

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



Sobre as regularidades das wavelets de Daubechies

Isadora Maria Miranda Guedes

Belo Horizonte - MG
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



Isadora Maria Miranda Guedes
Orientador: Prof. Dr. Paulo Cupertino de Lima

Sobre as regularidades das wavelets de Daubechies

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas-ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
2019

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre me dar forças para seguir minha caminhada e conseguir alcançar meus objetivos.

Aos meus pais, José Maria e Aparecida, por todo apoio e amor incondicional que sempre me deram. Obrigada por acreditarem em mim constantemente e por nunca medirem esforços para me proporcionar sempre o melhor. Sou muito grata por ter pais tão maravilhosos como vocês!

Aos meus familiares, por todas as orações, palavras de incentivo e apoio de sempre.

Agradeço aos meus amigos e colegas que deixei pelo caminho, na minha cidade e em Viçosa, que mesmo longe nunca estiveram ausentes, sempre me ouviram e me aconselharam quando precisei.

Aos amigos que fiz aqui em BH, na UFMG e no forró, pelos bons momentos que vivemos juntos em meio à correria dos estudos. Obrigada por tornarem essa caminhada mais leve!

Aos colegas do mestrado, pela troca de experiências e conhecimentos, pelas horas de estudo na salinha e pelo companheirismo.

Agradeço especialmente ao meu orientador, Professor Paulo Cupertino, por toda a disponibilidade, paciência e imprescindível apoio que sempre demonstrou em todas as reuniões. Obrigada por toda dedicação, correções, incentivo e todo o aprendizado que me proporcionou.

À todos os professores que tive durante toda a minha vida acadêmica, pelos ensinamentos e por todo o conhecimento que me propiciaram. Obrigada por colaborarem com a minha formação!

Aos funcionários do ICEX, em especial às secretárias da pós Kelli e Andréa, pela disponibilidade, cordialidade e gentileza de sempre.

À CAPES pelo fundamental auxílio financeiro.

Por fim, muito obrigada a todos que direta ou indiretamente contribuíram com a realização deste trabalho.

“A persistência é o menor caminho do êxito”.

Charles Chaplin

Resumo

Classicamente, uma wavelet é uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, tal que o conjunto de funções $\{\psi_{j,k}(x) : j, k \in \mathbb{Z}\}$, onde $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - k)$, forma uma base ortonormal para o espaço $L^2(\mathbb{R})$. Uma classe de wavelets particularmente importante são as wavelets de Daubechies, ${}_N\psi$, as quais constituem uma família de wavelets a um parâmetro N , onde $N \in \mathbb{N}$. Para cada N , a wavelet ${}_N\psi$ possui as seguintes propriedades: o tamanho do seu suporte é $2N - 1$, seus momentos de ordem $0, \dots, N - 1$ são nulos e sua regularidade cresce com N . A regularidade de uma wavelet é importante em compressão de dados, por exemplo, em imagens a qualidade visual depende da regularidade da wavelet utilizada.

Nesta dissertação, construiremos as wavelets ${}_N\psi$ e, a partir de estimativas do decaimento da transformada de Fourier de ${}_N\phi$, onde ${}_N\phi$ é a função de escala associada à ${}_N\psi$, seguindo as referências Daubechies [1] e Volkmer [2], analisaremos a regularidade de ${}_N\psi$. Mais precisamente, para $\alpha = n + \beta$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \beta < 1$, seja $C^\alpha(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções f que são n vezes continuamente diferenciáveis e tais que a sua n -ésima derivada $f^{(n)}$ é Hölder contínua com expoente β . Seguindo Daubechies [1], mostraremos que ${}_N\psi \in C^{\alpha_N}(\mathbb{R})$, onde $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_N}{N} = 1 - \frac{\log 3}{2 \log 2} \approx 0,2075$. Obtemos também cotas inferiores para α_N para valores pequenos de N . Por outro lado, o índice de regularidade da transformada de Fourier de ${}_N\phi$, denotado por γ_N , é o supremo sobre todos os γ tais que $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\omega|)^\gamma |\hat{\phi}(\omega)| d\omega < \infty$. Seguindo Volkmer [2], obtemos cotas inferiores e superiores para γ_N , o que nos permite reproduzir o limite acima de uma maneira mais simples. Além disso, melhoramos a cota inferior para γ_2 e encontramos uma cota superior para o mesmo.

Abstract

Classically, a wavelet is a function $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, such that the set of functions $\{\psi_{j,k}(x) : j, k \in \mathbb{Z}\}$, where $\psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}(2^{-j}x - k)$ constitutes an orthonormal basis for space $L^2(\mathbb{R})$. A particularly important class of wavelets is the wavelets of Daubechies, ${}_N\psi$, which constitute a family of wavelets at a parameter N , where $N \in \mathbb{N}$. For each N , a wavelet ${}_N\psi$ has the following properties: the size of its support is $2N - 1$, its moments of order $0, \dots, N - 1$ are null and their regularity grows with N . The regularity of a wavelet is important in data compression, for example, in images the visual quality depends on the regularity of the wavelet used.

In this dissertation, we will construct the wavelets ${}_N\psi$ and from estimates of the decay of the Fourier transform of ${}_N\phi$, where ${}_N\phi$ is the scaling function associated with ${}_N\psi$, following the references Daubechies [1] and Volkmer [2], we will analyze the regularity of ${}_N\psi$. More precisely, for $\alpha = n + \beta$, where $n \in \mathbb{N}$ and $0 \leq \beta < 1$, be $C^\alpha(\mathbb{R})$ the set of all functions f which are n times continuously differentiable and such that its n th derivative $f^{(n)}$ is continuous Hölder with exponent β . Following the article of Daubechies [1], we will show that ${}_N\psi \in C^{\alpha_N}(\mathbb{R})$, where $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_N}{N} = 1 - \frac{\log 3}{2 \log 2} \approx 0,2075$. We also obtain lower bounds for α_N for small values of N . On the other hand, the regularity index of the Fourier transform of ${}_N\phi$, denoted by γ_N , is the supreme overall γ such that $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\omega|)^\gamma |\hat{\phi}(\omega)| d\omega < \infty$. Following Volkmer [2], we get lower and upper bounds for γ_N , which allows us to reproduce the above limit in a simpler way. In addition, we improved the lower bound for γ_2 and found an upper bound for it.

Sumário

| | | |
|----------|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Introdução | 2 |
| 2 | Preliminares | 4 |
| 2.1 | Análise Funcional | 4 |
| 2.2 | Teoria de Integração | 5 |
| 2.3 | Análise de Fourier | 6 |
| 2.3.1 | Séries de Fourier | 7 |
| 2.3.2 | A transformada de Fourier | 8 |
| 2.3.3 | Decaimento da transformada de Fourier e regularidade | 8 |
| 2.4 | Análise Combinatória | 10 |
| 2.5 | Outros Resultados | 13 |
| 3 | As wavelets de Daubechies | 15 |
| 3.1 | Introdução às wavelets | 15 |
| 3.2 | Wavelets de Daubechies | 23 |
| 3.2.1 | Prova da relação (3.25) | 24 |
| 3.2.2 | Obtendo uma ARM a partir de m_0 | 27 |
| 3.2.3 | Construção de m_0 | 29 |
| 4 | Estudo da Regularidade via "força bruta" e ciclos invariantes | 34 |
| 4.1 | Método da Força Bruta | 35 |
| 4.2 | Estimativas de decaimento de $\hat{\phi}$ via ciclos invariantes | 49 |
| 5 | Estudo da Regularidade - um método alternativo | 65 |
| 5.1 | Estimativas mais precisas do índice de regularidade γ_2 | 72 |
| 5.1.1 | Encontrando uma cota superior para γ_2 | 72 |
| 5.1.2 | Encontrando uma cota inferior para γ_2 | 81 |
| 5.2 | Comportamento assintótico de γ_N - um método mais simples | 83 |
| | Referências Bibliográficas | 92 |

Capítulo 1

Introdução

Wavelets são ferramentas matemáticas que se tornaram muito importantes em aplicações nos dias atuais. Elas nos permitem decompor uma função em componentes correspondentes às diferentes escalas ou resoluções, hierarquicamente, indo das escalas menores, correspondentes aos detalhes mais finos e delicados, às escalas maiores, correspondentes aos detalhes mais grosseiros.

Existem dois tipos de wavelet: contínua, que é análoga à transformada de Fourier e usada principalmente em análise e caracterização de detalhes de sinais; e discreta, que é análoga a transformada de Fourier discreta e mais apropriada para a compressão e remoção de ruídos de sinais. Nesse trabalho, nos limitaremos ao estudo das wavelets discretas.

Uma importante diferença entre a transformada de Fourier e a transformada de wavelet são as propriedades de localização no tempo, por meio de translações, e na frequência, através de dilatações, que as wavelets possuem. A transformada de Fourier é ineficaz para aproximações de funções muito localizadas, devido ao fato das funções seno e cosseno, que são usadas nessa transformada, não serem locais.

A primeira wavelet foi introduzida por A. Haar [3] em 1910. Apesar da sua simplicidade, dela possuir suporte compacto e da sua importância em várias aplicações a processamento e análise de sinais, especialmente na compressão e remoção de ruídos de dados, ela não é contínua, o que é um limitante em muitas aplicações, por exemplo, em compressão de dados, onde a regularidade é importante. Durante vários anos, a wavelet de Haar foi a única wavelet de suporte compacto conhecida.

No final da década de 80, inspirado no trabalho de Stephane Mallat [4] em processamento digital de imagens, Yves Meyer [5] construiu a primeira wavelet não-trivial (suave). Ao contrário das wavelets de Haar, as wavelets de Meyer são continuamente diferenciáveis, porém elas não possuem suportes compactos.

Poucos anos mais tarde, Ingrid Daubechies, em [1], baseada nos trabalhos sobre análise de resolução em escalas múltiplas de Mallat [6] e Meyer, construiu uma família de wavelets a um parâmetro $N \in \mathbb{N}$ com suportes compactos, denotada por $N\psi$, onde para cada N a correspondente wavelet tem suporte em $[0, 2N - 1]$, seus momentos de ordem $0, 1, \dots, N - 1$ são nulos e a sua regularidade cresce com N . O número de momentos nulos e a regularidade de uma wavelet, são importante em aplicações, por exemplo, em compressão de dados. Quando compactamos uma imagem, a qualidade visual depende da regularidade da wavelet, enquanto que a habilidade de compressão depende do número de momentos nulos.

Em [1], além da construção das wavelets ${}_N\psi$, Daubechies também obtém as suas regularidades (que não são ótimas) para os primeiros valores de N e mostra que, para N grande, ${}_N\phi \in C^{\alpha_N}$, onde $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_N}{N} = 1 - \frac{\log 3}{2 \log 2}$.

Em Volkmer [2], usando argumentos bem mais simples que os de Daubechies [1], mostra-se que o índice de regularidade de $\widehat{{}_N\phi}$, denotado por γ_N , satisfaz $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma_N}{N} = 1 - \frac{\log 3}{2 \log 2}$. Além disso, ele mostra que ${}_2\phi \in C^{\gamma_2}$, onde $0,51109 \dots \leq \gamma_2 \leq 0,52739 \dots$.

Em ambos trabalhos [1] e [2], a regularidade de ${}_N\psi$ é obtida através do estudo do decaimento da transformada de Fourier da função de escala ${}_N\phi$, associada à wavelet ${}_N\psi$, visto que ambas têm a mesma regularidade e a construção desta passa primeiro pela construção daquela.

Um dos inconvenientes das técnicas usadas em [1] e [2] reside no fato que a transformada de Fourier nos dá regularidade global, embora existem pontos onde ${}_N\phi$ seja muito mais regular que em outros. A análise mais fina (local) da regularidade pode ser obtida por métodos mais diretos [7], embora eles se tornem mais complicados à medida em que N cresce.

Nesta dissertação apresentamos um estudo detalhado das regularidades das wavelets de Daubechies usando duas abordagens distintas: a primeira, desenvolvida por Daubechies [1] e a segunda, apresentada por Volkmer [2].

Essa dissertação é organizada da seguinte forma: no Capítulo 2, apresentamos as ferramentas matemáticas e definições necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. No Capítulo 3, introduzimos o conceito de análise de resolução em escalas múltiplas (ARM), que é um referencial onde wavelets são entendidas e construídas de maneira natural. Ainda nesse capítulo, construímos as wavelets de Daubechies a partir de um filtro m_0 . Como as wavelets de Daubechies herdam as propriedades de regularidade das suas funções de escalas, a nossa análise é feita diretamente sobre essas, através das estimativas dos decaimentos de suas transformadas de Fourier. Dedicamos os Capítulos 4 e 5 aos artigos de Daubechies [1] e Volkmer [2], respectivamente, obtendo os resultados citados acima correspondentes. Valendo a pena ressaltar que no Capítulo 4 usamos duas técnicas distintas: na primeira, o decaimento de $\widehat{{}_N\phi}$ é estimado via força bruta e, na segunda, via ciclos invariantes.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos, definições e notações da teoria de integração, análise funcional, séries e transformadas de Fourier e análise combinatória, que serão muito utilizados ao longo do trabalho.

2.1 Análise Funcional

Todos os resultados expostos nessa seção e as suas demonstrações podem ser vistos em livros textos como Kreyszig [8]. Falaremos um pouco sobre os espaços de Hilbert e ortogonalidade, conceitos que nos serão muito úteis na definição e construção das wavelets nos capítulos seguintes.

Definição 2.1. Dizemos que um espaço métrico normado $(X, \|\cdot\|)$ é completo se toda sequência de Cauchy em X converge para um elemento de X com relação à métrica induzida pela norma $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definição 2.2. Um produto interno em X é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow F$, onde $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , que satisfaz as seguintes condições:

- i) $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
- ii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
- iii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$.
- iv) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.

Um produto interno em X define uma norma em X dada por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Essa norma é chamada de **norma induzida** pelo produto interno.

Proposição 2.1 (Desigualdade de Cauchy Schwarz). *Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno e $u, v \in V$. Então,*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

A igualdade acontece se, e somente se u e v forem linearmente dependentes.

Definição 2.3 (Espaço de Hilbert). Um espaço com produto interno $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é dito ser um espaço de Hilbert, se ele é completo com relação à norma induzida pelo produto interno.

Definição 2.4. Dizemos que dois vetores $u, v \in \mathcal{H}$ são ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$.

Dado um conjunto $V \subset \mathcal{H}$ definimos o seu **complemento ortogonal**, denotado por V^\perp , como o conjunto de todos os vetores $u \in \mathcal{H}$ que são ortogonais ao conjunto V , isto é,

$$V^\perp = \{u \in \mathcal{H} : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in V\}.$$

Teorema 2.1. *Seja V um subespaço fechado de um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Então,*

$$\mathcal{H} = V \oplus V^\perp.$$

O teorema acima nos diz que dado $u \in \mathcal{H}$ existem únicos elementos $v \in V$ e $w \in V^\perp$, tais que

$$u = v + w.$$

O vetor v é chamado a **projecção ortogonal** de u em V .

Definição 2.5. Dizemos que um conjunto de elementos $V = \{v_i : i \in I\}$ em \mathcal{H} , para um conjunto I de índices, é ortonormal se seus elementos forem dois a dois ortogonais e todos eles possuírem norma igual a 1 ou, equivalentemente, se $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$, onde $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker.

2.2 Teoria de Integração

Os resultados apresentados nesta seção bem como suas demonstrações, podem ser encontrados em Bartle [9]. Introduziremos os espaços L_p , em especial o caso $p = 2$, que será de extrema importância nos capítulos seguintes. Usaremos a medida de Lebesgue e, assim, X será um subconjunto de \mathbb{R} .

Na teoria de medida e integração, a terminologia **em quase todos os pontos** é muito utilizada. Dizemos que uma certa propriedade acontece em quase todos os pontos (q.t.p), para dizer que ela ocorre em todos os pontos $x \in X$, exceto em um conjunto de medida nula.

Lema 2.1 (Lema de Fatou). *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis e não negativas. Então*

$$\int_X (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \left(\int_X f_n d\mu \right).$$

Teorema 2.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis e que converge em quase todos os pontos de X para uma função mensurável f . Se existir uma função integrável g , tal que $|f_n(x)| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é mensurável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Dizemos que duas funções são **equivalentes** se elas diferem apenas em um conjunto de medida nula.

Definição 2.6. Definimos o espaço L_p , $1 \leq p < \infty$, como o conjunto de todas as μ -classes de equivalência das funções mensuráveis f , tais que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$.

A função $\| \cdot \|_p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu < \infty \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em L_p e o torna um espaço normado completo.

Com abuso de notação, consideraremos os elementos de L_p como funções e nos referiremos a uma classe de equivalência em L_p como uma "função" em L_p .

Definição 2.7. Dizemos que uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em L_p converge em L_p para $f \in L_p$, se para todo $\epsilon > 0$ existir $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq N(\epsilon)$ então

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Veremos, abaixo, dois exemplos de espaços normados particularmente interessantes e que serão muito utilizados ao longo do texto.

Exemplo 2.1 (Espaço $L_2(\mathbb{R})$). Quando $p = 2$ temos o espaço $L_2(\mathbb{R})$, que é um espaço de Hilbert com a norma induzida pelo produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

onde $f, g \in L_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.2 (Espaço $l_2(\mathbb{Z})$). Chamamos de $l_2(\mathbb{Z})$ o conjunto das sequências complexas com índices inteiros que tem quadrados somáveis, isto é,

$$l_2(\mathbb{Z}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty\}.$$

Dadas as sequências $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ em $l_2(\mathbb{Z})$, definimos o produto escalar delas como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \overline{y_n}.$$

A norma em $l_2(\mathbb{Z})$ induzida pelo produto interno acima é

$$\|x\| = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Com essa norma o espaço $l_2(\mathbb{Z})$ é um espaço de Hilbert.

2.3 Análise de Fourier

Nesta seção veremos algumas definições e propriedades das séries e da transformada de Fourier, que serão ferramentas muito importantes e bastante utilizadas no restante do trabalho.

Mais detalhes e algumas demonstrações omitidas podem ser encontrados em livros textos como Figueiredo [10] e Reed and Simon [11].

2.3.1 Séries de Fourier

Seja $L_2([0, 2L])$ o espaço das funções periódicas de período $2L$, tais que $\int_0^{2L} |f(x)|^2 dx < \infty$. É fácil ver que o conjunto $\left\{ \frac{e^{\frac{in\pi x}{L}}}{\sqrt{2L}}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ é ortonormal em $L_2([0, 2L])$.

Dada uma função $f(x) \in L_2([0, 2L])$ a série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}},$$

com os c_n dados por

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx,$$

é chamada **série de Fourier** de f .

Teorema 2.3. *Se $f \in L_2([0, 2L])$, então a sequência $\sum_{n=-M}^M c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$ converge para f em $L_2([0, 2L])$, quando $M \rightarrow \infty$.*

No que segue veremos algumas definições e resultados sobre a convergência das séries de Fourier. Mais detalhes e as demonstrações omitidas podem ser vistos em Iório [12].

Definição 2.8. Uma função f é dita ser seccionalmente contínua em $[a, b]$ se existir uma partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$ tal que f seja contínua em cada subintervalo (x_j, x_{j+1}) , $0 \leq j \leq n-1$ e que $f(x)$ tenda a um limite finito quando $x \in (x_j, x_{j+1})$ tende a x_j ou a x_{j+1} , $0 \leq j \leq n-1$.

Claramente, toda função contínua é seccionalmente contínua.

Denotemos por $SC_{\text{per}}(2L)$ o espaço das funções reais periódicas de período $2L$ que são seccionalmente contínuas em qualquer intervalo $[a, b]$. Analogamente, denotemos por $C_{\text{per}}(2L)$ o espaço das funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e periódicas de período $2L$.

Dados $f \in SC_{\text{per}}(2L)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, denotamos por $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$ os seguintes limites laterais

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Teorema 2.4. *Seja $f \in SC_{\text{per}}(2L)$ e suponha que f é diferenciável, a menos de um número finito de pontos, em $(-L, L)$ com $f' \in SC_{\text{per}}(2L)$. Então, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, a série de Fourier de f no ponto x converge a $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.*

Teorema 2.5. *Suponha que $f \in C_{\text{per}}(2L)$ é diferenciável em $(-L, L)$ a menos de um número finito de pontos, com $f' \in SC_{\text{per}}(2L)$. Então a série de Fourier de f converge uniformemente em \mathbb{R} para f .*

2.3.2 A transformada de Fourier

Definição 2.9. A transformação $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ definida como

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$$

é uma bijeção, chamada de **transformada de Fourier** de f .

Teorema 2.6 (Plancherel). *Para quaisquer $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, temos*

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle,$$

em particular,

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

Definição 2.10. A fórmula de inversão para a transformada de Fourier é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega, \quad (2.1)$$

onde a igualdade acima vale em quase todos os pontos.

Note que se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então a sua transformada de Fourier é uniformemente limitada, ou seja, $|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$, para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Além disso, dados $a, b \in \mathbb{R}$, vale

$$\mathcal{F}(f(ax + b))(\omega) = \frac{1}{|a|} e^{-i\frac{b}{a}\omega} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (2.2)$$

2.3.3 Decaimento da transformada de Fourier e regularidade

Suponha que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e defina

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

Então $|g(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_1$. Além disso, como

$$g(x+h) - g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} (e^{i\omega h} - 1) \hat{f}(\omega) d\omega,$$

$|e^{i\omega x} (e^{i\omega h} - 1) \hat{f}| \leq 2|\hat{f}(\omega)| \in L^1(\mathbb{R})$ e $\lim_{h \rightarrow 0} e^{i\omega x} (e^{i\omega h} - 1) \hat{f}(\omega) = 0$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que g é contínua em todos os pontos. Em particular, se f for contínua em todos os pontos, então devemos ter $f(x) = g(x)$ em todos os pontos, uma vez que f e g são ambas contínuas em todos os pontos e $f(x) = g(x)$ em quase todos os pontos. Portanto, (2.1) vale para todo x .

Em nossas aplicações, a função f será a função de escala ${}_N\phi$, onde $N \geq 2$, portanto ${}_N\phi$ é contínua em todos os pontos e tem suporte em $[0, 2N - 1]$. Em particular,

$${}_N\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \widehat{{}_N\phi}(\omega) d\omega, \quad (2.3)$$

para todo x .

No que se segue, para simplificar as notações, por ϕ estará implícito $N\phi$, para algum $N \geq 2$. Suponha que $\omega\hat{\phi}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$, então

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{(e^{i\omega h} - 1)}{h} \hat{\phi}(\omega) d\omega.$$

Como $|e^{i\omega x} \frac{(e^{i\omega h} - 1)}{h} \hat{\phi}(\omega)| \leq |\omega\hat{\phi}(\omega)| \in L^1(\mathbb{R})$ e $\lim_{h \rightarrow 0} e^{i\omega x} \frac{(e^{i\omega h} - 1)}{h} \hat{\phi}(\omega) = i\omega e^{i\omega x} \hat{\phi}(\omega)$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\phi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega x} \hat{\phi}(\omega) d\omega.$$

Ou seja, ϕ é derivável em todos os pontos e podemos obter a derivada de ϕ a partir da fórmula de inversão (2.3), passando a derivada para dentro da integral. Além disso,

$$\phi'(x+h) - \phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} i\omega (e^{i\omega h} - 1) \hat{\phi}(\omega) d\omega.$$

Como $|e^{i\omega x} \omega (e^{i\omega h} - 1) \hat{\phi}(\omega)| \leq 2|\omega\hat{\phi}(\omega)| \in L^1(\mathbb{R})$ e $\lim_{h \rightarrow 0} e^{i\omega x} \omega (e^{i\omega h} - 1) \hat{\phi}(\omega) = 0$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\phi'(x+h) - \phi'(x)) = 0,$$

o que mostra que ϕ' é contínua em todos os pontos, ou seja, $\phi \in C^1(\mathbb{R})$.

Em geral, se $\omega^n \hat{\phi}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$, onde $n \in \mathbb{N}$, então usando os argumentos acima, podemos mostrar que $\phi \in C^n(\mathbb{R})$.

Suponha que $\omega^\alpha \hat{\phi}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$, onde $\alpha = n + \beta$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $\beta \in (0, 1)$. Em particular, $\omega^n \hat{\phi}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$, logo, pelo exposto acima, segue que $\phi \in C^n(\mathbb{R})$. Além disso,

$$\frac{\phi^{(n)}(x+h) - \phi^{(n)}(x)}{h^\beta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^n e^{i\omega x} \frac{(e^{i\omega h} - 1)}{h^\beta} \hat{\phi}(\omega) d\omega.$$

Como $|(i\omega)^n e^{i\omega x} \frac{(e^{i\omega h} - 1)}{h^\beta} \hat{\phi}| \leq 2^{1-\beta} \frac{|\text{sen}((\omega h)/2)|}{|(\omega h)/2|^\beta} |\omega^\alpha \hat{\phi}(\omega)|$ e $\frac{|\text{sen}((\omega h)/2)|}{|(\omega h)/2|^\beta} \leq \tilde{C}$, onde \tilde{C} é uma constante, então

$$\left| \frac{\phi^{(n)}(x+h) - \phi^{(n)}(x)}{h^\beta} \right| \leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{2\pi}} \|\omega^\alpha \hat{\phi}\|_1 := C.$$

Portanto,

$$\left| \phi^{(n)}(x+h) - \phi^{(n)}(x) \right| \leq C|h|^\beta,$$

o que mostra que $\phi^{(n)}$ é Hölder com expoente β . Ou seja, $\phi \in C^n(\mathbb{R})$ e $\phi^{(n)}$ é Hölder com expoente β .

2.4 Análise Combinatória

Os resultados exibidos nesta seção e as suas demonstrações podem ser encontrados em Morgado e outros [13]. As propriedades dos números binomiais que apresentaremos aqui serão muito úteis para demonstrarmos algumas propriedades dos polinômios que definiremos no Capítulo 3.

Definição 2.11. Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. O número binomial $\binom{n}{k}$ é dado por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Lema 2.2 (Relação de Stifel).

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Lema 2.3 (Relação das Combinações Complementares).

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Lema 2.4 (Teorema das Diagonais).

$$\sum_{j=0}^k \binom{n+j}{j} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Demonstração: Defina $S_{n,k} = \sum_{j=0}^k \binom{n+j}{j}$. Então, temos:

$$\begin{aligned} S_{n+1,k+1} &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+1+j}{j} = \binom{n+1+k+1}{k+1} + \sum_{j=0}^k \binom{n+1+j}{j} \\ &= \binom{n+k+2}{k+1} + \sum_{j=0}^k \frac{(n+j+1)!}{j!(n+1)!} \\ &= \binom{n+k+2}{k+1} + \sum_{j=0}^k \frac{(n+j)!}{j!(n+1)!} (n+1+j) \\ &= \binom{n+k+2}{k+1} + \sum_{j=0}^k \left[\frac{(n+j)!}{j!(n+1)!} j + \frac{(n+j)!}{j!(n+1)!} (n+1) \right] \\ &= \binom{n+k+2}{k+1} + \sum_{j=1}^k \frac{(n+j)!}{(j-1)!(n+1)!} + \sum_{j=0}^k \frac{(n+j)!}{j!n!} \\ &= \binom{n+k+2}{k+1} + \sum_{j=1}^k \frac{(n+j)!}{(j-1)!(n+1)!} + S_{n,k} \\ &= \binom{n+k+2}{k+1} + \left[S_{n+1,k+1} - \binom{n+k+2}{k+1} - \binom{n+k+1}{k} \right] + S_{n,k}. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} S_{n+1,k+1} &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+1+j}{j} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n+1+j}{j} + \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+2}{k+1} \\ &= \sum_{l=1}^k \binom{n+l}{l-1} + \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+2}{k+1}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\sum_{l=1}^k \frac{(n+l)!}{(l-1)!(n+1)!} = S_{n+1,k+1} - \binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k+2}{k+1}.$$

Portanto, substituindo em (2.4), obtemos

$$S_{n+1,k+1} = S_{n+1,k+1} - \binom{n+k+1}{k} + S_{n,k} \Rightarrow S_{n,k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

■

Lema 2.5. *Dados $n \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos*

$$\sum_{j=0}^n \binom{n+j}{j} [y^j(1-y)^{n+1} + y^{n+1}(1-y)^j] = 1.$$

Demonstração: Defina $A_{n,j} = \binom{n+j}{j}$. Então, pelo Teorema das Diagonais, (ver Lema 2.4), segue que $\sum_{j=0}^k A_{n,j} = A_{n+1,k}$.

Defina $S_n(y) = \sum_{j=0}^n A_{n,j} [y^j(1-y)^{n+1} + y^{n+1}(1-y)^j]$. Note que:

$$S_0(a) = (1-a) + a = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Assim, se mostrarmos que $S_n(a) = S_{n+1}(a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos o desejado. Para mostrar isso, inserimos repetidos fatores $[(1-a) + a]$ na soma, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_{n-1}(a) &= \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-1,j} [a^j(1-a)^n + a^n(1-a)^j] \\ &= A_{n-1,0} [(1-a)^n + a^n] + A_{n-1,1} [a(1-a)^n + a^n(1-a)] + \\ &\quad + \sum_{j=2}^{n-1} A_{n-1,j} [a^j(1-a)^n + a^n(1-a)^j] \\ &= A_{n-1,0} [(1-a)^n + a^n] [(1-a) + a] + A_{n-1,1} [a(1-a)^n + a^n(1-a)] + \\ &\quad + \sum_{j=2}^{n-1} A_{n-1,j} [a^j(1-a)^n + a^n(1-a)^j] \\ &= A_{n-1,0} [(1-a)^{n+1} + a^{n+1}] + (A_{n-1,0} + A_{n-1,1}) [a(1-a)^n + a^n(1-a)] + \\ &\quad + \sum_{j=2}^{n-1} A_{n-1,j} [a^j(1-a)^n + a^n(1-a)^j] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= A_{n,0}[(1-a)^{n+1} + a^{n+1}] + (A_{n-1,0} + A_{n-1,1})[a(1-a)^n + a^n(1-a)][(1-a) + a] + \\
 &\quad + A_{n-1,2}[a^2(1-a)^n + a^n(1-a)^2] + \sum_{j=3}^{n-1} A_{n-1,j}[a^j(1-a)^n + a^n(1-a)^j] \\
 &= A_{n,0}[(1-a)^{n+1} + a^{n+1}] + (A_{n-1,0} + A_{n-1,1})[a(1-a)^{n+1} + a^{n+1}(1-a)] + \\
 &\quad + (A_{n-1,0} + A_{n-1,1} + A_{n-1,2})[a^2(1-a)^n + a^n(1-a)^2] + \\
 &\quad + \sum_{j=3}^{n-1} A_{n-1,j}[a^j(1-a)^n + a^n(1-a)^j] \\
 &= A_{n,0}[(1-a)^{n+1} + a^{n+1}] + (A_{n-1,0} + A_{n-1,1})[a(1-a)^{n+1} + a^{n+1}(1-a)] \\
 &\quad + (A_{n-1,0} + A_{n-1,1} + A_{n-1,2})[a^2(1-a)^n + a^n(1-a)^2][(1-a) + a] + \\
 &\quad + A_{n-1,3}[a^3(1-a)^n + a^n(1-a)^3] + \sum_{j=4}^{n-1} A_{n-1,j}[a^j(1-a)^n + a^n(1-a)^j] \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Continuando o processo acima e usando que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale,

$$2A_{n,n-1} = A_{n,n-1} + A_{n,n-1} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n} = A_{n,n},$$

voltando na igualdade (2.6) obtemos,

$$\begin{aligned}
 S_{n-1}(a) &= \sum_{j=0}^{n-1} A_{n,j}[a^j(1-a)^{n+1} + a^{n+1}(1-a)^j] + 2 \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-1,k}[a^k(1-a)^n] \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} A_{n,j}[a^j(1-a)^{n+1} + a^{n+1}(1-a)^j] + 2A_{n,n-1}[a^n(1-a)^n][(1-a) + a] \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} A_{n,j}[a^j(1-a)^{n+1} + a^{n+1}(1-a)^j] + A_{n,n}[a^n(1-a)^{n+1} + a^{n+1}(1-a)^n] \\
 &= \sum_{j=0}^n A_{n,j}[a^j(1-a)^{n+1} + a^{n+1}(1-a)^j] \\
 &= S_n(a).
 \end{aligned}$$

Assim, $S_{n-1}(a) = S_n(a)$ para todo $n \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$S_n(a) = \dots = S_1(a) = S_0(a) = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$\sum_{j=0}^n \binom{n+j}{j} [y^j(1-y)^{n+1} + y^{n+1}(1-y)^j] = 1.$$

■

2.5 Outros Resultados

Nesta seção apresentamos resultados gerais que serão úteis no decorrer do trabalho. Os resultados que não estão demonstrados contêm referências de onde suas demonstrações podem ser vistas.

Lema 2.6 (Teorema de Bézout, [14]). *Sejam p_1 e p_2 dois polinômios de graus $n_1 \in \mathbb{N}^*$ e $n_2 \in \mathbb{N}^*$ respectivamente, sem nenhum zero em comum. Então existem únicos polinômios q_1 e q_2 de graus $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ respectivamente, tais que*

$$p_1(x)q_1(x) + p_2(x)q_2(x) = 1.$$

Lema 2.7 (Lema de Riesz, [14]). *Seja A um polinômio trigonométrico positivo invariante para a substituição $\xi \mapsto -\xi$; A é necessariamente da forma*

$$A(\xi) = \sum_{m=0}^M a_m \cos(m\xi), \text{ com } a_m \in \mathbb{R}.$$

Então, existe um polinômio trigonométrico B de ordem M , isto é,

$$B(\xi) = \sum_{m=0}^M b_m e^{im\xi}, \text{ com } b_m \in \mathbb{R},$$

tal que

$$|B(\xi)|^2 = A(\xi).$$

Lema 2.8 (Fórmula de Stirling [15]). *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{r_n},$$

onde r_n satisfaz a seguinte desigualdade $\frac{1}{12n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{12n}$.

Lema 2.9. *Dado $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, temos que $\prod_{j=1}^{\infty} \cos(2^{-j}z) = \frac{\text{sen}(z)}{z}$.*

Demonstração: Sabemos que $\text{sen}(2\omega) = 2 \text{sen}(\omega) \cos(\omega)$. Iterando essa relação n vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \text{sen}(z) &= 2 \text{sen}\left(\frac{z}{2}\right) \cos\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= 2^2 \text{sen}\left(\frac{z}{4}\right) \cos\left(\frac{z}{4}\right) \cos\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= 2^3 \text{sen}\left(\frac{z}{8}\right) \cos\left(\frac{z}{8}\right) \cos\left(\frac{z}{4}\right) \cos\left(\frac{z}{2}\right) \\ &\vdots \\ &= 2^n \text{sen}\left(\frac{z}{2^n}\right) \prod_{j=1}^n \cos(2^{-j}z) \end{aligned}$$

2.5. OUTROS RESULTADOS

Portanto,

$$\prod_{j=1}^n \cos(2^{-j}z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{2^n \operatorname{sen}\left(\frac{z}{2^n}\right)} = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2^n}\right)}{\frac{z}{2^n}} \right]}$$

Como $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\omega)}{\omega} = 1$, fazendo $n \rightarrow \infty$ na igualdade acima, obtemos o resultado desejado. ■

Capítulo 3

As wavelets de Daubechies

Neste capítulo daremos a definição geral de wavelets, introduziremos o conceito de análise de resolução em escalas múltiplas (ARM) e comentaremos sobre algumas propriedades gerais dessas, que serão muito utilizadas ao longo do texto. Em seguida, apresentaremos como construir uma ARM a partir de m_0 , que será dado em (3.20) e, por fim, passaremos para a construção das wavelets de Daubechies.

3.1 Introdução às wavelets

Usaremos a definição clássica de wavelets, que nos conduz às chamadas wavelets de primeira geração, construídas a partir das operações de translação e dilatação de uma única função.

Definição 3.1. Classicamente, definimos uma wavelet como uma função $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ tal que a família de funções

$$\{\psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}x - k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$$

seja uma base ortonormal para $L_2(\mathbb{R})$.

Observe que, pelo fator de normalização $2^{-\frac{j}{2}}$ na definição de $\psi_{j,k}$, temos, para todo $j, k \in \mathbb{Z}$, que $\|\psi\| = \|\psi_{j,k}\|$. Daí, se $\|\psi\| = 1$, então $\|\psi_{j,k}\| = 1$ para todo $j, k \in \mathbb{Z}$. Da definição acima segue que se ψ é uma wavelet, então $\psi_{j,k}$ para quaisquer $j, k \in \mathbb{Z}$ fixos também será uma wavelet. Por isso, segue que o conjunto $\{\psi_{j,k}(x) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal de wavelets para $L_2(\mathbb{R})$.

A seguir, daremos o exemplo mais simples de wavelet.

Exemplo 3.1. Considere a função ψ definida por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

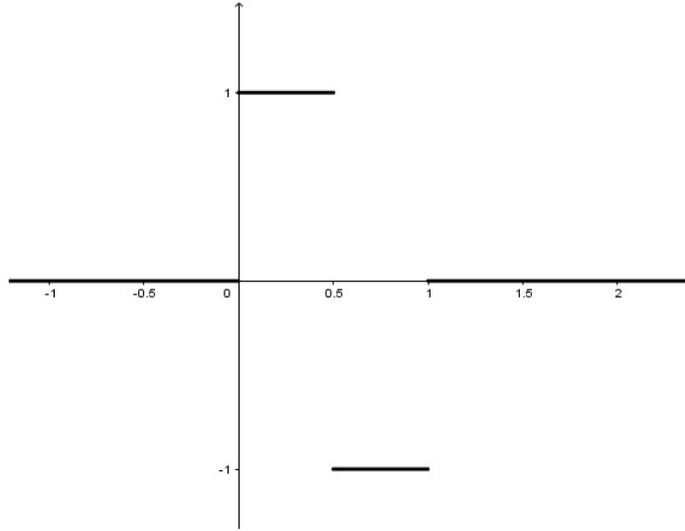


Figura 3.1: Gráfico da função ψ .

A função acima é chamada **wavelet de Haar**. Note que $\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1)$, onde ϕ é a função característica do intervalo $[0, 1)$, chamada de **função de escala** associada a wavelet de Haar.

A demonstração de que a função ψ é, de fato, uma wavelet segue dos dois seguintes lemas, veja [16].

Lema 3.1. *O conjunto $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ é ortonormal.*

Lema 3.2. *Toda função $f \in L_2(\mathbb{R})$ pode ser arbitrariamente aproximada por uma combinação linear finita de $\psi_{j,k}$, ou seja, o conjunto de tais combinações é denso em $L_2(\mathbb{R})$.*

A seguir definiremos o conceito de análise de resolução em escalas múltiplas (ARM), a qual foi formulada em 1986 por Mallat [6] e Meyer [5]. Ela nos fornece um referencial natural para construir novos exemplos de wavelets. Antes desse conceito, não havia uma maneira sistemática para a construção de wavelets, as pessoas nos seus estudos em diversas áreas como engenharia, física, matemática e outras, construía, cada um do seu jeito, suas wavelets a medida que precisavam.

Definição 3.2. Uma ARM é uma sequência $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, de espaços fechados de $L_2(\mathbb{R})$, tais que

$$V_j \subset V_{j-1}, \forall j \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \tag{3.2}$$

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R}) \tag{3.3}$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_0 \tag{3.4}$$

$$f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x - n) \in V_0, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.5)$$

$$\text{Existe } \phi \in L_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } \{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ constitui uma base ortonormal para } V_0. \quad (3.6)$$

A função ϕ cuja existência é afirmada na condição acima é chamada de **função escala** da ARM dada.

Exemplo 3.2. O exemplo mais simples de ARM que temos é a de Haar, onde

- ϕ é a função característica do intervalo $[0, 1)$.
- V_j é o subespaço de $L_2(\mathbb{R})$ gerado pelas funções constantes por partes em intervalos da forma $[k2^j, (k + 1)2^j)$, portanto, gerado por $\phi_{j,k}$.

No que se segue, faremos algumas observações sobre as condições da definição de ARM dada acima.

- 1) Cada conjunto V_j pode ser interpretado como um espaço de aproximação sucessiva, e a aproximação de $f \in L_2(\mathbb{R})$ na resolução 2^j é definida como a projeção de f sobre V_j .
- 2) A condição (3.3) significa que $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = f$ para toda $f \in L_2(\mathbb{R})$, onde P_j é a projeção ortogonal de f sobre V_j .
- 3) A condição (3.4) nos diz que todos os espaços V_j estão relacionados por escala a um mesmo espaço, que é V_0 .
- 4) Das condições (3.4) e (3.5) segue que se $f(x) \in V_j$ então $f(x - 2^j n) \in V_j$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De fato, dado $j \in \mathbb{Z}$ qualquer, observe que se $f(x) \in V_j$ então, de (3.4), temos $f(2^j x) \in V_0$. Assim, de (3.5), $f(2^j(x - n)) = f(2^j x - 2^j n) \in V_0$. Logo, novamente por (3.4), segue que $f(x - 2^j n) \in V_j$.
- 5) As condições (3.4) e (3.6) asseguram que o conjunto $\{\phi_{n,j}(x), n \in \mathbb{Z}\}$ constitui uma base ortonormal para V_j , para todo $j \in \mathbb{Z}$.

De fato, suponha que $\{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ seja uma base ortonormal para V_0 . Assim, de (3.4), temos que $\phi(2^{-j}x - n) \in V_j$, para todo $n, j \in \mathbb{Z}$. Além disso, dado $g \in V_j$, segue que

$$g(x) \in V_j \Rightarrow g(2^j x) \in V_0 \Rightarrow g(2^j x) = \sum_n a_n \phi(x - n) \Rightarrow g(x) = \sum_n a_n \phi(2^{-j}x - n).$$

Logo, $\{\phi_{n,j}(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base para V_j para todo $j \in \mathbb{Z}$. A ortonormalidade vem de um lema similar ao Lema 3.1 trocando $\psi_{j,k}$ por $\phi_{j,k}$.

Observação 3.1. Denotamos por W_j o complemento ortogonal de V_j com relação a V_{j-1} . Assim, como $V_j \subset V_{j-1}$, temos que $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$. Dessa forma, uma função em V_{j-1} pode ser escrita, de forma única, como a soma de sua projeção em V_j , que denotamos por $P_j f$, com um incremento que está em W_j e nos fornece os detalhes necessários para aumentarmos a resolução da função de 2^j para 2^{j-1} .

3.1. INTRODUÇÃO ÀS WAVELETS

A seguir, mostraremos algumas propriedades dos subespaços W_j .

- Note que vale a seguinte relação

$$f \in W_j \Leftrightarrow f \in V_{j-1} \text{ e } f \perp V_j. \quad (3.7)$$

De fato, se $f \in W_j$ como W_j é o complemento ortogonal de V_j , então $f \perp V_j$. E, como $W_j \subset V_{j-1}$, então, $f \in V_{j-1}$. Reciprocamente, se $f \in V_{j-1}$ e $f \perp V_j$, como $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$, devemos ter $f \in W_j$.

- Os subespaços W_j herdam a propriedade de escala (3.4) dos subespaços V_j , isto é

$$f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in W_0. \quad (3.8)$$

Com efeito, suponha que $f(x) \in W_j$. Então, pela relação (3.7), temos

$$f \in V_{j-1} \Rightarrow f(x) = \sum_k a_k \phi(2^{-(j-1)}x - k), \quad \forall x \quad (3.9)$$

e

$$f \perp V_j \Rightarrow \langle f, \phi_{j,k} \rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall x. \quad (3.10)$$

Dessa forma, substituindo x por $2^j x$ em (3.9), obtemos

$$f(2^j x) = \sum_k a_k \phi(2^{-(j-1)}2^j x - k) = \sum_k a_k \phi(2x - k), \quad \forall x,$$

o que implica que $f(2^j x) \in V_{-1}$. Além disso, de (3.10), para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$\langle f(2^{-j}x), \phi_{0,k}(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(2^{-j}x) \overline{\phi(x-k)} dx = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}y - k)} dy = 2^{-\frac{j}{2}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle = 0,$$

o que significa que $f(2^j x) \perp V_0$.

Logo, de (3.7), segue que $f(2^j x) \in W_0$. Reciprocamente, suponha que $f(2^j x) \in W_0$. Então, novamente pela relação (3.7), temos

$$f(2^j x) \in V_{-1} \Rightarrow f(2^j x) = \sum_k b_k \phi(2x - k), \quad \forall x, \quad (3.11)$$

e

$$f(2^j x) \perp V_0 \Rightarrow \langle f(2^j x), \phi_{0,k} \rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall x. \quad (3.12)$$

Assim, substituindo x por $2^j x$ em (3.11), temos

$$f(x) = \sum_k b_k \phi(2(2^{-j}x) - k) = \sum_k b_k \phi(2^{-(j-1)}x - k), \quad \forall x.$$

Isso prova que $f(x) \in V_{j-1}$. Por outro lado, usando (3.12), obtemos para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\langle f(x), \phi_{j,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}x - k)} dx = 2^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(2^j y) \overline{\phi(y - k)} dy = 2^{\frac{j}{2}} \langle f(2^j y), \phi_{0,k} \rangle = 0,$$

o que implica que $f(x) \perp V_j$. Portanto, segue que $f(x) \in W_j$.

- Da relação (3.8) temos que se $\{\psi(x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ for uma base ortonormal para W_0 , então o conjunto $\{\psi_{j,k}(x) : k \in \mathbb{Z}\}$ será uma base ortonormal para W_j .

- Os subespaços W_j são ortogonais entre si. De fato, como $\{\psi_{j,k}(x) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para W_j , então dados $j, l \in \mathbb{Z}$ com $j \neq l$ e dadas $f \in W_j$ e $g \in W_l$, podemos escrever que

$$f(x) = \sum_n a_n \psi_{j,n} \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_m b_m \psi_{l,m}.$$

Daí, pelo Lema 3.1, temos

$$\langle f, g \rangle = \left\langle \sum_n a_n \psi_{j,n}, \sum_m b_m \psi_{l,m} \right\rangle = \sum_n \sum_m a_n \bar{b}_m \langle \psi_{j,n}, \psi_{l,m} \rangle = 0.$$

Logo, $\langle f, g \rangle = 0$, para todas as funções $f \in W_j$ e $g \in W_l$ para $j \neq l$, ou seja, $W_j \perp W_l$, para todo $j \neq l$.

Além disso, sabemos que $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ e $W_j \subset V_{j-1}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Seja $J > j$, então iterando J vezes a equação $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$, obtemos

$$\begin{aligned} V_j &= V_{j+1} \oplus W_{j+1} \\ V_j &= V_{j+2} \oplus W_{j+2} \oplus W_{j+1} \\ &\vdots \\ V_j &= V_J \oplus W_J \oplus W_{J-1} \oplus \cdots \oplus W_{j+1} \end{aligned}$$

Assim, $V_j = V_J \oplus \left(\bigoplus_{k=0}^{J-j-1} W_{J-k} \right)$. Isso, junto com as condições (3.2) e (3.3) da definição de ARM, nos dá que

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j, \tag{3.13}$$

que é uma decomposição do espaço $L_2(\mathbb{R})$ em subespaços que são mutuamente ortogonais.

O seguinte teorema é um dos mais importantes da ARM.

Teorema 3.1. *Se uma seqüência de subespaços fechados $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ em $L_2(\mathbb{R})$ e $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ satisfazem as condições (3.1)–(3.6) da definição de ARM dada, então existe uma base ortonormal de wavelets $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ para $L_2(\mathbb{R})$ tal que*

$$P_{j-1} = P_j + \sum_k \langle \cdot, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \tag{3.14}$$

onde P_j é a projeção ortogonal sobre V_j . Uma possível escolha de ψ é

$$\psi = \sum_n (-1)^{n-1} \overline{h_{-n-1}} \phi_{-1,n}, \tag{3.15}$$

3.1. INTRODUÇÃO ÀS WAVELETS

onde $h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle$ e a convergência da série em (3.15) é dada em $L_2(\mathbb{R})$.

A demonstração desse teorema pode ser vista na Seção 5.1 de Daubechies [14] ou na Seção 2.2 de Hernández e Weiss [17]. É uma demonstração construtiva, que nos dá um passo a passo para construirmos uma wavelet ψ a partir de uma ARM, usando como ferramenta principal a transformada de Fourier.

Abaixo chamaremos atenção para algumas observações importantes e demonstraremos propriedades que serão usadas ao longo do trabalho.

- Observe que a fórmula (3.14) significa que $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, para um $j \in \mathbb{Z}$ fixo, forma uma base ortonormal para W_j . Assim, de (3.13), temos que a coleção completa $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$, é uma base ortonormal para $L_2(\mathbb{R})$.

- Além disso, a propriedade de escala para ψ , dada em (3.8), nos assegura que se $\{\psi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ for uma base ortonormal para W_0 então, dado $j \in \mathbb{Z}$ qualquer, o conjunto $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ será uma base ortonormal para W_j .

Observação 3.2. Como $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$ e $\{\phi_{-1,n} : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para V_{-1} , então

$$\phi = \sum_n h_n \phi_{-1,n}. \quad (3.16)$$

Daí, pela ortonormalidade da base, obtemos

$$\langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle = \left\langle \sum_k h_k \phi_{-1,k}, \phi_{-1,n} \right\rangle = \sum_k h_k \langle \phi_{-1,k}, \phi_{-1,n} \rangle = h_n.$$

Além disso,

$$\sum_n |h_n|^2 = \sum_n \sum_k h_n \bar{h}_k \langle \phi_{-1,k}, \phi_{-1,n} \rangle = \left\langle \sum_n h_n \phi_{-1,n}, \sum_k h_k \phi_{-1,k} \right\rangle = \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \|\phi_{0,0}\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = 1.$$

Portanto, temos

$$h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle \text{ e } \sum_n |h_n|^2 = 1. \quad (3.17)$$

Da equação (3.16), segue a seguinte relação

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x - n), \quad (3.18)$$

que é chamada de **relação de escala** para ϕ . Essa relação é muito importante, pois nos cálculos numéricos que fazemos só usamos os coeficientes h_n , chamados **coeficientes de filtro**, ao invés da função escala ou da própria wavelet ψ .

Da equação de escala (3.18) e da linearidade da transformada de Fourier, segue que

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-\frac{in\xi}{2}} \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

em que a convergência da série acima ocorre em $L_2(\mathbb{R})$. A equação acima pode ser reescrita como

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad (3.19)$$

onde

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi}. \quad (3.20)$$

Observe que m_0 é uma função 2π -periódica e $m_0 \in L_2([0, 2\pi])$, uma vez que de (3.17), temos

$$\|m_0(\xi)\|_{L_2([0, 2\pi])}^2 = \int_0^{2\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2} \sum_n \sum_m h_n \overline{h_m} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-m)\xi} d\xi = \pi \left(\sum_n |h_n|^2 \right) = \pi < \infty.$$

Observação 3.3. A relação $\langle \phi_{0,n}, \phi \rangle = \delta_{0,n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, nos fornece a seguinte relação de consistência

$$\begin{aligned} \delta_{0,n} &= \langle \phi_{0,n}, \phi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x-n) \overline{\phi(x)} dx \\ &= 2 \sum_k \sum_l h_k \overline{h_l} \int_{\mathbb{R}} \phi(2x-2n-k) \overline{\phi(2x-l)} dx \\ &= \sum_k \sum_l h_k \overline{h_l} \int_{\mathbb{R}} \phi(y-(2n+k)) \overline{\phi(y-l)} dy \\ &= \sum_k \sum_l h_k \overline{h_l} \langle \phi_{0,2n+k}, \phi_{0,l} \rangle \\ &= \sum_k \sum_l h_k \overline{h_l} \delta_{2n+k,l} \\ &= \sum_k h_k \overline{h_{2n+k}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_k h_k \overline{h_{2n+k}} = \delta_{0,n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.21)$$

Observação 3.4. Suponha que $h = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z})$, isto é, $h_n \in \mathbb{C}$ e é tal que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n| < \infty$, e que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \neq 0$. Então, temos a seguinte relação

$$\sum_k h_k = \sqrt{2} \quad (3.22)$$

que é chamada de **condição de passa baixa**.

De fato, integrando a relação de escala para ϕ , (3.18), temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \sqrt{2} \sum_n h_n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-n) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx.$$

3.1. INTRODUÇÃO ÀS WAVELETS

Como $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx \neq 0$, segue que

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n, \text{ ou seja, } \sum_n h_n = \sqrt{2}.$$

Note que de (3.20) e (3.22), concluímos que

$$m_0(0) = 1.$$

O lema abaixo nos dá condições necessárias e suficientes para que o conjunto $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ seja ortonormal em $L_2(\mathbb{R})$.

Lema 3.3. *Translações por inteiros $\phi_{0,n} = \phi(x - n)$ de uma função $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ formam um sistema ortonormal se, e somente se, vale a igualdade*

$$\sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}, \quad (3.23)$$

em quase todos os pontos.

Demonstração: Como a transformada de Fourier preserva o produto interno, da ortonormalidade de $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \delta_{0,n} &= \langle \phi_{0,0}, \phi_{0,n} \rangle \\ &= \langle \hat{\phi}_{0,0}, \hat{\phi}_{0,n} \rangle \\ &= \int |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{in\xi} d\xi \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{in\xi} d\xi \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 e^{in\omega} d\omega \\ &=: 2\pi c_n, \end{aligned}$$

onde, por definição, c_n é o n -ésimo coeficiente de Fourier da série da função $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2$. Sabemos que a série de Fourier de uma função converge em quase todos os pontos para a função. Assim, da igualdade acima, segue que os coeficientes da função $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2$ são dados por $c_n = \frac{\delta_{0,n}}{2\pi}$. Logo

$$\sum_l |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = (2\pi)^{-1},$$

em quase todos os pontos.

Reciprocamente, se vale (3.23), então os coeficientes, c_n , da série de Fourier da função $\sum_l |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2$ valem $(2\pi)^{-1} \delta_{0,n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, podemos escrever

$$(2\pi)^{-1} \delta_{0,n} = c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 e^{-in\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi.$$

Logo,

$$\delta_{0,n} = \int |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi = \int \hat{\phi}(\xi) \overline{e^{in\xi} \hat{\phi}(\xi)} d\xi = \int \hat{\phi}(\xi) \overline{\hat{\phi}(x+n)} d\xi = \langle \phi_{0,0}, \phi_{0,-n} \rangle.$$

Portanto, o conjunto $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é ortonormal. ■

O lema a seguir nos fornece uma relação muito importante da função m_0 .

Lema 3.4.

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1, \tag{3.24}$$

em quase todos os pontos.

Demonstração: Substituindo (3.19) em (3.23) e separando a soma em índices pares e ímpares, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} + \pi l \right) \hat{\phi} \left(\frac{\omega}{2} + \pi l \right) \right|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} + 2n\pi \right) \hat{\phi} \left(\frac{\omega}{2} + 2n\pi \right) \right|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2n\pi \right) \hat{\phi} \left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2n\pi \right) \right|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} \right) \hat{\phi} \left(\frac{\omega}{2} + 2n\pi \right) \right|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} + \pi \right) \hat{\phi} \left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2n\pi \right) \right|^2 \\ &= \left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2n\pi)|^2 + \left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} + \pi \right) \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2n\pi)|^2, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade vem da periodicidade de m_0 e, a última igualdade vem do fato que a igualdade (3.23) vale em quase todos os pontos. Daí,

$$\frac{1}{2\pi} = (|m_0(\zeta)|^2 + |m_0(\zeta + \pi)|^2) \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2l\pi)|^2,$$

ou seja,

$$|m_0(\zeta)|^2 + |m_0(\zeta + \pi)|^2 = 1,$$

em quase todos os pontos. ■

Note que, do Lema 3.4, segue que $|m_0(\omega)| \leq 1$, em quase todos os pontos.

3.2 Wavelets de Daubechies

Nessa seção construiremos as wavelets de Daubechies. Pelo Teorema (3.1), vimos que a partir da função escala ϕ , obtemos a wavelet ψ . Além disso, de (3.15), ψ terá suporte compacto, se o mesmo acontecer com ϕ . Assim, nosso objetivo é construir ϕ que tenha suporte compacto. Como os resultados dessa construção são padrões e encontrados em vários livros textos, como Hernández e Weiss [17] e Daubechies [14], omitiremos algumas demonstrações.

A construção de ϕ será feita a partir de um filtro m_0 , ou seja, mostraremos que se m_0 satisfizer a igualdade (3.24) e as condições (3.28) e (3.29), iterando a igualdade (3.19), veja a Subseção

3.2.1, obteremos a fórmula

$$\hat{\phi}(\xi) = 2^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi), \quad (3.25)$$

que será o ponto de partida nas estimativas de regularidade que veremos nos Capítulos 4 e 5. No entanto, essas condições não são suficientes para garantir que o conjunto $\{\phi(x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, onde ϕ é definida por (3.25), seja ortonormal. Para tal, precisamos também que m_0 satisfaça

$$m_0(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (3.26)$$

Se (3.26) ocorrer, garantimos que a sequência $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ com V_j definido por

$$V_j = \overline{\text{span}\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}}, \quad (3.27)$$

forma uma ARM da qual ϕ é a função de escala. Portanto, pelo Teorema (3.1), temos a wavelet ψ .

3.2.1 Prova da relação (3.25)

Suponha que m_0 satisfaça a igualdade (3.24) e as seguintes condições:

$$m_0 \in C^1 \text{ e } m_0 \text{ é } 2\pi\text{-periódica}; \quad (3.28)$$

$$m_0(0) = 1. \quad (3.29)$$

Os próximos dois lemas nos ajudarão a provar a relação (3.25).

Lema 3.5. *Sejam $\hat{\phi}(\xi)$ e $m_0(\xi)$ funções contínuas tais que m_0 satisfaça as condições (3.28) e (3.29), e tais que sejam válidas as equações (3.19) e (3.24) em todos os pontos. Então, temos que $\hat{\phi}(2k\pi) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, com $k \neq 0$.*

Demonstração: Como $m_0(0) = 1$, fazendo $\omega = 0$ em (3.24) temos que $1 + |m_0(\pi)|^2 = 1$, ou seja, $m_0(\pi) = 0$. Por outro lado, iterando a equação (3.19) l vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\xi) &= m_0(2^{-1}\xi)\hat{\phi}(2^{-1}\xi) \\ \hat{\phi}(\xi) &= m_0(2^{-1}\xi)m_0(2^{-2}\xi)\hat{\phi}(2^{-2}\xi) \\ &\vdots \\ \hat{\phi}(\xi) &= \prod_{j=1}^l m_0(2^{-j}\xi)m_0(2^{-(l+1)}\xi)\hat{\phi}(2^{-(l+1)}\xi) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dado $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, existem $l \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$ tais que $2k = 2 \cdot 2^l(2m + 1)$. Logo, de (3.30), temos:

$$\hat{\phi}(2k\pi) = \hat{\phi}(2^{l+1}(2m + 1)\pi) = \prod_{j=1}^l m_0(2^{l+1-j}(2m + 1)\pi)[m_0((2m + 1)\pi)\hat{\phi}((2m + 1)\pi)].$$

3.2. WAVELETS DE DAUBECHIES

Como $j \leq l$, então $l - j \geq 0$ e, daí, pela periodicidade de m_0 , temos

$$m_0(2^{l+1-j}(2m+1)\pi) = m_0(2^{l-j}(2m+1)2\pi) = m_0(0) = 1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, l.$$

Também pela periodicidade de m_0 , seque que $m_0((2m+1)\pi) = m_0(\pi)$. Portanto, para todo $k \in \mathbb{Z}$ com $k \neq 0$, de (3.30) obtemos

$$\hat{\phi}(2k\pi) = \prod_{j=1}^l m_0(0)m_0(\pi)\hat{\phi}((2m+1)\pi) = 0,$$

pois vimos que $m_0(\pi) = 0$. ■

Lema 3.6. *Seja m_0 dada por (3.20), tal que $\sum_n n|h_n| < \infty$ e $m_0(0) = 1$. Além disso, suponha que $\hat{\phi}$ e m_0 satisfaçam a relação (3.19) em todos os pontos e que $\hat{\phi}$ seja contínua em $\xi = 0$. Então,*

$$\hat{\phi}(\xi) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) \right) \cdot \hat{\phi}(0) \quad (3.31)$$

em todos os pontos e o produto infinito acima converge absoluta e uniformemente em compactos.

Demonstração: Como vimos na demonstração do Lema 3.5, iterando $l - 1$ vezes a igualdade (3.19), obtemos:

$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^l m_0(2^{-j}\xi) \cdot \hat{\phi}(2^{-l}\xi).$$

Quando $l \rightarrow \infty$, temos que $2^{-l}\xi \rightarrow 0$. Daí, pela continuidade de $\hat{\phi}$ em $\xi = 0$, basta mostrarmos que o produto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)$ converge absoluta e uniformemente em compactos. Vimos na seção anterior em (3.22) que, como $m_0(0) = 1$, vale que $\sum_n h_n = \sqrt{2}$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} |m_0(\xi)| &\leq 1 + |m_0(\xi) - 1| \\ &= 1 + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n \right| \\ &\leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n |h_n| |e^{-in\xi} - 1| \\ &= 1 + \sqrt{2} \sum_n |h_n| \left| \operatorname{sen} \left(\frac{n\xi}{2} \right) \right|, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde na última igualdade usamos que

$$|e^{-in\xi} - 1| = \left| -2i \frac{e^{-\frac{in\xi}{2}} (e^{\frac{in\xi}{2}} - e^{-\frac{in\xi}{2}})}{2i} \right| = 2 \left| \operatorname{sen} \left(\frac{n\xi}{2} \right) \right|.$$

Agora, como $\sum_n n|h_n| < \infty$, existe uma constante $M \geq 0$ tal que $\sum_n n|h_n| = M$. Usando

isso e o fato que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$, para todo x , em (3.32), obtemos

$$|m_0(\xi)| \leq 1 + \sqrt{2} \sum_n |h_n| \left| \frac{n\xi}{2} \right| = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} |\xi| \sum_n n |h_n| = 1 + C|\xi| \leq e^{C|\xi|},$$

pois $1 + x \leq e^x$, para todo x . Logo, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \prod_{j=1}^n m_0(2^{-j}\xi) \right| \leq \prod_{j=1}^n e^{C|2^{-j}\xi|} = e^{C|\xi| \sum_{j=1}^n 2^{-j}}.$$

Logo, pela continuidade da exponencial, obtemos

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{j=1}^n m_0(2^{-j}\xi) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{C|\xi| \sum_{j=1}^n 2^{-j}} = e^{C|\xi| \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}} = e^{C|\xi|}.$$

Portanto, como $e^{C|\xi|}$ é sempre uniformemente limitada em compactos, pois é uma função contínua, concluímos que o produto infinito $\left| \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) \right|$ converge uniformemente em compactos. ■

Observação 3.5. Suponha que seja válida a igualdade (3.23) em quase todos os pontos. Como $m_0 \in C^1$, segue que $\hat{\phi} \in C^1$. Logo, $\hat{\phi}$ é contínua e, portanto, a igualdade (3.23) deve ocorrer em todos os pontos. Assim, fazendo $\xi = 0$ nessa igualdade e usando o Lema 3.5, obtemos

$$\frac{1}{2\pi} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(2\pi l)|^2 = |\hat{\phi}(0)|^2 \Rightarrow |\hat{\phi}(0)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Assim, para facilitar as contas, é usual normalizarmos ϕ de forma que tenhamos $\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Dessa forma, do Lema 3.6, concluímos que $\hat{\phi}$ pode ser escrita como

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi). \quad (3.33)$$

O seguinte lema mostra que a função ϕ definida acima está em $L_2(\mathbb{R})$.

Lema 3.7. *Seja m_0 satisfazendo a igualdade (3.24) e as condições (3.28) e (3.29). Então a função ϕ definida por (3.33) está em $L_2(\mathbb{R})$ e $\|\phi\| \leq 1$.*

Demonstração: Para $n \geq 1$, defina

$$I_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} \prod_{j=1}^n |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi.$$

Como o produtório $\prod_{j=1}^n m_0(2^{-j}\xi)$ é uma função $2^{n+1}\pi$ -periódica, para todo $n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2^{(n+1)\pi}} \prod_{j=1}^n |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2^n\pi} \prod_{j=1}^n |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{2^n\pi}^{2^{(n+1)\pi}} \prod_{j=1}^n |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2^n\pi} \left(\prod_{j=1}^{n-1} |m_0(2^{-j}\xi)|^2 \right) |m_0(2^{-n}\xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2^n\pi} \left(\prod_{j=1}^{n-1} |m_0(2^{-j}\xi + 2^{n-j}\pi)|^2 \right) |m_0(2^{-n}\xi + \pi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2^n\pi} \prod_{j=1}^{n-1} |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-2^{(n-1)\pi}}^{2^{(n-1)\pi}} \prod_{j=1}^{n-1} |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \\
&= I_{n-1},
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade, usamos a periodicidade de m_0 e a igualdade (3.24). Dessa forma, concluímos que

$$\begin{aligned}
I_n = I_{n-1} = \dots = I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} \left| m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |m_0(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |m_0(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} |m_0(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2) d\omega \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Observe que a sequência $\left(\frac{1}{2\pi} \prod_{j=1}^n |m_0(2^{-j}\xi)|^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $|\hat{\phi}(\xi)|^2$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim, pelo Lema de Fatou, temos

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{2^{-n}\pi}^{2^n\pi} \frac{1}{2\pi} \prod_{j=1}^n |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi = \liminf_{n \rightarrow \infty} I_n = 1.$$

Portanto, como a transformada de Fourier preserva norma, concluímos que $\|\phi\|_2^2 = \|\hat{\phi}\|_2^2 \leq 1$ e $\phi \in L_2(\mathbb{R})$. ■

3.2.2 Obtendo uma ARM a partir de m_0

Na subseção anterior, obtivemos ϕ a partir de m_0 . Agora, queremos construir uma ARM a partir dessa função ϕ . O seguinte resultado nos diz como fazer isso.

Teorema 3.2 (Corolário do Teorema 5.1, [18]). *Suponha que $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ satisfaça às seguintes*

condições:

- (i) O conjunto $\{\phi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ é ortonormal em $L_2(\mathbb{R})$;
- (ii) Existe uma sequência $(a_k) \in l^2(\mathbb{Z})$ tal que $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k)$, com a convergência dessa série em $L_2(\mathbb{R})$;
- (iii) $\hat{\phi}$ é contínua em 0 e $\hat{\phi}(0) \neq 0$, isto é, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \neq 0$.

Então, os subespaços

$$V_j = \overline{\text{span}\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}},$$

formam uma ARM em $L_2(\mathbb{R})$ da qual ϕ é a função de escala.

Dessa forma, para termos uma ARM, basta mostrarmos que a função ϕ , definida pela relação (3.33), satisfaz às condições (i), (ii) e (iii) acima.

Vimos na Seção 3.1, que uma condição suficiente para que o conjunto $\{\phi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ seja ortonormal é que a igualdade $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 = (2\pi)^{-1}$ seja válida em quase todos os pontos. Porém, como veremos nos dois seguintes resultados, além das condições (3.24), (3.28) e (3.29) que m_0 satisfaz, precisamos impor uma outra condição adicional a m_0 , (3.26), para conseguirmos provar tal fato.

Lema 3.8 (Lema 6.1, [18]). *Se m_0 é um polinômio trigonométrico satisfazendo às condições (3.24), (3.28) e (3.29) e se ϕ é definida por (3.33), então ϕ é uma função de suporte compacto em $L_2(\mathbb{R})$ e*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 =: G(\xi)$$

é um polinômio trigonométrico.

Assim, para que o conjunto $\{\phi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ seja ortonormal basta mostrar que $G(\xi) = (2\pi)^{-1}$. Isso é feito na demonstração do seguinte resultado.

Teorema 3.3 (Teorema 6.1, [18]). *Seja m_0 um polinômio trigonométrico satisfazendo às condições (3.24), (3.28) e (3.29). Suponha que a condição em (3.26) seja válida. Se ϕ é definida por (3.33), então o conjunto $\{\phi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ é ortonormal.*

Com os dois resultados acima, segue que a condição (i) do Teorema 3.2 é válida.

Para a construção de ϕ , supomos que a relação $\hat{\phi}(\xi) = m_0(\frac{\xi}{2})\hat{\phi}(\frac{\xi}{2})$ é satisfeita. Dessa relação e do fato que m_0 é um polinômio trigonométrico, isto é, $m_0(\xi) = \sum_k h_k e^{-ik\xi}$, segue que a transformada inversa de Fourier de $\hat{\phi}$ é

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k)$$

onde temos somente um número finito de parcelas não nulas, o que nos garante a condição (ii) do Teorema 3.2.

Pela definição de ϕ , temos que $\hat{\phi}(0) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \neq 0$. Além disso, do Lema 3.8, temos que ϕ é uma função de suporte compacto em $L_2(\mathbb{R})$ e, daí, $\phi \in L_1(\mathbb{R})$. Assim, $\hat{\phi}$ é contínua em todos os pontos, em particular, $\hat{\phi}$ é contínua em 0. Isso implica que vale a condição (iii) do Teorema 3.2. Portanto, obtemos uma ARM a partir de m_0 .

3.2.3 Construção de m_0

Vimos que podemos construir uma ARM (e, portanto, uma wavelet) a partir de um filtro m_0 , desde que este satisfaça determinadas condições. No Lema 3.9, abaixo, definiremos uma função ${}_N m_0$ e mostraremos que ela satisfaz tais condições. A wavelet correspondente, ${}_N \psi$, será a **wavelet de Daubechies**.

Lema 3.9. *Dado $N \in \mathbb{N}^*$, sejam*

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} x^n, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.34)$$

e

$${}_N m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}_N(\xi), \quad (3.35)$$

onde \mathcal{L}_N é o polinômio trigonométrico dado por

$$|\mathcal{L}_N(\xi)|^2 = P_N \left(\sin^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right). \quad (3.36)$$

Então, ${}_N m_0$ satisfaz as seguintes propriedades:

- i) ${}_N m_0 \in C^1$ e é 2π -periódica;
- ii) ${}_N m_0(0) = 1$;
- iii) vale a igualdade (3.24);
- iv) ${}_N m_0$ não possui zeros no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Demonstração: Como $\sin^2(\xi/2) = \frac{1 - \cos \xi}{2}$, então $P_N(\sin^2(\xi/2))$ é um polinômio trigonométrico. Daí, pelo Lema de Riesz (veja Lema 2.7), \mathcal{L}_N é um polinômio trigonométrico da forma $\mathcal{L}_N(\xi) = \sum_{m=0}^M b_m e^{im\xi}$. Logo, ${}_N m_0 \in C^\infty$, em particular, ${}_N m_0 \in C^1$ e ${}_N m_0$ é 2π -periódica. Assim, vale a condição i).

Observe que

$$P_N(x) = 1 + \binom{N}{1}x + \binom{N+1}{2}x^2 + \cdots + \binom{2N-2}{N-1}x^{N-1}.$$

Assim, $|\mathcal{L}_N(0)|^2 = P_N(0) = 1$. Logo,

$$|{}_N m_0(0)| = \left| \frac{1+1}{2} \right|^N |\mathcal{L}_N(0)| = |\mathcal{L}_N(0)| = 1.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que ${}_N m_0(0) = 1$, pois as propriedades acima independem de rotações. Assim, vale a condição ii).

Mostraremos, agora, que iii) é válido. Note que,

$$\begin{aligned}
 |{}_N m_0(\xi)|^2 &= \left| \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right|^{2N} |\mathcal{L}_N(\xi)|^2 \\
 &= \left| \frac{e^{-\frac{i\xi}{2}} (e^{\frac{i\xi}{2}} + e^{-\frac{i\xi}{2}})}{2} \right|^{2N} |\mathcal{L}_N(\xi)|^2 \\
 &= \left(\cos^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right)^N P_N \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 |{}_N m_0(\xi + \pi)|^2 &= \left| \frac{1 + e^{-i(\xi+\pi)}}{2} \right|^{2N} |\mathcal{L}_N(\xi + \pi)|^2 \\
 &= \left| \frac{e^{-\frac{i(\xi+\pi)}{2}} (e^{\frac{i(\xi+\pi)}{2}} + e^{-\frac{i(\xi+\pi)}{2}})}{2} \right|^{2N} P_N \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\xi + \pi}{2} \right) \right) \\
 &= \left(\cos^2 \left(\frac{\xi + \pi}{2} \right) \right)^N P_N \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\xi + \pi}{2} \right) \right) \\
 &= \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right)^N P_N \left(\cos^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right),
 \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos as relações $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\text{sen } x$ e $\text{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$. Logo, como $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, das duas estimativas acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 |{}_N m_0(\xi)|^2 + |{}_N m_0(\xi + \pi)|^2 &= \left(1 - \text{sen}^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right)^N P_N \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right) \\
 &\quad + \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right)^N P_N \left(1 - \text{sen}^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right) \\
 &= (1 - y)^N P_N(y) + y^N P_N(1 - y). \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

onde fizemos $y = \text{sen}^2(\frac{\xi}{2})$. Como y^N e $(1 - y)^N$ são polinômios que não possuem zero em comum, o Teorema de Bézout (Lema 2.6) nos garante a existência de únicos polinômios q_1 e q_2 , ambos de grau $N - 1$, tais que

$$(1 - y)^N q_1(y) + y^N q_2(y) = 1.$$

Substituindo $x = 1 - y$ na igualdade acima, obtemos

$$x^N q_1(1 - x) + (1 - x)^N q_2(1 - x) = 1.$$

Assim, segue que $q_1(y) = q_2(1 - y)$ e $q_1(1 - y) = q_2(y)$. Logo,

$$(1 - y)^N q_1(y) + y^N q_1(1 - y) = 1,$$

isto é,

$$q_1(y) = [1 - y^N q_1(1 - y)](1 - y)^{-N}.$$

Expandindo $q_1(y)$ em sua série de Taylor, veja Seção 6.4 de [18], obtemos que $q_1(y) = P_N(y)$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Logo, de (3.37), obtemos

$$|{}_N m_0(\xi)|^2 + |{}_N m_0(\xi + \pi)|^2 = (1 - y)^N P_N(y) + y^N P_N(1 - y) = 1.$$

Por fim, mostremos iv). Observe que $P_N(\sin^2(\xi/2))$ é uma função positiva maior ou igual a 1. Assim, $\mathcal{L}_n(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Agora, observe que

$$\left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2}\right)^N = 0 \Leftrightarrow e^{-i\xi} = -1 \Leftrightarrow \cos(\xi) = -1 \Leftrightarrow \xi = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, pela definição de ${}_N m_0$, segue que ${}_N m_0(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. ■

Portanto, pelo Teorema 3.2, temos uma análise de resolução em escalas múltiplas, onde a função escala é ${}_N \phi$ definida por ${}_N \hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^{\infty} {}_N m_0(2^{-j}\xi)$ e os subespaços encaixantes são dados por $V_j = \overline{\text{span}\{{}_N \phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}}$.

Observação 3.6. O fator $\left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2}\right)^N$ da definição de ${}_N m_0$, nos garante que os momentos de ordem $0, 1, \dots, N-1$ da wavelet ${}_N \psi$ associada são nulos. O número de momentos nulos determina o que a wavelet não consegue “ver”. Por exemplo, uma wavelet que possui 2 momentos nulos não consegue enxergar polinômios de grau até 2. Um efeito prático dos momentos nulos é concentrar a informação do sinal em uma quantidade relativamente pequena de coeficientes. Isto pode ser útil em compressão, bem como na análise de sinais com singularidades e descontinuidades.

A regularidade da wavelet ${}_N \psi$ virá do fator $\mathcal{L}_N(\xi)$ da definição de ${}_N m_0$. A regularidade é importante em compressão de dados, por exemplo se uma função representa uma imagem e a wavelet usada não for suave, o erro ao descartarmos coeficientes de wavelets pequenos pode ser facilmente percebido pelo olho humano.

O fato das wavelets de Daubechies possuírem suportes compactos, nos garante que seus filtros possuem tamanho finito, o que é útil nas implementações pois reduz o custo computacional dos algoritmos. Na prática, temos que buscar um meio termo entre estas propriedades de acordo com as necessidades das aplicações nas quais estamos trabalhando.

Lema 3.10 (veja Lema 6.2.2 de [14]). *Se $\Gamma(\omega) = \sum_{n=N_1}^{N_2} \gamma_n e^{-in\omega}$, com $\sum_{n=N_1}^{N_2} \gamma_n = 1$, então*

$\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(2^{-j}\omega)$ é uma função inteira tipo exponencial. Em particular, ela é a transformada de uma distribuição com suporte em $[N_1, N_2]$.

Observação 3.7. Note que se quisermos obter ${}_N m_0$ explicitamente, precisamos da raiz quadrada de P_N . O processo de extração da raiz de P_N é feito com o auxílio do Lema de Riesz (veja Lema 2.7), o que nos dá que ${}_N m_0$ possui $2N$ coeficientes de filtro e nos permite escrever $m_0(\xi) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{2N-1} h_n e^{-in\xi}$, onde $\sum_{n=0}^{2N-1} h_n = \sqrt{2}$. Portanto, da equação (3.33) e do Lema 3.10, segue que ϕ tem suporte em $[0, 2N - 1]$.

Nos cálculos que faremos nos Capítulos 4 e 5, não precisaremos explicitamente dos valores dos coeficientes h_n de ${}_N m_0$, exceto no Capítulo 5, quando precisaremos de ${}_N m_0$ para $N = 2$. Por isso, ilustraremos como utilizar o Lema de Riesz fazendo os cálculos explicitamente para esse caso.

Usando (3.34), temos

$$P_2(y) = \sum_{n=0}^1 \binom{1+n}{n} y^n = \binom{1}{0} y^0 + \binom{2}{1} y^1 = 1 + 2y.$$

Como $\text{sen}^2(\xi/2) = \frac{1 - \cos \xi}{2}$, segue que

$$\begin{aligned} P_2(\text{sen}^2(\xi/2)) &= 2 - \cos \xi \\ &= 2 - \left(\frac{e^{i\xi} + e^{-i\xi}}{2} \right) \\ &= \frac{4e^{i\xi} - e^{i2\xi} - 1}{2e^{i\xi}}. \end{aligned}$$

Assim, como $|\mathcal{L}_2(\xi)|^2 = P_2(\text{sen}^2(\frac{\xi}{2}))$,

$$\begin{aligned} |{}_2m_0(\xi)|^2 &= \left| \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right|^4 |\mathcal{L}_2(\xi)|^2 \\ &= \left| \frac{e^{-i\xi}(e^{i\xi} + 1)}{2} \right|^4 \left| \frac{4e^{i\xi} - e^{i2\xi} - 1}{2e^{i\xi}} \right| \\ &= \left| e^{-i6\xi} \left(\frac{1 + e^{i\xi}}{2} \right)^4 \left(\frac{1 - 4e^{i\xi} + e^{i2\xi}}{2} \right) \right|. \end{aligned}$$

Fazendo $z = e^{i\xi}$, obtemos

$$|{}_2m_0(\xi)|^2 = \left| z^{-6} \left(\frac{1+z}{2} \right)^4 \left(\frac{z^2 - 4z + 1}{2} \right) \right|. \quad (3.38)$$

Usando a fórmula de Bhaskara para fatorar o polinômio $z^2 - 4z + 1$, obtemos que suas raízes são $z_1 = 2 - \sqrt{3}$ e $z_2 = 2 + \sqrt{3}$. Note que $z_2 = (2 + \sqrt{3}) \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right) = (2 - \sqrt{3})^{-1} = z_1^{-1}$. Dessa forma, podemos escrever $|z^2 - 4z + 1| = |z - z_1||z - z_1^{-1}|$ ou, como $z_1 = z_2^{-1}$, podemos escrever $|z^2 - 4z + 1| = |z - z_2||z - z_2^{-1}|$.

Observe que

$$|z - z_1^{-1}| = |e^{i\xi} - z_1^{-1}| = \left| e^{-i\xi} \left(\frac{z_1 - e^{-i\xi}}{z_1} \right) \right| = \left| -e^{-i\xi} \left(\frac{\overline{e^{i\xi} - z_1}}{z_1} \right) \right| = \frac{|e^{i\xi} - z_1|}{|z_1|} = \frac{|z - z_1|}{|z_1|}.$$

Com contas análogas, obtemos

$$|z - z_2^{-1}| = \frac{|z - z_2|}{|z_2|}.$$

Logo, podemos fatorar o polinômio $z^2 - 4z + 1$ como uma das seguintes possibilidades:

$$|z^2 - 4z + 1| = \frac{|z - z_1|^2}{|z_1|} \text{ ou } |z^2 - 4z + 1| = \frac{|z - z_2|^2}{|z_2|}.$$

Escolheremos manter a raiz que está dentro do círculo unitário, no caso $z_1 = 2 - \sqrt{3}$. Assim,

podemos reescrever (3.38) como

$$|{}_2m_0(\xi)|^2 = \left| \frac{z^{-6}(1+z)^4(z-z_1)^2}{32z_1} \right|.$$

Daí, extraindo a raiz quadrada, obtemos

$$\begin{aligned} {}_2m_0(\xi) &= \frac{z^{-3}(z+1)^2(z-z_1)}{4\sqrt{2}\sqrt{|z_1|}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z^{-3}(z+2z^2+z^3-z_1-2zz_1-z_1z^2)}{4\sqrt{|z_1|}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4\sqrt{|z_1|}} + \frac{2-z_1}{4\sqrt{|z_1|}}z^{-1} + \frac{1-2z_1}{4\sqrt{|z_1|}}z^{-2} - \frac{z_1}{4\sqrt{|z_1|}}z^{-3} \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$${}_2m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4\sqrt{|z_1|}} + \frac{2-z_1}{4\sqrt{|z_1|}}e^{-i\xi} + \frac{1-2z_1}{4\sqrt{|z_1|}}e^{-i2\xi} - \frac{z_1}{4\sqrt{|z_1|}}e^{-i3\xi} \right)$$

Observe que

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

Portanto, da equação (3.20), segue que ${}_2m_0$ possui 4 coeficientes de filtro que são dados por

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{4\sqrt{|z_1|}} = \frac{1}{4\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0,482962\dots; \\ h_1 &= \frac{2-z_1}{4\sqrt{|z_1|}} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0,836516\dots; \\ h_2 &= \frac{1-2z_1}{4\sqrt{|z_1|}} = \frac{-3+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{(-3+2\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0,224143\dots; \\ h_3 &= -\frac{z_1}{4\sqrt{|z_1|}} = \frac{-2+\sqrt{3}}{4\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{(-2+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx -0,129409\dots. \end{aligned}$$

Conhecendo os coeficientes de filtro, da relação (3.18) obtemos a função de escala ${}_2\phi$, e da relação (3.15) obtemos a wavelet ${}_2\psi$, conhecida na literatura por *Daub4*.

Capítulo 4

Estudo da Regularidade via "força bruta" e ciclos invariantes

Neste capítulo, estudaremos a regularidade das wavelets de Daubechies pelo método que ela desenvolveu no seu artigo [1]. Isso será feito estimando o decaimento da transformada de Fourier, $\hat{\phi}$, via força bruta e via ciclos invariantes nas Seções 4.1 e 4.2, respectivamente. Além disso, para N pequeno obteremos as regularidades dessas wavelets e, para N grande, mostraremos que $N\phi \in C^{\alpha_N}$, onde $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_N}{N} = 1 - \frac{\log 3}{2 \log 2}$.

Vimos, no Capítulo 3 que ϕ satisfaz a seguinte relação de escala:

$$\phi(x) = \sum_n h_n \phi(2x - n), \quad (4.1)$$

onde apenas um número finito, que pode ser grande, de coeficientes h_n 's são não nulos.

As regularidades das wavelets de suportes compactos e, portanto, das wavelets de Daubechies, são difíceis de serem determinadas. Tipicamente, elas possuem um expoente de Hölder α não inteiro, e será esse expoente que nos dará a regularidade.

As técnicas que veremos neste capítulo, são baseadas no decaimento da transformada de Fourier $\hat{\phi}$ e, por isso, são mais adequadas para o estudo global da regularidade e não para o estudo local. Da relação de escala para a wavelet ψ , (3.15), temos que ela é uma combinação finita de translações de $\phi(2x)$, portanto ela herda as mesmas propriedades de regularidade de ϕ .

Observe que a transformada de Fourier da equação (4.1) é dada por

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (4.2)$$

onde $m_0(\xi) = \frac{1}{2} \sum_n h_n e^{-in\xi}$ é um polinômio trigonométrico e, iterando essa equação, obtemos

$$\hat{\phi}(\omega) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega), \quad (4.3)$$

onde assumimos as normalizações $m_0(0) = 1$ e $\hat{\phi}(0) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$. Além disso, vimos que m_0 é definido como

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2}\right)^N \mathcal{L}(\omega), \quad (4.4)$$

em que \mathcal{L} é um polinômio trigonométrico que satisfaz a relação

$$|\mathcal{L}(\omega)|^2 = P_N \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \right) \quad (4.5)$$

e P_N é o polinômio de grau $N - 1$ dado por

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} x^n. \quad (4.6)$$

A seguir, mostraremos que (4.3) pode ser reescrita como

$$\hat{\phi}(\omega) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^N \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-j}\omega). \quad (4.7)$$

De fato, basta substituir a equação (4.4) na equação (4.3) e usar a igualdade abaixo:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{-i2^{-j}\omega}}{2} \right)^N &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1 + e^{-i2^{-j}\omega}}{2} \right)^N \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m \left(\frac{e^{-i2^{-j-1}\omega} (e^{i2^{-j-1}\omega} + e^{-i2^{-j-1}\omega})}{2} \right)^N \\ &= \left[\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m e^{-i2^{-j-1}\omega} \right) \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \cos(2^{-j-1}\omega) \right]^N \\ &= \left[e^{-i2^{-1}\omega} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m 2^{-j} \cdot \frac{\text{sen}(2^{-1}\omega)}{2^{-1}\omega} \right]^N \\ &= \left[\frac{e^{-\frac{i\omega}{2}}}{\frac{\omega}{2}} \left(\frac{e^{\frac{i\omega}{2}} - e^{-\frac{i\omega}{2}}}{2i} \right) \right]^N \\ &= \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^N, \end{aligned}$$

onde, na quarta igualdade, usamos o Lema 2.9.

4.1 Método da Força Bruta

Este primeiro método que veremos é baseado em uma estimativa direta do crescimento do produto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-j}\omega)$, quando $|\omega| \rightarrow \infty$.

Definição 4.1. Para $\alpha = n + \beta$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \beta < 1$, definimos C^α como o conjunto de todas as funções f que são n vezes continuamente diferenciáveis e tais que a sua n -ésima derivada $f^{(n)}$ é Hölder contínua com expoente β , isto é, ela satisfaz:

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x+t)| \leq C|t|^\beta, \quad \forall x, t \in \mathbb{R}.$$

Dos resultados da Subseção 2.3.3 temos a proposição abaixo, que nos fornece uma caracterização do espaço C^α a partir do decaimento da transformada de Fourier de f .

Proposição 4.1. *Se*

$$\int |\hat{f}(\omega)|(1 + |\omega|)^\alpha < \infty,$$

então $f \in C^\alpha$. Em particular, se

$$|\hat{f}(\omega)| \leq C(1 + |\omega|)^{-1-\alpha-\epsilon},$$

então $f \in C^\alpha$.

Da proposição acima segue que se o crescimento de $\prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-j}\omega)$, quando $|\omega| \rightarrow \infty$, em (4.7) puder ser mantido sob controle, então o fator $\left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}\right)^N$ nos garante regularidade para ϕ .

O Lema 4.1 nos fornece estimativas, não muito boas, para o índice de regularidade α . No Lema 4.2, veremos que se considerarmos um número maior de fatores \mathcal{L} , teremos estimativas melhores para o índice de regularidade α . Isso ficará mais claro adiante, após o Lema 4.4, quando calculamos com exemplos as estimativas que esses dois lemas nos fornecem.

Lema 4.1. *Se $q = \sup_{\xi} |\mathcal{L}(\xi)| < 2^{N-\alpha-1}$, então $\phi \in C^\alpha$.*

Demonstração: Como $m_0(0) = 1$, então de (4.4), temos que $1 = (\frac{1+e^0}{2})^N \mathcal{L}(0)$, ou seja, $\mathcal{L}(0) = 1$. Assim, pelo Teorema do Valor Médio, segue que $|\mathcal{L}(\xi)| \leq 1 + C|\xi| \leq e^{C|\xi|}$. Daí,

$$\prod_{j=1}^n |\mathcal{L}(2^{-j}\xi)| \leq \prod_{j=1}^n e^{C|2^{-j}\xi|} = e^{C|\xi| \sum_{j=1}^n 2^{-j}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela continuidade da função exponencial, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos que $\prod_{j=1}^{\infty} |\mathcal{L}(2^{-j}\xi)| \leq e^{C|\xi|}$. Então, para $|\xi| \leq 1$, temos

$$\sup_{|\xi| \leq 1} \prod_{j=1}^{\infty} |\mathcal{L}(2^{-j}\xi)| \leq \sup_{|\xi| \leq 1} \prod_{j=1}^{\infty} e^{C|2^{-j}\xi|} \leq e^C. \quad (4.8)$$

Por outro lado, se $|\xi| \geq 1$, então existe $J \geq 1$ tal que $2^{J-1} \leq |\xi| \leq 2^J$. Dessa forma, temos

$$\prod_{j=1}^{\infty} |\mathcal{L}(2^{-j}\xi)| = \left(\prod_{j=1}^J |\mathcal{L}(2^{-j}\xi)| \right) \left(\prod_{j=J+1}^{\infty} |\mathcal{L}(2^{-j}\xi)| \right) = \left(\prod_{j=1}^J |\mathcal{L}(2^{-j}\xi)| \right) \left(\prod_{j=1}^{\infty} |\mathcal{L}(2^{-j}(2^{-J}\xi))| \right).$$

Mas, observe que $|2^{-J}\xi| \leq 1$, pois $2^{J-1} \leq |\xi| \leq 2^J$. Daí, de (4.8), $\prod_{j=1}^{\infty} |\mathcal{L}(2^{-j}(2^{-J}\xi))| \leq e^C$. Além disso, como $q = \sup_{\xi} |\mathcal{L}(\xi)|$, então $\prod_{j=1}^J |\mathcal{L}(2^{-j}\xi)| \leq q^J$. Logo, como $q \leq 2^{N-\alpha-1}$, segue que

$$\prod_{j=1}^{\infty} |\mathcal{L}(2^{-j}\xi)| \leq q^J e^C \leq (2^{N-\alpha-1})^J e^C = e^C 2^{J(N-\alpha-1)}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, podemos escrever

$$\prod_{j=1}^{\infty} |\mathcal{L}(2^{-j}\xi)| \leq C' 2^{J(N-\alpha-1-\epsilon)} \leq C'' (1 + |\xi|)^{N-\alpha-1-\epsilon},$$

4.1. MÉTODO DA FORÇA BRUTA

onde na última desigualdade usamos o fato de $2^{J-1} \leq |\xi| \leq 2^J$. Portanto, de (4.7), temos que $|\hat{\phi}(\xi)| \leq \bar{C}(1 + |\xi|)^{-\alpha-1-\epsilon}$, o que implica, pela Proposição 4.1, que $\phi \in C^\alpha$. \blacksquare

Lema 4.2. *Defina:*

$$q_j = \sup_{\xi} \left| \prod_{k=0}^{j-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \right|, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{K}_j = \frac{\log q_j}{j \log 2}, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{K} = \inf_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_j.$$

Então $\mathcal{K} = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{K}_j$ e, se $\mathcal{K} < N - 1 - \alpha$, então $\phi \in C^\alpha$.

Demonstração: Sejam $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ tais que $j_2 > j_1$. Então, podemos escrever $j_2 = nj_1 + r$ com $0 \leq r < j_1$. Observe que

$$\prod_{k=0}^{j_2-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) = \prod_{k=0}^{nj_1-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \cdot \prod_{k=nj_1}^{nj_1+r-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi). \quad (4.11)$$

Além disso, podemos escrever

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{nj_1-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) &= \prod_{k=0}^{j_1-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \cdot \prod_{k=j_1}^{2j_1-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \cdots \prod_{k=(n-1)j_1}^{nj_1-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \\ &= \prod_{k=0}^{j_1-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \cdot \prod_{l=0}^{j_1-1} \mathcal{L}(2^{-l-j_1}\xi) \cdots \prod_{l=0}^{j_1-1} \mathcal{L}(2^{-l-(n-1)j_1}\xi) \end{aligned}$$

Logo, como $\sup(A \cdot B) \leq \sup A \cdot \sup B$ para $A, B \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \sup_{\xi} \left| \prod_{k=0}^{nj_1-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \right| &\leq \sup_{\xi} \left| \prod_{k=0}^{j_1-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \right| \cdot \sup_{\xi} \left| \prod_{l=0}^{j_1-1} \mathcal{L}(2^{-l-j_1}\xi) \right| \cdots \sup_{\xi} \left| \prod_{l=0}^{j_1-1} \mathcal{L}(2^{-l-(n-1)j_1}\xi) \right| \\ &= \sup_{\xi} \left| \prod_{k=0}^{j_1-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \right| \cdot \sup_{\omega} \left| \prod_{l=0}^{j_1-1} \mathcal{L}(2^{-l}\omega) \right| \cdots \sup_{\omega} \left| \prod_{l=0}^{j_1-1} \mathcal{L}(2^{-l}\omega) \right| \\ &= q_{j_1} \cdot q_{j_1} \cdots q_{j_1} = (q_{j_1})^n. \end{aligned}$$

Analogamente, podemos escrever

$$\prod_{k=nj_1}^{nj_1+r-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) = \mathcal{L}(2^{-nj_1}\xi) \cdot \mathcal{L}(2^{-nj_1-1}\xi) \cdots \mathcal{L}(2^{-nj_1-r+1}\xi),$$

o que implica em

$$\sup_{\xi} \left| \prod_{k=nj_1}^{nj_1+r-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \right| \leq (q_1)^r.$$

Assim, de (4.11), temos

$$q_{j_2} = \sup_{\xi} \left| \prod_{k=0}^{j_2-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \right| \leq \sup_{\xi} \left| \prod_{k=0}^{nj_1-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \right| \cdot \sup_{\xi} \left| \prod_{k=nj_1}^{j_2-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \right| \leq (q_{j_1})^n (q_1)^r.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} K_{j_2} &= \frac{\log q_{j_2}}{j_2 \log 2} \\ &\leq \frac{\log[(q_{j_1})^n (q_1)^r]}{j_2 \log 2} \\ &= \frac{n \log q_{j_1}}{j_2 \log 2} + \frac{r \log q_1}{j_2 \log 2} \\ &\leq \frac{n \log q_{j_1}}{nj_1 \log 2} + \frac{r \log q_1}{j_2 \log 2} \\ &< \frac{\log q_{j_1}}{j_1 \log 2} + \frac{j_1 \log q_1}{j_2 \log 2} \\ &= \mathcal{K}_{j_1} + \frac{j_1}{j_2} \mathcal{K}_1 \\ &= \mathcal{K}_{j_1} + C \frac{j_1}{j_2}, \end{aligned}$$

onde C é uma constante. A penúltima desigualdade vem do fato que $j_2 \geq nj_1$ e a última desigualdade vem do fato que $r < j_1$.

Pela definição de \mathcal{K} , dado qualquer $\epsilon > 0$ existe j_0 tal que $\mathcal{K} + \epsilon > \mathcal{K}_{j_0} > \mathcal{K}$. Assim, para $j \geq j_0$, usando a desigualdade acima, obtemos:

$$\mathcal{K} \leq \mathcal{K}_j \leq \mathcal{K}_{j_0} + C \frac{j_0}{j} < \mathcal{K} + \epsilon + C \frac{j_0}{j}$$

Dessa forma, $\mathcal{K} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{K}_j \leq \mathcal{K} + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{K}_j = \mathcal{K}$.

Agora, se $\mathcal{K} < N - 1 - \alpha$, então pela definição de \mathcal{K} , devemos ter que $\mathcal{K}_l < N - 1 - \alpha$ para algum $l \in \mathbb{N}$. Defina

$$\mathcal{L}_l(\xi) = \prod_{j=0}^{l-1} \mathcal{L}(2^{-j}\xi).$$

Repetindo os mesmos argumentos da demonstração do lema anterior para o produtório $\prod_{j=0}^{\infty} \mathcal{L}_l(2^{-l-j-1}\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_l(2^{-l-k}\xi)$, obtemos que $|\hat{\phi}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-N + \mathcal{K}_l - \epsilon}$. Logo, como $\mathcal{K}_l < N - 1 - \alpha$, segue que $|\hat{\phi}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-\alpha - 1 - \epsilon}$. Portanto, $\phi \in C^\alpha$. ■

Definição 4.2. Um conjunto compacto \mathbf{K} é dito ser congruente a $[-\pi, \pi]$ módulo 2π , se ele satisfaz as seguintes condições:

- i) $|\mathbf{K}| = 2\pi$;
- ii) $\forall \xi \in [-\pi, \pi], \exists l \in \mathbb{Z}$, tal que $\xi + 2\pi l \in \mathbf{K}$.

O conjunto \mathbf{K} construído particionando o intervalo $[-\pi, \pi]$ em um número finito de subintervalos e transladando cada um deles por um múltiplo de 2π , é congruente à $[-\pi, \pi]$

4.1. MÉTODO DA FORÇA BRUTA

módulo 2π . Nas Figuras 4.1 e 4.2 abaixo, ilustramos exemplos de conjuntos desse tipo.

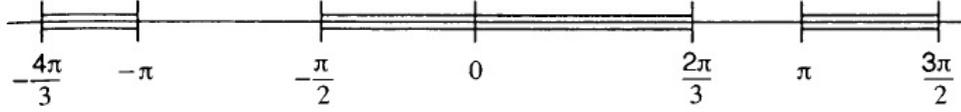


Figura 4.1: $K = [-\frac{4\pi}{3}, -\pi] \cup [-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ é um conjunto compacto congruente à $[-\pi, \pi]$ módulo 2π . Ele pode ser visto como o resultado do corte de $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ e $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$ de $[-\pi, \pi]$ e a translação do primeiro pedaço 2π para a direita e o segundo pedaço 2π para a esquerda.

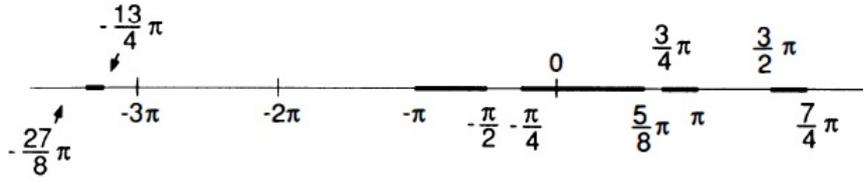


Figura 4.2: $K = [-\frac{27\pi}{8}, -\frac{13\pi}{4}] \cup [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{8}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi] \cup [\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{4}]$ é um conjunto compacto congruente à $[-\pi, \pi]$ módulo 2π . Ele pode ser visto como o resultado do corte de $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$ e $[\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$ de $[-\pi, \pi]$ e a translação do primeiro pedaço 2π para a direita e o segundo pedaço 4π para a esquerda.

Teorema 4.1. *Seja m_0 um polinômio trigonométrico satisfazendo $|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$, com $m_0(0) = 1$ e defina ϕ por $\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)$. Então, as duas condições abaixo são equivalentes:*

(1)

$$\int \phi(x) \overline{\phi(x-n)} dx = \delta_{n,0}. \quad (4.12)$$

(2) *Existe um conjunto compacto K congruente à $[-\pi, \pi]$ módulo 2π contendo uma vizinhança de 0 tal que*

$$\inf_{k>0} \inf_{\xi \in K} |m_0(2^{-k}\xi)| > 0. \quad (4.13)$$

Observação 4.1. Antes de demonstrar o teorema acima note que, como K é compacto, então K é limitado. Daí, $K \subset [-R, R]$ para algum $R \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, pela continuidade de m_0 e como $m_0(0) = 1$, temos que existe j_0 tal que $|m_0(2^{-j}\xi)| \geq \frac{1}{2}$, uniformemente, para todo $|\xi| \leq R$ e $j \geq j_0$. Portanto, pedir que a condição (4.13) ocorra é equivalente a pedir que j_0 funções, $m_0(2^{-1}\xi), \dots, m_0(2^{-j_0}\xi)$, não tenham nenhum zero em K ou, equivalentemente, que m_0 não tenha zeros em $2^{-1}K, \dots, 2^{-j_0}K$.

Demonstração: (1) \Rightarrow (2): Como vimos no Lema 3.3, a condição (4.12) é equivalente a

$$\sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

4.1. MÉTODO DA FORÇA BRUTA

Observe que todos os fatores da soma acima são não-negativos. Assim, para todo $\xi \in [-\pi, \pi]$, existe $l_\xi \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{|l| \leq l_\xi} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Como $\hat{\phi}$ é contínua, então a soma finita $\sum_{|l| \leq l_\xi} |\hat{\phi}(\cdot + 2\pi l)|^2$ também é contínua para todo $l_\xi \in \mathbb{N}$. Daí, para cada $\xi \in [-\pi, \pi]$ existe uma vizinhança $V_\xi = \{\omega : |\omega - \xi| \leq R_\xi\}$, tal que

$$\sum_{|l| \leq l_\xi} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \geq \frac{1}{8\pi}, \quad \forall \omega \in V_\xi.$$

Note que as vizinhanças V_ξ formam uma cobertura para o intervalo $[-\pi, \pi]$. Como esse intervalo é compacto, existe uma subcobertura finita, digamos $V_{\xi_1}, V_{\xi_2}, \dots, V_{\xi_j}$ para $[-\pi, \pi]$. Seja l_0 o máximo dos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j$ associados a essa subcobertura finita. Assim, dado $\omega \in [-\pi, \pi]$, então $\omega \in V_{\xi_i}$ para algum $1 \leq i \leq j$. Daí, temos:

$$\sum_{|l| \leq l_0} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \geq \sum_{|l| \leq l_{\xi_i}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \geq \frac{1}{8\pi}.$$

Logo, como todas as parcelas da soma acima são não-negativas, segue que para cada $\xi \in [-\pi, \pi]$, existe $l \in [-l_0, l_0] \cap \mathbb{Z}$ tal que:

$$|\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)| \geq \frac{1}{\sqrt{8\pi(2l_0 + 1)}} =: C, \quad (4.14)$$

pois cada termo da soma deve ser maior do que $\frac{1}{8\pi}$ dividido pelo total de parcelas da soma.

Agora, defina os seguintes conjuntos:

$$S_0 = \{\xi \in [-\pi, \pi] : |\hat{\phi}(\xi)| \geq C\};$$

$$S_{-l_0} = \{\xi \in [-\pi, \pi] \setminus S_0 : |\hat{\phi}(\xi - 2\pi l_0)| \geq C\};$$

$$S_l = \left\{ \xi \in [-\pi, \pi] \setminus \left(\bigcup_{k=-l_0}^{l-1} S_k \cup S_0 \right) : |\hat{\phi}(\xi - 2\pi l)| \geq C \right\}, \quad \forall -l_0 < l \leq l_0 \text{ e } l \neq 0.$$

Note que todos os conjuntos S_l são disjuntos e que S_0 e, portanto \mathbf{K} , contêm uma vizinhança do 0, pois $\hat{\phi}$ é contínua e $|\hat{\phi}(0)| = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} > C$. Além disso, a condição (4.14) nos dá que todo $\xi \in [-\pi, \pi]$ pertence a algum S_l com $-l_0 \leq l \leq l_0$. Assim, os conjuntos S_l , $-l_0 \leq l \leq l_0$, formam uma partição do intervalo $[-\pi, \pi]$.

Defina

$$\mathbf{K} = \bigcup_{l=-l_0}^{l_0} \overline{(S_l + 2\pi l)}.$$

Temos que \mathbf{K} é compacto e, por (4.14), \mathbf{K} é congruente a $[-\pi, \pi]$ módulo 2π . Também, por construção, $|\hat{\phi}(\xi)| \geq C$ em \mathbf{K} .

Agora resta mostrarmos que (4.13) ocorre. Como vimos na Observação 4.1, basta mostrarmos que $\inf_{\xi \in \mathbf{K}} |m_0(2^{-k}\xi)| > 0$ para um número finito de k 's, digamos $1 \leq k \leq k_0$.

4.1. MÉTODO DA FORÇA BRUTA

Iterando k_0 vezes a igualdade (4.2), obtemos

$$|\hat{\phi}(\xi)| = \prod_{k=1}^{k_0} |m_0(2^{-k}\xi)| \cdot |\hat{\phi}(2^{-k_0}\xi)|.$$

Pela igualdade acima, como $|\hat{\phi}|$ é limitada inferiormente em \mathbf{K} por uma constante estritamente positiva, então $\prod_{k=1}^{k_0} |m_0(2^{-k}\xi)|$ não pode ter zeros no compacto \mathbf{K} . Sabemos que m_0 é contínua e que um produto finito de funções contínuas é, também, uma função contínua. Logo, devemos ter

$$\prod_{k=1}^{k_0} |m_0(2^{-k}\xi)| \geq C_1 > 0, \quad \forall \xi \in \mathbf{K}.$$

Como $|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$, segue que $|m_0| \leq 1$. Assim, para todo k tal que $1 \leq k \leq k_0$, temos:

$$|m_0(2^{-k}\xi)| = |m_0(2^{-k}\xi)| \cdot 1 \cdots 1 \geq \prod_{j=1}^{k_0} |m_0(2^{-j}\xi)| \geq C_1 > 0, \quad \forall \xi \in \mathbf{K}.$$

Portanto, segue que $\inf_{\xi \in \mathbf{K}} |m_0(2^{-k}\xi)| > 0$.

(2) \Rightarrow (1): Defina $\mu_k(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{j=1}^k m_0(2^{-j}\xi) \cdot \mathcal{X}_{\mathbf{K}}(2^{-k}\xi)$, onde $\mathcal{X}_{\mathbf{K}}$ é a função característica do intervalo compacto \mathbf{K} . Sabemos que \mathbf{K} contém uma vizinhança do 0 e, daí, $\mu_k \rightarrow \hat{\phi}$ pontualmente, quando $k \rightarrow \infty$, uma vez que $2^{-k} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$.

Como m_0 é contínua para qualquer $\xi \in \mathbb{R}$, pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$|m_0(\xi) - m_0(0)| \leq |m_0'(\tilde{\xi})||\xi - 0|, \quad \text{para algum } 0 < \tilde{\xi} < \xi.$$

Daí, definindo $\bar{C} := \max_{\xi \in \mathcal{K}} |m_0'(\xi)|$, segue que $||m_0(\xi)| - 1| \leq |m_0(\xi) - 1| \leq \bar{C}|\xi|$. Isso implica que $|m_0(\xi)| \geq 1 - \bar{C}|\xi|$, para todo $\xi \in \mathcal{K}$.

Como \mathbf{K} é compacto, podemos encontrar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-k}\bar{C}|\xi| < \frac{1}{2}$, se $\xi \in \mathbf{K}$ e $k \geq k_0$. Assim, como por hipótese $|m_0(2^{-k}\xi)| \geq C > 0$ para $k \geq 1$ e $\xi \in \mathcal{K}$, segue que

$$\prod_{k=1}^{\infty} |m_0(2^{-k}\xi)| = \prod_{k=1}^{k_0} |m_0(2^{-k}\xi)| \cdot \prod_{k=k_0+1}^{\infty} |m_0(2^{-k}\xi)| \geq C^{k_0} \prod_{k=k_0+1}^{\infty} (1 - \bar{C}2^{-k}|\xi|).$$

É fácil verificar que $1 - x \geq e^{-2x}$, se $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Daí, para $\xi \in \mathbf{K}$, temos:

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}(\xi)| &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{\infty} |m_0(2^{-k}\xi)| \\ &\geq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} C^{k_0} \prod_{k=k_0+1}^{\infty} (1 - \bar{C}2^{-k}|\xi|) \\ &\geq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} C^{k_0} \prod_{k=k_0+1}^{\infty} \exp(-2\bar{C}2^{-k}|\xi|) \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} C^{k_0} \exp\left(-2\bar{C}|\xi| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} C^{k_0} \exp(-2^{1-k_0} \bar{C} |\xi|) \\
 &\geq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} C^{k_0} \exp\left(-2^{1-k_0} \bar{C} \max_{\xi \in \mathbb{K}} |\xi|\right) \\
 &=: C_1 > 0.
 \end{aligned}$$

Isso implica que $\frac{|\hat{\phi}(\xi)|}{C_1} \geq 1 \geq \mathcal{X}_{\mathbb{K}}(\xi)$. Logo, obtemos:

$$\begin{aligned}
 |\mu_k(\xi)| &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi)| \cdot \mathcal{X}_{\mathbb{K}}(2^{-k}\xi) \\
 &\leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} C_1^{-1} \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi)| \cdot |\hat{\phi}(2^{-k}\xi)| \\
 &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} C_1^{-1} |\hat{\phi}(\xi)|.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que $\mu_k \rightarrow \hat{\phi}$ em L^2 .

Por outro lado, pela congruência de \mathbb{K} com $[-\pi, \pi]$ módulo 2π , temos que para qualquer função 2π -periódica f , vale que:

$$\int_{\xi \in \mathbb{K}} f(\xi) d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi = \int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi.$$

Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
 \int |\mu_k(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi &= (2\pi)^{-1} \int \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi \\
 &= (2\pi)^{-1} 2^k \int_{\omega \in \mathbb{K}} \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}2^k\omega)|^2 e^{-in2^k\omega} d\omega \\
 &= (2\pi)^{-1} 2^k \int_0^{2\pi} e^{-in2^k\omega} \prod_{l=0}^{k-1} |m_0(2^l\omega)|^2 d\omega \\
 &= (2\pi)^{-1} 2^k \left(\int_0^{\pi} e^{-in2^k\omega} \prod_{l=1}^{k-1} |m_0(2^l\omega)|^2 d\omega \right) \cdot |m_0(\omega)|^2 \\
 &\quad + (2\pi)^{-1} 2^k \left(\int_{\pi}^{2\pi} e^{-in2^k\omega} \prod_{l=1}^{k-1} |m_0(2^l\omega)|^2 d\omega \right) \cdot |m_0(\omega)|^2 \\
 &= (2\pi)^{-1} 2^k \left(\int_0^{\pi} e^{-in2^k\omega} \prod_{l=1}^{k-1} |m_0(2^l\omega)|^2 d\omega \right) \cdot |m_0(\omega)|^2 \\
 &\quad + (2\pi)^{-1} 2^k \left(\int_0^{\pi} e^{-in2^k(\nu+\pi)} \prod_{l=1}^{k-1} |m_0(2^l(\nu+\pi))|^2 d\nu \right) \cdot |m_0(\nu+\pi)|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-1} 2^k \left(\int_0^\pi e^{-in2^k\omega} \prod_{l=1}^{k-1} |m_0(2^l\omega)|^2 d\omega \right) \cdot |m_0(\omega)|^2 \\
&\quad + (2\pi)^{-1} 2^k \left(\int_0^\pi e^{-in2^k\nu} \prod_{l=1}^{k-1} |m_0(2^l\nu)|^2 d\nu \right) \cdot |m_0(\nu + \pi)|^2 \\
&= (2\pi)^{-1} 2^k \left(\int_0^\pi e^{-in2^k\omega} \prod_{l=1}^{k-1} |m_0(2^l\omega)|^2 d\omega \right) \cdot [(m_0(\xi))^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2] \\
&= (2\pi)^{-1} 2^k \int_0^\pi e^{-in2^{k-1}\xi} \prod_{l=1}^{k-1} |m_0(2^{l-1}\xi)|^2 2^{-1} d\xi \\
&= (2\pi)^{-1} 2^{k-1} \int_0^\pi e^{-in2^{k-1}\xi} \prod_{j=0}^{k-2} |m_0(2^j\xi)|^2 d\xi \\
&= \int |\mu_{k-1}(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi.
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\int |\mu_1(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi &= (2\pi)^{-1} \int \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 e^{-in\xi} d\xi \\
&= (2\pi)^{-1} \int_{\omega \in \mathbb{K}} |m_0(\omega)|^2 e^{-in2\omega} 2d\omega \\
&= (2\pi)^{-1} 2 \int_{-\pi}^\pi |m_0(\omega)|^2 e^{-i2n\omega} d\omega \\
&= \sum_{k,k'} c_k \overline{c_{k'}} \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{-i(k-k')\omega}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{i2n\omega}}{\sqrt{2\pi}} d\omega \\
&= \sum_{k,k'} c_k \overline{c_{k'}} \delta_{k-k', 2n} \\
&= \sum_k c_{k'} \overline{c_{2n+k'}} \\
&= \delta_{n,0},
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a relação (3.21).

Logo,

$$\int |\mu_k(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi = \delta_{n,0}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, como $\mu_k \rightarrow \hat{\phi}$ em L^2 , segue que

$$\int |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \int |\mu_k(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi = \delta_{n,0}.$$

Como já vimos no Lema 3.3, $\int |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi = \delta_{n,0}$ é equivalente a $\sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}$ que, por sua vez, é equivalente à condição (4.12). \blacksquare

O seguinte lema nos diz que, na maioria dos casos, não conseguiremos obter resultados muito melhores do que os que o lema anterior nos dá com o método da força bruta.

Lema 4.3. *Existe uma sequência, $(\xi_l)_{l \in \mathbb{N}}$, tal que*

$$(1 + |\xi_l|)^{-\mathcal{K}} \left| \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-j}\xi_l) \right| \geq C > 0.$$

Demonstração: Pelo Teorema (4.1), a ortonormalidade das funções $\phi(\cdot - n)$ implica a existência de um conjunto compacto \mathbf{K} congruente a $[-\pi, \pi]$ módulo 2π , tal que $|\hat{\phi}(\xi)| \geq C > 0$, para $\xi \in \mathbf{K}$. Temos que a função $\mathcal{L}_l(\xi) = \prod_{j=0}^{l-1} \mathcal{L}(2^{-j}\xi)$ é $2^{l+1}\pi$ -periódica. De fato, note que

$$\mathcal{L}_l(\xi + 2^{l+1}\pi) = \prod_{j=0}^{l-1} \mathcal{L}(2^{-j}\xi + 2^{l+1-j}\pi) = \prod_{j=0}^{l-1} \mathcal{L}(2^{-j}\xi + 2^{l-j}(2\pi)) = \prod_{j=0}^{l-1} \mathcal{L}(2^{-j}\xi) = \mathcal{L}_l(\xi),$$

pois \mathcal{L} é 2π -periódica e para $0 \leq j \leq l-1$ temos $1 \leq l-j \leq l$.

Como \mathbf{K} é congruente a $[-\pi, \pi]$ módulo 2π e \mathcal{L}_l é $2^{l+1}\pi$ -periódica, existe $\zeta_l \in 2^l\mathbf{K}$ tal que $|\mathcal{L}_l(\zeta_l)| = q_l$, ou seja:

$$q_l = \sup_{|\xi| \leq 2^l\pi} |\mathcal{L}_l(\xi)| = \sup_{\xi \in 2^l\mathbf{K}} |\mathcal{L}_l(\xi)|.$$

Como \mathbf{K} é compacto, então a sequência $(2^{-l}\zeta_l) \in \mathbf{K}$ é uniformemente limitada. Daí, existe uma constante $C' > 0$ tal que para todo $l \in \mathbb{N}$, temos

$$|\zeta_l| \leq 2^l C'. \quad (4.15)$$

Além disso, observe que

$$\left| \frac{1 + e^{i\xi}}{2} \right| = \left| \frac{e^{\frac{i\xi}{2}}(e^{-\frac{i\xi}{2}} + e^{\frac{i\xi}{2}})}{2} \right| = \left| e^{\frac{i\xi}{2}} \right| \left| \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \right| \leq 1.$$

Isso implica que $|m_0(\xi)| \leq |\mathcal{L}(\xi)|$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Assim, para todo $\xi \in 2^l\mathbf{K}$, temos

$$\left| \prod_{j=l+1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-j}\xi) \right| \geq \left| \prod_{j=l+1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) \right| = \left| \prod_{k=1}^{\infty} m_0(2^{-k}(2^{-l}\xi)) \right| = (2\pi)^{\frac{1}{2}} |\hat{\phi}(2^{-l}\xi)| \geq (2\pi)^{\frac{1}{2}} C =: \bar{C} > 0.$$

Dessa forma, para $\xi_l = 2\zeta_l$, obtemos:

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-j}\xi_l) \right| &= \left| \prod_{j=1}^l \mathcal{L}(2^{-j}\xi_l) \right| \cdot \left| \prod_{j=l+1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-j}\xi_l) \right| \\ &= \left| \prod_{j=1}^l \mathcal{L}(2^{-(j-1)}\zeta_l) \right| \cdot \left| \prod_{j=l+1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-(j-1)}\zeta_l) \right| \\ &= \left| \prod_{k=0}^{l-1} \mathcal{L}(2^{-k}\zeta_l) \right| \cdot \left| \prod_{k=l}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-k}\zeta_l) \right| \\ &=: |\mathcal{L}_l(\zeta_l)| \cdot \left| \prod_{k=l}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-k}\zeta_l) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq q_l |\mathcal{L}(2^{-l}\zeta_l)| \bar{C} \\ &\geq q_l \bar{\bar{C}} \\ &= \bar{\bar{C}} 2^{l\mathcal{K}_l}, \end{aligned}$$

onde $\bar{\bar{C}} := \min_{l \in \mathbb{N}} |\mathcal{L}(2^{-l}\zeta_l)| \cdot \bar{C}$, pois

$$\mathcal{K}_l = \frac{\log q_l}{\log 2^l} \Rightarrow \log q_l = \mathcal{K}_l \log 2^l = \log 2^{l\mathcal{K}_l} \Rightarrow q_l = 2^{l\mathcal{K}_l}.$$

De (4.15), como $\xi_l = 2\zeta_l$, temos

$$1 + |\xi_l| \leq 1 + 2 \cdot 2^l C' \Rightarrow (1 + |\xi_l|)^{-\mathcal{K}} \geq (1 + 2^l 2C')^{-\mathcal{K}} = [2^l(2^{-l} + 2C')]^{-\mathcal{K}} = 2^{-l\mathcal{K}}(2^{-l} + 2C')^{-\mathcal{K}}.$$

Portanto,

$$(1 + |\xi_l|)^{-\mathcal{K}} \left| \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-j}\xi_l) \right| \geq 2^{-l\mathcal{K}}(2^{-l} + 2C')^{-\mathcal{K}} \bar{\bar{C}} 2^{l\mathcal{K}_l} = \bar{\bar{C}} 2^{l\mathcal{K}_l} C'' 2^{-l\mathcal{K}},$$

onde $C'' = (2^{-l} + 2C')^{-\mathcal{K}}$. Como $\mathcal{K} = \inf_l \mathcal{K}_l$, segue que a desigualdade acima é limitada por baixo por uma constante estritamente positiva, como queríamos. ■

Antes de continuar, vamos provar algumas propriedades de P_N que nos serão muito úteis no decorrer desse capítulo.

Lema 4.4. *O polinômio $P_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1-n}{n} x^n$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(a)

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow x^{-N+1} P_N(x) \geq y^{-N+1} P_N(y) \quad (4.16)$$

(b)

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow P_N(x) \leq 2^{N-1} \max(1, 2x)^{N-1} \quad (4.17)$$

Demonstração: a) Seja $0 \leq x \leq y$. Vamos mostrar, por indução sobre n , que $x^{-n} \geq y^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, temos:

$$x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \Rightarrow x^{-1} \geq y^{-1}.$$

Suponha que seja verdade para um certo $m \in \mathbb{N}$, ou seja, $x^{-n} \geq y^{-n}$, $\forall n \leq m$. Assim,

$$x^{-(m+1)} = x^{-m} x^{-1} \geq y^{-m} y^{-1} = y^{-(m+1)}.$$

Agora, usando a definição de P_N temos:

$$\begin{aligned} x^{-N+1}P_N(x) &= x^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} x^{-(N-1-n)} \\ &\geq \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} y^{-(N-1-n)} = y^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} y^n = y^{-N+1}P_N(y). \end{aligned}$$

b) Sabemos, pelo Lema de Bézout, que P_N satisfaz a seguinte igualdade:

$$x^N P_N(1-x) + (1-x)^N P_N(x) = 1.$$

Fazendo $x = \frac{1}{2}$ nessa equação, obtemos:

$$2^{-N} P_N\left(\frac{1}{2}\right) + 2^{-N} P_N\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2^{-N+1} P_N\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow P_N\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{N-1}.$$

- Se $x \leq \frac{1}{2}$, então $2x \leq 1$. Como P_N é crescente, temos que

$$P_N(x) \leq P_N\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{N-1}.$$

- Se $x \geq \frac{1}{2}$, então $2x \geq 1$. Usando o item a) desse lema, obtemos:

$$2^{-(-N+1)} P_N\left(\frac{1}{2}\right) \geq x^{-N+1} P_N(x) \Rightarrow P_N(x) \leq 2^{N-1} (2x)^{N-1}.$$

Portanto,

$$P_N(x) \leq 2^{N-1} [\max(1, 2x)]^{N-1}.$$

■

Agora, vamos considerar o caso particular da família de funções ${}_N\phi$ dadas por

$$\widehat{{}_N\phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} {}_N m_0(2^{-j}\xi)$$

que definimos no Capítulo 3, Seção 3.2, e ver o que essas estimativas nos dão sobre elas. Temos que

$${}_N m_0(\xi) = \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^N \mathcal{L}_N(\xi),$$

onde

$$|\mathcal{L}_N(\xi)|^2 = P_N\left(\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} \left(\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^n.$$

Usaremos os Lemas (4.1) e (4.2) para obter algumas estimativas envolvendo tais funções. Primeiro, vamos mostrar que as hipóteses desses lemas são satisfeitas. Observe que:

$$\sup_{\xi} |\mathcal{L}_N(\xi)| = \sup_{\xi} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right)^n \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} \right]^{\frac{1}{2}},$$

pois $\sup_{\xi} (\text{sen}^2(\xi)) = 1$. Note que $0 \leq n \leq N-1$ implica que $0 \leq N-n-1 \leq N-1$, então $2^{N-(n+1)} > 1$ para todo $0 \leq n \leq N-1$. Daí,

$$\left[\sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} \right]^{\frac{1}{2}} < \left[2^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} 2^{-n} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[2^{N-1} P_N \left(\frac{1}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = 2^{N-1},$$

uma vez que $P_N(\frac{1}{2}) = 2^{N-1}$.

Logo, $\sup_{\xi} |\mathcal{L}_N(\xi)| < 2^{N-1} = 2^{N-\alpha-1}$, com $\alpha = 0$. Portanto, o Lema (4.1) nos diz que as $N\phi$ são contínuas. Porém, esse não é um bom resultado. Como $\mathcal{K} = \inf_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_j$, então $\mathcal{K} \leq \mathcal{K}_j$ para todo $j > 1$. Assim, estimando qualquer \mathcal{K}_j para $j > 1$, obtemos resultados melhores. Estimaremos \mathcal{K}_2 para ilustrar.

Usando (4.5) e (4.9), obtemos:

$$\begin{aligned} q_2 &= \sup_{\omega} \left| \prod_{k=0}^1 \mathcal{L}_N(2^{-k}\omega) \right| = \sup_{\omega} \left| \mathcal{L}_N(\omega) \cdot \mathcal{L}_N \left(\frac{\omega}{2} \right) \right| = \sup_{\xi} |\mathcal{L}_N(\xi) \cdot \mathcal{L}_N(2\xi)| \\ &= \sup_{\xi} \left[P_N(\text{sen}^2 \xi) P_N \left(\text{sen}^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{0 \leq y \leq 1} [P_N(y) P_N(4y(1-y))]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

uma vez que $\text{sen}^2(\xi) = 4 \text{sen}^2(\frac{\xi}{2}) \cos^2(\frac{\xi}{2}) = 4 \text{sen}^2(\frac{\xi}{2})(1 - \text{sen}^2(\frac{\xi}{2}))$ e fizemos $y = \text{sen}^2(\frac{\xi}{2})$.

Analisaremos o que acontece com o produto $P_N(y)P_N(4y(1-y))$, separando em alguns casos. Para isso, observe que $4y(1-y)$ quando $0 \leq y \leq 1$, é um pedaço de uma parábola, o qual é dado na Figura 4.3 a seguir.

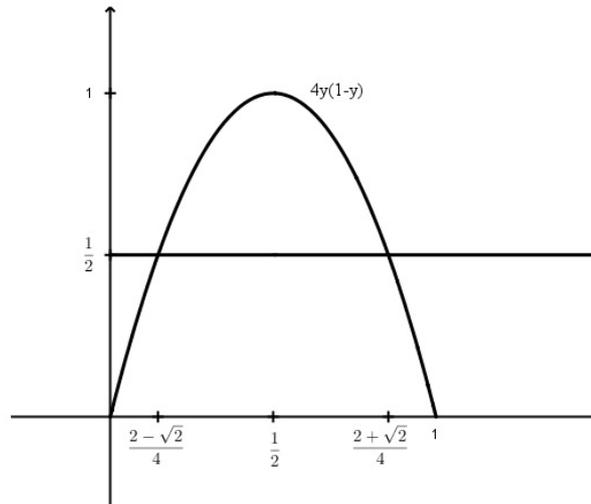


Figura 4.3: Gráfico da parábola $4y(1-y)$, para $0 \leq y \leq 1$.

4.1. MÉTODO DA FORÇA BRUTA

i) Para $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$, como P_N é crescente, temos que

$$P_N(y) \leq P_N\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{N-1}.$$

Daí,

- Se $0 \leq y \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$, então $0 \leq 4y(1-y) \leq \frac{1}{2}$, o que implica que $0 \leq 8y(1-y) \leq 1$. Assim, usando a equação (4.17) do Lema (4.4), obtemos que $P_N(4y(1-y)) \leq 2^{N-1}$. Logo,

$$P_N(y)P_N(4y(1-y)) \leq 2^{2(N-1)}.$$

- Se $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq \frac{1}{2}$, então $\frac{1}{2} \leq 4y(1-y) \leq 1$, o que implica que $1 \leq 8y(1-y) \leq 2$. Daí, pela equação (4.17), segue que

$$P_N(4y(1-y)) \leq 2^{N-1}[8y(1-y)]^{N-1} = [16y(1-y)]^{N-1} \leq [16y^2(1-y)]^{N-1},$$

pois $y \leq 1$ implica que $y \leq y^2$. Logo,

$$P_N(y)P_N(4y(1-y)) \leq 2^{N-1}[16y^2(1-y)]^{N-1} = 2^{5(N-1)}[y^2(1-y)]^{N-1}.$$

- ii) Para $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq 1$ temos que $0 \leq 4y(1-y) \leq \frac{1}{2}$. Daí, $0 \leq 8y(1-y) \leq 1$ e, então, temos $P_N(4y(1-y)) \leq 2^{N-1}$ pela equação (4.17). Por outro lado, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq 1$ implica que $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 2y \leq 2$. Logo, pela equação (4.17), $P_N(y) \leq 2^{N-1}(2y)^{N-1} \leq 2^{2(N-1)}$, pois $y \leq 1$. Dessa forma, temos

$$P_N(y)P_N(4(1-y)) \leq 2^{3(N-1)}.$$

- iii) Se $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$, então $\frac{1}{2} \leq 4y(1-y) \leq 1$ e daí, $1 \leq 8y(1-y) \leq 2$. Assim, pela equação (4.17), segue que $P_N(4y(1-y)) \leq 2^{N-1}[8y(1-y)]^{N-1} = [16y(1-y)]^{N-1}$. Por outro lado, $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ implica que $1 \leq 2y \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dessa forma, pela equação (4.17), temos que $P_N(y) \leq 2^{N-1}(2y)^{N-1}$. Logo,

$$P_N(y)P_N(4(1-y)) \leq 2^{(N-1)}(2y)^{N-1}[16y(1-y)]^{N-1} = 2^{6(N-1)}[y^2(1-y)]^{N-1}.$$

Vamos analisar a função $f(y) = y^2(1-y) = y^2 - y^3$, para $0 \leq y \leq 1$. Note que $f'(y) = 2y - 3y^2$ e $f''(y) = 2 - 6y$. Assim, temos

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = \frac{2}{3} \text{ e } f''(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}.$$

Observe que $f'(y) > 0$ para $0 \leq y \leq \frac{2}{3}$ e $f'(y) < 0$ para $\frac{2}{3} \leq y \leq 1$. Isso significa que $(\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3}))$ é um ponto crítico de f . Como $f''(y) > 0$ para $y \leq \frac{1}{3}$ e $f''(y) < 0$ para $y \geq \frac{1}{3}$, concluímos que f possui um máximo local em $x = \frac{2}{3}$. Logo, $f(y) \leq f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$, para todo $0 \leq y \leq 1$. Dessa forma, obtemos

$$[y^2(1-y)]^{N-1} \leq \left(\frac{4}{27}\right)^{N-1}, \quad \forall 0 \leq y \leq 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 q_2 &= \sup_{0 \leq y \leq 1} [P_N(y)P_N(4y(1-y))]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \max \left[2^{2(N-1)}, 2^{5(N-1)} \left(\frac{4}{27} \right)^{N-1}, 2^{3(N-1)}, 2^{6(N-1)} \left(\frac{4}{27} \right)^{N-1} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[2^{6(N-1)} \left(\frac{4}{27} \right)^{N-1} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= 2^{4(N-1)} 3^{-\frac{3(N-1)}{2}}.
 \end{aligned}$$

Daí, pela definição de \mathcal{K}_2 , obtemos

$$\mathcal{K}_2 \leq \frac{\log \left(2^{4(N-1)} 3^{-\frac{3(N-1)}{2}} \right)}{2 \log 2} = \frac{4(N-1) \log 2}{2 \log 2} - \frac{3(N-1) \log 3}{4 \log 2} = (N-1) \left(2 - \frac{3 \log 3}{4 \log 2} \right).$$

Como $\mathcal{K} \leq \mathcal{K}_2$, temos

$$\mathcal{K} \leq (N-1) \left(2 - \frac{3 \log 3}{4 \log 2} \right) = 2(N-1) - (N-1) \frac{3 \log 3}{4 \log 2} = (N-1) - (N-1) \left[\frac{3 \log 3}{4 \log 2} - 1 \right].$$

Logo, pelo Lema 4.2, concluímos que ${}_N\phi \in C^{\alpha_N}$, onde

$$\alpha_N \geq (N-1) \left[\frac{3 \log 3}{4 \log 2} - 1 \right] \approx 0,188792(N-1).$$

4.2 Estimativas de decaimento de $\hat{\phi}$ via ciclos invariantes

Nesta seção, veremos como os ciclos invariantes podem ser usados para obtermos estimativas de decaimento para a transformada de Fourier $\hat{\phi}$. Veremos, também, que o valor do polinômio trigonométrico \mathcal{L} em um ciclo invariante dá origem a um limite inferior para o decaimento de $\hat{\phi}$.

Definição 4.3. Dizemos que $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{M-1}\} \subset [-\pi, \pi]$ é um ciclo invariante para a aplicação $\tau\xi = 2\xi$ (módulo 2π) se satisfaz $\tau\xi_{m-1} = \xi_m$ para $m = 1, 2, \dots, M-1$ e $\tau\xi_{M-1} = \xi_0$.

Lema 4.5. Se $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{M-1}\} \subset [-\pi, \pi]$ é um ciclo invariante não-trivial qualquer, isto é, $\xi_0 \neq 0$, então, para todo $k \in \mathbb{N}$ temos:

$$|\hat{\phi}(2^{kM+1}\xi_0)| \geq C(1 + |2^{kM+1}\xi_0|)^{-N+\tilde{\mathcal{K}}},$$

onde $\tilde{\mathcal{K}} = \sum_{m=0}^{M-1} \log \left(\frac{|\mathcal{L}(\xi_m)|}{M \log 2} \right)$ e $C > 0$ é uma constante que não depende de k .

Demonstração: Como $\tau\xi_{m-1} = \xi_m$ para $m = 1, 2, \dots, M-1$ e $\tau\xi_{M-1} = \xi_0$, temos

$$\begin{aligned}
 \xi_0 &= \tau\xi_{M-1} = 2\xi_{M-1} = 2\tau\xi_{M-2} = 2^2\xi_{M-2} \\
 &= \dots = 2^{M-1}\xi_1 = 2^{M-1}\tau\xi_0 = 2^M\xi_0.
 \end{aligned}$$

Suponha que $2^{kM}\xi_0 = \xi_0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Então, temos

$$\begin{aligned}\xi_0 &= 2^{kM}\xi_0 = 2^{kM}\tau\xi_{M-1} = 2^{kM+1}\xi_{M-1} = 2^{kM+1}\tau\xi_{M-2} \\ &= \dots = 2^{(k+1)M-1}\xi_1 = 2^{(k+1)M-1}\tau\xi_0 = 2^{(k+1)M}\xi_0.\end{aligned}$$

Logo, pelo processo de indução finita, concluimos que $2^{kM}\xi_0 = \xi_0 \pmod{2\pi}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Suponha que $\xi_0 = \pm\pi$. Assim, temos que $\xi_1 = \tau\xi_0 = 2\xi_0 = \pm 2\pi = 0 \pmod{2\pi}$. Logo, $\xi_0 = 2^{M-1}\xi_1 = 0 \pmod{2\pi}$, o que contradiz nossa hipótese. Dessa forma, devemos ter que $\xi_0 \neq \pm\pi$.

Como $\xi_0 \neq 0$ e $\xi_0 \neq \pm\pi$, segue que $\text{sen}(2^{kM}\xi_0) \neq 0$. Daí, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|\text{sen}(2^{kM}\xi_0)| \geq C_1. \quad (4.18)$$

De (4.7), temos

$$\begin{aligned}|\hat{\phi}(2^{kM+1}\xi_0)| &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left| \frac{1 - e^{-i2^{kM+1}\xi_0}}{i2^{kM+1}\xi_0} \right|^N \left| \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-j}2^{kM+1}\xi_0) \right| \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left| \frac{e^{-i2^{kM}\xi_0}(e^{i2^{kM}\xi_0} - e^{-i2^{kM}\xi_0})}{2i2^{kM}\xi_0} \right|^N \left| \prod_{l=0}^{\infty} \mathcal{L}(2^{kM-l}\xi_0) \right| \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left| \frac{\text{sen}(2^{kM}\xi_0)}{2^{kM}\xi_0} \right|^N \left| \prod_{l=0}^{\infty} \mathcal{L}(2^{kM-l}\xi_0) \right| \\ &\geq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left| \frac{C_1}{2^{kM}\xi_0} \right|^N \left| \prod_{l=0}^{\infty} \mathcal{L}(2^{kM-l}\xi_0) \right| \quad (4.19)\end{aligned}$$

Como \mathcal{L} é um polinômio trigonométrico, então \mathcal{L} é contínuo. Daí, como $\mathcal{L}(0) = 1$, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que $|\mathcal{L}(\xi)| \geq 1 - C_2|\xi|$, para $|\xi|$ suficientemente pequeno. Como $1 - x \geq e^{-2x}$ para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, segue que $|\mathcal{L}(\xi)| \geq e^{-2C_2|\xi|}$, para $|\xi|$ suficientemente pequeno. Logo, para r suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}\prod_{j=rM}^{\infty} |\mathcal{L}(2^{-j}\xi_0)| &\geq \prod_{j=rM}^{\infty} e^{-2C_22^{-j}|\xi_0|} \\ &= e^{-2C_2|\xi_0| \sum_{j=rM}^{\infty} 2^{-j}} \\ &= e^{-2^{-rM+2}C_2|\xi_0|} \\ &\geq e^{-4C_2|\xi_0|} \\ &=: C_3,\end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem do fato que $2^{-rM} \leq 1$ implica $-4 \cdot 2^{-rM} \geq -4$.

Por outro lado, temos

$$\prod_{l=0}^{(r+k)M-1} \mathcal{L}(2^{kM-l}\xi_0) = \prod_{l=0}^{M-1} \mathcal{L}(2^{kM-l}\xi_0) \cdot \prod_{l=M}^{2M-1} \mathcal{L}(2^{kM-l}\xi_0) \cdots \prod_{l=(r+k-1)M}^{(r+k)M-1} \mathcal{L}(2^{kM-l}\xi_0).$$

Usando que $2^{kM}\xi_0 = \xi_0 \pmod{2\pi}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, para estimar os produtórios do lado direito da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \prod_{l=0}^{M-1} \mathcal{L}(2^{kM-l}\xi_0) &= \mathcal{L}(2^{kM}\xi_0) \cdot \mathcal{L}(2^{kM-1}\xi_0) \cdots \mathcal{L}(2^{(k-1)M+1}\xi_0) \\ &= \mathcal{L}(\xi_0) \cdot \mathcal{L}(2^{-1}\xi_0) \cdots \mathcal{L}(2^{-(M-1)}\xi_0) \\ &= \mathcal{L}(\xi_0) \cdot \mathcal{L}(\xi_{M-1}) \cdots \mathcal{L}(\xi_2) \cdot \mathcal{L}(\xi_1), \end{aligned}$$

pois $\xi_0 = \tau\xi_{M-1} = 2\xi_{M-1}$ e $\xi_m = \tau\xi_{m-1} = 2\xi_{m-1}$, para todo m tal que $1 \leq m \leq M-1$, o que implica, respectivamente, que $\xi_{M-1} = 2^{-1}\xi_0$ e $\xi_{m-1} = 2^{-1}\xi_m$, para $1 \leq m \leq M-1$.

Usando argumentos análogos aos que utilizamos no produtório acima para os demais produtórios, chegaremos que todos eles são iguais a $\mathcal{L}(\xi_0) \cdot \mathcal{L}(\xi_{M-1}) \cdots \mathcal{L}(\xi_2) \cdot \mathcal{L}(\xi_1)$.

Logo,

$$\prod_{l=0}^{(r+k)M-1} \mathcal{L}(2^{kM-l}\xi_0) = [\mathcal{L}(\xi_0) \cdot \mathcal{L}(\xi_{M-1}) \cdots \mathcal{L}(\xi_2) \cdot \mathcal{L}(\xi_1)]^{r+k}.$$

Portanto, de (4.19), segue que

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}(2^{kM+1}\xi_0)| &\geq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} C_1^N (2^{kM}|\xi_0|)^{-N} \left| \prod_{j=0}^{(r+k)M-1} \mathcal{L}(2^{kM-j}\xi_0) \right| \left| \prod_{j=(r+k)M}^{\infty} \mathcal{L}(2^{kM-j}\xi_0) \right| \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} C_1^N (2^{kM}|\xi_0|)^{-N} [\mathcal{L}(\xi_0) \cdot \mathcal{L}(\xi_{M-1}) \cdots \mathcal{L}(\xi_2) \cdot \mathcal{L}(\xi_1)]^{r+k} \left| \prod_{l=rM}^{\infty} \mathcal{L}(2^{-l}\xi_0) \right| \\ &\geq (2\pi)^{-\frac{1}{2}} C_1^N (2^{kM}|\xi_0|)^{-N} [\mathcal{L}(\xi_0) \cdot \mathcal{L}(\xi_{M-1}) \cdots \mathcal{L}(\xi_2) \cdot \mathcal{L}(\xi_1)]^{r+k} C_3 \\ &\geq C_4 (1 + 2^{kM}|\xi_0|)^{-N} [\mathcal{L}(\xi_0) \cdot \mathcal{L}(\xi_{M-1}) \cdots \mathcal{L}(\xi_2) \cdot \mathcal{L}(\xi_1)]^{r+k}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $C_4 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} C_1^N C_3$ e a última desigualdade vem do fato que $1 + 2^{kM}|\xi_0| \geq 2^{kM}|\xi_0|$, o que implica que $(2^{kM}|\xi_0|)^{-N} \geq (1 + 2^{kM}|\xi_0|)^{-N}$.

Agora, observe que

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}(\xi_0) \cdot \mathcal{L}(\xi_{M-1}) \cdots \mathcal{L}(\xi_2) \cdot \mathcal{L}(\xi_1)]^{r+k} &= [\mathcal{L}(\xi_0) \cdot \mathcal{L}(\xi_{M-1}) \cdots \mathcal{L}(\xi_1)]^r \cdot [\mathcal{L}(\xi_0) \cdot \mathcal{L}(\xi_{M-1}) \cdots \mathcal{L}(\xi_1)]^k \\ &= \tilde{C} \left| \prod_{m=0}^{M-1} \mathcal{L}(\xi_m) \right|^k \\ &= \tilde{C} 2^{\log_2 |\prod_{m=0}^{M-1} \mathcal{L}(\xi_m)|^k} \\ &= \tilde{C} 2^{k \sum_{m=0}^{M-1} \log_2 |\mathcal{L}(\xi_m)|} \\ &= \tilde{C} 2^{kM \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\log |\mathcal{L}(\xi_m)|}{M \log 2}} \\ &= \tilde{C} 2^{kM\tilde{K}}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = [\mathcal{L}(\xi_0) \cdot \mathcal{L}(\xi_{M-1}) \cdots \mathcal{L}(\xi_1)]^r$. Como $|\xi_0| \leq \pi$, temos

$$1 + 2^{kM+1}|\xi_0| \leq 1 + 2^{kM+1}\pi \leq 4\pi 2^{kM},$$

pois $1 \leq 2^{kM}2\pi$. Isso implica que

$$[1 + 2^{kM+1}|\xi_0|]^{\tilde{\mathcal{K}}} \leq [4\pi]^{\tilde{\mathcal{K}}}[2^{kM}]^{\tilde{\mathcal{K}}} \Rightarrow 2^{kM\tilde{\mathcal{K}}} \geq C'(1 + 2^{kM+1}|\xi_0|)^{\tilde{\mathcal{K}}},$$

com $C' = [4\pi]^{-\tilde{\mathcal{K}}}$.

Dessa forma,

$$[\mathcal{L}(\xi_0) \cdot \mathcal{L}(\xi_{M-1}) \cdots \mathcal{L}(\xi_2) \cdot \mathcal{L}(\xi_1)]^{r+k} = \tilde{C}2^{kM\tilde{\mathcal{K}}} \geq \tilde{C}C'(1 + 2^{kM+1}|\xi_0|)^{\tilde{\mathcal{K}}}.$$

Portanto, de (4.20), concluimos que

$$|\hat{\phi}(2^{kM+1}\xi_0)| \geq C_4(1 + 2^{kM}|\xi_0|)^{-N} \tilde{C}C'(1 + 2^{kM+1}|\xi_0|)^{\tilde{\mathcal{K}}} = C(1 + 2^{kM+1}|\xi_0|)^{-N+\tilde{\mathcal{K}}},$$

onde $C = C_4\tilde{C}C'$. ■

A seguir daremos um exemplo de um ciclo invariante não-trivial e a estimativa correspondente ao lema que acabamos de demonstrar.

Exemplo 4.1. Note que $\left\{\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right\} \subset [-\pi, \pi]$ é um ciclo invariante não-trivial para a aplicação $\tau\xi = 2\xi$. Então, pelo Lema 4.5 segue que existe uma constante $C > 0$, independente de n , tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left|\hat{\phi}\left(2^n \frac{2\pi}{3}\right)\right| \geq C \left(1 + \left|2^n \frac{2\pi}{3}\right|\right)^{-N+\tilde{\mathcal{K}}},$$

com

$$\tilde{\mathcal{K}} = \frac{\log |\mathcal{L}(\frac{2\pi}{3})\mathcal{L}(-\frac{2\pi}{3})|}{2 \log 2} = \frac{\log |\mathcal{L}(\frac{2\pi}{3})|}{\log 2},$$

pois \mathcal{L} possui apenas coeficientes reais, o que implica que $|\mathcal{L}(-\frac{2\pi}{3})| = |\mathcal{L}(\frac{2\pi}{3})|$.

Lema 4.6. *Suponha que $[-\pi, \pi] = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_M$, e que existe $q > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\xi)| &\leq q & \xi \in D_1 \\ |\mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(2\xi)| &\leq q^2 & \xi \in D_2 \\ &\vdots & \vdots \\ |\mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(2\xi) \cdots \mathcal{L}(2^{M-1}\xi)| &\leq q^M & \xi \in D_M. \end{aligned}$$

Então $|\hat{\phi}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-n+\mathcal{K}}$, com $\mathcal{K} = \frac{\log q}{\log 2}$.

Demonstração: Seja $j \in \mathbb{N}$ arbitrário e grande. Queremos avaliar o produto

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{j-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) &= \mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(2^{-1}\xi) \cdots \mathcal{L}(2^{-j+1}\xi) \\ &= \mathcal{L}(2^{-j+1}\xi)\mathcal{L}(2(2^{-j+1}\xi)) \cdots \mathcal{L}(2^{j-2}(2^{-j+1}\xi))\mathcal{L}(2^{j-1}(2^{-j+1}\xi)), \end{aligned}$$

onde $\xi \in \mathbb{R}$. Se fizermos $\zeta = 2^{-j+1}\xi$, então esse último produto pode ser escrito como

$$\mathcal{L}(\zeta) \cdots \mathcal{L}(2\zeta) \cdots \mathcal{L}(2^{j-1}\zeta),$$

que está na forma adequada para usarmos a hipótese do lema.

- Se $\zeta \in [-\pi, \pi]$, então $\zeta \in D_m$ para algum $m \in \{1, 2, \dots, M-1\}$. Assim,

$$|\mathcal{L}(\zeta) \cdots \mathcal{L}(2^{m-1}\zeta)| \leq q^m \quad (4.21)$$

- Se $\zeta \notin [-\pi, \pi]$ então $\zeta' = \zeta + 2\pi l \in [-\pi, \pi]$ para algum inteiro l . Daí, $\zeta' \in D_m$ para algum $m \in \{1, 2, \dots, M-1\}$. Logo,

$$|\mathcal{L}(\zeta') \cdots \mathcal{L}(2^{m-1}\zeta')| \leq q^m,$$

mas pela periodicidade de \mathcal{L} , temos

$$|\mathcal{L}(\zeta) \cdots \mathcal{L}(2^{m-1}\zeta)| = |\mathcal{L}(\zeta') \cdots \mathcal{L}(2^{m-1}\zeta')|,$$

ou seja, (4.21) ainda é verdadeira.

O próximo passo é aplicar o procedimento para

$$\mathcal{L}(2^m \zeta) \dots \mathcal{L}(2^{j-1} \zeta),$$

ou seja, $2^m \zeta$ ou a sua translação de um múltiplo de 2π está em $[-\pi, \pi]$ e, portanto em um dos conjuntos D_m .

Repetimos o processo acima enquanto o número de fatores restantes, r , for maior ou igual a M , e ganharemos um fator de q^m , onde $1 \leq m \leq M-1$.

Haverá um momento em que $r \leq M-1$ e pode acontecer que o primeiro fator, ou ele transladado de 2π , não esteja em D_m , onde $m > r$. Nesse caso, não conseguimos continuar o processo e não podemos ganhar o fator q^m . Portanto, temos que manter estes r fatores, onde $r \leq M-1$.

Note que se começarmos com $j \geq M$, teremos a certeza de que ganharemos pelo menos um fator de q^m (por isso a hipótese de j ser suficientemente grande).

Nesse momento que não conseguimos mais continuar o processo, temos que

$$\prod_{k=0}^{j-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \leq q^{j-r} \prod_{k=j-r}^{j-1} \mathcal{L}(2^k \zeta) = q^{j-r} \prod_{k=j-r}^{j-1} \mathcal{L}(2^{k-j+1}\xi) = q^{j-r} \prod_{l=0}^{r-1} \mathcal{L}(2^{l-r+1}\xi) = q^{j-r} \prod_{k=0}^{r-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi),$$

o que implica em

$$\left| \prod_{k=0}^{j-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \right| \leq q^{j-r} \left| \prod_{k=0}^{r-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \right|.$$

Observe que

$$\left| \prod_{k=0}^{r-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \right| = |\mathcal{L}(\xi)| \cdot |\mathcal{L}(2^{-1}\xi)| \cdots |\mathcal{L}(2^{r-1}\xi)|.$$

Daí,

$$\sup_{\xi} \left| \prod_{k=0}^{r-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \right| \leq \sup_{\xi} |\mathcal{L}(\xi)| \cdot \sup_{\xi} |\mathcal{L}(2^{-1}\xi)| \cdots \sup_{\xi} |\mathcal{L}(2^{r-1}\xi)| = (q_1)^r \leq (q_1)^{M-1},$$

pois, $r \leq M - 1$. Logo,

$$q_j = \sup_{\xi} \left| \prod_{k=0}^{j-1} \mathcal{L}(2^{-k}\xi) \right| \leq q^{j-r} (q_1)^{M-1}.$$

Portanto, de (4.10), concluimos que

$$\mathcal{K}_j \leq \frac{\log(q^{j-r}(q_1)^{M-1})}{j \log 2} = \frac{(j-r) \log q + (M-1) \log q_1}{j \log 2} = \frac{1}{j \log 2} [j \log q + (M-1) \log q_1 - r \log q],$$

$$\text{e } \mathcal{K} = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{K}_j \leq \frac{\log q}{\log 2}.$$

Dessa forma, a cota inferior para o expoente de decaimento de $\hat{\phi}$ vem do Lema 4.2, pois

$$\mathcal{K} \leq \frac{\log q}{\log 2} = N - 1 - \left(N - 1 - \frac{\log q}{\log 2} \right)$$

implica que $\hat{\phi} \in C^\alpha$, onde $\alpha \geq N - 1 - \frac{\log q}{\log 2}$. ■

Lema 4.7. *Suponha que:*

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\xi)| &\leq |\mathcal{L}(\frac{2\pi}{3})|, & |\xi| &\leq \frac{2\pi}{3}, \\ |\mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(2\xi)| &\leq |\mathcal{L}(\frac{2\pi}{3})|^2, & \frac{2\pi}{3} &\leq |\xi| \leq \pi. \end{aligned}$$

Então $|\hat{\phi}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-N+\mathcal{K}}$, com $\mathcal{K} = \frac{\log |\mathcal{L}(\frac{2\pi}{3})|}{\log 2}$, e esse decaimento é ótimo.

Demonstração: É uma consequência direta dos Lemas 4.5 e 4.6. ■

Observação 4.2. Vimos na Seção 2.2 que se $(1 + |\omega|)^\alpha |\hat{\phi}(\omega)| \in L^1(\mathbb{R})$, então $\phi \in C^\alpha(\mathbb{R})$. Em particular, se

$$|\hat{\phi}(\omega)| \leq \frac{C}{(1 + |\omega|)^{N-K}},$$

então $\phi \in C^{N-K-1-\epsilon}$, para todo $\epsilon > 0$.

Agora provaremos uma propriedade do polinômio P_N que será muito útil na demonstração do próximo lema que veremos.

Lema 4.8. *Dado $x \in \mathbb{R}$, temos*

$$P'_N(x) = \frac{N}{1-x} [P_N(x) - P_N(1)x^{N-1}]. \quad (4.22)$$

Demonstração: Derivando o polinômio P_N dado na equação (4.6) temos

$$\begin{aligned} P'_N(x) &= \sum_{n=1}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} n x^{n-1} \\ &= \binom{N}{1} + \binom{N+1}{2} 2x + \binom{N+2}{3} 3x^2 + \cdots + \binom{2N-1}{N-1} x^{N-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= N \left[1 + (N+1)x + \frac{(N+2)(N+1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{(2N-2)(2N-1)\cdots(N-1)}{N!}x^{N-2} \right] \tag{4.23} \\
 &= N \left[\binom{N}{0} + \binom{N+1}{1}x + \binom{N+2}{2}x^2 + \cdots + \binom{2N-2}{N-2}x^{N-2} \right] \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-2} \binom{N+n}{n} x^n \\
 &= N \left[P_{N+1}(x) - \binom{2N}{N}x^N - \binom{2N-1}{N-1}x^{N-1} \right]. \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
 (1-x)P_{N+1}(x) &= P_{N+1}(x) - xP_{N+1}(x) \\
 &= \binom{N}{0} + \sum_{n=1}^N \binom{N+n}{n} x^n - \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N+n}{n} x^{n+1} - \binom{2N}{N}x^{N+1} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^N \binom{N+n}{n} x^n - \sum_{m=1}^N \binom{N-1+m}{m-1} x^m - \binom{2N}{N}x^{N+1} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^N \left[\binom{N+n}{n} - \binom{N-1+n}{n-1} \right] x^n - \binom{2N}{N}x^{N+1} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^N \binom{N-1+n}{n} x^n - \binom{2N}{N}x^{N+1} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} x^n + \binom{2N-1}{N}x^N - 2\binom{2N-1}{N}x^{N+1} \\
 &= P_N(x) + (1-2x)\binom{2N-1}{N}x^N. \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

Logo, juntando as equações (4.24) e (4.25), obtemos

$$\begin{aligned}
 (1-x)P'_N(x) &= (1-x)N \left[P_{N+1}(x) - \binom{2N}{N}x^N - \binom{2N-1}{N-1}x^{N-1} \right] \\
 &= N \left[(1-x)P_{N+1}(x) - (1-x)\binom{2N}{N}x^N - (1-x)\binom{2N-1}{N-1}x^{N-1} \right] \\
 &= N \left[P_N(x) + (1-2x)\binom{2N-1}{N}x^N - (1-x)\binom{2N}{N}x^N - (1-x)\binom{2N-1}{N-1}x^{N-1} \right] \\
 &= N \left\{ P_N(x) + x \left[(1-2x)\binom{2N-1}{N} - (1-x)\binom{2N}{N} \right] x^{N-1} \right. \\
 &\quad \left. - (1-x)\binom{2N-1}{N-1}x^{N-1} \right\} \\
 &= N \left\{ P_N(x) + x \left[(1-x) \left(\binom{2N-1}{N} - \binom{2N}{N} \right) - x\binom{2N-1}{N-1} \right] x^{N-1} \right. \\
 &\quad \left. - (1-x)\binom{2N-1}{N-1}x^{N-1} \right\} \\
 &= N \left\{ P_N(x) + x \left[(-1+x)\binom{2N-1}{N} - x\binom{2N-1}{N-1} \right] x^{N-1} - (1-x)\binom{2N-1}{N-1}x^{N-1} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= N \left[P_N(x) - x \binom{2N-1}{N-1} x^{N-1} - (1-x) \binom{2N-1}{N-1} x^{N-1} \right] \\
 &= N \left[P_N(x) - \binom{2N-1}{N} x^{N-1} \right] \\
 &= N [P_N(x) - P_N(1)x^{N-1}],
 \end{aligned}$$

pois,

$$P_N(1) = \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} = \binom{N-1}{0} + \binom{N}{1} + \cdots + \binom{2N-2}{N-1} = \binom{2N-1}{N}.$$

■

O próximo resultado nos ajudará a estimar o decaimento assintótico das funções escalas ${}_N\phi$ associadas as wavelets de Daubechies.

Lema 4.9. *Para todo $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, $P_N(y)$ definido por (4.6), satisfaz*

$$P_N(y) \leq P_N\left(\frac{3}{4}\right), \quad \text{se } 0 \leq y \leq \frac{3}{4} \quad (4.26)$$

$$P_N(y)P_N(4y(1-y)) \leq \left[P_N\left(\frac{3}{4}\right) \right]^2, \quad \text{se } \frac{3}{4} \leq y \leq 1. \quad (4.27)$$

Demonstração: Como P_N é crescente em $[0, 1]$ para todo $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, segue que precisamos provar apenas a condição (4.27).

Defina

$$f(y) = P_N(y)P_N(4y(1-y)).$$

Derivando com relação a y e usando o Lema 4.8, obtemos

$$\begin{aligned}
 f'(y) &= P'_N(y)P_N(4y(1-y)) + P_N(y)P'_N(4y(1-y))[4-8y] \\
 &= \frac{N}{1-y} [P_N(y) - P_N(1)y^{N-1}]P_N(4y(1-y)) \\
 &\quad + \frac{P_N(y)[-4(2y-1)]N}{(2y-1)^2} [P_N(4y(1-y)) - P_N(1)(4y(1-y))^{N-1}] \\
 &= \frac{N}{1-y} P_N(y)P_N(4y(1-y)) - \frac{N}{1-y} P_N(1)P_N(4y(1-y))y^{N-1} \\
 &\quad - \frac{4N}{2y-1} P_N(y)P_N(4y(1-y)) + \frac{4N}{2y-1} P_N(y)P_N(1)[4y(1-y)]^{N-1} \\
 &= \frac{(6y-5)N}{(1-y)(2y-1)} P_N(y)P_N(4y(1-y)) - \frac{N}{1-y} P_N(1)P_N(4y(1-y))y^{N-1} \\
 &\quad + \frac{4N}{2y-1} P_N(y)P_N(1)[4y(1-y)]^{N-1}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$f'(y) = \frac{N}{(1-y)(2y-1)}g(y),$$

onde,

$$\begin{aligned} g(y) &= (6y-5)P_N(y)P_N(4y(1-y)) - (2y-1)y^{N-1}P_N(1)P_N(4(1-y)) \\ &\quad + 4(1-y)[4y(1-y)]^{N-1}P_N(y)P_N(1). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Para provarmos (4.27) vamos considerar 3 casos.

1º Caso: $\frac{3}{4} \leq y \leq \frac{5}{6}$.

Defina $r(y) = 4y(1-y) - y = 3y - 4y^2$. Então $r'(y) = 3 - 8y$, e daí $r'(y) \leq 0$, se $y \geq \frac{3}{4}$. Logo, r é decrescente se $y \geq \frac{3}{4}$, ou seja, $0 = r(\frac{3}{4}) \geq r(y) = 4y(1-y) - y$ o que implica que $4y(1-y) \leq y$, para $y \geq \frac{3}{4}$. Assim, pela equação (4.16) do Lema 4.4, temos

$$[4y(1-y)]^{-N+1}P_N(4y(1-y)) \geq y^{-N+1}P_N(y) \Rightarrow P_N(4y(1-y)) \geq [4(1-y)]^{N-1}P_N(y). \quad (4.29)$$

Dessa forma, de (4.28), obtemos

$$\begin{aligned} g(y) &\leq (6y-5)P_N(y)P_N(4y(1-y)) - y^{N-1}(2y-1)P_N(1)P_N(4y(1-y)) \\ &\quad + 4(1-y)y^{N-1}P_N(1)P_N(4y(1-y)) \\ &= (6y-5)P_N(y)P_N(4y(1-y)) - y^{N-1}P_N(1)P_N(4y(1-y))(6y-5) \\ &= (6y-5)P_N(4y(1-y))\frac{(1-y)}{N}P'_N(y), \end{aligned}$$

onde usamos (4.22) na última igualdade. Observe que

$$g(y) \leq 0 \Leftrightarrow 6y - 5 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{5}{6}.$$

Como $g(y) \leq 0$ e $(1-y)(2y-1) \leq 0$ para $\frac{3}{4} \leq y \leq \frac{5}{6}$, temos que $f'(y) \leq 0$ em $[\frac{3}{4}, \frac{5}{6}]$, ou seja, $P_N(y)P_N(4y(1-y))$ é decrescente em $[\frac{3}{4}, \frac{5}{6}]$. Isso implica que

$$P_N(y)P_N(4y(1-y)) \leq P_N\left(\frac{3}{4}\right)P_N\left(3\left(1-\frac{3}{4}\right)\right) = \left[P_N\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2, \quad \text{para } \frac{3}{4} \leq y \leq \frac{5}{6}.$$

2º Caso: $\frac{5}{6} \leq y \leq 1$ e $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 13$.

Como $\frac{3}{4} \leq y$, pela equação (4.16) do Lema 4.8 temos que $(\frac{3}{4})^{-N+1}P_N(\frac{3}{4}) \geq y^{-N+1}P_N(y)$, ou seja,

$$P_N(y) \leq \left(\frac{4y}{3}\right)^{N-1}P_N\left(\frac{3}{4}\right).$$

Assim, provar a condição (4.27) é equivalente a provar que

$$\left(\frac{4y}{3}\right)^{N-1}P_N(4y(1-y)) \leq P_N\left(\frac{3}{4}\right). \quad (4.30)$$

Agora, observe que

$$P_N(1) = \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1+n}{n} = \binom{2N-1}{N-1} = \frac{1}{2} \binom{2N}{N},$$

pois, pela Relação de Stifel (Lema 2.2), temos

$$2 \binom{2N-1}{N-1} = \binom{2N-1}{N-1} + \binom{2N-1}{N} = \binom{2N}{N}.$$

Vamos mostrar por indução que $\frac{1}{2} \binom{2N}{N} \geq \frac{1}{\sqrt{N}} 4^{N-1}$ para $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. Para $N = 1$, temos

$$\frac{1}{2} \binom{2}{1} = 1 \geq 1 = \frac{1}{\sqrt{1}} 4^0.$$

Para $N = 2$, temos

$$\frac{1}{2} \binom{4}{2} = \frac{1}{2} \frac{4!}{2 \cdot 2} = 3 \geq 2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} 4^1.$$

Suponha que $\frac{1}{2} \binom{2M}{M} \geq \frac{1}{\sqrt{M}} 4^{M-1}$ seja verdade para algum $M \in \mathbb{N}$. Então, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{M+1}} 4^M &\leq \frac{1}{\sqrt{M}} 4^{M-1} 4 \\ &\leq \frac{1}{2} \binom{2M}{M} 4 \\ &= 2 \frac{(2M)!}{[M!]^2} \cdot \frac{(M+1)}{(M+1)} \\ &= \frac{(2M+2)(2M)!}{M!(M+1)!} \\ &\leq \frac{(2M+2)(2M)!}{M!(M+1)!} \cdot \frac{(2M+1)}{(M+1)} \\ &= \frac{[2(M+1)]!}{[(M+1)!]^2} \\ &= \binom{2(M+1)}{M+1}. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos que $P_N(1) \geq \frac{1}{\sqrt{N}} 4^{N-1}$, para todo $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. Por outro lado, como $\frac{3}{4} \leq 1$, usando novamente a equação (4.25), segue que

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-N+1} P_N\left(\frac{3}{4}\right) \geq P_N(1), \text{ ou seja, } P_N\left(\frac{3}{4}\right) \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{N-1} P_N(1) \geq \frac{1}{\sqrt{N}} 3^{N-1}.$$

Vimos que P_N satisfaz o Lema de Bézout. Por isso, como $4y(1-y) \geq 0$ para $0 \leq y \leq 1$ e $P_N(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$[1 - 4y(1-y)]^N P_N(4y(1-y)) = 1 - [4y(1-y)]^N P_N(1 - 4y(1-y)) \leq 1,$$

ou seja,

$$P_N(4y(1-y)) \leq [1-4y(1-y)]^{-N} = (2y-1)^{-2N}. \quad (4.31)$$

Logo, se provarmos que $\left[\frac{y}{(2y-1)^2}\right]^{N-1} (2y-1)^{-2} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{9}{4}\right)^{N-1}$, concluímos (4.30) pois usando essas desigualdades que acabamos de provar, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{4y}{3}\right)^{N-1} P_N(4y(1-y)) &\leq \left(\frac{4y}{3}\right)^{N-1} (2y-1)^{-2N} = \left(\frac{4}{3}\right)^{N-1} (2y-1)^{-2} \left(\frac{y}{(2y-1)^2}\right)^{N-1} \\ &\leq \left(\frac{4}{3}\right)^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{9}{4}\right)^{N-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} 3^{N-1} \leq P_N\left(\frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

Então, resta provarmos que $\left[\frac{y}{(2y-1)^2}\right]^{N-1} (2y-1)^{-2} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{9}{4}\right)^{N-1}$. Para isso, defina

$$r(y) = \left[\frac{y}{(2y-1)^2}\right]^{N-1} (2y-1)^{-2}.$$

Observe que ambos os fatores $y(2y-1)^{-2}$ e $(2y-1)^{-2}$ são decrescentes em $[\frac{5}{6}, 1]$. Assim, $r(y) \leq r(\frac{5}{6}) = (\frac{5}{6})^{N-1} (\frac{9}{4})^N$, para todo $y \in [\frac{5}{6}, 1]$. Daí, basta mostrarmos que

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{N-1} \left(\frac{9}{4}\right)^N \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{9}{4}\right)^{N-1}, \text{ ou seja, } \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1} \leq \frac{4}{9\sqrt{N}}.$$

Defina

$$h(N) = (N-1) \log\left(\frac{5}{6}\right) - 2 \log\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2} \log N.$$

Se mostrarmos que $h(N) < 0$, vamos ter que $(N-1) \log(\frac{5}{6}) \leq 2 \log(\frac{2}{3}) + \frac{1}{2} \log N$, isto é,

$$\log\left(\frac{5}{6}\right)^{N-1} \leq \log\left(\frac{4}{9}\right) + \log\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = \log\left(\frac{4}{9\sqrt{N}}\right).$$

Isso implica em $(\frac{5}{6})^{N-1} \leq \frac{4}{9\sqrt{N}}$, que é o que queremos. Vamos, então, mostrar que $h(N) < 0$. Temos que $h'(N) = \log(\frac{5}{6}) + \frac{1}{2N}$. Então, $h'(N) = 0 \Leftrightarrow N = -\frac{1}{2 \log(\frac{5}{6})} \approx 6,32$. Calculando numericamente, vemos que $h'(N) < 0$ para todo $N \geq 7$, ou seja, h é decrescente para todo $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 7$.

Novamente, calculando numericamente vemos que $h(12) \approx 0,0208 > 0$ e $h(13) \approx -0,041 < 0$. Assim, $h(N) < 0$, para todo $N \geq 13$, pois h é decrescente para todo $N \geq 13$.

3º Caso: $\frac{5}{6} \leq y \leq 1$ e $1 \leq N \leq 12$.

Vamos dividir esse caso em dois subcasos, $y \leq y_0 := \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ e $y \geq y_0$.

Para $y \leq \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, temos $4y(1-y) \geq \frac{1}{2}$. Então, usando novamente a equação (4.25) do Lema 4.8, temos

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-N+1} P_N\left(\frac{1}{2}\right) \geq [4y(1-y)]^{-N+1} P_N(4y(1-y)),$$

ou seja,

$$P_N(4y(1-y)) \leq [8y(1-y)]^{N-1} P_N\left(\frac{1}{2}\right) = [16y(1-y)]^{N-1},$$

pois $P_N(\frac{1}{2}) = 2^{N-1}$.

Como $\frac{5}{6} \leq y$, aplicando o Lema 4.8 novamente, obtemos

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{-N+1} P_N\left(\frac{5}{6}\right) \geq y^{-N+1} P_N(y), \text{ isto é, } P_N(y) \leq \left(\frac{6y}{5}\right)^{N-1} P_N\left(\frac{5}{6}\right).$$

Sabemos que $y^2(1-y)$ é decrescente em $[\frac{5}{6}, 1]$. Assim, $y^2(1-y) \leq (\frac{5}{6})^2(\frac{1}{6}) = \frac{5^2}{6^3}$. Logo,

$$P_N(y)P_N(4y(1-y)) \leq \left(\frac{6}{5}\right)^{N-1} P_N\left(\frac{5}{6}\right) [16y^2(1-y)]^{N-1} \leq \left(\frac{20}{9}\right)^{N-1} P_N\left(\frac{5}{6}\right).$$

Vimos que os P_N são dados por (4.6). Calculando numericamente, para P_N , $1 \leq N \leq 12$, como segue na tabela abaixo, verificamos que $(\frac{20}{9})^{N-1} P_N(\frac{5}{6}) \leq [P_N(\frac{3}{4})]^2$.

| N | $(\frac{20}{9})^{N-1} P_N(\frac{5}{6})$ | $[P_N(\frac{3}{4})]^2$ | N | $(\frac{20}{9})^{N-1} P_N(\frac{5}{6})$ | $[P_N(\frac{3}{4})]^2$ |
|-----|-----------------------------------------|------------------------|-----|-----------------------------------------|------------------------|
| 1 | 1 | 1 | 7 | 80.839,9 | 158.380,0 |
| 2 | 5,92 | 6,25 | 8 | $5,65 \cdot 10^5$ | $1,28 \cdot 10^6$ |
| 3 | 37,86 | 43,89 | 9 | $3,97 \cdot 10^6$ | $1,05 \cdot 10^7$ |
| 4 | 250,77 | 326,25 | 10 | $2,81 \cdot 10^7$ | $8,71 \cdot 10^7$ |
| 5 | 1.697,2 | 2.510,17 | 11 | $1,99 \cdot 10^8$ | $7,25 \cdot 10^8$ |
| 6 | 11.652,8 | 19.769,9 | 12 | $1,42 \cdot 10^9$ | $6,07 \cdot 10^9$ |

Tabela 4.1: Valores de $(\frac{20}{9})^{N-1} P_N(\frac{5}{6})$ e $[P_N(\frac{3}{4})]^2$, para $1 \leq N \leq 12$.

Portanto, $P_N(y)P_N(4y(1-y)) \leq [P_N(\frac{3}{4})]^2$ para $y \leq \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ e $1 \leq N \leq 12$.

Para $y \geq y_0$, usando o Lema 4.8 obtemos:

$$y_0^{-N+1} P_N(y_0) \geq y^{-N+1} P_N(y), \text{ ou seja, } P_N(y) \leq \left(\frac{y}{y_0}\right)^{N-1} P_N(y_0).$$

Por outro lado, de (4.31) temos que $P_N(4y(1-y)) \leq (2y-1)^{-2N}$. Logo,

$$\begin{aligned} P_N(y)P_N(4y(1-y)) &\leq y_0^{-N+1} P_N(y_0)(2y-1)^{-2} \left[\frac{y}{(2y-1)}\right]^{N-1} \\ &\leq \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{-N+1} P_N(y_0) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2} \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{N-1} \left(\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\right)^{N-1} \\ &= 2^N P_N(y_0). \end{aligned}$$

Vimos que os P_N são dados por (4.6). Calculando numericamente, para P_N , $5 \leq N \leq 12$, observe a tabela abaixo, verificamos que $2^N P_N(y_0) \leq [P_N(\frac{3}{4})]^2$.

| N | $2^N P_N(y_0)$ | $[P_N(\frac{3}{4})]^2$ | N | $2^N P_N(y_0)$ | $[P_N(\frac{3}{4})]^2$ |
|-----|----------------|------------------------|-----|-------------------|------------------------|
| 5 | 2.403,73 | 2.510,17 | 9 | $4,04 \cdot 10^6$ | $1,05 \cdot 10^7$ |
| 6 | 15.186,9 | 19.769,9 | 10 | $2,63 \cdot 10^7$ | $8,71 \cdot 10^7$ |
| 7 | 96.986,6 | 158.380,0 | 11 | $1,72 \cdot 10^8$ | $7,25 \cdot 10^8$ |
| 8 | 624.404,0 | $1,28 \cdot 10^6$ | 12 | $1,13 \cdot 10^9$ | $6,07 \cdot 10^9$ |

Tabela 4.2: Valores de $2^N P_N(y_0)$ e $[P_N(\frac{3}{4})]^2$, para $1 \leq N \leq 12$.

Portanto, $P_N(y)P_N(4y(1-y)) \leq [P_N(\frac{3}{4})]^2$, para $y \geq \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ e $5 \leq N \leq 12$. Para $N = 1$, temos $P_1(y) = 1$, para todo y e, daí, a igualdade é trivialmente satisfeita. Para $2 \leq N \leq 4$ o polinômio $P_N(y)P_N(4y(1-y)) - [P_N(\frac{3}{4})]^2$ tem grau menor do que ou igual a 9 e, então, suas raízes podem ser calculadas numericamente de forma rápida. Abaixo nas Figuras 4.4, 4.5 e 4.6 temos, respectivamente, os gráficos do produto $P_N(y)P_N(4y(1-y)) - [P_N(\frac{3}{4})]^2$, para $N = 2, 3$ e 4.

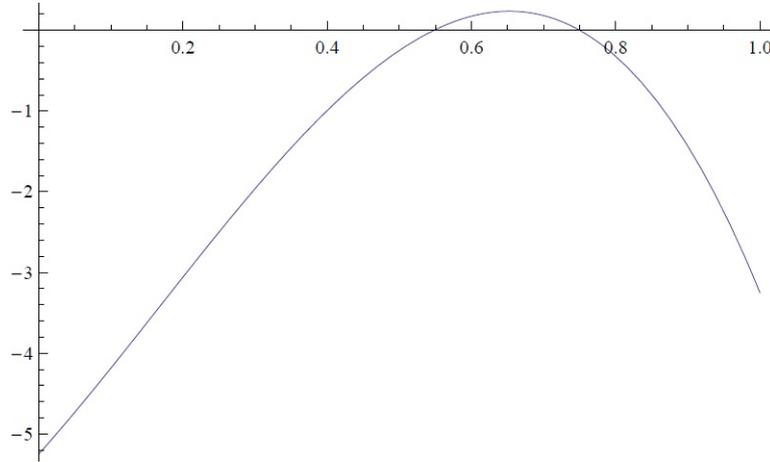


Figura 4.4: Gráfico de $P_2(y)P_2(4y(1-y)) - [P_2(\frac{3}{4})]^2$, em que $P_2(y) = 1 + 2y$.

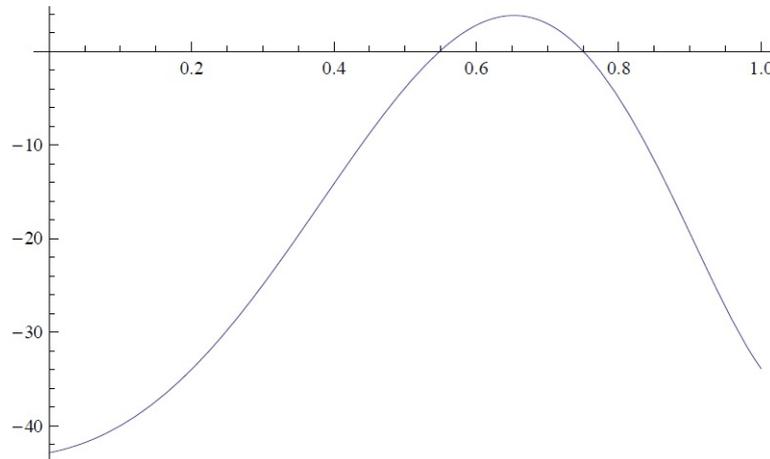


Figura 4.5: Gráfico de $P_3(y)P_3(4y(1-y)) - [P_3(\frac{3}{4})]^2$, onde $P_3(y) = 1 + 3y + 6y^2$.

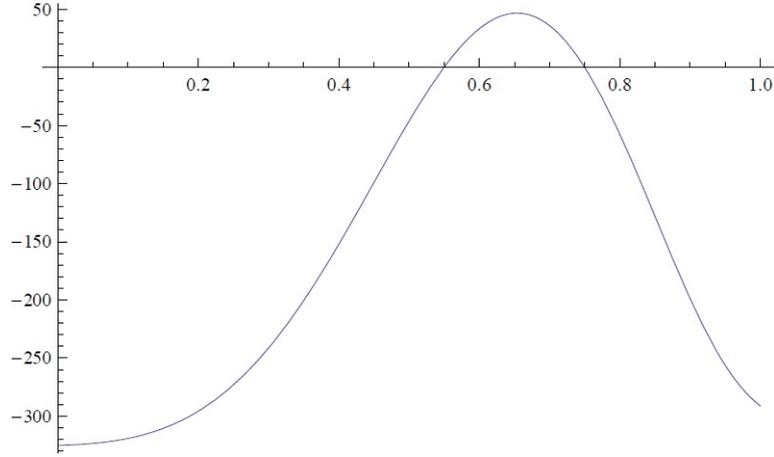


Figura 4.6: Gráfico de $P_4(y)P_4(4y(1-y)) - [P_4(\frac{3}{4})]^2$, em que $P_4(y) = 1 + 4y + 10y^2 + 20y^3$.

Observe que nenhuma das raízes de nenhum desses três polinômios está em $[\frac{3}{4}, 1]$ e que $P_N(y)P_N(4y(1-y)) - [P_N(\frac{3}{4})]^2 \leq 0$ em $[\frac{3}{4}, 1]$. Logo, $P_N(y)P_N(4y(1-y)) \leq [P_N(\frac{3}{4})]^2$ para $y \geq \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ e $1 \leq N \leq 4$. ■

Agora, vamos ver as estimativas que esses resultados que provamos nos dão sobre as wavelets de Daubechies. Note que

$$\text{sen}^2\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\xi}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\xi}{2} = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \xi = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \xi = \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Assim, $|\mathcal{L}_N(\frac{2\pi}{3})|^2 = P_N(\frac{3}{4})$ e $|\mathcal{L}_N(-\frac{2\pi}{3})|^2 = |\mathcal{L}_N(\frac{2\pi}{3})|^2 = P_N(\frac{3}{4})$, pois \mathcal{L}_N tem coeficientes reais. Logo,

$$|\mathcal{L}_N(\xi)| = \sqrt{P_N(\text{sen}^2(\xi/2))} \leq \sqrt{P_N(3/4)}, \text{ se } |\xi| \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$|\mathcal{L}_N(\xi)\mathcal{L}_N(2\xi)| = \sqrt{P_N(\text{sen}^2(\xi/2))P_N(\text{sen}^2(\xi))} \leq P_N(3/4), \text{ se } \frac{2\pi}{3} \leq |\xi| \leq \pi.$$

Então, dos Lemas 4.7 e 4.9, temos que o decaimento assintótico de ${}_N\hat{\phi}$ é dado por

$$|{}_N\hat{\phi}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-N + \frac{\log |P_N(3/4)|}{2 \log 2}} = C(1 + |\xi|)^{-1 + (1 - N + \frac{\log |P_N(3/4)|}{2 \log 2})}. \quad (4.32)$$

Para os primeiros valores de N , usando a Proposição 4.1, a condição (4.32) nos diz que ${}_N\phi \in C^{\alpha_N - \epsilon}$ com as estimativas para α_N que seguem na tabela abaixo.

| N | $P_N(3/4)$ | $\widetilde{\alpha}_N$ | N | $P_N(3/4)$ | $\widetilde{\alpha}_N$ |
|-----|--------------|------------------------|-----|-------------------------|------------------------|
| 2 | 5/2 | 0.339036 | 9 | 106384445/32768 | 2.16764 |
| 3 | 53/8 | 0.63604 | 10 | 611828695/65536 | 2.40572 |
| 4 | 289/16 | 0.912537 | 11 | 7061844859/262144 | 2.6413 |
| 5 | 6413/128 | 1.17661 | 12 | 40874113559/524288 | 2.87477 |
| 6 | 35995/256 | 1.43225 | 13 | 948696791689/4194304 | 3.10642 |
| 7 | 407521/1024 | 1.68174 | 14 | 5516834859287/8388608 | 3.33651 |
| 8 | 2321945/2048 | 1.92655 | 15 | 64284800975417/33554432 | 3.56523 |

Tabela 4.3: ${}_N\phi \in C^{\alpha_N}(\mathbb{R})$, onde $\alpha_N \geq \widetilde{\alpha}_N = N - 1 - \frac{\log |P_N(3/4)|}{2 \log 2}$.

Podemos, também, usar o Lema 4.6 para estimar o comportamento de ${}_N\phi$, quando $N \rightarrow \infty$. Como $\frac{3}{4} \leq 1$ implica que $1 \leq 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \leq 2$, pela condição (4.17) do Lema 4.4, obtemos

$$P_N\left(\frac{3}{4}\right) \leq 2^{N-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{N-1} = 3^{N-1}.$$

Separando em dois casos, temos

- $0 \leq y \leq \frac{3}{4}$

Como P_N é crescente em $[0, 1]$, para $0 \leq y \leq \frac{3}{4}$, temos que $P_N(y) \leq P_N\left(\frac{3}{4}\right) \leq 3^{N-1}$.

- $\frac{3}{4} \leq y \leq 1$

Para $\frac{3}{4} \leq y \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$, temos $\frac{1}{2} \leq 4y(1-y) \leq \frac{3}{4}$, o que implica $1 \leq 8y(1-y) \leq \frac{3}{2}$. Logo, pela condição (4.17) do Lema 4.4, segue que

$$P_N(4y(1-y)) \leq 2^{N-1}[8y(1-y)]^{N-1} = [16y(1-y)]^{N-1}.$$

Além disso, como $\frac{3}{4} \leq y$, pela condição (4.16) do Lema 4.4, temos

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-N+1} P_N\left(\frac{3}{4}\right) \geq y^{-N+1} P_N(y), \text{ ou seja, } P_N(y) \leq y^{N-1} \left(\frac{4}{3}\right)^{N-1} P_N\left(\frac{3}{4}\right) \leq (4y)^{N-1}.$$

Logo,

$$P_N(y)P_N(4y(1-y)) \leq (4y)^{N-1}[16y(1-y)]^{N-1} = 64^{N-1}[y^2(1-y)]^{N-1}.$$

Vamos analisar a função $f(y) = y^2(1-y)$. Observe que $f'(y) = 2y - 3y^2 < 0$ em $[\frac{3}{4}, 1]$, o que implica que f é decrescente em $[\frac{3}{4}, 1]$. Daí,

$$P_N(y)P_N(4y(1-y)) \leq 64^{N-1}[y^2(1-y)]^{N-1} \leq 64^{N-1} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{4} \right]^{N-1} = 3^{2(N-1)}.$$

Agora, para $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq 1$, temos $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 2y \leq 2$. Daí, pela condição (4.17) do Lema 4.4, segue que $P_N(y) \leq 2^{N-1}(2y)^{N-1} = (4y)^{N-1}$. Além disso, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \leq y \leq 1$ implica que $0 \leq 4y(1-y) \leq \frac{1}{2}$. Assim, $0 \leq 8y(1-y) \leq 1$ e, então, por (4.17) temos que $P_N(4y(1-y)) \leq 2^{N-1}$. Logo,

$$P_N(y)P_N(4y(1-y)) \leq (4y)^{N-1}2^{N-1} = (8y)^{N-1} \leq 3^{2(N-1)},$$

pois $y \leq 1$.

Dessa forma, como $|\mathcal{L}(\xi)| = \sqrt{P_N(y)}$ e $|\mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(2\xi)| = \sqrt{P_N(y)P_N(4y(1-y))}$, onde fizemos $y = \sin^2(\xi/2)$, concluímos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\xi)| &\leq \sqrt{3^{N-1}}, \quad 0 \leq y \leq \frac{3}{4} \\ |\mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(2\xi)| &\leq \sqrt{3^{2(N-1)}} = 3^{N-1}, \quad \frac{3}{4} \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

4.2. ESTIMATIVAS DE DECAIMENTO DE $\hat{\phi}$ VIA CICLOS INVARIANTES

Assim, fazendo $D_1 = [-2\pi/3, 2\pi/3]$ e $D_2 = [-\pi, \pi] \setminus D_1$, temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\xi)| &\leq \sqrt{3^{N-1}}, \quad \xi \in D_1 \\ |\mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(2\xi)| &\leq \sqrt{3^{2(N-1)}} = 3^{N-1}, \quad \xi \in D_2 \end{aligned}$$

e, pelo Lema 4.6, temos que

$$|{}_N\hat{\phi}(\xi)| \leq C(1 + \xi)^{-N + \frac{\log \sqrt{3^{N-1}}}{\log 2}} = C(1 + \xi)^{-N + (N-1)\frac{\log 3}{2\log 2}} = C(1 + \xi)^{-1 - (N-1)\left[1 - \frac{\log 3}{2\log 2}\right]}.$$

Portanto, pela Proposição 4.1, segue que ${}_N\phi \in C^{\alpha_N}$, onde $\alpha_N = (N-1)\left[1 - \frac{\log 3}{2\log 2}\right]$. Em particular, acabamos de demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 4.2.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_N}{N} = 1 - \frac{\log 3}{2\log 2}.$$

Capítulo 5

Estudo da Regularidade - um método alternativo

Neste capítulo, ainda usando as estimativas do decaimento da transformada de Fourier ${}_N\widehat{\phi}$, dessa vez com as técnicas desenvolvidas em Volkmer [2], estimaremos a regularidade das wavelets de Daubechies. Na Definição 5.1, introduzimos o índice de regularidade de ${}_N\widehat{\phi}$, denotado por γ_N . Na Seção 5.1 mostraremos que $0,51 < \gamma_2 < 0,53$, o que, em particular, nos fornece uma cota superior e melhora a cota inferior de γ_2 que é dada na Seção 4.2, uma vez que $\gamma_2 \geq \alpha_2$. Na Seção 5.2, com métodos mais diretos e simples, obteremos uma cota para γ_N e estudaremos o comportamento assintótico de γ_N , quando $N \rightarrow \infty$, reproduzindo o resultado do Teorema 4.2 do Capítulo 4, ou seja, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma_N}{N} = 1 - \frac{\log 3}{2 \log 2}$.

Em todas as funções utilizadas nesse capítulo, os argumentos são sempre números reais. Antes de enunciarmos a Proposição 5.1, a qual é o resultado fundamental para o desenvolvimento desse capítulo, definiremos alguns conceitos.

Definição 5.1. Definimos o índice de regularidade da transformada de Fourier de ${}_N\phi$, denotado por γ_N , como o supremo sobre todos os γ tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\omega|)^\gamma |{}_N\widehat{\phi}(\omega)| d\omega < \infty. \quad (5.1)$$

Note que, pela Proposição 4.1, temos que $\alpha_N \leq \gamma_N$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

Vimos no Capítulo 3 que os polinômios ${}_Nm_0$, $N \in \mathbb{N}$, são produtos da forma

$${}_Nm_0(z) = \left(\frac{1 + e^{iz}}{2} \right)^N \mathcal{L}_N(z), \quad (5.2)$$

onde \mathcal{L}_N é um polinômio trigonométrico que satisfaz a condição $\mathcal{L}_N(0) = 1$ e,

$$|\mathcal{L}_N(z)|^2 = P_N \left(\operatorname{sen}^2 \left(\frac{z}{2} \right) \right), \quad (5.3)$$

em que P_N é definido da seguinte forma

$$P_N(y) := \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1+j}{j} y^j. \quad (5.4)$$

Da Observação 3.7, temos que $\hat{\phi}(z) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}z)$ e, do Lema 3.10, segue que $\prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}_N(2^{-j}z)$ converge para uma função inteira, a qual chamaremos de $G_N(z)$. Dessa forma, usando o Lema 2.9 e a equação (5.2), obtemos

$$\begin{aligned}
|\hat{\phi}(z)| &= \prod_{j=1}^{\infty} |m_0(2^{-j}z)| \\
&= \prod_{j=1}^{\infty} \left| \frac{1 + e^{i2^{-j}z}}{2} \right|^N |\mathcal{L}_N(2^{-j}z)| \\
&= \prod_{j=1}^{\infty} \left| e^{i2^{-j-1}z} \frac{(e^{-i2^{-j-1}z} + e^{i2^{-j-1}z})}{2} \right|^N \prod_{j=1}^{\infty} |\mathcal{L}_N(2^{-j}z)| \\
&= \prod_{j=1}^{\infty} |e^{i2^{-j-1}z}|^N \prod_{j=1}^{\infty} |\cos(2^{-j-1}z)|^N |G_N(z)| \\
&= \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{z}{2}\right)}{\frac{z}{2}} \right|^N |G_N(z)|
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\hat{\phi}(z)| = \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{z}{2}\right)}{\frac{z}{2}} \right|^N |G_N(z)|. \quad (5.5)$$

Agora, da definição (5.4) de P_N , segue imediatamente que $P_N(y) \geq 1$ para $0 \leq y \leq 1$. Assim, como $0 \leq \text{sen}^2\left(\frac{2^{-j}z}{2}\right) \leq 1$, temos que $|\mathcal{L}_N(2^{-j}z)| = \sqrt{P_N(\text{sen}^2\left(\frac{2^{-j}z}{2}\right))} \geq 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, para todo $z \in \mathbb{R}$, $|G_N(z)| = \prod_{j=1}^{\infty} |\mathcal{L}_N(2^{-j}z)| \geq 1$ e, portanto, de (5.5), segue que

$$|\hat{\phi}(z)| \geq \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{z}{2}\right)}{\frac{z}{2}} \right|^N. \quad (5.6)$$

Observação 5.1. Se $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\omega|)^{\gamma} |\widehat{N}\hat{\phi}(\omega)| d\omega < \infty$, então $N > \gamma$.

De fato, suponha que $\gamma \geq N$. Assim, de (5.6), temos

$$\begin{aligned}
(1 + |t|)^{\gamma} |\hat{\phi}(t)| &\geq (1 + |t|)^{\gamma} \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \right|^N \\
&\geq (1 + |t|)^N \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \right|^N \\
&\geq |t|^N \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \right|^N \\
&= 2^N \left| \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right|.
\end{aligned}$$

Observe que a integral $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt$ diverge, o que implica, por comparação, que a integral $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\omega|)^{\gamma} |\widehat{N}\hat{\phi}(\omega)| d\omega$ também diverge. Mas isso é uma contradição com a hipótese. Portanto, concluímos que $N > \gamma$.

Dessa forma, pela Definição 5.1, devemos ter que $\gamma_N \leq N - 1$ o que não é uma boa cota. A seguinte proposição será fundamental para encontrarmos cotas melhores.

Proposição 5.1. *Seja N um inteiro positivo fixo e seja $\lambda > 0$.*

a) *Se existe uma constante positiva C tal que*

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(2^{m-1}t)|^N \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_N(2^k t)| dt \geq C\lambda^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (5.7)$$

então, temos

$$\gamma_N \leq N - \frac{\log(2\lambda)}{\log 2} \quad (5.8)$$

b) *Se existe uma constante positiva C tal que*

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(2^{m-1}t)|^N \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_N(2^k t)| dt \leq C\lambda^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (5.9)$$

então, temos

$$\gamma_N \geq N - \frac{\log(2\lambda)}{\log 2} \quad (5.10)$$

Demonstração: Antes de provarmos cada item separadamente, vamos definir duas funções e fazer estimativas que usaremos para os dois itens. Defina as seguintes funções

$$\tilde{G}(z) := \left| \operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right) \right|^N |G_N(z)| \quad \text{e} \quad H(z) := \int_0^z \tilde{G}(t) dt. \quad (5.11)$$

Fazendo a mudança de variável $k = j - 1$, da definição de G_N , obtemos

$$\begin{aligned} G_N(2z) &= \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}_N(2^{-j} 2z) \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_N(2^{-k} z) \\ &= \mathcal{L}_N(z) \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_N(2^{-k} z) \\ &= \mathcal{L}_N(z) \cdot G_N(z). \end{aligned}$$

Iterando essa igualdade, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, obtemos

$$G_N(2^m z) = G_N(z) \cdot \prod_{j=0}^{m-1} \mathcal{L}_N(2^j z). \quad (5.12)$$

Então, segue que

$$\begin{aligned} H(2^m 2\pi) &= \int_0^{2^m 2\pi} \tilde{G}(t) dt = \int_0^{2\pi} \tilde{G}(2^m x) 2^m dx \\ &= 2^m \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(2^{m-1}x)|^N \cdot |G_N(2^m x)| dx. \end{aligned}$$

Logo, para qualquer $m \in \mathbb{N}$,

$$H(2^m 2\pi) = 2^m \int_0^{2\pi} |\text{sen}(2^{m-1}x)|^N \cdot |G_N(x)| \cdot \prod_{j=0}^{m-1} |\mathcal{L}_N(2^j x)| dx. \quad (5.13)$$

a) Suponha que exista uma constante positiva C tal que a condição (5.7) seja válida. Como, por definição, $|G_N(x)| \geq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, de (5.13) temos

$$\begin{aligned} H(2^m 2\pi) &\geq 2^m \int_0^{2\pi} |\text{sen}(2^{m-1}x)|^N \cdot \prod_{j=0}^{m-1} |\mathcal{L}_N(2^j x)| dx \\ &\geq C(2\lambda)^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mostremos que existe uma constante $A \geq 0$ tal que para $t \geq 1$, temos $A t^{\log_2(2\lambda)} \leq H(t)$. Faremos isso separando em dois casos, como segue.

1º caso: $1 \leq t \leq 2\pi$ (não depende de λ).

Nesse caso, como H é crescente, temos

$$\frac{t}{2\pi} H(1) \leq H(1) \leq H(t).$$

Fazendo $C_1 = \max_{t \in [1, 2\pi]} t^{\log_2(2\lambda)}$, obtemos

$$t^{\log_2(2\lambda)} \leq C_1 \leq C_1 t.$$

Logo,

$$\frac{H(1)}{2\pi C_1} t^{\log_2(2\lambda)} \leq \frac{H(1)}{2\pi C_1} C_1 t \leq H(1) \leq H(t).$$

2º caso: $t \geq 2\pi$ (depende de λ).

Note que nesse caso, existe $m_0 \geq 0$ tal que $2^{m_0} 2\pi \leq t \leq 2^{m_0+1} 2\pi$. Daí, como H é crescente, temos

$$H(2^{m_0} 2\pi) \leq H(t). \quad (5.14)$$

Primeiro, vamos considerar que $\lambda \geq \frac{1}{2}$. Assim, $t^{\log_2(2\lambda)}$ é crescente e, daí, $t \geq 2^{m_0} 2\pi$ implica que

$$t^{\log_2(2\lambda)} \geq (2^{m_0} 2\pi)^{\log_2(2\lambda)} = (2^{m_0})^{\log_2(2\lambda)} (2\pi)^{\log_2(2\lambda)} = (2\lambda)^{m_0} (2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \geq (2\lambda)^{m_0+1},$$

pois, como $2\pi \geq 2$, então $(2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \geq 2^{\log_2(2\lambda)} = 2\lambda$. Dessa forma, da desigualdade (5.14), temos

$$\begin{aligned} H(t) &\geq H(2^{m_0} 2\pi) \\ &\geq C(2\lambda)^{m_0} \\ &= \frac{C}{2\lambda} (2\lambda)^{m_0+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{C}{2\lambda(2\pi)^{\log_2(2\lambda)}} (2\lambda)^{m_0+1} (2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \\
&= \frac{C}{2\lambda(2\pi)^{\log_2(2\lambda)}} (2^{m_0+1} 2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \\
&\geq \frac{C}{2\lambda(2\pi)^{\log_2(2\lambda)}} t^{\log_2(2\lambda)} \\
&\geq \frac{C}{(2\lambda)^4} t^{\log_2(2\lambda)},
\end{aligned}$$

uma vez que, como $2\pi \leq 2^3$, então $(2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \leq (2^3)^{\log_2(2\lambda)} = (2\lambda)^3$.

Logo, segue que

$$\frac{C}{(2\lambda)^4} t^{\log_2(2\lambda)} \leq H(t).$$

Agora, vamos considerar que $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Daí, $t^{\log_2(2\lambda)}$ é decrescente e, assim, $t \geq 2^{m_0} 2\pi$ implica que

$$t^{\log_2(2\lambda)} \leq (2^{m_0} 2\pi)^{\log_2(2\lambda)} = (2^{m_0})^{\log_2(2\lambda)} (2\pi)^{\log_2(2\lambda)} = (2\lambda)^{m_0} (2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \leq (2\lambda)^{m_0},$$

pois, como $2\pi \geq 1$, então $(2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \leq 1^{\log_2(2\lambda)} = 1$.

Dessa forma, da desigualdade (5.14), segue que

$$H(t) \geq H(2^{m_0} 2\pi) \geq C(2\lambda)^{m_0} \geq C t^{\log_2(2\lambda)}.$$

Portanto, tomando $A = \max \left\{ \frac{C}{(2\lambda)^4}, \frac{H(1)}{2\pi C_1} \right\}$, se $\lambda \geq \frac{1}{2}$ ou $A = \max \left\{ C, \frac{H(1)}{2\pi C_1} \right\}$, se $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ temos

$$A t^{\log_2(2\lambda)} \leq H(t), \quad \forall t \geq 1. \quad (5.15)$$

Por fim, sabemos que $|\widehat{\phi}_N(t)| = 2^N t^{-N} |\text{sen}(\frac{t}{2})|^N |G_N(t)| = 2^N t^{-N} \widetilde{G}(t)$. Assim, integrando por partes para $z \geq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
2^{-N} \int_1^z t^\gamma |\widehat{\phi}_N(t)| dt &= \int_1^z t^\gamma 2^{-N} |\widehat{\phi}_N(t)| dt \\
&= \int_1^z t^\gamma \frac{\widetilde{G}(t)}{t^N} dt \\
&= \int_1^z t^{\gamma-N} \widetilde{G}(t) dt \\
&= [t^{\gamma-N} H(t)]_1^z - \int_1^z H(t) (\gamma - N) t^{\gamma-N-1} dt \\
&= [t^{\gamma-N} H(t)]_1^z + (N - \gamma) \int_1^z H(t) t^{\gamma-N-1} dt \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Mostraremos que a desigualdade $\gamma - N + \log_2(2\lambda) > 0$ não pode ocorrer. De fato, se tivéssemos essa desigualdade, então de (5.15), teríamos

$$t^{\gamma-N-1}H(t) \geq At^{\gamma-N-1+\log_2(2\lambda)} > At^{-1}. \quad (5.17)$$

Portanto,

$$(N - \gamma) \int_1^z H(t)t^{\gamma-N-1}dt \geq A(N - \gamma) \log z. \quad (5.18)$$

Por outro lado,

$$[t^{\gamma-N}H(t)]_1^z = z^{\gamma-N}H(z) - H(1) \geq Az^{\gamma-N+\log_2(2\lambda)} - H(1). \quad (5.19)$$

Como os lados à direita das desigualdades (5.18) e (5.19) tendem para infinito quando $z \rightarrow \infty$, então deveríamos ter que a integral $\int_1^z t^\gamma |N\widehat{\phi}(t)|dt$ também tende para infinito, quando $z \rightarrow \infty$. Mas isso contradiz a condição (5.1). Portanto,

$$\gamma - N + \log_2(2\lambda) \leq 0, \text{ ou seja, } \gamma \leq N - \frac{\log(2\lambda)}{\log 2}.$$

Assim, pela definição de γ_N segue que

$$\gamma_N \leq N - \frac{\log(2\lambda)}{\log 2}.$$

b) Suponha que exista uma constante positiva C que torne válida a condição (5.9). Seja $C_2 := \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |G_N(t)|$. Então, de (5.13), segue que

$$\begin{aligned} H(2^m 2\pi) &\leq 2^m C_2 \int_0^{2\pi} |\text{sen}(2^{m-1}x)|^N \cdot \prod_{j=0}^{m-1} |\mathcal{L}_N(2^j x)| dx \\ &\leq CC_2(2\lambda)^m, \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que existe uma constante $B \geq 0$ tal que para $t \geq 1$, temos $H(t) \leq Bt^{\log_2(2\lambda)}$. Faremos isso dividindo em dois casos, de modo análogo ao que fizemos no item a).

1º caso: $1 \leq t \leq 2\pi$ (não depende de λ).

Nesse caso, como H é crescente, temos

$$H(t) \leq H(2\pi) \leq H(2\pi)t.$$

Fazendo $C_0 = \min_{t \in [1, 2\pi]} t^{\log_2(2\lambda)}$, obtemos

$$\frac{C_0}{2\pi}t \leq C_0 \leq t^{\log_2(2\lambda)}.$$

Logo,

$$H(t) \leq H(2\pi) \leq \frac{2\pi H(2\pi)}{C_0} \cdot \frac{C_0}{2\pi}t \leq \frac{2\pi H(2\pi)}{C_0}t^{\log_2(2\lambda)}.$$

2º caso: $t \geq 2\pi$ (depende de λ).

Note que nesse caso, existe $m_0 \geq 0$ tal que $2^{m_0}2\pi \leq t \leq 2^{m_0+1}2\pi$. Daí, como H é crescente, temos

$$H(t) \leq H(2^{m_0+1}2\pi). \quad (5.20)$$

Primeiro, vamos considerar que $\lambda \geq \frac{1}{2}$. Assim, $t^{\log_2(2\lambda)}$ é crescente e, daí, $t \geq 2^{m_0}2\pi$ implica que

$$t^{\log_2(2\lambda)} \geq (2^{m_0}2\pi)^{\log_2(2\lambda)} = (2^{m_0})^{\log_2(2\lambda)}(2\pi)^{\log_2(2\lambda)} = (2\lambda)^{m_0}(2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \geq (2\lambda)^{m_0+1},$$

pois, como $2\pi \geq 2$, então $(2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \geq 2^{\log_2(2\lambda)} = 2\lambda$. Dessa forma, da desigualdade (5.20), obtemos

$$H(t) \leq H(2^{m_0+1}2\pi) \leq CC_2(2\lambda)^{m_0+1} \leq CC_2t^{\log_2(2\lambda)}.$$

Agora, vamos considerar que $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Daí, $t^{\log_2(2\lambda)}$ é decrescente e, assim, $t \geq 2^{m_0}2\pi$ implica que

$$t^{\log_2(2\lambda)} \leq (2^{m_0}2\pi)^{\log_2(2\lambda)} = (2^{m_0})^{\log_2(2\lambda)}(2\pi)^{\log_2(2\lambda)} = (2\lambda)^{m_0}(2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \leq (2\lambda)^{m_0},$$

uma vez que, como $2\pi \geq 1$, então $(2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \leq 1^{\log_2(2\lambda)} = 1$.

Então, da desigualdade (5.20), temos

$$\begin{aligned} H(t) &\leq H(2^{m_0+1}2\pi) \\ &\leq CC_2(2\lambda)^{m_0+1} \\ &= \frac{CC_2(2\lambda)^{m_0+1}}{(2\pi)^{\log_2(2\lambda)}}(2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \\ &= \frac{CC_2}{(2\pi)^{\log_2(2\lambda)}}(2^{m_0+1}2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \\ &\leq \frac{CC_2}{(2\pi)^{\log_2(2\lambda)}}t^{\log_2(2\lambda)} \\ &\leq \frac{CC_2}{(2\lambda)^3}t^{\log_2(2\lambda)}, \end{aligned}$$

pois, como $2\pi \leq 2^3$, então $(2\pi)^{\log_2(2\lambda)} \geq (2^3)^{\log_2(2\lambda)} = (2\lambda)^3$.

Logo, segue que

$$H(t) \leq \frac{CC_2}{(2\lambda)^3}t^{\log_2(2\lambda)}.$$

Portanto, tomando $B = \min \left\{ CC_2, \frac{2\pi H(2\pi)}{C_0} \right\}$, se $\lambda \geq \frac{1}{2}$ ou $B = \min \left\{ \frac{CC_2}{(2\lambda)^3}, \frac{2\pi H(2\pi)}{C_0} \right\}$, se $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, obtemos

$$H(t) \leq Bt^{\log_2(2\lambda)}, \quad \forall t \geq 1. \quad (5.21)$$

Assim, usando o fato que $|\widehat{\phi}(z)| = |\widehat{\phi}(-z)|$ e a relação (5.16), com argumentos análogos

aos que usamos no item a), concluímos que

$$\gamma_N \geq N - \frac{\log(2\lambda)}{\log 2}.$$

■

5.1 Estimativas mais precisas do índice de regularidade γ_2

Nessa seção encontraremos cotas inferior e superior para o índice de regularidade γ_2 , com ajuda da Proposição 5.1 que acabamos de provar. Mais precisamente, provaremos o seguinte teorema.

Teorema 5.1.

$$0,51109\dots \leq \gamma_2 \leq 0,52739\dots$$

5.1.1 Encontrando uma cota superior para γ_2

Usando o Lema de Riesz (Lema 2.7), podemos escrever que $\mathcal{L}_2(z) = p + qe^{iz}$, para todo $z \in \mathbb{R}$. Daí, temos

$$|\mathcal{L}_2(z)|^2 = \mathcal{L}_2(z)\overline{\mathcal{L}_2(z)} = (p + qe^{iz})(p + qe^{-iz}) = p^2 + q^2 + 2pq \cos(z).$$

Por outro lado, sabemos que

$$|\mathcal{L}_2(z)|^2 = P_2\left(\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\right) = 1 + 2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) = 1 + 2\left(\frac{1 - \cos(z)}{2}\right) = 2 - \cos(z).$$

Comparando essas duas igualdades, vemos que devemos ter
$$\begin{cases} p^2 + q^2 = 2 \\ 2pq = -1 \end{cases}$$

Somando essas duas equações, obtemos

$$p^2 + 2pq + q^2 = 1 \Rightarrow (p + q)^2 = 1 \Rightarrow p + q = \pm 1$$

- Se $p + q = 1$, então $q = 1 - p$. Daí,

$$p^2 + (1 - q)^2 = 2 \Rightarrow 2p^2 - 2p - 1 = 0.$$

Pela fórmula de Bhaskara e, como devemos ter $p > 0$ para usar a Proposição 5.1, segue que $p = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$. Assim, como $q = 1 - p$, temos que $q = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

- Se $p + q = -1$, então $q = -1 - p$. Daí,

$$p^2 + (-1 - q)^2 = 2 \Rightarrow 2p^2 + 2p - 1 = 0.$$

Pela fórmula de Bhaskara e, como devemos ter $p > 0$ para usar a Proposição 5.1, segue que $p = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$. Assim, como $q = 1 - p$, temos que $q = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$.

No que se segue, escolhemos escrever

$$\mathcal{L}_2(z) = p + qe^{iz}; \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad \text{onde } p = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{e } q = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}. \quad (5.22)$$

Daí,

$$|\mathcal{L}_2(z)| \geq \operatorname{Re}(\mathcal{L}_2(z)) = p + q \cos(z) = p + \frac{q}{2}(e^{iz} + e^{-iz}). \quad (5.23)$$

Defina $h_1(z) := p + \frac{q}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ e $\sum_{l=-2^m+1}^{2^m-1} a_{lm} e^{ilt} := \prod_{k=0}^{m-1} h_1(2^k t)$. Assim, da desigualdade

acima, temos que $\prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| \geq \prod_{k=0}^{m-1} h_1(2^k t)$.

Além disso,

$$\sum_{l=-2^m+1}^{2^m-1} a_{lm} e^{ilt} = \prod_{k=0}^{m-1} h_1(2^k t) = \prod_{k=0}^{m-1} \left(p + \frac{q}{2}(e^{i2^k t} + e^{-i2^k t}) \right).$$

Note que o termo a_{0m} representa a parcela do somatório que não depende de t . Logo, ele deve ser igual ao termo do produtório que não depende de t , que é p^m . Assim, $a_{0m} = p^m$.

Observe que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(2^{m-1}t) &= \left(\frac{e^{i2^{m-1}t} - e^{-i2^{m-1}t}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2i2^{m-1}t} - 2 + e^{-2i2^{m-1}t}}{-4} = -\frac{1}{4}e^{-i2^m t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i2^m t}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Logo,

$$\operatorname{sen}^2(2^{m-1}t) \sum_{l=-2^m+1}^{2^m-1} a_{lm} e^{ilt} = -\frac{1}{4}e^{-i2^m t} \sum_{l=-2^m+1}^{2^m-1} a_{lm} e^{ilt} + \frac{1}{2} \sum_{l=-2^m+1}^{2^m-1} a_{lm} e^{ilt} - \frac{1}{4}e^{i2^m t} \sum_{l=-2^m+1}^{2^m-1} a_{lm} e^{ilt}.$$

Quando integrarmos $\operatorname{sen}^2(2^{m-1}t) \sum_{l=-2^m+1}^{2^m-1} a_{lm} e^{ilt}$ de 0 a 2π , como o conjunto $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ é ortogonal, a única contribuição que teremos será do termo constante da segunda parcela da soma do lado direito da igualdade acima, pois no somatório da primeira e terceira parcelas não temos os termos $e^{i2^m t}$ e $e^{-i2^m t}$, respectivamente, para obtermos um termo constante que contribuiria na integral. Já vimos que o termo constante do somatório $\sum_{l=-2^m+1}^{2^m-1} a_{lm} e^{ilt}$ é $a_{0m} = p^m$. Daí, o termo constante da soma $\frac{1}{2} \sum_{l=-2^m+1}^{2^m-1} a_{lm} e^{ilt}$ é $\frac{1}{2}a_{0m} = \frac{p^m}{2}$.

Como $\prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| \geq \prod_{k=0}^{m-1} h_1(2^k t) = \sum_{l=-2^m+1}^{2^m-1} a_{lm} e^{ilt}$, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(2^{m-1}t) \cdot \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| dt &\geq \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(2^{m-1}t) \cdot \sum_{l=-2^m+1}^{2^m-1} a_{lm} e^{ilt} dt \\ &= \frac{p^m}{2} \int_0^{2\pi} dt \\ &= \pi p^m \end{aligned}$$

Portanto, pelo item a) da Proposição 5.1, segue que

$$\gamma_2 \leq 2 - \frac{\log(2p)}{\log 2} = 2 - \frac{\log(1 + \sqrt{3})}{\log 2} = 0,5500 \dots$$

Agora, vamos melhorar essa cota superior. Para isso, vamos melhorar a estimativa dada na equação (5.23). Escrevendo $\mathcal{L}_2(z) = x + iy$, onde $x, y, z \in \mathbb{R}$, de (5.22) temos que $x + iy$ está em um círculo centrado em $(p, 0)$ e com raio $-q$.

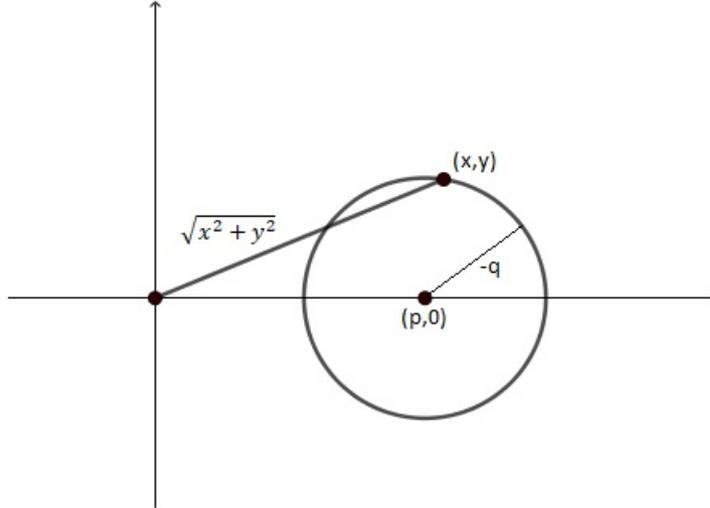


Figura 5.1: Círculo de centro em $(p, 0)$ e raio $-q$.

Queremos maximizar a função $D(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x$ e sabemos que x e y se relacionam pela equação $(x - p)^2 + y^2 = q^2$, ou seja, $y^2 = q^2 - (x - p)^2$. Substituindo essa igualdade em $D(x, y)$, obtemos a seguinte função de x

$$d(x) = \sqrt{x^2 + q^2 - (x - p)^2} + x = \sqrt{x^2 + q^2 - x^2 + 2px - p^2} + x = \sqrt{q^2 + 2px - p^2} + x.$$

Mas, maximizar $D(x, y)$ é equivalente a maximizar $d(x)$. Então, derivando $d(x)$ com relação à x , temos

$$d'(x) = \frac{p}{\sqrt{q^2 + 2px - p^2}} + 1 > 0.$$

Logo, a função $d(x)$ é crescente. Como essa função está definida no intervalo $[p + q, p - q]$, segue que ela atinge seu máximo em $p - q$. Assim,

$$d_{\max} = d(p - q) = \sqrt{q^2 + 2p(p - q) - p^2} + p - q = \sqrt{(p - q)^2} + p - q = 2(p - q).$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} - x &= \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right) (\sqrt{x^2 + y^2} + x) \\ &= \frac{x^2 + y^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2} + x)} y^2 \\
 &\geq \frac{1}{2(p - q)} y^2.
 \end{aligned}$$

Dai,

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}_2(z)| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 &\geq x + \frac{1}{2(p - q)} y^2 \\
 &= p + q \cos(z) + \frac{1}{2(p - q)} q^2 \operatorname{sen}^2(z) \\
 &= p + q \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) + \frac{q^2}{2(p - q)} \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 \\
 &= p + \frac{q^2}{4(p - q)} + \frac{q}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) - \frac{q^2}{8(p - q)} (e^{i2z} + e^{-i2z}). \tag{5.25}
 \end{aligned}$$

Defina

$$h_2(z) := a + b(e^{iz} + e^{-iz}) + c(e^{i2z} + e^{-i2z}),$$

onde $a = p + \frac{q^2}{4(p - q)}$, $b = \frac{q}{2}$ e $c = -\frac{q^2}{8(p - q)}$. Assim, da desigualdade acima, temos que

$$\prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k z)| \geq \prod_{k=0}^{m-1} h_2(2^k z). \text{ Defina, tamb\u00e9m, } \sum_{l=-2^{m+1}+2}^{2^{m+1}-2} a_{lm} e^{ilz} := \prod_{k=0}^{m-1} h_2(2^k z).$$

Usando (5.24) obtemos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}^2(2^{m-1}t) \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| &\geq \operatorname{sen}^2(2^{m-1}t) \prod_{k=0}^{m-1} h_2(2^k t) \\
 &= \left(-\frac{1}{4} e^{-i2^m t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{i2^m t} \right) \sum_{l=-2^{m+1}+2}^{2^{m+1}-2} a_{lm} e^{ilz} \\
 &= -\frac{1}{4} e^{-i2^m t} \sum_{l=-2^{m+1}+2}^{2^{m+1}-2} a_{lm} e^{ilz} + \frac{1}{2} \sum_{l=-2^{m+1}+2}^{2^{m+1}-2} a_{lm} e^{ilz} + \\
 &\quad -\frac{1}{4} e^{i2^m t} \sum_{l=-2^{m+1}+2}^{2^{m+1}-2} a_{lm} e^{ilz}. \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

Quando integrarmos a soma

$$-\frac{1}{4} e^{-i2^m t} \sum_{l=-2^{m+1}+2}^{2^{m+1}-2} a_{lm} e^{ilz} + \frac{1}{2} \sum_{l=-2^{m+1}+2}^{2^{m+1}-2} a_{lm} e^{ilz} - \frac{1}{4} e^{i2^m t} \sum_{l=-2^{m+1}+2}^{2^{m+1}-2} a_{lm} e^{ilz}$$

de 0 a 2π , como o conjunto $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ \u00e9 ortogonal, as \u00fanicas contribui\u00e7\u00f5es que teremos na integral s\u00e3o dos coeficientes do termo $e^{-i2^m t}$, do termo constante e do termo $e^{i2^m t}$ do primeiro, segundo e terceiro somat\u00f3rios da soma acima, respectivamente. Logo, precisamos calcular esses coeficientes, que s\u00e3o dados por $a_{-2^m m}$, a_{0m} e $a_{2^m m}$, respectivamente. Para determin\u00e1-los, defina

$$\begin{pmatrix} b_{-1m} \\ b_{0m} \\ b_{1m} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{-2^m m} \\ a_{0m} \\ a_{2^m m} \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ b & a & b \\ 0 & c & b \end{pmatrix}.$$

Mostraremos, por indução em m , que para $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{pmatrix} b_{-1m} \\ b_{0m} \\ b_{1m} \end{pmatrix} = A^m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Para $m = 1$, temos

$$\prod_{k=0}^0 h_2(2^k t) = h(t) = a + b(e^{it} + e^{-it}) + c(e^{2it} + e^{-2it}).$$

Daí, $a_{-21} = c$, $a_{01} = a$ e $a_{21} = c$. Por outro lado,

$$\begin{pmatrix} b_{-11} \\ b_{01} \\ b_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{-21} \\ a_{01} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ b & a & b \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que (5.27) é verdade para $m = 1$. Suponha, agora, que (5.27) seja verdade para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, que temos

$$\begin{pmatrix} b_{-1n} \\ b_{0n} \\ b_{1n} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^n v.$$

Vamos mostrar que (5.27) vale para $m = n + 1$. Observe que:

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n h_2(2^k t) &= \prod_{k=0}^{n-1} h_2(2^k t) \cdot h_2(2^n t) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} h_2(2^k t) \cdot [a + b(e^{i2^n t} + e^{-i2^n t}) + c(e^{i2^{n+1} t} + e^{-i2^{n+1} t})] \end{aligned} \quad (5.28)$$

Queremos calcular os coeficientes $b_{-1,n+1}$, $b_{0,n+1}$ e $b_{1,n+1}$ que são, respectivamente, o coeficiente do termo $e^{-i2^{n+1} t}$, o termo constante e o coeficiente do termo $e^{i2^{n+1} t}$ do último produto do lado direito da igualdade (5.28).

O termo $e^{-i2^{n+1} t}$ aparece no produto

$$\prod_{k=0}^{n-1} h_2(2^k t) \cdot [a + b(e^{i2^n t} + e^{-i2^n t}) + c(e^{i2^{n+1} t} + e^{-i2^{n+1} t})],$$

quando fazemos:

- a multiplicação do termo constante de $\prod_{k=0}^{n-1} h_2(2^k t)$, que pela hipótese de indução sabemos que tem como coeficiente b_{0n} , com o termo $ce^{-i2^{n+1} t}$ da parte entre colchetes.

- a multiplicação do termo $e^{-i2^{n+1}t}$ de $\prod_{k=0}^{n-1} h_2(2^k t)$, que pela hipótese de indução sabemos que tem como coeficiente b_{-1n} , com o termo $be^{-i2^{n+1}t}$ da parte entre colchetes.

Assim, o coeficiente de $e^{-i2^{n+1}t}$ do produto em (5.28) é

$$b_{-1,n+1} = cb_{0n} + bb_{-1n}.$$

O termo constante aparece no produto

$$\prod_{k=0}^{n-1} h_2(2^k t) \cdot [a + b(e^{i2^{n+1}t} + e^{-i2^{n+1}t}) + c(e^{i2^{n+1}t} + e^{-i2^{n+1}t})],$$

quando fazemos:

- a multiplicação do termo constante de $\prod_{k=0}^{n-1} h_2(2^k t)$, que pela hipótese de indução sabemos que tem como coeficiente b_{0n} , com o termo constante a da parte entre colchetes.
- a multiplicação do termo $e^{-i2^{n+1}t}$ de $\prod_{k=0}^{n-1} h_2(2^k t)$, que pela hipótese de indução sabemos que tem como coeficiente b_{-1n} , com o termo $be^{i2^{n+1}t}$ da parte entre colchetes.
- a multiplicação do termo $e^{i2^{n+1}t}$ de $\prod_{k=0}^{n-1} h_2(2^k t)$, que pela hipótese de indução sabemos que tem como coeficiente b_{1n} , com o termo $be^{-i2^{n+1}t}$ da parte entre colchetes.

Daí, o termo constante do produto em (5.28) é

$$b_{0,n+1} = ab_{0n} + bb_{-1n} + bb_{1n}.$$

Por fim, o termo $e^{i2^{n+1}t}$ aparece no produto

$$\prod_{k=0}^{n-1} h_2(2^k t) \cdot [a + b(e^{i2^{n+1}t} + e^{-i2^{n+1}t}) + c(e^{i2^{n+1}t} + e^{-i2^{n+1}t})],$$

quando fazemos:

- a multiplicação do termo constante de $\prod_{k=0}^{n-1} h_2(2^k t)$, que pela hipótese de indução sabemos que tem como coeficiente b_{0n} , com o termo $ce^{i2^{n+1}t}$ da parte entre colchetes.
- a multiplicação do termo $e^{i2^{n+1}t}$ de $\prod_{k=0}^{n-1} h_2(2^k t)$, que pela hipótese de indução sabemos que tem como coeficiente b_{1n} , com o termo $be^{i2^{n+1}t}$ da parte entre colchetes.

Então, o coeficiente de $e^{i2^{n+1}t}$ do produto em (5.28) é

$$b_{1,n+1} = cb_{0n} + bb_{1n}.$$

Por outro lado, sabemos que $A^{n+1}v = A(A^n v)$. Dessa forma, usando a definição de A e a nossa hipótese de indução, obtemos

$$A^{n+1}v = A(A^n v) = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ b & a & b \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{-1n} \\ b_{0n} \\ b_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bb_{-1n} + cb_{0n} \\ bb_{-1n} + ab_{0n} + bb_{1n} \\ cb_{0n} + bb_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{-1,n+1} \\ b_{0,n+1} \\ b_{1,n+1} \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que (5.27) é verdade para $m = n + 1$. Logo, pelo processo de indução finita, temos que

$$\begin{pmatrix} b_{-1m} \\ b_{0m} \\ b_{1m} \end{pmatrix} = A^m v, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Portanto, voltando para nossa estimativa em (5.26), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2^{m-1}t) \cdot \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| dt \\ & \geq \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4} e^{-i2^m t} \sum_{l=-2^{m+1}+2}^{2^{m+1}-2} a_{lm} e^{ilz} dt + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sum_{l=-2^{m+1}+2}^{2^{m+1}-2} a_{lm} e^{ilz} dt \\ & \quad + \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4} e^{i2^m t} \sum_{l=-2^{m+1}+2}^{2^{m+1}-2} a_{lm} e^{ilz} dt \\ & = 2\pi \left(-\frac{1}{4} b_{-1m} + \frac{1}{2} b_{0m} - \frac{1}{4} b_{1m} \right). \end{aligned} \tag{5.29}$$

Agora, estimaremos o valor da expressão entre parênteses acima. Para isto vamos calcular os autovalores de A . O polinômio característico de A é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} b - \lambda & c & 0 \\ b & a - \lambda & b \\ 0 & c & b - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (b - \lambda)^2 (a - \lambda) - 2bc(b - \lambda) \\ &= (b - \lambda)[(b - \lambda)(a - \lambda) - 2bc] \\ &= [\lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - 2bc](b - \lambda). \end{aligned}$$

Daí,

$$p_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - 2bc = 0 \text{ ou } b - \lambda = 0.$$

Assim, os autovalores de A são

$$\lambda_1 = \frac{a + b + \sqrt{(a - b)^2 + 8bc}}{2}, \lambda_2 = \frac{a + b - \sqrt{(a - b)^2 + 8bc}}{2}, \lambda_3 = b.$$

Usando os valores de a , b e c da definição de $h_2(z)$ e calculando numericamente, obtemos

$$\lambda_1 = 1,3876 \dots, \lambda_2 = -0,1852 \dots \text{ e } \lambda_3 = -0,1830 \dots.$$

Vamos calcular um autovetor de A associado ao autovalor λ_1 . Note que

$$\begin{pmatrix} b - \lambda_1 & c & 0 \\ b & a - \lambda_1 & b \\ 0 & c & b - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b - \lambda_1)x + cy = 0 \\ bx + (a - \lambda_1)y + bz = 0 \\ cy + (b - \lambda_1)z = 0 \end{cases}$$

Da primeira e terceira equações, obtemos

$$(b - \lambda_1)(x - z) = 0 \Rightarrow z = x,$$

pois $b \neq \lambda_1$. Assim, substituindo na primeira equação, obtemos

$$(a - \lambda_1)y = -2bx \Rightarrow y = -\frac{2bx}{(a - \lambda_1)} = -\frac{2bx}{(a - \lambda_1)} \frac{(b - \lambda_1)}{(b - \lambda_1)} = -\frac{(b - \lambda_1)}{c}x,$$

pois $(a - \lambda_1)(b - \lambda_1) = ab - (a + b)\lambda_1 + \lambda_1^2 = 2bc$, uma vez que λ_1 é raiz de $\lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - 2bc$.

Logo, $\begin{pmatrix} c \\ \lambda_1 - b \\ c \end{pmatrix}$ é um autovetor de A associado ao autovalor λ_1 .

Com contas análogas, mostramos que $\begin{pmatrix} c \\ \lambda_2 - b \\ c \end{pmatrix}$ é um autovetor de A associado ao autovalor

λ_2 . Assim, $\begin{pmatrix} c \\ \lambda_1 - b \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c \\ \lambda_2 - b \\ c \end{pmatrix}$ são autovetores de A^m associados aos autovalores λ_1^m e λ_2^m , respectivamente.

Observe que

$$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} c \\ \lambda_1 - b \\ c \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} c \\ \lambda_2 - b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{c}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - b} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - b} \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{c} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, pela linearidade de A^m e usando (5.27), obtemos

$$A^m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} A^m \begin{pmatrix} c \\ \lambda_1 - b \\ c \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} A^m \begin{pmatrix} c \\ \lambda_2 - b \\ c \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} b_{-1m} \\ b_{0m} \\ b_{1m} \end{pmatrix} = \frac{\lambda_1^m}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} c \\ \lambda_1 - b \\ c \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2^m}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} c \\ \lambda_2 - b \\ c \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, temos

$$b_{-1m} = \frac{c(\lambda_1^m - \lambda_2^m)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad b_{0m} = \frac{\lambda_1^m(\lambda_1 - b) - \lambda_2^m(\lambda_2 - b)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad b_{1m} = \frac{c(\lambda_1^m - \lambda_2^m)}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (5.30)$$

Portanto, substituindo (5.30) em (5.29), temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2^{m-1}t) \cdot \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| dt &\geq 2\pi \left(-\frac{1}{4}b_{-1m} + \frac{1}{2}b_{0m} - \frac{1}{4}b_{1m} \right) \\
 &= 2\pi \left(\frac{\lambda_1^m(\lambda_1 - b) - \lambda_2^m(\lambda_2 - b)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{c(\lambda_1^m - \lambda_2^m)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \right) \\
 &= \pi \left(\frac{\lambda_1 - b - c}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^m - \frac{\lambda_2 - b - c}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2^m \right) \\
 &= \frac{\pi \lambda_1^m}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\lambda_1 - b - c - (\lambda_2 - b - c) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^m \right) \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

A partir dos valores numéricos de a, b, c, λ_1 e λ_2 , obtemos que $\lambda_1 - b - c > 0$, $\lambda_2 - b - c > 0$ e $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$. Além disso, $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| \leq 1$. Assim, se m é par, então $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|^m \leq 1$ e, portanto, $-|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|^m \geq -1$. Logo, de (5.31), temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2^{m-1}t) \cdot \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| dt &\geq \frac{\pi \lambda_1^m}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\lambda_1 - b - c - (\lambda_2 - b - c) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^m \right) \\
 &\geq \frac{\pi \lambda_1^m}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 - b - c - (\lambda_2 - b - c)) \\
 &= \pi \lambda_1^m.
 \end{aligned}$$

Agora, se m é ímpar, como $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, temos que $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^m = -|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|^m$. Daí o produto $(\lambda_2 - b - c) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^m$ é positivo. Logo, de (5.31), temos

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2^{m-1}t) \cdot \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| dt &\geq \frac{\pi \lambda_1^m}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\lambda_1 - b - c - (\lambda_2 - b - c) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^m \right) \\
 &= \frac{\pi \lambda_1^m}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\lambda_1 - b - c + (\lambda_2 - b - c) \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^m \right) \\
 &\geq \frac{\pi \lambda_1^m}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 - b - c) \\
 &= \frac{\pi(\lambda_1 - b - c)}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^m.
 \end{aligned}$$

Tome $C = \min \left\{ \pi, \frac{\pi(\lambda_1 - b - c)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\} > 0$. Logo,

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2^{m-1}t) \cdot \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| dt \geq C \lambda_1^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Portanto, como $\lambda_1 > 0$, pela Proposição 5.1 obtemos que

$$\gamma_2 \leq 2 - \frac{\log(2\lambda_1)}{\log 2} = 0,52739 \dots$$

5.1.2 Encontrando uma cota inferior para γ_2

Encontraremos, agora, uma cota inferior para γ_2 com argumentos análogos aos que acabamos de usar para encontrar a cota superior de γ_2 .

Note que,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2^{m-1}t) \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| dt \right)^2 &\leq \left(\int_0^{2\pi} \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| dt \right)^2 \\ &\leq \int_0^{2\pi} dt \cdot \int_0^{2\pi} \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)|^2 dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \prod_{k=0}^{m-1} \left[2 - \frac{1}{2}(e^{i2^k t} + e^{-i2^k t}) \right] dt, \end{aligned}$$

onde na primeira e segunda desigualdades usamos o fato que $|\text{sen } x| \leq 1$ e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, respectivamente, e na igualdade usamos que $|\mathcal{L}_2(z)|^2 = P_2(\text{sen}^2(\frac{z}{2}))$ e $P_2(x) = 1 + 2x$.

Note que desenvolvendo o produtório da última integral, teremos uma soma com um termo constante, que é 2^m , e termos do tipo e^{iat} , onde $a \in \mathbb{Z}^*$. Como $\int_0^{2\pi} e^{iat} dt = 0$, $\forall a \in \mathbb{Z}^*$, segue que

$$\left(\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2^{m-1}t) \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| dt \right)^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} 2^m dt = 4\pi^2 2^m,$$

ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2^{m-1}t) \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| dt \leq 2\pi(\sqrt{2})^m.$$

Logo, pelo item b) da Proposição 5.1, com $\lambda = \sqrt{2} > 0$, temos

$$\gamma_2 \geq 2 - \frac{\log(2\sqrt{2})}{\log 2} = 0,5.$$

Vamos melhorar essa cota inferior de γ_2 , usando uma desigualdade similar a (5.25). Escrevendo novamente $\mathcal{L}_2(z) = x + iy$, onde $x, y, z \in \mathbb{R}$, de (5.22) temos que $x + iy$ está em um círculo centrado em $(0, p)$ e com raio $-q$. Queremos, agora, minimizar a função $D(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x$. Analogamente ao que já vimos, minimizar $D(x, y)$ é equivalente a minimizar $d(x) = \sqrt{q^2 + 2px - p^2} + x$. Derivando $d(x)$ com relação à x , temos

$$d'(x) = \frac{p}{\sqrt{q^2 + 2px - p^2}} + 1 > 0.$$

Logo, a função $d(x)$ é crescente. Como essa função está definida no intervalo $[p + q, p - q]$, segue que ela atinge seu mínimo em $p + q$. Assim,

$$d_{\min} = d(p + q) = \sqrt{q^2 + 2p(p + q) - p^2} + p + q = \sqrt{(p + q)^2} + p + q = 2(p + q) = 2,$$

pois $p + q = 1$.

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} - x &= \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right) (\sqrt{x^2 + y^2} + x) \\ &= \frac{x^2 + y^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} y^2 \\ &\leq \frac{1}{2} y^2\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}_2(z)| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\leq x + \frac{1}{2} y^2 \\ &= p + q \cos(z) + \frac{1}{2} q^2 \operatorname{sen}^2(z) \\ &= p + q \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) + \frac{q^2}{2} \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 \\ &= p + \frac{q^2}{4} + \frac{q}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) - \frac{q^2}{8} (e^{i2z} - e^{-i2z})\end{aligned}$$

Defina

$$h_3(z) := a + b(e^{iz} + e^{-iz}) + c(e^{i2z} + e^{-i2z}),$$

onde $a = p + \frac{q^2}{4}$, $b = \frac{q}{2}$ e $c = -\frac{q^2}{8}$. Assim, da desigualdade acima, vale $|\mathcal{L}_2(z)| \leq h_3(z)$ e,

portanto, temos que $\prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k z)| \leq \prod_{k=0}^{m-1} h_3(2^k z)$.

Defina novamente a matriz

$$A := \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ b & a & b \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

com esses novos valores de a , b e c . Dessa forma, todas as contas que fizemos acima para calcular o limite superior continuam sendo válidas. Assim, de forma análoga, vamos encontrar que existe uma constante C positiva que satisfaz

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}^2(2^{m-1}t)|^2 \cdot \prod_{k=0}^{m-1} |\mathcal{L}_2(2^k t)| dt \leq \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}^2(2^{m-1}t)|^2 \cdot \prod_{k=0}^{m-1} h_3(2^k z) dt = C \lambda^m$$

onde λ é o raio espectral de A e que, pelas contas que já fizemos, sabemos que é

$$\lambda = \frac{a + b + \sqrt{(a - b)^2 + 8bc}}{2}.$$

Usando os novos valores numéricos de a , b e c , obtemos que $\lambda = 1,4034 \dots$. Logo, pelo item b) da Proposição 5.1, segue que

$$\gamma_2 \geq 2 - \frac{\log(2\lambda)}{\log 2} = 0,51109\dots$$

Portanto, provamos que $0,51109\dots \leq \gamma_2 \leq 0,52739\dots$.

5.2 Comportamento assintótico de γ_N - um método mais simples

Nessa seção, através de um método mais simples do que o visto no Capítulo 4, calcularemos cotas inferior e superior para γ_N e, com elas, obteremos o mesmo valor para o comportamento assintótico de γ_N .

Primeiramente, provaremos dois lemas que nos darão uma cota inferior para γ_N .

Lema 5.1. *Seja $p : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ um função tal que:*

$$p(y) \leq \frac{3}{4}, \text{ se } 0 \leq y \leq \frac{3}{4}$$

e

$$p(y)p(4y(1-y)) \leq \frac{9}{16}, \text{ se } \frac{3}{4} \leq y \leq 1.$$

Então,

$$\prod_{j=0}^{m-1} p(\text{sen}^2(2^j x)) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}, \forall x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}. \quad (5.32)$$

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(2x) &= (2 \text{sen } x \cos x)^2 = 4 \text{sen}^2 x (1 - \text{sen}^2 x) \\ \text{sen}^2(2^2 x) &= 4 \text{sen}^2(2x)(1 - \text{sen}^2(2x)) = 4(4 \text{sen}^2 x (1 - \text{sen}^2 x))(1 - 4 \text{sen}^2 x (1 - \text{sen}^2 x)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Seja $y = \text{sen}^2 x$. Assim, $0 \leq y \leq 1$. Defina $q^0(y) = y$, $q^1(y) = q(y) = 4y(1-y)$ e $q^j(y)$ para $j > 1$ como a j -ésima iterada de $q(y)$. Dessa forma, podemos reescrever a desigualdade (5.32) como

$$\prod_{j=0}^{m-1} p(q^j(y)) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}, \quad 0 \leq y \leq 1, \forall m \in \mathbb{N}. \quad (5.33)$$

Vamos mostrar (5.33) por indução sobre m . Para $m = 1$, temos que $\prod_{j=0}^0 p(q^j(y)) = p(y)$.

Se $0 \leq y \leq \frac{3}{4}$, pela hipótese, segue que $p(y) \leq \frac{3}{4} \leq 1$.

Se $\frac{3}{4} \leq y \leq 1$, pela hipótese, segue que $p(y)p(4y(1-y)) \leq \frac{9}{16} \leq 1$. Logo, devemos ter que $p(y) \leq 1$ e $p(4y(1-y)) \leq 1$ pois, caso contrário, teríamos $p(y)p(4y(1-y)) \geq 1$, o que contradiz nossa hipótese. Assim, temos que

$$\prod_{j=0}^0 p(q^j(y)) = p(y) \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Isso mostra que (5.33) é verdade para $m = 1$.

Agora, suponha que (5.33) seja verdade para $m \leq M$, para algum $M \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\prod_{j=0}^{m-1} p(q^j(y)) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}, \quad 0 \leq y \leq 1, \text{ para todo } m \leq M.$$

Vamos mostrar que (5.33) é verdade para $m = M + 1$. Para isso, analisaremos dois casos

- $0 \leq y \leq \frac{3}{4}$

Defina $z := q(y) = 4y(1 - y)$. Daí, $0 \leq z \leq 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^M p(q^j(y)) &= p(y) \prod_{j=1}^M p(q^j(y)) \\ &= p(y) \prod_{l=0}^{M-1} p(q^{l+1}(y)) \\ &= p(y) \prod_{l=0}^{M-1} p(q^l(z)) \\ &\leq \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{M-1} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^M. \end{aligned}$$

- $\frac{3}{4} \leq y \leq 1$

Defina $z := q^2(y)$. Daí, como $0 \leq q(y) \leq 1$, então $0 \leq z \leq 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^M p(q^j(y)) &= p(y)p(q(y)) \prod_{j=2}^M p(q^j(y)) \\ &= p(y)p(q(y)) \prod_{l=0}^{M-2} p(q^{l+2}(y)) \\ &= p(y)p(q(y)) \prod_{l=0}^{M-2} p(q^l(z)) \\ &\leq \frac{9}{16} \left(\frac{3}{4}\right)^{M-2} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^M. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $\prod_{j=0}^M p(q^j(y)) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^M$, $0 \leq y \leq 1$, ou seja, (5.33) é verdade para $m = M + 1$. Portanto, pelo processo de indução finita, segue que para $0 \leq y \leq 1$,

$$\prod_{j=0}^{m-1} p(q^j(y)) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

■

Lema 5.2. *O polinômio P_N dado em (4.6) satisfaz a desigualdade*

$$P_N(y) \leq 4^{N-1} \left(\max \left(\frac{1}{2}, y \right) \right)^{N-1}, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (5.34)$$

Demonstração: Já vimos, pelo Lema de Bézout, que P_N satisfaz a igualdade

$$y^N P_N(1-y) + (1-y)^N P_N(y) = 1.$$

Fazendo $y = \frac{1}{2}$ na igualdade acima, obtemos

$$\left(\frac{1}{2} \right)^N \cdot P_N \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^N \cdot P_N \left(\frac{1}{2} \right) = 1,$$

o que implica em

$$2 \left(\frac{1}{2} \right)^N \cdot P_N \left(\frac{1}{2} \right) = 1, \text{ isto é, } P_N \left(\frac{1}{2} \right) = 2^{N-1}.$$

Se $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$, como $P_N(y)$ é crescente, concluímos que

$$P_N(y) \leq P_N \left(\frac{1}{2} \right) = 2^{N-1} = 4^{N-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{N-1}.$$

Se $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$, então $2y \geq 1$. Daí, $(2y)^j \leq (2y)^{N-1}$, para $0 \leq j \leq N-1$. Logo, temos

$$\begin{aligned} P_N(y) &= \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1+j}{j} y^j \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1+j}{j} 2^{-j} (2y)^j \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1+j}{j} 2^{-j} (2y)^{N-1} \\ &= (2y)^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1+j}{j} \left(\frac{1}{2} \right)^j \\ &= (2y)^{N-1} \cdot P_N \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= (2y)^{N-1} 2^{N-1} \\ &= 4^{N-1} y^{N-1}. \end{aligned}$$

Portanto, para $0 \leq y \leq 1$, temos $P_N(y) \leq 4^{N-1} (\max(\frac{1}{2}, y))^{N-1}$. ■

Agora, defina a função $p : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por

$$p(y) := \max \left(\frac{1}{2}, y \right).$$

Vamos mostrar que essa função p satisfaz as hipóteses do Lema 5.1. Para isso, analisaremos dois casos da seguinte maneira

- $0 \leq y \leq \frac{3}{4}$

Se $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$, então $p(y) = \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}$. E, se $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{4}$, então $p(y) = y \leq \frac{3}{4}$. Logo, $p(y) \leq \frac{3}{4}$, se $0 \leq y \leq \frac{3}{4}$.

- $\frac{3}{4} \leq y \leq 1$

Como $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} \leq y$, então $p(y) = y$. Assim, $\frac{3}{4} \leq p(y) \leq 1$.

Por outro lado, $\frac{3}{4} \leq y \leq 1$ implica que $3 \leq 4y \leq 4$, e $-1 \leq -y \leq -\frac{3}{4}$ implica que $0 \leq 1 - y \leq \frac{1}{4}$. Logo, $0 \leq 4y(1 - y) \leq 1$.

Se $0 \leq 4y(1 - y) \leq \frac{1}{2}$, então $p(4y(1 - y)) = \frac{1}{2}$ e, daí

$$p(y)p(4y(1 - y)) \leq 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leq \frac{9}{16}.$$

Se $\frac{1}{2} \leq 4y(1 - y) \leq 1$, então $\frac{3}{4} \leq y = p(y) \leq \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ e, assim, $p(4y(1 - y)) = 4y(1 - y) \leq \frac{3}{4}$. Assim, temos

$$p(y)p(4y(1 - y)) \leq \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right) \frac{3}{4} = \frac{6 + \sqrt{2}}{16} \leq \frac{9}{16}.$$

Logo, $p(y)p(4y(1 - y)) \leq \frac{9}{16}$, se $\frac{3}{4} \leq y \leq 1$.

Portanto, a função p satisfaz as hipóteses do Lema 5.1. Então, combinando os Lemas 5.1 e 5.2, obtemos

$$P_N(\text{sen}^2(2^{j-1}t)) \leq 4^{N-1} \left[\max \left(\frac{1}{2}, \text{sen}^2(2^{j-1}t) \right) \right]^{N-1} = 4^{N-1} p(\text{sen}^2(2^{j-1}t))^{N-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{m-1} P_N(\text{sen}^2(2^j t)) &\leq 4^{m(N-1)} \left[\prod_{j=0}^{m-1} p(\text{sen}^2(2^j t)) \right]^{N-1} \\ &\leq 4^{m(N-1)} \left[\left(\frac{3}{4} \right)^{m-1} \right]^{N-1} \\ &= 4^{m(N-1)} \left(\frac{3}{4} \right)^{m(N-1)} \left(\frac{3}{4} \right)^{-(N-1)} \\ &= \left(\frac{4}{3} \right)^{N-1} 3^{m(N-1)}. \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2^{m-1}t) \prod_{j=0}^{m-1} |\mathcal{L}_N(2^j t)| dt \right)^2 &\leq \left(\int_0^{2\pi} \prod_{j=0}^{m-1} |\mathcal{L}_N(2^j t)| dt \right)^2 \\ &\leq \int_0^{2\pi} dt \cdot \int_0^{2\pi} \prod_{j=0}^{m-1} |\mathcal{L}_N(2^j t)|^2 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \int_0^{2\pi} \prod_{j=0}^{m-1} P_N(\text{sen}^2(2^{j-1}t)) dt \\
 &\leq 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3}\right)^{N-1} 3^{m(N-1)} dt \\
 &= 4\pi^2 \left(\frac{4}{3}\right)^{N-1} 3^{m(N-1)}.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(2^{m-1}t) \prod_{j=0}^{m-1} |\mathcal{L}_N(2^j t)| dt \leq 2\pi \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{N-1}{2}} (3^{\frac{N-1}{2}})^m.$$

Portanto, pelo item b) da Proposição 5.1, com $\lambda = 3^{\frac{N-1}{2}} > 0$, concluímos que

$$\gamma_N \geq N - \frac{\log(2 \cdot 3^{\frac{N-1}{2}})}{\log 2} = N - \frac{\log 2 + \frac{N-1}{2} \log 3}{\log 2} = (N-1) \left(1 - \frac{\log 3}{2 \log 2}\right). \quad (5.35)$$

Agora, provaremos um Lema que nos dará uma cota superior para γ_N .

Lema 5.3. *Para todos $m, N \in \mathbb{N}$, temos*

$$\int_0^{2\pi} \prod_{j=0}^{m-1} |\text{sen}(2^{j-1}x)|^N dx \geq \frac{2\pi}{mN+1} 2^{-m(N+1)} 3^{\frac{mN}{2}}.$$

Demonstração: Sabemos que

$$\text{sen}^2(2x) = (2 \text{sen } x \cos x)^2 = 4 \text{sen}^2 x \cos^2 x = 4 \text{sen}^2 x (1 - \text{sen}^2 x).$$

Então, podemos escrever $\text{sen}^2(2x) = q(\text{sen}^2 x)$, onde $q(y) = 4y(1-y)$. Observe que $q(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$. Vamos mostrar, por indução sobre j , que $\text{sen}^2(2^{j-1}x_0) = \frac{3}{4}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, onde $x_0 = \frac{2\pi}{3}$.

De fato, para $j = 0$, temos

$$\text{sen}^2(2^{j-1}x_0) = \text{sen}^2\left(\frac{x_0}{2}\right) = \text{sen}^2\left(2\left(\frac{x_0}{4}\right)\right) = q\left(\text{sen}^2\left(\frac{x_0}{4}\right)\right) = q\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4},$$

pois $\text{sen}^2(\frac{x_0}{4}) = \text{sen}^2(\frac{\pi}{6}) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Suponha que $\text{sen}^2(2^{j-1}x_0) = \frac{3}{4}$, para algum $j \in \mathbb{N}$. Então,

$$\text{sen}^2(2^{(j+1)-1}x_0) = \text{sen}^2(2^j x_0) = \text{sen}^2(2(2^{j-1}x_0)) = q(\text{sen}^2(2^{j-1}x_0)) = q\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}.$$

Agora, note que $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k(2^{-m+2}\pi, (k+1)2^{-m+2}\pi]$. Logo, existe algum $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x_0 \in (k_0(2^{-m+2}\pi, (k_0+1)2^{-m+2}\pi].$$

Como k_0 é inteiro e $x_0 = \frac{2\pi}{3}$, então $x_0 \neq (k+1)2^{-m+2}\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$x_0 \in (k_0 2^{-m+2}\pi, (k_0 + 1)2^{-m+2}\pi) \subset [0, 2\pi]. \quad (5.36)$$

Dessa forma, a função $|\text{sen}(2^{j-1}x_0)|$ é positiva no intervalo (5.36) e tem valor $\frac{\sqrt{3}}{2}$ em $x = x_0$, para todo $j = 0, 1, \dots, m-1$. Além disso, a função $|\text{sen}(2^{j-1}x_0)|$ é côncava no intervalo (5.36), pois as funções $\text{sen}(2^{j-1}x)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ são periódicas de período $2\pi 2^{-j+1}$, o que implica que as suas frequências (número de oscilações, isto é, o tamanho do intervalo dividido pelo período) no intervalo (5.36) são 2^{-m+j} , que é no máximo $\frac{1}{2}$, visto que $j \leq m-1$, e a função $|\text{sen}(y)|$ é côncava em qualquer intervalo onde sua frequência é menor ou igual a $\frac{1}{2}$.

Defina h como a função contínua que é zero fora do intervalo (5.36), linear entre a extremidade esquerda desse intervalo e x_0 , com $h(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, e linear entre x_0 e a extremidade direita desse intervalo, ou seja,

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(x - k_0 2^{-m+2}\pi)}{x_0 - k_0 2^{-m+2}\pi}, & \text{se } k_0 2^{-m+2}\pi \leq x \leq x_0 \\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}((k_0 + 1)2^{-m+2}\pi - x)}{(k_0 + 1)2^{-m+2}\pi - x_0}, & \text{se } x_0 \leq x \leq (k_0 + 1)2^{-m+2}\pi. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

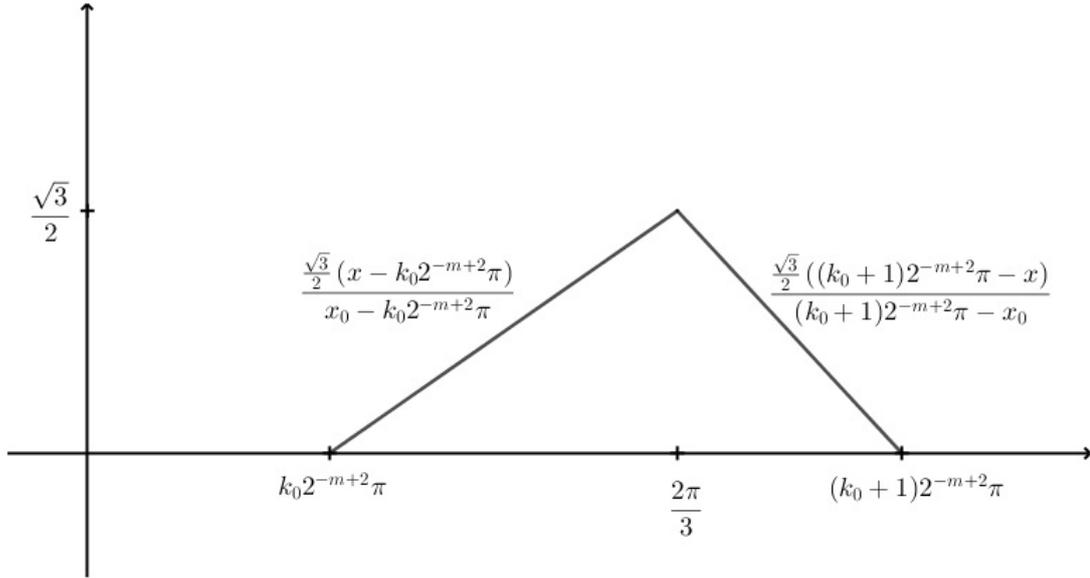


Figura 5.2: Gráfico da função $h(x)$.

Daí, como todas as funções $|\text{sen}(2^{j-1}x)|$ são côncavas e assumem o valor $\frac{\sqrt{3}}{2}$ em x_0 , segue que $|\text{sen}(2^{j-1}x)| \geq h(x)$, para todo $j = 0, 1, \dots, m-1$. Logo,

$$\prod_{j=0}^{m-1} |\text{sen}(2^{j-1}x)| \geq h(x)^m.$$

Assim,

$$\int_0^{2\pi} \prod_{j=0}^{m-1} |\operatorname{sen}(2^{j-1}x)|^N dx \geq \int_0^{2\pi} h(x)^{mN} dx.$$

Note que,

$$h(x - k_0^{-m+2}\pi) = \begin{cases} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x'_0}, & \text{se } 0 \leq x \leq x'_0 \\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(2^{-m+2}\pi - x)}{2^{-m+2}\pi - x'_0}, & \text{se } x'_0 \leq x \leq 2^{-m+2}\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $x'_0 = x_0 - k_0 2^{-m+2}\pi$.

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} h(x)^{mN} dx &= \int_0^{2^{-m+2}\pi} h(x - k_0 2^{-m+2}\pi)^{mN} dx \\ &= \int_0^{x'_0} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x'_0} \right)^{mN} dx + \int_{x'_0}^{2^{-m+2}\pi} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(2^{-m+2}\pi - x)}{2^{-m+2}\pi - x'_0} \right)^{mN} dx. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Fazendo a mudança de variável $t = \frac{2^{-m+1}\pi}{x'_0}x$ na primeira integral do lado direito da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{x'_0} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x'_0} \right)^{mN} dx &= \int_0^{x'_0} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2^{-m+1}\pi} \right)^{mN} \left(\frac{2^{-m+1}\pi}{x'_0}x \right)^{mN} dx \\ &= \frac{x'_0}{2^{-m+1}\pi} \int_0^{2^{-m+1}\pi} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t}{2^{-m+1}\pi} \right)^{mN} dt \end{aligned}$$

De maneira análoga, fazendo $t = \frac{(2^{-m+2}\pi - x)}{2^{-m+2}\pi - x'_0} 2^{-m+1}\pi$ na segunda integral do lado direito da mesma igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{x'_0}^{2^{-m+2}\pi} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(2^{-m+2}\pi - x)}{2^{-m+2}\pi - x'_0} \right)^{mN} dx &= \int_{x'_0}^{2^{-m+2}\pi} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2^{-m+1}\pi} \right)^{mN} \left((2^{-m+1}\pi) \frac{(2^{-m+2}\pi - x)}{(2^{-m+2}\pi - x'_0)} \right)^{mN} dx \\ &= -\frac{2^{-m+2}\pi - x'_0}{2^{-m+1}\pi} \int_{2^{-m+1}\pi}^0 \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t}{2^{-m+1}\pi} \right)^{mN} dt \\ &= \frac{2^{-m+2}\pi - x'_0}{2^{-m+1}\pi} \int_0^{2^{-m+1}\pi} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t}{2^{-m+1}\pi} \right)^{mN} dt \end{aligned}$$

Logo, voltando em (5.37), temos

$$\int_0^{2\pi} h(x)^{mN} dx = \frac{x'_0}{2^{-m+1}\pi} \int_0^{2^{-m+1}\pi} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t}{2^{-m+1}\pi} \right)^{mN} dt + \frac{2^{-m+2}\pi - x'_0}{2^{-m+1}\pi} \int_0^{2^{-m+1}\pi} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t}{2^{-m+1}\pi} \right)^{mN} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2^{-m+2}\pi}{2^{-m+1}\pi} \int_0^{2^{-m+1}\pi} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t}{2^{-m+1}\pi} \right)^{mN} \\
 &= 2 \int_0^{2^{-m+1}\pi} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t}{2^{-m+1}\pi} \right)^{mN} \\
 &> \int_0^{2^{-m+1}\pi} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t}{2^{-m+1}\pi} \right)^{mN} \\
 &= (2^{-m+1}\pi)^{-mN} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{mN} \int_0^{2^{-m+1}\pi} t^{mN} dt \\
 &= (2^{-m+1}\pi)^{-mN} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{mN} \frac{(2^{-m+1}\pi)^{mN+1}}{mN+1} \\
 &= \frac{2\pi}{mN+1} 3^{\frac{mN}{2}} 2^{-m(N+1)}
 \end{aligned}$$

■

Agora, utilizaremos esse Lema para estimar a integral da Proposição 5.1. Usando a definição do polinômio P_N dada em (5.4) e a Fórmula de Stirling, obtemos

$$\begin{aligned}
 P_N(y) &\geq \binom{2N-2}{N-1} y^{N-1} \\
 &= \frac{(2N-2)!}{[(N-1)!]^2} y^{N-1} \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi}(2N-2)^{2N-2+\frac{1}{2}} e^{-(2N-2)} e^{\frac{1}{12(2N-2)+1}}}{\left[\sqrt{2\pi}(N-1)^{N-1+\frac{1}{2}} e^{-(N-1)} e^{\frac{1}{12(N-1)}} \right]^2} y^{N-1} \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi} 2^{2N-2+\frac{1}{2}} (N-1)^{2N-2+\frac{1}{2}} e^{-2(N-1)} e^{\frac{1}{24N-23}}}{2\pi(N-1)(2N-2+1)e^{-2(N-1)} e^{\frac{1}{6N-6}}} y^{N-1} \\
 &\geq \frac{\sqrt{2\pi} 2^{2N-2+\frac{1}{2}} (N-1)^{2N-2+\frac{1}{2}} e^{-2(N-1)} e^{\frac{1}{24N}}}{2\pi(N-1)(2N-2+1)e^{-2(N-1)} e^{\frac{1}{6(N-1)}}} y^{N-1} \\
 &= \frac{2^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}} 2^{2N} (N-1)^{-\frac{1}{2}} e^{\left(\frac{1}{24N} - \frac{1}{6(N-1)}\right)} y^{N-1} \\
 &= \frac{2^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}} 2^{2N} (N-1)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-(1+3N)}{24N(N-1)}} y^{N-1} \tag{5.38}
 \end{aligned}$$

Defina a função $f : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) := \frac{-3x-1}{24x(x-1)}$. Vamos encontrar uma cota inferior para essa função. Note que

$$f'(x) = \frac{-3(24x^2 - 24x) + (3x+1)(48x-24)}{[24x(x-1)]^2} = \frac{72x^2 + 48x - 24}{[24x(x-1)]^2} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{24x^2(x-1)^2} > 0, \quad \forall x \geq 2.$$

Logo, f é crescente para todo $x \geq 2$, o que implica que $f(x) \geq f(2) = -\frac{7}{48}$, para todo $x \geq 2$.

Daí, $e^{f(x)} \geq e^{-\frac{7}{48}}$, para todo $x \geq 2$. Assim, voltando em (5.38), obtemos

$$\begin{aligned} P_N(y) &\geq \frac{2^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}} 2^{2N} (N-1)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{7}{48}} y^{N-1} \\ &\geq C 2^{2N} N^{-\frac{1}{2}} y^N \text{ para } 0 \leq y \leq 1, \end{aligned}$$

onde $C = \frac{2^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{7}{48}} > 0$ e a última desigualdade vem do fato que $N^{-\frac{1}{2}} < (N-1)^{-\frac{1}{2}}$ e $y^N \leq y^{N-1}$, para $0 \leq y \leq 1$.

Então,

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{m-1} |\mathcal{L}_N(2^j t)| &= \prod_{j=0}^{m-1} \sqrt{P_N(\text{sen}^2(2^{j-1} t))} \\ &\geq \prod_{j=0}^{m-1} \sqrt{C 2^{2N} N^{-\frac{1}{2}} \text{sen}^{2N}(2^{j-1} t)} \\ &= C^{\frac{m}{2}} 2^{mN} N^{-\frac{m}{4}} \prod_{j=0}^{m-1} |\text{sen}(2^{j-1} t)|^N. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 5.3, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\text{sen}(2^{m-1} t)|^N \prod_{j=0}^{m-1} |\mathcal{L}_N(2^j t)| dt &\geq \int_0^{2\pi} |\text{sen}(2^{m-1} t)|^N C^{\frac{m}{2}} 2^{mN} N^{-\frac{m}{4}} \prod_{j=0}^{m-1} |\text{sen}(2^{j-1} t)|^N dt \\ &= C^{\frac{m}{2}} 2^{mN} N^{-\frac{m}{4}} \int_0^{2\pi} \prod_{j=0}^m |\text{sen}(2^{j-1} t)|^N dt \\ &\geq C^{\frac{m}{2}} 2^{mN} N^{-\frac{m}{4}} \frac{2\pi}{(m+1)N+1} 3^{\frac{(m+1)N}{2}} 2^{-(m+1)(N+1)} \end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 5.1, com $\lambda = C_0 N^{-\frac{1}{4}} 3^{\frac{N}{2}}$, onde $C_0 = \frac{\sqrt{C}}{2}$, concluímos que

$$\gamma_N \leq N - \frac{\log(2C_0 N^{-\frac{1}{4}} 3^{\frac{N}{2}})}{\log 2} = N \left(1 - \frac{\log 3}{2 \log 2} \right) - \frac{\log 2C_0 - \frac{1}{4} \log N}{\log 2}. \quad (5.39)$$

Teorema 5.2.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma_N}{N} = 1 - \frac{\log 3}{2 \log 2} \approx 0,2075.$$

Demonstração: Das desigualdades (5.35) e (5.39), segue que

$$\left(\frac{N-1}{N} \right) \left(1 - \frac{\log 3}{2 \log 2} \right) \leq \frac{\gamma_N}{N} \leq \left(1 - \frac{\log 3}{2 \log 2} \right) - \frac{\log 2C_0 - \frac{1}{4} \log N}{N \log 2}.$$

Logo, como $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{N} = 1$ e $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log 2C_0 - \frac{1}{4} \log N}{N \log 2} = 0$, tomando o limite quando $N \rightarrow \infty$ obtemos o resultado desejado. \blacksquare

Referências Bibliográficas

- [1] I. Daubechies, *Orthogonal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure. Appl. Math., **41**, 909-996 (1988).
- [2] H. Volkmer, *On the regularity of wavelets*, IEEE Transactions on Information Theory, **38**, número 3, 872-876 (1992).
- [3] A. Haar, *Zur theorie de orthogonalem funktionen-systeme*, Mat. Ann., **69**, 33-371 (1910).
- [4] S. G. Mallat, *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligenc, **11**, número 11, 674-693 (1989).
- [5] Y. Meyer, *Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées*, Lectures given at the University of Torino, Italy, (1986).
- [6] S. G. Mallat, *Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of $L_2(\mathbb{R})$* , Transactions of the American Mathematical Society, **315**, número 1, 69-87 (1989).
- [7] I. Daubechies e J. Lagarias, *Local regularity, infinite products of matrices and fractals*, SIAM J. Math. Anal., **23**, 1031-1079 (1992).
- [8] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, Inc., (1978).
- [9] R. G. Bartle, *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons, Inc., (1966).
- [10] D. G. de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, (1977).
- [11] M. Reed; B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol I: Functional Analysis, Academic Press, (1980).
- [12] V. Iório, *EDP Um Curso de Graduação*, Rio de Janeiro, Coleção Matemática Universtária, IMPA, (2016).
- [13] A. C. Morgado; J. B. P. Carvalho; P. C. P. Carvalho; P. Fernandez, *Análise combinatória e probabilidade*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, (1991).
- [14] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS - NSF Regional Conferences Series in Applied Mathematics, (1992).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [15] H. Robbins, *A Remark on Stirling's Formula*, The American Mathematical Monthly, **62**, número 1, 26-29 (1955).
- [16] P. C. Lima, *Wavelets: uma introdução à teoria, aos algoritmos e às aplicações*, páginas 1-247, (2008).
- [17] E. Hernández; G. Weiss, *A First Course in Wavelets*, CRC Press, (1996).
- [18] N. R. Reis, *Teoria geral das wavelets e aplicações*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, BH, (2018).
- [19] A. Cohen; R. D. Ryan, *Wavelets and Multiscale Signal Processing*, Chapman & Hall, (1995).