Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Transição de Fase no Processo de Percolação de Grau Restrito

por

Diogo Carlos dos Santos

Belo Horizonte

2019

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Transição de Fase no Processo de Percolação de Grau Restrito

por

Diogo Carlos dos Santos *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Matemática

Belo Horizonte, 27 de Fevereiro de 2019

Comissão Examinadora:

Dr. Remy de Paiva Sanchis - Orientador

Dr. Bernardo Nunes Borges de Lima - Coorientador

Dr. Augusto Quadros Teixeira

Dr. Marcelo Richard Hilário

Dr. Roberto Teodoro Gurgel de Oliveira

*O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração deste trabalho.

À minha mãe.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão de meu doutorado, que teve como ponto final esta tese.

À minha mãe, pelo seu amor incondicional, pelo espelho de guerreira, pelos ovos fritos nas madrugadas para que eu não parasse de estudar, mesmo tendo encarado um longo dia de trabalho e tendo que acordar cedo para encarar um outro.

Aos meus amigos por estarem juntos comigo nessa jornada dando apoio moral e muitos incentivos. Principalmente, ao meu quase irmão, Davi Lima, que tem estado comigo desde os 7 anos de idade. Me perdoem por não terem sido citados aqui os vários outros amigos que amo.

Ao meu orientador Remy Sanchis pelas palavras de motivação, por sempre estar muito perto de mim, nunca deixando que eu me perdesse.

Ao meu orientador Bernardo, pelos puxões de orelha (não literalmente), pelas leituras minunsiosas das minhas notas pré-tese e por me acompanhar de perto na escrita da mesma.

À banca examinadora desta tese, pelas sugestões de como melhorar esse texto.

Aos professores que passaram pela minha vida, apaixonados pela Matemática e que me inspiram. Em especial, ao professor Krerley Oliveira, pelas aulas aos sábados quando eu ainda estudava no ensino médio, pelos chocolates nas mesmas, pelo incentivo a fazer cursos de verão.

À Eliane Andréa e Eliane Kelli que são verdadeiros anjos da guarda para nós que somos alunos da pós-graduação da Matemática.

À minha namorada Ana Paula por estar do meu lado desde o segundo semestre do meu doutorado, por ter me ajudado emocionalmente e psicologicamente nessa jornada, um grande beijo.

À CAPES por ter financiado esse estudo.

Resumo

No processo de percolação de grau restrito em um grafo $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, há uma sequência, $(U_e)_{e\in\mathcal{E}}$, de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $U[0,1]$ e um inteiro positivo k. Cada elo e tenta abrir no tempo U_e, ele obtém sucesso se ambos os seus extremos tiverem grau no máximo $k-1$. Provamos um teorema de transição de fase para este modelo na rede quadrada $\mathbb{L}^2$, bem como na árvore regular d-ária.

Palavras-Chaves: transição de fase; percolação de grau restrito.

Abstract

In the Constrained-degree Percolation model on a graph $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ there are a sequence, $(U_e)_{e\in\mathcal{E}}$, of i.i.d. random variables with distribution $U[0,1]$ and a positive integer k. Each bond e tries to open at time U_e, it succeeds if both its extremos would have degrees at most $k-1$. We prove a phase transition theorem for this model on the square lattice $\mathbb{L}^2$, as well on the d-ary regular tree.

Key-Words: phase transition; constrained degree percolation.

Sumário

Capítulo 1

Introdução ao processo de percolação de elos independentes.

A teoria de percolação surgiu em 1957 em um artigo de Broadbent e Hammersley, [4], onde eles tinham o objetivo de estudar como propriedades aleatórias de um meio influenciam a passagem de um fluído através dele. Eles ressaltam que meio e fluído suportam interpretações gerais, moléculas penetrando num meio poroso, doença infectando uma comunidade, etc.

O objetivo desse capítulo é contar alguns resultados bem conhecidos de percolação canônica, onde os elos estarão abertos independentemente com uma mesma probabilidade.

1.1 Definições básicas.

Nesta seção vamos estabelecer algumas definições e notações em teoria dos grafos. Um **grafo** é um par $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ onde $\mathcal{V}$ é um conjunto qualquer e $\mathcal{E}$ é um subconjunto de $\{\{x, y\} \subset \mathcal{V} \colon x \neq y\}$. Os elementos de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{E}$ são chamados de **vértices** e **elos**, respectivamente. Os elementos de $\mathcal{E}$ serão denotados por $\langle x, y\rangle$ em vez de $\{x, y\}$. Também usaremos a notação $x \sim y$ para dizer que $\langle x, y\rangle \in \mathcal{E}$ e diremos que x e y são **vizinhos**. Dado um elo $e = \langle x, y\rangle$ diremos que x e y são os **extremos** de e. O **grau** de um vértice $x \in \mathcal{V}$, denotado por $\deg(x)$, será a quantidade de seus vizinhos, ou seja,

$$\deg(x) = \#\{y \in \mathcal{V} \colon \ y \sim x\}.$$

Dizemos que um grafo tem **grau limitado** quando existe $\Delta \in \mathbb{N}$ que satisfaz $\deg(x) \leq \Delta \ \forall x \in V$.

É fundamental em teoria da percolação a noção de caminhos em grafos: um **caminho** é uma sequência de vértices $\gamma = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$ satisfazendo $x_i \sim x_{i+1} \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, dizemos que um tal caminho tem **tamanho** n e **conecta** x_0 a x_n, denotamos $|\gamma| = n$. Se $\forall i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $i \neq j$, vale que $x_i \neq x_j$, então γ é dito auto-evitante, quando $x_0 = x_n$

falamos que ele é um **circuito**.

Alguns dos grafos mais estudados em teoria da percolação são as redes hipercúbicas e as árvores d-árias, $d \geq 1$. Vamos apresentá-los agora. Como usual escreva $[d] = \{1, \ldots, d\}$. O símbolo $|| \cdot ||$ denotará a norma do máximo, isto é, se $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, então $||x|| = \max\{|x_i| : \ i = 1, \ldots, d\}$. Neste ponto não podemos deixar de apresentar a bola com que vamos trabalhar neste texto

$$B_r := \{x \in \mathbb{Z}^d : \ ||x|| = r\}.$$

O conjunto da linha a acima é chamado de **bola centrada em** 0**, de raio** r (≥ 1).

Considere

$$\mathbb{E}^d := \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbb{Z}^d, \ ||x - y|| = 1\}.$$

O grafo $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ é chamado de **rede quadrada** se $d = 2$ e **rede cúbica** d-dimensional se $d \geq 3$.

Se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [d]^n$ e $a \in [d]$ definimos a **concatenação** $x \cdot a = (x_1, \ldots, x_n, a)$. Denote $[d]^0 := \{\emptyset\}$. A **árvore** d**-ária** é o grafo $\mathbb{T}_d := (\mathbb{V}_d, \mathbb{E}_d)$ onde

$$\mathbb{V}_d := \bigcup_{0 \leq n < \infty} [d]^n$$

e

$$\mathbb{E}_d := \{\langle x, x \cdot a\rangle : \ x \in \mathbb{V}_d, \ a \in [d]\}.$$

O vértice $\emptyset$ é dito ser a **raíz** de $\mathbb{T}_d$.

1.2 O modelo e transição de fase.

Seja $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$ o conjunto das configurações dos elos da rede: dado $\omega \in \Omega$, dizemos que um elo e está **aberto**, nesta configuração, se $\omega(e) = 1$. Se, no caso contrário, $\omega(e) = 0$ então dizemos que e está **fechado**. Seja $\mathcal{F}$ a σ-álgebra em Ω gerada pelos **conjuntos cilíndricos**

$$C(F, \sigma) := \{\omega \in \Omega : \omega(f) = \sigma(f) \ \forall f \in F\},$$

onde F é um subconjunto finito de $\mathbb{E}^d$ e $\sigma \in \{0, 1\}^F$.

No processo de percolação canônico um elo está aberto independentemente dos outros com probabilidade p $(\in [0, 1])$. Seja μ_e a medida de probabilidade em $\{0, 1\}$ que satisfaz $\mu_e(\{1\}) = p$ e $\mu_e(\{0\}) = 1 - p$. Chamaremos de **Processo de Percolação Canônico** a medida de probabilidade, definida em $(\Omega, \mathcal{F})$,

$$\mathbb{P}_p^d = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e.$$

Quando estiver claro a dimensão d onde estamos trabalhando escreveremos apenas $\mathbb{P}_p$ em vez de

$\mathbb{P}_p^d$.

Para cada $x \in \mathbb{Z}^d$ e $\omega \in \Omega$ considere $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(x, \omega)$ o conjunto dos sítios conectados a x por meio de um caminho constituído de elos abertos em ω, esse conjunto é chamado de **aglomerado aberto** de x. Uma das principais quantidades estudadas em teoria da percolação é a função:

$$\theta(p) = \theta^{\mathbb{L}^d}(p) := \mathbb{P}_p^d(|\mathcal{C}(0)| = \infty). \tag{1.1}$$

A função $\theta : [0,1] \to [0,1]$ definida como na linha acima é chamada de **probabilidade de percolação**. Se $\theta(p) > 0$ dizemos que ocorre percolação em p. É óbvio que em $p = 1$ ocorre percolação, $\theta(1) = 1$, e em $p = 0$ não ocorre. Provaremos mais na frente, via um acoplamento dos processos $\mathbb{P}_{p_1}$ e $\mathbb{P}_{p_2}$ a desigualdade (intuitivamente óbvia):

$$p_1 < p_2 \Rightarrow \theta(p_1) \leq \theta(p_2).$$

Então definimos a **probabilidade crítica** do sistema como sendo o número

$$p_c(\mathbb{L}^d) = \sup\{p \in [0,1] : \ \theta^{\mathbb{L}^d}(p) = 0\}. \tag{1.2}$$

É fácil ver que $p_c(\mathbb{L}^1) = 1$. Um resultado, muito importante, devido a Broadbent e Hammersley [4] é que o processo de percolação canônico em $\mathbb{L}^{d \geq 2}$ admite **transição de fase não-trivial**:

Teorema 1. *Se $d \geq 2$, então $0 < p_c(\mathbb{L}^d) < 1$.*

Em [9], artigo de 1960, Harris mostra que $\theta^{\mathbb{L}^2}(1/2) = 0$, uma consequência disso é a desigualdade $p_c(\mathbb{L}^2) \geq 1/2$. Depois de 20 anos, Kesten, em [13], consegue o celebre resultado:

Teorema 2. *A probabilidade crítica do processo de percolação de elos independentes na rede quadrada é $\frac{1}{2}$. Em símbolos,*

$$p_c(\mathbb{L}^2) = \frac{1}{2}.$$

As dimensões $d = 1$ e $d = 2$ são as únicas onde se conseguem calcular os valores exatos de $p_c(\mathbb{L}^d)$.

Aqui provaremos apenas que $p_c(\mathbb{L}^d) < 1$, $\forall d \geq 2$. Para isso, usaremos o argumento de Peierls, o qual será útil na prova do teorema principal dessa tese. Primeiramente, como $\mathbb{L}^d \subset \mathbb{L}^{d+1}$, pode-se ver que

$$p_c(\mathbb{L}^{d+1}) \leq p_c(\mathbb{L}^d).$$

Então é suficiente considerarmos o caso $d = 2$. O argumento se baseia numa propriedade geométrica de $\mathbb{L}^2$. Considere

$$(\mathbb{Z}^2)^* = \{(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y \in \mathbb{Z}\}$$

e

$$(\mathbb{E})^* = \{\langle x^*, y^* \rangle \subset (\mathbb{Z}^2)^* : \ ||x^* - y^*|| = 1\}.$$

O grafo $(\mathbb{L}^2)^* = ((\mathbb{Z}^2)^*, (\mathbb{E}^2)^*)$ é chamado de **rede dual** de $\mathbb{L}^2$. Sejam $u_1 = (1,0)$ e $u_2 = (0,1)$ os vetores da **base canônica** de $\mathbb{R}^2$. Se $e = \langle x, x + u_i \rangle$, $i \in \{1,2\}$, é um elo da rede quadrada, o elo

$$e^* = \langle x + \frac{1}{2}(u_1 + u_2), (x + u_i) - \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \rangle$$

será dito o **elo dual** de e. Agora, para cada $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}^2}$, uma configuração na rede quadrada, considere $\omega^* : (\mathbb{E}^2)^* \to \{0,1\}$ a configuração na rede dual que dar ao elo $e^* \in \mathbb{E}^*$ o estado do elo e, ou seja, $\omega^*(e^*) := \omega(e)$. Se ω tem distribuição $\mathbb{P}_p$, escreva $\mathbb{P}_p^*$ para a distribuição de ω^*.

Note que, um sítio da rede quadrada tem aglomerado aberto finito se, e somente se, existe um circuito $\gamma^* \subset (\mathbb{Z}^2)^*$ na rede dual, o contornando, que tem todos os seus elos fechados. Para uma prova formal desse fato veja [13]. Sejam Γ_n^* o conjunto dos circuitos contornando a origem de tamano n e $\Gamma^* = \bigcup_{n \geq 4} \Gamma_n^*$. Portanto,

$$\begin{aligned} 1 - \theta(p) &= \mathbb{P}_p^*(\exists \gamma \in \Gamma^* \text{ fechado}) \\ &\leq \sum_{n=4}^{\infty} \mathbb{P}_p^*(\exists \gamma \in \Gamma_n^* \text{ fechado}) \\ &= \sum_{n=4}^{\infty} (\#\Gamma_n^*) \cdot \mathbb{P}_p^*(\gamma_0 \text{ está fechado}) \end{aligned}$$

onde, na última linha, γ_0 é um circuito qualquer de Γ_n^*. Não é difícil ver que $\#\Gamma_n^* \leq n3^{n-1}$, veja [5] para detalhes, donde

$$1 - \theta(p) \leq \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{3} \left[3(1-p)\right]^n.$$

Quando $p > 2/3$, a série da linha acima é uma função contínua decrescente, anulando-se em $p = 1$. Segue-se que existe $p_0 < 1$ de modo que ela é estritamente menor que 1.

A teoria de percolação se faz mais fácil na árvore d-ária, pois está não tem ciclos. Na definição da linha 1.1 troque 0 por $\emptyset$, assim obtendo, $\theta^{\mathbb{T}_d}$ a **probabilidade de percolação da raíz** de $\mathbb{T}_d$. Bem como na linha 1.2 define-se $p_c(\mathbb{T}_d)$. Não é difícil mostrar que $p_c(\mathbb{T}_d) = \frac{1}{d}$, vide, por exemplo, páginas 6 e 7 de [3]. Visto que é mais fácil fazer percolação em árvores, alguns dos resultados desta tese, que acreditamos ser válidos em $\mathbb{L}^d$, foram feitos para as árvores d-árias.

1.3 Funções de melhorias essenciais.

Acima consideramos o processo de percolação canônico em $\mathbb{Z}^d$ e $\mathbb{T}_d$. Dados dois grafos $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$ vê-se, via um acoplamento, que os seus pontos críticos se relacionam do seguinte modo:

$p_c(\mathcal{L}_1) \geq p_c(\mathcal{L}_2)$. Aqui daremos uma condição suficiente para que se tenha $p_c(\mathcal{L}_1) > p_c(\mathcal{L}_2)$, para certos pares de grafos.

Em 1991, Aizenman e Grimmett mostraram que "melhorias essenciais" diminuem estritamente a probabilidade crítica de certos grafos [1]. Informalmente falando, uma melhoria é uma regra local que abre elos. Veja também [2].

Vamos às definições formais. Sejam r um inteiro positivo e $\mathfrak{G}$ o conjunto de todos os grafos simples sobre os vértices de B_r. Uma função $F : \Omega \to \mathfrak{G}$ que depende apenas dos estados dos elos da caixa B_r será chamada de uma **função de melhoria**. Dizemos que uma função de melhoria F é **essencial** se existe $\omega \in \Omega$ de modo que $G(\omega)$ não tem um caminho duplamente infinito mas $G(\omega) \cup F(\omega)$ tem algum, onde $G(\omega)$ é o subgrafo de $\mathbb{Z}^d$ que tem como conjuntos de arestas aquelas que estão abertas em ω.

Denotamos por $e + x$ a translação de uma aresta e pelo vetor x e, similarmente, $G + x$ a translação por x do grafo G sobre o conjuntos de vértices $\mathbb{Z}^d$. Dados $x \in \mathbb{Z}^d$ e $\omega \in \Omega$, definimos uma nova configuração, a translação de ω por x, $(\omega - x)(e) = \omega(e - x)$. Seja $\Xi = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Dada $(\omega, \eta) \in \Omega \times \Xi$, a **configuração melhorada** de ω é definida para ser o grafo

$$G^m(\omega, \eta) := G(\omega) \cup \left\{ \bigcup_{x:\ \eta(x)=1} \{x + F(\omega - x)\} \right\}$$

A união dos grafos acima é o grafo que tem $\mathbb{Z}^d$ como conjunto de sítios e tem arestas como a reunião das arestas de cada grafo.

Quando $\eta(x) = 1$ dizemos que a melhoria foi ativada no sítio x. As melhorias serão ativadas independentemente com probabilidade s. Seja $\mathbb{P}_s$ a distribuição do processo de ativação e escreva $\mathbb{P}_{p,s} = \mathbb{P}_p \times \mathbb{P}_s$. As quantidades, probabilidade de percolação e crítica, melhoradas, são definidas como segue

$$\theta^m(F, s) := \mathbb{P}_{p,s}(0 \text{ pertence a um aglomerado infinito de } G^m) \tag{1.3}$$

e

$$p_c^m(F, s) = \inf\{p\colon\ \theta^m(p, s) > 0\}. \tag{1.4}$$

Agora estamos aptos a enunciar o teorema de Aizenman e Grimmett:

Teorema 3. *Se $s \in (0, 1]$ e F uma função de melhoria essencial, então $p_c^m(F, s) < p_c$.*

Para uma prova desse teorema veja [1] ou [5]. Em vez de melhorias pode se estudar pioramentos das configurações, que se trata de fechar arestas de acordo com uma regra local. Pioramentos essenciais, ao ser ativado na origem, em vez de criar, destroem caminhos duplamente infinitos. Bem como nas linhas 1.3 e 1.4 define-se θ^{pior} e p_c^{pior}. Agora, o ponto crítico piorado, por uma função de pioramento essencial, é maior que o ponto crítico canônico.

O Teorema 3 tem muitas aplicações, em 1998, Grimmett e Stacey [8], o utilizam para provar que a probabilidade crítica de percolação de elos (para uma grande variedade de grafos) é estritamente maior que a probabilidade crítica de percolação de sítios. Nesta tese, vamos usar uma função de pioramento, para provar que o ponto crítico do processo de percolação de grau restrito em $\mathbb{L}^2$, com restrição igual 3, é maior que o ponto crítico de $\mathbb{L}^2$.

Capítulo 2

O modelo de percolação de grau restrito.

2.1 Definições e principais resultados.

Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ um grafo infinito conexo de grau limitado. Seja $(k_v)_{v\in\mathcal{V}}$ uma sequência de inteiros tais que $k_v \leq \deg(v), \forall v$ e seja $(U_e)_{e\in\mathcal{E}}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme em $[0, 1]$. Defina um processo de percolação em tempo contínuo onde no tempo $t = 0$ todas as arestas estão fechadas e cada aresta $e = \langle v_1, v_2\rangle$ se abre no tempo U_e se $\#\{u \in \mathcal{V}/\{v_1, v_2\}; \langle v_i, u\rangle$ está aberto no tempo $U_e\} < k_{v_i}, i = 1, 2$. Este modelo foi introduzido em [14], ele é uma versão simplificada do modelo do roteador criado por I. Benjamini.

Variações do processo de percolação de grau restrito foram estudadas e tem relações com alguns modelos de física estatística em redes, como o modelo de dímeros. Uma classe de processos de percolaçao restrita de sítios na rede quadrada, onde apenas poucas configurações são permitidas nos vértices de algumas células, é estudada em [11].

Como no modelo tratado aqui, os artigos [6] e [7] também consideram processos de percolação com restrições nos graus dos vértices, no primeiro é estudado o grafo aleatório de Erdös-Rényi $G_{n,p}$ condicionado que os graus dos vértices pertencem a algum subconjunto, $\mathcal{S}$, dos inteiros não negativos; no último artigo é estudado o chamado 1-2 model, um modelo de mecânica estatística na rede hexagonal onde o grau de cada vértice deve ser 1 ou 2.

Para uma descrição mais formal, seja $([0, 1]^{\mathcal{E}}, \mathcal{F}, P)$ o espeço de probabilidade onde $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos de $[0, 1]^{\mathcal{E}}$ e P é o produto das medidas de Lebesgue em $[0, 1]$. Dados umas sequência $\kappa = (k_v)$ de restrições dos graus e tempos aleatórios uniformes $U = (U_e)$, denotaremos por $\omega_t^{\mathcal{G},\kappa}(U)$ a configuração temporal de elos abertos (ou 1) ou fechados (ou 0) no tempo t; o estado do elo $e = \langle u_1, u_2\rangle$ nesta configuração é denotada por $\omega_{t,e}^{\mathcal{G},\kappa}(U)$.

Observe que a variável aleatória $\omega_{t,e}^{\mathcal{G},\kappa}(U)$ é o produto das funções indicadoras dos eventos:

$$\{U \in [0,1]^{\mathcal{E}}; U_e < t\}$$

e

$$\{U \in [0,1]^{\mathcal{E}}; \#\{v \in \mathcal{V}/\{u_1,u_2\}; \omega_{U_e,\langle u_i,v\rangle}^{\mathcal{G},\kappa}(U) = 1\} < k_{u_i}\}\ i = 1,2.$$

Usando a construção de Harris, vide [10], pode-se mostrar, sem dificuldades, que o modelo está bem definido para todo $t \in [0,1]$. A ideia é que, se $t < p_c(\mathcal{G})$, então as componentes conexas dos elos que tocaram até o tempo t são finitas, assim podemos determinar o estado das arestas em cada uma dessas componentes, os elos restantes estarão fechados.

Como usual em percolação, dada uma configuração temporal $\omega_t^{\mathcal{G},\kappa}(U)$, a notação $0 \leftrightarrow \infty$ em $\omega_t^{\mathcal{G},\kappa}(U)$ significa que, no tempo t, existem infinitos vértices conectados a origem por caminhos de elos abertos. Denotaremos por $\{0 \leftrightarrow \infty \text{ em } t\}$ o conjunto de relógios $\{U \in [0,1]^{\mathcal{E}}; 0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \omega_t^{\mathcal{G},\kappa}(U)\}$.

Definimos a função de probabilidade de percolação, $\theta^{\mathcal{G},\kappa}(t) : [0,1] \to [0,1]$ como $\theta^{\mathcal{G},\kappa}(t) = P\{0 \leftrightarrow \infty \text{ em } t\}$ e o tempo crítico $t_c(\mathcal{G},\kappa) = \sup\{t \in [0,1]; \theta^{\mathcal{G},\kappa}(t) = 0\}$.

De agora em diante, quando claro no contexto, omitiremos os superíndices $\mathcal{G}$ e κ na notação.

Seja $\mathcal{G}$ a rede quadrada $\mathbb{L}^2$ e considere a restrição $k_v = 3, \forall v \in \mathbb{Z}^2$. O teorema abaixo caracteriza transição de fase para o processo de percolação de grau restrito neste grafo.

Teorema 4. *Para o processo de percolação de grau restrito na rede quadrada, vale que* $\frac{1}{2} < t_c(\mathbb{L}^2,(3)) < 1$.

Parte da prova do Teorema 4 é inspirada em [14], onde uma versão mais fraca deste teorema foi obtida. Foi mostrado que existe percolação no tempo $t = 1$, P-q.c.

É natural perguntar se $t_c(\mathbb{L}^d,(k)) < 1$ para algum $k = k(d)$, possivelmente 3. Uma interessante característica deste processo é que não existe monotonicidade óbvia para a função $\theta^{\mathbb{L}^d,(k)}(t)$ em d. A proposição abaixo mostra que não existe percolação quando $k_v = 2, \forall v \in \mathbb{Z}^d$, então as restrição de graus $k_v = 3$ no Teorema 4 é ótima.

Proposição 1. *Para o processo de percolação de grau restrito na rede hipercúbica* $\mathbb{L}^d$, $d \geq 2$, *vale que* $\theta^{\mathbb{L}^d,(2)}(t) = 0,\ \forall t \in [0,1]$.

Demonstração. É suficiente considerar o tempo $t = 1$. Seja B_n a bola de raio n centrada em 0 e $\partial B_n = \{v \in \mathbb{Z}^d; \|v\| = n\}$. Defina o processo estocástico $(X_n)_n$, onde $X_n = \#\{v \in \partial B_n; 0 \leftrightarrow v \text{ em } t = 1\}$, e a filtração $(\mathcal{F}_n)_n$, onde $\mathcal{F}_n = \sigma(I_v,\ v \in B_n)$ com $I_v = I_{(0 \leftrightarrow v \text{ em } t=1)}$. A restrição $k_v = 2, \forall v \in \mathbb{Z}^d$ implica que $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n$, q.c. Isto é, $(X_n, \mathcal{F}_n)$ é um supermartingal não-negativo, como X_n é um número inteiro segue-se que $X_n \to 0$ *q.c.* Isto conclui que $\theta^{\mathbb{L}^d,(2)}(1) = 0$. $\square$

Da Seção 2.2 até a seção 2.5 faremos a prova do Teorema 4, na Seção 2.6 estudaremos o modelo em árvores regulares.

2.2 Prova da cota inferior: $\frac{1}{2} < t_c(\mathbb{L}^2,(3))$.

Seja $\omega_t(\cdot) := I_{\{U(\cdot)\leq t\}}$ a configuração de elos abertos ou fechados para percolação irrestrita em $\mathbb{L}^2$, i.e., cada elo $e \in \mathbb{L}^2$ abre no tempo U_e, por resultados de Harris e Kesten de [9] e [13] sabemos que o tempo crítico de $\mathbb{L}^2$ é $\frac{1}{2}$. A ideia é definir um processo intermediário que é um pioramento essencial do modelo irrestrito, no sentido da Seção 1.3. As configurações do processo intermediário serão denotadas por $\hat{\omega}_{t,e}$ e ela vai ser acoplada (usando as mesmas variáveis aleatória (U_e)) com o processo de percolação de grau restrito de modo que $\hat{\omega}_t \geq \omega_t^{\mathbb{E}^2,(3)}$ $\forall t \in [0,1]$.

Considere as caixas $\Lambda = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2;\ x_1 = 0,1,2,3 \text{ e } x_2 = 0,1,2\}$ e $\Lambda_{m,n} = (4m,3n)+\Lambda$ onde $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, seja $\mathbb{E}(\Lambda_{m,n})$ o conjunto dos elos em $\mathbb{E}^2$ com ambos os seus extremos em $\Lambda_{m,n}$ e denote $g_{m,n} := \langle (4m+1,3n+1),(4m+2,3n+1)\rangle$,

$$A_{m,n} := \{e \in \mathbb{E}(\Lambda_{m,n});\ \#(e \cap \partial\Lambda_{m,n}) = 1\} \text{ e } B_{m,n} := \{e \in \mathbb{E}(\Lambda_{m,n});\ \#(e \cap \partial\Lambda_{m,n}) = 2\}.$$

Observe que $\mathbb{E}(\Lambda_{m,n}) = A_{m,n} \cup B_{m,n} \cup \{g_{m,n}\}$.

Finalmente, considere o evento

$$C_{m,n} := \{U \in [0,1]^{\mathbb{E}(\mathbb{L}^2)};\ \max_{e\in A_{m,n}} U_e < \min_{e\in B_{m,n}\cup\{g_{m,n}\}} U_e\}$$

e a configuração do processo intermediário

$$\hat{\omega}_t(e) = \begin{cases} \omega_t(e), & \text{se } e \notin \bigcup_{m,n}\{g_{m,n}\}, \\ \omega_t(e).I_{C^c_{m,n}}, & \text{se } e = g_{m,n}. \end{cases}$$

Observe que a cofiguração $\hat{\omega}_t$ é um pioramento essencial da configuração ω_t do processo de percolação irrestrito, elas só não coincidem nos elos $g_{m,n}$ quando o evento $C_{m,n}$ ocorre e $\omega_t(g_{m,n}) = 1$. Então, pelo Teorema de Aizemann e Grimmett, vale a desigualdade estrita para o ponto crítico $\hat{t}_c$, do modelo intermediário: $\frac{1}{2} < \hat{t}_c$. Pela construção de $\omega_t^{\mathbb{E}^2,(3)}$ e $\hat{\omega}_t$ segue-se que $\hat{\omega}_t \geq \omega_t^{\mathbb{E}^2,(3)}$ $\forall t \in [0,1]$. Portanto, obtemos a cota inferior $\frac{1}{2} < t_c(\mathbb{L}^2,(3))$.

2.3 Prova da cota superior: $t_c(\mathbb{L}^2,(3)) < 1$.

A prova é baseada no argumento de Peierls. Seja $(\mathbb{L}^2)^* := \mathbb{L}^2 + (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ a rede dual de $\mathbb{L}^2$. Dado uma configuração temporal ω_t em $\mathbb{L}^2$ (aqui estamos omitindo índices) definimos a configuração temporal dual ω_t^* em $(\mathbb{L}^2)^*$ declarando cada elo como aberto se e somente se seu dual está aberto, isto é, $\omega^*_{t,e^*} = \omega_{t,e}$.

Um contorno em $(\mathbb{L}^2)^*$ é um caminho finito $\langle x_0,x_1,\ldots,x_l\rangle$ tal que $\langle x_i,x_{i+1}\rangle \in \mathbb{E}((\mathbb{L}^2)^*)$, $\forall i = 0,\ldots,l-1$ e $x_0 = x_l$. A prova é baseada no fato topológico que em $\mathbb{L}^2$ um aglomerado de elos abertos é finito se, e somente se, ele é contornado por um circuito de elos $(\mathbb{L}^2)^*$ (veja [13] para uma prova).

Dado um circuito $\gamma=\langle x_0,x_1,\ldots,x_l\rangle$ denotamos por $r(\gamma)$ o seu número de lados e por $m(\gamma)$ o seu número de lados de tamanho 1, isto é,

$$r(\gamma)=\#\{i\in[l-1]\cup\{0\}:\;\; x_i-x_{i-1}\neq x_{i+1}-x_i\}$$

e

$$m(\gamma)=\#\{i\in[l-1]\cup\{0\}:\;\; x_i-x_{i-1}\neq x_{i+1}-x_i \text{ e } x_{i+1}-x_i\neq x_{i+2}-x_{i+1}\}.$$

Seja $\Gamma_{n,r,m}$ o conjunto dos circuitos contornando a origem com tamanho n, r lados e m lados de tamanho 1. Considere $\Gamma:=\cup_{n,r,m}\Gamma_{n,r,m}$ o conjunto dos circuitos que contornam a origem e $\Gamma_n:=\cup_{r,m}\Gamma_{n,r,m}$ o conjunto daqueles que tem tamanho n.

Considere $C_n(t)$ o evento "algum circuito de tamanho n contornando a origem está fechado no tempo t", esse é a união, em r e m, dos eventos $C_{n,r,m}(t)$ onde "algum circuito $\gamma\in\Gamma_{n,r,m}$ está fechado no tempo t". Pelo Lema de Borel-Cantelli, é suficiente provarmos que existe $t<1$ tal que

$$S(t)=\sum_{n,r,m}\mathbb{P}(C_{n,r,m}(t))<\infty. \tag{2.1}$$

Na verdade, a convergência da série acima, nos diz que no tempo de convergência t, existe quase certamente aglomerado infinito, isso é equivalente ao que queremos provar pois Roberto Teodoro mostra em [14] que o processo de percolação de grau restrito é ergódico com respeito a translações. A convergênia em (2.1) é baseada nos dois lemas abaixo, as provas deles serão feitas nas próximas seções.

Lema 1. *Fixados $n,r,m\in\mathbb{N}$, existe uma função $\epsilon:(0,1)\to(0,+\infty)$ com $\lim_{t\to1}\epsilon(t)=0$, tal que, para todo contorno $\gamma\in\Gamma_{n,r,m}$, vale que*

$$P(\gamma \textit{ está fechado em } \omega_t^*)\leq\left(\frac{2}{3}+\epsilon(t)\right)^{n-2r+m}(p+\epsilon(t))^{2r-2m}\,\epsilon(t)^m,$$

com $p=(\frac{439}{18144})^{\frac{1}{4}}$.

Lema 2. *Para quaisquer que sejam $n,r,m\in\mathbb{N}$, vale que*

$$\#\Gamma_{n,r,m}\leq\frac{n^2}{4}2^r\binom{r}{m}\binom{n-r-1}{r-m-1}.$$

Os Lemas 1 e 2 acima estendem as Proposições 9 e 5 da tese de Roberto Teodoro, respectivamente, para o caso em que $m\neq0$ e $t<1$.

Seguimos com a prova da convergência da série. Omitindo a variável t na notação, podemos escrever a série em (2.1) como

$$\sum_{n=4}^{\infty} P(C_n) = \sum_{n=4}^{\infty} P(C_{n,n,n}) + \sum_{m\geq 0}^{\infty} \sum_{n\geq m+1}^{\infty} \sum_{r=m+1}^{\frac{m+n}{2}} P(C_{n,r,m}). \tag{2.2}$$

O primeiro termo do lado direito conta sobre todos os circuitos com todos os lados de tamanho 1 e no segundo termo estamos usando que $n \geq 2r - m$. Pelos Lemas 1 e 2, vale que

$$\sum_{n=4}^{\infty} P(C_{n,n,n}) \leq \sum_{n=4}^{\infty} n^2 2^n \epsilon^n < \infty,$$

para algum $t < 1$, pois $\lim_{t\to 1} \epsilon(t) = 0$. Portanto, para concluir a prova do Teorema 4, é suficiente mostrar, para algum $t < 1$, a convergência de

$$S(t) = \sum_{m\geq 0}^{\infty} \sum_{n\geq m+1}^{\infty} \sum_{r=m+1}^{\frac{m+n}{2}} P(C_{n,r,m}).$$

Usando novamente os Lemas 1 and 2, obtemos que

$$S(t) \leq \sum_{m\geq 0} \bar{\epsilon}^m \sum_{n\geq m+1} n^2 (\frac{2}{3} + \epsilon)^n \sum_{r=m+1}^{\frac{m+n}{2}} \binom{r}{m} \binom{n-r-1}{r-m-1} \alpha^r,$$

onde $\alpha = \frac{9(p+\epsilon)^2}{2}$ e $\bar{\epsilon} = \frac{(2/3+\epsilon)\epsilon}{p^2}$. Fazendo as mudanças de variáveis $s = r - m$ e $k = n - m$, obtemos que

$$S(t) \leq \sum_{m\geq 0} \tilde{\epsilon}^m \sum_{k\geq 1} (k+m)^2 (\frac{2}{3} + \epsilon)^k \binom{k+m}{m} \sum_{s=1}^{\frac{k}{2}} \binom{k-s-1}{s-1} \alpha^s, \tag{2.3}$$

com $\tilde{\epsilon} = (2/3 + \epsilon)\alpha\bar{\epsilon}$ (observe que $\bar{\epsilon}, \tilde{\epsilon} \to 0$ quando $t \to 1$). A próxima proposição controla a soma mais interna na inequação (2.3).

Proposição 2. *Para todo $k \geq 2$, a função*

$$f(s) = \alpha^s \binom{k-s-1}{s-1}, \; 1 \leq s \leq \frac{k}{2}$$

atinge seu máximo em $s^* = \lceil r_1 \rceil$, onde r_1 está definido em (2.4) abaixo.

Demonstração. Vamos mostrar que f é crescente até $s^* = \lceil r_1 \rceil$ e decrescente apartir dele. Considere

$$g(s) := \frac{f(s+1)}{f(s)} - 1 = \frac{(4\alpha+1)s^2 + [(4\alpha+1)k - (2\alpha+1)]s + \alpha k(k-1)}{s(k-s-1)}.$$

Mostrar que f é crescente é equivalente a mostrar que g é positiva: $f(s+1) \geq f(s) \Leftrightarrow g(s) \geq 0$. Por sua vez, g é positiva se, e somente se, seu numerador $(4\alpha+1)s^2 + [(4\alpha+1)k - (2\alpha+1)]s +$

$\alpha k(k-1)$ é positivo. Ele tem raízes

$$r_1 = \frac{k}{2} - \frac{2\alpha + 1 + \Delta^{1/2}}{8\alpha + 2} \tag{2.4}$$

e

$$r_2 = \frac{k}{2} - \frac{2\alpha + 1 - \Delta^{1/2}}{8\alpha + 2},$$

onde $\Delta = (4\alpha+1)k(k-2) + (2\alpha+1)^2 > 0$. Como $r_2 \geq k/2$, o máximo de $f(s)$ é atingido em $\lceil r_1 \rceil$. □

Portanto,

$$S(t) \leq \sum_{m\geq 0} \tilde{\epsilon}^m \sum_{k\geq 1} (k+m)^3 \left(\frac{2}{3}+\epsilon\right)^k \binom{k+m}{m} \binom{k-s^*-1}{s^*-1} \alpha^{s^*}. \tag{2.5}$$

Lembremos da fórmula de aproximação de Stirling, $\frac{1}{2}\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \leq n! \leq \frac{3}{2}\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, para n suficientemente grande. Por ela, podemos achar uma constante $c_1 > 0$ de modo que

$$\left(\frac{2}{3}+\epsilon\right)^k \left(\begin{array}{c} k-s^*-1 \\ s^*-1 \end{array}\right) \alpha^{s^*} \leq c_1 \left(\frac{2}{3}+\epsilon\right)^k \frac{(k-s^*-1)^{k-s^*-1}}{(s^*-1)^{s^*-1}(k-2s^*)^{k-2s^*}} \alpha^{s^*}.$$

Seja $\beta = \lim_{k\to\infty} \frac{s^*}{k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4\alpha+1}}$. Note que, quando $k \longrightarrow \infty$, a k-ésima raiz do lado direito da última desigualdade converge para

$$\left(\frac{2}{3}+\epsilon\right) \frac{(1-\beta)^{1-\beta}}{\beta^\beta (1-2\beta)^{1-2\beta}} \alpha^\beta.$$

Também note que

$$\frac{(1-\beta)^{1-\beta}}{\beta^\beta (1-2\beta)^{1-2\beta}} \alpha^\beta = \frac{1-\beta}{1-2\beta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{18(p+\epsilon)^2 + 1}.$$

Então obtemos que

$$\left(\frac{2}{3}+\epsilon\right)^k \left(\begin{array}{c} k-s^*-1 \\ s^*-1 \end{array}\right) \alpha^{s^*} \leq A c(t)^k, \tag{2.6}$$

onde A é uma constante positiva e $c(t) = \left(\frac{2}{3}+\epsilon\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{18(p+\epsilon)^2+1}\right)$. Note que $c(t)$ é decrescente. Seja $c := c(1) = 0.98$. Pelas Desigualdades (2.5) e (2.6), obtemos que

$$S(t) \leq A \sum_{m\geq 0} \tilde{\epsilon}^m \sum_{k\geq 1} (k+m)^3 \binom{k+m}{m} c^k.$$

Agora, da fórmula da absorção $\frac{l}{j}\binom{l-1}{j-1} = \binom{l}{j}$, segue que

$$\begin{aligned}(k+m)^3\binom{k+m}{m} &\leq (m+1)(k+m)^2\frac{k+m+1}{m+1}\binom{k+m}{m}\\ &= (m+1)(k+m)^2\binom{k+m+1}{m+1}\\ &\leq (m+1)(m+2)(k+m)\frac{k+m+2}{m+2}\binom{k+m+1}{m+1}\\ &= (m+1)(m+2)(k+m)\binom{k+m+2}{m+2}\\ &\leq (m+1)(m+2)(m+3)\frac{(k+m+3)}{m+3}\binom{k+m+2}{m+2},\end{aligned}$$

donde,

$$(k+m)^3\binom{k+m}{m} \leq (m+3)^3\binom{k+m+3}{m+3}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}S(t) &\leq A\sum_{m\geq 0}\tilde{\epsilon}^m(m+3)^3\sum_{k\geq 1}\binom{k+m+3}{m+3}c^k\\ &= A\sum_{m\geq 0}\tilde{\epsilon}^m(m+3)^3\frac{1}{(1-c)^{m+4}}.\end{aligned}$$

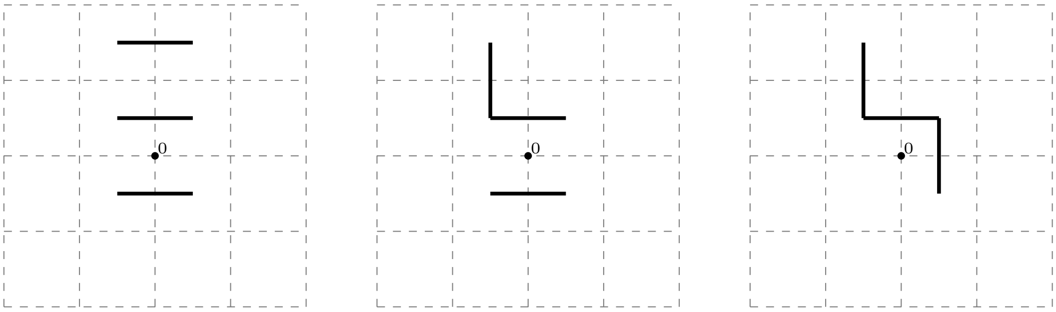
Na igualdade acima usamos a identidade

$$\sum_{k\geq 0}\binom{k+j}{j}x^k = \frac{1}{(1-x)^{j+1}},\ \forall x\in(0,1).$$

Se $t<1$ é tal que $\dfrac{\tilde{\epsilon}(t)}{1-c}<1$, então $S(t)<\infty$.

2.4 Prova do Lema 1.

Roberto Teodoro, em [14], observa que no tempo $t=1$ não existe elo $\langle x,y\rangle\in\mathbb{E}^2$ fechado com $\deg(x,\omega)\leq 2$ e $\deg(y,\omega)\leq 2$. Esta situação ocorre em $t<1$ e gostaríamos de provar que isto ocorre com probabilidade tão baixa quanto se queira contanto que escolhamos tempo suficiente grande. Com esse propósito considere os seguintes conjuntos de elos em $(\mathbb{E}^2)^*$ (vide Figura 2.1):



(a) A_1 (b) A_2 (c) A_3

Figura 2.1: Os conjuntos A_1, A_2 e A_3

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left\{ \left\langle \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\rangle, \left\langle \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right), \left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \right\rangle, \left\langle \left(-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\right), \left(+\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\right) \right\rangle \right\}, \\
A_2 &= \left\{ \left\langle \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\rangle, \left\langle \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right), \left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \right\rangle, \left\langle \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\right) \right\rangle \right\}, \\
A_3 &= \left\{ \left\langle \left(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \right\rangle, \left\langle \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right), \left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \right\rangle, \left\langle \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\right) \right\rangle \right\}.
\end{aligned}
$$

Para todos estes três conjutos, definimos o elo central

$$c(A_i) = \left\langle \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right), \left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \right\rangle, \ i = 1, 2, 3.$$

Considere o conjunto $\mathscr{A} = \{f(A_i); f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \text{ é isometria } i = 1, 2, 3\}$. Os elementos de $\mathscr{A}$ serão chamados de anomalias. Dada uma anomalia $f(A_i)$, diremos que a aresta $f(c(A_i)) \in (\mathbb{E}^2)^*$ é o seu centro.

Dado um circuito $\gamma = \langle x_0, x_1, \dots, x_l \rangle$ em $(\mathbb{L}^2)^*$, seja $\mathbb{E}(\gamma)$ o conjunto dos elos de γ. Uma aresta $e^* \in \mathbb{E}(\gamma)$ será dita anômala se existir algum $A \in \mathscr{A}$ tal que $e^* \in A$ e $A \subset \mathbb{E}(\gamma)$. Sejam $A(\gamma)$ e $U(\gamma)$ os conjutos dos elos anômalos e unitários, respectivamente. Isto é, $A(\gamma) = \{e^* \in \mathbb{E}(\gamma);\ e^* \text{ é anômalo}\}$ e

$$U(\gamma) = \{e^* = \langle x_i, x_{i+1} \rangle \in \mathbb{E}(\gamma);\ x_{i-1} - x_i \neq x_i - x_{i+1} \text{ e } x_i - x_{i+1} \neq x_{i+1} - x_{i+2}\}.$$

Proposição 3. *Para todo $\gamma \in \Gamma$ vale que $\#A(\gamma) \geq \#U(\gamma)$.*

Demonstração. É suficiente exibir uma função injetiva $F : U(\gamma) \to A(\gamma)$. Se $e^* \in U(\gamma) \cap A(\gamma)$, defina $F(e^*) = e^*$. Se $e^* \in U(\gamma) \cap A(\gamma)^c$, suponha que $e^* = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$ onde $x_{i+1} - x_i = u_j$ (vetor da base canônica de $\mathbb{R}^2$), $j \in \{1, 2\}$. Como $e^* \notin A(\gamma)$, vale que $x_{i+2} - x_{i+1} = x_{i-1} - x_i = e_{3-j}$ ou $x_{i+2} - x_{i+1} = x_{i-1} - x_i = -e_{3-j}$. Deixe-nos considerar o primeiro caso, o segundo é análogo.

Considere os números inteiros $l'(e^*)$ e $l''(e^*)$:

$$l'(e^*) = \min\{l \geq 1; x_{i+l+1} - x_{i+l} \neq e_{3-j}\}$$

e

$$l''(e^*) = \min\{l \geq 1; x_{i-l} - x_{i-l+1} \neq e_{3-j}\}.$$

Observe que $l'(e^*), l''(e^*) \geq 3$. Portanto, para $e^* \in U(\gamma) \cap A(\gamma)^c$, definimos $F(e^*)$ como sendo:

$$F(e^*) = \begin{cases} \langle x_{i+l'(e^*)-1}, x_{i+l'(e^*)} \rangle, & \text{se } l'(e^*) \leq l''(e^*), \\ \langle x_{i-l''(e^*)+1}, x_{i-l''(e^*)+2} \rangle, & \text{se } l'(e^*) > l''(e^*). \end{cases}$$

A função F definida acima é injetora. $\square$

Agora considere os seguintes subconjuntos de elos em γ:

$$B(\gamma) = \{e^* = \langle x_i, x_{i+1} \rangle \in \mathbb{E}(\gamma);\ x_{i-1} - x_i = x_i - x_{i+1} = x_{i+1} - x_{i+2}\} \cap A(\gamma)^c$$

e

$$C(\gamma) = \{e^* = \langle x_i, x_{i+1} \rangle \in \mathbb{E}(\gamma);\ x_{i-1} - x_i \neq x_i - x_{i+1} \\ \text{ou } x_i - x_{i+1} \neq x_{i+1} - x_{i+2}\} \cap (A(\gamma) \cup U(\gamma))^c.$$

Vamos conseguir uma cota melhor que a do Lema 1:

$$\mathbb{P}(\gamma \text{ está fechado em } \omega_t^*) \leq \big(2/3 + \epsilon\big)^{\#B} \big(p + \epsilon\big)^{\#C} \epsilon^{\#A}. \tag{2.7}$$

De fato a última desigualdade é mais fina: da Proposição 3 segue-se que $\#A \geq m$. É fácil ver que $\#B \leq n - 2r + m$ e $(\frac{2}{3} + \epsilon) > (p + \epsilon) > \epsilon$, donde,

$$(2/3 + \epsilon)^{\#B} (p + \epsilon)^{\#C} \epsilon^{\#A} < (2/3 + \epsilon)^{n-2r+m} (p + \epsilon)^{2r-2m} \epsilon^m.$$

Seguimos com a prova da desigualdade 2.7.

Se $e^* \in A(\gamma)$, escolha uma das anomalias que a contém e defina $c(e^*)$ como a dual de seu centro. Da definição de anomalia segue que $U(c(e^*)) > t$ donde

$$\mathbb{P}(e^* \text{ está fechado em } \omega_t^*) \leq \mathbb{P}(U(c(e^*)) > t) = 1 - t,\ \forall e^* \in A(\gamma).$$

Portanto,

$$\mathbb{P}(e^* \text{ está fechado em } \omega_t^*,\ \forall e^* \in A(\gamma)) \leq (1-t)^{\lfloor \frac{\#A}{9} \rfloor}.$$

Escreva $X(e^*) = \{c(e^*)\},\ \forall e^* \in A(\gamma)$.

Para cada $e^* \in B(\gamma) \cup C(\gamma)$ vamos considerar um conjunto de elos $X(e^*) \subset \mathbb{E}^2$. Suponha que $\langle x_0, x_1, \ldots, x_l\rangle$ é o lado de γ que contém e^* e sejam x_{-1} e x_{l+1} os vértices adjacentes, em γ, a x_0 e x_l, respectivamente. Então, $x_{j+1} - x_j = u_i,\ x_0 - x_{-1} = \pm u_{3-i}$ e $x_{l+1} - x_l = \pm u_{3-i}$, para $i = 1$ ou 2. Defina

$$\sigma_+ = \begin{cases} +1, & \text{if } x_{l+1} - x_l = u_1 \text{ ou } u_2, \\ -1, & \text{if } x_{l+1} - x_l = -u_1 \text{ ou } -u_2. \end{cases}$$

e

$$\sigma_- = \begin{cases} +1, & \text{if } x_0 - x_{-1} = u_1 \text{ ou } u_2, \\ -1, & \text{if } x_0 - x_{-1} = -u_1 \text{ ou } -u_2. \end{cases}$$

Se $e^* = \langle x_i, x_i + u_1\rangle \in B(\gamma)$ é um elo horizontal, definimos o conjunto $X(e^*)$ como:

$$X(e^*) = \begin{cases} \{e^* + (\frac{1}{2}, \frac{\sigma_+}{2}), e^* + (-\frac{1}{2}, -\frac{\sigma_+}{2})\}, \text{ se } e^* + (0,1) \notin \gamma \text{ e } e^* + (0,-1) \notin \gamma, \\ \{e^* + (-\frac{1}{2}, -\frac{\sigma_+}{2})\}, \text{ se } e^* + (0, \sigma_+) \in \gamma \text{ e } e^* + (0, -\sigma_+) \notin \gamma, \\ \{e^* + (\frac{1}{2}, \frac{\sigma_+}{2})\}, \text{ se } e^* + (0, \sigma_+) \notin \gamma \text{ e } e^* + (0, -\sigma_+) \in \gamma. \end{cases}$$

Anologamente, se $e^* = \langle x_i, x_i + u_2\rangle \in B(\gamma)$ é um elo vertical, o conjunto $X(e^*) \subset \mathbb{E}^2$ é definido como:

$$X(e^*) = \begin{cases} \{e^* + (\frac{\sigma_+}{2}, \frac{1}{2}), e^* + (-\frac{\sigma_+}{2}, -\frac{1}{2})\}, \text{ se } e^* + (1,0) \notin \gamma \text{ e } e^* + (-1,0) \notin \gamma, \\ \{e^* + (-\frac{\sigma_+}{2}, -\frac{1}{2})\}, \text{ se } e^* + (\sigma_+, 0) \in \gamma \text{ e } e^* + (-\sigma_+, 0) \notin \gamma, \\ \{e^* + (\frac{\sigma_+}{2}, \frac{1}{2})\}, \text{ se } e^* + (\sigma_+, 0) \notin \gamma \text{ e } e^* + (-\sigma_+, 0) \in \gamma. \end{cases}$$

Observe que

$$(e^* \text{ está fechado em } \omega_t^*) \subset (U(e) > t) \cup \left[(U(e) \leq t) \cap \left(U(e) > \min_{f \in X(e^*)} U(f)\right)\right],$$

donde

$$\mathbb{P}(e^* \text{ está fechado em } \omega_t^*) \leq \frac{2}{3} + (1-t),\ \forall e^* \in B(\gamma).$$

Também note que $X(e^*) \cap X(f^*) = \emptyset,\ \forall e^* \neq f^* \in A(\gamma) \cup B(\gamma)$.

Finalmente consideramos o caso $e^* = \langle x_i, x_i + u_j\rangle \in C(\gamma)$, existem apenas quatro casos diferentes, dependendo se $i = 0$ ou $l - 1$, e $j = 1$ ou 2 (horizontal ou vertical). Para $e^* = \langle x_i, x_i + u_j\rangle \in C(\gamma)$ definimos $X(e^*)$ como:

$$X(e^*) = \begin{cases} \{e + (0, -\sigma_+), e^* + (\pm\frac{1}{2}, -\frac{\sigma_+}{2})\}, \text{ se } i = l-1 \text{ e } j = 1, \\ \{e + (0, \sigma_-), e^* + (-\frac{1}{2}, \frac{\sigma_-}{2})\}, \text{ se } i = 0 \text{ e } j = 1, \\ \{e + (-\sigma_+, 0), e^* + (-\frac{\sigma_+}{2}, \pm\frac{1}{2})\}, \text{ se } i = l-1 \text{ e } j = 2, \\ \{e + (\sigma_-, 0), e^* + (\frac{\sigma_-}{2}, -\frac{1}{2})\}, \text{ se } i = 0 \text{ e } j = 2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Bem como acima, comparando os tempos dos relógios em $X(e^*)$ com o tempo de e e t pode-se

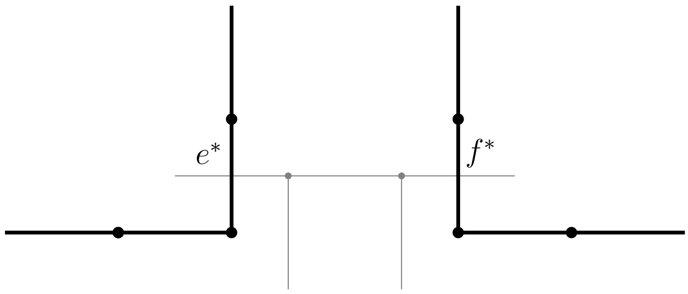


Figura 2.2: As arestas mais grossas do circuito γ e as mais finas correspondem aos elos $e, f, X(e^*)$ e $X(f^*)$.

ver que

$$\mathbb{P}(e^* \text{ está fechado em } \omega_t^*) \leq \frac{1}{3} + (1-t), \ \forall e^* \in C(\gamma). \tag{2.9}$$

Ainda, é fácil ver que $X(e^*) \cap X(f^*) = \emptyset, \ \forall (e^*, f^*) \in C(\gamma) \times \big(A(\gamma) \cup B(\gamma)\big)$. Então

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{e^* \in A \cup B} (e^* \text{ está fechado em } \omega_t^*)\right) \leq (1-t)^{\lfloor \frac{\#A}{9} \rfloor}.((1-t)+2/3)^{\#B}. \tag{2.10}$$

Infelizmente podem existir $e^*, f^* \in C(\gamma)$ de modo que $X(e^*) \cap X(f^*) \neq \emptyset$, estamos intressados em estimar $\mathbb{P}\big\{\big[U(e) > \min_{g \in X(e^*)} U(g)\big] \cap \big[U(f) > \min_{g \in X(f^*)} U(g)\big]\big\}$. Para qualquer $e^* \in C(\gamma)$, o único elo em $X(e^*)$ (vide 2.8) paralelo a e será chamado de *frontal*, os outros um ou dois elos em $X(e^*)$ são paralelos a e^* e serão chamados de *laterais*.

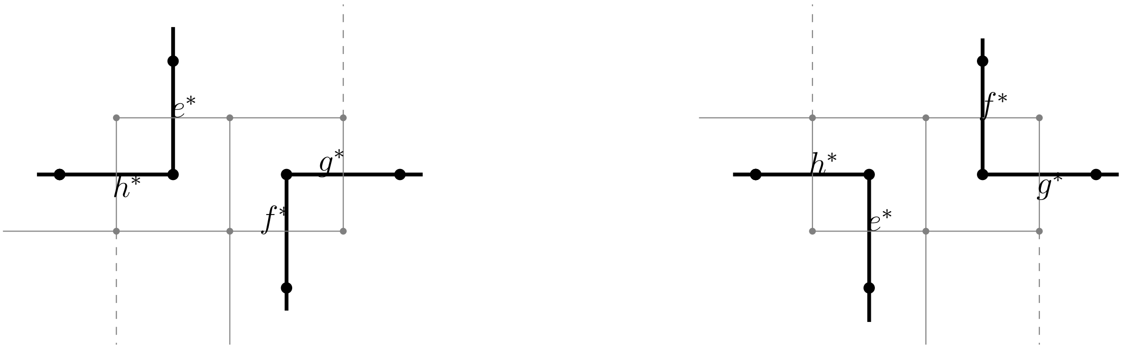
Primeiro deixe nos considerar o caso em que $X(e^*)$ e $X(f^*)$ compartilham o mesmo elo frontal, sem perda de generalidade, suponha que e^* é um elo vertical, $f^* = e^* + (2,0)$ e $X(e^*), X(f^*)$ compartilham o elo frontal $e + (1,0)$, as outras situações são análogas. Existem quatro possibilidades diferentes para o par de conjuntos $(X(e^*), X(f^*))$ dependendo de e^* e f^* serem o mais abaixo ou o mais acima em seus lados. No pior caso possível (que dar a maior cota superior para $\mathbb{P}(e^*, f^*$ estão fechadas no tempo $t)$), temos $X(e^*) = \{e + (1,0), e^* + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$ e $X(f^*) = \{e + (1,0), e^* + (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})\}$ (ver Figura 2.2). Note que

$$\mathbb{P}\big\{\big[U(e) > \min_{g \in X(e^*)} U(g)\big] \cap \big[U(f) > \min_{g \in X(f^*)} U(g)\big]\big\} = \frac{2}{15},$$

donde

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(e^*, f^* \text{ estão fechadas no tempo } t) \leq \mathbb{P}(U(e) > t \text{ or } U(f) > t) + \\ &\mathbb{P}\big\{\big[U(e) \leq t, U(f) \leq t\big] \cap \big[U(j) > \min_{g \in X(j^*)} U(g), \ j = e, f\big]\big\} \leq \\ &1 - t^2 + \tfrac{2}{15} \ \leq \left((1-t^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{2}{15}}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Agora considere o caso em que $X(e^*)$ e $X(f^*)$ compartilham a mesma aresta lateral. Neste caso, existem quatro elos $e^*, f^*, g^*, h^* \in C(\gamma)$, tais que seus conjuntos $X(\cdot)$ tem algumas interseções. A menos de rotações (sem perda de generalidade suponha que e^* é um elo vertical),



(a) Caso I (b) Caso II

Figura 2.3: Os elos mais grossos pertencem ao circuito γ e os elos mais finos correspondem aos elos $e, f, g, h, X(e^*), X(f^*), X(g^*)$ e $X(h^*)$. Os elos tracejados são os frontais deletados de $X(g^*)$ e $X(h^*)$.

existem duas possíveis situações. No primeiro caso, deixe nos chama-lo de caso I, temos que $f^* = e^* + (1,-1), g^* = e + (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ e $h^* = e + (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, vide Figura 2.3a, portanto

$$\begin{aligned}
X(e^*) &= \{e + (1,0), e^* + (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})\},\\
X(f^*) &= \{e + (0,-1), e^* + (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}), e^* + (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2})\},\\
X(g^*) &= \{e^* + (\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}), e + (1,0)\},\\
X(h^*) &= \{e^* + (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}), e + (0,-1), e + (-1,-1))\}.
\end{aligned}$$

No segundo caso, Caso II, temos que $f^* = e^* + (1,1), g^* = e + (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ e $h^* = e + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, veja a Figura 2.3b, portanto

$$\begin{aligned}
X(e^*) &= \{e + (1,0), e^* + (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})e^* + (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\},\\
X(f^*) &= \{e + (0,1), e^* + (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\},\\
X(g^*) &= \{e^* + (\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\}, e + (1,0)\},\\
X(h^*) &= \{e^* + (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}), e + (0,1), e + (-1,1))\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, quando existem dois diferentes elos $e^*, g^* \in C(\gamma)$ com $X(e^*)$ e $X(g^*)$ compartilhando uma aresta frontal de e^* e uma lateral de g^* ocorre exatamente (a menos de rotações, sem perda de generalidade estamos supondo que e^* é uma aresta vertical) ocorre um dos casos, I ou II, descritos acima.

Em ambos os casos estamos interessados em estimar a probabilidade do evento

$$\bigcap_{i \in \{e,f,g,h\}} \left(U(i) > \min_{j \in X(i^*)} U(j) \right). \tag{2.12}$$

Observemos que é possível encontrar algum $i^* \in C(\gamma)/\{e^*, f^*, g^*, h^*\}$ tal que $X(i^*) \cap \left(\cup_{j \in \{e,f,g,h\}} X(j^*)\right) \neq \emptyset$. Mais precisamente, os elos frontais de $X(g^*)$ e $X(h^*)$ podem ser frontais de $X(i^*)$ para algum $i^* \in C(\gamma)/\{e^*, f^*, g^*, h^*\}$. Para valer alguma independência cotamos a probabilidade de 2.12

deletando os elos frontais de $X(g^*)$ e $X(h^*)$, isto é, considere o evento

$$R_{e^*,f^*,g^*,h^*} = \left(\bigcap_{i\in\{e,f\}}\left(U(i) > \min_{j\in X(i^*)} U(j)\right)\right)\bigcap\left(\bigcap_{i\in\{g,h\}}\left(U(i) > \min_{j\in \tilde{X}(i^*)} U(j)\right)\right),$$

onde $\tilde{X}(i^*)$ é o conjunto de elos laterais de $X(i^*)$. As probabilidades dos eventos R_{e^*,f^*,g^*,h^*} são $\frac{439}{18144}$ e $\frac{289}{12096}$ para os Casos I e II, respectivamente. Portanto

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(e^*, f^*, g^*, h^* \text{ estão fechados no tempo } t) \le \mathbb{P}(\cup_{j\in\{e,f,g,h\}}(U(j) > t))+ \\ &\mathbb{P}\{(\cap_{j\in\{e,f,g,h\}}(U(j) \le t)) \cap R_{e^*,f^*,g^*,h^*}\} \ \le 1 - t^4 + \tfrac{439}{18144} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \le \left((1-t^4)^{\frac{1}{4}} + p\right)^4, \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde $p = (\frac{439}{18144})^{\frac{1}{4}}$.

Pelas desigualdades 2.9, 2.11 e 2.13, vale que

$$\mathbb{P}(e^* \text{ está fechado em } \omega_t^*, \forall e^* \in C(\gamma)) \le \left((1-t^4)^{\frac{1}{4}} + p\right)^{\#C}. \tag{2.14}$$

Lembrando que $X(e^*) \cap X(f^*) = \emptyset, \forall e^* \in C(\gamma), f^* \in A(\gamma) \cup B(\gamma)$, pelas desigualdades 2.10 e 2.14, segue-se o desejado

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\gamma \text{ está fechado em } \omega_t^*) &\le \mathbb{P}\left(\bigcap_{e^*\in A\cup B\cup C}(e^* \text{ está fechado em } \omega_t^*)\right) \\ &\le (2/3+\epsilon)^{\#B}(p+\epsilon)^{\#C}\epsilon^{\#A}. \end{aligned}$$

2.5 Prova do Lema 2.

Dado um caminho finito $\gamma = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$, seja $x^*(\gamma) \in \mathbb{Z}^2$ o vértice de γ com a menor coordenada y, se houver mais que um com essa propriedade, escolha aquele que tem a menor coordenada x. Note que $\#\{x^*(\gamma); \gamma \in \Gamma_{n,r,m}\} \le \frac{n^2}{4}$. Vamos começar a percorrer o caminho γ do vértice $x^*(\gamma)$.

Nós temos $\binom{r}{m}$ opções de escolha para os lados unitários. O número de opções para a quantidade de elos de cada lado não unitário é $\binom{n-r-1}{r-m-1}$ que é, de outro ponto de vista, o número de soluções inteiras da equação

$$s_1 + \cdots + s_{r-m} = n - m, \ s_i \ge 2 \ \forall i \in [r-m].$$

No fim de cada lado existem no máximo 2 opções para a direção do próximo. Contamos, demasiadamente, caminhos que não são circuitos bem como aqueles que se auto-intersectam.

2.6 Percolação de grau restrito em árvores regulares.

Seja $\mathbb{T}_d = (\mathbb{V}_d, \mathbb{E}_d)$ a árvore d-ária, regular, tendo $\emptyset$ como raíz, bem como foi definida na Seção 1.1.

Observe que exatamente a mesma prova da Proposição 1 serve para o processo de grau restrito em $\mathbb{T}_d$. Portanto, temos o seguinte:

Proposição 4. *Para o processo de percolação de grau restrito na árvore d-ária regular $\mathbb{T}^d$, $d \geq 2$, vale que $\theta^{\mathbb{T}^d,(2)}(t) = 0,\ \forall t \in [0,1]$.*

O próximo resultado mostra que, com a restrição $k_v = 3, \forall v \in \mathbb{T}_d$, existe percolação em $\mathbb{T}^d$. Observe que este cobre todos os valores de restrição nos graus k.

Teorema 5. *Se $d \geq 2$, o processo de percolação de grau restrito em $\mathbb{T}_d$, com restrição três, apresenta transição de fase. Mais precisamente,*

$$\frac{1}{d} \leq t_c(\mathbb{T}_d, (3)) < 1.$$

Demonstração. Se $d = 2$ não existe nada a fazer, $t_c(\mathbb{T}_2, (3)) = 1/2$, então suponha $d \geq 3$. Dado $U \in [0,1]^{\mathbb{E}_d}$, seja $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(U)$ a floresta aleatória $\mathfrak{F} = (\mathbb{V}_d, \mathbb{E}(\mathfrak{F}))$ onde

$$\mathbb{E}(\mathfrak{F}) = \{e = \langle x, x \cdot a\rangle \in \mathbb{E}_d;\ \#\{b \in [d]\backslash\{a\};\ U(e) > U(\langle x, x \cdot b\rangle)\} \leq 1\}.$$

Em palavras, um elo de $\mathbb{E}_d$ está na floresta $\mathfrak{F}$ se ele tem no máximo um irmão com tempo de relógio maior que o do relógio dele. Note que $\mathfrak{F}$ é uma coleção de árvores binárias e seja $\mathfrak{T}$ aquela que contém a origem.

Dado qualquer elo $e = \langle x, x \cdot a\rangle \in \mathbb{E}(\mathfrak{T})$, declaramos este elo e como *vermelho* se

$$\#\{b \in [d];\ U(e) > U(\langle x \cdot a, x \cdot a \cdot b\rangle)\} \leq 2.$$

Isto é, $e \in \mathbb{E}(\mathfrak{T})$ está vermelho se, e comente se, e tem no máximo dois filhos em $\mathbb{T}_d$ que tem relógios tocando antes do tempo $U(e)$. Note que, se e está vermelho, então ele abrirá no tempo U_e no PPGR com restrição $k = 3$. Portanto, para concluir está prova é suficiente mostrar que existe percolação no processo de elos vermelhos em $\mathfrak{T}$.

Sejam $e_1^n = \langle x, x \cdot a\rangle, e_2^n = \langle x, x \cdot b\rangle \in \mathbb{E}(\mathfrak{T})$ os elos da n-ésima geração de $\mathfrak{T}$, i.e. $x \in [d]^{n-1}$ e $a, b \in [d]$, com $U(e_1^n) < U(e_2^n)$. Observe que

$$\mathbb{P}(e_1^n \text{ está vermelho}) = d\left[\frac{1}{2d} + \frac{d(2d-2)!}{(2d)!} + \frac{d(d-1)(2d-3)!}{(2d)!}\right],$$

$$\mathbb{P}(e_2^n \text{ está vermelho}) = d\left[\frac{(d-1)(2d-2)!}{(2d)!} + \frac{2d(d-1)(2d-3)!}{(2d)!} + \frac{3d(d-1)^2(2d-4)!}{(2d)!}\right]$$

e os eventos (e_1^n está vermelho) e (e_2^n está vermelho) são independentes. É fácil ver que $\mathbb{P}(e_1^n$ está vermelho$)+$ $\mathbb{P}(e_2^n$ está vermelho$) > 1,\ \forall d \geq 3$. Isto implica em percolação dos elos vermelhos. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Aizenman M., Grimmett G., *Strict monotonicity for critical points in percolation and ferromagnetic models*, Journal of Statistical Physics **63**, 817-835 (1991).

[2] Balister P.,Bollobás B., Riordan O., *Essential enhancements revisited*, arXiv:1402.0834, (2014).

[3] Bollobás B., Riordan O., *Percolation*, Cambridge University Press, (2006).

[4] Broadbent R., Hammersley J., *Percolation processes: I. crystals and mazes.* In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **53**, 629-641 (1957).

[5] Grimmett G., *Percolation*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, (1999).

[6] Grimmett G., Janson S., *Random graphs with forbidden vertex degrees*, Random Structures and Algorithms **37**, 137-175 (2010).

[7] Grimmett G., Li Z., *The 1-2 model*, Contemporary Mathematics **969**, 139-152 (2017).

[8] Grimmett G., Stacey A., *Critical probabilities for site and bond percolation models*, Annals of Probability, 1788-1812 (1998).

[9] Harris T., *A lower bound for the critical probability in a certain percolation process*, In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **56**, 13-20 (1960).

[10] Harris T., *Nearest-neighbor Markov interaction processes on multidimensional lattices*, Advances in Mathematics, 66-89 (1972).

[11] Holroyd A., Li Z., *Constrained percolation in two dimensions*, arXiv:1510.03943v2, (2016).

[12] Kesten H., *Percolation Theory for Mathematicians*, Birkhäuser, Boston, (1982).

[13] Kesten H., *The critical probability of bond percolation on the square lattice equals* $\frac{1}{2}$, Communications in Mathematical Physics, 41-59 (1980).

[14] Teodoro R., *Constrained-degree Percolation*, PhD thesis, IMPA, (2014).