UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Quando uma variedade Lagrangiana, invariante por um fluxo Hamiltoniano, é uma seção?

**Jailton Viana da Conceição**

Belo Horizonte
11 de Dezembro de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Jailton Viana da Conceição

# Quando uma variedade Lagrangiana, invariante por um fluxo Hamiltoniano, é uma seção?

Tese submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Matemática.

Orientador: Mario Jorge Dias Carneiro

Belo Horizonte
11 de Dezembro de 2018

*A minha família, pais e irmãos.*

# Sumário

# Agradecimentos

Agradeço à minha esposa e filha pela paciência, sacrifício e apoio durante essa longa jornada.

Agradeço aos meus pais e irmãos pelo incentivo e pelas palavras de conforto, nos momentos arduos.

Agradeço ao meu orientador Mário, pela confiança, compreensão e por acreditar em mim. Sua amizade, dedicação e ética são referências que levarei comigo por toda a vida.

Agradeço aos membros da banca por aceitarem examinar e julgar esse trabalho. Eles fizeram isto com paciência, eficiência e generosidade.

Agradeço a todos os amigos da pós-graduação, pelos bons momentos e boas conversas durante esse período. Um agradecimento especial ao Celso, Farley, Gilberto e Carlos Salazar pela paciência em me ouvirem, quando solicitados nos momentos mais difíceis dessa caminhada, dando me palavras de motivação para seguir em frente.

Agradeço às secretárias da pós Eliane Andrea e Eliane Kelly pela competência e eficiência nos atendimentos prestados.

Agradeço aos colegas do DEX-UFLA pelo apoio dado, sendo favoráveis à minha licença para andamento do doutorado. Em especial, agradeço à Adriana, Helvécio e Maria do Carmo.

Agradeço ao CNPQ e à UFLA pelos suportes concendidos.

# Resumo

Esta tese consiste numa busca por condições suficientes para propriedade de gráfico de uma variedade Lagrangiana $W$, invariante por um fluxo Hamiltoniano de Tonelli. Este tipo de estudo começou com Birkhooff na década de 1920, depois a partir da década de 1980 pelas escolas Russa, Francesa e também, com os trabalhos de Carneiro e Ruggiero no Brasil.

Na seção 2.1, estudamos o caso em que $W$ não contém pontos conjugados. Mais precisamente, mostramos que quando no nível de energia existir uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $W$, na qual a semi-órbita positiva de um ponto $\alpha \in \mathcal{U}$ não tenha pontos conjugados a $\alpha$ então, $W$ é um gráfico.

Na seção 2.2, consideramos o caso em que $W$ está contida num conjunto de Mañé. Um fato bem conhecido é que uma condição necessária para que $W$ seja um gráfico, é que esteja contida em um conjunto de Mañé. Assim, é natural perguntar se esta condição também é suficiente. Nesta direção mostramos que se $W$ está num conjunto de Mañé e quaisquer duas órbitas errantes em $W$ têm os mesmos conjutos alfa limites ou os mesmos conjuntos ômega limites, então $W$ é um gráfico.

Na seção 2.4, nosso estudo se restringe ao caso do fluxo geodésico no toro $\mathbb{T}^3$. Neste caso, mostramos que quando as geodésicas com condições iniciais em $W$ minimizam distância no recobrimento $\mathbb{R}^3$, para qualquer intervalo de tempo e além disso, quaisquer duas órbitas não recorrentes têm os mesmo conjutos alfa limites ou os mesmos conjuntos ômega limites, então $W$ é um gráfico.

**Palavas-Chave:** Hamiltoniano de Tonelli, pontos conjugados, minimizantes globais, teoremas de Birkhoof, gráficos Lagrangianos.

# Abstract

This thesis consists in a search by sufficient conditions for the graph property of a Lagrangian manifold $W$, invariant by a Tonelli Hamiltonian flow. This kind of study started with Birkhoof in the 1920' and later after 1980' with Russian and French school and also with the work of Carneiro and Ruggiero in Brazil.

In section 2.1, we study the case where $W$ has no conjugate point. More precisely, we show that when in the energy level there exists a neighborhood $\mathcal{U}$ of $W$, such that the positive semi-orbit of a point $\alpha \in \mathcal{U}$ has no point conjugate to alpha then $W$ is a graph.

In section 2.2, we consider the case where $W$ is contained in a Mañé set. It is a well known fact that a necessary condition to a Lagrangian invariant manifold to be a graph is that it is contained in some Mañé set. A natural question is if that is also a sufficient condition. On this direction, we show that if $W$ is a subset of a Mañé set and any two wandering orbits have either the same alpha limit set or the same omega limit set, then $W$ is a graph.

In section 2.4, we restricted our study to the geodesic flow on the torus $\mathbb{T}^3$. In this case, we show that when the geodesics with initial conditions in $W$ minimize the distance in the covering space $\mathbb{R}^3$ and besides that any two non recurrent orbits have either the same alpha limit set or the same omega limit set, then $W$ is a graph.

**Keywords:** Tonelli Hamiltonian, conjugate points, global minimizing, Birkhoff's theorem, Lagrangian graphs.

# Introdução

Desde os tempos de Isaac Newton há uma busca, pelo entendimento da dinâmica da interação puramente gravitacional de mais de dois corpos celestes. Este problema é conhecido como o problema de $N$ corpos. Matemáticos como Euler (1772), Lagrange (1788), Jacobi (1836) e Hill (1878) enfrentaram esse problema, dando algumas contribuições relevantes para o caso $N = 3$. Mas o problema recebeu uma atenção maior em 1889, quando o Rei Oscar II da Suécia, no seu aniversário de 60 anos, ofereceu um prêmio a qualquer um que resolvesse o problema ou que pelo menos desse uma grande contribuição no entedimento dessa dinâmica. Então, em 1889, Henri Poincaré apresenta um memorável artigo, o qual contém uma provável solução. Poincaré, ciente de que o problema geral era muito difícil, tentou resolver uma versão mais fraca, hoje conhecida como o problema dos três corpos restrito (veja [52]). Nesta versão, as órbitas dos três corpos estão contidas num mesmo plano. Um dos jurados designados para avaliar os trabalhos submetidos era Karl Weierstrass, o qual disse:
*"Ora certamente este trabalho não pode ser considerado uma solução do problema proposto, mas sem dúvida é de tão grande importância que sua publicação irá inaugurar uma nova era na dinâmica celeste".*
Um grande feito de Poincaré nesse trabalho, foi a descoberta da dependência sensível nas condições iniciais, fenômeno hoje conhecido como Caos e redes-

coberto em 1963, pelo meteorologista Edward Lorenz do MIT.

Enfim, Poincaré levou o prêmio, apesar de não ter resolvido completamente o problema dos três corpos restrito e, ele mesmo, ainda perceber depois que tinha cometido um erro. Entretanto, depois ele publica seu famoso livro "Les M'ethodes Nouvelles de la Mécanique Céleste"(veja [57]), no qual ele não só corrige seu erro, mas também amplia seus métodos para contextos muito mais gerais.

Em suas pesquisas, Poincaré percebeu que, para entender a dinâmica do problema dos três corpos restrito, dentre outras coisas, era importante compreender a dinâmica do que hoje conhecemos por difeomorfismos twist do anel (veja [39, 44], para definição precisa).

Assim, em 1912, Poincaré publicou um artigo no Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (vol. 33, pp. 375-407), com o seguinte teorema, o qual ele considerava de grande importância para o problema dos três corpos restrito.

**Sobre um Teorema de Geometria:** *Todo difeomorfismo Twist no anel, que preserve área e que gire os dois círculos fronteira em direções opostas, deve ter pelo menos dois pontos fixos.*

Poincaré prova nesse artigo alguns casos particulares e no inicio de 1913, George D. Birkhoff publica uma prova (veja [20]) completa desse teorema, o qual ele chama de último teorema geométrico de Poincaré. Birkhoff já ganhava naquele momento, grande destaque na comunidade matemática americana pelas suas pesquisas. Tanto que já era apelidado de o Poincaré americano .

Seguindo projetos de pesquisas traçados por Poincaré, em 1920 Birkhoff publicou um artigo (veja [39, 44]), no qual ele apresenta provas, incompletas, de dois elegantes teoremas. Estes, são resultados sobre propriedades de gráficos de curvas invariantes, por diffeomorfismos twist do anel, e são conhecidos na literatura como os Primeiro e Segundo Teoremas de Birkhoff, apresentados a seguir.

**Primeiro Teorema de Birkhoff**: *Seja* $\mathrm{F} : \mathrm{T}^*\mathrm{S}^1 \to \mathrm{T}^*\mathrm{S}^1$ *um difeomorfismo twist, de classe* $C^1$ *e homotópico à identidade. Se* $W \subset \mathrm{T}^*\mathrm{S}^1$ *for um gráfico de classe* $C^0$ *e invariante por* $\mathrm{F}$, *então* $W$ *é um gráfico Lipschitz.*

**Segundo Teorema de Birkhoff**: *Seja* $\mathrm{F} : \mathrm{T}^*\mathrm{S}^1 \to \mathrm{T}^*\mathrm{S}^1$ *um difeomorfismo twist, simplético e monótono. Se* $W \subset \mathrm{T}^*\mathrm{S}^1$ *for um círculo de classe* $C^0$, *homotópico a seção nula e invariante por* $\mathrm{F}$. *Então* $W$ *é um gráfico de classe* $C^0$.

Provas completas desses dois Teoremas podem ser encontradas em [39 , 44]. Os dois teoremas de Birkhoof ficaram quase que esquecidos até as décadas de 80 e 90, quando foi iniciada a busca pelas demonstrações completas dos teoremas de Birkhoff bem como pelas suas versões generalizadas. Até onde sabemos provas completas dos dois teoremas de Birkhoff apareceram pela primeira vez em 1983 (veja [39] ) e outra em 1989 (veja [44]). Ainda em 1989, Michael Herman mostra que para uma generalização dos dois teoremas de Birkhoff no caso de difeomorfismo twist $\mathrm{F} : \mathrm{T}^*\mathbb{T}^n \to \mathrm{T}^*\mathbb{T}^n$ é necessário supor que o $W \subset \mathrm{T}^*\mathbb{T}^n$ seja um $C^0$-Lagrangiano(veja [41]) e ainda da uma prova completa do Primeiro Teorema. No caso de um fluxo Hamiltoniano $\phi_t : \mathrm{T}^*\mathbb{T}^n \to \mathrm{T}^*\mathbb{T}^n$, temos que o diffeomorfismo $\phi_1$ é isotópico à identidade. Al'em disso já eram conhecidos famílias de exemplos de fluxos Hamiltonianos possuindo subvariedades Lagrangianas invariantes. Assim, éra bastante natural se perguntar se tais variedades Lagrangianas invariantes eram seções do fibrado cotangente. Deste modo, a seguinte pergunta é fundamental para o entendimento da dinâmica dos fluxos Hamiltonianos em fibrados cotangentes.

**Pergunta:** *Seja* $\phi_t : T^*M \to T^*M$ *um fluxo Hamiltoniano de Tonelli e*

*$W \subset T^*M$ uma subvariedade Lagrangiana, compacta, conexa, de classe $C^1$ e $\phi_t$-invariante. Quando $W$ é uma seção?*

Relacionado com esta questão existem as seguintes conjecturas.

**Conjectura (Yakov Sinai** $\approx$ 1983): *Sejam $\phi_t : T_1\mathbb{T}^n \to T_1\mathbb{T}^n$ um fluxo geodésico no toro e $W \subset T_1\mathbb{T}^n$ um toro Lagrangiano minimizante, então ele é uma seção.*

**Conjectura (Arnold** $\approx$ 1986): *Sejam $\phi_t : T_1\mathbb{T}^n \to T_1\mathbb{T}^n$ um fluxo geodésico no toro e $W \subset T_1\mathbb{T}^n$ um toro Lagrangiano. Se $W$ for homólogo à seção nula, então ele é uma seção.*

**Conjectura (Herman** $\approx$ 1989): *Sejam $\phi_t : T^*\mathbb{T}^n \to T^*\mathbb{T}^n$ um fluxo Hamiltoniano e $N \subset T^*\mathbb{T}^n$ uma subvariedade compacta, conexa e de dimenão $n$. Se $N$ for $\phi_t$-invariante, homotópica à seção nula e minimal (toda órbita é densa !), então é uma subvariedade Lagrangiana.*

Definições precisas, do que se entende por minimizante e por homologo à seção nula, são apresentadas nas páginas—.

A seguir apresentaremos uma linha do tempo sobre os resultados obtidos nas direções dessas duas conjecturas.

**Teorema** (Bialy - Polterovich - 1986[15]) *Sejam $\phi_t : T_1\mathbb{T}^2 \to T_1\mathbb{T}^2$ um fluxo geodésico e $W \subset T_1\mathbb{T}^2$ um 2-toro invariante, minimizante e de classe $C^3$. Então $W$ é uma seção.*

**Teorema** (Bialy - 1989[18]) *Sejam $\phi_t : T^*\mathbb{T}^2 \to T^*\mathbb{T}^2$ o fluxo de um Hamiltoniano óptico e simétrico, $\Sigma_e \subset T^*\mathbb{T}^2$ um nível de energia regular, $W \subset \Sigma_e$ um 2-toro de classe $C^0$ e invariante. Se $\imath : W \to \Sigma_e$ induz um monomorfismo $\imath_* : \pi_1(W) \to \pi_1(\Sigma)$ e $W$ não contém órbitas periódicas então $W$ é uma seção de classe $C^0$.*

**Teorema** (Polterovich - 1991[58]) *Sejam $\phi_t : T^*\mathbb{T}^d \to T^*\mathbb{T}^d$ um fluxo Hamiltoniano óptico, $\Sigma_e \subset T^*\mathbb{T}^d$ um nível de energia regular e $W \subset \Sigma_e$ um toro*

*Lagrangiano suave homólogo à seção nula e suportando uma probabilidade invariante suave. Então $W$ é uma seção.*

**Teorema** (Bialy - Polterovich - 1991 [18 ]) *Sejam $\phi_t : T^*\mathbb{T}^d \to T^*\mathbb{T}^d$ um fluxo Hamiltoniano óptico, $W$ um toro Lagrangiano suave e invariante. Se $W$ for homólogo a seção nula e recorrente por cadeia, então $W$ é uma seção.*

**Teorema** (Bialy - Polterovich - 1992 [19]) *Sejam $\phi_t : T^*\mathbb{T}^d \to T^*\mathbb{T}^d$ um fluxo Hamiltoniano óptico e $W \subset T^*\mathbb{T}^d$ uma variedade Lagrangiana compacta, conexa, orientável e invariante. Suponha que:*

- *A classe de Maslov de $W$ em relação a distribuição Lagrangiana vertical seja nula;*
- *Para todo mergulho $f : (D^2, \partial D^2) \to (T^*\mathbb{T}^n, W)$ se tenha $\int_{D^2} f^*\omega = 0$;*
- *$W$ seja recorrente por cadeia.*

*Então $W$ é uma seção.*

**Teorema** (Carneiro - Ruggiero - 2004[22]) *Seja $\phi_t : T^*\mathbb{T}^2 \to T^*\mathbb{T}^2$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli, $\Sigma_e \subset T^*\mathbb{T}^2$ um nível de energia regular e $W \subset \Sigma_e$ um toro invariante de classe $c^1$. Se a restrição $\pi|_{\Sigma_e} : \Sigma_e \to \mathbb{T}^2$ for uma submersão então $W$ é uma seção se, e somente se, ele for minimizante.*

**Teorema** (Carneiro - Ruggiero - 2006 [23]) *Sejam $\phi_t : T_1\mathbb{T}^2 \to T_1\mathbb{T}^2$ um fluxo geodésico Finsler e $W \subset T_1\mathbb{T}^2$ um 2-toro de classe $C^0$ e invariante. Se $W$ for um toro minimizante, no qual toda órbita periódica isolada seja atratora ou repulsora, então ele é uma seção. Além disso, este resultado é falso se $W$ tiver órbita periódica isolada que não seja nem atratora e nem repulsora.*

**Teorema**(Carneiro - Ruggiero - 2006 [23])*Sejam $\phi_t : T_1\mathbb{T}^2 \to T_1\mathbb{T}^2$ o fluxo geodésico de uma métrica Finsler simétrica e $W \subset T_1\mathbb{T}^2$ um 2-toro de classe $C^1$, homólogo a seção nula, invariante e contendo uma órbita periódica. Então $W$ é uma seção.*

**Teorema** ( Arnaud M.C - 2010[11]) *Sejam* $\phi_t : T^*M \to T^*M$ *um fluxo Hamiltoniano de Tonelli e* $W \subset T^*M$ *uma variedade Lagrangiana invariante , compacta e conexa. Se* $W$ *for Hamiltoniamente isotópica a seção nula, então ela é uma seção exata*

**Teorema** ( Arnaud M.C - 2014[12]) *Sejam* $\phi_t : T^*M \to T^*M$ *um fluxo Hamiltoniano de Tonelli e* $W \subset T^*M$ *uma subvariedade Lipschitz, compacta, conexa, invariante e de mesma dimensão que* $M$*. Suponha que:*

- $W$ *não contenha pontos conjugados;*
- *Exista um subconjunto denso* $D \subset W$ *tal que:*

$$\min\{\liminf_{t\to-\infty} \| d\phi_t(q)(v) \|, \liminf_{t\to+\infty} \| d\phi_t(q)(v) \|\} < +\infty, \ \ \forall (q,v) \in T_DW.$$

*Então* $W$ *é o gráfico de uma 1-forma exata de classe* $C^1$*. Em particular, é uma seção Lagrangiana.*

**Teorema** ( Arnaud M.C - 2014[12])*Sejam* $\phi_t : T^*M \to T^*M$ *um fluxo Hamiltoniano de Tonelli e* $W \subset T^*M$ *uma variedade de classe* $C^1$*, compacata, conexa, invariante e de mesma dimensão que* $M$*. Suponha que:*

- $W$ *não contenha pontos conjugados;*
- *Existam duas sequências* $s_n \searrow -\infty$ *e* $t_n \nearrow +\infty$ *tais que as duas famílias* $\{\phi_{s_n}|_{\mathrm{W}}\}$ *e* $\{\phi_{t_n}|_W\}$ *sejam equilipschitz.*

*Então* $W$ *é o gráfico de uma 1-forma exata de classe* $C^1$*. Em particular, é uma seção Lagrangiana.*

Aqui cabe observar que uma subvariedade Lagrangiana Hamiltonianmente isotópica a seção nula é exata. Arnold conjecturou que a recíproca é verdadeira. Essa conjecura está confirmada até o momento apenas para $\mathrm{S}^1$, $\mathrm{S}^2$ e $\mathbb{T}^2$, embora em 2012, Mohamed Abouzaid ter provado que uma variedade

Lagrangiana fechada, exata e com classe de Maslov nula, é homotopicamente equivalente á seção nula. Mesmo essa conjectura ainda não estando confirmada, o teorema de Marie Claud Arnaud em [11], foi generalizado para subvariedade Lagrangiana exata.

**Teorema** (Amorim-Oh-Santos - 2017[1]) *Sejam $\phi_t : T^*M \to T^*M$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli na variedade fechada orientável $M$, $N$ variedade fechada com* $\dim M = \dim N$*, $j : N \to T^*M$ contínua injetiva e $S : N \to \mathbb{R}$ contínua. Se $W := j(N)$ for invariante e a tripla $(N, j, S)$ for Lagrangiana Lipschitz exata então, existe uma função $f \in C^{1,1}(M, \mathbb{R})$, tal que $W$ é o gráfico da 1-forma $df$. Em particular, toda variedade Lagrangiana $W \subset T^*M$, conexa, compacta, exata e invariante é um gráfico.*

Até o presente momento, nossas contribuições a questão são os seguintes resultados.

**Teorema A** *Sejam $\phi_t : T^*M \to T^*M$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli, $\Sigma_e$ um nivel de energia regular e $W \subset \Sigma_e$ uma variedade Lagrangiana compacta, conexa de classe $C^1$. Se existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \Sigma_e$ de $W$, tal que cada $\alpha \in \mathcal{U}$ tenha no máximo um número finito de pontos conjugados na semi-órbita $\{\phi_t(\alpha)| \ \ t \geq 0\}$, então $W$ é uma seção.*

**Corolário 1**: *Sejam $\phi_t : T^*M \to T^*M$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli e $\Sigma_e \subset T^*M$ um nível de energia regular e sem pontos conjugados. Se $W \subset \Sigma_e$ for uma subvariedade Lagrangiana conexa e compacta, então é uma seção.*

**Corolário 2**: *Seja $\phi_t : T^*M \to T^*M$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli. Se $T^*M$ admite uma folheação Lagrangiana $\phi_t$-invariante, então toda folha fechada é uma seção.*

**Teorema B** *Sejam $\phi_t : T^*M \to T^*M$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli, $\Sigma_e$ um nivel de energia regular e $W \subset \Sigma_e$ uma variedade Lagrangiana, compacta , conexa, de classe $C^2$ e sem pontos conjugados. Se $\Omega(\phi_t|_W) = W$ então*

*$Sing(W)$ não contém estrato $S_1$. Em particular, se $W$ for genérica então é uma seção.*

Observamos aqui que alguns dias antes de obtermos a prova do teorema B, um artigo de Carneiro - Ruggiero foi aceito para publicação. Nesse artigo, eles provam os dois teoremas seguintes:

**Teorema** (Carneiro - Ruggiero [25]) *Sejam $\phi_t : T_1M \to T_1M$ o fluxo geodésico da variedade Riemanniana fechada $(M, g)$ e $W \subset T_1M$ uma variedade Lagrangiana compacta de classe $C^1$. Então o conjunto singular $Sing(W)$ tem a seguinte propriedade: Para cada ponto $\theta \in Sing(W)$ existe uma vizinhança conexa $B_\theta \subset W$ tal que*

1. *$B_\theta$ é uma caixa de fluxo $B_\theta := \bigcup_{|t|<\epsilon} \phi_t(S_\theta)$, onde $S_\theta \subset Sing(W)$ é uma seção de classe $C^0$, transversal ao fluxo geodésico;*

2. *$B_\theta \cap Sing(W)$ é uma união finita de seções contínuas transversais ao fluxo geodésico.*

*Além disso, se $W$ não contém pontos conjugados então, $Sing(W)$ contém um aberto (na topologia induzida) de pontos errantes. Em particular, se $\Omega(\phi_t|_W) = W$, então $W$ é uma seção.*

Todavia, varios meses depois percebemos que com as hipóteses $\Omega(\phi_t|_W) = W$ e ausência de pontos conjugados, é possivel dar uma prova razoavelmente simples de que $W$ é uma gráfico (ver seção 2.1). Claramente, o Teorema de Carneiro-Ruggiero acima, é muito mais forte e mais profundo, já que ele dá uma descrição da topologia do conjunto singular.

O Teorema a seguir também foi provado em [25].

**Teorema** ( Carneiro - Ruggiero) *Sejam $\phi_t : T_1M \to T_1M$ o fluxo geodésico da variedade Riemanniana fechada $(M, g)$ e $W \subset T_1M$ uma variedade Lagrangiana compacta conexa de classe $C^2$ e seja $r_0$, o supremo da curvatura* *seccional de $W$, em relação à métrica de Sasaki. Suponha que $W$ não contenha pontos conjugados e que satisfaça uma das condições a seguir:*

- *$Rec(\phi_t|_W)$ é $r_0$-denso em $W$;*
- *$Lim(\phi_t|_W)$ é $r_0$-denso em $W$.*

*Então $W$ é uma seção de classe $C^2$.*

Um fato conhecido, desde os primeiros trabalhos de Ricardo Mañé em dinâmica Lagrangiana, é que se $W \subset T^*M$ for uma seção Lagrangiana invariante então, está contida num conjunto de Mañé (ver seção 2.2 para uma prova deste fato). Uma questão natural é se a recíproca é verdadeira, já que levantamento ao recobrimento universal, de soluções de Euler-Lagrange no conjunto de Mañé, são minimizantes da ação Lagrangiana em qualquer intervalo de tempo. Nesta direção temos o seguinte.

**Teorema C** *Sejam* M *uma variedade suave compacta e orientável, $\phi_t : T^*M \to T^*M$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli e $W \subset \Sigma_e$ uma variedade Lagrangiana orientável, compacta, conexa e classe $C^1$. Se $W$ está contida em um conjunto de Mañé $\tilde{\mathcal{N}}_c$ então, a aplicação $\pi|_W : W \to M$ é uma sobrejeção de grau 1. Em particular, $\tilde{\mathcal{A}}_c \subset W$.*

**Teorema D** *Seja $\phi_t : T^*M \to T^*M$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli, $\Sigma_e$ um nivel de energia regular e $W \subset \Sigma_e$ uma variedade Lagrangiana compacta, conexa e classe $C^1$. Se $W$ está contida em um conjunto de Mañé $\tilde{\mathcal{N}}_c$ e para quaisquer duas órbitas distintas e errantes $O_1, O_2 \subset W$ tem-se $Lim^+(O_1) \cap Lim^+(O_2) \neq \emptyset$ ou $Lim^-(O_1) \cap Lim^-(O_2) \neq \emptyset$, então, $W$ é uma seção.*

**Teorema E** *Sejam* $\phi_t : T_1\mathbb{T}^n \to T_1\mathbb{T}^n$ *um fluxo geodésico no toro* $\mathbb{T}^n$ *e* $W \subset T_1\mathbb{T}^n$ *uma variedade Lagrangiana, compacta, conexa, de classe* $C^2$ *e minimizante. Se quaisquer duas órbitas distintas* $O_1, O_2 \subset W - \overline{Rec(\phi|_W)}$ *tem-se* $Lim^+(O_1) \cap Lim^+(O_2) \neq \emptyset$ *ou* $Lim^-(O_1) \cap Lim^-(O_2) \neq \emptyset$*, então* $W$ *é uma seção.*

**Teorema F** *Seja* $W \subset T_1\mathbb{T}^3$ *um toro Lagrangiano de classe* $C^2$*, minimizante e suportanto no máximo uma quantidade infinito enumerável de medidas invariantes. Então,* $W$ *é uma seção.*

De fato, acreditamos que as hipóteses dinâmicas no Teorema E, podem ser enfraquecidas. Continuamos na busca de uma prova da Conjectura de Sinai, pelo menos no caso do Toro $\mathbb{T}^3$.

Para alguns exemplos de fluxos Hamiltonianos de Tonelli, é sabido que o espaço de fase $T^*M$ é folheado por gráficos Lagrangianos invariantes. Esse é o caso, por exemplo, dos Liouville Integráveis. Marie Claude Arnaud propôs um novo conceito de integrabilidade para esse tipo de fluxo, eliminando a necessidade de um total de integrais primeiras independentes, como no caso do Liouville Integrável. Nessa nova definição (ver seção 2.5), a exigência é que o espaço de fase admita uma folheação por gráficos Lagrangianos invariantes de classe $C^0$. Em [8], ela prova a fim de que isto ocorra, é necessario e suficiente que, toda órbita no espaço de fase esteja em algum conjunto de Mañé. Algum tempo depois em [2], os autores provam que para o espaço de configurações $\mathbb{T}^n$, um fluxo Hamiltoniano é integrável no sentido de Marie Claude, se e somente se, não tem pontos conjugados. Observamos aqui que, no caso de um fluxo geodésico em $\mathbb{T}^n$, desde 1994 (ver [21]) já era sabido que o fluxo não tem pontos conjugados se, e somente se, a métrica Riemanniana for flat. Isto, foi provado por Hopf décadas antes no caso $n = 2$ e conjecturado por ele, como verdadeiro para todo $n$. Em [49], Massart-Sorrentino provam que para um Lagrangiano mecânico em $\mathbb{T}^n$, a condição de $C^0$ integrabilidade implica que a função energia potencial é constante e, portanto, pelo Teorema de Burago-Ivanov a métrica Riemanniana é flat. Em particular, todos os gráficos Lagrangianos são de classe $C^1$ pelo menos. Isto mostra uma certa rigidez da condição de $C^0$ integrabilidade. Nosso resultado a seguir é mais um pequeno passo nessa direção. Aqui cabe observar que, até onde sabemos, ainda é uma questão em aberto saber quais tipos de variedades suportam um fluxo geodésico sem pontos conjugados.

**Teorema G** *Seja o Lagragiano de Tonelli* $L(x,v) := \dfrac{\| v \|_x^2}{2} + \eta_x(v) - u(x)$, *na variedade Riemanniana fechada* $(M,g)$ *e com fluxo de Euler-Lagrange* $\phi_t : TM \to TM$. *Se* $u \in C^1(M,\mathbb{R})$ *não é constante ou* $\eta$ *não é fechada então,* $TM$ *não admite uma folheação por gráficos Lagrangianos* $C^0$, $\phi_t$*-invariantes. Em outras palavras, Lagrangianos magnéticos não são* $C^0$*-integráveis.*

# Capítulo 1

# Técnicas Auxiliares

Este capítulo contém as teorias que usaremos para tratar as questões às quais se propõe responder nesta tese. A menos que explícito o contrário, em todo o capítulo $M$ será uma variedade suave compacta, conexa, sem fronteira, de dimensão $n$. Denotaremos $\pi : TM \to M$ e $\pi : T^*M \to M$ as projeções canônicas dos fibrados tangente e cotangente respectivamente.

## 1.1 Aplicações de Recobrimento

Vamos apresentar aqui alguns resultados sobre aplicação de recobrimento, que serão úteis nesse trabalho. Por simplicidade, todo espaço topológico aqui será assumido Hausdorff, conexo, paracompacto e segundo-enumerável e toda aplicação entre espaços topológicos contínua. As referências são [46, 47].

**Definição 1.1.** Uma aplicação contínua $P : \tilde{X} \to X$ é chamada de aplicação de recobrimento quando, para cada ponto $x \in X$, existir uma vizinhança $V_x \subset X$ e uma família $\{U_i\}$ de abertos disjuntos em $\tilde{X}$ tais que:

1. $P^{-1}(V_x) = \bigcup_i U_i$;

2. Para cada índice $i$ a restrição $P|_{U_i} : U_i \to V_x$, é um homeomorfismo.

Neste caso o aberto $V_x$ é chamado de *vizinhaça destinguida*, $\tilde{X}$ um *espaço de recobrimento* do espaço $X$ e para cada $x \in X$, o conjunto $P^{-1}(x)$ é chamado de *fibra* sobre $x$.

**Proposição 1.2.** *Se $P : \tilde{X} \to X$ for aplicação recobrimento, então para quaisquer $x, y \in X$, as fibras $P^{-1}(x)$ e $P^{-1}(y)$ têm o mesmo número cardinal.*

**Definição 1.3.** Seja uma aplicação $f : X \to Y$. Dizemos que $f$ é:

1. **fechada**, quando para todo conjunto fechado $F \subset X$ tem-se $f(F)$ é fechado em $Y$;

2. **própria**, quando for fechada e para cada $y \in Y$, o conjunto $P^{-1}(y)$ é compacto.

**Proposição 1.4.** *Seja $f : X \to Y$ um homeomorfismo local. Então, as seguintes sentenças são equivalentes.*

*1. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada $y \in Y$ a fibra $f^{-1}(y)$ tem $m$ elementos;*

*2. $f$ é própria e sobrejetiva;*

*3. $f$ é uma aplicação de recobrimento com fibras $f^{-1}(y)$ finitas;*

**Corolário 1.5.** *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação, $A \subset X$ um conjunto com fecho compacto e tal que a restrição $f|_A$ seja um homeomorfismo local. Se $f|_A$ admite um extensão contínua $\bar{f} : \bar{A} \to Y$ tal que $\bar{f}(\partial A) \subset \partial \bar{f}(A)$, então $f|_A : A \to f(A)$ é uma aplicação de recobrimento.*

**Teorema 1.6.** ***(Invariância do Domínio)***
*Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ aplicação contínua e injetiva. Então $f(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.*

**Corolário 1.7.** *Sejam $X, Y$ duas variedades difereciáveis compactas, conexas de mesma dimensão e $f : X \to Y$ uma aplicação(contínua). Então, $f$ é uma aplicação de recobrimento se, e somente se, for localmente injetiva.*

*Demonstração.* Assuma $f : X \to Y$ localmente injetiva. Então, como $X, Y$ são variedades suaves de mesma dimensão segue pelo Teorema da Ivariância do Domínio que $f$ tem que ser um homeomorfismo local. Segue que $f(X)$ é um conjunto aberto e fechado em $Y$. Da conexidade de $y$ temos que $f$ é sobrejetiva. Por outro lado como $X$ e $Y$ são compactas temos que $f$ é própria. Logo, pela proposição 1.4, obtemos que $f$ é um recobrimento finito. A recíproca é trivial. □

## 1.2 Geometria do Fibrado Tangente

Nesta seção relembramos alguns fatos sobre o fluxo geodésico e o fibrado tangente. A referência é [55].
Seja $g$ uma métrica Riemanniana em $M$ e $\varphi_t : TM \to TM$ o correspondente fluxo geodésico .

**Definição 1.8.** Chamamos de campo de planos vertical a aplicação $\mathbb{V}(\theta) := \ker d\pi(\theta)$. Assim $\mathbb{V}$ é definido em $TM$ e toma valores no fibrado Grassmanniano, cuja fibra sobre $TM$, no ponto $\theta$ é a variedade Grassmanniana, formada pelos subespaços $n$-dimensionais de $T_\theta TM$. Geometricamente $\mathbb{V}(\theta)$ é o espaço tangente à fibra $T_xM$ no ponto $\theta = (x, v)$. Este campo de planos está intrinsecamente definido e depende apenas da variedade $M$.

Agora nós usaremos a métrica $g$, para definir um outro campo de planos no fibrado tangente.

**Definição 1.9.** Sejam $\theta = (x, v)$ e $\xi \in T_\theta TM$. Considere $z : (-r, r) \to TM$ a curva adaptada a $\xi$. Isto é:

$$\begin{cases} z(0) = \theta; \\ \dot{z}(0) = \xi. \end{cases}$$

tal curva é descrita por $z(t) = (\alpha(t), Z(t))$, onde $\alpha(t) = \Pi \circ z(t)$ e $Z(t)$ é um campo de vetores ao longo da curva $\alpha(t)$. Então definimos a aplicação $K_\theta : T_\theta TM \to T_x M$ por

$$K_\theta(\xi) := (\nabla_\alpha Z)(0), \tag{1.1}$$

onde $\nabla$ representa a conexão de Levi-civita em $(M, g)$. Isso define um transformação linear e induz a aplicação $K : TM \to TTM$ chamada conexão.
O campo de planos horizontais é o campo dado por $\mathbb{H}(\theta) := \ker K_\theta$.

**Lema 1.10.** *As aplicações* $d\pi(\theta) : \mathbb{H}(\theta) \to T_x M$ *e* $K_\theta : \mathbb{H}(\theta) \to T_x M$ *são isomorfismos lineares. Portanto, isto também é válido para*

$$j_\theta : T_\theta TM \to T_x M \times T_x M$$

$$j_\theta(\xi) := (d\Pi(\theta)(\xi), K_\theta(\xi)).$$

**Definição 1.11.** A métrica de Sasaki em $TM$ é a métrica Riemanniana definida, usando a decomposição $T_\theta TM = \mathbb{H}(\theta) \oplus \mathbb{V}(\theta)$, como segue. Se $\theta = (x, v)$ e $\xi, \eta \in T_\theta TM$ então:

$$\ll \xi, \eta \gg_\theta = < d\pi(\theta)(\xi), d\pi(\theta)(\eta) >_x + < K_\theta(\xi), K_\theta(\eta) >_x . \tag{1.2}$$

Note que por construção dessa métrica os campos de planos horizontal e vertical são ortogonais.

**Lema 1.12.** *Se* $X^g \in \mathfrak{X}^\infty(TM)$ *for o campo geodésico então,* $X^g(\theta) \in \mathbb{H}(\theta), \quad \forall \theta \in TM.$

**Proposição 1.13.** *Seja* $(\mathbb{M}, g)$ *uma variedade Riemanniana e* $(\mathrm{T}\mathbb{M}, G)$ *seu fibrado tangente munido da métrica de Sasaki. Então:*

1. *A curva* $t \mapsto z(t) = (\gamma(t), Z(t))$ *é horizontal se e só se o campo de vetor* $t \mapsto Z(t)$ *for paralelo ao longo da curva base* $t \mapsto \gamma(t)$ *;*

2. *Toda trajetória do campo* $X_g$ *é uma geodésica da métrica de Sasaki ;*

3. *Se* $t \mapsto z(t) = (\gamma(t), Z(t))$ *for qualquer curva em* $(\mathrm{T}\mathbb{M}, G)$*, então* $\ell_G(z) \geq \ell_g(\gamma)$ *e vale a igualdade se e somente se* $t \mapsto Z(t)$ *for paralelo ao longo da curva base* $t \mapsto \gamma(t)$*;*

4. *Se* $\gamma : \mathbb{R} \to (\mathbb{M}, g)$ *for uma geodésica que minimize globalmente a distância entre seus pontos, então o mesmo ocorre com a geodésica* $\Gamma(t) := (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$*.*

Demonstração desses fatos podem ser encontradas em [32, 55].

Agora lembramos alguns propriedades sobre campos de Jacobi. Seja $J(t)$ um campo de vetores ao longo da geoésica $\gamma$, o qual seja obtido como campo variacional de uma variação de $\gamma$ por geodésicas. Então $J$ é um campo de Jacobi o longo de $\gamma$ se, e somente se, ele satisfaz a equação

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\dot{\gamma}(t), J(t))\dot{\gamma}(t) = 0, \tag{1.3}$$

onde $R$ é o tensor curvatura de Riemann e $\dfrac{D}{dt}$ denota a derivada covariante ao longo $\gamma$. O lema seguinte mostra a relação entre o fluxo geodésico, os campos de Jacobi e com os campos de planos horizontal e vertical.

**Lema 1.14.** *Seja $\theta = (x, v) \in TM$ e $\xi \in T_\theta TM = \mathbb{H}(\theta) \oplus \mathbb{V}(\theta) = T_xM \oplus T_xM$. Se $\gamma : \mathbb{R} \to M$ for uma geodésica, com condições iniciais $(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = (x, v)$ então, existe um único campo de Jacobi $J_\xi$, definido ao longo de $\gamma$ e com a seguintes propriedades*

$$J_\xi(0) = d\pi(\theta)(\xi), \tag{1.4}$$

$$\frac{DJ_\xi}{dt}(0) = K_\theta(\xi), \tag{1.5}$$

$$d\varphi_t(\theta)(\xi) = (J_\xi(t), \frac{DJ_\xi}{dt}(t)). \tag{1.6}$$

## 1.3 Lagrangianos de Tonelli

Nesta seção apresentamos os Lagragianos de Tonelli, o funcional dação mínima e o fluxo de Euler Lagrange. As referências básicas são [22, 35]

**Definição 1.15.** Chama-se Lagrangiano de Tonelli em M, toda função $L \in C^3(TM, \mathbb{R})$ satisfazendo:

1. Para todo $(x, v) \in TM$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v)$ é uma forma quadrática positiva definida;

2. $\forall A > 0$, $\exists B \in \mathbb{R}$ t.q L$(x, v) \geq A\|v\| + B$, $\forall (x, v) \in TM$.

Já com o Lagrangiano definido, podemos estabelecer o problema de encontrar curvas que minimizem a ação Lagrangiana.

**Definição 1.16.** (**Ação Lagrangiana**) Seja $x, y \in M$ e $a < b$. Chama-se ação Lagrangiana de $L$, o funcional $\mathcal{A}_L : AC([a, b], M)_{xy} \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ dado por

$$\mathcal{A}_L(\gamma) := \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt, \tag{1.7}$$

onde $AC([a, b], M)_{xy}$ é o espaço de todas as curvas absolutamnete contínuas $\lambda : [a, b] \to M$, tais que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$.

Este tipo de problema começou ser estudado por Euler, Lagrange, Weierstrass e outros. O teorema a seguir, mostra que o problema sempre tem solução.

**Teorema 1.17.** ***(Teorema de Tonelli)*** *O funcional* $\mathcal{A}_L : AC([a,b],\mathrm{M})_{xy} \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ *admite um ponto,* $\gamma : [a,b] \to \mathrm{M}$, *de mínimo global, o qual é chamado de minimizante de Tonelli. Além disto tal curva minimizante satisfaz (em coordenadas locais) as equações de Euler-Lagrange, i.e*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{v}}(\gamma(\mathrm{t}),\dot{\gamma}(\mathrm{t})) = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{x}}(\gamma(\mathrm{t}),\dot{\gamma}(\mathrm{t})) \tag{1.8}$$

Observe que a curva $\gamma : [a,b] \to \mathrm{M}$ é uma solução da equação acima se, e só se, satisfaz(em coordenadas locais)

$$\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \mathrm{v}^2}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))(\ddot{\gamma}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) - \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \mathrm{v}\partial \mathrm{x}}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) \tag{1.9}$$

Sendo L uma Lagrangiana de Tonelli então, pelo item (1) da definição 2.1.1, isto equivale a

$$\ddot{\gamma}(t) = \left[\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \mathrm{v}^2}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\right]^{-1}\left[\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) - \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \mathrm{v}\partial \mathrm{x}}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t)\right] \tag{1.10}$$

Portanto, podemos associar a L um campo de vetores $X^L$, tangente à variedade TM. Tal campo é chamado campo de Euler-Lagrange.
A seguir definimos a função energia do sistema dinâmico Lagrangiano.

**Definição 1.18.** Seja $\mathrm{L} \in C^3(\mathrm{TM},\mathbb{R})$ Lagrangiano de Tonelli. Chama-se função energia de L, a função $\mathcal{E} : \mathrm{TM} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{E}(q,v) = \frac{\partial L}{\partial v}(q,v)(v) - L(q,v). \tag{1.11}$$

As equações de Euler-Lagrange implicam que que tal função é uma integral primeira do campo $X^L$. Os conjuntos de níveis, da função $\mathcal{E}$, são chamados de níveis de energia do sistema dinâmico Lagrangiano.

Segue da definição 1.15 que todo nível de energia é um subconjunto compacto de TM e isto implica imediatamente que $X^L$ é completo. Nós denotaremos o fluxo desse campo por $\phi_t^L : \mathrm{TM} \to \mathrm{TM}$, quando precisarmos explicitar a função Lagrangiana, ou então simplesmente por $\phi_t : \mathrm{TM} \to \mathrm{TM}$. Segue que uma trajetoria deste fluxo é descrita por

$$\phi_t^L(q,v) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)), \tag{1.12}$$

onde $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{M}$ é a única solução, de Euler-Lagrange, com condições iniciais

$$\begin{cases} \gamma(0) = q; \\ \dot{\gamma}(0) = v. \end{cases}$$

Alguns exemplos de Lagrangianos de Tonelli naturais são apresentados a seguir.

**Exemplo 1.19.** (**Lagrangiano Riemanniano**) If $g$ for uma métrica Riemanniana em M então a função

$$L(q,v) := \frac{\|v\|_q^2}{2}$$

é um Lagrangiano de Tonelli. Um cálculo direto mostra que neste caso as equações de Euler-Lagrange são exatamente as equações geodésicas da métrica $g$;

**Exemplo 1.20.** (**Lagrangiano Mecânico**): O Lagrangiano dado por energia cinética menos a energia potencial é também conhecido como Lagrangiano Natural. Mais precisamente, dado $U : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ e uma métrica Riemanniana $g$, definimos:

$$L(q,v) := \frac{\|v\|_q^2}{2} - U(q).$$

Neste exemplo as soluções de Euler Lagrange são as curvas $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{M}$ de classe $C^2$, satisfazendo a equação $\dfrac{D\dot{\gamma}}{dt} = -\nabla U(\gamma(t))$.

**Exemplo 1.21.** (**Lagrangiano Magnético**): Dado em M, uma 1-forma diferencial $\eta$, não fechada e uma função $U$ : M $\to \mathbb{R}$, se a função, dada por $L(q,v) := \dfrac{\|v\|_q^2}{2} - \eta_q(v) - U(q)$, for de classe $C^3$, então ela define um Lagrangiano de Tonelli.

**Exemplo 1.22.** (**Lagrangiano de Mañé**): Dado um campo de vetores $X$ na variedade Riemanniana $(\mathrm{M}, g)$, se a função, dada por $L(q,v) := \dfrac{\|v - X(q)\|_q^2}{2}$, for de classe $C^3$ então, ela define um Lagrangiano de Tonelli.

## 1.4 Geometria Simplética em $T^*M$

Nesta seção apresentamos alguns fatos básicos sobre a estrutura simplética canônica no fibrado cotangente de uma variedade. O leitor pode encontar mais sobre geometria simplética nas referências [3, 51, 52, 56].

**Definição 1.23.** (**1-forma** de Liouville). Existe uma 1-forma suave no fibrado cotangente, a qual é dada de modo intríseco por :

$$\lambda_0(q,p) : \mathrm{T}_{(q,p)}\mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathbb{R}, \qquad \lambda_0(q,p) := p \circ d\pi(q,p),$$

onde $d\pi(q,p) : \mathrm{T}_{(q,p)}\mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{T}_q\mathrm{M}$ é a diferencial da projeção.

Esta 1-forma é normalmente chamada de 1-forma de Liouville ou 1-forma canônica. Um outro modo de definí-la é usando coordenadas locais. Seja $(q_1, q_2, ...., q_n)$ um sistema de coordenadas locais de M e $(q_1, q_2, ...., q_n, p_1, p_2, ....., p_n)$ o correspondente sistema de coordenadas induzido na variedade $\mathrm{T}^*\mathrm{M}$. Assim definimos $\lambda_0$, em relação a este sistema, por $\lambda_0 := \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$. Um cálculo direto mostrar que $\lambda_0$ está bem definida e independe do sistema de coordenadas.

**Definição 1.24.** (**Estrutura Simplética Canônica de** $\mathrm{T^*M}$)
Considere a 2-forma diferencial dada por $\omega_0 = -d\lambda_0$, onde $\lambda_0$ é a 1-forma de Liouville. Essa 2-forma é exata (logo fechada !) e não degenerada. Portanto, ela é uma forma simplética em $\mathrm{T^*M}$. Neste caso, o par $(\mathrm{T^*M}, \omega_0)$ é chamado variedade simplética.

**Proposição 1.25.** *Seja* $\omega_0^n := \underbrace{\omega_0 \wedge \omega_0 \wedge .... \wedge \omega_0}_{n \quad vezes}$. *Então* $\dfrac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{n!}\omega_0^n$ *é uma forma de volume, em* $\mathrm{T^*M}$, *a qual pode ser escrita em coordenadas locais* $(x_1, x_2, ...x_n, p_1, p_2, ..., p_n)$ *simplesmente como*

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n \wedge dp_1 \wedge dp_2 \wedge .... \wedge dp_n.$$

Este Teorema vale para qualquer variedade simplética (veja referências). Em uma variedade simplética, existem algumas subvariedades especiais em relação à estrutura simplética. São as suas subvariedades isotrópica, co-isotrópica e principalmente as Lagrangianas (nomeclaturas devido a Arnold). Chamamos a atenção do leitor para o fato de que nesta tese as subvariedades Lagrangianas serão assunto central.

**Definição 1.26.** Seja $\mathrm{W} \subset \mathrm{T^*M}$ uma subvariedade de classe $C^1$. Diz-se que ela é

1. **Isotrópica**, quando $\mathrm{T_\theta W} \subset (\mathrm{T_\theta W})^\perp$, $\forall\theta \in \mathrm{W}$, onde $(\mathrm{T_\theta W})^\perp$ denota o complemento $\omega_0$-ortogonal do subespaço vetorial $\mathrm{T_\theta W}$;

2. **Co-isotrópica**, quando $\mathrm{T_\theta W} \supset (\mathrm{T_\theta W})^\perp$, $\forall\theta \in \mathrm{W}$;

3. **Lagrangiana**, quando for isotrópica e $\dim \mathrm{W} = \dim \mathrm{M}$.

A seguinte proposição nos dá uma família de subvariedades Lagrangianas. Para uma prova veja [3, 27, 35, 41, 51].

**Proposição 1.27.** *Seja $\eta$ uma 1-forma diferencial em* M *e considere*

$$\mathrm{W} := \{(q, \eta(q)) \in \mathrm{T^*M}; q \in M\}$$

*seu gráfico. Então,* W *é uma subvariedade Lagrangiana se, e só se, $\eta$ for fechada.*

## 1.5 Dinâmica Hamiltoniana em $T^*M$

Como vimos na seção anterior, a variedade $\mathrm{T^*M}$ tem uma estrutura simplética canônica, a qual denotamos por $\omega_0 := -d\lambda$. Deste modo podemos falar de dinâmica Hamiltoniana nessa variedade. As referências para esse assunto são [27, 35].

Seja $\mathrm{H} \in C^2(\mathrm{T^*M}, \mathbb{R})$. Então à H corresponde um único campo de vetores $\mathrm{X}^H \in \mathfrak{X}^1(\mathrm{T^*M})$, o qual é determinado por

$$d\mathrm{H} = \omega_0(\mathrm{X}^H, \quad \cdot) \tag{1.13}$$

Esse campo de vetores é chamado campo Hamiltoniano e é dado em coordenadas locais $(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n)$, pelas equações de Hamilton:

$$\dot{\mathrm{q}}(\mathrm{t}) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{p}}(\mathrm{q}(\mathrm{t}), \mathrm{p}(\mathrm{t})), \quad \dot{\mathrm{p}}(\mathrm{t}) = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{q}}(\mathrm{q}(\mathrm{t}), \mathrm{p}(\mathrm{t})). \tag{1.14}$$

Quando tal campo for completo ele define um fluxo, o qual denotaremos por $\phi_t^H : \mathrm{T^*M} \to \mathrm{T^*M}$ ou simplesmente por $\phi_t : \mathrm{T^*M} \to \mathrm{T^*M}$ quando não precisarmos ser explícitos sobre a função Hamiltoniana em contexto. Nesta tese estamos interessados numa classe específica de Hamiltonianos, que são os chamados Hamiltonianos de Tonelli, os quais definimos a seguir.

**Definição 1.28.** Chama-se Hamiltoniano de Tonelli, em M, qualquer função $\mathrm{H} \in C^2(\mathrm{T^*M}, \mathbb{R})$ possuindo as seguintes propriedades:

1. Para todo ponto $(q,p) \in \mathrm{T^*M}$, a forma quadrática $\dfrac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial \mathrm{p}^2}(q,p)$ é positiva definida;

2. $\forall A > 0$, $\exists B \in \mathbb{R}$ ; $\mathrm{H}(q,p) \geq A\|p\| + B$, $\forall (q,p) \in \mathrm{T^*M}$.

Note que diretamente da definição seque que a função H é uma integral primeira do campo $\mathrm{X}^H$ e que todo conjunto de nível dessa função é um conjunto compacto. Portanto, o campo de vetores Hamiltoniano neste caso é sempre completo.

Um modo de obter um tal Hamiltoniano de Tonelli é via um Lagrangiano de Tonelli. De fato, se $\mathrm{L} \in C^3(\mathrm{TM}, \mathbb{R})$ for Lagrangiano de Tonelli então definimos a função $\mathrm{H} : \mathrm{T^*M} \to \mathbb{R}$ por

$$H(q,p) = Sup\{< p, v >_q - L(q,v) | v \in \mathrm{T_qM}\}. \tag{1.15}$$

Pode-se mostrar (veja [35] que neste caso o supremo é na verdade um máximo e que H é de Tonelli. Além disto a aplicação

$$\mathcal{L}_0 : \mathrm{TM} \to \mathrm{T^*M}$$
$$\mathcal{L}_0(q,v) = (q, \frac{\partial L}{\partial v}(q,v)), \tag{1.16}$$

chamada Transformada de Legendre, é um difeomorphismo de classe $C^2$ e que as funções energia $\mathcal{E} : \mathrm{TM} \to \mathbb{R}$ de L e o Hamiltoniano H estão relacionados por:

$$\mathrm{H} \circ \mathcal{L}_0 = \mathcal{E}. \tag{1.17}$$

Isto implica que transformada de Legendre é uma conjugação entre os fluxos de Euler-Lagrange e Hamiltoniano, ou seja, temos:

$$\mathcal{L}_0 \circ \phi_t^L = \phi_t^H \circ \mathcal{L}_0. \tag{1.18}$$

Assim de agora em diante, vamos usar sempre o mesmo símbolo $\phi_t$ para representar os dois fluxos. Pelo contexto ficará claro de qual fluxo está se referindo.

O próximo Teorema nos diz que fluxo Hamiltoniano é conservativo.

**Teorema 1.29.** *Seja* $\mathrm{H} : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathbb{R}$ *um Hamiltoniano,* $\mathrm{X}^H$ *seu campo Hamiltoniano e* $\phi_t : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *seu fluxo. Então*

1. $\mathrm{H}$ *é uma integral primeira de* $\mathrm{X}^H$*;*

2. $\phi_t : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *preserva a forma simplética* $\omega_0$ *e, portanto, preserva a forma de volume* $\omega_0^n$*;*

3. *Se* $\Sigma_e \subset \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *for nível de energia regular conexo, então existe em* $\Sigma_e$*, uma medida de volume, denotada por* $\mu_e$*, a qual é invariante pelo fluxo restrito* $\phi_t|_{\Sigma_e} : \Sigma_e \to \Sigma_e$ *e é chamada* ***medida Liouville****;*

4. *Uma subvariedade Lagrangiana* $\mathrm{W} \subset \mathrm{T}^*\mathrm{M}$*, conexa e de classe* $C^1$ *é* $\phi_t$*-invariante se, e somente se, ela está contida em um nível de energia.*

O item 1 segue imediatamente da definição de $\mathrm{X}^H$. Para uma demonstração dos items 2 e 3 desse Teorema, veja [48] nas páginas 165, 166, 188 e 204. Uma prova do item 4 pode ser encontrada em [35, Teorema 2.5.10].

## 1.6 A equação de Riccati

Uma ferramenta importante no estudo da relação entre subespaços Lagrangianos e a dinâmica Hamiltoniana é a chamada equação de Riccati.

A referência para esta seção é [28].

Começamos com a seguinte proposição.

**Proposição 1.30.** *Sejam* $\mathbb{H}$ *e* $\mathbb{V}$ *dois espaços vetoriais quaisquer de mesma dimensão e seja* $\mathrm{G} \subset \mathbb{H} \times \mathbb{V}$ *um subespaço vetorial com* $\dim \mathrm{G} = \dim \mathbb{V}$*. Então* $\mathrm{G} \cap [\{0\} \times \mathbb{V}] = \{0\}$ *se e somente se, existir uma transformação linear* $\mathrm{S} : \mathbb{H} \to \mathbb{V}$ *tal que*

$$\mathrm{G} = \{(h, \mathrm{S}(h)) \in \mathbb{H} \times \mathbb{V} \quad | \quad h \in \mathbb{H}\}.$$

*Demonstração.* Se G for gráfico de uma transformação linear $\mathrm{S} : \mathbb{H} \to \mathbb{V}$ então claramente temos

$$\mathrm{G} \cap [\{0\} \times \mathbb{V}] = \{0\}.$$

Agora, suponha que $\mathrm{G} \cap [\{0\} \times \mathbb{V}] = \{0\}$.
Considere a aplicação linear $\pi_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{V} \to \mathbb{H}$ dada por $\pi_{\mathbb{H}}(h, v) = h$. Note que $Ker(\pi_{\mathbb{H}}) = \{0\} \times \mathbb{V}$. Segue que a aplicação linear restrita $\pi_{\mathbb{H}} : \mathrm{G} \to \mathbb{H}$ é injetiva. Como temos $\dim \mathrm{G} = \dim \mathbb{V}$, segue que é um isomorfismo. Seja $\mathrm{S}' : \mathbb{H} \to \mathrm{G}$ a aplicação inversa. Então $\mathrm{S}'(x, y) = (A(x), B(x))$. Assim,

$$x = \pi_{\mathbb{H}}(\mathrm{S}'(x)) = \pi_{\mathbb{H}}(A(x), B(x)) = A(x).$$

Deste modo, tomamos no enunciado $S = B : \mathbb{H} \to \mathbb{V}$. $\square$

Na proposição abaixo, denotamos por $\mathbb{I}_n$ a matriz identidade de ordem $n$ e denotamos por $\mathbb{J}_0$ a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{bmatrix}$$

**Proposição 1.31.** *Sejam* $\mathbb{H} := \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{2n}$ , $\mathbb{V} := \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ *e* $\omega$ *a forma simplética canônica em* $\mathbb{R}^{2n}$*. Se* $\mathrm{S} : \mathbb{H} \to \mathbb{V}$ *for uma transformação linear, com gráfico* G*. Então,* G *é um subespaço Lagrangiano de* $\mathbb{R}^{2n}$ *se, e somente se, em coordenadas simpléticas,* S *for simétrico.*

*Demonstração.* De fato, considere dois pontos de $G$, digamos $(x, S \cdot x)$ e $(y, S \cdot y)$. Assim, $(x, S \cdot x) = (\mathbb{I}_n \cdot x, S \cdot x)$ e $(y, S \cdot y) = (\mathbb{I}_n \cdot y, S \cdot y)$. Segue que $\omega((y, S \cdot y), (x, S \cdot x)) = [\mathbb{I}_n \cdot y \;\; S \cdot y] \cdot \mathbb{J}_0 \cdot [\mathbb{I}_n \cdot x \;\; S \cdot x]^t = [y][\mathbb{I}_n S^t - S\mathbb{I}_n][x]^t = [y][S^t - S][x]^t$. Portanto, temos $\omega|_G = 0$ se, e somente se, $S = S^t$. $\square$

Como fizemos no caso de TM na seção 1.2, podemos usar uma métrica Riemanniana em M para definir uma aplicação $K_\theta : \mathrm{T}_\theta\mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{T_x M}$, chamada conexão, e então obter uma decomposição $\mathrm{T}_\theta\mathrm{T}^*\mathrm{M} = \mathbb{H}(\theta) \oplus \mathbb{V}(\theta)$, onde $\mathbb{V}(\theta) := Ker(d\pi(\theta))$ e $\mathbb{H}(\theta) := Ker(\mathrm{K}_\theta)$. Além disso, as aplicações $d\pi(\theta) : \mathbb{H}(\theta) \to \mathrm{T_x M}$ e $K_\theta : \mathbb{V}(\theta) \to \mathrm{T_x^* M}$ são isomorfismos lineares, com $\mathbb{H}(\theta)$ e $\mathbb{V}(\theta)$ subsespaços Lagrangianos de $\mathrm{T}_\theta\mathrm{T}^*\mathrm{M}$. Portanto,

$$j_\theta : \mathrm{T}_\theta\mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{T_x M} \times \mathrm{T_x^* M}$$

$$j_\theta(\xi) := (d\pi(\theta)(\xi), K_\theta(\xi))$$

também é um isomorfismo Linear. Podemos assim, fazer as identificações (em coordenadas locais).

$$\mathbb{H}(\theta) \approx \mathrm{T_x M} \times \{0\} \approx \mathbb{R}^n \times \{0\} \;\; e \;\; \mathbb{V}(\theta) \approx \{0\} \times \mathrm{T_x^* M} \approx \{0\} \times \mathrm{T_x M} \approx \{0\} \times \mathbb{R}^n.$$

Vamos agora deduzir as equações de Riccati no contexto Hamiltoniano. Seja $\Gamma(s,t) = (x_s(t), p_s(t))$ uma variação tal que para cada $s \in (-\delta_0, \delta_0)$ a curva $\Gamma_s(t) := \Gamma(s,t)$ seja curva integral do campo Hamiltoniano $\mathrm{X}^H \in \mathfrak{X}^1(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$ com

$$\Gamma_0(0) = \theta \;\; e \;\; \frac{\partial \Gamma(s,0)}{\partial s}|_{s=0} = \zeta \in \mathbb{H}(\theta) \times \mathbb{V}(\theta) \approx \mathrm{T_x M} \times \mathrm{T_x M} \approx \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Agora escreva $d\phi_t(\theta)(\zeta) = (h(t), v(t))$ e seja $\gamma(t) := \pi \circ \phi_t(\theta)$. Desta forma a versão Hamiltoniana das equações de Jacobi é:

$$\dot{h} = \mathrm{H}_{px}h + \mathrm{H}_{pp}v, \quad \dot{v} = -\mathrm{H}_{xx}h - \mathrm{H}_{xp}v, \tag{1.19}$$

onde $\dot{h}$ e $\dot{v}$ representam as derivadas covariantes e $\mathrm{H}_{px}, \mathrm{H}_{pp}, \mathrm{H}_{xx}$ e $\mathrm{H}_{xp}$ são os operadores lineares cujas matrizes, em coordenadas locais , são representadas pelas correspondentes matrizes das derivadas parciais da função H. Uma vez que temos um Hamiltoniano de Tonelli então $\mathrm{H}_{pp}$ é positivo definido.

Seja agora, $\mathrm{E} \subset \mathrm{T}_\theta \mathrm{T}^*\mathrm{M} = \mathrm{T_x M} \times \mathrm{T_x M} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ um subespaço Lagrangiano e suponha que para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ tenhamos $d\phi_t(\theta)(\mathrm{E}) \cap \mathbb{V}(\phi_t(\theta)) = \{0\}$. Como $d\phi_t(\theta) : \mathbb{H}(\theta) \times \mathbb{V}(\theta) \to \mathbb{H}(\phi_t(\theta)) \times \mathbb{V}(\phi_t(\theta))$ é um isomorfismo linear simplético então pela proposição 1.32, existe um operador linear simétrico

$$\mathrm{S}(t) : \mathbb{H}(\phi_t(\theta)) \to \mathbb{V}(\phi_t(\theta)),$$

de forma que para cada vetor $\zeta \in \mathrm{E}$, existe pelo menos um $h(t) \in \mathbb{H}(\phi_t(\theta))$, tal que

$$d\phi_t(\theta)(\zeta) = (h(t), \mathrm{S}(t)(h(t)). \tag{1.20}$$

De (1.19) e (1.20) obtem-se:

$$\dot{\mathrm{S}}h + \mathrm{S}(\mathrm{H}_{px}h + \mathrm{H}_{pp}\mathrm{S}h) = -\mathrm{H}_{xx}h - \mathrm{H}_{xp}\mathrm{S}h. \tag{1.21}$$

Como a igualdade em (1.21) é válida para todo vetor $h(t) \in \mathbb{H}(\phi_t(\theta))$, obtemos a equação matricial

$$\dot{\mathrm{S}} + \mathrm{S}\mathrm{H_{pp}}\mathrm{S} + \mathrm{S}\mathrm{H_{px}} + \mathrm{H_{xp}}\mathrm{S} + \mathrm{H_{xx}} = 0. \tag{1.22}$$

Esta equação em (1.22) é chamada equação de Riccati associada ao Hamiltoniano H. Neste caso a família de operadores $\mathrm{S}(t) : \mathbb{H}(\phi_t(\theta)) \to \mathbb{V}(\phi_t(\theta))$ é chamada uma solução simétrica, da equação de Riccati, definida ao longo da órbita de $\theta$.

O próximo resultado pode ser encontrado em [28 , página 914]. Usaremos ele no último capítulo.

**Teorema 1.32.** *Seja* $\mathrm{H} : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathbb{R}$ *um Hamiltoniano de Tonelli e* $\Sigma_e$ *um nível de energia regular. Seja*

$$(0, +\infty) \ni t \mapsto \mathrm{S}_\theta(t) : \mathbb{H}(\phi_t(\theta)) \to \mathbb{V}(\phi_t(\theta))$$

*uma família de operadores, definida ao longo da órbita do ponto* $\theta \in \Sigma_e$*. Se ela for uma solução simétrica da equação de Riccati*

$$\dot{\mathrm{S}} + \mathrm{SH}_{\mathrm{pp}}\mathrm{S} + \mathrm{SH}_{\mathrm{px}} + \mathrm{H}_{\mathrm{xp}}\mathrm{S} + \mathrm{H}_{\mathrm{xx}} = 0,$$

*então existe uma contante* $A > 0$ *tal que para todo* $t > 1$ *tem-se* $\| \mathrm{S}_\theta(t) \| \leq A$*.*

*Observação* 1.33. No Teorema acima a família de operadores pode variar também com o ponto $\theta \in \Sigma_e$ e ainda assim temos a limitação das normas dos operadores com a mesma constante $A > 0$. Todavia, para nossos propósitos aqui, é suficiente como no enunciado do Teorema.

## 1.7 O Fibrado Grassmanniano Lagrangiano

Nesta seção apresentamos alguns fatos sobre o fibrado Grassmanniano Lagrangiano da variedade simplética $(\mathrm{T}^*\mathrm{M}, \omega_0)$, fatos estes que terão papel relevante no próximo capítulo. Nossas referências para esse assunto são [4, 19, 51, 56].

**Definição 1.34.** Chama-se Fibrado Grassmanniano Lagrangiano, da variedade simplética $(\mathrm{T}^*\mathrm{M}, \omega_0)$, a tripla $(\Lambda(\mathrm{T}^*\mathrm{M}), \mathbb{P}, \mathrm{T}^*\mathrm{M})$, onde $\Lambda(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$ é o espaço total, $\mathbb{P}$ é a projeção de fibrado e $\mathrm{T}^*\mathrm{M}$ é o espaço base. Neste caso, a fibra sobre um ponto $\theta$ é a variedade Grassmanniana Lagrangiana

$$\mathbb{P}^{-1}(\theta) := \Lambda(\theta) = \{E \subset \mathrm{T}_\theta\mathrm{T}^*\mathrm{M} \ \mid \ E \text{ é um subespaço Lagrangiano}\}.$$

Assim sendo, $\Lambda(\theta)$ é uma variedade suave compacta, conexa, de dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$ e é difeomorfa ao espaço homogêneo $U(n)/O(n)$. Chamaremos uma seção desse fibrado, de distribuição Lagrangiana ou campo de planos Lagrangianos.

**Definição 1.35.** Chama-se **Distribuição Lagrangiana Vertical** em $\mathrm{T}^*\mathrm{M}$, a distribuição $\mathbb{V} : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \Lambda(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$ dada por $\mathbb{V}(\theta) := \ker[d\pi(\theta)]$, onde $d\pi(\theta) : \mathrm{T}_\theta\mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{T}_{\pi(\theta)}\mathrm{M}$ é a diferencial da projeção canônica.

Numa variedade simplética, fixada uma distribuição Lagrangiana, digamos D, podemos considerar o fibrado de todos os espaços Lagrangianos que não são transversais a D. No nosso caso, vamos fixar a distribuição Lagrangiana vertical $\mathbb{V}$.

**Teorema 1.36.** *Seja* $k \in \{1, 2, 3, ...n-1\}$, *onde* $n = \dim \mathrm{M}$ *e seja* $\Sigma_e \subset \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *um nível de energia regular do Hamiltoniano de Tonelli* H.

1. *Se* $\Lambda(\Sigma_e) := \mathbb{P}^{-1}(\Sigma_e)$, *então é uma subvariedade de codimensão um do espaço total* $\Lambda(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$*;*

2. $(\Lambda(\Sigma_e), \mathbb{P}, \Sigma_e)$ *é um subfibrado de* $(\Lambda(\mathrm{T}^*\mathrm{M}), \mathbb{P}, \mathrm{T}^*\mathrm{M})$ *e o espaço total, a base e a fibra são todos compactos;*

3. *Para* $\theta \in \mathrm{T}^*\mathrm{M}$, $\Lambda^k(\theta) := \{E \in \Lambda(\theta) \mid dim[E \cap \mathrm{V}(\theta)] = k\}$ *é uma subvariedade suave de* $\Lambda(\theta)$ *com codimensão* $\frac{k(k+1)}{2}$*;*

4. *Se* $\Lambda^k(\mathrm{T}^*\mathrm{M}) = \bigcup_{\theta \in \mathrm{T}^*\mathrm{M}} \Lambda^k(\theta)$ *então é uma subvariedade de* $\Lambda(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$ *com codimensão* $\frac{k(k+1)}{2}$ *e a tripla* $(\Lambda^k(\mathrm{T}^*\mathrm{M}), \mathbb{P}, \mathrm{T}^*\mathrm{M})$ *é um subfibrado de* $(\Lambda(\mathrm{T}^*\mathrm{M}), \mathbb{P}, \mathrm{T}^*\mathrm{M})$ *com fibra* $\mathbb{P}^{-1}(\theta) = \Lambda^k(\theta)$*;*

5. *Se* $\Lambda_V(\theta) := \bigcup_{k=1}^{n-1} \Lambda^k(\theta)$ *então* $\Lambda_V(\theta) = \overline{\Lambda^1(\theta)}$, *ou seja, é uma subariedade estratificada compacta conexa de* $\Lambda(\theta)$, *onde* $\Lambda^k(\theta)$, $k \in \{1, 2, 3, ...n - 1\}$ *são os estratos;*

6. *Se* $\Lambda_V(\mathrm{T^*M}) := \bigcup_{k=1}^{n-1} \Lambda^k(\mathrm{T^*M})$ *então é uma subvariedade estratificada de* $\Lambda(\mathrm{T^*M})$ *e* $\Lambda_V(\mathrm{T^*M}) = \overline{\Lambda^1(\mathrm{T^*M})}$.

**Teorema 1.37.** *Seja* $\mathrm{H} : \mathrm{T^*M} \to \mathbb{R}$ *um Hamiltoniano de Tonelli,* $\phi_t : \mathrm{T^*M} \to \mathrm{T^*M}$ *seu fluxo e* $\Sigma_e$ *um nível regular. Então*

1. *A aplicação* $\Phi_t : \Lambda(\mathrm{T^*M}) \to \Lambda(\mathrm{T^*M})$ *dada por* $\Phi_t(E) = d\phi_t(\theta)(E)$*, define um fluxo cujo campo de vetores denotaremos por* $\mathbb{X}(E) := \frac{d}{dt}\Phi_t(E)|_{t=0}$*;*

2. $\mathbb{P} \circ \Phi_t = \phi_t \circ \mathbb{P}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$*;*

3. $\Lambda(\Sigma_e)$ *é invariante por* $\Phi_t$ *e* $\mathbb{X}|_{\Lambda(\Sigma_e)} \in \mathfrak{X}^1(\Lambda(\Sigma_e))$ *é um campo de vetores não singular.*

**Teorema 1.38.** *O campo* $\mathbb{X}$ *é transversal à variedade estratificada* $\Lambda_V(\mathrm{T^*M})$.

Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [19], proposições 1.6 e 2.2.

**Definição 1.39.** Seja $\mathrm{W} \subset \mathrm{T^*M}$ uma subvariedade Lagrangiana de classe $C^1$.

1. O conjunto singular de W é o conjunto $Sing(\mathrm{W}) := \{\theta \in W | \ T_\theta W \cap V(\theta) \neq 0\}$. Note que este conjunto é estratificado pelos subconjuntos $S_k := \{\theta \in W | \ dim[T_\theta W \cap V(\theta)] = k\}$, onde $k = 1, 2, 3, ..., n-1$.

2. A aplicação de Gauss de W é a distribuição $\mathcal{G} : \mathrm{W} \to \Lambda(\mathrm{T^*M})$ dada por $\mathcal{G}(\theta) := \mathrm{T}_\theta\mathrm{W}$;

3. Se W for de classe $C^2$, diremos que ela é **genérica** quando sua aplicação de Gauss for transversal a $\Lambda_V(\mathrm{T^*M}) := \bigcup_{k=1}^{n-1} \Lambda^k(\mathrm{T^*M})$.

**Teorema 1.40.** *Seja* $\mathrm{W} \subset \mathrm{T^*M}$ *subvariedade Lagrangiana compacta, conexa e genérica. Se* $Sing(W) \neq \emptyset$*, então é uma subvariedade estratificada, onde os estratos são os conjuntos*

$$S_k := \{\theta \in W| \;\; dim[T_\theta W \cap V(\theta)] = k\},$$

*cada um sendo uma subavariedade* $C^1$ *e de codimensão* $\dfrac{k(k+1)}{2}$ *em* W*.*

Isto segue imediatamente da teoria de transversalidade.

O próximo teorema diz que via pequenas perturbações simpléticas podemos sempre tornar uma variedade Lagrangiana genérica. Uma prova pode ser encontrada em [19].

**Teorema 1.41.** *Seja* $\mathrm{W} \subset \mathrm{T^*M}$ *subvariedade Lagrangiana compacta conexa de classe* $C^2$*, Então existe uma sequência* $\{F_n\} \subset Dif^2(\mathrm{T^*M}, \omega_0)_{Simp}$*, convergindo(na topologia* $C^2$*), para identidade e tal que cada* $F_n(\mathrm{W})$ *é uma subvariedade Lagrangiana genérica.*

**Teorema 1.42.** *(Chekanov) Seja* $\mathrm{H} : \mathrm{T^*M} \to \mathbb{R}$ *Hamiltoniano de Tonelli,* $\Sigma_e = \mathrm{H}^{-1}(e)$ *nível de energia regular e* $\mathrm{W} \subset \Sigma_e$ *subvariedade Lagangiana genérica. Então o campo Hamiltoniano* $\mathrm{X}^H$ *é transversal a* $Sing(\mathrm{W})$*.*

Uma prova pode ser encontrada em [19, 26].

**Definição 1.43.** Seja $\mathrm{W} \subset \mathrm{T^*M}$ uma subvariedade Lagrangiana de $C^1$. Então

1. Diz-se que ela é um gráfico Lagrangiano quando existir uma 1-forma fechada $\eta$ em M tal que

$$\mathrm{W} = \{(q, \eta(q)) \in \mathrm{T^*M}; q \in M\}.$$

   Neste caso diz-se que a classe de cohomologia do gráfico é a classe de cohomologia $[\eta] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathbb{R})$ da 1-forma. Assim, um gráfico Lagrangiano é dito ser exato quando a 1-forma for exata;

2. Diz-se que ela é localmente um gráfico Lagrangiano exato, se para cada ponto $(q, p) \in \mathrm{W}$ existir uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathrm{W}$ de $(q, p)$, uma vizinhança $U$ de $q$ e uma função $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ tais que $\mathcal{U} = \{(q, df(q)) \mid q \in U\}$.

Finalmente temos a seguinte caracterização de gráficos Lagrangianos. Esse resultado foi provado por Arnold no caso do toro (ver 15, 43). O caso geral é provado em [12].

**Teorema 1.44.** *Seja* $\mathrm{W} \subset \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *subvariedade Lagragiana compacta, conexa e de classe* $C^1$. *As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *A restrição* $\pi|_{\mathrm{W}} : \mathrm{W} \to \mathrm{M}$ *é um difeomorfismo;*

2. $\mathrm{W}$ *é um gráfico;*

3. $\mathrm{W}$ *é localmente um gráfico Lagrangiano exato;*

4. *A aplicação de Gauss não intersecta* $\Lambda_V(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$.

5. *A restrição* $\pi|_{\mathrm{W}} : \mathrm{W} \to \mathrm{M}$ *é um difeomorfismo local.*

*Observação* 1.45. Em [12] é provado apenas a implicação $(5) \Rightarrow (1)$. Mas as outras são triviais e o leitor pode verificar que de fato temos $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$.

## 1.8 Pontos Conjugados

Esta seção é voltada para conceito de pontos conjugados para um Hamiltoniano de Tonelli. A referência é [28]. Apresentamos alguns fatos sobre pontos conjugados e que depois serão úteis nesta tese.

Seja $\phi_t : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ um fluxo Hamiltoniano dado por uma função Hamiltoniano de Tonelli.

**Definição 1.46. (Pontos Conjugados)** Diz-se que dois pontos $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{T^*M}$ são conjugados quando existir algum $t_1 \neq 0$ tal que:

1. $\theta_2 = \phi_{t_1}(\theta_1)$;

2. $d\phi_{t_1}(\theta_1)(\mathbb{V}(\theta_1)) \bigcap \mathbb{V}(\theta_2) \neq \{0\}$.

Note que este conceito pode ser igualmente definido no contexto de Lagrangiano de Tonelli e via transformada de Legendre os dois coinceitos são equivalentes. Observamos que de fato, isto é uma generalização do conceito de pontos conjugados da Geometria Riemanniana (ver [55]). Vamos mostrar que, no caso de Hamiltoniano Riemanniano, as duas noções coincidem.

**Proposição 1.47.** *Seja $(M, g)$ uma variedade Riemanniana completa, $\gamma : \mathbb{R} \to M$ uma geodésica e denote $q_1 := \gamma(a)$, $q_2 := \gamma(b)$, $\theta_1 = (\gamma(a), \dot\gamma(a))$ e $\theta_2 = (\gamma(b), \dot\gamma(b))$, com $a < b$. Então os pontos $q_1$ e $q_2$ são conjugados no sentido Riemanniano se, e somente se, os pontos $\theta_1$ e $\theta_2$ são conjugados no sentido Hamiltoniano.*

*Demonstração.* De fato, suponha $\theta_1$ e $\theta_2$ conjugados. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que $a = 0$ e $b = t$. Isto significa que existe um vetor não nulo $\xi \in \mathbb{V}(\theta_1)$, tal que $d\varphi_t(\theta_1)(\xi) \in \mathbb{V}(\varphi_t(\theta_1)) = \mathbb{V}(\theta_2)$. Pela seção 1.2, podemos usar a decomposição $\mathrm{T}_{\theta_1}\mathrm{TM} = \mathbb{H}(\theta_1) \oplus \mathbb{V}(\theta_1) = \mathrm{T_{q_1}M} \oplus \mathrm{T_{q_1}M}$, para concluir que $\xi = (0, \xi_v)$. Como vimos naquela seção, existe um único campo de Jacobi $J$ definido ao longo da geodésica $\gamma$ e tal que:

$$\xi = (0, \xi_v) = (d\pi(\theta_1)(\xi), K_{\theta_1}(\xi)) = (J(0), \frac{DJ}{dt}(0)).$$

Além disto:

$$d\varphi_t(\theta_1)(\xi) = (J(t), \frac{DJ}{dt}(t)).$$

Como temos $d\varphi_t(\theta_1)(\xi) \in \mathbb{V}(\theta_2)$ e a aplicação

$$d\varphi_t(\theta_1) : \mathrm{T}_{\theta_1}\mathrm{TM} \to \mathrm{T}_{\theta_2}\mathrm{TM} = \mathbb{H}(\theta_2) \oplus \mathbb{V}(\theta_2)$$

é um isomorfismo linear, concluímos que $J(0) = 0$ e $\frac{DJ}{dt}(0) \neq 0$. Assim, os pontos $q_1$ e $q_2$ são conjugados no sentido Riemanniano.

Reciprocamente, assuma que $\gamma$ seja uma geodésica com $q_1 = \gamma(0)$ e $q_2 = \gamma(t)$ pontos conjugados, no sentido Riemanniano. Isto significa que existe um campo de Jacob $J$ definido ao longo de $\gamma$ tal que $J(0) = 0 = J(t)$. Agora usando a decomposição $\mathrm{T}_{\theta_1}\mathrm{TM} = \mathbb{H}(\theta_1) \oplus \mathbb{V}(\theta_1) = \mathrm{T}_{\mathrm{q}_1}\mathrm{M} \oplus \mathrm{T}_{\mathrm{q}_1}\mathrm{M}$, considere o vetor não nulo

$$\xi = (\xi_h, \xi_v) = (J(0), \frac{DJ}{dt}(0)) = (0, \frac{DJ}{dt}(0)) = (0, \xi_v) \in \mathbb{V}(\theta_1).$$

Pelo lema 1.14, temos que:
$d\varphi_t(\theta_1)(\xi) = (J(t), \frac{DJ}{dt}(t)) = (0, \frac{DJ}{dt}(t)) \in \mathrm{T}_{\mathrm{q}_2}\mathrm{M} \oplus \mathrm{T}_{\mathrm{q}_2}\mathrm{M} = \mathbb{H}(\theta_2) \oplus \mathbb{V}(\theta_2)$.
Isto significa que $d\varphi_t(\theta_1)(\mathbb{V}(\theta_1)) \cap \mathbb{V}(\theta_2) \neq \{0\}$. Portanto, $\theta_1$ e $\theta_2$ são pontos conjugados no sentido Hamiltoniano. $\square$

A existência de pontos conjugados está ligada com subespaços Lagrangianos de acordo com o seguinte resultado.

**Proposição 1.48.**

1. *Um segmento semi-aberto* $\{\phi_t(\theta)| \ \ 0 \leq t < b \leq +\infty\}$ *não tem pontos conjugados se, e somente se, existir um subespaço Lagrangiano* $E \subset \mathrm{T}_\theta\mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *tal que* $d\phi_t(\theta)(E) \bigcap \mathbb{V}(\phi_t(\theta)) = \{0\}$ *para todo* $0 < t < b$*;*

2. *Um segmento fechado* $\{\phi_t(\theta)| \ \ 0 \leq t \leq b\}$ *não tem pontos conjugados se, e somente se, existir um subsespaço Lagrangiano* $E \subset \mathrm{T}_\theta\mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *tal que* $d\phi_t(\theta)(E) \bigcap \mathbb{V}(\phi_t(\theta)) = \{0\}$ *para todo* $0 \leq t \leq b$*;*

3. *Se um segmento fechado* $\{\phi_t(\theta)| \ \ 0 \leq t \leq b\}$ *não tem pontos conjugados, então existe um* $\delta > 0$ *tal que o segmento* $\{\phi_t(\theta)| \ \ -\delta < t < b+\delta\}$ *não tem pontos conjugados.*

O Teorema a seguir é central nesta tese porque, na direção da conjectura de Sinai, ele implica que toda órbita na variedade Lagrangiana W não contém pontos conjugados. Por sua vez, a não existência de pontos conjugados, esta ligada à existência de subespaços Lagrangianos transversais ao fibrado vertical. Uma prova do Teorema abaixo está em [28].

**Teorema 1.49.** *Se* $\gamma : [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathrm{M}$ *for uma curva minimizante de Tonelli então o segmento de órbita*

$$\{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))| \ \ t \in [a, b]\}$$

*não contém pontos conjugados.*

O próximo teorema é uma generalização devido a Arnold, do Teorema de Sturm-Liouville para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, para o caso de subespaço Lagrangiano invariante. Nós o estabelecemos aqui da forma apresentada em [31], página 18.

**Teorema 1.50.** *Seja* $\phi_t : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *fluxo Hamiltoniano de Tonelli e* $\Phi_t : \Lambda(\mathrm{T}^*\mathrm{M}) \to \Lambda(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$ *o fluxo induzido no fibrado Grassmanniano Lagrangiano. Se* $E, E' \subset \mathrm{T}_\theta\mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *forem subespaços Lagrangianos distintos e a órbita* $t \mapsto \Phi_t(E)$ *intersecta* $\Lambda_V(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$ *n+1 vezes (contando a multiplicidade)no intervalo* $[a, b]$*, então neste mesmo intervalo, a órbita* $t \mapsto \Phi_t(E')$ *intersecta* $\Lambda_V(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$ *pelo menos uma vez.*

**Corolário 1.51.** *Seja* $E$ *um campo de planos Lagrangianos invariante ao longo da órbita* $\{\phi_t(\theta)|t \in \mathbb{R}\}$*. Se a órbita não tem pontos conjugados, então* $\{\Phi_t(E(\theta))|t \in \mathbb{R}\}$ *intersecta* $\Lambda_V(\Sigma_e)$ *no máximo n vezes(contando a multiplicidade).*

*Demonstração.* Suponha que $\{\Phi_t(E(\theta)) \ \ | \ \ t \in \mathbb{R}\}$ intersecta $\Lambda_V(\Sigma_e)$ mais que n vezes. Então aplicamos o teorema anterior aos subespaços $E = E(\theta)$

e $E^{'} = \mathbb{V}(\theta)$. Isto implica em $\{\phi_t(\theta) \ \mid \ t \in \mathbb{R}\}$ ter pontos conjugados, o que é uma contradição. $\square$

A relação entre nível de energia regular sem pontos conjugados pontos conjugados e distribuição Lagrangiana invariante em todo o nível é mostrada no seguinte seguinte teorema de Paternain-Paternain. Esse Teorema é uma generalização, para Hamiltonianos de Tonelli, de um teorema de Mañé para fluxo geodésico. Para uma prova veja [53].

**Teorema 1.52.** *Seja* $\phi_t : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *um fluxo Hamiltoniano de Tonelli,* $\Sigma_e$ *um nível de energia regular e* $\Lambda(\Sigma_e)$ *o Fibrado Grassmanniano sobre* $\Sigma_e$*. Se* $E : \Sigma_e \to \Lambda(\Sigma_e)$ *for uma distribuição Lagrangiana contínua e* $\phi_t$*-invariante, então*

1. $E(\theta) \cap \mathbb{V}(\theta) = \{0\}, \quad \forall \theta \in \Sigma_e$;

2. $\Sigma_e$ *não contém pontos conjugados;*

3. *A restrição* $\pi|_{\Sigma_e} : \Sigma_e \to \mathrm{M}$ *é uma submersão.*

O próximo teorema nos diz que ao longo de uma órbita sem pontos conjugados sempre existem duas distribuições Lagrangianas transversas à distribuição vertical. Para uma prova veja [28]. Esse resultado é usado em [12] a fim de obter condições para uma variedade invariante ser Lagrangiana. Uma busca por uma prova da Conjectura de Herman, enunciada na introdução desta tese.

**Teorema 1.53.** *Seja* $\phi_t : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *um fluxo Hamiltoniano de Tonelli,* $\Sigma_e$ *um nível de energia regular e* $\Phi_t : \Lambda(\Sigma_e) \to \Lambda(\Sigma_e)$ *o fluxo induzido no fibrado Grassmanniano Lagrangiano sobre* $\Sigma_e$*. Se* $\{\phi_t(\theta) | \ \ t \in \mathbb{R}\} \subset \Sigma_e$ *for uma órbita sem pontos conjugados então, existem dois campos de planos Lagrangianos* $\mathbb{E}, \mathbb{F} \subset \Lambda(\Sigma_e)$*, definidos ao longo da órbita, tais que:*

1. $\mathbb{E}(\theta) = \lim_{t\to+\infty} \Phi_{-t}(\mathbb{V}(\phi_t(\theta)))$ *e* $\mathbb{F}(\theta) = \lim_{t\to+\infty} \Phi_t(\mathbb{V}(\phi_{-t}(\theta)))$;

2. $\mathbb{E}(\theta) \cup \mathbb{F}(\theta) \subset T_\theta\Sigma$;

3. $\mathbb{E}(\theta) \cap \mathbb{V}(\theta) = \{0\} = \mathbb{F}(\theta) \cap \mathbb{V}(\theta)$;

4. $< \mathrm{X_H}(\theta) > \ \subset \mathbb{E}(\theta) \cap \mathbb{F}(\theta)$.

*Além disto, se a órbita for periódica então ela é hiperbólica, dentro de seu nível de energia, se e somente se,*

$$< \mathrm{X_H}(\theta) > \ = \ \mathbb{E}(\theta) \cap \mathbb{F}(\theta).$$

*Os dois campos de planos são chamados de fibrados de Green.*

## 1.9 Medidas Minimizantes

Nesta seção apresentamos alguns fatos sobre a medidas minimizantes. Mais detalhes e provas podem ser encontradas por exemplo em [27, 35, 50, 61 e 62].

Seja $\mathrm{L} \in C^3(\mathrm{TM}, \mathbb{R})$ um Lagrangiano de Tonelli, cujo fluxo de Euler-Lagrange é $\phi_t : \mathrm{TM} \to \mathrm{TM}$. Considere $\mathfrak{M}(\mathrm{L})$, o conjunto de todas as medidas de probabilidades $\mu$, que sejam invariantes e tais que $\int_{\mathrm{TM}} \mathrm{L}(x,v)d\mu < \infty$. Nós observamos que este conjunto é não vazio, já que cada nível de energia é compacto invariante e portanto, a existência está garantida pelo Teorema de Krylov-Bogoliouboff.
Agora, seja $\eta$ uma 1-forma fechada em M e defina o novo Lagrangiano $\mathrm{L}_\eta(x,v) := \mathrm{L}(x,v) - \eta(x)(v)$. Este Lagrangiano é também de Tonelli. Além disso, $\mathrm{L}_\eta$ e L tem o mesmo fluxo de Euler-Lagrange. Segue que $\mathfrak{M}(\mathrm{L}) =$

$\mathfrak{M}(\mathrm{L}_\eta)$. Conideremos o funcional $\mathcal{A}_{L_\eta} : \mathfrak{M}(\mathrm{L}) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{A}_{L_\eta}(\mu) := \int_{\mathrm{TM}} L_\eta(x,v)d\mu.$$

Este funcional está bem definido e pode-se provar que seus valores dependem apenas da classe de co-homologia $c := [\eta] \in H^1(M,\mathbb{R})$. Ele também é semi-contínuo inferiormente na topologia fraca* em $\mathfrak{M}(\mathrm{L})$. Desta forma, ele sempre assume um valor mínimo global. Assim, se $\mu \in \mathfrak{M}(\mathrm{L})$ for um ponto de mínimo global para $\mathcal{A}_{L_\eta}$ então, tal medida é chamada de *medida c-minimizante* ou *medida de Mather associada à classe de cohomologia c.* Chama-se *função alfa de Mather*, a função definida da seguinte forma:

$$\alpha : H^1(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$c \mapsto -\min\{\mathcal{A}_{L_{\eta_c}}(\mu) \ \mid \ \mu \in \mathfrak{M}(\mathrm{L})\},$$

onde $\eta_c$ é qualquer 1-forma com classe de cohomologia $c$. Esta função codifica muitas propriedades do fluxo Euler - Lagrange e ainda não está completamente entendida a relação entre propriedades desta função e do fluxo. Vamos apresentar mais a frente, algumas proriedades conhecidas. Mas antes precisamos definir um conjunto especial para o fluxo.
Definamos

$$\mathfrak{M}_c(\mathrm{L}) := \{\mu \in \mathfrak{M}(\mathrm{L}) \ \mid \ \mathcal{A}_{L_{\eta_c}}(\mu) = -\alpha(c)\}$$

e

$$\tilde{\mathcal{M}}_c := \bigcup_{\mu \in \mathfrak{M}_c(\mathrm{L})} supp\,\mu \subset \mathrm{TM}.$$

O conjunto $\tilde{\mathcal{M}}_c$ é chamado *conjunto de Mather associado à classe de cohomologia c* e sua projeção $\mathcal{M}_c = \Pi(\tilde{\mathcal{M}}_c)$ é chamada de *conjunto de Mather projetado.* O próprio John Mather fez as notáveis descobertas(ver [50]), de que $\tilde{\mathcal{M}}_c$ é não-vazio, compacto e invariante e a aplicação $\Pi : \tilde{\mathcal{M}}_c \to \mathcal{M}_c$ tem uma inversa Lipschitz, $\Gamma : \mathcal{M}_c \to \tilde{\mathcal{M}_c}$. Hoje isto é chamado na literatura de *Teorema do Gráfico de Mather* . Um pouco depois disto em [24], Carneiro provou que este conjunto está contido no nível de energia correspondente ao valor $\alpha(c)$ e um argumento devido a Sorrentino [ ver 60, 61, 62], mostra que existe uma $\mu_0 \in \mathfrak{M}_c(\mathrm{L})$ tal que $supp\, \mu_0 = \tilde{\mathcal{M}_c}$.

Vamos voltar nossa atenção a um problema variacional relacionado. Uma vez que L é Tonelli, se $\mu \in \mathfrak{M}(\mathrm{L})$ então para toda 1-forma $\eta$ em M pode-se mostrar que a integral $\int_{\mathrm{TM}} \eta(x,v) d\mu$ está bem definida e seu valor depende apenas da classe de co-homologia$c := [\eta] \in H^1(\mathrm{M}, \mathbb{R})$. Isto, permite definir um funcional linear:

$$H^1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$c \mapsto \int_{\mathrm{TM}} \eta(x,v) d\mu.$$

Como $H_1(M, \mathbb{R})$ é o espaço vetorial dual de $H^1(M, \mathbb{R})$ então, existe um único vetor $\rho(\mu) \in H_1(M, \mathbb{R})$ tal que

$$< c, \rho(\mu) >= \int_{\mathrm{TM}} \eta(x,v) d\mu \quad \forall c \in H^1(M, \mathbb{R}).$$

O vetor $\rho(\mu)$ é chamado *vetor de rotação* ou *classe de homologia* de $\mu$ e é o mesmo *ciclo assintótico de Schwartzman* de $\mu$ (ver [31]). O leitor pode encontrar em [61], um argumento que justifica o nome *vetor de rotação.*
Como pode-se notar, o *vetor de rotação* é uma aplicação $\rho : \mathfrak{M}(\mathrm{L}) \to H_1(M, \mathbb{R})$. Pode-se provar que ela é *contínua* e *sobrejetiva.* Ela também é *afim*, no sentido de que $\rho(a\mu + b\nu) = a\rho(\mu) + b\rho(\nu)$, para quaisquer $0 \leq a, b \leq 1$ com $a + b = 1$ e qualquer $\mu, \nu \in \mathfrak{M}(\mathrm{L})$. Deste modo, fazemos a seguinte pergunta natural: Existe solução para o seguinte problema variacional com restrição?

$$\min\{\mathcal{A}_L(\mu) \ \mid \ \mu \in \mathfrak{M}(\mathrm{L}) \ \ and \ \ \rho(\mu) = h\}$$

Sendo L Tonelli, $\mathcal{A}_L$ é semi-continuo inferiormente e $\rho$ é contínua , pode-se mostrar (ver referências), que sempre existe uma solução. Por isto, temos definido uma outra função especial, a chamada *função beta de Mather* ou *Lagrangiana efetiva.* Esta função é definida da seguinte forma:

$$\beta : H_1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$h \mapsto \min\{\mathcal{A}_L(\mu) \ \ | \ \ \mu \in \mathfrak{M}(\mathrm{L}) \ \ and \ \ \rho(\mu) = h\}$$

Apresentamos agora algumas de suas propriedades, bem como sua relação com a *função alfa de Mather* e com a dinâmica do fluxo de Euler-Lagrange.

Relembramos que, se E for um espaço vetorial de dimensão finita e $f$ : E $:\to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, podemos definir sua função *convexa conjugada* usando a *transformada de Fenchel.* A *convexa conjugada* é dada por:

$$f^* : \mathrm{E}^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$p \mapsto \sup\{p(v) - f(v) \ \ | \ \ v \in \mathrm{E}\}$$

Da análise convexa (veja [35]) sabemos que quando $f$ é finita então $f^*$ será finita se, e só se, $f$ tem crescimento superlinear, ou seja, $\dfrac{f(v)}{\|v\|} \longrightarrow +\infty$ quando $\|v\| \longrightarrow +\infty$.

Pode-se provar (ver [61, 62]), que as funções alfa e beta de Mather, são convexas conjugadas uma da outra e que têm crescimento superlinear. Uma consequência disto, é que pelo Teorema de Rademacher, essas funções são diferenciáveis num conjunto com medida de Lebesgue total. A diferenciabilidade dessas funções estão de alguma maneira, ainda misteriosa, ligada com a dinâmica do fluxo Hamiltoniano (e portanto, o fluxo de Euler-Lagrange). Por exemplo, pode-se mostrar que, uma condição necessaria para que o espaço de fase admita uma folheação por gráficos Lagranginos invariantes $C^0$, é que a função beta seja diferenciável. Em [49], no caso de dois graus de liberdade, os autores provam que essa condição é suficiente e que neste caso, o espaço de configurações é o toro $\mathbb{T}^2$. Assim, uma pergunta natural que fica é a seguinte: Seja $\phi_t : \mathrm{T}^*\mathbb{T}^n \to \mathrm{T}^*\mathbb{T}^n$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli, cuja função beta de Mather seja diferenciável. Existe uma folheação de $\mathrm{T}^*\mathbb{T}^n$ por gráficos Lagrangianos invariantes ?

## 1.10 O Potencial de Mañé

Nosso interesse nesta seção são minimizantes de Tonelli definidas para todo tempo e cujas ações são mínimas em relação a qualquer intervalo de tempo. Tais curvas, como veremos, determinam conjuntos invariantes pela dinâmica e tem rica estrutura. As referências são [27, 35, 61, 62 ].

Sejam $\mathrm{L} : \mathrm{TM} \to \mathbb{R}$ um Lagrangiano de Tonelli, $\eta$ uma 1-forma diferencial fechada com classe de cohomologia $c \in \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathbb{R})$. Considere o Lagrangiano $\mathrm{L}_\eta := \mathrm{L} - \eta$. Uma conta direta mostra que esses dois Lagrangianos tem as mesmas equações de Euler-Lagrange e portanto, tem o mesmo fluxo de Euler-Lagrange. Porém, como veremos depois, os dois Lagrangianos não tem os mesmos funcionais de ação mínima. Começamos definindo curvas $c$-minimizantes.

**Definição 1.54.** Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{M}$ uma curva absolutamente contínua e $\eta$ uma 1-forma diferencial fechada com classe de cohomologia $c \in \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathbb{R})$.

1. Diz-se que $\gamma$ é $c$-minimizante global para o Lagrangiano L, quando para quaisquer $a < b$ e qualquer curva absolutamente contínua $\lambda : [a, b] \to \mathrm{M}$

com $\lambda(a) = \gamma(a)$ e $\lambda(b) = \gamma(b)$ tem-se

$$\mathrm{A}_{L_\eta}(\gamma|_{[a,b]}) \leq \mathrm{A}_{L_\eta}(\lambda|_{[a,b]}).$$

2. Diz-se que $\gamma$ é $c$-minimizante tempo livre para o Lagrangiano L, quando para quaisquer $a < b$, $a' < b'$ e qualquer curva absolutamente contínua $\lambda : [a', b'] \to \mathrm{M}$ com $\lambda(a') = \gamma(a)$ e $\lambda(b') = \gamma(b)$ tem-se

$$\mathrm{A}_{L_\eta}(\gamma|_{[a,b]}) \leq \mathrm{A}_{L_\eta}(\lambda|_{[a',b']}).$$

Dados $x, y \in \mathrm{M}$ e $T > 0$, vamos denotar por $AC([0,T],\mathrm{M})_{xy}$ o espaço de todas as curvas absolutamente contínuas $\gamma : [0,T] \to \mathrm{M}$ tais que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$. O Teorema de Tonelli garante que sempre existe um ponto $\gamma_{min} \in AC([0,T],\mathrm{M})_{xy}$ que minimiza a ação

$$\mathcal{A}_{L_\eta} : AC([0,T],\mathrm{M})_{xy} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

dado por

$$\mathcal{A}_{L_\eta}(\gamma) := \int_0^T \mathrm{L}_\eta(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt.$$

Na busca pelas minimizantes tempo livres Mañé definiu o seguinte funcional, o qual mais tarde recebeu o seu nome.

**Definição 1.55.** Dado $k \in \mathbb{R}$, chama-se Potencial de Mañé, o funcional

$$\Phi_{\eta,k} : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

dado por

$$\Phi_{\eta,k}(x,y) := \inf_{T>0} \min_{\gamma \in AC([0,T],\mathrm{M})_{xy}} \mathcal{A}_{L_\eta + k}(\gamma)$$

A pergunta natural a se fazer aqui é: Quando o Potencial de Mañé é finito?

Para isto define-se o Valor Crítico de Mañé para o Lagrangiano $\mathrm{L}_\eta$.

**Definição 1.56.** Chama-se Valor Crítico de Mañé, para o Lagrangiano $\mathrm{L}_\eta$, o seguinte valor

$$c(\mathrm{L}_\eta) := \sup\{k \in \mathbb{R} \ \mid \ \exists \ \ uma \ \ curva \ \ fechada \ \ \gamma \ \ t.q \ \ \mathcal{A}_{L_\eta+k}(\gamma) < 0\} =$$

$$= \inf\{k \in \mathbb{R} \ \mid \ \forall \ \ curva \ \ fechada \ \ \gamma \Rightarrow \mathcal{A}_{L_\eta+k}(\gamma) \geq 0\}.$$

*Observação* 1.57. Note que uma curva $c$-minimizante tempo livre é também $c$- minimizante global. Fathi mostra (ver [35]) que existe uma única constante $e \in \mathbb{R}$ tal que para o Lagrangiano $\mathrm{L} + e$, os dois conceitos são equivalentes. A constante $e$, é o chamado valor crítico do Lagrangiano $\mathrm{L}_\eta$.

Como L é um Lagrangiano de Tonelli, segue que quando $k$ for grande o suficiente teremos $\mathrm{L} + k \geq 0$ e assim, temos que $c(\mathrm{L}_\eta) < +\infty$. Por outro lado, como a integral de um 1-forma exata ao longo de uma curva fechada é sempre zero, concluimos que $c(\mathrm{L}_\eta)$ não depende da 1-forma fechada $\eta$ em si e sim da sua classe de cohomologia $c := [\eta] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathbb{R})$.
Originalmente Ricardo Mañé definiu esse valor crítico apenas para o Lagrangiano L muito embora, ele esteja igualmente bem definido para cada $\mathrm{L}_\eta$ variando-se a um forma $\eta$ no espaço das 1-formas fechadas de M. Em [24], prova-se que $c(\mathrm{L}_\eta)$ é exatamente o valor $\alpha([\eta])$, onde $\alpha$ é a função alfa de Mather correspondente ao Lagrangiano original L.

A relação entre o valor crítico e o Potencial de Mañé é mostrada a seguir. Para uma prova deste Teorema, veja as referências indicadas para esta seção.

**Teorema 1.58.** *Sejam $g$ uma métrica Riemanniana em* M*, induzindo uma função distância $d_g$,* $\mathrm{L} \in C^3(\mathrm{TM}, \mathbb{R})$ *um Lagrangiano de Tonelli e $\eta$ uma 1-forma fechada em* M*. Então, o Potencial de Mañé tem as seguintes propriedades:*

1. $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall x, y, z \in \mathrm{M} \Rightarrow \Phi_{\eta,k}(x, y) \leq \Phi_{\eta,k}(x, z) + \Phi_{\eta,k}(z, y)$;

2. *Se* $k < c(\mathrm{L}_\eta)$ *então* $\Phi_{\eta,k}(x,y) = -\infty, \quad \forall x,y \in \mathrm{M}$*;*

3. *Se* $k \geq c(\mathrm{L}_\eta)$ *então* $\Phi_{\eta,k}(x,y) \in \mathbb{R}, \quad \forall x,y \in \mathrm{M}$*;*

4. *Se* $k \geq c(\mathrm{L}_\eta)$ *então existe uma constante* Q *tal que*

$$\Phi_{\eta,k}(x,y) \leq (\mathrm{Q}+k)d_g(x,y), \quad \forall x,y \in \mathrm{M},$$

*o que juntamente com item 1 implicam que* $\Phi_{\eta,k}$ *é* $(\mathrm{Q}+k)$*-Lipschitz;*

5. *Se* $k \geq c(\mathrm{L}_\eta)$ *então* $\Phi_{\eta,k}(x,x) = 0, \quad \forall x \in \mathrm{M}$*;*

6. *Se* $k \geq c(\mathrm{L}_\eta)$ *então* $\Phi_{\eta,k}(x,y) + \Phi_{\eta,k}(y,x) \geq 0, \quad \forall x,y \in \mathrm{M}$*;*

7. *Se* $k > c(\mathrm{L}_\eta)$ *então* $\Phi_{\eta,k}(x,y) + \Phi_{\eta,k}(y,x) > 0, \quad \forall x \neq y \in \mathrm{M}$*;*

**Definição 1.59.** Seja $\gamma : \mathbb{R} \to M$ uma curva absolutamente contínua. Dizemos que $\gamma$ é uma curva

1. $c$-semi-estática quando $\mathrm{A}_{L_\eta+\alpha(c)}(\gamma|_{[a,b]}) = \Phi_{\eta,\alpha(c)}(\gamma(a),\gamma(b))$, $\forall a < b$;

2. $c$-estática quando $\mathrm{A}_{L_\eta+\alpha(c)}(\gamma|_{[a,b]}) = -\Phi_{\eta,\alpha(c)}(\gamma(b),\gamma(a))$, $\forall a < b$;

**Definição 1.60.** (Conjuntos de Mañé e Aubry)

1. Chama-se conjunto de Mañé com classe de cohomologia $c$, o conjunto

$$\tilde{\mathcal{N}}_c := \{(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) \in TM; \quad t \in \mathbb{R} \;\; e\; \gamma \;\; c - minimizante \;\; global\}$$

$$= \{(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) \in TM; \quad t \in \mathbb{R} \;\; e\; \gamma \;\; c - semi - estatica\};$$

2. Chama-se conjunto de Aubry, de classe de cohomologia $c$, o conjunto

$$\tilde{\mathcal{A}}_c = \{(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) \in TM; \quad t \in \mathbb{R} \;\; e\; \gamma \;\; c - estatica\};$$

*Observação* 1.61. O conjunto $\tilde{\mathcal{N}}_c$ foi definido incialmente por Mañé, o qual chamava de conjunto dos vetores semi-estáticos, como sendo o conjunto das orbitas que se projetam em curva $c$-semi-estática. Mais tarde, Fathi prova a equivalência no item 1 acima (ver [35, 61]) e propõe a nomeclatura conjuntos de Mañé e Aubry.
Segue do Teorema 1.50, que um conjunto de Mañé não contém pontos conjugados. Outras propriedades desse conjunto, bem como dos conjuntos de Aubry e Mather são dadas a seguir.

**Teorema 1.62.** *(Propriedades dos Conjuntos de Mañé, Aubry e Mather)*
*Os conjuntos $\tilde{\mathcal{N}}_c$, $\tilde{\mathcal{A}}_c$ tem as seguintes propriedades:*

1. *$\tilde{\mathcal{N}}_c$ é compacto invariante e transitivo por cadeias. Em particular, é conexo;*
2. *$\tilde{\mathcal{A}}_c$ é compacto, invariante e recorrente por cadeias;*
3. *$\tilde{\mathcal{M}}_c \subset \tilde{\mathcal{A}}_c \subset \tilde{\mathcal{N}}_c \subset \Sigma_{\alpha(c)}$;*
4. *$\Omega(\phi_t|_{\tilde{\mathcal{N}}_c}) \subset \tilde{\mathcal{A}}_c$;*

**Teorema 1.63.** *(Teorema do Gráfico de Mather)*
*A função $\pi(\tilde{\mathcal{A}}_c) \ni q \mapsto Card(\pi^{-1}(q) \cap \tilde{\mathcal{N}}_c)$ é constante igual a $1$. Além disso, a aplicação inversa $\pi^{-1} : \pi(\tilde{\mathcal{A}}_c) \to \tilde{\mathcal{A}}_c$ é Lipschitz.*

# Capítulo 2

# Variedade Lagrangiana Invariante e a Propriedade de Gráfico

Neste capítulo, vamos buscar condições sob as quais podemos decidir quando uma variedade Lagrangiana $\mathrm{W} \subset \mathrm{T}^*\mathrm{M}$, invariante por um fluxo Hamiltoniano de Tonelli, é o gráfico de uma 1-forma diferencial. Nesse sentido o capítulo contém três partes. Numa primeira parte, estudamos o caso da variedade Lagrangiana não conter pontos conjugados. Na segunda parte, olhamos o caso em que a variedade Lagrangiana está contida num conjunto de Mañê e finalmente na terceira parte estudamos o caso em que a Variedade Lagrangiana é um conjunto $e$-minimizante. Começamos provando o seguinte Teorema.

**Teorema 2.1.** *Sejam* $\phi_t : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *um fluxo Hamiltoniano de Tonelli,* $\Sigma_e$ *um nível de energia regular e* $\mathrm{W} \subset \Sigma_e$ *uma subvariedade Lagrangiana, compacta, conexa e de classe* $C^2$*. Se a aplicação* $\pi|_W : \mathrm{W} \to \mathrm{M}$ *for localmente injetiva então, o estrato singular* $S_1$ *é vazio e* $\pi|_W$ *é um recobrimento finito.*

*Em particular, se* $\mathrm{W}$ *for genérica então é uma seção de* $\mathrm{T}^*\mathrm{M}$.

Antes precisamos do lema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [38].

**Lema 2.2.** *Sejam* $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2$ *duas variedades suaves de mesma dimensão* $d$ *e* $f : \mathrm{N}_1 \to \mathrm{N}_2$ *uma aplicação de classe* $C^2$. *Seja* $\mathrm{S} \subset \mathrm{N}_1$ *uma subvariedade de codimensão um e formada por pontos singulares de* $f$. *Se para todo ponto* $x \in \mathrm{S}$ *tem-se* $\dim[\ker df(x)] = 1$ *e o campo de retas* $\mathrm{S} \ni z \mapsto \ker df(z)$ *for transversal a* $\mathrm{S}$ *então existem sistemas de cooordenadas em* $\mathrm{N}_1$ *e* $\mathrm{N}_2$, *centrados em* $z$ *e* $f(z)$, *tais que nessas coordenadas a aplicação* $f$ *é dada por:*

$$(x_1, x_2, ..., x_{d-1}, x_d) \mapsto (x_1, x_2, ..., x_{d-1}, (x_d)^2).$$

*Em particular,* $f$ *é* $2:1$ *numa vizinhança de* $z$.

### Demonstração do Teorema 2.1

Pelo Corolário 1.7, temos que $\pi|_W : \mathrm{W} \to \mathrm{M}$ tem que ser recobrimento finito. Agora, suponha que $S_1 \neq \emptyset$. Como $\mathrm{W}$ é de classe $C^2$ e está contida em um nível de energia regular então, os teoremas 1.36, 1.37 e 1.38, implicam que a aplicação de Gauss $\mathcal{G} : \mathrm{W} \to \Lambda(\Sigma_e)$ é transversal à subvariedade $\Lambda^1(\Sigma_e)$. Logo $S_1$ é uma subvariedade de codimensão 1 em $\mathrm{W}$. Consideremos o campo de retas verticais $S_1 \ni \theta \mapsto \mathrm{T}_\theta\mathrm{W} \cap \mathbb{V}(\theta)$.

**Afirmação 1:** Não existe um ponto, no qual o campo de retas seja transversal ao substrato $S_1$.

De fato, neste caso pela continuidade do campo de retas, temos que existiria um aberto $\mathcal{U} \subset S_1$, ao longo do qual esse campo seria transversal a $S_1$. Pelo Lema acima, segue que numa vizinhança $\mathcal{V}_\theta \subset \mathrm{W}$ de um ponto $\theta \in S_1$, a aplicação $\pi : \mathcal{V}_\theta \to \mathrm{M}$ é 2:1. Em particular, $\pi : \mathrm{W} \to \mathrm{M}$ não é localmente injetiva, o que nos leva a uma contradição.

Segue que o campo de retas verticais é tangente à subvariedade $S_1$. Isto induz um camo de vetores não singular tangente a $S_1$. Seja $t \mapsto \Gamma(t)$ um curva integral desse campo. Isto significa que $\dot{\Gamma}(t) \subset \mathrm{T}_{\Gamma(t)}\mathrm{W} \cap \mathbb{V}(\Gamma(t))$. Disto segue então que, pondo $\gamma(t) := \pi(\Gamma(t))$ temos que $\dot{\gamma}(t) = d\pi(\Gamma(t))(\dot{\Gamma}(t)) = 0$. Logo a curva $t \mapsto \gamma(t)$ é constante, o que implica que as curvas integrais do campo de retas tangente estão todas contidas nas fibras $(\pi|_W)^{-1}(q)$, o que implica que a aplicação $\pi : \mathrm{W} \to \mathrm{M}$ não é localmente injetiva. Portanto, temos que o substrato $S_1$ tem que ser vazio. No caso em que W é genérica temos que se W não for uma seção, então pelo Teorema 1.45, o conjunto singular $Sing(\mathrm{W}) = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_{n-1}$ é não vazio. Sendo W subvariedade Lagrangiana genérica, pelo Teorema 1.41, cada substrato $S_k$ é uma subvariedade de codimensão $\frac{k(k+1)}{2}$ em W. Em particular, $S_1 \neq \emptyset$ levando a uma contradição.

Pelo teorema acima, acreditamos que a resposta para a seguinte questão é afirmativa.

**Pergunta:** Sejam $\phi_t : \mathrm{T}^*\mathrm{M}^3 \to \mathrm{T}^*\mathrm{M}^3$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli, $\Sigma_e$ um nível de energia regular e $\mathrm{W} \subset \Sigma_e$ uma subvariedade Lagrangiana, compacta, conexa e de classe $C^2$. Se a aplicação $\pi|_W : \mathrm{W} \to \mathrm{M}$ for localmente injetiva então, W é uma seção?

## 2.1 W não contém pontos conjugados

Ao longo dessa seção M representa uma variedade compacta, conexa e conexa sem bordo; $\phi_t : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ é um fluxo Hamiltoniano de Tonelli e $\Sigma_e \subset \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ um nível de energia regular, $\Phi_t : \Lambda(\Sigma_e) \to \Lambda(\Sigma_e)$ representa o fluxo induzido no Fibrado Grassmanniano Lagrangiano $\Lambda(\Sigma_e)$ e finalmente, $\mathrm{W} \subset \Sigma_e$ representa uma variedade Lagrangiana compacta conexa de classe

$C^1$. Sob estas condições gerais buscamos aqui a propriedade de gráfico no caso em que W não contenha pontos conjugados.

As proposições a seguir nos dão condições necessárias para que uma variedade Lagrangiana invariante e sem pontos conjugados seja uma seção.

**Proposição 2.3.** *Se* $\mathrm{K} \subset \Sigma_e$ *for um compacto invariante sem pontos conjugados então existe uma vizinhança* $\mathcal{U} \subset \Sigma_e$ *de* K *tal que a aplicação restrita* $\pi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathrm{M}$ *seja uma submersão.*

*Demonstração.* De fato, K não contém pontos conjugados então ao longo de qualquer órbita em K estão definidos os fibrados de Green $\mathbb{E}$ e $\mathbb{F}$. Logo temos duas Distribuições Lagrangianas $\phi_t$-invariantes $\mathbb{E}, \mathbb{F} : \mathrm{K} \to \Lambda(\Sigma_e)$. Pelo Teorema 1.54, temos $\mathbb{E}(\theta) \cup \mathbb{F}(\theta) \subset \mathrm{T}_\theta\Sigma_\mathrm{e}$ e $[\mathbb{E}(\theta) \cup \mathbb{F}(\theta)] \cap \mathbb{V}(\theta) = \{0\}$. Isto implica que a aplicação linear $d\pi(\theta) : \mathrm{T}_\theta\Sigma_\mathrm{e} \to \mathrm{T_q M}$ é sobrejetiva para cada $\theta \in \mathrm{K}$. Portanto, para todo $\theta \in \mathrm{K}$ existe uma vizinhaça $\mathcal{U}_\theta \subset \Sigma_e$ de $\theta$ tal que $\pi : \mathcal{U}_\theta \to \mathrm{M}$ seja uma submersão. Finalmente, tomamos $\mathcal{U} := \cup_{\theta \in K} \mathcal{U}_\theta$ como no enunciado. □

**Proposição 2.4.** *Seja* $\mathrm{K} \subset \Sigma_e$ *um compacto invariante sem pontos conjugados. Se* $\mathcal{L} : \mathrm{K} \to \Lambda(\Sigma_e)$ *for uma distribuição Lagrangiana contínua e* $\phi_t$*-invariante, então o conjunto*

$$Sing(\mathrm{K}) := \{\theta \in \mathrm{K} \ \mid \ \mathcal{L}(\theta) \cap \mathbb{V}(\theta) \neq \{0\}\},$$

*é um compacto com interior vazio em relação a topologia de* K*.*

*Demonstração.* Note que vale a seguinte igualdade:

$$\mathcal{L}(Sing(\mathrm{K})) = \mathcal{L}(\mathrm{K}) \cap \Lambda_V(\Sigma_e).$$

Como $\mathcal{L}$ é contínua e K, $\Lambda_V(\Sigma_e)$ são conjuntos compactos então $Sing(\mathrm{K})$ também deve ser compacto. Agora suponha que exista algum ponto interior

$\theta_0$. Isto signifca que podemos obter um aberto não vazio $\mathrm{O} \subset \mathrm{K}$ tal que

$$\mathrm{O} \subset \{\theta \in \mathrm{K} \ \mid \ \mathcal{L}(\theta) \cap \mathbb{V}(\theta) \neq \{0\}\}.$$

Então considere $\theta \in \mathrm{O}$. Segue que existe um número $b > 0$ de forma que $\{\phi_t(\theta) \ \mid \ -b \leq t \leq b\} \subset \mathrm{O}$. Pelo corolário 1.52, o segmento de órbita $\{\phi_t(\theta) \ \mid \ -b \leq t \leq b\}$ deveria conter uma infinidade de ponts conjugados o que levaria a uma contradição, uma vez que, por hipótese K não contém pontos conjugados. □

**Proposição 2.5.** *Se* $\mathrm{K} \subset \Sigma_e$ *for um compacto invariante sem pontos conjugados, então para todo* $T > 0$ *existe uma vizinhança* $\mathcal{U} \subset \Sigma_e$ *de* K*, tal que para cada* $\theta \in \mathcal{U}$*, o seguimento de órbita* $\{\phi_t(\theta) \ \mid \ t \in [-T, T]\}$ *não tem pontos conjugados.*

*Demonstração.* Vamos mostar que dado $T > 0$, então para cada $\alpha \in \mathrm{K}$ existe uma vizinhança com tal propriedade. Suponhamos então que isto fosse falso. Logo existiriam um $T_0 > 0$, um ponto $\alpha_0 \in \mathrm{K}$ e uma sequência $\{\alpha_m\} \subset \Sigma_e - \mathrm{K}$ convergindo para $\alpha_0$, de forma que para cada $m \in \mathbb{N}$ o segmento de órbita $\{\phi_t(\alpha_m) \ \mid \ t \in [-T_0, T_0]\}$ conteria pelo menos dois pontos conjugados. Isto significaria que existiriam instantes $s_m < t_m$ no intervalo $[-T_0, T_0]$ tais que:

$$d\phi_{t_m - s_m}(\phi_{s_m}(\alpha_m))(\mathbb{V}(\phi_{s_m}(\alpha_m))) \cap \mathbb{V}(\phi_{t_m}(\alpha_m)) \neq \{0\} \tag{2.1}$$

Como $s_m < t_m$ estão em $[-T_0, T_0]$, então a menos da escolha de subsequências poderíamos supor que $\{s_m\}$ converge para um $s_0 \in [-T_0, T_0]$ e $\{t_m\}$ converge para um $t_0 \in [-T_0, T_0]$, com $s_0 \leq t_0$.
Se tivéssemos $s_0 < t_0$ então tomando o limite $m \to \infty$ em (2.1), obteríamos

$$d\phi_{t_0 - s_0}(\phi_{s_0}(\alpha_0))(\mathbb{V}(\phi_{s_0}(\alpha_0))) \cap \mathbb{V}(\phi_{t_0}(\alpha_0)) \neq \{0\}.$$

Mas isto significaria que os pontos $\phi_{s_0}(\alpha_0)$ e $\phi_{t_0}(\alpha_0)$ seriam conjugados e como $\alpha_0 \in \mathrm{K}$ isto iria contradizer a hipotese de que K não contém pontos conjugados.

Por outro lado, se tivéssemos $s_0 = t_0$ então, como vale a desigualdade

$$\dim[d\phi_{t_m - s_m}(\phi_{s_m}(\alpha_m))(\mathbb{V}(\phi_{s_m}(\alpha_m))) \cap \mathbb{V}(\phi_{t_m}(\alpha_m))] \leq \dim \mathrm{M} - 1 \qquad (2.2)$$

tomaríamos de novo o limite $m \to \infty$ em (2.2), para obtermos

$$\dim \mathrm{M} = \dim[\mathbb{V}(\phi_{t_0}(\alpha_0)) \cap \mathbb{V}(\phi_{t_0}(\alpha_0))] \leq \dim \mathrm{M} - 1,$$

o que seria um absurdo. Portanto, em qualquer caso chegarímos a uma contradição. □

**Proposição 2.6.** *Sejam* $\mathcal{U} \subset \Sigma_e$ *um conjunto aberto tal que cada ponto* $\alpha \in \mathcal{U}$*, seja conjugado a no máximo um número finito de pontos da semi-órbita* $\{\phi_t(\alpha)| \quad t > 0\}$ *e* $\mathrm{D} \subset \mathcal{U}$ *um conjunto* $\phi_t$*-invariante. Se* $\mathrm{E} : \mathrm{D} \to \Lambda(\Sigma_e)$ *for uma distribuição Lagrangiana, contínua e* $d\phi_t$*-invariante, então* $\mathrm{E}(\theta) \cap \mathbb{V}(\theta) = \{0\} \quad \forall \theta \in \mathrm{D}$.

Na demonstração desse resultado vamos precisar dos seguintes lemas.

**Lema 2.7.** *Sejam* N *uma variedade compacta conexa sem bordo e* $X \in \mathfrak{X}^1(\mathrm{N})$*. Se* $\mathrm{S} \subset \mathrm{N}$ *for uma subvariedade codimensão um e transversal a* X*, então para qualquer* $q \in \mathrm{S}$ *existem, uma caixa de fluxo* $\mathcal{B}$ *centrada no ponto* $q$ *e um* $r_0 > 0$*, tais que para todo ponto* $x \in \mathcal{B}$ *existe um instante* $t_0 \in (-r_0, r_0)$ *de forma que* $\Phi^X_{t_0}(x) \in \mathrm{S} \cap \mathcal{B}$.

Este lema é uma consequência imediata do Teorema do Fluxo Tubular(também conhecido como Teorema da Caixa de Fluxo).

**Lema 2.8.** *O fluxo* $\Phi_t : \Lambda(\Sigma_e) \to \Lambda(\Sigma_e)$ *preserva uma medida de probabilidade* $\nu$*, a qual é positiva em abertos não vazio.*

*Demonstração.* Primeiramente note que pelo Teorema 1.38, vale a seguinte relação:

$$\phi_t \circ \mathbb{P} = \mathbb{P} \circ \Phi_t.$$

Além disso, o fluxo restrito $\phi_t : \Sigma_e \to \Sigma_e$ preserva a medida de Liouville, aqui denotada por $\mu$, a qual é positiva em abertos não vazio. Assim, dado um Boreliano $B \subset \Lambda(\Sigma_e)$, defina $\nu(B) := \mu(\mathbb{P}(B))$. Então, $\nu$ define uma medida de probabilidade em $\Lambda(\Sigma_e)$. Vamos mostrar que ela é $\Phi_t$-invariante. De fato, temos que:

$$\nu(\Phi_{-t}(B)) = \mu(\mathbb{P} \circ \Phi_{-t}(B)) = \mu(\phi_{-t} \circ \mathbb{P}(B)) = \mu(\mathbb{P}(B)) = \nu(B), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Agora, se $B \subset \Lambda$ for um aberto não vazio então, como $\mathbb{P} : \Lambda \to \Sigma_e$ é uma submersão, o conjunto $\mathbb{P}(B)$ não vazio e aberto em $\Sigma_e$. Por isto, $\nu(B) = \mu(\mathbb{P}(B)) > 0$. $\square$

**Demonstração da Proposição 2.6**

Suponha que exista um ponto $\theta_0 \in \mathrm{D}$ tal que $\mathrm{E}(\theta_0) \cap \mathbb{V}(\theta_0) \neq \{0\}$. Então temos $\mathrm{E}(\theta_0) \in \Lambda^k(\Sigma_e)$. Pelo Teorema 1.37 temos que:

$$\Lambda^k(\Sigma_e) \subset \Lambda_V(\Sigma_e) = \overline{\Lambda^1(\Sigma_e)}.$$

Por isto, existe uma sequência de pontos $F_m \in \Lambda^1(\Sigma_e)$ convergindo para $E(\theta_0)$. Pelo Teorema 1.37, $\Lambda^1(\Sigma_e)$ é uma subvariedade de codimensão 1 em $\Lambda(\Sigma_e)$ e, pelo Teorema 1.39, ela é transversal ao campo de vetores $\mathbb{X}|_{\Lambda(\Sigma_e)}$. Assim, para cada $m$ podemos aplicar o Lema 2.7, para obter uma caixa de fluxo $\mathcal{B}_m$ centrada no ponto $F_m$ e um número $r_m > 0$ tais que, para cada ponto $Z \in \mathcal{B}_m$, existe um instante $t_m \in (-r_m, r_m)$ de forma que $\Phi_{t_m}(Z) \in$

$\Lambda^1(\Sigma_e)$. Agora, pelo Lema 2.8, junto com o Teorema de Recorrência de Poincare, existe uma sequência $F_{m_j} \in \Lambda(\Sigma_e)$ de pontos recorrentes tais que $F_{m_j} \longrightarrow F_m$. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $F_{m_j} \in \mathcal{B}_m, \ \forall j \in \mathbb{N}$. Como temos $F_m \longrightarrow E(\theta_0)$, pode-se escolher uma subsequência $\{F_l\}_{l=1}^{\infty}$ da sequência $\{F_{m_j}\}_{m,j}^{\infty}$ e satisfazendo $F_l \longrightarrow E(\theta_0)$. Uma vez que $F_l$ é um ponto recorrente, toda a sua órbita $t \mapsto \Phi_t(F_l)$ é recorrente. Segue que para cada $l \in \mathbb{N}$ temos:

$$Card\{t \in \mathbb{R} \ \ | \ \ \Phi_t(F_l) \in \mathcal{B}_l \cap \Lambda^1(\Sigma_e)\} = \infty.$$

Assim, se $\alpha_l := \mathbb{P}(F_l)$ então, pelo corolário 1.52, $\alpha_l$ tem uma infinidade de pontos conjugados na semi-órbita $\{\phi_t(\alpha_l) \ \ | \ \ t \geq 0\}$.
Por outro lado, como a projeção $\mathbb{P} : \Lambda = \Lambda(\Sigma_e) \to \Sigma_e$ é contínua, segue que a sequência $\{\alpha_l\}_{l=1}^{\infty}$ converge para o ponto $\mathbb{P}(E(\theta_0)) = \theta_0$. Isto implica que, para $l$ suficientemente grande $\alpha_l \in \mathcal{U}$, o que por hipótese significa que $\alpha_l$ tem no máximo um número finito de pontos conjugados na semi-órbita $\{\phi_t(\alpha_l) \ \ | \ \ t \geq 0\}$. Portanto, chegamos a uma contradição.

**Demonstração do Teorema A**

Pelo Teorema 1.45, basta mostrarmos que a aplicação restrita $\pi : \mathrm{W} \to \mathrm{M}$ é um difeomorfismo local. Assim, considere a aplicação de Gauss associada a W. Segue que $\mathcal{G} : \mathrm{W} \subset \mathcal{U} \to \Lambda(\Sigma_e)$ é uma distribuição Lagrangiana contínua $\phi_t$-invariante. Logo temos as condições para aplicar a proposição 2.6, para concluir que $\mathcal{G}(\theta) \cap \mathbb{V}(\theta) = \{0\}$ para todo $\theta \in \mathrm{W}$. Logo, pelo Teorema da Função Inversa, $\pi : \mathrm{W} \to \mathrm{M}$ é um difeomorfismo local como queríamos mostrar.

**Corolário 2.9.** *Seja $\mathcal{O} \subset \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ um conjunto aberto que não intersecta nenhum nível de energia singular. Se $\mathcal{O}$ for folheado por variedades Lagrangia-*

*nas compactas, conexas e invariantes então, toda folha sem pontos conjugados é um gráfico.*

**Corolário 2.10.** *Se $\Sigma_e$ for um nível de enrgia regular, suportando uma folheação por variedades Lagrangianas de classe $C^1$ então toda folha fechada é um gráfico.*

A partir de agora além da ausência de pontos conjugados vamos pedir que toda órbita do fluxo restrito a variedade Lagrangiana $W$ seja não errante.

**Proposição 2.11.** *Seja $\mathrm{K} \subset \Sigma_e$ um compacto invariante sem pontos conjugados e tal que $\Omega(\phi_t|_K) = \mathrm{K}$. Se $\mathcal{L} : \mathrm{K} \to \Lambda(\Sigma_e)$ for uma distribuição Lagrangiana, contínua e $\phi_t$-invariante, então o substrato*

$$S_1 := \{\theta \in \mathrm{K} \ \mid \ \dim[\mathcal{L}(\theta) \cap \mathbb{V}(\theta)] = 1\},$$

*é vazio.*

Na prova dessa proposição precisaremos do seguinte lema.

**Lema 2.12.** *Seja $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}^1(\mathrm{N})$ um campo de vetores não singular, com fluxo $\Phi_t : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ e $\mathrm{S} \subset \mathrm{N}$ uma seção transversal de $\mathrm{X}$. Se $\tilde{\mathrm{K}}$ for um compacto invariante tal que $\Omega(\Phi_t|\tilde{\mathrm{K}}) = \tilde{\mathrm{K}}$ e $\tilde{\mathrm{K}} \cap \mathrm{S} \neq \emptyset$. Então para cada $j \in \mathbb{N}$ existe um $q_j \in \tilde{\mathrm{K}}$ tal que*

$$Card\{t \in \mathbb{R} \ \mid \ \Phi_t(q_j) \in \mathrm{S}\} > j.$$

*Demonstração.* Nós fixamos $j \in \mathbb{N}$ e um ponto $x_0 \in \tilde{\mathrm{K}} \cap \mathrm{S}$. Pelo Lema 2.7, existem uma caixa de fluxo $\mathcal{B}$ centrada em $x_0$ e um $r_0 > 0$ tais que

$$\forall x \in \mathcal{B}, \exists t_0 \in (-r_0, r_0) \Rightarrow \varphi_{t_0}(x) \in \mathrm{S}. \tag{2.3}$$

Sejam $\mathcal{U}_1 := \mathcal{B} \cap \tilde{\mathrm{W}}$ e $n_1 := \min\{n \in \mathbb{N} \ \mid \ n > 2r_0\}$.
Como $\Omega(\Phi_t|\tilde{\mathrm{K}}) = \tilde{\mathrm{K}}$ existe um $t_1 > n_1$ tal que

$$\mathcal{U}_2 := \Phi_{t_1}(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{U}_1 \neq \emptyset. \tag{2.4}$$

**Afirmação:** Para todo ponto $x_2 \in \mathcal{U}_2$ sua órbita intersecta S em intervalos

$$(-t_1 - r_0, -t_1 + r_0) \;\; e \;\; (-r_0, r_0).$$

De fato, como $x_2 \in \mathcal{U}_2$ existe $x_1 \in \mathcal{U}_1$ tal que:

$$x_2 = \Phi_{t_1}(x_1). \tag{2.5}$$

Agora, aplique o Teorema da caixa de fluxo para obter $\delta_1, \delta_2 \in (-r_0, r_0)$ tal que : $z_i = \Phi_{\delta_i}(x_i) \in \mathrm{S}$ para $i = 1, 2$.
Por (2.5)temos que $z_1 = \Phi_{\delta_1}(x_1) = \Phi_{\delta_1 - t_1}(x_2)$ e a afirmação é verdadeira.
Se $j = 1$ tomamos $q_j = x_2$ e acabou. Caso contrário, considere $n_2 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > 2t_1\}$. Como $\Omega(\Phi_t|\tilde{\mathrm{K}}) = \tilde{\mathrm{K}}$ existe um $t_2 > n_2$ tal que

$$\mathcal{U}_3 := \Phi_{t_2}(\mathcal{U}_2) \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset. \tag{2.6}$$

**Afirmação 2:** Para cada ponto $x_3 \in \mathcal{U}_3$ sua órbita intersecta S nos intervalos

$$(-t_1 - t_2 - r_0, -t_1 - t_2 + r_0), (-t_2 - r_0, -t_2 + r_0) \;\; e \;\; (-r_0, r_0).$$

De fato, como $x_3 \in \mathcal{U}_3$ existe $y_2 \in \mathcal{U}_2$ tal que:

$$x_3 = \Phi_{t_2}(y_2) \tag{2.7}$$

e uma vez que $y_2 \in \mathcal{U}_2$, por (2.4) existe $y_1 \in \mathcal{U}_1$ tal que :

$$y_2 = \Phi_{t_1}(y_1) \tag{2.8}$$

Aplicamos o Teorema da Caixa de Fluxo para obter $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in (-r_0, r_0)$ tais que:

$$u_3 := \Phi_{\rho_3}(x_3), u_2 := \Phi_{\rho_2}(y_2), u_1 := \Phi_{\rho_1}(y_1) \in \mathrm{S}.$$

Por (2.7) e (2.8) concluimos que

$$u_3 := \Phi_{\rho_3}(x_3), u_2 = \Phi_{\rho_2 - t_2}(x_3) \;\; e \;\; u_1 = \Phi_{\rho_1 - t_1 - t_2}(x_3).$$

Isto mostra que a afirmação é verdadeira.

Se $j = 2$ tomamos $q_j = x_3$ e acabou. Caso contrário tomamos $n_3 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > 2t_2\}$. Já que $\Omega(\Phi_t|\tilde{\mathrm{K}}) = \tilde{\mathrm{K}}$ então existe um $t_3 > n_3$ tal que

$$\mathcal{U}_4 := \Phi_{t_3}(\mathcal{U}_3) \cap \mathcal{U}_3 \neq \emptyset. \tag{2.9}$$

**Afirmação 3:** Para qualquer ponto $x_4 \in \mathcal{U}_4$ sua órbita intersecta S nos intervalos de tempo

$$(-t_1-t_2-t_3-r_0, -t_1-t_2-t_3+r_0), (-t_1-t_2-r_0, -t_1-t_2+r_0), (-t_2-r_0, -t_2+r_0) \text{ e }$$

$$(-r_0, r_0).$$

Como temos $x_4 \in \mathcal{U}_4$, então por (2.9) existe um ponto $b_3 \in \mathcal{U}_3$, tal que

$$x_4 = \Phi_{t_3}(b_3). \tag{2.10}$$

Por (2.6) deve existir um ponto $b_2 \in \mathcal{U}_2$ satisfazendo

$$b_3 = \Phi_{t_2}(b_2), \tag{2.11}$$

e por (2.4) temos um ponto $b_1 \in \mathcal{U}_1$ tal que

$$b_2 = \Phi_{t_1}(b_1). \tag{2.12}$$

Assim, pelo Teorema da Caixa de Fluxo, podemos escolher $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in (-r_0, r_0)$ tais que

$$v_4 := \Phi_{\beta_4}(x_4), v_3 := \Phi_{\beta_3}(b_3), v_2 := \Phi_{\beta_2}(b_2), v_1 := \Phi_{\beta_1}(b_1) \in \mathrm{S}.$$

Finalmente por by (2.10), (2.11) e (2.12) devemos ter:

$$v_4 := \Phi_{\beta_4}(x_4), v_3 := \Phi_{\beta_3-t_3}(x_4), v_2 := \Phi_{\beta_2-t_2-t_3}(x_4), v_1 := \Phi_{\beta_1-t_1-t_2-t_3}(x_4) \in \mathrm{S}.$$

Logo a afirmação 3 é verdadeira.

Agora, se $j = 3$ tomamos $q_j = x_4$ e acabou. Caso contrário continuamos com este processo e como $j \in \mathbb{N}$ existirá um momento em que atingiremos $j + 1$.

Portanto, isto finaliza a demonstração do lema. $\square$

**Demonstração da Proposição 2.11**

Seja $\tilde{\mathrm{K}} := \mathcal{L}(\mathrm{K}) \subset \Lambda(\Sigma_e)$ e considere $\Phi_t : \Lambda(\Sigma_e) \to \Lambda(\Sigma_e)$ o fluxo induzido no fibrado grassmanniano Lagrangiano. Como K é um compacto $\phi_t$-invariante, então $\tilde{\mathrm{K}}$ é um compacto $\Phi_t$-invariante.

**Afirmação 1:** $\Omega(\Phi_t|\tilde{\mathrm{K}}) = \tilde{\mathrm{K}}$.

De fato, suponha o contrario e considere um aberto não vazio $\tilde{O} \subset \tilde{\mathrm{K}} - \Omega(\Phi_t|\tilde{\mathrm{K}})$. Como $\mathcal{L}$ é contínua então $O := \mathcal{L}^{-1}(\tilde{O})$ é aberto não vazio em K. Pela hipótese, temos $\Omega(\varphi_t|_{\mathrm{K}}) = \mathrm{K}$. Assim, para cada $T > 0$ podemos obter um $t_0 > T$ de forma que

$$\varphi_{t_0}(O) \cap O \neq \emptyset.$$

Tomamos um ponto $\theta_0 \in O$ tal que $\varphi_{t_0}(\theta_0) \in O$. Segue que $\mathcal{L}(\theta_0) \in \tilde{O}$ e $\mathcal{L}(\varphi_{t_0}(\theta_0)) \in \tilde{O}$. Mas isto significa que $\mathcal{L}(\theta_0), \Phi_{t_0}(\mathcal{L}(\theta_0)) \in \tilde{O}$.

Por isto, para cada $T > 0$, podemos obter um $t_0 \geq T$ tal que $\Phi_{t_0}(\tilde{O}) \cap \tilde{O} \neq \emptyset$, que é uma contradição. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Agora, suponhamos que

$$S_1 := \{\theta \in \mathrm{K} \ \mid \ dim[\mathcal{L}(\theta) \cap \mathbb{V}(\theta)] = 1\} \neq \emptyset.$$

Isto equivale dizer que $\tilde{\mathrm{K}} \cap \Lambda_1(\Sigma_e) \neq \emptyset$, onde $\Lambda_1(\Sigma_e)$ é o estrato de codimensão um em $\Lambda_V(\Sigma_e)$. Pelo Teorema 1.37, $\Lambda_1(\Sigma_e)$ é uma subvariedade de $\Lambda(\Sigma_e)$ e pelo Teorema 1.39, ela é transversal ao campo $\mathbb{X} \in \mathfrak{X}^1(\Lambda(\Sigma_e))$ dado por: $\mathbb{X}(\mathrm{E}) := \dfrac{d\Phi_t(\mathrm{E})}{dt}|_{t=0}$. Assim, aplicamos o Lema 2.12 a $\mathbb{X}$, $\tilde{\mathrm{K}}$ e $\Lambda_1(\Sigma_e)$ para concluir que para cada $j \in \mathbb{N}$ podemos obter um ponto $\mathcal{L}(\alpha) \in \tilde{\mathrm{K}}$ tal que

$$Card\{t \in \mathbb{R} \ \mid \ \Phi_t(\mathcal{L}(\alpha)) \in \Lambda_1(\Sigma_e)\} > j. \tag{2.13}$$

Em particular para $j = \dim \mathrm{M}$ existe um tal ponto cuja óbrita $t \mapsto \Phi_t(\mathcal{L}(\alpha))$ intersectará $\Lambda_V(\Sigma_e)$ em pelo menos $j+1$ instantes distintos em um intervalo

$[T_1, T_2]$, onde $T_2 < 0$. Logo pleo Teorema 1.51, isto implica que a órbita correspondente $t \mapsto \Phi_t(\mathbb{V}(\alpha))$ intersectará $\Lambda_V(\Sigma_e)$ em pelo menos um instante neste mesmo intervalo. Isto significa que existe um instante $t_0 \neq 0$ tal que $d\phi_{t_0}(\alpha)(\mathbb{V}(\alpha)) \cap \mathbb{V}(\phi_{t_0}(\alpha)) \neq \{0\}$, o que é uma contradição, uma vez que, o conjunto K não contém pontos conjugados. Isto finaliza a prova.

**Corolário 2.13.** *Se* $\Omega(\phi_t|_{\mathrm{W}}) = \mathrm{W}$ *então* $\dim[\mathrm{T}_\theta \mathrm{W} \cap \mathbb{V}(\theta)] \neq 1$ *para todo* $\theta \in \mathrm{W}$.

*Demonstração.* Neste caso, considere a aplicação de Gauss $\mathcal{G} : \mathrm{W} \to \Lambda(\Sigma_e)$. Segue que $\mathcal{G}$ é uma distribuição Lagrangiana contínua. Assim, podemos aplicar a proposição anterior a essa distribuição e a conclusão segue-se imediatamente. □

**Demonstração do Teorema B**

Suponha que W não fosse um gráfico. Isto significaria que $\pi : \mathrm{W} \to \mathrm{M}$ não seria um difeomorfismo. Pelo Teorema 1.45 isto equivaleria dizer que não seria um difeomorfismo local. Logo teríamos que $Sing(\mathrm{W}) \neq \emptyset$. Mas como W é uma variedade Lagrangiana de classe $C^2$, contida num nível de energia regular de Hamiltoniano de Tonellli, segue que $Sing(\mathrm{W}) \neq \emptyset \Rightarrow S_1 \neq \emptyset$. Mas isto por sua vez, iria contradizer a proposição anterior. Portanto, W tem que ser um gráfico.

**Proposição 2.14.** *Sejam* $\Sigma_e \subset \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *um nível de energia regular e* $\mathrm{W} \subset \Sigma_2$ *uma variedade Lagrangiana, compacta, conexa de classe* $C^1$ *e sem pontos conjugados. Se* $\Omega(\phi_t|_{\mathrm{W}}) = \mathrm{W}$ *então* W *é um gráfico.*

Na prova dessa proposição vamos precisar do seguinte lema.

**Lema 2.15.** *Sejam* $(\mathrm{W}, d)$ *um espaço métrico compacto, conexo e seja* $f$ : $\mathrm{W} \to \mathrm{W}$ *um homeomorfismo. Se* $\Omega(f) = \mathrm{W}$ *então* $\overline{Rec(f)} = \mathrm{W}$.

*Demonstração.* Dados $k, n \in \mathbb{N}$ considere o conjunto:

$$A_{(k,n)} := \bigcup_{m \geq n} \{\theta \in \mathrm{W} \mid d(\theta, f^m(\theta) < \frac{1}{k}\}.$$

Como cada conjunto $\{\theta \in \mathrm{W} \mid d(\theta, f^m(\theta) < \frac{1}{k}\}$ é aberto, segue que $A_{(k,n)}$ também é aberto.

**Afirmação 1:** $Rec(f) = \bigcap_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} A_{(k,n)}$.

De fato, um ponto $\alpha$ está em $Rec(f)$ se, e somente se, para toda bola aberta $B(\alpha, \frac{1}{k})$ e todo $n \in \mathbb{N}$, existe um $m \geq n$ tal que $f^m(\alpha) \in B(\alpha, \frac{1}{k})$. Isto significa exatamente $\alpha \in \bigcap_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq 1} A_{(k,n)}$.

**Afirmação 2:** Se $\Omega(f) = \mathrm{W}$, então $\overline{A}_{(k_0,n_0)} = \mathrm{W}$.

De fato, suponha que exista um ponto $x \in W - \overline{A}_{(k_0,n_0)}$. Então existe uma bola aberta $B(x, \frac{1}{j_0}) \subset W - \overline{A}_{(k_0,n_0)}$. Assim, $B(x, \frac{1}{j_0}) \cap A_{(k_0,n_0)} = \emptyset$. Isto implica que para cada $m \geq n_0$, a bola aberta $B(x, \frac{1}{j_0})$ não intersecta o conjunto $\{\theta \in \mathrm{W} \mid d(\theta, f^m(\theta) < \frac{1}{k}\}$. Isto por sua vez, significa que o ponto $x$ é errante, o que contradiz a hipótese $\Omega(f) = \mathrm{W}$. Logo a afirmação é verdadeira.

Segue que $W$ é igual ao fecho da interseção de todos os conjuntos $A_{(k,n)}$. Pela afirmação um o lema segue. □

No a seguir, o argumento é devido a Carneiro-Ruggiero.

**Lema 2.16.** *As órbitas recorrentes do fluxo restrito* $\phi_t|_W$ *não intersectam o conjunto singular* $Sing(W)$.

*Demonstração.* Suponha que $\theta \in Sing(W)$ seja um ponto recorrente. Sem perda podemos supor que $\theta$ é o último ponto de sua órbita e pertecendo ao conjunto singular. Então os espaços $T_{\phi_t(\theta)}W$ são gráficos de uma família de operadores lineares simétricos $(0,+\infty) \ni t \mapsto S_\theta(t) : \mathbb{H}(\phi_t(\theta)) \to \mathbb{V}(\phi_t(\theta))$ , os quais são soluções da equação de Riccati. Pelo Teorema 1.33 existe uma constante $A > 0$, independente de $\theta$, tal que $\|S_\theta(t)\| \leq A$, para todo $t \geq 1$. Agora como $\theta$ é recorrente existe uma sequência $t_j \nearrow +\infty$ tal que $\phi_{t_j}(\theta) \longrightarrow \theta$. Assim, a sequência de operadores lineares $S_\theta(t)$ converge para um operador linear simétrico $S : \mathbb{H}(\theta) \to \mathbb{V}(\theta)$. Sendo $W$ de classe $C^1$, o espaço tangente é unico e depende de forma contínua do ponto de tangência. Isto implica que $T_\theta W$ é necessariamente o gráfico do operador $S$. Em particular, $T_\theta W \cap \mathbb{V}(\theta) = \{0\}$, o que nos leva a uma contradição, pois $\theta \in Sing(W)$. $\square$

**Demonstração da Proposição 2.16**

Pelos dois lemas acima, temos que

$$\overline{Rec(\phi_t|_W)} = W \text{ e } Rec(\phi_t|_W) \subset W - Sing(W).$$

Seque que para cada $\xi \in W$ existem sequências $\{\theta_k\} \subset Rec(\phi_t|_W)$ e $t_k \nearrow +\infty$ tais que $\theta_k, \phi_{t_k}(\theta_k) \longrightarrow \xi$. Consideremos a família de operadores simétricos $S_{\theta_k}(t_k) : \mathbb{H}(\phi_{t_k}(\theta_k)) \to \mathbb{V}(\phi_{t_k}(\theta_k))$. Pelo Teorema 1.33 temos que $\|S_{\theta_k}(t_k)\| \leq A$. Logo a sequência de operadores converge para um operador linear simétrico $E : \mathbb{H}(\xi) \to \mathbb{V}(\xi)$ cujo gráfico é necessariamente o subsespaço $T_\xi W$. Em particular, temos que $T_\xi W \cap \mathbb{V}(\xi) = \{0\}$. Portanto, $Sing(W) = \emptyset$. Pelo Teorema 1.45, segue que $W$ é uma seção, finalizando a prova.

Em [13], os autores introduziram o conceito de entropia polinomial, para um homeomorfismo num espaço métrico compacto conexo. Lá eles mostram que, se a entropia polinomial for menor que um então, todo ponto é recorrente. Além disso, mostram que se os iterados do homeomorfismo, formam uma família equicontínua de aplicações, então a entropia polinomial é menor que um. Deste modo, usando os resultados de [13] junto com a proposição 2.6, temos que vale os seguintes corolários.

**Corolário 2.17.** *Se $W$ não tem pontos conjugados e a entropia polinomial do fluxo restrito $\phi_t|_W$, for menor que* 1 *então,* W *é uma seção.*

**Corolário 2.18.** *Se $W$ não tem pontos conjugados e existe um $t_0 \neq 0$, tal que os iterados do difeomorfismo $\phi_{t_0} : \mathrm{W} \to \mathrm{W}$ formem uma família equicontínua então, $W$ é uma seção*

## 2.2 W é $c$-minimizante

Nesta seção buscamos entender a relação entre a propriedade de gráfico de uma subvariedade Lagrangiana e o conjunto de Mañê. Durante toda esta seção $\phi_t : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ é um fluxo Hamiltoniano de Tonelli e $\Sigma_e \subset \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ um nível de energia regular, $\mathrm{W} \subset \Sigma_e$ uma subvariedade Lagrangiana compacta conexa de classe $C^1$. Como mostra a proposição a seguir, uma condição necessaria para uma variedade Lagrangiana invariante seja uma seção, é que ela esteja contida em um conjunto de Mañé. Logo a pergunta natural a se fazer aqui é: Esta condição é suficiente?
Vamos buscar aqui condições para responder essa pergunta.

**Proposição 2.19.** *Se* W *for um gráfico Lagrangiano invariante, de classe de cohomologia $c$, então ele está contido no conjunto de Mañé $\tilde{\mathcal{N}}_c$.*

*Demonstração.* Como W é um gráfico Lagrangiano invariante, existe uma 1-forma $\omega$ de classe $C^1$ em M tal que $d\omega = 0$ e $\mathrm{W} = \{(\mathrm{q}, \omega(\mathrm{q})) \in \mathrm{T}^*\mathrm{M} \;\mid\; \mathrm{q} \in \mathrm{M}\}$. Seja $c = [\omega] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathbb{R})$ e L o Lagrangiano associado a H. Como L é Lagrangiano de Tonelli, existe um único campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^1(\mathrm{M})$ tal que

$\omega(q) = \dfrac{\partial L}{\partial v}(q, X(q))$. Considere o gráfico de X,

$$\mathcal{G}_X = \{(q, X(q)) \in \mathrm{TM} | q \in \mathrm{M}\}.$$

Então $\mathcal{G}_X$ é um conjunto invariante e está contindo num nível de energia $\Sigma_k = \mathcal{E}^{-1}(k)$ de L. Vamos mostrar que $\mathcal{G}_X \subset \tilde{\mathcal{N}_c}$. Primeiro, observe que:

$$\tilde{\mathcal{N}_c} = \big\{(q, v) \in TM| \ \ \gamma(t) := \pi \circ \phi_t(q, v) \ \ e \ \ curva \ \ c-minimizante \ \ global\big\}$$

Suponha que $\mathcal{G}_X \not\subseteq \tilde{\mathcal{N}_c}$. Então, existe um ponto $\theta \in \mathcal{G}_X$ tal que a solução de Euler-Lagrange $\gamma(t) = \pi \circ \phi_t(\theta)$ não é uma curva $c$-minimizante global para L. Logo, podemos encontrar números $a < b$ tais que o segmento de curva $\gamma|_{[a,b]}$ não é uma minimizante de Tonelli para o Lagrangiano $\mathrm{L}_\omega := \mathrm{L} - \omega$. Mas, pelo teorema de Tonelli, existe uma extremal $\lambda : [a, b] \to M$ tal que $\gamma(a) = \lambda(a)$, $\gamma(b) = \lambda(b)$ e

$$\int_a^b L(\lambda, \dot{\lambda})dt - \int_\lambda \omega < \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma})dt - \int_\gamma \omega \tag{2.14}$$

Como L é convexa ao longo das fibras de TM então

$$\mathrm{L}(\lambda(\mathrm{t}), \dot{\lambda}(\mathrm{t})) - \mathrm{L}(\lambda(\mathrm{t}), \mathrm{X}(\lambda(\mathrm{t}))) \geq \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{v}}(\lambda(\mathrm{t}), \mathrm{X}(\lambda(\mathrm{t})))(\dot{\lambda}(\mathrm{t}) - \mathrm{X}(\lambda(\mathrm{t}))) \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{L}(\lambda(\mathrm{t}), \dot{\lambda}(\mathrm{t})) \geq -\mathcal{E}(\lambda(\mathrm{t}), \mathrm{X}(\lambda(\mathrm{t}))) + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{v}}(\lambda(\mathrm{t}), \mathrm{X}(\lambda(\mathrm{t})))(\dot{\lambda}(\mathrm{t})) \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{L}(\lambda(\mathrm{t}), \dot{\lambda}(\mathrm{t})) + \mathcal{E}(\lambda(\mathrm{t}), \mathrm{X}(\lambda(\mathrm{t}))) \geq \omega(\lambda(\mathrm{t}))(\dot{\lambda}(\mathrm{t})) \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{L}(\lambda(\mathrm{t}), \dot{\lambda}(\mathrm{t})) + \mathrm{k} \geq \omega(\lambda(\mathrm{t}))(\dot{\lambda}(\mathrm{t})).$$

Assim, pela última desigualdade temos

$$\int_a^b L(\lambda, \dot{\lambda})dt + k(b - a) \geq \int_\lambda \omega \tag{2.15}$$

Usando (2.14) e (2.15) obtemos

$$0 < \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma})dt - \int_\gamma \omega + k(b - a). \tag{2.16}$$

Entretanto, temos que $k = \mathcal{E}(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma, \dot{\gamma})(\dot{\gamma}) - \mathrm{L}(\gamma, \dot{\gamma}) = \omega(\gamma)(\dot{\gamma}) - \mathrm{L}(\gamma, \dot{\gamma})$ o que implica em

$$0 = \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma})dt - \int_\gamma \omega + k(b-a) \tag{2.17}$$

De (2.16) e (2.17) chegamos a uma contradição. Portanto, $\mathcal{G}_X \subset \tilde{\mathcal{N}}_c$. □

**Corolário 2.20.** *Se* $\mathrm{W} \subset \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ *for um gráfico Lagrangiano contido no nível de energia* $\Sigma_e$*, então*

1. *Ele é um conjunto e-minimizante;*
2. *Ele não contem pontos conjugados;*
3. *O nível de energia satisfaz* $e \geq c_a(\mathrm{L}) = Min\{\alpha(c) \,|\, c \in H^1(\mathrm{M}, \mathbb{R})\}$*, onde* $\alpha$ *é a função alfa de Mather.*

Na demonstração do Teorema C, vamos precisar dos dois Lemas seguintes da topologia diferencial.

**Lema 2.21.** *Sejam* M *e* W *variedades quaisquer fechadas orientáveis de classe* $C^1$ *e mesma dimensão d. Então toda* $\mathrm{F} \in C^1(\mathrm{W}, \mathrm{M})$*, cujo grau seja não nulo, é sobrejetiva.*

*Demonstração.* De fato, suponha que exista uma tal F com $Grau(\mathrm{F}) \neq 0$, mas $\mathrm{F}(\mathrm{W}) \neq \mathrm{M}$. Segue que $A := \mathrm{M} - \mathrm{F}(\mathrm{W})$ é um aberto não vazio de M. Então escolhemos uma d-forma diferencial $\eta$ em M tal que $Supp(\eta) \subset A$ e $\int_M \eta \neq 0$. Segue que a d-forma pullback $\mathrm{F}^*\eta$ é identicamente nula. Da integração de formas diferencias sabemos que:

$$\int_W \mathrm{F}^*\eta = Grau(\mathrm{F}) \cdot \int_M \eta$$

Logo pela escolha da d-forma $\eta$ segue que devemos ter $Grau(\mathrm{F}) = 0$, o que leva a uma contradição. □

**Lema 2.22.** *Sejam* M *e* W *variedades quaisquer fechadas orientáveis de classe* $C^1$ *e mesma dimensão* $d$ *e* $\mathrm{F} \in C^1(\mathrm{W}, \mathrm{M})$. *Então, para todo valor regular* $q \in \mathrm{M}$ *tem-se* $Grau(\mathrm{F}) = \sum_{\theta \in \mathrm{F}^{-1}(q)} \chi(\theta)$, *onde* $\chi : \mathrm{F}^{-1}(q) \to \{-1, +1\}$ *é definida por:*

$$\chi(\theta) := \begin{cases} +1, se & \mathrm{JF}(\theta) > 0; \\ -1, se & \mathrm{JF}(\theta) < 0. \end{cases}$$

*Demonstração.* Nós fixamos $q \in \mathrm{M}$ um valor regular arbitrário. Por definição de valor regular e pelo Teorema da Função Inversa segue que existe uma vizinhança $V_q \subset \mathrm{M}$ de forma que $\mathrm{F}^{-1}(V_q)$ seja uma união finita e disjunta de abertos(os quais podem ser tomados como sendo conexos!) $A_1, A_2, ...., A_r \subset \mathrm{W}$ e tais que cada aplicação $\mathrm{F}|_{A_i} : A_i \to V_q$ seja um difeomorfismo. Deste modo a função $\chi : \mathrm{F}^{-1}(q) \to \{-1, +1\}$ pode ser estendida para todo o aberto $\mathrm{F}^{-1}(V_q)$ e é constante em cada aberto $A_i$. Agora tomemos uma $d$-forma diferencial $\eta$ em M, com $Supp(\eta) \subset V_q$ e $\int_{\mathrm{M}} \eta = \int_{V_q} \eta \neq 0$. Da integração de formas diferenciais sabemos que para cada $i = 1, 2, ..., r$ tem-se:

$$\int_{A_i} \mathrm{F}^* \eta = \chi(\theta_i) \cdot \int_{V_q} \eta,$$

onde $\theta_i$ é um ponto qualquer de $A_i$. Assim :

$$\int_{\mathrm{W}} \mathrm{F}^* \eta = \sum_{i=1}^{r} \int_{A_i} \mathrm{F}^* \eta = \left[ \sum_{i=1}^{r} \chi(\theta_i) \right] \cdot \int_{V_q} \eta = \left[ \sum_{i=1}^{r} \chi(\theta_i) \right] \cdot \int_{\mathrm{M}} \eta.$$

Portanto,

$$Grau(\mathrm{F}) \cdot \int_{\mathrm{M}} \eta = \int_{\mathrm{W}} \mathrm{F}^* \eta = \left[ \sum_{i=1}^{r} \chi(\theta_i) \right] \cdot \int_{\mathrm{M}} \eta,$$

donde obtemos que :

$$Grau(\mathrm{F}) = \sum_{i=1}^{r} \chi(\theta_i) = \sum_{\theta \in \mathrm{F}^{-1}(q)} \chi(\theta).$$

$\square$

**Demonstração do Teorema C:**

Como $\mathrm{W} \subset \tilde{\mathcal{N}}_c$ então $\Omega(\phi_t|_{\mathrm{W}}) \subset \Omega(\phi_t|_{\tilde{\mathcal{N}}_c})$ logo pelo Teorema 1.63, temos que $\Omega(\phi_t|_{\mathrm{W}}) \subset \tilde{\mathcal{A}}_c$. Em particular, $\overline{Rec(\phi_t|_W)} \subset \tilde{\mathcal{A}}_c$.

**Afirmação:** Existe um aberto $\mathcal{U} \subset \mathrm{M}$, contendo o compacto $\pi(\overline{Rec(\phi_t|_W)})$ tal que $Card(\pi^{-1}(q) \cap \mathrm{W}) = 1$ para todo ponto $q \in \mathcal{U}$.

De fato caso contrario existiria uma sequência $\{q_n\} \subset \mathrm{M}$ convergindo para um ponto $q_0 \in \pi(\overline{Rec(\phi_t|_W)})$ e tal que $Card(\pi^{-1}(q_n) \cap \mathrm{W}) \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomamos para cada $n$ dois pontos distintos $\theta_n, \xi_n \in \pi^{-1}(q_n) \cap \mathrm{W}$ e usando que $W$ é compacto podemos assumir que $\{\theta_n\}$ converge para um $\theta_0$ e $\{\xi_n\}$ converge para um $\xi_0$. da continuidade da projeção obtemos que $\pi(\theta_0) = \pi(\xi_0) = q_0 \in \pi(\overline{Rec(\phi_t|_W)}) \subset \pi(\tilde{\mathcal{A}}_c)$. Logo, pelo Teorema 1.64, temos $\theta_0 = \xi_0 \in \overline{Rec(\phi_t|_W)}$. Observe agora que, como $\mathrm{W} \subset \tilde{\mathcal{N}}_c$ então, pelo Teorema 1.50, $W$ não contém pontos conjugados. Assim pelo lema 2.18 devemos ter que :

$$\overline{Rec(\phi_t|_W)} \cap Sing(W) = \emptyset.$$

Isto implica que $\pi|_W$ é um difeomorfismo numa vizinhança do ponto $\theta_0 = \xi_0$. Isto nos leva a uma contradição pois temos $\pi(\theta_n) = \pi(\xi_n) = q_n$ e $\theta_n, \xi_n \longrightarrow \theta_0$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

A afirmação acima, junto com o fato de $\overline{Rec(\phi_t|_W)} \cap Sing(W) = \emptyset$, mais o Lemma 2.21, implicam que $\pi|_W$ tem de fato grau igual a 1. Do Lema 2.20, segue a sobrejetividade.

Para o lema a seguir, consideremos o potencial de Mañé

$$\Phi_{\eta,\alpha(c)}(x, y) := \inf_{T>0} \min_{\gamma \in C_T(x,y)} A_{L_\eta + \alpha(c)}(\gamma).$$

Para simplificar notações vamos escrever $\Phi$ e $A$ para o potencial e para a Ação Lagrangiana respectivamente. Denotemos $B_0 = \max\{L_\eta(x, v) +$

$\alpha(c) \mid \|v\|_x = 1\}$. Neste caso, a função potencial satisfaz algumas propriedades. Citamos duas que usaremos aqui.

- $\Phi(x,z) \leq \Phi(x,y) + \Phi(y,z)$;
- $\Phi(x,y) \leq B_0 d_g(x,y)$.

**Lema 2.23.** ***(Lema de Quase Cruzamento )*** *Sejam* $\mathrm{L} : \mathrm{TM} \to \mathbb{R}$ *um Lagrangiano de Tonelli, com fluxo* $\phi_t : \mathrm{TM} \to \mathrm{TM}$, $c := [\eta] \in H^1(M,\mathbb{R})$ *e* $\Sigma_{\alpha(c)} \subset \mathrm{TM}$ *o correspondente nível de energia. Seja* $\xi \in \Sigma_{\alpha(c)}$ *tal que a solução E-L* $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to \mathrm{M}$, *seja c-minimizante. Dados* $a, b, K > 0$, *existem constantes* $\delta_0, C_0 > 0$ *com as seguintes propriedades:*
*Se* $\theta \in \Sigma_{\alpha(c)}$ *é tal que a solução E-L* $\gamma_\theta : \mathbb{R} \to \mathrm{M}$ *seja também c-minimizante e* $d_g(\gamma_\theta(a), \gamma_\xi(0)) < \delta_0$, $d_G(\phi_a(\theta), \xi) \geq K$. *Então* $d_g(\gamma_\theta(s), \gamma_\xi(t)) \geq C_0$, $\forall s \geq a, \forall t \geq b$.

***Demonstração:*** *Começamos com a seguinte afirmação.*
*Afirmação: Dados* $a, b, K > 0$, *existem* $\delta_0 > 0$ *e* $Q_0 > 2B_0\delta_0$, *tais que se* $\theta \in \Sigma_{\alpha(c)}$, $d_G(\phi_a(\theta), \xi) \geq K$ *e* $d_g(\gamma_\theta(a), \gamma_\xi(0)) < \delta_0$ *então:*

$$A(\gamma_\theta|_{[0,a]} * \lambda * \gamma_\xi|_{[0,b]}) - \Phi(\gamma_\theta(0), \gamma_\xi(b)) > Q_0,$$

*onde* $\lambda$ *é a geodésica minimizante ligando o ponto* $\gamma_\theta(a)$ *ao ponto* $\gamma_\xi(0)$.
*De fato, assuma que não seja esse o caso. Então existem constantes positivas* $a_0, b_0, K_0$, *tais que para qualquer* $n \in \mathbb{N}$, *existe um ponto* $\theta_n \in \Sigma_{\alpha(c)}$ *satisfazendo:*

$$d_G(\phi_{a_0}(\theta_n), \xi) \geq K_0, \quad d_g(\gamma_{\theta_n}(a_0), \gamma_\xi(0)) < \frac{1}{n} \quad e$$

$$A(\gamma_{\theta_n}|_{[0,a_0]} * \lambda_n * \gamma_\xi|_{[0,b_0]}) - \Phi(\gamma_{\theta_n}(0), \gamma_\xi(b_0)) \leq \frac{3B_0}{n}.$$

*Passando o limite* $n \longrightarrow +\infty$, *obtemos* $d_g(\gamma_{\theta_n}(a_0), \gamma_\xi(0)) \longrightarrow 0$. *Como* $\theta_n, \xi \in \Sigma_{\alpha(c)}$ *podemos supor que* $\{\theta_n\}$ *converge para um ponto* $\theta_0 \in \Sigma_{\alpha(c)}$. *Assim,* $\gamma_{\theta_0}(a_0) = \gamma_\xi(0)$ *e* $d_G(\phi_{a_0}(\theta_0), \xi) \geq K_0 > 0$. *Por outro lado temos:*

$$A(\gamma_{\theta_n}|_{[0,a_0]} * \lambda_n * \gamma_\xi|_{[0,b_0]}) \longrightarrow A(\gamma_{\theta_0}|_{[0,a_0]} * \gamma_\xi|_{[0,b_0]});$$

$$\Phi(\gamma_{\theta_n}(0), \gamma_\xi(b_0)) \longrightarrow \Phi(\gamma_{\theta_0}(0), \gamma_\xi(b_0));$$

$$A(\gamma_{\theta_n}|_{[0,a_0]} * \lambda_n * \gamma_\xi|_{[0,b_0]}) - \Phi(\gamma_{\theta_n}(0), \gamma_\xi(b_0)) \longrightarrow 0.$$

*Logo* $A(\gamma_{\theta_0}|_{[0,a_0]} * \gamma_\xi|_{[0,b_0]}) = \Phi(\gamma_{\theta_0}(0), \gamma_\xi(b_0))$. *Isto significa que a curva* $\gamma_{\theta_0}|_{[0,a_0]} * \gamma_\xi|_{[0,b_0]}$ *é minimizante. Mas curvas minimizantes são diferenciáveis na mesma classe que a função Lagrangiana* L. *Segue deste fato que:*

$$\gamma_{\theta_0}(a_0) = \gamma_\xi(0) \quad e \quad \phi_{a_0}(\theta_0) = \xi.$$

*Isto nos leva a uma contradição pois* $d_G(\phi_{a_0}(\theta_0), \xi) \geq K_0 > 0$. *Logo a afirmação é verdadeira.*

*Vamos agora a provar do lema. Dados* $a, b, K > 0$, *sejam* $\theta, \xi$ *como no enunciado do Lema. Fixemos as constantes* $\delta_0, Q_0 > 0$ *dadas pela afirmação,* $s \geq a$ *e* $t \geq b$.

$$\Phi(\gamma_\theta(0), \gamma_\theta(s)) \leq$$

$$\Phi(\gamma_\theta(0), \gamma_\xi(b)) + \Phi(\gamma_\xi(b), \gamma_\xi(t)) + \Phi(\gamma_\xi(t), \gamma_\theta(s)) \leq$$

$$\mathcal{A}(\gamma_\theta|_{[0,a]}) + B_0\ell(\lambda) - Q_0 + \mathcal{A}(\gamma_\xi|_{[0,b]}) + \Phi(\gamma_\xi(b), \gamma_\xi(t)) + \Phi(\gamma_\xi(t), \gamma_\theta(s)) =$$

$$\mathcal{A}(\gamma_\theta|_{[0,a]}) + B_0\ell(\lambda) - Q_0 + \mathcal{A}(\gamma_\xi|_{[0,b]}) + \mathcal{A}(\gamma_\xi|_{[b,t]}) + \Phi(\gamma_\xi(t), \gamma_\theta(s)) =$$

$$\mathcal{A}(\gamma_\theta|_{[0,a]}) + B_0\ell(\lambda) - Q_0 + \Phi(\gamma_\xi(0), \gamma_\xi(t)) + \Phi(\gamma_\xi(t), \gamma_\theta(s)) \leq$$

$$\mathcal{A}(\gamma_\theta|_{[0,a]}) + B_0\ell(\lambda) - Q_0 + \Phi(\gamma_\xi(0), \gamma_\theta(a)) + \Phi(\gamma_\theta(a), \gamma_\theta(s)) + \Phi(\gamma_\theta(s), \gamma_\xi(t)) + \Phi(\gamma_\xi(t), \gamma_\theta(s)) =$$

$$\mathcal{A}(\gamma_\theta|_{[0,a]})+B_0\ell(\lambda)-Q_0+\Phi(\gamma_\xi(0),\gamma_\theta(a))+\mathcal{A}(\gamma_\theta|_{[a,s]})+\Phi(\gamma_\theta(s),\gamma_\xi(t))+\Phi(\gamma_\xi(t),\gamma_\theta(s)) =$$

$$\mathcal{A}(\gamma_\theta|_{[0,s]})+B_0\ell(\lambda)-Q_0+\Phi(\gamma_\xi(0),\gamma_\theta(a))+\Phi(\gamma_\theta(s),\gamma_\xi(t))+\Phi(\gamma_\xi(t),\gamma_\theta(s)) \leq$$

$$\mathcal{A}(\gamma_\theta|_{[0,s]})+B_0\ell(\lambda)-Q_0+B_0\ell(\lambda)+\Phi(\gamma_\theta(s),\gamma_\xi(t))+\Phi(\gamma_\xi(t),\gamma_\theta(s)) =$$

$$\Phi(\gamma_\theta(0),\gamma_\theta(s))+2B_0\ell(\lambda)-Q_0+\Phi(\gamma_\theta(s),\gamma_\xi(t))+\Phi(\gamma_\xi(t),\gamma_\theta(s)).$$

*Logo, temos que:*

$Q_0-2B_0\ell(\lambda) \leq \Phi(\gamma_\theta(s),\gamma_\xi(t))+\Phi(\gamma_\xi(t),\gamma_\theta(s)) \leq B_0 d_g(\gamma_\theta(s),\gamma_\xi(t))+B_0 d_g(\gamma_\xi(t),\gamma_\theta(s)) \Rightarrow$
$Q_0-2B_0\ell(\lambda) \leq 2B_0 d_g(\gamma_\theta(s),\gamma_\xi(t))$.

*Como o comprimento $\ell(\lambda)$, da geodésica $\lambda$, satisfaz $\ell(\lambda) < \delta_0$ então:*

$0 < Q_0-2B_0\delta_0 < Q_0-2B_0\ell(\lambda) \leq 2B_0 d_g(\gamma_\theta(s),\gamma_\xi(t))$.

*Assim,* $d_g(\gamma_\theta(s),\gamma_\xi(t)) \geq \dfrac{Q_0-2B_0\delta_0}{2B_0} > 0$, *o que finaliza a prova do lema.*

## Demonstração do Teorema D

Começamos com a seguinte afirmação.

**Afirmação 1:** A aplicação $\pi : W \to M$ é injetiva.

De fato, assuma que existam dois pontos distintos $\xi, \alpha \in W$ com $\pi(\alpha) = \pi(\xi)$. Como $\Omega(\phi_t|_W) \subset \Omega(\phi_t|_{\mathcal{N}^c})$, então pelos Teoremas 1.63 e 1.64 temos que, $\xi, \alpha$ são pontos com órbitas errantes. Sejam $K := \dfrac{D_G(\alpha,\xi)}{2}$, $a, b > 0$ e denotemos $\theta = \phi_{-a}(\alpha)$. Considere as constantes $\delta_0, C_0 > 0$ dadas, em função de $K, a$ e $b$, pelo Lema de Quase Cruzamento. Como $d_g(\gamma_\theta(a),\gamma_\xi(0)) = d_g(\pi(\alpha),\pi(\xi)) = 0 < \delta_0$ e $d_G(\phi_a(\theta),\xi) = d_G(\alpha,\xi) > K$, então temos que $d_g(\gamma_\theta(s),\gamma_\xi(t)) \geq C_0$, para quaisquer $s \geq a$ e $t \geq b$.

Das hipóteses temos que $Lim^+(\alpha) \cap Lim^+(\xi) \neq \emptyset$ ou $Lim^-(\alpha) \cap Lim^-(\xi) \neq \emptyset$.

Sem perda, suponhamos $Lim^+(\alpha) \cap Lim^+(\xi) \neq \emptyset$. Logo, existem um ponto $\sigma \in W$ e sequências $t_n, s_n \nearrow +\infty$ tais que $\phi_{t_n}(\xi), \phi_{s_n}(\alpha) \longrightarrow \sigma$. Segue que $\phi_{a+s_n}(\theta) = \phi_{s_n}(\phi_a(\theta)) \longrightarrow \phi_a(\sigma)$ e $\phi_{a+t_n}(\xi) = \phi_a(\phi_{s_n}(\xi)) \longrightarrow \phi_a(\sigma)$. Da continuidade da projeção segue que $\gamma_\theta(s_n + a), \gamma_\xi(t_n + a) \longrightarrow \pi(\phi_a(\sigma))$, ou seja $\lim_{n\to\infty} d_g(\gamma_\theta(s_n + a), \gamma_\xi(t_n + a)) = 0$. Isto nos dá uma contradição. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Pelo corolário 1.7 segue que $\pi : W \to M$ é de fato um homeomorfismo. Assim, existe uma 1-forma contínua $\eta$ em $M$ tal que $W = \{(x, \eta_x) | \ x \in M\}$. Sendo $W$ subvariedade Lagrangiana de classe $C^1$, segue que $\eta$ é $C^1$.

## 2.3 Gráficos Invariantes pelo Fluxo Geodésico

Nesta seção apresentaremos o conceito de geodésica minimizante e em seguida damos a definição de variedade Lagrangiana minimizante. O objetivo é provar que tais variedades são na verdade gráficos Lagrangianos invariantes pelo fluxo geodésico. Ao longo dessa seção, $(\mathrm{M}, g)$ é uma variedade Riemanniana suave, compacta, conexa e sem bordo e $(\tilde{\mathrm{M}}, \tilde{g})$, representa o recobrimento universal munido com a métrica Riemanniana obtida levantando a métrica $g$, via a projeção recobrimento $\mathrm{P} : \tilde{\mathrm{M}} \to \mathrm{M}$. Denotaremos por $d_g$ e $\tilde{d}_{\tilde{g}}$ as funções distância, induzidas pelas métricas $g$ e $\tilde{g}$ respectivamente. Toda geodésica será assumida estar parametrizada por comprimento de arco. Representaremos por $\mathrm{T_1M}$ o fibrado tangente unitario de $(\mathrm{M}, g)$ e por $\phi_t : \mathrm{T_1M} \to \mathrm{T_1M}$ o fluxo geodésico correspondente.

**Definição 2.24.** Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{M}$ uma geodésica. Diz-se que $\gamma$ é minimizante, quando qualquer levantamento $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \tilde{\mathrm{M}}$ dela tiver a seguinte propriedade.

$$d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}(b), \tilde{\gamma}(a)) = b - a, \quad \forall b > a,$$

onde $d_{\tilde{g}}$ é a distância induzida em $\tilde{\mathrm{M}}$ por $\tilde{g}$.

Esta classe especial de geodésicas é estudada desde os tempos de Morse, o qual as chamava de geodésicas classe A.

**Definição 2.25.** Dizemos que um conjunto invariante $\mathrm{W} \subset \mathrm{T}_1\mathrm{M}$ é minimizante quando para todo $\theta \in \mathrm{W}$, a geodésica $\gamma(t) = \pi(\phi_t(\theta))$ for minimizante.

Uma consequência da propriedade de minimizante é a seguinte:

**Proposição 2.26.** *Se* $\mathrm{W} \subset \mathrm{T}_1\mathrm{M}$ *for um compacto invariante minimizante então toda medida de probabilidade invariante e suportada em W é uma medida c-minimizante para alguma classe de cohomologia* $c \in \mathrm{H}^1(M, \mathbb{R})$.

*Demonstração.* Isto segue de [50 , Proposição 2 e a observação subsequente]. $\square$

*Observação* 2.27. O Lema a seguir trata do cruzamento de geodésicas minimizantes. Por [30, corollary 2], dado um Lagrangiano de Tonelli L, em um nível de energia acima do valor crítico estrito $c_0(\mathrm{L}) := \min_{c \in H^1(M,\mathbb{R})} \alpha(c)$, o fluxo de Euler-Lagrange é uma reparametrização, de um fluxo geodésico, para uma métrica Finsler em $M$, apropriadamente escolhida. Deste modo, o lema a seguir continua válido, para esses níveis de energia.

**Lema 2.28.** *Seja* $\tilde{\xi} \in \mathrm{T}_1\tilde{\mathrm{M}}$ *tal que a geodésica* $\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}} : \mathbb{R} \to \tilde{\mathrm{M}}$ *, com* $(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0), \dot{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\xi}}(0)) = \tilde{\xi}$ *seja minimizante global. Dados* $a, b, K > 0$ *existem* $\delta_0 > 0$ *e uma constante* $C_0 > 0$ *com a seguinte propriedade:*
*Se* $\tilde{\theta} \in \mathrm{T}_1\tilde{\mathrm{M}}$ *é tal que a geodésica* $\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}} : \mathbb{R} \to \tilde{\mathrm{M}}$ *também seja minimizante global e* $d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(a), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0)) < \delta_0$, $d_{\tilde{G}}(\tilde{\phi}_a(\tilde{\theta}), \tilde{\xi}) \geq K$ *então :*
$d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t)) \geq C_0$, $\forall s \geq a$, $\forall t \geq b$.

*Demonstração.* Começamos com a seguinte afirmação.

**Afirmação:** Dados $a, b, K > 0$, existem $\delta_0 > 0$, tal que se $\tilde{\theta} \in \mathrm{T_1\tilde{M}}$, $d_{\tilde{G}}(\tilde{\phi}_a(\tilde{\theta}), \tilde{\xi}) \geq K$ e $d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(a), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0)) < \delta_0$ então:

$$\ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}|_{[0,a]} * \tilde{\lambda} * \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}|_{[0,b]}) - d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(b)) > 3\delta_0,$$

onde $\tilde{\lambda}$ é a geodésica minimizante ligando o ponto $\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(a)$ ao ponto $\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0)$.
De fato, se não fosse esse o caso existiriam constantes $a_0, b_0, K_0 > 0$ tais que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe um ponto $\tilde{\theta}_n \in \mathrm{T_1\tilde{M}}$ satisfazendo:

$$d_{\tilde{G}}(\tilde{\phi}_{a_0}(\tilde{\theta}_n), \tilde{\xi}) \geq K_0, d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}_n}(a_0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0)) < \frac{1}{n} \quad e$$

$$\ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta_n}}|_{[0,a_0]} * \tilde{\lambda}_n * \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}|_{[0,b_0]}) - d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta_n}}(0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(b_0)) \leq \frac{3}{n}.$$

Passando o limite $n \longrightarrow +\infty$, obtemos $d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}_n}(a_0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0)) \longrightarrow 0$. Isto junto com o fato de $\tilde{\theta_n}, \tilde{\xi} \in \mathrm{T_1\tilde{M}}$, mais a continuidade do fluxo geodésico $\tilde{\phi}_t$ nos permite assumir, sem perdas, que $\{\tilde{\theta_n}\}$ converge para um ponto $\tilde{\theta_0} \in \mathrm{T_1\tilde{M}}$. Assim, $\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta_0}}(a_0) = \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0)$ e $d_{\tilde{G}}(\tilde{\phi}_{a_0}(\tilde{\theta}_0), \tilde{\xi}) \geq K_0$. Por outro lado temos:

$$\ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta_n}}|_{[0,a_0]} * \tilde{\lambda}_n * \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}|_{[0,b_0]}) \longrightarrow \ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta_0}}|_{[0,a_0]} * \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}|_{[0,b_0]});$$

$$d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta_n}}(0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(b_0)) \longrightarrow d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta_0}}(0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(b_0));$$

$$\ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta_n}}|_{[0,a_0]} * \tilde{\lambda}_n * \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}|_{[0,b_0]}) - d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta_n}}(0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(b_0)) \longrightarrow 0.$$

Logo $\ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta_0}}|_{[0,a_0]} * \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}|_{[0,b_0]}) = d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta_0}}(0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(b_0))$. Isto significa que a curva $\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta_0}}|_{[0,a_0]} * \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}|_{[0,b_0]}$ é minimizante. Assim, ela deve ser uma geodésica. Em particular é diferenciável. Segue deste fato que:

$$\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta_0}}(a_0) = \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0) \quad e \quad \tilde{\phi}_{a_0}(\tilde{\theta_0}) = \tilde{\xi}.$$

Isto nos leva a uma contradição pois $d_{\tilde{G}}(\tilde{\phi}_{a_0}(\tilde{\theta}_0), \tilde{\xi}) \geq K_0 > 0$.

Vamos agora a prova do lema. Dados $a, b, K > 0$, sejam $\theta, \xi$ como no enunciado do Lema. Fixemos a constante $\delta_0 > 0$ dada pela afirmação, $s \geq a$ e $t \geq b$.

$$d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s)) \leq$$

$$d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(b)) + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(b), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t)) + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t), \tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s)) \leq$$

$$\ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}|_{[0,a]}) + \ell(\tilde{\lambda}) - 3\delta_0 + \ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}|_{[0,b]}) + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(b), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t)) + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t), \tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s)) =$$

$$\ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}|_{[0,a]}) + \ell(\tilde{\lambda}) - 3\delta_0 + \ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}|_{[0,b]}) + \ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}|_{[b,t]}) + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t), \tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s)) =$$

$$\ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}|_{[0,a]}) + \ell(\tilde{\lambda}) - 3\delta_0 + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t)) + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t), \tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s)) \leq$$

$$\ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}|_{[0,a]}) + \ell(\tilde{\lambda}) - 3\delta_0 + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(a)) + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(a), \tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s)) + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t)) + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t), \tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s)) =$$

$$\ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}|_{[0,a]}) + \ell(\tilde{\lambda}) - 3\delta_0 + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(a)) + \ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}|_{[a,s]}) + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t)) + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t), \tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s)) =$$

$$\ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}|_{[0,s]}) + \ell(\tilde{\lambda}) - 3\delta_0 + d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(a)) + 2d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t)) \leq$$

$$\ell(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}|_{[0,s]}) + \ell(\tilde{\lambda}) - 3\delta_0 + \ell(\tilde{\lambda}) + 2d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t)) =$$

$$d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(0), \tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s)) + 2\ell(\tilde{\lambda}) - 3\delta_0 + 2d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t)).$$

Logo, temos que $3\delta_0 - 2\ell(\tilde{\lambda}) \leq 2d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t))$.

Como o comprimento $\ell(\tilde{\lambda})$, da geodésica $\lambda$, satisfaz $\ell(\tilde{\lambda}) < \delta_0$ então:

$d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t)) \geq \dfrac{3\delta_0 - 2\ell(\tilde{\lambda})}{2} > \dfrac{\delta_0}{2} > 0.$ □

**Demonstração do Teorema E**

Começamos com a seguinte consequência.

**Afirmação 1:** Não existem dois pontos distintos $\theta, \xi \in W - \overline{Rec(\phi_t|_W)}$ tais que $\pi(\theta) = \pi(\xi)$.

De fato, assuma que a afirmação fosse falsa. Sem perda, podemos assumir que $Lim^+(\theta) \cap Lim^+(\xi) \neq \emptyset$. Considere as geodésicas $\gamma_\theta(t) := \pi(\phi_t(\theta))$ e

$\gamma_\xi(t) := \pi(\phi_t(\xi))$. Temos então que $Lim^+(\gamma_\theta) \cap Lim^+(\gamma_\xi)$ contém o traço de uma geodésica $\gamma_\alpha$. Então fixamos levantamentos $\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(t)$ e $\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t)$ no recobrimento $\mathbb{R}^n$ e tais que $\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(0) = \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0) = \tilde{q}$, $\tilde{\theta} = (\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(0), \dot{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\theta}}(0))$ e $\tilde{\xi} = (\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0), \dot{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\xi}}(0))$. Como $\gamma_\alpha(\mathbb{R}) \subset Lim^+(\gamma_\theta) \cap Lim^+(\gamma_\xi)$ então, no recobrimento temos:

$$\inf\{d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t))| \;\; s \geq a\,,\; t \geq b\} = 0.$$

Por outro lado, se $0 < K \leq \dfrac{d_{\tilde{G}}(\tilde{\theta}, \tilde{\xi})}{2}$ e $a, b > 0$, consideremos $\delta_0, C_0 > 0$ constantes dadas pelo Lema 2.27. Então temos que:

$$\inf\{d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t))| \;\; s \geq a\,,\; t \geq b\} \geq C_0.$$

Logo, chegamos a uma contradição. Portanto,a afirmação é verdadeira.

**Afirmação 2:** A aplicação $\pi : W \to \mathbb{T}^n$ é localmente injetiva.

De fato, pela afirmação anterior segue que $\pi|_W$ é localmente injetiva em cada ponto do conjunto $W - \overline{Rec(\phi_t|_W)}$. Por outro lado, como $\overline{Rec(\phi_t|_W)} \cap Sing(W) = \emptyset$ então, pelo Teorema da Função Inversa, segue que $\pi|_W$ é injetiva numa vizinhança de cada ponto em $\overline{Rec(\phi_t|_W)}$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Segue da afirmação acima e do corolário 1.7 que a aplicação $\pi : W \to \mathbb{T}^n$ é um recobrimento finito. Mostremos agora que é um homeomorfismo. Temos a seguinte:

**Afirmação 3:** Existe um valor regular $q \in \mathbb{T}^n$ possuindo uma única pré-imagem em $W$.

Com efeito, como $\pi : W \to \mathbb{T}^n$ é um recobrimento(finito), então é sobrejetiva. Por outro lado, pela afirmação 1 e pelo Teorema da Invariância do Dominio, temos que a aplicação restrita $\pi : W - \overline{Rec(\phi_t|_W)} \to \pi(W - \overline{Rec(\phi_t|_W)})$ é um homeomorfismo cuja imagem é um subconjunto aberto próprio de $\mathbb{T}^n$. Como temos $\mathbb{T}^n - \pi(\overline{Rec(\phi_t|_W)}) = \pi(W) - \pi(\overline{Rec(\phi_t|_W)}) \subset \pi(W - \overline{Rec(\phi_t|_W)})$, segue que $\pi(\overline{Rec(\phi_t|_W)}) \neq \mathbb{T}^n$. Agora, note que sendo o conjunto $\mathbb{T}^n - \pi(\overline{Rec(\phi_t|_W)})$ um aberto então, pelo Lema de Sard, existe um valor regular $q \in \mathbb{T}^n - \pi(\overline{Rec(\phi_t|_W)})$. Segue que $(\pi|_W)^{-1}(q) \subset W - (Sing(W) \cup \overline{Rec(\phi_t|_W)})$. Pela afirmação 1, obtemos que o valor regular $q$ tem apenas uma pré-imagem em $W$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Finalmente, concluímos que a aplicação recobrimento $\pi : W \to \mathbb{T}^n$ é de fato um homeomorfismo, ou seja, existe uma 1-forma contínua $\eta$ em $\mathbb{T}^n$ tal que $W = \{(x, \eta(x)) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \ \mid \ x \in \mathbb{T}^n\}$. Como $W$ é uma subvariedade Lagrangiana de classe $C^1$, temos que $\eta$ é diferenciável de classe $C^1$.

**Teorema 2.29.** *Seja $W \subset \mathrm{T}_1\mathbb{T}^3$ um toro Lagrangiano de classe $C^2$, minimizante e suportanto no máximo uma quantidade infinito enumerável de medidas de probabilidade invariantes. Se $W$ não for uma seção então, o estrato $S_2 \subset Sing(W)$ é não vazio.*

**Demonstração do Teorema 2.29**

Assuma que $S_2 = \emptyset$. Como W é Lagrangiano e de classe $C^2$ então, segue que sua aplicação de Gauss $\mathcal{G} : \mathrm{W} \to \Lambda(T_1\mathbb{T}^3)$ é transversal à subvariedade substrato $\Lambda^1(T_1\mathbb{T}^3)$. Assim, temos que toda componente conexa $\mathcal{T} \subset Sing(\mathrm{W})$ é uma variedade compacta de classe $C^1$ e transversal ao campo geodésico. De agora em diante vamos denotar por $\mathcal{T} \ni \xi \mapsto \mathbb{V}(\xi)$, a aplicação que associa a cada ponto singular $\xi \in \mathcal{T}$ a reta $\mathrm{T}_\xi\mathrm{W} \cap \mathbb{V}(\xi)$. Como veremos a seguir, essa aplicação implica que $\mathcal{T}$ é um toro.

**Lema 2.30.** $Z := \{\xi \in \mathcal{T} | \ \ \mathbb{V}(\xi) \not\subseteq \mathrm{T}_\xi\mathcal{T}\}$ *é aberto e fechado em $\mathcal{T}$.*

*Demonstração.* De fato, se $Z$ for vazio nada temos a provar. Assuma então $Z$ não vazio. Se $\xi \in Z$ então, pela continuidade do campo de retas $\xi \mapsto \mathbb{V}(\xi)$, temos que existe uma vizinhança $\mathcal{N}_\xi \subset \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{N}_\xi \subset Z$. Logo $Z$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{T}$. Agora, suponha que este conjunto não seja fechado em $\mathcal{T}$. Isto significa que podemos obter uma sequência $\{\xi_j\} \subset Z$ e um ponto $\xi \in \mathcal{T} - Z$ tal que $\xi_j \to \xi$. Como $\mathcal{T}$ é uma subvariedade de classe $C^1$, podemos obter um sistema de coordenadas em torno deste ponto $\xi$ tal que $\dfrac{\partial}{\partial x_1}(\xi) = \mathbb{V}(\xi)$, onde $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(\xi), \frac{\partial}{\partial x_2}(\xi)\right\}$ é uma base do espaço $\mathrm{T}_\xi\mathcal{T}$ e para $j$ suficientemente grande $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(\xi_j), \frac{\partial}{\partial x_2}(\xi_j)\right\}$ é uma base do espaço $\mathrm{T}_{\xi_j}\mathcal{T}$. Como $\{\xi_j\} \subset Z$ e $\dim \mathrm{W} = 3$, então cada conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(\xi_j), \frac{\partial}{\partial x_2}(\xi_j), \mathbb{V}(\xi_j), X^g(\xi_j)\right\}$ é linearmente dependente, o que significa que para cada $j \in \mathbb{N}$ existem números $A_j, B_j, C_j$ e $D_j$, não todos simultaneamente nulos, tais que:

$$A_j\frac{\partial}{\partial x_1}(\xi_j) + B_j\frac{\partial}{\partial x_2}(\xi_j) + C_j\mathbb{V}(\xi_j) + D_jX^g(\xi_j) = 0.$$

Observe que não podemos ter $C_j$ e $D_j$ simultaneamente nulos. Por outro lado, também não podemos ter $D_j = 0$, pois isto implicaria que o vetor $\mathbb{V}(\xi_j)$ seria tangente a $\mathcal{T}$, ou seja que $\xi_j$ não está em $Z$, uma contradição. Segue que podemos escrever:

$$X^g(\xi_j) = \left(\frac{A_j}{D_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}(\xi_j) + \left(\frac{B_j}{D_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}(\xi_j) + \left(\frac{C_j}{D_j}\right)\mathbb{V}(\xi_j) \Leftrightarrow$$

$$X^g(\xi_j) = \overline{A_j}\frac{\partial}{\partial x_1}(\xi_j) + \overline{B_j}\frac{\partial}{\partial x_2}(\xi_j) + \overline{C_j}\mathbb{V}(\xi_j).$$

Passando o limite $j \longrightarrow \infty$, por continuidade teríamos:

$$X^g(\xi) = \overline{A}\frac{\partial}{\partial x_1}(\xi) + \overline{B}\frac{\partial}{\partial x_2}(\xi) + \overline{C}\mathbb{V}(\xi) = (\overline{A} + \overline{C})\frac{\partial}{\partial x_1}(\xi) + B\frac{\partial}{\partial x_2}(\xi).$$

Isto significaria que, no ponto $\xi$, o campo $X^g$ seria tangente a $\mathcal{T}$, o que iria contradizer o Teorema de Chekanov. $\square$

**Lema 2.31.** *O conjunto* $Z := \{\xi \in \mathcal{T} \mid \mathbb{V}(\xi) \nsubseteq \mathrm{T}_\xi\mathcal{T}\}$ *não é vazio.*

*Demonstração.* De fato, suponha que $Z$ seja vazio. Isto significa que a aplicação $\mathcal{T} \ni \xi \mapsto \mathbb{V}(\xi)$ é um campo de retas não singular e tangente a

$\mathcal{T}$. Sem perda podemos assumir que seja um campo de vetores não singular de classe $C^1$ e tangente a $\mathcal{T}$. Segue da topologia que $\mathcal{T}$ é diffeomorfa ao toro $\mathbb{T}^2$. Além disso, tal campo de retas determina uma folheação $\mathcal{F}$ unidimensional no toro $\mathcal{T}$. Pelo Teorema de Denjoy-Schwarz(ver [36]), toda folha é densa ou é fechada(homeomorfa ao círculo !).

**Afirmação 1:** A folheação $\mathcal{F}$ não contém folha densa.

De fato, se $t \mapsto \Gamma(t)$ for uma folha densa em $\mathcal{T}$ com $\Gamma(0) = \theta \in \mathcal{T}$, como ela é tangente ao campo vertical $\xi \mapsto \mathbb{V}(\xi)$, então $\pi(\Gamma(t)) = q = \pi(\theta) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Se $\mathrm{S}_q := \pi^{-1}(q) \cap \mathrm{T}_1\mathrm{M}^3$, então $\Gamma(\mathbb{R}) \subset \mathrm{S}_q$. Da densidade obtemos que:

$$\mathbb{T}^2 \approx \mathcal{T} = \overline{\Gamma(\mathbb{R})} \subset \overline{\mathrm{S}_q} \approx \mathbb{S}^2.$$

Mas isto é absurdo. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Pelo Teorema de Denjoy-Schwarz(ver [36]), toda folha de $\mathcal{F}$ tem que ser fechada, ou seja um círculo. Seja $t \mapsto \Gamma(t)$ representando uma folha em $\mathcal{T}$, com $\Gamma(0) = \theta \in \mathcal{T}$, então como ela é tangente ao campo vertical $\xi \mapsto \mathbb{V}(\xi)$, temos que o círculo $C = \Gamma(\mathbb{R})$ está contido na esfera $\mathrm{S}_q := \pi^{-1}(q) \cap \mathrm{T}_1\mathrm{M}^3$. Assim, o toro singular $\mathcal{T}$ intersecta as fibras $(\pi|_W)^{-1}(q)$ ao longo de círculos.

**Afirmação 2:** Existem uma folha fechada $C = \Gamma(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}$ e dois pontos distintos $\theta, \xi \in C$, tais que:

$Lim^+(\theta) \cap Lim^+(\xi) \neq \emptyset$ ou $Lim^-(\theta) \cap Lim^-(\xi) \neq \emptyset$.

De fato, como $C$ é compacto e conexo então, o conjunto omega limite de $C$, dado por

$$Lim^+(C) := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \phi_s(\overline{\bigcup_{t\geq 0} \phi_t(C)}),$$

é um compacto conexo invariante e $Lim^+(\alpha) \subset Lim^+(C)$, para cada $\alpha \in C$. Além disso, o compacto invariante $Lim^+(C)$ contém um subconjunto minimal(compacto invariante no qual toda órbita é densa). Como para cada $\alpha \in \mathrm{W}$ temos que cada um dos conjuntos $Lim^+(\alpha)$ e $Lim^-(\alpha)$ suporta uma medida invariante, segue que se a afirmação não fosse verdadeira então W conteria suportes de uma infinidade não enumerável de medidas invariantes, levando a uma contradição. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Do Lema 2.27 e afirmação 2, chegamos a uma contradição. Portanto, o conjunto $Z$ é de fato não vazio.

Pelos Lemas 2.29 e 2.30, concluímos que o campo de retas verticais $\mathcal{T} \ni \xi \mapsto \mathbb{V}(\xi)$ é transversal ao toro singular em todo ponto. Pelo Lema 2.2 segue que todo ponto $\xi \in \mathcal{T}$ é uma singularidade do tipo dobra para a aplicação $\pi : \mathrm{W} \to \mathbb{T}^3$.

**Afirmação 3:** Existem $r_1 > 0$ e uma vizinhança $\mathcal{V} \subset \mathrm{W}$ do toro singular $\mathcal{T}$, de forma que $\phi_t(\mathcal{V}) \cap [Sing(W) - \mathcal{T}] = \emptyset$, para $|t| < r_1$.

De fato, temos que cada componente conexa de $Sing(W)$ é difeomorfa ao toro $\mathbb{T}^2$ e é transveral ao campo Hamiltoniano. Como cada órbita em $W$ intersecta $Sing(W)$ no máximo um número finito de vezes, segue que $Sing(W)$ tem um número finito de componentes. Isto implica que a afirmação 3 tem que ser verdadeira.

Sejam $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, ..., \mathcal{T}_m$ as componentes conexas de $Sing(W)$. Pelos Lema 2.2 e afirmação acima, podemos obter uma vizinhaça $\mathcal{N}_{i1} \subset \mathrm{W}$ de $\mathcal{T}_i$, uma vizinhança $\mathcal{N}_{i2} \subset \mathbb{T}^3$ de $\pi(\mathcal{T}_i)$, e um conjunto aberto e denso $A_i \subset \mathcal{N}_{i2}$ com $A_i \cap \pi(\mathcal{T}_i) = \emptyset$ de forma que $A_i \ni q \mapsto Card(\pi^{-1}(q) \cap \mathcal{N}_{i1}) \geq 2$.

**Afirmação 4:** Existem uma componente $\mathcal{T}_{i_0}$, um $q_0 \in A_{i_0}$ e dois pontos $\theta, \xi \in \pi^{-1}(q_0)$ tais que $Lim^+(\theta) \cap Lim^+(\xi) \neq \emptyset$ ou $Lim^-(\theta) \cap Lim^-(\xi) \neq \emptyset$.

De fato, caso contrário, teríamos para cada $q \in \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ e quaisquer dois pontos $\theta, \xi \in \pi^{-1}(q)$ que $Lim^+(\theta) \cap Lim^+(\xi) = \emptyset$ e $Lim^-(\theta) \cap Lim^-(\xi) = \emptyset$. Isto implica que W suporta uma quantidade não-enumerável de medidas invariantes, o que leva a uma contradição. Portanto, a afirmação 4 é verdadeira.

Sem perda, podemos assumir que $Lim^+(\theta) \cap Lim^+(\xi) \neq \emptyset$. Considere as geodésicas $\gamma_\theta(t) := \pi(\phi_t(\theta))$ e $\gamma_\xi(t) := \pi(\phi_t(\xi))$. Temos então que, $Lim^+(\gamma_\theta) \cap Lim^+(\gamma_\xi)$ contém o traço de uma geodésica $\gamma_\alpha$. Assim, fixamos levantamentos $\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(t)$ e $\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t)$ no recobrimento $\mathbb{R}^3$ e tais que $\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(0) = \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0) = \tilde{q}$, $\tilde{\theta} = (\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(0), \dot{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\theta}}(0))$ e $\tilde{\xi} = (\tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(0), \dot{\tilde{\gamma}}_{\tilde{\xi}}(0))$. Como $\gamma_\alpha(\mathbb{R}) \subset Lim^+(\gamma_\theta) \cap Lim^+(\gamma_\xi)$, segue que no recobrimento temos:

$$\inf\{d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t))| \ \ s \geq a > 0\,,\, t \geq b > 0\} = 0.$$

Por outro lado, se $0 < K \leq \dfrac{d_{\tilde{G}}(\tilde{\theta}, \tilde{\xi})}{2}$ e $a, b > 0$, consideremos $\delta_0, C_0 > 0$ constantes dadas pelo Lema 2.27. Então, temos que:

$$\inf\{d_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}_{\tilde{\theta}}(s), \tilde{\gamma}_{\tilde{\xi}}(t))| \ \ s \geq a, t \geq b\} \geq C_0.$$

Logo, chegamos a uma contradição. Isto implica que os pontos de $Sing(W)$ não podem ser pontos de dobra, ou seja, o conjunto $Z$ é vazio. Portanto, $Sing(W) = \emptyset$. Pelo Teorema 1.45, temos que a aplicação $\pi : W \to \mathbb{T}^3$ é um difeomorfismo, contradizendo a hipótese.

□

**Teorema 2.32.** *Seja $W \subset T_1\mathbb{T}^3$ um toro Lagrangiano de classe $C^2$, minimizante e suportanto no máximo uma quantidade infinito enumerável de medidas invariantes. Então, $W$ é uma seção.*

Na prova deste Teorema, vamos precisar dos seguintes lemas.

**Lema 2.33.** *Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(N)$ um campo não singular, $S \subset N$ uma subvariedade de codimensão $k$, tal que $X(x) \notin T_xS$. Então, para cada ponto $x_0 \in S$, existem uma vizinhança $\mathcal{U} \subset N$ de $x_0$ e uma seção $\Sigma_{x_0} \subset N$, transversal ao campo $X$, tal que $S \cap \mathcal{U} \subset \Sigma_{x_0}$.*

*Demonstração.* Seja $d$ a dimensão da variedade $N$. Pelo Teorema da Caixa de Fluxo ( também conhecido na literatura como Teorema do Fluxo Tubular), podemos assumir que $N = \mathbb{R}^d$, que o campo $X$ é dado por

$$X(x_1, x_2, ..., x_{d-1}, x_d) = (0, 0, ..., 0, 1)$$

e que a a subvariedade $S$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^{d-k} \times (0, 0, ..., 0)$. Agora tome um conjunto $Q$, aberto de $(0, 0, ..., 0) \times \mathbb{R}^{k-1} \times 0$. Assim, tomamos

$$\Sigma_{x_0} = S \times Q.$$

Temos que $\Sigma_{x_0}$ é uma subvariedade de codimensão 1 e transversal ao campo $X$.

$\square$

**Lema 2.34.** *Sejam $X \in \mathfrak{X}^1(N)$ um campo não singular, cujo fluxo denotado por $\Phi : N \times \mathbb{R} \to N$, $\Sigma_{x_0} \subset N$ uma seção transversal ao campo $X$. Então:*

1. *Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que o conjuto $\mathcal{B} := \bigcup_{|t|<\epsilon_0} \Phi_t(\Sigma_{x_0})$, é uma caixa de fluxo para o campo $X$;*
2. *para cada ponto $z \in \mathcal{B}$, existe um único tempo $\tau(z) \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, tal que $\Phi(\tau(z), z) \in \Sigma_{x_0}$.*
3. *A função $\tau : \mathcal{B} \to (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ é de classe $C^1$.*

*Demonstração.* Os itens 1 e 2 seguem diretamente do Teorema da caixa de fluxo. Agora, sendo $\Sigma_{x_0} \subset N$ uma seção transversal ao campo $X$, passando tudo a $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ podemos escrever o fluxo como uma aplicação $\Phi(z, t) = (\Phi_1(z, t), \Phi_2(z, t), ..., \Phi_d(z, t))$. A condição $\Phi(z, t) \in \Sigma_{x_0}$ implica que $\Phi_d(z, t) = 0$. Assim, a transversalidade de $\Sigma_{x_0}$ junto com o Teorema da Função Implícita, implicam que a função $\tau : \mathcal{B} \to (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ é de classe $C^1$. $\square$

A função $\tau : \mathcal{B} \to (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, mede o tempo que a órbita de um ponto $\eta \in \mathcal{B}$ gasta para atingir a seção $\Sigma_{x_0}$. Por isto, vamos chamá-la de *tempo de batida*.

**Lema 2.35.** *Seja $W \subset T_1\mathbb{T}^3$ um toro Lagrangiano de classe $C^2$. Se o estrato $S_1 \subset Sing(W)$ for vazio então, o estrato $S_2$ também é vazio ou é uma superfície de classe $C^1$.*

*Demonstração.* Consideremos $\Lambda(T_1\mathbb{T}^3)$, o fibrado Grassmanniano Lagrangiano sobre $T_1\mathbb{T}^3$, $\Phi : \Lambda(T_1\mathbb{T}^3) \times \mathbb{R} \to \Lambda(T_1\mathbb{T}^3)$ o fluxo geodésico levantado e

$$\Lambda_V = \Lambda^1(T_1\mathbb{T}^3) \cup \Lambda^2(T_1\mathbb{T}^3),$$

o ciclo de Maslov em $\Lambda(T_1\mathbb{T}^3)$. Como $\Lambda^k(T_1\mathbb{T}^3)$ é uma subvariedade de $\Lambda(T_1\mathbb{T}^3)$ e de codimensão $k$. Então, os lemas 2.33 e 2.34 acima implicam que o tempo de batida em $\Lambda^k(T_1\mathbb{T}^3)$ é uma função de classe $C^1$. Agora, assuma $S_1 = \emptyset$. Então, se $S_2 \neq \emptyset$, temos que $\mathcal{G}(Sing(W)) \subset \Lambda^2(T_1\mathbb{T}^3)$, onde $\mathcal{G} : W \to \Lambda(T_1\mathbb{T}^3)$ é a aplicação de Gauss para $W$. Pelo item 2 do Teorema 1.37, o tempo que a órbita de um ponto $\theta \in W$, gasta para atingir o estrato $S_2$ é o mesmo tempo que a órbita do ponto $T_\theta W \in \Lambda(T_1\mathbb{T}^3)$, gasta para atingir a subvariedade $\Lambda^2(T_1\mathbb{T}^3)$. Pelo Lema de Ruggiero([25], lemma 4.3), existem $\epsilon > 0$ e uma seção $\Sigma_1$ transversal ao fluxo, tal que a função $t^1 : \Sigma_1 \to (-\epsilon, 2\epsilon)$, tempo de batida em $Sing(W)$, é contínua em um aberto de $\Sigma_1$ e a aplicação $\psi : \Sigma_1 \to Sing(W)$, dada por $\psi(\eta) = \phi_{t^1(\eta)}(\eta)$, é um homeomorfismo sobre sua imagem. Como temos $Sing(W) = S_2$, segue do que vimos acima, que a função $t^1 : \Sigma_1 \to (-\epsilon, 2\epsilon)$ é de classe $C^1$. Isto implica que $S_2$ é uma superfície de classe $C^1$. $\square$

**Demonstração do Teorema 2.32**

Começamos com a seguinte afirmação.

**Afirmação:** O estrato singular $S_1$ é vazio.

De fato, assuma o contrário. Como $W$ é de classe $C^2$, segue que é uma subvariedade, de classe $C^1$ e codimensão um em $W$. Consideremos o campo de retas verticais $S_1 \ni \theta \mapsto T_\theta \cap \mathbb{V}(\theta)$, definido em $W$. Temos duas possibilidades a tratar.

**Possibilidade 1:** $S_1 \ni \theta \mapsto T_\theta W \cap \mathbb{V}(\theta)$ é tangente a $S_1$.

Neste caso, pelo teorema de existência e unicidade de soluções para EDO, segue que $S_1$ é uma superfície de classe $C^1$, folheada por curvas $t \mapsto \Gamma(t)$ de classe $C^1$ e tais que o traço de cada curva $\Gamma(t)$ está contido numa fibra $\pi^{-1}(q) \cap W$. Pelo lema de quase cruzamento, segue que $W$ deve suportar uma infinidade não enumerável de medidas invariantes, o que nos leva a uma contradição. Portanto, o campo de retas não pode ser tangente a $S_1$ em todo ponto.

**Possibilidade 2:** Existe um ponto $\xi \in S_1$ tal que, o campo de retas $S_1 \ni \theta \mapsto T_\theta W \cap \mathbb{V}(\theta)$ é transversal a $S_1$ em $\xi$.

Neste caso, por continuidade existe um aberto de $S_1$, ao longo do qual esse campo é transversal a $S_1$. Pelo Lema 2.2, todo ponto de transversalidade do campo com o estrato $S_1$ é uma sigularidade do tipo dobra. Do Lema 2.2 segue que existem abertos $\mathcal{U} \subset W$e $\mathcal{V} \subset \mathbb{T}^3$, tais que:

$$q \in \mathcal{V} \Rightarrow card[\pi^{-1}(q) \cap \mathcal{U}] \geq 2.$$

Pelo Lema de quase cruzamento, segue que para cada ponto $q \in \mathcal{V}$, existem pelo menos duas medidas invariantes distintas e com suporte em $W$. Como consequência, $W$ deveria conter o suporte de uma infinidade não enumerável de medidas invariantes nos levando a uma contradição.

Logo, o campo $S_1 \ni \theta \mapsto T_\theta W \cap \mathbb{V}(\theta)$, não pode ter um ponto de transversalidade com o estrato $S_1$. Assim, devemos ter que $S_1 = \emptyset$.

Vamos agora mostrar que $S_1 = \emptyset \Rightarrow S_2 = \emptyset$. Note primeiro que pelo Lema 2.35, temos que $S_2$ é uma superfície compacta de classe $C^1$ e, pelo Teorema de Chekanov, transversal ao campo geodésico. Seja $\mathcal{T} \subset S_2 = Sing(W)$ uma componente conexa. Então, $\mathcal{T}$ é uma superfície compacta, conexa de classe $C^1$. Considere $\mathcal{T} \ni \theta \mapsto T_\theta W \cap \mathbb{V}(\theta)$ o campo de planos, induzido pela distribuição Lagrangiana vertical. Temos dois caso a tratar:

**Caso 1:** $\mathcal{T} \ni \theta \mapsto T_\theta W \cap \mathbb{V}(\theta)$ é tangente a $\mathcal{T}$ em todo ponto.

Como $\mathcal{T}$ é uma superfície conexa e de classe $C^1$ então, quaisquer dois pontos $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{T}$, podem ser ligados por uma curva $C^1$, $t \mapsto \Gamma(t) \in \mathcal{T}$. Denotemos $\gamma(t) := \pi \circ \Gamma(t)$. Segue que $\dot{\gamma}(t) = d\pi(\Gamma(t)) \cdot \dot{\Gamma}(t) = 0$. Isto implica que a curva $t \mapsto \gamma(t)$ é uma curva constante e, por consequência, o traço da curva $t \mapsto \Gamma(t)$ está totalmente contido numa fibra $\pi^{-1}(q) \cap W$. Segue que $\mathcal{T}$ está contido em uma única fibra $\pi^{-1}(q_0) \cap W$. Pelo Lema de quase cruzamento, obtemos que $W$ deve conter o suporte de uma infinidade não - enumerável de medidas invariantes, o que nos leva a uma contradição. Assim, o campo de planos $\mathcal{T} \ni \theta \mapsto T_\theta W \cap \mathbb{V}(\theta)$, não pode ser tangente a $\mathcal{T}$ em todo ponto.

**Caso 2:** Exsite um ponto $\xi \in \mathcal{T}$ no qual, o campo de planos verticais é transversal a $\mathcal{T}$.

Nessas condições, por continuidade existe um aberto $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$, ao longo do qual esse campo de planos é transversal a $\mathcal{T}$. Como $\dim W = 3$ então, a transversalidade de $\mathcal{O} \ni \theta \mapsto T_\theta \mathcal{T}$ e $\mathcal{O} \ni \theta \mapsto T_\theta W \cap \mathbb{V}(\theta)$, determinam um campo de retas verticais em $\mathcal{O}$. Pelo Teorema de Existencia e Unicidade de soluções para EDO's, segue que o aberto $\mathcal{O}$ está folheado por traços de curvas $t \mapsto \Gamma(t) \in \mathcal{O}$ de classe $C^1$, onde cada folha está contida numa única

fibra $\pi^{-1}(q) \cap W$. pelo Lema de quase cruzamento, segue que $W$ deve conter o suporte de uma infinidade não - enumerável de medidas invariantes, o que mais uma vez nos leva a uma contradição. Isto siginifica então, que o campo de planos $\mathcal{T} \ni \theta \mapsto T_\theta W \cap \mathbb{V}(\theta)$ não pode ter um ponto $\xi$, de transversalidade com a superfície $\mathcal{T}$.
Portanto, temos que o estrato $S_2$ também é vazio. Pelo Teorema de Arnold - Arnaud, segue que $W$ é uma seção.

## 2.4 Integrabilidade

Nesta seção analisamos casos em que o Hamiltoniano adimite gráficos Lagrangianos invariantes suficientes para folhear todo o espaço de fase. Começamos apresentando o conceito clássico de integrabilidade de Liouville.

**Definição 2.36.** Seja $\phi_t : T^*M \to T^*M$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli. Diz-se que tal fluxo é Liouville integrável quando existe uma aplicação

$$J = (f_1, f_2, ..., f_n) : T^*M \to \mathbb{R}^n,$$

de classe $C^2$, onde $n = \dim M$, tal que cada $f_i$ é uma integral primeira de $\phi_t$, o conjunto dos pontos críticos de $J$ tem medida de Lebesgue igual a zero e cada par $(f_i, f_j)$ comuta no sentido Poisson. Quando $J$ não tem pontos críticos diz-se que o fluxo $\phi_t$ é completamente integrável.

Fluxos integráveis são muito bem entendidos e existem vários textos na literatura sobre esse assunto. O seguinte teorema nos dá uma descrição bem completa do espaço de fase de um tal fluxo. Uma prova desse Teorema clássico pode ser encontrada por exemplo em [3, 48, 52].

**Teorema 2.37** (Liouville). *Seja $\phi_t : T^*M \to T^*M$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli Liouville integrável. Se* W *for uma componente conexa de um conjunto de nível regular de $J = (f_1, f_2, ..., f_n) : T^*M \to \mathbb{R}^n$, então ela é uma subvariedade Lagrangiana $\phi_t$-invariante, difeomorfa ao toro $\mathbb{T}^n$ e a restrição $\phi_t : \mathrm{W} \to \mathrm{W}$ é diferenciavelmente conjugada a uma rotação rígida em $\mathbb{T}^n$.*

Deste modo , fluxos Hamiltonianos Tonelli completamente integráveis admitem uma folheação de $T^*\mathbb{T}^n$ por subvariedades Lagrangianas compactas (Toros Lagrangianos!) invariantes. O teorema a seguir implica que neste caso cada folha é de fato uma seção.

**Teorema 2.38.** *Seja $\phi_t : T^*M \to T^*M$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli. Se* T*M *admite uma folheação por $C^1$-subvariedades Lagrangianas compactas, então toda folha é uma seção.*

*Demonstração.* Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de T*M por $C^1$-subvariedades Lagrangianas compactas. Considere E a distribuição Lagrangiana tangente a $\mathcal{F}$. Então, por hipótese ela é uma distribuição contínua de planos Lagrangianos e é invariante pelo fluxo Hamiltoniano. Seja $\Sigma_e \subset T^*M$ um nível de energia regular e $\Lambda(\Sigma_e)$ o fibrado Grassmanniano Lagrangiano. Aplicamos o Teorema 1.53 à distribuição $\mathrm{E} : \Sigma_e \to \Lambda(\Sigma_e)$ para deduzir que o nível regular $\Sigma_e$ não contém pontos conjugados e mais ainda, $\mathrm{E}(\theta) \cap \mathrm{V}(\theta) = \{0\}, \forall \theta \in \Sigma_e$. Assim, se $W \subset \Sigma_e$ for uma folha tangente a E então, temos que $Sing(W) = \emptyset$. Pelo Teorema 1.45, segue que $W$ é uma seção. Assim, nós concluimos que em qualquer nível de energia regular $\Sigma_e$, toda folha é uma seção. Agora só precisamos mostrar que todo nível crítico tem a mesma propriedade.
Seja $\mathrm{L} : \mathrm{TM} \to \mathbb{R}$ o Hamiltoniano de Tonelli associado ao Hamiltonio H e $\mathcal{E}$ a função energia.

**Afirmação 1:** Se $(x,v)$ for um ponto crítico de $\mathcal{E}$ então $v=0$.
De fato, como $\mathcal{E}(x,v) = \dfrac{\partial L}{\partial v}(x,v)(v) - L(x,v)$, então em coordenadas locais temos:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}(x,v) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x,v)\cdot v - \frac{\partial L}{\partial x}(x,v) \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v}(x,v) = \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v)\cdot v + \frac{\partial L}{\partial v}(x,v) - \frac{\partial L}{\partial v}(x,v) = \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v)\cdot v. \tag{2.19}$$

Já que L é Tonelli, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v)$ é positivo definido. Assim das equações 2.18 e 2.19 conclui-se que $(x,v)$ é um ponto crítico da energia se, e somente se, $v=0$ e $\dfrac{\partial L}{\partial x}(x,0)=0$. Logo a afirmação é verdadeira.
**Afirmação 2:** $e_{min} := \min\{\mathcal{E}(x,0) | x \in \mathrm{M}\} = \min\{\mathcal{E}(x,v) | (x,v) \in \mathrm{TM}\}$.
De fato, sendo $L$ do tipo Tonelli, temos que a função $\mathcal{E}_x : \mathrm{T_xM} \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \mathcal{E}(x,v)$, é estritamente convexa e de classe $C^1$. Da equação 2.19 acima e de [34, corolario 1.2.11], segue que $v=0$ é um ponto de mínimo global de $\mathcal{E}_x$. Logo, $\mathcal{E}(x,0) \leq \mathcal{E}(x,v), \quad \forall (x,v) \in \mathrm{TM}$.
Considere agora, $W$ uma folha da folheação $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{L}_0^{-1}(\mathrm{W}) \subset \Sigma_{e_{min}} = \mathcal{E}^{-1}(e_{min})$, onde $\mathcal{L}_0 : \mathrm{TM} \to \mathrm{T^*M}$ é a transformada de Legendre. Pela afirmação 2, qualquer ponto $(x,v) \in \mathcal{L}_0^{-1}(\mathrm{W})$ é um ponto crítico de $\mathcal{E}$. Isto junto com a afirmação 1, implica $v=0$. Como $\mathcal{L}_0^{-1}(\mathrm{W})$ é uma subvariedade compacta e conexa com $\dim \mathcal{L}_0(\mathrm{W}) = \dim \mathrm{M}$ então temos:

$$\mathcal{L}_0^{-1}(\mathrm{W}) = \{(x,v) \in \mathrm{TM} \ | \ v = 0\}.$$

Assim, $\pi : \mathcal{L}_0(\mathrm{W}) \to \mathrm{M}$ é um difeomorfismo e, sendo $\mathcal{L}_0$ também um difeomorfismo, segue que $\mathrm{W} \subset \mathrm{T^*M}$ é uma seção. Por [54,Teorema 1.3], temos que $\Sigma_{e_{min}}$ satisfaz:

$$e_{min} \geq \min\{\alpha(c) \ | \ c \in H^1(\mathrm{M},\mathbb{R})\}, \tag{2.20}$$

onde $\alpha : H^1(\mathrm{M},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é a função alfa de Mather. Por outro lado, vale as seguintes desigualdades:

$$e_{min} \leq e_{max} \leq C_u(\mathrm{L}) \leq C_a(\mathrm{L}) = Min\{\alpha(c)| \ \ c \in \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathbb{R})\}. \tag{2.21}$$

Então, pelas desigualdades 2.20 e 2.21, conclui-se que:

$$e_{min} = e_{max} = C_u(\mathrm{L}) = C_a(\mathrm{L}) \ \ e \ \ \Sigma_{e_{min}} = \{(x, v) \in \mathrm{TM} \ \ | \ \ v = 0\}.$$

Como $\Sigma_k$ é nível regular para $k > C_a(\mathrm{L})$, isso finaliza a prova do teorema. □

**Corolário 2.39.** *O toro $\mathbb{T}^n$ é a única variedade, que suporta um Hamiltoniano de Tonelli completamente integrável.*

A seguir apresentamos o conceito de $C^0$-integrabilidade proposto pela Marie Claude Arnaud.

**Definição 2.40.** Seja $\mathrm{H} : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathbb{R}$ um Hamiltoniano de Tonelli. Diz-se que ele é $C^0$-integrável quando $\mathrm{T}^*\mathrm{M}$ é folheado por gráficos Lagrangianos Lipschitz $\mathcal{G}_{c,u} := \{(q, \eta_c(q) + du(q)) \in \mathrm{T}^*\mathrm{M}| \ \ q \in \mathrm{M}\}$, um para cada classe de cohomologia $c \in \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathbb{R})$.
Um Lagrangiano de Tonelli $\mathrm{TM} \to \mathbb{R}$ será chamado de $C^0$-integrável quando seu Hamiltoniano de Tonelli associado tiver tal propriedade.

Em [8], Marie C. Arnaud prova o seguinte:

**Teorema 2.41.** *Seja $\mathrm{H} : \mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathbb{R}$ um Hamiltoniano de Tonelli. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *$\mathrm{H}$ é $C^0$- integrável;*

2. $\mathrm{T}^*\mathrm{M} = \bigcup_{c \in H^1(M,\mathbb{R})} \tilde{\mathcal{N}}_c^*.$
   *Além disso, neste caso temos:*

3. *Para cada $c \in \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathbb{R})$ tem-se $\mathcal{A}_c^* = \mathcal{N}_c^* = \mathcal{G}_{(c,u)}$;*

4. *Existe um subconjunto $G_\delta$ denso $\mathcal{G}$ de* $\mathrm{T^*M}$*, tal que cada gráfico da partição e que intersecta $\mathcal{G}$, é de fato de classe $C^1$;*

5. *Cada órbita periódica está contida em um gráfico Lagrangiano de classe $C^1$, o qual é folheado por órbitas periódicas com o mesmo período;*

6. *A função beta de Mather é de classe $C^1$.*

No mesmo artigo Marie Claude, deixa o seguinte problema, a qual, até onde sabemos, ainda se encontra em aberto.
**Problema:** Existe algum Hamiltoniano de Tonelli $C^0$-integrável, mas não $C^1$-integrável, ou seja, para o qual algum dos gráficos Lagrangianos invariantes não seja de classe $C^1$?

Em [21], os autores provam que um fluxo geodésico em $\mathrm{T}^*\mathbb{T}^n$, não tem pontos conjugados se, e somente se, a métrica Riemanniana é flat. Por outro lado, em 2014 Arcostanzo-Arnaud-Bolle-Zavidovique [2], provam que no toro $\mathbb{T}^n$ um fluxo Hamiltoniano de Tonelli não tem pontos conjugados se, e somente se $\mathrm{T}^*\mathbb{T}^n$ admite uma folheação por gráficos Lagrangianos invariantes e de classe $C^0$.

**Teorema 2.42.** *Seja $(M, g)$ uma variedade Riemanniana fechada. Se $u \in C^1(M, \mathbb{R})$ for não constante ou $\omega$ for uma 1-forma de classe $C^1$ em $M$ e satisfazendo $d\omega \neq 0$, então o Lagrangiano de Tonelli:*

$$L(q, v) = \frac{\|v\|_q^2}{2} - u(q) + \omega(q)(v)$$

*não é $C^0$-integrável .*

Para a demonstração desse resultado vamos precisar provar os seguintes lemas.

**Lema 2.43.** *Seja* $\mathrm{L} : \mathrm{TM} \to \mathbb{R}$ *um Lagrangiano de Tonelli e* $\beta : \mathrm{H}_1(\mathrm{M}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *sua função beta(* Lagrangiana efetiva*). Se* L *for* $C^0$*-integrável então* $\mathrm{L}(\mathrm{q}, 0) = \beta(0), \forall \mathrm{q} \in \mathrm{M}$.

*Demonstração.* Considere $\mathcal{E}(q, v) = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{v}}(\mathrm{q}, \mathrm{v})(\mathrm{v}) - \mathrm{L}(\mathrm{q}, \mathrm{v})$ a função energia e denote por $e_{min}$ e $e_{max}$ os valores mínimo e máximo da função $q \mapsto \mathcal{E}(q, 0)$. As seguintes desigualdades são verdadeiras(ver [54] ).

$$e_{min} \leq e_{max} \leq C_u(\mathrm{L}) \leq C_a(\mathrm{L}) = \min_{c \in \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathbb{R})} \alpha(c) = -\beta(0) \tag{2.22}$$

Agora, assuma L $C^0$-integrável. Então, pelo Teorema 2.41 isto é equivalente a $\mathrm{TM} = \bigcup_{c \in H^1(M, \mathbb{R})} \tilde{\mathcal{N}}_c$. Tome $\theta_0 = (q_0, 0)$ tal que $\mathcal{E}(q_0, 0) = e_{min}$. Assim, $\theta_0$ é uma singularidade do fluxo de Euler-Lagrange. Considere $\delta_0$ a medida de Dirac suportada $\theta_0$. Então, o suporte de $\delta_0$ está contido em algum conjunto de Mañê $\tilde{\mathcal{N}}_{c_0}$ e pelo Teorema de Carneiro (ver [24]) $e_{mim} = \mathcal{E}(q_0, 0) = \alpha(c_0) \geq C_a(\mathrm{L}) = -\beta(0)$. Segue de 2.22 que $e_{min} = -\beta(0)$. Como consequência disto temos: $\mathcal{E}(q, 0) = -\beta(0)\ \forall q \in \mathrm{M}$, o que por sua vez, implica em $q \mapsto \mathrm{L}(q, 0)$ ser constante igual a $\beta(0)$. □

**Lema 2.44.** *Se* $\mathrm{L} : \mathrm{TM} \to \mathbb{R}$ *for* $C^0$*-integrável, então a 1-forma*

$$\eta_L(q) := \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial v}(q, 0)$$

*é fechada.*

*Demonstração.* Considere a nova Lagrangiana $\hat{\mathrm{L}}(q, v) = \mathrm{L}(q, v) - \beta_L(0)$. Agora, note que $\eta_L(q) = \eta_{\hat{L}}(q)$. Se L for $C^0$-integrável, então também o é a Lagrangiana $\hat{\mathrm{L}}$. Logo, pelo Lema 2.43, temos:

$$\hat{e}_{min} = \hat{e}_{max} = C_u(\hat{\mathrm{L}}) = C_a(\hat{\mathrm{L}}) = 0.$$

Nós aplicamos [54 ,Teorema 1.3], para concluir que $\eta_{\hat{L}}(q)$ é fechada e portanto, $\eta_L(q) := \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial v}(q, 0)$ é fechada □

**Demonstração do Teorema G**

De fato, se $L(q,v) = \frac{\|v\|_q^2}{2} - u(q) + \omega(q)(v)$ for $C^0$-integrável então pelo lema 2.43, $-u(q) = \beta(0), \quad \forall q \in M$. Logo a função $u \in C^1(M,\mathbb{R})$ deveria ser constante, levando a uma contradição. Por outro lado, para este Lagrangiano temos que:

$$\eta_L(q) := \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial v}(q,0) = \omega(q).$$

Logo, pelo Lema 2.44, esta 1-forma é fechada, o que também leva a uma contradição. Portanto, em qualquer caso, o Lagrangiano não pode ser $C^0$ integrável.

# Referências Bibliográficas


[1] Amorim, L ; Oh, Y; Santos, J; *Exact Lagrangian submanifolds, Lagrangian spectral invariants and Aubry–Mather theory* -Math. Proc. Camb. Phil. Soc, 1-24, (2017).

[2] Arcostanzo, M; Arnaud, C, M; Bolle, P ; Zavidovique, M; *Tonelli Hamiltonians without conjugate points and $C^0$-integrability*- Mathematische Zeitschrift, 280 (1-2), 165-194, (2015)

[3] Arnold V. I; *Mathematical Methods of Classical Mechanics*- Graduate texts in Mathematics ; Springer-Verlag , Berlim Heidelberg GmbH, (1978).

[4] Arnold V. I; *Characteristic Class Entering in Quantization Conditions*- Funct. Anal. Appl. 1(1967), 1-13.

[5] Arnold V. I; Gusein-Zade, S, M; Varchenko, A, N; *Singularities of Differentiable Maps*- Birkhauser, Vol 1, (1985).

[6] Arnold V. I; *First steps in symplectic topology* - Russian Math. Surveys 41:6, 1 - 21 (1986).

[7] Arnold V. I; *Topological problems of the theory of wave propagation* - Russian Math. Surveys 51:1 1 - 47, (1996).

[8] Arnaud, C, M; *A certain minimization property implies a certain integrability*- Journal of Differential Equations, Volume 250, Issue 5, 2389-2401,(2011).

[9] Arnaud, C, M; *Fibrés de Green et régularité des graphes $C^0$-lagrangiens invariants par un flot de Tonelli*- Annales Henri Poincaré, 9 (5),881-926, (2008).

[10] Arnaud, C, M; *The tiered Aubry set for autonomous Lagrangian functions*-Annales de l'Institut Fourier, 58 (5), 1733-1759, (2008) .

[11] Arnaud, C, M; *A Theorem due to Birkhoff* - Geometric and Functional Analysis, 20, Issue 6 (2010), Pages 1307-1316

[12] Arnaud, C, M; *When are the Invariant Submanifolds of Symplectic Dynamics Lagrangian?* -Discrete and Continuous Dynamical Systems, 34 (5), (2014).

[13] Artiguel. A; Oliveira. D. C; Monteverde. I; *Polynomial Entropy and Expansivity* - Acta Math. Hungar, 152 (1), 140 - 149, (2017).

[14] Bernard, P; *Existence of $C^{1,1}$ critical sub-solutions of the Hamilton-Jacob equation on Compact Manifols* - Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Vol 40, Issue 3, 2007.

[15] Bialy, M; Polterovich, L; *Geodesic flows on the two dimensional torus and phase trasitions "commensurability - noncomensurability"* - Funk. Anal. Appl. 20, 223-226 (1986).

[16] Bialy, M; *Aubry-Mather sets and Birkhoff's theorem for geodesic flows on the two dimensional torus* - Commmmunications in Math. Physics 126, 13-24, (1989).

[17] Bialy, M; *On the number of caustics for invariant tori of Hamiltonian systems with two degrees of freedom* - Ergod. Th. and Dynam. Sys, 11, 273 - 278, (1991).

[18] Bialy, M; Polterovich, L; *Hamiltonian systems, Lagrangian tori and Birkhoff's theorem*- Math Ann;292, 619-627, (1992).

[19] Bialy, M; Polterovich, L; *Hamiltonian Diffeomorphisms and Lagrangian Distributions*- Geom and Funct Anal; Vol 2, Nº 2, (1992).

[20] Birkhoof, D; *Quelques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques* - Bulletin de la S.M.F; Tome 40, 305 - 323, (1912).

[21] Burago, D; Ivanov, S; *Riemannian Tori Without Conjugate Points are Flat*- Geometric and Functional Analysis, Vol 4, Nº 3, (1994).

[22] Carneiro, M, J; Ruggiero, R, O; *On Variational and topological properties of C1 invariant Lagrangian tori* - Ergod. Th. and Dynam. Sys; 24, 1909 - 1935;(2004)

[23] Carneiro, M, J; Ruggiero, R, O; *On Birkhoff Theorem for lagrangian invariant tori with closed orbits* - Manuscripta Mathematica, 119, 411 - 432, (2006)

[24] Carneiro, M; *On minimizing measures of the action of autonomous Lagrangians* - Nonlinearity, 8(6), 1077 - 1085, (1995).

[25] Carneiro, M; Ruggiero, R; *On the graph Theorem for Lagrangian minimizing tori*- Discrete and Continuous Dynamical Systems, 38(12): 6029 - 6045, (2018).

[26] Chekanov, V, Yu; *Caustics in Geometrical Optics* - Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, Vol 20, No 3, 66 - 69, (1986).

[27] Contreras, G; Iturriaga, R; *Global Minimizers of Autonomous Lagrangians* - 22º Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (1999).

[28] Contreras, G; Iturriaga, R; *Convex Hamiltonians without conjugate points* - Ergod. Th. and Dynam. Sys; 19, 901 - 952, (1999).

[29] Contreras, G; Delgado, J; Iturriaga R; *Lagrangian Flows: The dynamics of Globally Minimizing Orbits-II* - Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 28, N. 2, 155 - 196.

[30] Contreras, G; Iturriaga, R; Paternain, G; Paternain, M; *Lagrangian graphs, minimizing measures, and Mañê's critical values*- Geom, Funct, Anal; 8 (5), 788 - 809, (1998).

[31] Contreras,G; Gambaudo, J; Iturriaga, R; Paternain, G; *The asymptotic Maslov Index and its applications*-Ergod. Th. and Dynam. Sys; 23 (5), 1415 - 1443, (2003).

[32] Do Carmo, M; *Riemannian Geometry* - Mathematics: Theory and Applications, Birkhauser, (1992).

[33] Eberlein, P; *When is a geodesic flow of Anosov type?* - J. Differential Geometry, 8(1973), 437 - 463.

[34] Fathi, A; Giuliani, A; Sorrentino, A; *Uniquenes of Invariant Lagrangian Graphs in a Homology or Cohomology Class* - Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5), Vol VIII, 659-680, (2009).

[35] Fathi A; *Weak Kam Theorem in Lagrangian Dynamics* - Cambridge Studies in Advanced Mathematics,(2010).

[36] Fathi, A; *Denjoy-Schwartz and Hamilton-Jacobi* - DM and UMPA, ENS Lyon.

[37] Fathi, A; Siconolfi, A; *Existence of $C^1$ critical Subsolutions of the Hamilton-Jacobi Equation* - Invent, Math. 155, 363-388 (2004).

[38] Golubitsky, M; Guillemin, V; *Stable Mappings and Their Singularities* - Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, (1973).

[39] Golé, Christophe; *Symplectic Twist Maps- Global Variational Techniques* - Advanced Series In Nonlinear Dynamics- World Scientific, Vol 18, (2001).

[40] Goresky, M; Macpherson, R; *Stratified Morse Theory* - Springer-Verlag, (1988).

[41] Guckenheimer, J; *Catastrophes and Partial Differential Equations* - Annales de l'institut fourier, Tome 23, nº 2, 31 - 59, (1973).

[42] Guckenheimer, J; *Caustics and non-degenerate Hamiltonians* - Topology, Vol 13, 127-133, (1974).

[43] Herman, M, R; *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau,* vol. 1, Astérisque, 103-104(1983).

[44] Herman, M, R; *Inégalités a priori pour des tores Lagrangian invariants par des difféomorphismes symplectiques*- Publ. Math. IHES, 70, 47-101, (1989).

[45] LE CALVEZ, P; *Propriétés générales des applications déviant la verticale* - Bull. Soc. Math. France, 117 (1989),69-102.

[46] Lima, L, E; *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento* - Projeto Euclides, Impa, (2012).

[47] Lima, L, E; *Homologia Básica* - Projeto Euclides, Impa, (2012).

[48] Marsden, J; Abraham, R; *Foundations of Mechanics*- Addison-Wesley Publishing Company, INC, (1980).

[49] Massart, D; Sorrentino, A; *Differentiability of Mather's average action and integrability on close surfaces* - Nonlinearity, 24, 1777-1793, (2011)

[50] Mather N,J; *Action Minimizing inavriant measures for positive definte Lagrangian Systems*- Mathematische Zeitschrift, (1991).

[51] McDuff, D; Salamon ,D; *Introduction to Symplectic Topology*- Second Edition; Oxford, Claredon Press, (1998).

[52] Moser, J; Zehnder, J, E; *Notes on Dynamical System* - Courant Institute of Mathematical Sciences, AMS, (2005)

[53] Paternain, G,P; Paternain, M; *On Anosov Energy Levels of Convex Hamiltonian Systems*- Mathematische Zeitschrift, 217, 367 - 376, (1994).

[54] Paternain, G,P; Paternain, M; *Critical values of autonomous Lagrangian systems*- Comment. Math. Helv. 72, 481 - 499, (1997).

[55] Paternain, G; *Geodesic Flows* -Progress in Mathemtics, Birkhauser,(1999).

[56] Piccione, P; Tausk, V, D; *A Student's Guide to Sympectic Spaces, Grassmannians and Maslov Index* - Publicações Matemáticas, IMPA, (2011).

[57] Poincaré, H; *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste* - Grauthier-Viltars, Paris, Tome I, Vol 8, (1892).

[58] Polterovich, L; *The second Birkhoff Theorem for optical Hamiltonian systems* - Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 113, nº 2, October (1991).

[59] Polterovich, L; *Monotone Lagrangian submanifold of linear spaces and the Maslov class in cotangent bundles*-Math. Z, 207, 217 - 222, (1991).

[60] Sorentino, A; *On the structure of action-minimizing sets for Lagrangian systems*- Phd thesis, Pinceton University, (2008).

[61] Sorrentino, A; *Lectures Notes on Mather's Theory for Lagrangian Systems*- Arxiv, (2010).

[62] Sorrentino ,A; *Action-minimizing Methods in Hamiltonian Dynamics: An Introduction to Aubry-Mather Theory*-Princeton University Press, (2015).

[63] Viterbo, C; *A new obstruction to embedding Lagrangian tori*- Invent. Math; 100, 301 - 320, (1990).

[64] Weinstein, A; *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds* - Advances in mathematics, 6, 329-346, (1971).

[65] Weinstein, A; *Lagrangian Submanifolds and Hamiltonian Systems* - Annals of Mathematics, Vol 98, nº 3, 377 - 410, (1973).