $i = 1, 2, j = 1, \dots, 8$. A restrição do fibrado tautológico \mathcal{A} de $\mathbb{G}(2, \mathcal{F}_2)$ à U é trivial com base

$$\begin{aligned} V_1 &= x_0^2 + a_{1,1}x_0x_2 + a_{1,2}x_0x_3 + a_{1,3}x_1^2 + a_{1,4}x_1x_2 + a_{1,5}x_1x_3 + a_{1,6}x_2^2 + a_{1,7}x_2x_3 + a_{1,8}x_3^2 \\ V_2 &= x_0x_1 + a_{2,1}x_0x_2 + a_{2,2}x_0x_3 + a_{2,3}x_1^2 + a_{2,4}x_1x_2 + a_{2,5}x_1x_3 + a_{2,6}x_2^2 + a_{2,7}x_2x_3 + a_{2,8}x_3^2. \end{aligned}$$

Tomamos $b_i, 0 \leq i \leq 8$, obtidos como na Proposição 1.2, pág. 2996 (c.f Avritzer & Vainsencher [3]) ou conforme o Apêndice I.1, a saber:

$$\begin{aligned} b_1 &= -a_{1,3}(x_1^3), b_2 = -a_{1,4}(x_1^2x_2), b_3 = -a_{1,5}(x_1^2x_3) \\ b_4 &= -a_{1,6}(x_1x_2^2), b_5 = -a_{1,7}(x_1x_2x_3), b_6 = -a_{1,8}(x_1x_3^2) \\ b_7 &= a_{2,6}(x_0x_2^2), b_8 = a_{2,7}(x_0x_2x_3), b_9 = a_{2,8}(x_0x_3^2) \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde os monômios entre parênteses formam uma base para o espaço $\mathbb{P}(\mathcal{F}_3^L/H\mathcal{F}_2^L)$ que dá a descrição do divisor excepcional $\tilde{\mathbb{E}}$ (vide 5.24), em que $L = \langle x_0, x_1 \rangle$ e $H = \langle x_0 \rangle$.

Considere o ideal $\mathcal{I} = \langle a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,4}, \dots, a_{1,8}, a_{2,1}, \dots, a_{2,8} \rangle^2 + \langle a_{1,3} \rangle^2$. Sejam c_1, c_2, \dots, c_9 coordenadas homogêneas para \mathbb{P}^8 . Então, $U \times_{\mathbb{X}} \tilde{\mathbb{X}}$ é a subvariedade de $U \times \mathbb{P}^8$ definida pelas equações $b_i c_j = b_j c_i$, $1 \leq i, j \leq 9$. Seja $U' \subset U \times_{\mathbb{X}} \tilde{\mathbb{X}}$ o subconjunto aberto afim definido fazendo $c_1 = 1$. Esta escolha é realizada com o intuito de por o ponto \tilde{o}_1 na origem das cartas coordenadas. Daí segue que coordenadas locais para U' em torno de \tilde{o}_1 são dadas por

$$b_1, c_2, \dots, c_8, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, \dots, a_{2,5}.$$

Nessas condições temos que b_1 é a equação do divisor excepcional e $b_i = b_1 c_i$, $1 \leq i \leq 9$, módulo o ideal \mathcal{I} . Resolvendo essas relações para os termos lineares (5.22) e substituindo na matriz de representação de $\mu_3|_{U'}$, onde $\mu_3 : \mathcal{A} \otimes \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_3 \times \mathbb{X}$ é o mapa de fibrados induzidos por multiplicação (vide 5.2), obtemos uma representação local para $\mu_3|_{\tilde{\mathbb{X}}}$. Dividindo a última linha por b_1 as 8 linhas da nova matriz produzem seções linearmente independentes $w_i (1 \leq i \leq 8)$ de $\mathcal{F}_3|_{U'}$ que geram o feixe ideal $\mathcal{B}|_{U'}$. As 7 primeiras seções geram o mesmo submódulo que $V_1x_0, V_1x_1, V_1x_2, V_1x_3, V_2x_1, V_2x_2, V_2x_3$. A última delas, escrevendo somente os termos lineares, é dada por:

$$w_8 = -x_1^3 - c_1x_0x_2^2 - c_2x_0x_2x_3 - c_3x_0x_3^2 + (-c_4 - a_{2,1})x_1^2x_2 + (-c_5 - a_{2,2})x_1^2x_3 - c_6x_1x_2^2 - c_7x_1x_2x_3 - c_8x_1x_3^2.$$

Escolhendo uma base adequada para \mathcal{F}_5 e efetuando operações elementares nas linhas módulo o quadrado do ideal gerado pelas funções coordenadas de U' , obtemos uma representação de ν na forma

$$\begin{pmatrix} J' & A' \\ 0 & R \\ * & * \end{pmatrix}$$

onde J' é uma matriz bloco triangular superior de tamanho 11×11 e cujas entradas na diagonal principal são todas iguais a 1. Aqui R é uma matriz linha cujas entradas módulo

quadrado são as seguintes:

$$\begin{array}{ccc}
-c_1(x_0^3x_2^2) & -c_2(x_0^3x_2x_3) & -c_3(x_0^3x_3^2) \\
-c_6(x_0^2x_1x_2^2) & -c_7(x_0^2x_1x_2x_3) & -c_8(x_0^2x_1x_3^2) \\
(-a_{1,1} + 2a_{2,4})(x_0x_1^3x_2) & (-a_{1,2} + 2a_{2,5})(x_0x_1^3x_3) & -a_{1,3}(x_1^5)
\end{array} \quad (5.23)$$

onde entre parênteses indicamos os monômios correspondentes a cada coluna módulo quadrados.

Portanto, vemos que o número de elementos com termos lineares independentes no ideal de \mathfrak{J} em torno de \tilde{o}_1 é de fato $9 = \text{codim}_{\mathbb{W}_{eq}} \mathbb{M}$, como era para ser mostrado. \square

Na próxima proposição entra em cena o fibrado de formas quánticas. Para $\pi \in \tilde{\mathbb{X}} \setminus \mathbb{M}$, o espaço de formas quánticas obtido como imagem do mapa μ é de posto correto 12. Explodir $\tilde{\mathbb{X}}$ ao longo de \mathbb{M} permite-nos estender a família $(\mathcal{Q}_\pi)_{\pi \in \tilde{\mathbb{X}} \setminus \mathbb{M}}$ sobre uma compactificação suave $\tilde{\mathbb{X}}'$ de $\tilde{\mathbb{X}} \setminus \mathbb{M}$.

Proposição 5.6. *Considere o diagrama de explosão de $\tilde{\mathbb{X}}$ ao longo de \mathbb{M}*

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\mathbb{X}}' & \supset & \tilde{\mathbb{M}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\tilde{\mathbb{X}} & \supset & \mathbb{M}
\end{array} \quad (5.24)$$

Então, temos que $\tilde{\mathbb{X}}'$ mergulha em $\tilde{\mathbb{X}} \times \mathbb{G}(12, \mathcal{F}_5)$ de tal forma que o pullback \mathcal{Q} do subfibrado tautológico de posto 12 de \mathcal{F}_5 contém a imagem de $\nu|_{\tilde{\mathbb{X}}'}$.

Demonstração. Em vista da proposição anterior, temos que o mapa racional $\tilde{\mathbb{X}} \dashrightarrow \mathbb{G}(12, \mathcal{F}_5)$ definido por ν estende a um morfismo $\tilde{\mathbb{X}}' \rightarrow \mathbb{G}(12, \mathcal{F}_5)$. Assim, seu gráfico produz o mergulho desejado. \square

Passamos agora a análise das contribuições dos pontos fixos sobre o divisor excepcional $\tilde{\mathbb{M}} = \mathbb{P}(\mathcal{N}_{\mathbb{M}/\tilde{\mathbb{X}}})$. Temos que sobre cada ponto fixo $f \in \mathbb{M}$ a fibra $\tilde{\mathbb{M}}_f$ é o espaço projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{f\mathbb{M}/\tilde{\mathbb{X}}}) = \mathcal{T}_f\tilde{\mathbb{X}}/\mathcal{T}_f\mathbb{M}$. Por exemplo, sobre $f = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^3 \rangle$ temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{f\mathbb{M}/\tilde{\mathbb{X}}} &= \mathcal{T}_f\tilde{\mathbb{X}} - \mathcal{T}_f\mathbb{M} = \left(\frac{x_1}{x_0} + \frac{x_1^2}{x_0^2} + \frac{2x_2}{x_1} + \frac{2x_2}{x_0} + \frac{x_0x_2^2}{x_1^3} + \frac{x_2^2}{x_1^2} + \frac{2x_3}{x_1} + \frac{2x_3}{x_0} \right. \\
&+ \left. \frac{x_0x_2x_3}{x_1^3} + \frac{x_2x_3}{x_1^2} + \frac{x_0x_3^2}{x_1^3} + \frac{x_3^2}{x_1^2} \right) - \left(\frac{x_1}{x_0} + \frac{2x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{2x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_0} \right) \\
&= \frac{x_1^2}{x_0^2} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_0x_2^2}{x_1^3} + \frac{x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_0x_2x_3}{x_1^3} + \frac{x_2x_3}{x_1^2} + \frac{x_0x_3^2}{x_1^3} + \frac{x_3^2}{x_1^2} \\
&= \frac{1}{x_0^2x_1^3} (x_0x_1^3x_2 + x_0x_1^3x_3, x_0^2x_1x_2^2 + x_0^2x_1x_2x_3 + x_0^2x_1x_3^2 + x_0^3x_2^2 \\
&+ x_0^3x_2x_3 + x_0^3x_3^2 + x_1^5)
\end{aligned} \quad (5.25)$$

Note que os monômios de grau 5 em (5.25) são exatamente os mesmos em (5.23). De

forma análoga, dado um ponto fixo $f = \langle x_i^2, x_i x_j, c \rangle \in \mathbb{M}$, temos que $\mathcal{N}_{f\mathbb{M}/\tilde{\mathbb{X}}}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{f\mathbb{M}/\tilde{\mathbb{X}}} &= (x_i^2 c)^\vee \otimes (x_i x_k c + x_i x_l c + x_i^2 x_j x_k^2 + x_i^2 x_j x_k x_l \\ &\quad + x_i^2 x_j x_l^2 + x_i^3 x_k^2 + x_i^3 x_k x_l + x_i^3 x_l^2 + (c^2/x_j)) \end{aligned} \quad (5.26)$$

o que nos diz que a fibra $\tilde{\mathbb{M}}_f$ é o espaço projetivo gerado pelas formas de grau 5

$$x_i x_k c, x_i x_l c, x_i^2 x_j x_k^2, x_i^2 x_j x_k x_l, x_i^2 x_j x_l^2, x_i^3 x_k^2, x_i^3 x_k x_l, x_i^3 x_l^2, (c^2/x_j). \quad (5.27)$$

Observe que a decomposição em auto-espacos de $\mathcal{N}_{f\mathbb{M}/\tilde{\mathbb{X}}}$ (vide 5.26) apresenta todos os caracteres distintos. Dessa forma, a \mathbb{T} -ação induzida sobre $\tilde{\mathbb{X}}'$ apresenta pontos fixos isolados, sendo ao todo $27 (= 3 \times 9)$ pontos a menos de permutação das variáveis.

Agora, seja f' um ponto fixo do divisor excepcional $\tilde{\mathbb{M}}$ na fibra sobre $f \in \mathbb{M}$, para o qual temos que descrever o espaço tangente $\mathcal{T}_{f', \tilde{\mathbb{X}}}'$. Por exemplo, dado $f = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^3 \rangle$ já obtemos a decomposição do normal $\mathcal{N}_{f\mathbb{M}/\tilde{\mathbb{X}}}$ (vide 5.25) e tomando f' o ponto correspondente ao auto-espaco com caracter $\frac{x_1^2}{x_0^2}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f', \tilde{\mathbb{X}}}' &= \mathcal{L}_{f'} \oplus \mathcal{T}_f \mathbb{M} \oplus \mathcal{T}_{[\mathcal{L}_{f'}]} \mathbb{P}(\mathcal{N}_{f\mathbb{M}/\tilde{\mathbb{X}}}) \\ &= \left(\frac{x_1^2}{x_0^2} \right) + \left(\frac{x_1}{x_0} + \frac{2x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{2x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_0} \right) \\ &\quad + \left(\frac{x_2}{x_0} + \frac{x_0 x_2^2}{x_1^3} + \frac{x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_0 x_2 x_3}{x_1^3} + \frac{x_2 x_3}{x_1^2} + \frac{x_0 x_3^2}{x_1^3} + \frac{x_3^2}{x_1^2} \right) \otimes \left(\frac{x_1^2}{x_0^2} \right)^\vee \\ &= \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_1^2}{x_0^2} + \frac{x_0 x_2}{x_1^2} + \frac{2x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_0^3 x_2^2}{x_1^5} + \frac{x_0^2 x_2^2}{x_1^4} + \frac{x_0 x_3}{x_1^2} + \frac{2x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_0} + \frac{x_0^3 x_2 x_3}{x_1^5} \\ &\quad + \frac{x_0^2 x_2 x_3}{x_1^4} + \frac{x_0^3 x_3^2}{x_1^5} + \frac{x_0^2 x_3^2}{x_1^4}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

E por comparação da auto-decomposição do espaço tangente e da descrição da fibra do divisor excepcional, segue as seguintes identificações:

$$\begin{aligned} x_1^5 &\leftrightarrow \frac{x_1^2}{x_0^2}, & x_0 x_1^3 x_2 &\leftrightarrow \frac{x_2}{x_0}, & x_0^3 x_2^2 &\leftrightarrow \frac{x_0 x_2^2}{x_1^3}, & x_0^2 x_1 x_2^2 &\leftrightarrow \frac{x_2^2}{x_1^2}, & x_0 x_1^3 x_3 &\leftrightarrow \frac{x_3}{x_0}, \\ x_0^3 x_2 x_3 &\leftrightarrow \frac{x_0 x_2 x_3}{x_1^3}, & x_0^2 x_1 x_2 x_3 &\leftrightarrow \frac{x_2 x_3}{x_1^2}, & x_0^3 x_3^2 &\leftrightarrow \frac{x_0 x_3^2}{x_1^3}, & x_0^2 x_1 x_3^2 &\leftrightarrow \frac{x_3^2}{x_1^2} \end{aligned} \quad (5.29)$$

De modo mais geral, dado $f = \langle x_i^2, x_i x_j, c \rangle$ ponto fixo em \mathbb{M} , e q_5 uma das formas quánticas em (5.27), temos as seguintes identificações:

$$q_5 = \langle q_5 \rangle = \frac{q_5}{x_i^2 c},$$

onde $\langle q_5 \rangle$ indica o carácter correspondente à quántica q_5 que aparece na decomposição em auto-espacos do normal (vide 5.26) e, assim, a decomposição do tangente no ponto fixo

f' referente ao carácter $\langle q_5 \rangle$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{f'} \tilde{\mathbb{X}}' &= \mathcal{L}_{f'} \oplus \mathcal{T}_f \mathbb{M} \oplus \mathcal{T}_{[\mathcal{L}_{f'}]} \mathbb{P}(\mathcal{N}_f \mathbb{M} / \tilde{\mathbb{X}}) \\
&= \langle q_5 \rangle + ((x_i)^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - x_i) + (x_j)^\vee \otimes (\mathcal{F}_1 - (x_i + x_j))) \\
&+ (c)^\vee \otimes (x_j^2 \otimes (\mathcal{F}_1 - x_i) - c) + (\mathcal{N}_{f'' \mathbb{M}' / \mathbb{W}'} - \langle q_5 \rangle) \otimes \langle q_5 \rangle^\vee.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

E para a contribuição numérica do denominador na fórmula de resíduos de Bott obtemos o produto dos pesos da representação acima.

Na Tabela 5.1 indicamos cada um dos tipos de classes de isomorfismo de pontos fixos em \mathbb{W}_{eqc} e os correspondentes pontos em \mathbb{W}'_{eqc} , bem como o número de pontos em cada classe:

Tipo	Pontos fixos em \mathbb{W}_{eqc}	Pontos fixos em \mathbb{W}'_{eqc}	# pontos
(1)	$\langle x_i^2, x_j^2 \rangle$	$\langle x_i^4, x_i^2 x_j^2, x_j^4 \rangle$	6
(2)	$\langle x_i^2, x_j x_k \rangle$	$\langle x_i^4, x_i^2 x_j x_k, x_j^2 x_k^2 \rangle$	12
(3)	$\langle x_i x_j, x_k x_l \rangle$	$\langle x_i^2 x_j^2, x_i x_j x_k x_l, x_k^2 x_l^2 \rangle$	3
(4)	$\langle x_i \cdot \langle x_i, x_j \rangle, c \rangle^1$	$\langle x_i^4, x_i^3 x_j x_c^2, x_i^2 x_j^2, x_i x_j c, c^2 \rangle$	36 (= 3 × 12)
(5)	$\langle x_i \cdot \langle x_j, x_k \rangle, c \rangle^2$	$\langle x_i^2 x_j^2, x_i^2 x_j x_k, x_i x_j c, x_i^2 x_k^2, x_i x_k c, c^2 \rangle$	108 (= 12 × 9)
(6)	$\langle x_i \cdot \langle x_i, x_j, q \rangle, q_4 \rangle^3$	$\langle x_i^2 \cdot \langle x_i^2, x_i x_j, x_i q, q_4, x_j^2, x_j q, q^2 \rangle, x_i x_j q_4, x_i q q_4, q_4^2 \rangle$	324 (= 12 × 3 × 9)
(7)	$\langle x_i \cdot \langle x_i, x_j \rangle, c \rangle$	$\langle x_i^4, x_i^3 x_j, x_i^2 c, x_i^2 x_j^2, x_i x_j c, c^2, [q_5] \rangle^4$	324 (= 12 × 3 × 9)
Total de pontos fixos			813

Tabela 5.1: Pontos fixos em \mathbb{W}_{eqc}

Em referência a Tabela 5.1, temos que todos os ideais em W'_{eqc} possuem polinômio de Hilbert $12t - 16$. Além disso, os pontos fixos em W'_{eqc} do tipo (1) - (3) são 5-regular no sentido de Castelnuovo-Mumford, ao passo que os pontos fixos dos tipos (4) e (5) são 6-regular, os pontos do tipo (6) são 8-regular e os pontos fixos do tipo (7) apresentam regularidade 5 ou 6. E por um argumento de semi-continuidade de cohomologia segue que qualquer feixe ideal correspondendo a um ponto em \mathbb{W}'_{eqc} é 8-regular.

O procedimento de obtenção da representação das fibras de \mathcal{E}_d é análogo ao discutido na seção 4.1, em que a partir da regularidade 8, obtemos a representação da fibra de \mathcal{E}_d sobre o ponto fixo f tomando os monômios de grau d (ao todo $\binom{d+3}{3} - (12d - 16)$) presentes no produto $\mathcal{E}_{8_f} * S_{(d-8)}$.

Reunidas as informações necessárias para o cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{eqc}, d)$ via fórmula de resíduos de Bott e sabendo que o grau anterior é polinomial em d (vide Proposição 1.9) de grau no máximo $48 (= 3 \times 16)$, segue que é suficiente encontrarmos $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{eqc}, d)$ para 49

¹Aqui c é uma das 3 formas cúbicas: $x_j x_k^2, x_j x_k x_l, x_j x_l^2$

²Aqui c indica uma das formas cúbicas: $x_j^2 x_k, x_j x_k^2, x_j x_k x_l, x_k^3, x_k^2 x_l, x_k x_l^2, x_j^3, x_j^2 x_l, x_j x_l^2$

³ q e q_4 são descritas em (5.9) e (5.13), respectivamente

⁴ c é uma formas cúbicas: $x_j^3, x_j^2 x_k, x_j^2 x_l$. E q_5 é uma das formas quárticas: $\{x_i x_k c, x_i x_l c, x_i^2 x_j x_l^2, x_i^3 x_k^2, x_i^3 x_k x_l, x_i^3 x_l^2, (c/x_j)c\}$

valores diferentes de d e, posteriormente, interpolar os resultados para obter o polinômio em questão. O polinômio que nos dá o grau de $\Sigma(\mathbb{W}_{eqc}, d)$ é explicitado a seguir:

$$\begin{aligned}
\deg \Sigma_{\mathbb{W}_{eqc}, d} = & \frac{77991978249}{47023181004800} d^{32} - \frac{142130943}{922746880} d^{31} \\
& + \frac{8109239447979}{1175579525120} d^{30} - \frac{4150267051797}{20992491520} d^{29} + \frac{47676232841150619}{11755795251200} d^{28} \\
& - \frac{6615027446596551}{104962457600} d^{27} + \frac{128385059997089001}{167939932160} d^{26} \\
& - \frac{103459871906659801}{14129561600} d^{25} + \frac{893796960041917863271}{16277254963200} d^{24} \\
& - \frac{312845973151702414313}{1017328435200} d^{23} + \frac{4312587609200253695639}{4069313740800} d^{22} \\
& + \frac{6155781582234103357}{7266631680} d^{21} - \frac{1105621403101024328482787}{24415882444800} d^{20} \\
& + \frac{2134617904050477326290337}{5410337587200} d^{19} - \frac{1027704290752048951537337771}{476109707673600} d^{18} \\
& + \frac{1568309607110425883232529237}{223176425472000} d^{17} + \frac{399314335681097660200615893191}{57133164920832000} d^{16} \\
& - \frac{127911974311612787565094357769}{396758089728000} d^{15} + \frac{729760755266942589134714032019}{238054853836800} d^{14} \\
& - \frac{18285322486683264514566399967249}{892705701888000} d^{13} + \frac{15050777906503580350914982390277}{137339338752000} d^{12} \\
& - \frac{8362721204990643447960751421719}{17167417344000} d^{11} + \frac{178565283439979930078484872809}{98099527680} d^{10} \\
& - \frac{2731787128737717049736180171243}{476872704000} d^9 + \frac{1125598445944774654288515801691861}{74392141824000} d^8 \\
& - \frac{58025484355390407710374488759691}{1743565824000} d^7 + \frac{16796039461040747482814365174429}{278970531840} d^6 \\
& - \frac{8521350244073783951990040324653}{96864768000} d^5 + \frac{599422208545470260381592707347}{5930496000} d^4 \\
& - \frac{796327032680715287225577370219}{9081072000} d^3 + \frac{434272227079029305979707333}{8072064} d^2 \\
& - \frac{14906420412807524159489839}{720720} d + 3713124778880030320
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Observe mais uma vez que o grau do polinômio em (5.31) é igual a $(1 + 1) \times \dim(\mathbb{W}_{eqc}) = 2 \times 16$.

No Apêndice I o leitor pode consultar os procedimentos/funções escritos no Macaulay2, [17], utilizados para obtenção do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{eqc}, d)$ em (5.31) .

Apêndices

Na sequência disponibilizamos os códigos escritos em Macaulay2 [17], Singular [9] e Maple [24] necessários aos cálculos enumerativos presentes na tese.

Os códigos do Macaulay2 podem ser executados através do copiar/colar em uma seção disponível em <http://habanero.math.cornell.edu:3690/>. Já para os códigos do Singular, o leitor interessado pode abrir uma seção no SageMathCell disponível em <https://sagecell.sagemath.org/>.

Apêndice A

Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(2,4)}, d)$ via Schubert2

Código para calcular o grau da família de superfícies de grau d singulares ao longo de uma reta usando o pacote Schubert2 do Macaulay2 [17].

```
-----  
loadPackage "Schubert2";  
B = base(d);  
G = flagBundle({2,2},B);  
(S,Q) = bundles G;  
Ed = symmetricPower(2,S)*symmetricPower(d-2,S++Q)  
      - S * exteriorPower(2,S)*symmetricPower(d-3,S++Q);  
deg = integral segre(4,Ed)  
factor deg  
-----
```

Apêndice B

Código: Cálculo do $\deg \Sigma(W_m, d)$ via Schubert2

Código para calcular o grau da família de superfícies de grau d singulares ao longo de uma curva plana de grau m usando o pacote Schubert2 do Macaulay2 [17].

```
-----  
loadPackage "Schubert2";  
  
X = base(d);  
  
P3dual = projectiveSpace(3,X);  
  
--Q = polinômios lineares sobre o plano variável  
(S,Q) = bundles(P3dual);  
  
m = 2; -- Grau da curva plana  
  
--Sistema de curvas planas de grau m  
Wm = projectiveBundle'(dual symmetricPower(m,Q));  
  
DIM = dim Wm;  
  
PiOCm = (d1,m1) -> (  
Oc1 = symmetricPower(d1,Q)-symmetricPower(d1-m1,Q)**OO_Wm(-1);  
return(Oc1)  
);  
  
NdCmPQd = OO_Wm(-1)**PiOCm(d-m,m);
```



```
NPQd = OO_P3dual(-1)**PiOCm(d-1,m);
```

```
NCmP3 = NdCmPQd ++ NPQd;
```

```
Pi0singCm = NCmP3++PiOCm(d,m);
```

```
Grau = factor (integral(chern(DIM, Pi0singCm)))
```

Apêndice C

Funções e procedimentos gerais do Macaulay2 e Maple

Este capítulo contém os procedimentos e funções, alguns dos quais foram adaptadas de Meurer [26] para a linguagem do software Macaulay2 [17] e, basicamente os mesmos procedimentos escritos para a linguagem do Maple [24], que são utilizadas para o cálculo do grau de zero-ciclos descritos em função de classes de Chern de fibrados equivariantes. Aqui, como em todo o texto, temos $T = \mathbb{C}^*$ agindo diagonalmente em \mathbb{P}^n , de modo que as coordenadas homogêneas x_0, \dots, x_n são auto-vetores com pesos w_0, \dots, w_n .

C.1 Funções do Macaulay2

As funções a seguir devem ser carregadas antes dos cálculos específicos dos casos considerados nos Capítulos 2, 5 e seção 4.1, cujos códigos e rotinas estão explicitados nos Apêndices E, F e I.

```
-----  
--S(d) Retorna a representação da d-ésima potência simétrica nas  
--variáveis x_0, ..., x_n. S(d) Necessita do valor n = dimensão de P^n  
--Exemplo; dado n = 3, temos que S(2) retorna:  
--x_0^2+x_0*x_1+...+x_1*x_3+x_2^2+x_2*x_3+x_3^2  
S = (d) -> (return(sum((ideal(basis(d,r)))_*)));  
-----
```

```
-----  
--dualRep retorna a representação dual  
dualRep = (p) -> sub(p,dualString);  
-----
```

```

-----
--tGrass determina o espaço Tangente à Grassmaniana  $G=G(r,s)$  no
--ponto p,  $T_p G$ : onde  $Sr = \text{Symm}(r,F) = S(r)$ 
tGrass =(Sr, p) -> (Sr - p)* dualRep(p);
-----

```

```

-----
--dotProd Efetua o "produto interno"
dotProd =(L1,L2) ->(p = 0;
    if (class L1 === Ideal) then(Laux1 = L1_*);
    if (class L1 === List) or (class L1 === Sequence) or
    (class L1 === Array) or (class L1 === Set) then(
        Laux1 = toList(L1));
    if (class L2 === Ideal) then(Laux2 = L2_*);
    if (class L2 === List) or (class L2 === Sequence) or
    (class L2 === Array) or (class L2 === Set) then(
        Laux2 = toList(L2));
    lm = min(length Laux1, length Laux2);
    for i to (lm -1) do(p = p + Laux1_i * Laux2_i);
    return(p);
);
-----

```

```

-----
--pesos retorna uma lista com os pesos da representação de um
--fibrado. Ex.:  $(2*x_0^3 + x_1 *x_2)/(x_3*x_4)$  é transformado
--na lista  $\{3*x_0-x_3-x_4, 3*x_0-x_3-x_4, x_1+x_2-x_3 - x_4\}$ 
pesos = ipesos -> (
    if (isConstant (ipesos)) then(return({0});)
    else(
        lipesos1 ={}; lpts = {};
        if (class ring ipesos === PolynomialRing) then(
            lvspt = (ideal (vars ring ipesos))_*;
            lipesos2 = terms ipesos;
            for i in lipesos2 do(
                lc = sub(leadCoefficient (i),ZZ);
                lm = leadMonomial(i);
                if (lc != 1) then(
                    for j to (lc-1) do(
                        lipesos1 = append (lipesos1, lm););)

```

```

        else(lipesos1 = append (lipesos1, lm);););
    for i in lipesos1 do(
        lexp = (exponents i)_0;
        lpts = append (lpts, dotProd(lvspt, lexp)););
return(lpts););
if (class ring ipesos === FractionField) then(
    nipesos = numerator(ipesos);
    dipesos = denominator (ipesos);
    lptsn = pesos(nipesos);
    lptsd = sum(pesos(dipesos));
    lpts = for i in lptsn list i - lptsd;
    return(lpts);)
else(
    return("Tipo de entrada não suportado");););
);
-----

-----

--subPesos substitui a lista de opções lpesos (já definida),
--Ex.: lpesos = {x_0=>0,x_1=>2,x_2=>7,x_3=>11,x_4=>19,x_5=>37}
--em uma lista, obtida por exemplo pela função pesos.
--Ex.: subPesos(pesos(tg))
subPesos = ilpesos -> (
    return(for i in ilpesos list sub(i,lpesos));
);
-----

-----

--cherns determina as classes de Chern da lista de pesos H.
--Necessita que DIM e o anel rt = QQ[t] estejam definidos.
cherns = (H) -> (lchern = {}; sigma = 1;
    for i in H do(
        sigma = sub(sub((1+i*t)*sigma, rt/ideal(t^(DIM+1))),rt));
    return(for i from 1 to DIM
        list leadCoefficient(part(i,sigma)));
);
-----

-----

--topChern determina a classe Chern top da lista de pesos H.

```

```

--assuma rank = dimensão
topChern = (H) -> (return(product (H))););
-----

-----

-- bott recebe uma lista {"P1:pt fixo, P2: Tangente,P3:fibra"}, com
--todos os pontos fixos, tangentes e fibra e o valor d.
-- Retorna uma lista {d, grau}, onde grau = deg(Sigma(W,d))
bott =(LFTaux, d) -> (
    LFTaux1 = LFTaux;
    dg = d;  resp = 0;
    for i to (length (LFTaux1)-1) do (
        fb = S(dg) -LFTaux1_i_3;
        tg = LFTaux1_i_2;
        pfb = pesos(fb);
        ptg = pesos(tg);
        num = (cherns(subPesos(pfb)))_(DIM-1);
        den = topChern(subPesos(ptg));
        resp = resp+num/den;
    );
    return {dg, resp};
);
-----

-----

--polynomialInterpolation encontra uma função polinomial, pelo método de
--Lagrange, ajustando uma lista L={{x_i,y_i=f(x_i)}}.
--Necessita de um anel de polinômio em uma variável R = QQ[d].
polynomialInterpolation =(L, R) -> (
    if (numgens R != 1) then
        error "Número de variáveis excede 1";
    pl:= 0;  n = #L; t:= first gens R;
    for j from 0 to (n-1) do (
        Ld:= 0..(j-1)| (j+1)..(n-1);
        p := for k in Ld list ((d-L_k_0)/(L_j_0 - L_k_0));
        pl = pl + L_j_1 * product(p);
    );
    return(pl);
);
-----

```

C.2 Procedimentos do Maple

Os procedimentos a seguir basicamente efetuam as mesmas tarefas que as funções listadas na seção C.1, sendo que para algumas tarefas elas são mais eficientes do ponto de vista computacional por utilizarem séries geradoras, como no caso do procedimento $S(d)$.

```
#####
#S(d) Retorna a representação da d-ésima potência simétrica nas
#variáveis x[0], ..., x[N] . S(d) Necessita do valor N = dimensão de P^N
#Exemplo; dado N = 3, temos que S(2) retorna:
#x[0]^2+x[0]*x[1]+...+x[1]*x[3]+x[2]^2+x[2]*x[3]+x[3]^2
S := proc (d) local genf, i;
    genf := expand(convert(series(1/(product('-t*x[i]+1', i = 0 .. N)),
    t, d+1), polynom));
    return sort(coeff(genf, t, d))
end:
#####
#####
# dualrep(C) retorna a representação dual
dualrep := proc (C) local i;
    sort(expand(subs(seq(x[i] = 1/x[i], i = 0 .. N), C))) end:
#####
#####
# simpleweights(A) retorna a soma de uma representação 1-dimensional,
#uma para cada peso ocorrendo em A.
# Por exemplo, simpleweights(S(j)*S(k)) irá retornar S(j+k).
simpleweights := proc (p) local mon;
    expand(p);
    if p = 0 then RETURN(0) fi:
    coeffs(%, variables, 'mon');
    convert([mon], '+' )
end:
#####
#####
#Seja C^* -> T o subgrupo a um parâmetro dado por pesos w[0],w[1],...,w[N] .
#Desse modo o caracter x[i] restringe a t^(w[i]), i=0..N.
# Precisamos encontrar todos os pesos em cada ponto fixo
weightlist := proc (f) local t, cof, mon, res, i,L;
    L := [seq(x[i] = t^w[i], i = 0 .. N)]:
```

```

    cof := [coffs(f, variables, mon)];
    mon := subs(L, [mon]);
    res := NULL;
    for i to nops(mon) do
        res := res, '$'(subs(t = 1, diff(mon[i], t)), cof[i]) od:
    res
end:
#####

#####
# subweights substitui os pesos de listweights in f
subweights := proc (f) local apf, saida,L;
    L := [seq(w[i], i = 0 .. N)]:
    apf := unapply(f, L):
    saida := apf(op(listweights))
end:
#####

#####
#TGrass retorna o tangente da Grassmanniana no ponto p
TGrass := proc (Sr, p) expand((Sr-p)*dualrep(p)): end:
#####

#####
# Blow_up de X ao longo de B.
# TX = Tangente de X e TB = Tangente de B.
# Retorna NBX o normal relativo, TL direções normais,
# ETT espaço tangente total
blowUp := proc (TX, TB) local i, NBX, dNBX, L1;
    L1 := [];
    NBX := expand(TX-TB);
    dNBX := denom(NBX);
    for i in op(NBX) do
        L1 := [op(L1), ["P2:NBX,P3:TL,P4:ETT",NBX,i,expand(TB+i+(NBX-i)/i)]]:
    od:
    return (L1):
end:
#####

#####
# partdegree retorna a parte de grau deg do polinômio pol

```

```

partdegree := proc (pol, deg) local f, part, i;
  f := expand(pol);
  part := 0;
  for i to nops(f) do
    if degree(op(i, f)) = deg then part := part+op(i, f) fi:
  od:
  part
end:
#####

#####
# um retorna o coeficiente do monômio
um := proc (f) local Lvar, L1, apf, saida;
  Lvar := [seq(x[i], i = 0 .. N)];
  L1 := [seq(1, i = 0 .. N)];
  apf := unapply(f, Lvar);
  saida := apf(op(L1))
end:
#####

#####
# topchern retorna a classe de Chern top dimensional
topchern := proc (tg) local lpesos, ppesos, k;
  lpesos := [weightlist(tg)];
  ppesos := subweights(product(lpesos[k],k=1 .. nops(lpesos))):
  ppesos
end:
#####

#####
# cherns retorna as classes de Chern do fibrado até a dimensão DIM
cherns := proc (tg) local t, c, i1, u, m, z, wtg, ws, lpesos;
  c := 1;
  wtg := expand(tg);
  if whattype(wtg) = '+' or whattype(wtg) = list then
    for i1 to nops(wtg) do
      u := op(i1, wtg):
      m := um(u):
      z := u/m:
      lpesos := [weightlist(z)]:
    od:
  fi:
end:

```



```

        ws := subweights(add(lpesos[k],k=1..nops(lpesos))):
        c := mtaylor(c*(1+t*ws)^m, t, DIM+1)
    od:
else
    u := wtg:
    m := um(u):
    z := u/m:
    lpesos := [weightlist(z)]:
    ws := subweights(add(lpesos[k], k=1..nops(lpesos))):
    c := mtaylor(c*(1+t*ws)^m, t, DIM+1)
fi:
c := collect(c, t):
[seq(coeff(c, t, i1), i1 = 1 .. DIM)]
end:
#####

#####
# Bott recebe uma lista [{"P2:pt fixo,P3:fibra,P4:Tangente", pf fixo,
#fibra, tangente}], com todos os pontos fixos, fibra, tangentes e o grau d.
#Retorna uma lista [d, grau], onde grau = deg(Sigma(W,d))
Bott := proc (LFTaux, d)
    local LFTaux1, resp, fp, tg, num, den, dg, i;
    LFTaux1 := LFTaux:
    dg := d:
    resp := 0:
    for i to nops(LFTaux1) do
        fp := S(dg)-LFTaux1[i][3]:
        tg := LFTaux1[i][4]:
        num := cherns(fp)[DIM]:
        den := topchern(tg):
        resp := resp+num/den:
    od:
    return ([dg, resp]):
end:
#####

```

Apêndice D

Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{(k+1,n+1)}, d)$

Neste apêndice disponibilizamos o código para executar o cálculo do grau da subvariedade $\Sigma(W_{(k+1,n+1)}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d}$, hipersuperfícies em \mathbb{P}^n de grau d singulares ao longo de algum \mathbb{P}^k -linear (variável), usando o software Maple [24]. Para execução dos cálculos é necessário a inclusão dos procedimentos da seção C.2, bem como os procedimentos adicionais listados abaixo.

```
#####  
--Inserir os procedimentos da seção C.2 aqui  
  
#####  
#Procedimentos adicionais  
#list é uma lista não vazia, 1 <= ini <= nops(list)  
#retorna os elementos da list de ini até nops(list)  
sublist := proc (list, ini)  
    [seq(list[i], i = ini .. nops(list))]:  
end proc:  
  
#elt é qualquer elemento válido, e o argumento "list" é uma lista de  
#listas. #elt é adicionado ao início de cada elemento (o qual é uma  
#lista) no argumento "list"  
addElt := proc (elt, list)  
local templist, i;  
templist := []:  
for i to nops(list) do  
    templist := [op(templist), [elt, op(list[i])]]  
od:  
templist  
end proc:
```

```

#L é uma lista não vazia, 1 <= i <= nops(L)
#retorna uma lista de todos os possíveis subconjuntos
#(sublistas) de) L com i elementos
listSubsets := proc (L, i)
  local n, j, fl, temp: # fl - final list
  n := nops(L):
  if i = 1 then #base case
    fl := []:
    for j to n do
      fl := [op(fl), [L[j]]]:
    end do:
  else
    fl := []:
    for j to n-i+1 do
      temp := listSubsets(sublist(L, j+1), i-1):
      temp := addElt(L[j], temp):
      fl := [op(fl), op(temp)]:
    end do:
  end if:
  fl:
end proc:

#PFTpklinear retorna os pontos fixos de G(kl+1,nl+1)
PFTpklinear := proc (kl, nl)
  local lpaux, lp, var, i, j, LPFTaux:
  var := [seq(x[i], i = 0 .. nl)]:
  lpaux := listSubsets(var, nl-kl):
  lp := []:
  for i in lpaux do
    lp := [op(lp), add(i)]:
  od:
  LPFTaux := []:
  for j in lp do
    LPFTaux := [op(LPFTaux), ["P2: pt fixo, P3: Tangente",j,TGrass(S(1),j)]]:
  od:
  return LPFTaux:
end proc:
#####

```

```

#####
#Cálculos iniciam aqui
#Escolha N e k como desejar (K < N)
N := 4: #Dimensão de P^N
variables := [seq(x[i], i = 0 .. N), seq(1/x[i], i = 0 .. N)]:
K := 2: #Dimensão de P^K
DIM := (K+1)*(N-K): #Dimensão da Grassmanniana G(K+1,N+1)
M := (K+1)*DIM+4: #Limite para o grau

#Deve-se adequar os pesos em listweights de acordo com o valor de N.
#São necessários pelo menos N+1 pesos distintos. A lista abaixo serve
#para os casos de N<=8. Caso ocorra algum erro na execução, como
#division_by_zero, deve-se alterar os pesos
listweights := [4, 11, 17, 32, 55, 95, 160, 267, 441]:

PFT := PFTpklinear(K, N): #Lista com os pontos fixos/tangentes

listresp := []:
for dg from 3 to M do
  PFTF := []:
  for i in PFT do
    PFTF := [op(PFTF), ["P2: pt fixo, P3: fibra, P4: Tangente",i[2],
      simpleweights(i[2]^2*S(dg-2)), i[3]]]:
  od:
  listresp := [op(listresp), Bott(PFTF, dg)]:
  print(listresp[dg-2]):
od:
#Cálculo do polinômio gerador
with(CurveFitting):
list1 := [seq(listresp[i][1], i = 1 .. M-2)]:
list2 := [seq(listresp[i][2], i = 1 .. M-2)]:
Grau := sort(PolynomialInterpolation(list1, list2, d)):
Grau := factor(Grau);
convert(Grau, string);
#####

```

Apêndice E

Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_m, d)$

Nesse apêndice disponibilizamos o código para efetuar o cálculo do grau da subvariedade $\Sigma(W_m, d) \subset \mathbb{P}^{N_d}$, superfícies em \mathbb{P}^3 de grau d singulares ao longo de alguma curva plana de grau $m > 1$, usando o software Macaulay2 [17]. Para execução dos cálculos é necessário a inclusão das funções da seção C.1.

```
--Inserir as funções da seção C.1 aqui
-----
--Cálculos iniciam aqui
n = 3; --dimensão de P^3
r = QQ[x_0..x_n];
dualString = for i from 0 to n list(x_i => 1/x_i);
m = 3; --Grau da curva (m>=2)
--Dimensão da Variedade das curvas planas de grau m em P3
DIM = 3+(binomial(m+2,2) - 1)
rg = 2*m --regularidade
M = 3*DIM + rg;

--Obs.: Caso apareça a mensagem: error: division by zero no cálculo
--usando Bott os pesos abaixo devem ser alterados
lpesos = {x_0 => 11, x_1 => 17, x_2 => 32, x_3 => 55};
rt = QQ[t];

--Obs.: As fibras aqui são para o caso d = rg. Devido a regularidade para
--d>rg basta completar o grau da fibra do caso d = rg multiplicando por
--formas lineares, etc
PFTF = {};
for i to n do(--xx formas de grau m que não contém x_i
  xx = (trim((ideal(terms(S(1) - x_i)))^m))_*;
```

```

for j in xx do(
  idd = sum(((ideal(x_i, j))^2)_*);
  fbaux = 0;
  for k from 2 to rg do(
    fbaux = fbaux + part(k,idd)*S(rg-k););
  fb = sum((trim(ideal(terms(fbaux))))_*);
  PFTF = append(PFTF, {"P1: pt fixo, P2: Tangente, P3: fibra", x_i + j,
    tGrass(S(1),x_i)+tGrass(sum(xx),j),fb});
);
);

--Cálculo do grau usando a Fórmula de Bott
listresp = {};
for d from rg to M do(
  listresp = append(listresp, bott(PFTF,d));
  PFTF = for j to (#PFTF -1) list{PFTF_j_0,PFTF_j_1, PFTF_j_2,
    sum((trim(ideal( terms(PFTF_j_3 * S(1))))_*));
);

listresp --lista com os dados calculados

--Polinômio que dá o grau de \Sigma(W_m,d)
Grau = factor polynomialInterpolation(listresp,QQ[d])
Grau = toString Grau
-----

```

Apêndice F

Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{twc}, d)$

Neste apêndice disponibilizamos o código para o cálculo do grau da subvariedade $\Sigma(\mathbb{W}_{twc}, d) \subset \mathbb{P}^{Nd}$, superfícies em \mathbb{P}^3 de grau d singulares ao longo de alguma cúbica reversa. Inicialmente, na Seção F.1 utilizamos o Singular [9] munido da caixa de ferramentas "myprocs", procedimentos/funções criadas por Vainsencher [31], para as contas locais que revelam o local de indeterminação do mapa racional $\mathbb{W}_{twc} \dashrightarrow \mathbb{G}(6, \mathcal{F}4)$ definido por μ (vide Proposição 4.9). Ainda na Seção F.1 efetuamos a explosão de \mathbb{W}_{twc} ao longo de \mathbb{G} e verificamos que isto resolve a indeterminação. Já na Seção F.2 utilizamos o software Macaulay2 [17] para gerar todos os pontos fixos, tangentes e a representação da fibra de \mathcal{E}_d , necessárias a aplicação da fórmula de resíduos de Bott, bem como o cálculo das contribuições numéricas. Além dos procedimentos/funções da seção C.1 é necessário a inclusão das funções `expand` e `blowUp` listadas em F.2.

F.1 Códigos do Singular

```
//Inserir o arquivo myprocs disponível em
// http://www.mat.ufmg.br/~israel/Projetos/degNL/

<"myprocs";
LIB "primdec.lib";
proj(3);
ring r=0,(a(1..3)(1..7)),dp;r=r+P3;setring r;imapall(P3);
def xx2,xx3,xx4,xx5,xx6=xx^2,xx^3,xx^4,xx^5,xx^6 ;
def aa = ideal(a(1..3)(1..7));
def I = ideal(x(0)^2, x(0)*x(1), x(1)^2);
def quads = I;

//Vizinhança afim U
```

```

for(int i=1;i<=3;i++){
    quads[i]=quads[i]+dotprod([a(i)(1..7)],omit(xx2,I));};

//Mapa de multiplicação \lambda
def cubs = quads*xx;
def m=transpose(coeffs(cubs,xx3,xxx));
ran(m);//12
def l=rowsnopivo(m);m=l[1];l[2];l[3];
def m0=submat(m,l[2],1..ncols(m));
m=submat(m,omit(1..nrows(m),l[2]),1..ncols(m));
nrows(m);//10
putsolvform(ideal(m0));
def Y=_;

//Impondo a condição de posto <=10
def twcs = dosubs(Y,quads);

hilbsp(aa,twcs);//1+3*t

//indeterminadas (12)
def mtwcs=transpose(coeffs(twcs,xx2,xxx));
pol2id(indets(mtwcs)); aa=_;
//_[1]=a(1)(1)
//_[2]=a(1)(2)
//_[3]=a(1)(3)
//_[4]=a(1)(4)
//_[5]=a(2)(1)
//_[6]=a(2)(2)
//_[7]=a(2)(3)
//_[8]=a(2)(4)
//_[9]=a(3)(1)
//_[10]=a(3)(2)
//_[11]=a(3)(3)
//_[12]=a(3)(4)

def vs = aa;

//Mapa de multiplicação \mu
def twcs2 = twcs^2;

```



```

hilbsp(aa,twcs2);//-7+9*t
std(origin(vs,twcs2)); def twcs20=_;
def m=transpose(coeffs(twcs2,xx4,xxx));
ran(m);//6
def l=rowsnopivo(m);m=l[1];l[2];l[3];
def m0=submat(m,l[2],1..ncols(m));
m=submat(m,omit(1..nrows(m),l[2]),1..ncols(m));
nrows(m);ran(origin(aa,m));//5

//Geradores da fibra do divisor excepcional
def im02 = reduce(ideal(m0),std(aa^2));
for(int i=1;i<=35;i++){
  if(im02[i]<>0){see(im02[i],xx4[i]);};};

//-a(3)(1),x(0)^3*x(2)
//-a(3)(2),x(0)^3*x(3)
//2*a(2)(1)-a(3)(3),x(0)^2*x(1)*x(2)
//2*a(2)(2)-a(3)(4),x(0)^2*x(1)*x(3)
//-a(1)(1)+2*a(2)(3),x(0)*x(1)^2*x(2)
//-a(1)(2)+2*a(2)(4),x(0)*x(1)^2*x(3)
//-a(1)(3),x(1)^3*x(2)
//-a(1)(4),x(1)^3*x(3)

//Família a 1-parâmetro
def TW = twcs[1]*twcs[3] - twcs[2]^2;
for(int i1=1; i1<=12; i1++){
  origin(omit(aa,aa[i1]),TW);
  def quarts = origin(omit(aa,aa[i1]),twcs2);
  hilbsp(aa,quarts); //9t-7
  origin(aa[i1],sat(quarts,aa[i1])[1]);
  hilbsp(_);}; //9t - 7

//Colocando na forma localmente gráfico
putsolvform(ideal(m0));
def W =_;

//Local de indeterminação do mapa \mu
def Indet = dosubs(W,twcs2);
list G = primdecGTZ(Indet);

```

```

G;

//Explosão de  $W_{\{twc\}}$  em G
ring r1=0,d(1..size(W)-1),dp;r1=r1+r;setring r1;imapall(r);
l=m0,m,vs;
int i2;

i2++; //Escolha do divisor excepcional
def exc2=W[i2];def W1=omit(W,exc2);
W1=seq("W1[i]-exc2*d(i)",1,size(W1));
def l2=dosubs(W1,l);
m0,m,vs=l2[1..size(l2)];vs=pol2id(indets(vs));
mysat(m0,m);
twcs2=ideal(m*transpose(xx4));

if(ran(origin(vs,m0))<>0){
twcs2=twcs2+ideal(m0*transpose(xx4));};
hilbsp(vs,twcs2);

def twcs21 = std(origin(vs,twcs2));
see("As 6 quarticas = ", twcs21);

//Nova quártica
def QN = std(reduce(twcs21,std(twcs20)));

```

F.2 Códigos do Macaulay2

```

--Inserir as funções da seção C.1 aqui
-----
--expand recebe um polinômio com coeficientes inteiros/ retorna uma lista
--com os termos expandidos do polinômio
--Ex.: expand(2*x_0) retorna {x_0,x_0}
expand = (p) -> ( LT = {});
      (M,C) = coefficients(p);
      for i from 0 to (numColumns(M)-1) do(
        c = sub(C_0_i,ZZ);
        if (c >= 1) then(

```

```

        for j from 1 to c do (
            LT = append(LT, M_i_0););)
    else (
        for j from 1 to abs(c) do (
            LT = append(LT, - M_i_0);););)
    return(LT););
-----

-----

--blowUp efetua a explosão de X ao longo de B.
--Entrada: TX = Tangente de X e TB = Tangente de B
--Retorna NBX o normal relativo, TL direções normais,
--ETT espaço tangente total
blowUp = (TX, TB) -> (
    NBX = TX - TB;
    nNBX = expand(numerator NBX);
    dNBX = denominator NBX;
    TL = for i in nNBX list i/dNBX;
    return for i in TL
        list {"P1:NBX,P2:TL,P3:ETT",NBX,i,TB+i+(NBX-i)/i};
);
-----

-----

--Cálculos iniciam aqui
n = 3; -- Dimensão de P3
r = QQ[x_0..x_n];
dualString = for i from 0 to n list(x_i => 1/x_i);
DIM = 12; --Dimensão de W_twc
m = 40; -- 4 + 3*12
lpesos = {x_0=>11, x_1 => 17, x_2 => 32, x_3=>55};
rt = QQ[t];

--Pontos fixos em W_twc- Tipos (1) - (4) e (5.1) - (5.4)
PF_1 = ideal(x_0*x_1,x_1*x_2,x_2*x_3);
PF_2 = ideal(x_0*x_1,x_0*x_2,x_1*x_2);
PF_3 = ideal(x_0*x_1,x_0*x_2,x_2^2);
PF_4 = ideal(x_0^2,x_0*x_1,x_1^2);
PF_51 = ideal(x_0^2,x_0*x_1,x_0*x_2,x_1*x_2*x_3);
PF_52 = ideal(x_0^2,x_0*x_1,x_0*x_2,x_1*x_2^2);

```

```
PF_53 = ideal(x_0^2,x_0*x_1,x_0*x_2,x_2^2*x_3);
```

```
PF_54 = ideal(x_0^2,x_0*x_1,x_0*x_2,x_2^3);
```

```
--Tangentes dos Pontos fixos em W_twc -
```

```
--Tipos (1) - (4) e (5.1) - (5.4)
```

```
TG_1 = (x_0^3*x_1+x_0^2*x_1*x_2+x_0*x_1*x_2^2+x_0^2*x_1*x_3+x_0*x_1^2*x_3+  
x_0^2*x_2*x_3+x_1^2*x_2*x_3+x_0*x_2^2*x_3+x_0*x_1*x_3^2+x_0*x_2*x_3^2+  
x_1*x_2*x_3^2+x_2*x_3^3)/(x_0*x_1*x_2*x_3);
```

```
TG_2 = (x_0^2*x_1+x_0*x_1^2+x_0^2*x_2+x_1^2*x_2+x_0*x_2^2+x_1*x_2^2+  
2*x_0*x_1*x_3+2*x_0*x_2*x_3+2*x_1*x_2*x_3)/(x_0*x_1*x_2);
```

```
TG_3 = (x_0*x_1^3+x_0^2*x_1*x_2+x_0*x_1^2*x_2+x_0^2*x_2^2+x_1^2*x_2^2+  
x_1*x_2^3+x_0*x_1^2*x_3+2*x_0*x_1*x_2*x_3+x_0*x_2^2*x_3+x_1*x_2^2*x_3+  
x_2^3*x_3)/(x_0*x_1*x_2^2);
```

```
TG_4 = (x_0^3*x_2+2*x_0^2*x_1*x_2+2*x_0*x_1^2*x_2+x_1^3*x_2+x_0^3*x_3+  
2*x_0^2*x_1*x_3+2*x_0*x_1^2*x_3+x_1^3*x_3)/(x_0^2*x_1^2);
```

```
TG_51 = (x_0*x_1^3+x_0*x_1^2*x_2+x_0*x_1*x_2^2+x_0*x_2^3+x_0*x_1^2*x_3+  
x_1^2*x_2*x_3+x_0*x_2^2*x_3+x_1*x_2^2*x_3+x_0*x_1*x_3^2+x_0*x_2*x_3^2+  
2*x_1*x_2*x_3^2)/  
(x_0*x_1*x_2*x_3);
```

```
TG_52 = (x_0*x_1^3+x_0*x_1^2*x_2+x_1^2*x_2^2+x_0*x_2^3+2*x_1*x_2^3+  
x_0*x_1^2*x_3+2*x_0*x_1*x_2*x_3+2*x_0*x_2^2*x_3+x_1*x_2^2*x_3)/  
(x_0*x_1*x_2^2);
```

```
TG_53 = (x_0*x_1^4+x_0*x_1^3*x_2+x_0*x_1^2*x_2^2+x_0*x_1*x_2^3+  
x_0*x_1^3*x_3+x_0*x_1^2*x_2*x_3+x_1^2*x_2^2*x_3+x_1*x_2^3*x_3+  
x_0*x_1*x_2*x_3^2+x_0*x_2^2*x_3^2+x_1*x_2^2*x_3^2+x_2^3*x_3^2)/  
(x_0*x_1*x_2^2*x_3);
```

```
TG_54 = (x_0*x_1^4+x_0*x_1^3*x_2+x_0*x_1^2*x_2^2+x_1^2*x_2^3+x_1*x_2^4+  
x_2^5+x_0*x_1^3*x_3+x_0*x_1^2*x_2*x_3+2*x_0*x_1*x_2^2*x_3+x_0*x_2^3*x_3+  
x_1*x_2^3*x_3)/(x_0*x_1*x_2^3);
```

```
--Lista com os pontos fixos e tangentes (a menos de permutação das
```

```

--variáveis)
LPFT = {};
for i from 1 to 4 do(
  LPFT=append(LPFT, {"P1: pt fixo, P2: tangente", PF_i, TG_i});
);

for i from 51 to 54 do(
  LPFT=append(LPFT, {"P1: pt fixo, P2: tangente", PF_i, TG_i});
);

--Explosão sobre os pontos fixos tipo (4)
TB = tGrass(S(1),x_0+x_1); -- tangente do centro de explosão
TX = TG_4; --tangente do ambiente
LB4 = blowUp(TX,TB);

--Pontos fixos/tangentes em W'_twc do tipo (4.1) - (4.8)
LPFT4 = for i in LB4 list {"P1: pt fixo, P2: tangente",
  trim(PF_4^2 +sub(i_2*denominator(i_1),r)), i_3};

--Lista com todos os pontos fixos/tangentes em W'_twc(a menos
-- de permutação das variáveis)
LPFTA = {};
for i from 0 to 7 do(
  if (i != 3) then (
    LPFTA = append(LPFTA, {"P1: pt fixo, P2: tangente",
      trim (LPFT_i_1^2), LPFT_i_2});
  )
  else(
    for j in LPFT4 do(
      LPFTA=append(LPFTA,{"P1: pt fixo, P2: tangente",j_1,j_2});
    );
  );
);

--Geração de todos os pontos fixos/tangentes (permmutação da variáveis)
--Lista de Permutações
ListP = permutations toList (x_0..x_n);
ListOP = for i in ListP
  list {x_0 => i_0, x_1 => i_1, x_2 => i_2, x_3 => i_3};

```

```

for i to (length LPFTA - 1) do (
PFT_(i+1) = for j in ListOP list {"P1: pt fixo, P2: tangente",
  sum((sub(sub(LPFTA_i_1,r), j))_*),
sub(numerator LPFTA_i_2, j)/sub(denominator LPFTA_i_2, j)}););

LPFTT = {};
for i from 1 to 15 do(
  for j in PFT_i do(
    LPFTT = append(LPFTT, {j_0, j_1, j_2});
  );
);
LPFTT = unique LPFTT;
length LPFTT -- 172 pontos fixos

-- Geração das fibras de E_d
-- Cálculo do grau de  $\Sigma(W_{twc}, d)$  para  $d = 4, 5$  ou  $6$ 
--Obs. 1:
--Para salvar os dados calculados no arquivo Grau_TWC.txt
--criado/salvo na pasta /home/.../Singular_Surface_TWC
--utilizamos os comandos a seguir:
--arquivo_saida = openOutAppend "/home/.../Grau_TWC.txt";
--arquivo_saida << (result) <<endl<<close;

-- Geração das fibras e graus para os casos  $4 \leq d \leq 6$ 
listresp = {};
for d from 4 to 6 do(
  LPFTF = for i in LPFTT
    list {"P1: pt fixo, P2: tangente, P3: fibra", i_1, i_2,
      sum((trim(ideal(terms(part(4,i_1)*S(d-4)+
part(5,i_1)*S(d-5)+part(6,i_1)*S(d-6))))_* ) );
    result = bott(LPFTF,d); print(result);
    listresp = append(listresp, result);
    arquivo_saida = openOutAppend "/home/weversson/Dropbox/
DOUTORADO/Contas_Macaulay_Singular_Maple/
Singular_Surface_TWC/Grau_TWC.txt";
    arquivo_saida << (result) <<endl<<close;
  );

```

```

-- Cálculo do grau para  $d > 6$  (= regularidade)
--Obs.: Se quiser calcular o grau para um valor específico, sem rodar
--todos os casos, basta iniciar d com o valor desejado e trocar m pelo
--mesmo valor no código abaixo.
--Por exemplo: para  $d = 20 \rightarrow$  for d from 20 to 20 do

for d from 7 to m do (
  LPFTFr = for i in LPFTF
  list {"P1: pt fixo, P2: tangente, P3: fibra", i_1,i_2,
  sum(((trim(ideal(terms (i_3 * S(d-6))))))_*)});
  result = bott(LPFTFr,d); print(result);
  listresp = append(listresp, result);
  arquivo_saida = openOutAppend "/home/weversson/Dropbox/
DOUTORADO/Contas_Macaulay_Singular_Maple/
Singular_Surface_TWC/Grau_TWC.txt";
  arquivo_saida << (result) <<endl<<close;
);

--Polinômio que dá o grau de  $\Sigma(W_{twc},d)$ 
Grau = factor polynomialInterpolation(listresp,QQ[d])

--Salvando o polinômio
Grau = toString Grau
arquivo_saida = openOutAppend "/home/weversson/Dropbox/
DOUTORADO/Contas_Macaulay_Singular_Maple/
Singular_Surface_TWC/Grau_TWC.txt";
arquivo_saida << (Grau) <<endl<<close;
-----

```

Apêndice G

Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{rc}, d)$

Inicialmente utilizamos o Macaulay2 para o cálculo dos tangentes dos pontos fixos antes da primeira explosão (vide 4.16), onde adaptamos o código em Vainsencher [31]. Posteriormente, por questões técnicas computacionais (tempo/memória), utilizamos o Maple para gerar as explosões necessárias, bem como todos os pontos fixos/tangentes a partir dos pontos fixos/tangentes iniciais (vide (4.19) - (4.23)) e fazer as substituições de pesos para o cálculo dos graus utilizando a fórmula de resíduos de Bott.

G.1 Códigos do Macaulay2

As funções abaixo são para o cálculo dos respectivos tangentes dos pontos fixos do tipo (1) a (5) (vide (4.1.2)).

```
--Procedimentos/funções
-----
S = (d) -> (return(sum((ideal(basis(d,r)))_*)));
-----
-----

--retorna a representação dual
dualRep = (p) -> sub(p,dualString);
-----
-----

-- Determina o espaço Tangente à Grassmaniana G=G(r,s) no ponto
-- p, T_p G: onde Sr = Symm(r,F) = S(r)
tGrass =(Sr, p) -> (Sr - p)* dualRep(p);
-----
-----

--omit omite do(a) (ideal, lista,sequence, conjunto) A o elemento
--(ou lista/sequencia de elementos) B
```



```

omit = (A,B) -> ( Laux2 = {};
  if (class B === List) or (class B === Sequence) then (
    Baux = B;)
  else (
    Baux = {B}););
if (class A === Ideal) then (
  Laux1 = A_*;
  for i in Laux1 do(
    if (not member(i,Baux)) then (
      Laux2 = append (Laux2, i);)););
saida = ideal(Laux2););
if (class A === List) then(
  Laux1 = A;
  for i in Laux1 do(
    if (not member(i,Baux)) then (
      Laux2 = append (Laux2, i);)););
saida = Laux2;);
if (class A === Sequence) then(
  Laux1 = A;
  for i in Laux1 do(
    if (not member(i,Baux)) then (
      Laux2 = append (Laux2, i);)););
saida = toSequence (Laux2););
if (class A === Set) then(
  Laux1 = A;
  Laux2 = Laux1 - set(Baux);
  saida = Laux2;);
return(saida);
);

```

--origin recebe v (ideal com variáveis/ou uma soma de variáveis de um
--anel A) e p (um polinômio, um ideal ou lista de polinômios do mesmo
--anel A) e retorna p zerando as variáveis que aparecem em v

```

origin = (v,p,rA) -> (
  use(rA);
  laux = {};
  lvv= support(v); --lista com variáveis de v
  lov = for i in lvv list sub(i,rA)=> 0;

```

```

    qo = p;
    if (class qo === List) then(
      laux = for i in qo list sub(i,lov);
      return(laux);)
    else(
      return(sub(qo,lov)););
);
-----

-----

--wt2frac transforma um polinômio g em uma fração, onde:
--numerador = produto dos monômios com coeficientes positivos, estes
--transformados em potência (Ex.: 2x_0 -> x_0^2)
--denominador= produto dos monômios com coeficientes negativos, estes
--transformados em potência (Ex.: -2x_0 - x_1-> x_0^2*x_1)
wt2frac = (g) -> (
  ng=1; dg=1;
  lw2f:= terms(g);
  for i in lw2f do(
    lc := sub(leadCoefficient(i),ZZ);
    lm := leadMonomial(i);
    if ( lc < 0) then(
      dg= dg*(lm)^(-lc);)
    else(
      ng = ng*(lm)^lc;););
  return(ng/dg);
);
-----

-----

wt = ip -> (
  if (not(class ip === Sequence)) then(
    return("The function wt needs at least 2 arguments, the
      latter being a ring of polynomials");)
  else(
    if (not (class last(ip) === PolynomialRing)) then(
      return("The function wt needs at least 2 arguments, the
        latter being a ring of polynomials");)
    else(
      br = last(ip); -- Base Ring

```

```

use(br);
if (length ip == 3) then(
  s = length ip; p := sub(ip_0,br); q = sub(ip_1, br);)
else(
  p = sub(ip_0,br);
  s= 1;);););
if ((p == 0) or (class p === ZZ)) then
  return(0)
else (
  if (class remember === Symbol) then (
    remember = sub(matrix{{x_0..x_n},{x_0..x_n}},br);
  );
  known = sub(trim(ideal(remember^{0})),br);
  vb = sub(ideal(generators(br,CoefficientRing=>QQ)),br);
  p = sub(leadMonomial (p),br);
  vs = sub(ideal(support(p)),br);
  vsmodknown := sub(trim(sub(vs,br/known)),br);
  if (vsmodknown == 0) then(
    if ( sum(degree p) == 1) then (
for j from 0 to (numcols remember -1) do (
  if (p == sub(remember_(0,j),br)) then ( sj = j; break;));)
  return(remember_(1,sj));)
  else(
    iv = (exponents(p))_0;
    vbn = 0;
    for j from 0 to (length(iv) -1) do(
      if (iv_j != 0) then(
        vbn = vbn + iv_j * wt(vb_j,br);));)
  return(vbn););)
else(
  if (s == 1) then(
    return("--Think! need ideal");)
  else(
    for j from 0 to (numgens q -1) do(
      vsmodknown = trim sub(sub(ideal(support(vsmodknown*q_j)),
        br/known),br);
      qj = sub(origin(vsmodknown, q_j,br),br);
      lqj = terms(qj);
      if (sub(ideal(support(qj)),br/known) !=0) then(

```

```

    return("bad news: -(");)
else(
  qi = sub(q_j - qj,br);
  lqi = terms(qi);
  for i in lqi do(
    newv =sub(origin(known,sum(support(i)),br),br);
    if (size newv == 1) then (
      wtnewv = - wt(sub(i,br)//newv,br)+wt(lqj_0,br);
      mnewv = matrix{{sub(newv,br)},{sub(wtnewv,br)}};
      known = trim(ideal(remember^{0}));
      remember = sub(sub(remember,br)|mnewv,br);
    );););)
  if (sub(p, br/known) ==0) then (
    return(wt(p,br));)
  else(
    return("work harder");)
);););)
-----
-----
--Cálculos dos tangentes iniciam aqui
n = 4; --Dimensão de P^n. n= 3,4 ou 5
r = QQ[x_0..x_n];
dualString = for i from 0 to n list(x_i => 1/x_i);
n1 = binomial(2+n,n) - 3;
n2 = 2*3*(n+1);
r1 = QQ[x_0..x_n,a_(1,1)..a_(3,n1),b_1..b_n2];

LVPn = toList(x_0..x_n); -- Lista das variáveis de Pn;

IVPn = ideal(LVPn); --ideal das variáveis de Pn

--Pontos Fixos Tipos 1 - 5
PF1 = ideal(x_0*x_1, x_1*x_2,x_2*x_3);
PF2 = ideal(x_0*x_1, x_1*x_2, x_0*x_2);
PF3 = ideal(x_0*x_1, x_2, x_0*x_2);
PF4 = ideal(x_0^2, x_0*x_1, x_1^2);
PF5 = ideal(x_0^2, x_0*x_1, x_0*x_2);

--Matrizes que geram os pontos fixos

```

```

mPF1 = matrix{{x_1, x_3, 0},{0, x_0, x_2}};
mPF2 = matrix{{x_0, 0, -x_2},{0, x_1, x_2}};
mPF3 = matrix{{x_0, x_2, 0},{0, x_1, x_2}};
mPF4 = matrix{{x_0, x_1, 0},{0, x_0, x_1}};
mPF5 = matrix{{x_0, 0, -x_2},{0, x_0, x_1}};

LmPF = {mPF1, mPF2, mPF3, mPF4, mPF5}; -- Lista das matrizes

--Lista com os pontos fixos Tipo 1 - 5
LPF = for i in LmPF list minors(2, i);

--Precisamos da imagem do mapa tangente
bb = ideal(b_1..b_n2);

--Perturbação linear de cada matriz
Lpm = {}; --Lista das matrizes após perturbação
for i in LmPF do(
  m0 = mutableMatrix i;
  cont = 0;
  for j to (numrows m0 -1) do (
    for k to (numcols m0 -1) do (
      m0_(j,k)=m0_(j,k)+dotprod(bb_cont .. bb_(cont+n), LVPn);
      cont = cont + (n+1);
    );
  );
  Lpm = append(Lpm, matrix(m0));
);

--Redução dos menores 2x2 de cada matriz perturbada módulo quadrados (bb^2)

bb2 = trim bb^2;

Lpm2 = for i in Lpm list sub(sub(minors(2,i),r1/bb2),r1);

--perturbação dos pontos fixos(redes de quádricas) por quádricas
--( n1 = binomial(2+n,n) - 3)

PLPF = for i in LPF list
  ideal (for j from 0 to (numgens i -1) list

```

```

    i_j + dotprod(a_(j+1,1)..a_(j+1,n1), omit(IVPn^2,i_*)));

--Novo anel para agrupar os coeficientes em relação às variáveis x_i
s = QQ[b_1..b_n2][x_0..x_n];

LPFs = for i in LPF list sub(i,s);

Lpm3 = {};
for i to (length(Lpm2) -1) do(
    u = Lpm2_i;
    q0s = LPFs_i;
    for j from 0 to 2 do
        uaux_j = sub(u_j, s);
    for j from 0 to 2 do(
        iv = omit(0..2,j);
        cq = coefficient(q0s_j, uaux_j);
        uaux_j = sub(sub(uaux_j*(2-cq),r1/bb2),s);
        for k from 0 to 1 do(
            l = iv_k;
            cq = coefficient(q0s_j,uaux_l);
            uaux_l = sub(sub(uaux_l - cq*uaux_j,r1/bb2),s);
        );
    );
    Lpm3 = append(Lpm3,ideal(uaux_0,uaux_1,uaux_2));
);

--Teste de limpeza (opcional)
    u = Lpm3_0; q0s = LPFs_0;
    for i from 0 to 2 do
        for j from 0 to 2 do
            print(i,j, coefficient(q0s_j, u_i));

Lu1 = {};
for i to (length(PLPF)-1) do(
    Lu1 = append (Lu1, ideal(gens(sub(PLPF_i,r1)) -
        gens(sub(Lpm3_i,r1))));
);

--Novo anel para agrupar os coeficientes de u1 em relação às

```

```

--variáveis x_i
s2 = QQ[b_1..b_n2, a_(1,1)..a_(3,n1)][x_0..x_n];

Lu1 = for i in Lu1 list sub(i,s2);

--Coletando os coeficientes e agrupando em um mesmo ideal
Lu1c = {};
for i in Lu1 do (
    (M1,C1) = coefficients (i_0);
    (M2,C2) = coefficients (i_1);
    (M3,C3) = coefficients (i_2);
    Lu1c = append(Lu1c, ideal(C1,C2,C3));
);

--Anel sem as variáveis x_i
s3 = QQ[b_1..b_n2, a_(1,1)..a_(3,n1)];

Lu1c = for i in Lu1c list sub(i, s3);

--Eliminar as variáveis b_i
v = toList(b_1..b_n2);
Lu1c = for i in Lu1c list eliminate(v,i);

--Teste do n° de equações para o espaço tangente do detlocus
for i in Lu1c list numgens i

--Cálculo dos tangentes: tgs
--Obs.: -wt é devido ao conormal

s4 = QQ[a_(1,1)..a_(3,n1), x_0..x_n];

LPFT = {}; --Lista dos pontos fixos e respectivos tangentes
for i to (length(PLPF) - 1) do(
    remember = symbol remember;
    wt(a_(1,1), PLPF_i, s4);
    tg = tGrass(S(2),sub(sum((LPF_i)_*),r));
    tgs = tg;
    for j in ((Lu1c_i)_*) do(
        tgs = tgs - sub(wt2frac(-wt(j,s4)),frac(r)););

```

```

LPFT = append(LPFT, {"P1: pt fixo, P2: Tangente",LPF_i,tgs});
);

```

```

--Lista com os pontos fixos (1 a 5) e respectivos tangentes

```

```

LPFT

```

```

-----

```

G.2 Códigos do Maple

Nesta seção tomamos os pontos fixos (1 a 5) e seus respectivos tangentes obtidos com o Macaulay2 na seção G.1 (vide (4.19) - (4.23)) e efetuamos as permutações das variáveis para gerar todos os pontos fixos e tangentes, as explosões necessárias e a substituição dos pesos para o cálculo do $\deg \Sigma(W_{rc}, d)$ utilizando a fórmula de resíduos de Bott. Para a execução dos cálculos específicos é necessário a inclusão dos procedimentos da seção C.2.

```

#####

```

```

# Inserir aqui os procedimentos da seção C.2

```

```

#####

```

```

# Os cálculos iniciam aqui

```

```

N := 4: M := 60:

```

```

variables := [seq(x[i], i = 0 .. N), seq(1/x[i], i = 0 .. N)]:

```

```

DIM := 18:

```

```

listweights := [11, 17, 32, 55, 95]:

```

```

# Pontos fixos e respectivos tangentes a menos de permutação

```

```

# das variáveis

```

```

PF[1] := x[0]*x[1]+x[1]*x[2]+x[2]*x[3]:

```

```

PF[2] := x[0]*x[1]+x[0]*x[2]+x[1]*x[2]:

```

```

PF[3] := x[0]*x[1]+x[0]*x[2]+x[2]^2:

```

```

PF[4] := x[0]^2+x[0]*x[1]+x[1]^2:

```

```

PF[5] := x[0]^2+x[0]*x[1]+x[0]*x[2]:

```

```

TG[1] := expand((x[0]^3*x[1]+x[0]^2*x[1]*x[2]+x[0]^2*x[1]*x[3]

```

```

+x[0]^2*x[1]*x[4]+x[0]^2*x[2]*x[3]+x[0]*x[1]^2*x[3]

```

```

+x[0]*x[1]*x[2]^2+x[0]*x[1]*x[2]*x[4]+x[0]*x[1]*x[3]^2

```

```

+x[0]*x[1]*x[3]*x[4]+x[0]*x[2]^2*x[3]+x[0]*x[2]*x[3]^2

```

```

+x[0]*x[2]*x[3]*x[4]+x[1]^2*x[2]*x[3]+x[1]*x[2]*x[3]^2

```



```
+x[1]*x[2]*x[3]*x[4]+x[2]*x[3]^3+x[2]*x[3]^2*x[4])
/(x[0]*x[1]*x[2]*x[3]))):
```

```
TG[2] := expand((x[0]^2*x[1]+x[0]^2*x[2]+x[0]*x[1]^2
+2*x[0]*x[1]*x[3]+2*x[0]*x[1]*x[4]+x[0]*x[2]^2
+2*x[0]*x[2]*x[3]+2*x[0]*x[2]*x[4]+x[1]^2*x[2]
+x[1]*x[2]^2+2*x[1]*x[2]*x[3]+2*x[1]*x[2]*x[4])
/(x[0]*x[1]*x[2]))):
```

```
TG[3] := expand((x[0]^2*x[1]*x[2]+x[0]^2*x[2]^2+x[0]*x[1]^3
+x[0]*x[1]^2*x[2]+x[0]*x[1]^2*x[3]+x[0]*x[1]^2*x[4]
+2*x[0]*x[1]*x[2]*x[3]+2*x[0]*x[1]*x[2]*x[4]
+x[0]*x[2]^2*x[3]+x[0]*x[2]^2*x[4]+x[1]^2*x[2]^2+x[1]*x[2]^3
+x[1]*x[2]^2*x[3]+x[1]*x[2]^2*x[4]+x[2]^3*x[3]+x[2]^3*x[4])
/(x[0]*x[1]*x[2]^2))):
```

```
TG[4] := expand((x[0]^3*x[2]+x[0]^3*x[3]+x[0]^3*x[4]
+2*x[0]^2*x[1]*x[2]+2*x[0]^2*x[1]*x[3]+2*x[0]^2*x[1]*x[4]
+2*x[0]*x[1]^2*x[2]+2*x[0]*x[1]^2*x[3]+2*x[0]*x[1]^2*x[4]
+x[1]^3*x[2]+x[1]^3*x[3]+x[1]^3*x[4])/(x[0]^2*x[1]^2))):
```

```
TG[5] := expand((x[0]*x[1]*x[3]+x[0]*x[1]*x[4]+x[0]*x[2]*x[3]
+x[0]*x[2]*x[4]+x[1]^3+2*x[1]^2*x[2]+x[1]^2*x[3]+x[1]^2*x[4]
+2*x[1]*x[2]^2+2*x[1]*x[2]*x[3]+2*x[1]*x[2]*x[4]+x[2]^3
+x[2]^2*x[3]+x[2]^2*x[4])/(x[0]*x[1]*x[2]))):
```

```
# Lista com todos os pontos fixos e respectivos tangentes 1 - 4
```

```
LPFT := []:
```

```
for i to 4 do
```

```
  LPFT:= [op(LPFT), ["P2: pt fixo, P3: Tangente",PF[i],TG[i]]]:
```

```
od:
```

```
# Primeira explosão (Pontos tipo 5)
```

```
# Tangente do centro de explosão
```

```
tgc := TGrass(S(1),x[0])+TGrass(x[1]+x[2]+x[3]+x[4],x[1]+x[2]):
```

```
# Tangente do ambiente
```

```
tgs := TG[5]:
```

```

LBPF5 := blowUp(tgs, tgc):

# Lista de pontos fixos a menos de permutação das variáveis
# Pontos tipo 5 após explosão (LPFT5)
LP := [5, 6, 8, 9]:
LPFT5 := []:
for i in LP do
  LPFT5 := [op(LPFT5), ["P2: pt fixo, P3: Tangente",
    expand(PF[5]+LBPF5[i][3]*denom(LBPF5[i][2])), LBPF5[i][4]]]:
od:

#Junção das listas de ponto fixo
LPFT := [op(LPFT), op(LPFT5)]:

# Efetuando a permutação das variáveis para gerar todos os
# pontos fixos

with(combinat): with(ListTools):

p1 := permute([x[0], x[1], x[2], x[3], x[4]]):
LF := []:
for i to nops(LPFT) do
  LF := [op(LF), [LPFT[i][1],
    unapply(LPFT[i][2], x[0], x[1], x[2], x[3], x[4]),
    unapply(LPFT[i][3], x[0], x[1], x[2], x[3], x[4])]]]:
od:

LPT := []:
for i to nops(LPFT) do
  Laux := []:
  for j to nops(p1) do
    Laux := [op(Laux), [LF[1][1], LF[i][2](op(p1[j])),
      LF[i][3](op(p1[j]))]]]:
  od:
  LPT := [op(LPT), [MakeUnique(Laux)]]:
od:

# (opcional) Total de pontos fixos antes da 2ª explosão #440

```

```

npf := 0:
for i to nops(LPT) do
  npf := npf+nops(LPT[i][1]):
od:
print(npf):

#Gerando as fibras e tangentes

# Caso d=4
# Casos i = 1 a 3
for i to 3 do
  LFT[i] := []:
  for j to nops(LPT[i][1]) do
    LFT[i] :=
      [op(LFT[i]), ["P2: pt fixo, P3: fibra, P4: Tangente",
        LPT[i][1][j][2], expand(simpleweights(LPT[i][1][j][2]^2)),
        LPT[i][1][j][3])]]:
  od:
od:

# Caso i = 4 (2ª explosão)
LFT[4] := []:
for j in LPT[4][1] do
  tgc4 := TGrass(S(1), add(indets(j[2]))):
  tgs4 := j[3]:
  LB4 := blowUp(tgs4, tgc4):
  for k in LB4 do
    LFT[4] :=
      [op(LFT[4]), ["P2: pt fixo, P3: fibra, P4: Tangente", j[2],
        expand(simpleweights(j[2]^2+k[3]*denom(k[2]))), k[4]]]:
  od:
od:

#Casos i= 5 a 8
for i from 5 to 8 do
  LFT[i] := []:
  for j to nops(LPT[i][1]) do
    LFT[i] :=
      [op(LFT[i]), ["P2: pt fixo, P3: fibra, P4: Tangente",

```

```

    LPT[i][1][j][2],
    partdegree(expand(simpleweights(LPT[i][1][j][2]^2)), 4),
    LPT[i][1][j][3]]]:
od:
od:

#Grau para d=4
LFTatual := []:
for i to 8 do
    for j in LFT[i] do
        LFTatual := [op(LFTatual), [j[1], j[2], j[3], j[4]]]:
    od:
od:
listresp := []:
listresp := [op(listresp), Bott(LFTatual, 4)]:
print(listresp):
save listresp, "Grau_Maple_P4.txt":

#Casos d=5 e 6
for d from 5 to 6 do
    for i to 4 do
        LFTd[i] := []:
        for j in LFT[i] do
            LFTd[i] := [op(LFTd[i]),
                ["P2: pt fixo, P3: fibra, P4: Tangente", j[2],
                simpleweights(j[3]*S(1)), j[4]]]:
        od:
        LFT[i] := LFTd[i]:
    od:
for i from 5 to 8 do
    LFTd[i] := []:
    for j in LFT[i] do
        LFTd[i] :=
            [op(LFTd[i]), ["P2: pt fixo, P3: fibra, P4: Tangente", j[2],
            simpleweights(j[3]*S(1)+partdegree(j[2]^2, d)), j[4]]]:
    od:
    LFT[i] := LFTd[i]:
od:
# Grau para d = 5 e 6

```

```

LFTatual := []:
for i to 8 do
  for j in LFT[i] do
    LFTatual := [op(LFTatual), [j[1], j[2], j[3], j[4]]]:
  od:
od:
listresp := [op(listresp), Bott(LFTatual, d)]:
print(listresp):
save listresp, "Grau_Maple_P4.txt":
od:

# Casos d >= 7 (>regularidade = 6)
# Obs.: Não tentar rodar muitos casos de cada vez,
# pois ocupa uma quantidade razoável de memória
for d from 7 to 10 do
  for i to 8 do
    LFTd[i] := []:
    for j in LFT[i] do
      LFTd[i] := [op(LFTd[i]), [j[1], j[2],
        simpleweights(j[3]*S(d-6)), j[4]]]:
    od:
  od:
  LFTatual := []:
  for i to 8 do
    for j in LFTd[i] do
      LFTatual := [op(LFTatual), [j[1], j[2], j[3], j[4]]]:
    od:
  od:
  listresp := [op(listresp), Bott(LFTatual, d)]:
  print(listresp):
  save listresp, "Grau_Maple_P4.txt":
od:
#####

```

Apêndice H

Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{sg}, d)$

Inicialmente, utilizamos o Macaulay2 para o cálculo dos tangentes dos pontos fixos antes da primeira explosão (vide 4.32), onde utilizamos o código da seção G.1, trocando $n = 4$ por $n = 5$. Posteriormente, utilizamos o Maple para gerar as explosões necessárias, bem como todos os pontos fixos/tangentes a partir dos pontos fixos/tangentes iniciais e fazer as substituições de pesos para o cálculo dos graus utilizando a fórmula de resíduos de Bott. Para isso, é necessário os procedimentos da seção C.2 e os códigos listados a seguir.

```
#####  
# Inserir aqui os procedimentos da seção C.2  
#####  
# Os cálculos iniciam aqui  
  
N := 5: M := 19: #M precisa ir pelo menos até (5)*24 + 6 = 126  
variables := [seq(x[i], i = 0 .. N), seq(1/x[i], i = 0 .. N)]:  
DIM := 24:  
listweights := [11, 17, 32, 55, 95, 160]:  
  
# Pontos fixos e respectivos tangentes a menos de permutação  
# das variáveis  
PF[1] := x[0]*x[1]+x[1]*x[2]+x[2]*x[3]:  
PF[2] := x[0]*x[1]+x[0]*x[2]+x[1]*x[2]:  
PF[3] := x[0]*x[1]+x[0]*x[2]+x[2]^2:  
PF[4] := x[0]^2+x[0]*x[1]+x[1]^2:  
PF[5] := x[0]^2+x[0]*x[1]+x[0]*x[2]:  
  
TG[1] := expand((x[0]^3*x[1]+x[0]^2*x[1]*x[2]+x[0]^2*x[1]*x[3]  
+x[0]^2*x[1]*x[4]+x[0]^2*x[1]*x[5]+x[0]^2*x[2]*x[3]+
```

```

x[0]*x[1]^2*x[3]+x[0]*x[1]*x[2]^2+x[0]*x[1]*x[2]*x[4]
+x[0]*x[1]*x[2]*x[5]+x[0]*x[1]*x[3]^2+x[0]*x[1]*x[3]*x[4]+
x[0]*x[1]*x[3]*x[5]+x[0]*x[2]^2*x[3]+x[0]*x[2]*x[3]^2+
x[0]*x[2]*x[3]*x[4]+x[0]*x[2]*x[3]*x[5]+x[1]^2*x[2]*x[3]+
x[1]*x[2]*x[3]^2+x[1]*x[2]*x[3]*x[4]+x[1]*x[2]*x[3]*x[5]+
x[2]*x[3]^3+x[2]*x[3]^2*x[4]+x[2]*x[3]^2*x[5])/
(x[0]*x[1]*x[2]*x[3]):

```

```

TG[2] := expand((x[0]^2*x[1]+x[0]^2*x[2]+x[0]*x[1]^2+
2*x[0]*x[1]*x[3]+2*x[0]*x[1]*x[4]+2*x[0]*x[1]*x[5]+
x[0]*x[2]^2+2*x[0]*x[2]*x[3]+2*x[0]*x[2]*x[4]+2*x[0]*x[2]*x[5]
+x[1]^2*x[2]+x[1]*x[2]^2+2*x[1]*x[2]*x[3]+2*x[1]*x[2]*x[4]+
2*x[1]*x[2]*x[5]))/(x[0]*x[1]*x[2]):

```

```

TG[3] := expand((x[0]^2*x[1]*x[2]+x[0]^2*x[2]^2+x[0]*x[1]^3+
x[0]*x[1]^2*x[2]+x[0]*x[1]^2*x[3]+x[0]*x[1]^2*x[4]+
x[0]*x[1]^2*x[5]+2*x[0]*x[1]*x[2]*x[3]+2*x[0]*x[1]*x[2]*x[4]
+2*x[0]*x[1]*x[2]*x[5]+x[0]*x[2]^2*x[3]+x[0]*x[2]^2*x[4]
+x[0]*x[2]^2*x[5]+x[1]^2*x[2]^2+x[1]*x[2]^3+x[1]*x[2]^2*x[3]
+x[1]*x[2]^2*x[4]+x[1]*x[2]^2*x[5]+x[2]^3*x[3]+x[2]^3*x[4]
+x[2]^3*x[5]))/(x[0]*x[1]*x[2]^2):

```

```

TG[4] := expand((x[0]^3*x[2]+x[0]^3*x[3]+x[0]^3*x[4]
+x[0]^3*x[5]+2*x[0]^2*x[1]*x[2]+2*x[0]^2*x[1]*x[3]
+2*x[0]^2*x[1]*x[4]+2*x[0]^2*x[1]*x[5]+2*x[0]*x[1]^2*x[2]
+2*x[0]*x[1]^2*x[3]+2*x[0]*x[1]^2*x[4]+2*x[0]*x[1]^2*x[5]
+x[1]^3*x[2]+x[1]^3*x[3]+x[1]^3*x[4]+x[1]^3*x[5]))/
(x[0]^2*x[1]^2):

```

```

TG[5] := expand((x[0]*x[1]*x[3]+x[0]*x[1]*x[4]+x[0]*x[1]*x[5]
+x[0]*x[2]*x[3]+x[0]*x[2]*x[4]+x[0]*x[2]*x[5]+x[1]^3
+2*x[1]^2*x[2]+x[1]^2*x[3]+x[1]^2*x[4]+x[1]^2*x[5]
+2*x[1]*x[2]^2+2*x[1]*x[2]*x[3]+2*x[1]*x[2]*x[4]+
2*x[1]*x[2]*x[5]+x[2]^3+x[2]^2*x[3]+x[2]^2*x[4]+
x[2]^2*x[5]))/(x[0]*x[1]*x[2]):

```

```

# Lista com todos os pontos fixos e respectivos tangentes 1-4
LPFT := []:
for i to 4 do LPFT := [op(LPFT), ["P2: pt fixo, P3: Tangente",

```

```

PF[i], TG[i]]]: od:

# Primeira explosão (Pontos tipo 5)
# Tangente do centro de explosão
tgc := TGrass(S(1),x[0])+TGrass(x[1]+x[2]+x[3]+x[4]+x[5],
x[1]+x[2]):

# Tangente do ambiente
tgs := TG[5]:

LBPF5 := blowUp(tgs, tgc):

# Lista de pontos fixos a menos de permutação das variáveis
# Pontos tipo 5 após explosão (LPFT5)
# LP Lista com as posições dos pontos fixos após explosão
# que geram os demais pontos a menos de permutação
LP := []:
for i to nops(LBPF5) do
  if (LBPF5[i][3] = x[2]/x[0]) then LP := [op(LP), i]: fi:
od:
for i to nops(LBPF5) do
  if (LBPF5[i][3]=x[2]^2/(x[0]*x[1])) then LP:=[op(LP), i]:fi:
od:
for i to nops(LBPF5) do
  if (LBPF5[i][3] = x[3]/x[0]) then LP := [op(LP), i]:fi:
od:
for i to nops(LBPF5) do
  if(LBPF5[i][3]=x[2]*x[3]/(x[0]*x[1])) then LP:=[op(LP),i]:fi:
od:

LPFT5 := []:
for i in LP do
  LPFT5 := [op(LPFT5), ["P2: pt fixo, P3: Tangente",
  expand(PF[5]+LBPF5[i][3]*denom(LBPF5[i][2])), LBPF5[i][4]]]:
od:

#Junção das listas de ponto fixo
LPFT := [op(LPFT), op(LPFT5)]:

```



```

# Efetuando a permutação das variáveis para gerar todos os pontos fixos

with(combinat): with(ListTools):

p1 := permute([x[0], x[1], x[2], x[3], x[4],x[5]]):
LF := []:
for i to nops(LPFT) do
  LF := [op(LF), [LPFT[i][1],
  unapply(LPFT[i][2], x[0], x[1], x[2], x[3], x[4],x[5]),
  unapply(LPFT[i][3], x[0], x[1], x[2], x[3], x[4],x[5])]]]:
od:

LPT := []:
for i to nops(LPFT) do
  Laux := []:
  for j to nops(p1) do
    Laux := [op(Laux), [LF[1][1], LF[i][2](op(p1[j])),
    LF[i][3](op(p1[j]))]]]:
  od:
  LPT := [op(LPT), [MakeUnique(Laux)]]:
od:

# (opcional) Total de pontos fixos antes da 2ª explosão #1115
npf := 0:
for i to nops(LPT) do
  npf := npf+nops(LPT[i][1]):
od:
print(npf):

#Gerando as fibras e tangentes

# Caso d=4
# Casos i = 1 a 3
for i to 3 do
  LFT[i] := []:
  for j to nops(LPT[i][1]) do
    LFT[i] := [op(LFT[i]),
    ["P2: pt fixo, P3: fibra, P4: Tangente", LPT[i][1][j][2],
    expand(simpleweights(LPT[i][1][j][2]^2)), LPT[i][1][j][3]]]:
  od:

```

```

od:
od:

# Caso i = 4 (2ª explosão)
LFT[4] := []:
for j in LPT[4][1] do
  tgc4 := TGrass(S(1), add(indets(j[2]))):
  tgs4 := j[3]:
  LB4 := blowUp(tgs4, tgc4):
  for k in LB4 do
    LFT[4] := [op(LFT[4]),
      ["P2: pt fixo, P3: fibra, P4: Tangente", j[2],
        expand(simpleweights(j[2]^2+k[3]*denom(k[2]))), k[4]]]:
  od:
od:

#Casos i= 5 a 8
for i from 5 to 8 do
  LFT[i] := []:
  for j to nops(LPT[i][1]) do
    LFT[i] := [op(LFT[i]),
      ["P2: pt fixo, P3: fibra, P4: Tangente", LPT[i][1][j][2],
        partdegree(expand(simpleweights(LPT[i][1][j][2]^2)), 4),
        LPT[i][1][j][3]]]:
  od:
od:

#Grau para d=4
LFTatual := []:
for i to 8 do
  for j in LFT[i] do
    LFTatual := [op(LFTatual), [j[1], j[2], j[3], j[4]]]:
  od:
od:

listresp := []:
listresp := [op(listresp), Bott(LFTatual, 4)]:
print(listresp):
save listresp, "Grau_Maple_P5.txt":

```

```

#Casos d= 5 e 6 - ao final sai com as fibras e tangentes para d = 6
for d from 5 to 6 do
  for i to 4 do
    LFTd[i] := []:
    for j in LFT[i] do
      LFTd[i] := [op(LFTd[i]),
        ["P2: pt fixo, P3: fibra, P4: Tangente", j[2],
        simpleweights(j[3]*S(1)), j[4]]]:
    od:
    LFT[i] := LFTd[i]:
  od:
for i from 5 to 8 do
  LFTd[i] := []:
  for j in LFT[i] do
    LFTd[i] := [op(LFTd[i]),
      ["P2: pt fixo, P3: fibra, P4: Tangente", j[2],
      simpleweights(j[3]*S(1)+partdegree(j[2]^2, d)), j[4]]]:
  od:
  LFT[i] := LFTd[i]:
od:
# Grau para d = 5 e 6
LFTatual := []:
for i to 8 do
  for j in LFT[i] do
    LFTatual := [op(LFTatual), [j[1], j[2], j[3], j[4]]]:
  od:
od:
listresp := [op(listresp), Bott(LFTatual, d)]:
print(listresp):
save listresp, "Grau_Maple_P5.txt":
od:

# Casos d>= 7 (>regularidade = 6)
# Obs.: Não tentar rodar muitos casos de cada vez, pois ocupa uma
# quantidade razoável de memória
for d from 19 to 19 do
  for i to 8 do
    LFTd[i] := []:

```

```

    for j in LFT[i] do
      LFTd[i] := [op(LFTd[i]), [j[1], j[2],
        simpleweights(j[3]*S(d-6)), j[4]]]:
    od:
od:
LFTatual := []:
for i to 8 do
  for j in LFTd[i] do
    LFTatual := [op(LFTatual), [j[1], j[2], j[3], j[4]]]:
  od:
od:
listresp := [op(listresp), Bott(LFTatual, d)]:
print(listresp):
save listresp, "Grau_Maple_P5.txt":
od:
#####

```

Apêndice I

Código: Cálculo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{eqc}, d)$

Neste apêndice disponibilizamos o código para o cálculo do grau da subvariedade $\Sigma(W_{eqc}, d) \subset \mathbb{P}^{N_d}$, superfícies em \mathbb{P}^3 de grau d singulares ao longo de alguma curva quártica elíptica. Inicialmente, na Seção I.1 utilizamos o Singular [9] munido da caixa de ferramentas "myprocs", procedimentos/funções criadas por Vainsencher [31], para as contas locais que revelam o local de indeterminação do mapa racional $\mathbb{W}_{eqc} \dashrightarrow \mathbb{G}(12, \mathcal{F}_5)$ definido por ν (vide Proposição 5.5). Ainda na Seção I.1 efetuamos a explosão de \mathbb{W}_{eqc} ao longo de \mathbb{M} e verificamos que isto resolve a indeterminação. Posteriormente, na Seção I.2 utilizamos o software Macaulay2 [17] para gerar todos os pontos fixos, tangentes e as contribuições numéricas destes para o cálculo efetivo do $\deg \Sigma(\mathbb{W}_{eqc}, d)$. Além das funções da seção C.1 é necessário a inclusão das funções `expand` e `blowUp` listadas no Apêndice F.

I.1 Códigos do Singular

```
//Inserir o arquivo myprocs disponível em
// http://www.mat.ufmg.br/~israel/Projetos/degNL/
< "myprocs";

LIB "primdec.lib";
proj(3);
ring r=0,(a(1..2)(1..8)),dp;r=r+P3;setring r;imapall(P3);
def xx2,xx3,xx4,xx5,xx6=xx^2,xx^3,xx^4,xx^5,xx^6 ;
def aa = ideal(a(1..2)(1..8));
def qe = ideal(x(0)^2,x(0)*x(1));

//Vizinhança afim padrão do feixe de quádricas <x(0)^2, x(0)*x(1)>
for(int i=1;i<=2;i++){
```

```

    qe[i]=qe[i]+dotprod([a(i)(1..8)],omit(xx2,ideal(x(0)^2,x(0)*x(1))));}

//Fibrado de cúbicas (posto genérico 8)
def cubs = qe*xx;
def m=transpose(coeffs(cubs,xx3,xxx));
ran(m);
def l=rowsnopivo(m);m=l[1];l[2];l[3];
def m0=submat(m,l[2],1..ncols(m));
m=submat(m,omit(1..nrows(m),l[2]),1..ncols(m));
nrows(m);
ran(origin(aa,m));//7
std(origin(aa,cubs)); def cubs0=_;

//Geradores da fibra divisor excepcional da primeira explosão
def im02 = reduce(ideal(m0),std(aa^2));
def b = pol2id(dotprod(im02,xx3)); b;
//b[1]=-a(1)(3)*x(1)^3
//b[2]=-a(1)(4)*x(1)^2*x(2)
//b[3]=-a(1)(5)*x(1)^2*x(3)
//b[4]=-a(1)(6)*x(1)*x(2)^2
//b[5]=-a(1)(7)*x(1)*x(2)*x(3)
//b[6]=-a(1)(8)*x(1)*x(3)^2
//b[7]=a(2)(6)*x(0)*x(2)^2
//b[8]=a(2)(7)*x(0)*x(2)*x(3)
//b[9]=a(2)(8)*x(0)*x(3)^2

//Coloca o ideal(m0) na forma localmente gráfico
putsolvform(ideal(m0));
def Y=_;

//Z = Local de indeterminação do mapa k: X --> G(8,F_3)
def Indet = dosubs(Y,qe);
list Z = primdecGTZ(Indet);
Z;

//Explosão de X ao longo de Z
ring r1=0,c(1..size(Y)-1),dp;
r1=r1+r;setring r1;imapall(r);

```

```

//Divisor excepcional de interesse Y[4]
//(o que produz a órbita fechada - <x_0^2, x_0x_1, x_1^3>)
int i1=4;

def exc1=Y[i1];def Y1=omit(Y,exc1);
Y1=seq("Y1[i]-exc1*c(i)",1,size(Y1));
def vs=aa;

l=qe,m,m0,vs;l=dosubs(Y1,l);

qe,m,m0,vs=l[1..size(l)];

mysat(m0,m);

nrows(m);
vs=pol2id(indets(vs));vs;
ran(origin(vs,m));
cubs=ideal(m*transpose(xx3));

if(ran(origin(vs,m0))<>0){
cubs=cubs+ideal(m0*transpose(xx3));};
hilbsp(vs,cubs);

//seções linearmente independentes w_i
def w = reduce(cubs,std(vs^2)); w;

//As 8 cúbicas
std(origin(vs,cubs)); def cubs1 = _;

//A nova cúbica gerada após explosão
std(reduce(cubs1,std(cubs0)));

//Fibrado de quinticas (posto genérico = 12)
def quits = cubs*qe;
std(origin(vs,quits)); def quits0=_; //11 quinticas
hilbsp(vs,quits);
def m=transpose(coeffs(quits,xx5,xxx));
ran(m);

```

```

def l=rowsnopivo(m);m=l[1];l[2];l[3];
def m0=submat(m,l[2],1..ncols(m));
m=submat(m,omit(1..nrows(m),l[2]),1..ncols(m));
nrows(m);
ran(origin(vs,m)); ran(origin(vs,m0));
putsolvform(ideal(m0));
def W=_;

//M = (Local de indeterminação do mapa W_eqc --> G(12,F_5))
def T = ideal(cubs[8]);
def TW = dosubs(W,T);
M = myfactor(TW);

//Geradores da fibra do divisor excepcional
def im02 = reduce(ideal(m0),std(vs^2));
list L5 = xx5[(1..56)],xx5[(1..56)];
for(int i=1; i<=size(L5); i++){
    if(im02[i]<>0){
        see(im02[i],L5[i]);};};

//Explosão de W_{eqc} ao longo de M
ring r2=0,d(1..size(W)-1),dp;r2=r2+r1;setring r2;imapall(r1);
l=m0,m,vs;
int i2;

//Variando as vizinhanças
i2++;
def exc2=W[i2];def W1=omit(W,exc2);
W1=seq("W1[i]-exc2*d(i)",1,size(W1));
def l2=dosubs(W1,l);
m0,m,vs=l2[1..size(l2)];vs=pol2id(indets(vs));vs;
mysat(m0,m);
nrows(m);
quits=ideal(m*transpose(xx5)); ran(origin(vs,m0));

if(ran(origin(vs,m0))<>0){
quits=quits+ideal(m0*transpose(xx5));}

//As 12 quínticas

```



```

def quits1 = std(origin(vs,quits)); quits1;

//Nova quíntica
std(reduce(quits1,std(quits0))); def QN =_;

hilbsp(vs,quits); //12t-16 (Polinômio de Hilbert correto)

quits1+x(1)^6; hilbsp(_);//12t-16

```

I.2 Códigos do Macaulay2

```

--Inserir as funções da seção C.1 aqui

--Inserir as funções expand e blowUp do Apêndice F aqui
-----
--Cálculos iniciam aqui
n = 3; --dimensão de Pn
r = QQ[x_0..x_n];
dualString = for i from 0 to n list(x_i => 1/x_i);
DIM = 16;--Dimensão da Variedade das curvas Quárticas Elípticas
m = 56; -- = 3*16+8.
-- Obs.1: Na verdade é suficiente calcular \Sigma(W^2_eqc,d)
-- para 33 (= 2*DIM +1) valores diferentes de d, o que implica
-- tomar m = 32 + 6 = 38

--Pontos fixos tipo 1 - 5
--Tipo 1-3 estão fora do 1º centro de explosão Z=P3^* x G(2,4)
PF_1 = ideal(x_0^2, x_1^2);
PF_2 = ideal(x_0^2, x_1*x_2);
PF_3 = ideal(x_0*x_1, x_2*x_3);

--Tipo 4-5 estão no primeiro centro de explosão
PF_4 = ideal(x_0^2, x_0*x_1);
PF_5 = ideal(x_0*x_1, x_0*x_2);

--Lista com os Pontos fixos/Tangentes do tipo 1 - 3
PFT = for i from 1 to 3
list {"P1:pt fixo,P2:Tangente",PF_i,tGrass(S(2),sum((PF_i)_*))};

```

```

--1ª Explosão (pontos tipo 4 e 5)
for i from 4 to 5 do(
    plane = gcd(PF_i_*);
    line = sub(sum(PF_i_*)/plane, ring plane);
    tg = tGrass(S(2),sum(PF_i_*));
    tgb = tGrass(S(1),plane)+tGrass(S(1),line);
    LB1_i = blowUp(tg,tgb);
);

--pontos fixos/tangentes após 1ª explosão
for i from 4 to 5 do(
    PFT1_i = for j in LB1_i
        list {"P1:pt fixo,P2:Tangente",
            PF_i+sub((j_2)*(denominator j_1), ring PF_i), j_3};
);

--Pontos fixos no 2º centro de Explosão
--h = 4t (Polinômio de Hilbert de uma curva quártica elíptica)
h = hilbertPolynomial(PF_1, Projective=>false);
PFT2 = {}; --Lista com os pontos fixos/tangentes
for i from 4 to 5 do(
    for j in PFT1_i do(
        if (hilbertPolynomial(j_1,Projective=> false) != h) then(
            PFT2 = append(PFT2, j);)
        else(
            PFT = append(PFT, j););
    );
);

--2ª Explosão
for i to (length PFT2 -1) do(
    id2p = sum((PFT2_i_1)_*);
    q_1 = part(3,id2p);
    q_2 = part(2, id2p);
    L = gcd((PFT2_i_1)_*);
    L1 = sum(support(q_2))-L;
    q0_1 = sub(q_1/L, ring L);
    q0_2 = sub(S(2), {L=>0, L1=>0});
);

```

```

    tg = PFT2_i_2;
    tgb = tGrass(S(1),L)+tGrass(S(1)-L,L1)+tGrass(q0_2, q0_1);
    LB2_i = blowUp(tg,tgb);
);

--pontos fixos/tangentes após 2ª explosão
for i to (length PFT2 -1) do(
    PFT3_i = for j in LB2_i
        list {"P1:pt fixo,P2:Tangente", PFT2_i_1+
            sub((j_2)*(denominator j_1), ring PFT2_i_1), j_3};
);

--Todos os pontos fixos/tangentes a menos de permutação
PFT = PFT|PFT3_0|PFT3_1|PFT3_2;

--Pontos fixos no 3º Centro de Explosão
--h2 = Polinômio de Hilbert do ideal(pt fixo)^2 = 12t - 16
h2 = hilbertPolynomial((PFT_0_1)^2, Projective=>false);
PFTA = {};
PFTB = {}; --Pontos fixos no 3º centro de explosão
for i in PFT do(
    if (hilbertPolynomial((i_1)^2, Projective=>false) ==h2) then(
        PFTA = append(PFTA, i);)
    else(
        PFTB = append(PFTB,i));
);

--3ª Explosão (correção do polinômio de Hilbert de I^2)
for i to (length PFTB -1) do(
    id2p = sum((PFTB_i_1)_*);
    plane = gcd(terms part(2, id2p));
    line = sub(part(2,id2p)/plane,ring plane);
    pcl = line - plane;
    fs = S(1)-plane;
    SE1b = pcl^2*fs;
    u1 = part(3, id2p);
    tg = PFTB_i_2;
    tgc = tGrass(S(1),plane)+tGrass(fs,pcl)+tGrass(SE1b,u1);
    LB3_i = blowUp(tg,tgc);

```

```

);

--Pontos fixos/tangentes em W'_eqc
--Coletando pontos após explosão
for i to (length PFTB -1) do(
  LF_i = for j in LB3_i list {"P1: pt fixo, P2: Tangente",
(PFTB_i_1)^2+sub((j_2)*(denominator j_1), ring PFTB_i_1), j_3};
);

LF1 = LF_0|LF_1|LF_2; -- Junção das listas

LF2 = for i in PFTA
      list{"P1: pt fixo, P2: Tangente",(i_1)^2,i_2};

LF3 = LF1|LF2;

-- Transforma os ideais em um polinômio com as somas dos
-- geradores (representação dos pts fixos e fibra)
LF3s = for i in LF3 list {i_0, sum(i_1_*), i_2};

--Aplicando as permutações para gerar todos os pts fixos
--Lista de Permutações
ListP = permutations toList (x_0..x_n);
ListOP = for i in ListP
        list {x_0 => i_0, x_1 => i_1, x_2 => i_2, x_3 => i_3};

for i to (length LF3s -1) do(
LFTF_i=unique for j in ListOP list {LF3s_i_0,sub(LF3s_i_1, j),
  sub(numerator LF3s_i_2, j)/sub(denominator LF3s_i_2, j)};
);

LPFT = {};
for i to (length LF3s - 1) do(
  LPFT = LPFT|LFTF_i;
);

LPFT = unique LPFT; --Lista com todos os pts fixos/tangentes
print("Total de pontos fixos = ",length LPFT); --813

```

```

--Aplicando a Fórmula de Resíduos de Bott

--obs.2:
--para obtenção do polinômio gerador dos graus de
--\Sigma(W_eqc,d) devemos tomar d>=6

--Obs. 3:
--Para salvar os dados calculados no arquivo Grau_EQC.txt
--criado/salvo na pasta /home/.../Singular_Surface_EQC
--utilizamos os comandos a seguir
--arquivo_saida = openOutAppend "/home/.../Grau_EQC.txt";
--arquivo_saida << (result) <<endl<<close;

-- Geração das fibras e graus para os casos 6 <= d <= 8
listresp = {};
for d from 6 to 8 do(

    LPFTF = for i in LPFT
    list {"P1: pt fixo, P2: tangente, P3: fibra",i_1, i_2,
sum((trim(ideal(terms(part(4,i_1)*S(d-4)+part(5,i_1)*S(d-5)+
part(6,i_1)*S(d-6)+part(7,i_1)*S(d-7)+
part(8,i_1)*S(d-8))))))_*)});
    result = bott(LPFTF,d); print(result);
    arquivo_saida = openOutAppend "/home/ufvjm/Dropbox/DOCTORADO/
Contas_Macaulay_Singular_Maple/
Singular_Surface_EQC/Grau_EQC.txt";
    arquivo_saida << (result) <<endl<<close;
    listresp = append(listresp,result);
);

--Casos d>8 (=regularidade)
--Obs.4:
--Se quiser calcular o grau para um valor específico
--sem rodar todos os casos, basta iniciar d com o valor
--desejado e trocar m pelo mesmo valor no código abaixo.
--Por exemplo: para d = 20 -> for d from 20 to 20 do

for d from 9 to m do(
    LPFTFr = for i in LPFTF

```

```

list {"P1: pt fixo, P2: tangente, P3: fibra", i_1,i_2,
sum(((trim(ideal(terms (i_3 * S(d-8))))))_*)});
result = bott(LPFTFr,d); print(result);
listresp = append(listresp, result);
arquivo_saida = openOutAppend "/home/ufvjm/Dropbox/
DOCTORADO/Contas_Macaulay_Singular_Maple/
Singular_Surface_EQC/Grau_EQC.txt";
arquivo_saida << (result) <<endl<<close;
);

```

```

--Polinômio que dá o grau de \Sigma(W_eqc,d)
Grau = factor polynomialInterpolation(listresp, QQ[d])

```

```

--Salvando o polinômio
Grau = toString Grau
arquivo_saida = openOutAppend "/home/ufvjm/Dropbox/DOCTORADO/
Contas_Macaulay_Singular_Maple/Singular_Surface_EQC/
Grau_EQC.txt";
arquivo_saida << (result) <<endl<<close;

```

Referências Bibliográficas

- [1] A. B. Altman and S. L. Kleiman. Foundations of the theory of Fano schemes. *Compositio Mathematica*, 34(1):3–47, 1977. URL http://www.numdam.org/item?id=CM_1977__34_1_3_0. 19
- [2] A. L. M. Araujo. *Aplicações da Fórmula de Bott à Geometria Enumerativa*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2009. URL <http://www.mat.ufmg.br/intranet-atual/pgmat/TesesDissertacoes/uploaded/Tese019.pdf>. 63
- [3] D. Avritzer and I. Vainsencher. The hilbert scheme component of the intersection of two quadrics. *Communications in Algebra*, 27(6):2995–3008, 1999. doi: 10.1080/00927879908826606. URL <https://doi.org/10.1080/00927879908826606>. 63, 67, 69, 71, 72
- [4] A. Beauville. *Complex algebraic surfaces*. London Mathematical Society student texts 34. Cambridge University Press, 2nd ed edition, 1996. ISBN 9780521495103,0521495105,0521498422. 50
- [5] D. F. Coray and I. Vainsencher. Enumerative formulae for ruled cubic surfaces and rational quintic curves. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 61(1):501–518, Dec 1986. ISSN 1420-8946. doi: 10.1007/BF02621930. URL <https://doi.org/10.1007/BF02621930>. 28
- [6] V. F. Cuadrado. *Enumerative Aspects of Holomorphic Foliations*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2010. 18
- [7] F. Cukierman, A. Lopez, and I. Vainsencher. Enumeration of surfaces containing an elliptic quartic curve. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 142(10):3305–3313, October 2014. URL <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2014-11998-8>. 13, 19, 21, 63, 65
- [8] H. Dao, A. De Stefani, E. Grifo, C. Huneke, and L. Núñez-Betancourt. Symbolic powers of ideals. *ArXiv e-prints*, Aug. 2017. URL <https://arxiv.org/abs/1708.03010>. 16, 17

- [9] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann. SINGULAR 4-1-1 — A computer algebra system for polynomial computations. <http://www.singular.uni-kl.de>, 2018. 14, 44, 77, 94, 124
- [10] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, reprint of 1st edition edition, 1995. 17
- [11] G. Ellingsrud and S. Strømme. The number of twisted cubic curves on the general quintic threefold. *Math. Scand.*, 76:5–34, 1995. URL <http://www.jstor.org/stable/24491856>. 38
- [12] G. Ellingsrud and S. Strømme. Bott’s formula and enumerative geometry. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1):175–193, 1996. URL <https://doi.org/10.1090/S0894-0347-96-00189-0>. 10, 12, 13, 22, 26, 38, 39, 40, 41, 63
- [13] G. Ellingsrud and S. A. Strømme. On the Chow ring of a geometric quotient. *Annals of Mathematics, Second Series*, 130(1):159–187, Jul., 1989. URL <http://www.jstor.org/stable/1971479>. 12, 13, 37
- [14] G. Ellingsrud, R. Piene, and S. A. Strømme. *On the Variety of Nets of Quadrics Defining Twisted Cubic Curves, Space curves (Rocca Di Papa, 1985)*, volume 1266 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 84–96. Springer, 1987. URL <https://doi.org/10.1007/BFb0078179>. 12, 37, 38
- [15] W. Fulton. *Intersection Theory*. Springer, 2^a edition, 1998. 18, 20, 22
- [16] G. Gotzmann. The irreducible components of $\text{Hilb}^{\{4n\}}(\mathbb{P}^3)$. *ArXiv e-prints*, Nov. 2008. URL <https://arxiv.org/abs/0811.3160>. 63
- [17] D. Grayson and M. E. Stillman. Macaulay2 version 1.9.2, a software system for research in algebraic geometry. available at <https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/>. 14, 26, 32, 35, 42, 50, 57, 62, 76, 77, 78, 79, 81, 92, 94, 124
- [18] J. Harris. *Algebraic Geometry: A First Course*. Number 133 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1992. 58
- [19] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52. Springer, 1977. 18, 48
- [20] M. Hochster. Criteria for equality of ordinary and symbolic powers of primes. *Mathematische Zeitschrift / Mathematische Zeitschrift*, 133:53–65, 1973. URL <http://eudml.org/doc/171940>. 17

- [21] M. E. Kazarian. Multisingularities, cobordisms, and enumerative geometry. *Russian Mathematical Surveys*, 58(4):665, 2003. URL <http://stacks.iop.org/0036-0279/58/i=4/a=R02>. 11
- [22] M. Kool, V. Shende, and R. P. Thomas. A short proof of the göttsche conjecture. *Geom. Topol.*, 15(1):397–406, 2011. doi: 10.2140/gt.2011.15.397. URL <https://doi.org/10.2140/gt.2011.15.397>. 11
- [23] A.-K. Liu. Family blowup formula, admissible graphs and the enumeration of singular curves, i. *J. Differential Geom.*, 56(3):381–579, 11 2000. doi: 10.4310/jdg/1090347696. URL <https://doi.org/10.4310/jdg/1090347696>. 11
- [24] Maple. Maplesoft, a division of Waterloo maple inc., Waterloo, Ontario. Version 2015. 14, 29, 57, 62, 77, 81, 89
- [25] A. L. Meireles and I. Vainsencher. Equivariant intersection theory and Bott’s residue formula - XVI Escola de Álgebra – Part 1. *Matemática Contemporânea*, 20:1–70, 2001. URL <http://mc.sbm.org.br/docs/mc/pdf/20/a1.pdf>. 22, 23
- [26] P. Meurer. The number of rational quartics on calabi-yau hypersurfaces in weighted projective space $p(2,1^4)$. *Mathematica Scandinavica*, 78(1):63–83, 1996. URL <http://www.jstor.org/stable/24492817>. 26, 81
- [27] D. Mumford. *Lectures on curves on an algebraic surface, With a section by G. M. Bergman*. Number 59 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1966. 19
- [28] R. Piene and M. Schlessinger. On the Hilbert scheme compactification of the space of twisted cubics. *American Journal of Mathematics*, 107(4):761–774, Aug.,1985. URL <http://www.jstor.org/stable/2374355>. 12, 37
- [29] J. V. Rennemo. Universal polynomials for tautological integrals on hilbert schemes. *Geometry & Topology*, 21(1):253 – 314, 2017. URL <https://doi.org/10.2140/gt.2017.21.253>. 11
- [30] Y.-J. Tzeng. A proof of the göttsche-yau-zaslow formula. *J. Differential Geom.*, 90(3):439–472, 03 2012. doi: 10.4310/jdg/1335273391. URL <https://doi.org/10.4310/jdg/1335273391>. 11
- [31] I. Vainsencher. Computer algebra scripts. URL <http://www.mat.ufmg.br/~israel/Projetos/degNL/>. 94, 103, 124
- [32] I. Vainsencher. A note on the Hilbert scheme of twisted cubics. *Bol. Soc. Bras. Mat*, 18(1):81–89, 1987. URL <https://doi.org/10.1007/BF02584832>. 12, 37, 38, 42, 43, 52

- [33] I. Vainsencher. Hypersurfaces with up to six double points. *Communications in Algebra*, 31(8):4107–4129, 2003. URL <https://doi.org/10.1081/AGB-120022456>. 11
- [34] I. Vainsencher. Foliations singular along a curve. *Trans. London Math. Soc*, 2(1): 80–92, July 2015. URL <https://doi.org/10.1112/tlms/tlv004>. 21
- [35] I. Vainsencher and D. Avritzer. Compactifying the space of elliptic quartic curves. *Complex Projective Geometry(Trieste, 1989/Bergen, 1989)*, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 179, Cambridge Univ. Press, Cambridge:47–58, 1992. URL <https://doi.org/10.1017/CB09780511662652.005>. 13, 63, 65
- [36] I. Vainsencher and F. Xavier. A compactification of the space of twisted cubics. *Mathematica Scandinavica*, 91(2):221–243, 2002. URL <http://dx.doi.org/10.7146/math.scand.a-14387>. 12, 37, 50, 58