

**Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Física.**

MODELO SIGMA NÃO LINEAR $O(3)$.

**Candidato: Makha Coulibaly
Orientador: Prof. Antônio Sérgio Teixeira Pires.**

Dissertação submetida ao corpo docente do Departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) como parte integrante dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Belo Horizonte, 15 de Fevereiro de 2002.

Sumário

Agradecimentos

Além de Deus o todo poderoso, que me deu a oportunidade de estar aqui realizando este trabalho, muitas pessoas me apoiaram ao longo desta longa caminhada; sou muito grato por isso. Desejo, então agradecer do fundo do meu coração :

Aos meus pais e a toda minha família pela educação recebida, pelo apoio, por tudo mesmo.

Ao meu professor e orientador, Antônio Sérgio Teixeira Pires, pelo incentivo, pela confiança e pelo trabalho realizado.

A todos os professores e funcionários do departamento de Física da UFMG, pela formação.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

A todos meus colegas do curso de Pós Graduação, pela amizade e pelo tratamento exemplar.

A meus amigos e particularmente Ousmane Sané pelo incentivo.

Resumo

Esta dissertação de Mestrado é uma coletânea de material disperso presente em vários artigos e livros. Estudamos os casos isotrópicos e anisotrópicos do modelo Sigma não linear em duas dimensões a fim de investigar os diferentes tipos de soluções que eles apresentam. As soluções do tipo instanton (um par de merons) foram estudadas mais detalhadamente devido à sua grande importância em vários ramos da Física. E enfim foi feita uma correlação entre os modelos $O(3)$ e CP_N .

No entanto o cálculo de soluções dependentes do tempo para o modelo sigma anisotrópico é um calculo original.

abstract

Capítulo 1

Introdução

Os métodos disponíveis para resolver equações não lineares são tão inadequados que mesmo para campos escalares em $(1 + 1)$ dimensões as soluções dependentes do tempo de um dado sistema são em geral muito difíceis de se obter. Em física de partículas vários sistemas envolvem campos escalares, vetoriais e espinoriais acoplados em $(3 + 1)$ dimensões. Para tais sistemas ainda não existe um método de obtenção de uma solução não trivial clássica na forma analítica. Diante de tantas dificuldades para achar soluções exatas de sistemas complicados em dimensões superiores, diferentes técnicas foram inventadas para simplificar a obtenção das soluções das equações de onda. Para alguns modelos ainda não existem soluções não triviais mas procurar analiticamente uma solução já seria uma tarefa importante.

Dado um sistema com campos escalares em uma dimensão ≥ 3 ; o teorema de Virial restringe a possibilidade de ter uma solução onda solitária não trivial estática; isto é, não existe tal solução e o Lagrangeano tem a forma relativística

$$L(x, t) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - U(\Phi(x, t)) \quad (1.1)$$

$\Phi(x, t) = \Phi_i(x, t), i = 1, \dots, N$ é um conjunto de N campos escalares acoplados em $(D + 1)$ dimensões. A energia potencial $U(\Phi(x, t))$ é uma função não negativa que se anula somente no seu mínimo absoluto.

Uma solução estática $\Phi(x)$ obedece à equação:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial U}{\partial \Phi}(x) \quad (1.2)$$

Note que esta equação é claramente a condição $\delta W = 0$ para o funcional energia estático.

$$W[\Phi] \equiv \int d^D x \left[\frac{1}{2} \nabla_i \Phi \cdot \nabla_i \Phi + U(\Phi(x)) \right] \equiv V_1[\Phi] + V_2[\Phi] \quad (1.3)$$

Considere uma solução estática $\Phi_i(x)$ e considere a família de configurações

$$\Phi_\lambda(x) = \Phi_1(\lambda x) \quad (1.4)$$

onde λ é um parâmetro. Então temos:

$$\begin{aligned} W[\Phi_\lambda] &= \int d^D x \left[\frac{1}{2} \nabla_i \Phi_\lambda \cdot \nabla_i \Phi_\lambda + U(\Phi_\lambda(x)) \right] \\ &= V_1[\Phi_\lambda] + V_2[\Phi_\lambda] \\ &= \lambda^{2-D} V_1[\Phi_1] + \lambda^{-D} V_2[\Phi_1] \end{aligned} \quad (1.5)$$

$\Phi_1(x)$ sendo um extremo de $W[\Phi]$, temos:

$$\frac{d}{d\lambda} W[\Phi_\lambda] = 0, \quad \lambda = 1 \quad (1.6)$$

Diferenciando (1.5) e usando (1.6) vem:

$$\begin{aligned} (2 - D)\lambda^{1-D} V_1[\Phi_1] - D\lambda^{-D-1} V_2[\Phi_1] &= 0 \\ (2 - D)V_1[\Phi_1] &= DV_2[\Phi_1], \quad \lambda = 1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Como $V_1[\Phi_1]$ e $V_2[\Phi_1]$ não são negativos esta equação não é satisfeita para $D \geq 3$, a menos que $V_1[\Phi] = V_2[\Phi] = 0$. Isto significa que $\Phi_1(x)$ deve ser independente do espaço e igual a um dos zeros de $U[\Phi]$. Isso é exatamente uma solução trivial, e o teorema de Derrick impede soluções não triviais dependentes do espaço. O teorema vale somente para soluções estáticas e para um lagrangeano da forma (1.1). No caso bidimensional, o teorema não impede soluções não triviais.

Nesta dissertação de Mestrado estudaremos o modelo sigma não linear em duas dimensões e discutiremos os vários tipos de soluções que ele apresenta. O termo instanton refere-se a soluções localizadas das equações de campo clássicas euclidianas de uma teoria que tem ação finita. A versão euclidiana de uma teoria, ou conjunto de equações de campo, envolve a substituição da métrica de Minkowsky pela métrica euclidiana. No nível clássico

os instantons são similares às soluções estáticas das equações Minkowskianas. pois as soluções estáticas envolvem somente coordenadas espaciais, isto é, o subespaço euclidiano do espaço-tempo de Minkowsky. Soluções estáticas de um problema podem ser usadas diretamente como instantons de sistemas de dimensão inferior. A única diferença é que a exigência da energia finita de um sóliton será substituída pela exigência da ação euclidiana finita dos instantons.

Considere um modelo numa dimensão espacial determinado pela equação de onda seguinte:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + V(\Phi) = 0, \quad (1.8)$$

com $\Phi(x, t)$ uma solução do tipo sóliton. Fazendo $t = i\tau$, temos:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + V(\Phi) = 0. \quad (1.9)$$

A solução $\Phi(x, \tau)$ é chamada de instanton.

Note que isto não é apenas uma mudança de notação, pois o produto escalar é diferente nas duas teorias.

Considere agora o modelo em duas dimensões espaciais (2 + 1) determinado pela equação de onda seguinte:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + V(\Phi) = 0 \quad (1.10)$$

A solução de sóliton estática do modelo σ não linear em duas dimensões espaciais (2+1) corresponde ao instanton do modelo numa dimensão espacial (1 + 1). Por razão histórica esta solução é chamada de skyrmion.

Este modelo é muito importante e é muito usado em várias áreas da física. Em física da matéria condensada ele é usado para descrever o modelo de Heisenberg antiferromagnético e no estudo do efeito Hall quântico. Em física de partículas este modelo é uma boa idéia para as especulações sobre os efeitos das pseudopartículas na teoria de gauge não abeliana em quatro dimensões.

Neste capítulo introdutório apresentamos o modelo, definimos alguns conceitos básicos e falamos sobre seu uso na física. No próximo capítulo estudaremos o modelo sigma não linear bidimensional: caso do antiferromagneto isotrópico. No terceiro capítulo fixaremos nossa atenção sobre o caso anisotrópico do modelo sigma não linear em duas dimensões. No quarto

capítulo estudaremos as soluções do tipo merons. E finalmente faremos uma correlação entre o modelo sigma não linear e um modelo semelhante, o modelo CP_N .

Capítulo 2

O modelo sigma não linear.

2.1 Introdução

Uma solução fundamental do modelo sigma não linear em duas dimensões é chamada de sólito. Podemos associar ao sólito clássico e ao sólito Quântico um momento de inércia e um momento de dilatação infinitos. Segue-se que o spin do sólito é indefinido ao contrário de recentes declarações que estipulam que o spin é fracionário.

O modelo sigma não linear $O(3)$ descreve um sistema antiferromagnético isotrópico à temperatura 0^0K . Em duas dimensões espaciais, o modelo contém sólitons topológicos correspondentes a alguns estados metaestáveis do antiferromagneto.

O modelo sigma não linear é muito usado em física. Em materia condensada ele descreve o limite contínuo do modelo de Heisenberg antiferromagnético e o efeito Hall Quântico ⁽³⁵⁾. O modelo bidimensional é usado em física de partículas elementares como um modelo ilustrativo porque ele compartilha muitos efeitos com teorias de gauge não abelianas em quatro dimensões.⁽³⁶⁾ As propriedades termodinâmicas e a quantização do modelo encontram-se bem descritas em vários livros textos ⁽³⁵⁾. Aqui vamos tratar da equação clássica em si.

Examinaremos algumas propriedades do sólito fundamental (Skyrmion) do modelo σ não linear em duas dimensões. Os sólitons com orientação e escala diferentes apresentam uma degenerescência da energia clássica. Os momentos associados às mudanças na orientação e na escala são ambos infinitos. Os valores esperados destes momentos são também infinitos. Consequente-

mente, o estado fundamental quântico não será uma superposição de estados com uma orientação e uma escala diferentes.

2.2 Soluções tipo Skyrmions

Considere uma solução estática derivada do Lagrangeano (1.1). Ela obedece a equação

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.1)$$

onde somente as soluções não singulares são constantes.

Vamos impor o vínculo $\Phi \cdot \Phi = 1$ a nosso modelo. Tal modelo é chamado de modelo $O(N)$ não linear. O modelo $O(N)$ é descrito pelo lagrangeano

$$L = \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + V(\Phi)$$

onde $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N)$ é um campo vetorial com N componentes. O modelo σ não linear é um caso particular do modelo $O(N)$ onde $V(\Phi) = 0$ com o vínculo $\Phi^2 = 1$. Agora vamos estudar o caso $N = 3$ que fornecera soluções interessantes.

O modelo $O(3)$ não linear consiste de 3 campos escalares

$\Phi(x, t) \equiv \Phi_a(x, t); a = 1, 2, 3$ com o vínculo: para todo (x, t) :

$$\sum_a \Phi_a^2(x, t) \equiv \Phi \cdot \Phi = 1 \quad (2.2)$$

A dinâmica é determinada pelo Lagrangeano:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_a (\partial_{\mu}\Phi_a)(\partial^{\mu}\Phi_a) \equiv \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\Phi)(\partial^{\mu}\Phi) \quad (2.3)$$

Note que Φ pode ser considerado como um vetor no espaço interno, isto é o campo-espaço tridimensional cujas coordenadas são indexadas pelo índice a , isso, para ser distinguido dos vetores no espaço de coordenadas que são indexados pelos índices de Lorentz como μ na equação (2.3).

A equação do campo é obtida aplicando o princípio variacional de Euler-Lagrange à ação S , com o vínculo imposto através de um multiplicador de Lagrange.

$$S[\Phi] = \int dx \int dt \left[\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\Phi) \cdot (\partial^{\mu}\Phi) + \lambda(x, t)(\Phi \cdot \Phi - 1) \right] \quad (2.4)$$

Usaremos a equação de Euler-Lagrange seguinte para determinar a equação do campo; temos:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Phi)} &= \frac{\partial L}{\partial \Phi} \\ \partial_\mu \partial^\mu \Phi + \lambda \Phi &= 0 \\ (\partial_\mu \partial^\mu + \lambda) \Phi &= 0 \\ (\nabla^2 + \lambda) \Phi &= 0\end{aligned}\tag{2.5}$$

Usando a equação de vínculo (2.2) e a equação (2.5) isolamos λ ;

$$\lambda(x, t) = \lambda \Phi \cdot \Phi = -\Phi \cdot \nabla^2 \Phi\tag{2.6}$$

Agora vamos considerar somente as soluções estáticas e as dimensões espaciais, a equação do campo fica:

$$\nabla^2 \Phi + \lambda \Phi = 0\tag{2.7}$$

onde usando λ de (2.6) temos:

$$\nabla^2 \Phi - (\Phi \cdot \nabla^2 \Phi) \Phi = 0\tag{2.8}$$

Note que a equação (2.7) é diferente da equação (2.1) que resulta da ausência de vínculo. Veremos que (2.7) gera interessantes soluções não singulares em duas dimensões que classificamos em setores homotópicos.

A energia de uma solução estática obtida do Lagrangeano (2.3) é dada por:

$$E = \frac{1}{2} \int (\partial_\sigma \Phi) \cdot (\partial_\sigma \Phi) d^2 x; \quad \sigma = 1, 2.\tag{2.9}$$

Vamos considerar primeiro as soluções da energia-zero. Claramente, para todo x , elas devem satisfazer a condição $\partial_\sigma \Phi = 0$. Isto é $\Phi(x) = \Phi^0$ que é qualquer vetor unitário ($\Phi \cdot \Phi = 1$) no espaço interno, e poderá apontar em qualquer direção. Então temos uma família contínua de soluções degeneradas com energia $E = 0$ correspondentes às diferentes direções em que Φ^0 pode apontar.

Note que estamos considerando Φ^0 como sendo um vetor no espaço interno, isto é, o espaço tridimensional dos campos; suas componentes são indicadas pelo índice a . ($a = 1, 2, 3$)

Vamos investigar agora as soluções com energia diferente de zero ($E \neq 0$) mas finita (sóliton).

Usando coordenadas polares (r, θ) na equação (2.9) temos:

$$r \parallel \text{grad}\Phi \parallel \longrightarrow 0, \text{ quando } r \longrightarrow \infty \quad (2.10)$$

ou

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(x) = \Phi^0 \quad (2.11)$$

Onde Φ^0 é ainda um vetor unitário no espaço interno. Quando $r \longrightarrow \infty$ no espaço de coordenadas, $\Phi(x)$ se aproxima do mesmo limite Φ^0 . Em outros termos, $\Phi(x)$ dependerá da coordenada angular θ , e a componente angular do gradiente $\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ não satisfará (2.10).

Vimos que $\Phi(x)$ se aproxima de Φ^0 no infinito, logo o plano de coordenadas físicas R_2 é confinada dentro de uma área esférica chamada $S_2^{(phy)}$.

Agora vamos enunciar um resultado bem conhecido em topologia: todo mapeamento não singular de uma área esférica S_2 sobre uma outra área S_2 pode ser classificado em setores homotópicos que podem ser caracterizados pelo conjunto dos números inteiros positivos, negativos e zero, ou escrito numa forma compacta

$$\pi_2(S_2) = \mathbb{Z} \quad (2.12)$$

onde $\pi_n(S_m)$ representa o grupo homotópico associado, com mapeamento $S_n \longrightarrow S_m$ e \mathbb{Z} é o grupo dos inteiros.

Vamos considerar agora o caso simples do mapeamento de um círculo num círculo.

Considere um círculo S_1 (caracterizado por um angulo $\theta(2\pi)$) mapeado num outro círculo S_1 (caracterizado por Λ). Um mapeamento é dado por uma função contínua $\Lambda(\theta)[2\pi]$. Considere as duas funções seguintes:

$$\Lambda_0(\theta) = 0 \quad (2.13)$$

e

$$\Lambda'_0(\theta) = \begin{cases} t\theta, & 0 \leq \theta < \pi \\ t(2\pi - \theta), & \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (2.14)$$

onde t é um parâmetro real entre 0 e 1. Quando variamos t continuamente (de 1 para 0), o segundo mapeamento pode ser deformado continuamente

para o primeiro, isto é bem ilustrado pelas figuras 1.b e 1.c. Estes dois mapeamentos pertencem à mesma classe homotópica.

Agora considere um outro tipo de mapeamento determinado pela expressão seguinte;

$$\Lambda_1(\theta) = \theta \quad (2.15)$$

Este também é um mapeamento contínuo $[2\pi]$, quando θ completa um círculo, Λ também completa, mas não pode ser deformado continuamente em (2.13) ou (2.14) (fig.1.b e fig.1.c). Este mapeamento não pode ser distorcido sem cortar o círculo. A razão é que em (2.15) o segundo círculo está enrolado uma vez em volta do primeiro (veja figura 1.d), enquanto em (2.13) e (2.14) ele está enrolado zero vez. Então (2.15) pertence a uma classe homotópica diferente.

O número inteiro distinguindo as duas classes é o número de enrolamento, definido por:

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Lambda}{d\theta} d\theta \quad (2.16)$$

Para a função (2.13), temos:

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0 d\theta = 0$$

Para a função (2.14), temos:

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} -t d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} (t\pi - 0 - 2\pi t + \pi t) = 0 \end{aligned}$$

fica claro que $\tilde{Q} = 0$ para as funções (2.13) e (2.14).

Para o mapeamento (2.15), temos:

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi} (2\pi) = 1$$

Note que enrolando o segundo círculo um número arbitrário de vezes geremos uma infinidade de classes de homotopia da forma:

$$\Lambda_n(\theta) = n\theta \quad (2.17)$$

figuras

\tilde{Q} toma um valor negativo quando o enrolamento é feito no sentido contrário. Este resultado leva a relação:

$$\pi_1(S_1) = Z \quad (2.18)$$

Voltando a nosso modelo sigma não linear $O(3)$, uma configuração estática com energia finita, $\phi(x)$ num espaço bidimensional pode ser classificado em setores homotópicos pelo número inteiro \tilde{Q} .

É muito interessante escrever \tilde{Q} sob forma de uma integral função de $\phi(x)$ análoga a expressão (2.16); esta expressão é:

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{\mu\nu} \Phi \cdot (\partial_\mu \Phi \times \partial_\nu \Phi) d^2x \quad (2.19)$$

onde $\mu = 1, 2$ e $\nu = 1, 2$ se referem aos índices das coordenadas espaciais.

Em vez das variáveis cartesianas Φ_a ($\sum_a \Phi_a^2 = 1$), a esfera $S_2^{(int)}$ pode ser descrita por duas variáveis ξ_1, ξ_2 , por exemplo os ângulos polares.

Uma expressão bem conhecida, que dá o elemento de arco de uma superfície esférica em função das variáveis cartesianas e polares é:

$$dS_a^{(int)} = d^2\xi \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{rs} \varepsilon_{abc} \frac{\partial \Phi_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \Phi_c}{\partial \xi_s} \right) \quad (2.20)$$

segue-se que

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{abc} \Phi_a \frac{\partial \Phi_b}{\partial X^\mu} \frac{\partial \Phi_c}{\partial X^\nu} d^2x \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{abc} \Phi_a \frac{\partial \Phi_b}{\partial \xi_r} \frac{d\xi_r}{\partial X^\mu} \frac{\partial \Phi_c}{\partial \xi_s} \frac{d\xi_s}{\partial X^\nu} d^2x \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{rs} \varepsilon_{abc} \Phi_a \frac{\partial \Phi_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \Phi_c}{\partial \xi_s} d^2\xi \end{aligned} \quad (2.21)$$

com o Jacobiano da mudança de variável $\{x_1, x_2\}$ para $\{\xi_1, \xi_2\}$ dado por:

$$\varepsilon_{rs} d^2\xi = \varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_r}{\partial X^\mu} \frac{\partial \xi_s}{\partial X^\nu} d^2x \quad (2.22)$$

Levando (2.20) em (2.21) vem:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int dS_a^{(int)} \cdot \Phi_a = \frac{1}{4\pi} \int dS^{(int)} \quad (2.23)$$

Φ_a é um vetor unitário perpendicular à superfície.

Esta classificação homotópica é válida para qualquer configuração estática com funcional energia finita; não precisa que os campos sejam soluções da equação de campo (2.7). É evidente que as soluções com energia finita obedecem a esta classificação. Em vez de procurar as soluções para um determinado setor Q vamos seguir um procedimento mais interessante. Começaremos com a desigualdade:

$$\int d^2x [(\partial_\mu \Phi \pm \varepsilon_{\mu\nu} \Phi \times \partial_\nu \Phi) \cdot (\partial_\mu \Phi \pm \varepsilon_{\mu\sigma} \Phi \times \partial_\sigma \Phi)] \geq 0 \quad (2.24)$$

Esta desigualdade é verdadeira, pois é o produto escalar de um vetor por ele mesmo. Segue então:

$$\begin{aligned} \int d^2x [(\partial_\mu \Phi) \cdot (\partial_\mu \Phi) + \varepsilon_{\mu\nu} (\Phi \times \partial_\nu \Phi) \cdot \varepsilon_{\mu\sigma} (\Phi \times \partial_\sigma \Phi)] \geq \\ \pm 2 \int d^2x [\varepsilon_{\mu\nu} \Phi \cdot (\partial_\mu \Phi \times \partial_\nu \Phi)] \end{aligned}$$

Vamos mostrar que os dois termos da esquerda são iguais. Usando a igualdade:

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C) \cdot (B \cdot D) + (A \cdot B) \cdot (C \cdot D)$$

temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\sigma} (\Phi \times \partial_\nu \Phi) \cdot (\Phi \times \partial_\sigma \Phi) \\ = \delta_{\nu\sigma} [(\Phi \cdot \Phi) (\partial_\nu \Phi \cdot \partial_\sigma \Phi) + (\Phi \cdot \partial_\nu \Phi) (\Phi \cdot \partial_\sigma \Phi)] \\ = \delta_{\nu\sigma} (\partial_\nu \Phi \cdot \partial_\sigma \Phi) \\ = (\partial_\nu \Phi) \cdot (\partial_\nu \Phi) \end{aligned}$$

Finalmente temos:

$$\begin{aligned} 2 \int d^2x (\partial_\mu \Phi) \cdot (\partial_\mu \Phi) &\geq \pm 2 \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \Phi \cdot (\partial_\mu \Phi \times \partial_\nu \Phi) \\ 4E &\geq \pm 2 \cdot 8\pi Q \\ E &\geq 4\pi |Q| \end{aligned} \quad (2.25)$$

Esta desigualdade estabelece um limite inferior da energia de qualquer configuração estática num dado setor Q .

A extremização do funcional energia estática deve ser feita em cada setor separadamente, pois a configuração, a partir de um setor dado, não pode, sob uma variação contínua, se mover para um outro setor. Em cada setor Q a energia é minimizada quando a equação (2.25) é satisfeita, isto é, a equação (2.25) também é satisfeita; o que leva a:

$$\partial_\mu \Phi = \pm \varepsilon_{\mu\nu} \Phi \times (\partial_\nu \Phi) \quad (2.26)$$

Qualquer configuração que satisfaz (2.26) tão bem quanto o vínculo (2.2) minimizará a energia E num dado setor Q e automaticamente satisfará a condição de extremo dada pela equação (2.7). Para qualquer configuração satisfazendo (2.26), temos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \partial_\mu \partial_\mu \Phi \\ &= \pm \partial_\mu (\varepsilon_{\mu\nu} \Phi \times \partial_\nu \Phi) \\ &= \pm \varepsilon_{\mu\nu} (\partial_\mu \Phi) \times (\partial_\nu \Phi) \\ &= \varepsilon_{\mu\nu} (\varepsilon_{\mu\sigma} \Phi \times \partial_\sigma \Phi) \times \partial_\nu \Phi \\ &= \delta_{\nu\sigma} [\partial_\sigma \Phi (\Phi \cdot \partial_\nu \Phi) - \Phi (\partial_\nu \Phi \cdot \partial_\sigma \Phi)] \\ &= \delta_{\nu\sigma} [-\Phi (\partial_\nu \Phi \cdot \partial_\sigma \Phi)] \\ &= -\Phi (\partial_\nu \Phi \cdot \partial_\nu \Phi) \\ &= \Phi (\Phi \cdot \nabla^2 \Phi) \end{aligned}$$

Vimos que cada campo que satisfaz a equação (2.26), satisfaz também a equação (2.7) mas a inversa não é verdadeira, isto é, podemos ter uma solução de (2.7) que não satisfaz (2.26). Estas soluções não representam um mínimo absoluto da energia no setor correspondente, mas representam um mínimo local.

Vamos lembrar que é mais fácil resolver a equação (2.26) do que a equação (2.7), pois (2.26) é uma equação diferencial de primeira ordem, enquanto (2.7) é de segunda ordem.

Os valores permitidos de Φ sujeito ao vínculo $\Phi \cdot \Phi = 1$ formam uma superfície esférica de raio 1, $S_2^{(int)}$. Vamos projetar estereograficamente a superfície esférica sobre um plano. As variáveis ω_1 e ω_2 sobre o plano são relacionadas às variáveis Φ_a por:

$$\omega_1 = \frac{2\Phi_1}{1 - \Phi_3}$$

e

$$\omega_2 = \frac{2\Phi_2}{1 - \bar{\Phi}_3} \quad (2.27)$$

Note que o plano onde é feita a projeção é paralelo ao plano $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ e contém o polo sul. Vamos construir também a quantidade complexa seguinte:

$$\begin{aligned} \omega = \omega_1 + i\omega_2 &= \frac{2\Phi_1}{1 - \bar{\Phi}_3} + \frac{i2\Phi_2}{1 - \bar{\Phi}_3} \\ &= \frac{2(\Phi_1 + i\Phi_2)}{1 - \bar{\Phi}_3} = \frac{2\Phi}{1 - \bar{\Phi}_3} \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \partial_1 \omega = \frac{\partial \omega}{\partial X_1} &= \frac{2[(1 - \bar{\Phi}_3)(\partial_1 \Phi) + \Phi(\partial_1 \bar{\Phi}_3)]}{(1 - \bar{\Phi}_3)^2} \\ &= \frac{2}{(1 - \bar{\Phi}_3)^2} (\partial_1 \Phi + \Phi \vec{\partial}_1 \bar{\Phi}_3) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Da equação (2.26), temos:

$$\begin{aligned} \partial_1 \Phi &= \mp i \Phi \vec{\partial}_2 \bar{\Phi}_3 \\ \partial_2 \Phi &= \pm i \Phi \vec{\partial}_1 \bar{\Phi}_3 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Substituindo (2.29) em (2.28), vem:

$$\partial_1 \omega = \mp i \partial_2 \omega \quad (2.30)$$

De onde temos :

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial X_1} + i \frac{\partial \omega_2}{\partial X_1} = \mp i \frac{\partial \omega_1}{\partial X_2} \pm \frac{\partial \omega_2}{\partial X_2}$$

e finalmente igualando as partes reais e imaginárias temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial X_1} &= \pm \frac{\partial \omega_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial X_1} &= \mp \frac{\partial \omega_1}{\partial X_2} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Qualquer função analítica $\omega(Z)$ ou $\omega(Z^*)$ com $Z = x_1 + ix_2$, satisfaz a equação (2.26) e conseqüentemente a equação do campo, quando escrita em função das variáveis originais Φ_a e x .

Quando ω for uma função analítica de Z , uma maneira muito interessante de escrever a energia E e o número de enrolamento Q é escrevê-los em função de ω . Assim temos:

$$\begin{aligned} E &= \int d^2x \frac{|\frac{d\omega}{dZ}|^2}{(1 + \frac{|\omega|^2}{4})^2} \\ Q &= \frac{E}{4\pi} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Para um dado número de enrolamento Q positivo, uma solução típica é dada por:

$$\omega(Z) = \left(\frac{Z - Z_0}{\lambda}\right)^n \quad (2.33)$$

n é um inteiro positivo, λ é um número real e Z_0 é um número complexo.

Na equação (2.33), ω representa um ponto no espaço de campo, enquanto Z é um ponto no espaço de coordenadas. Para um dado ω vimos claramente que a equação (2.33) admite n raízes para Z ; então Q corresponde a um n setor. Verificamos isso substituindo (2.33) em (2.32), temos então:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \frac{n^2 |Z - Z_0|^{2n-2} \lambda^{2n}}{(\lambda^{2n} + \frac{1}{4} |Z - Z_0|^{2n})^2} \quad (2.34)$$

Fazendo $Z - Z_0 = \rho e^{i\theta}$ e $d^2x = \rho d\rho d\theta$ a integração dá: $Q = n$

De onde

$$E = 4\pi Q = 4\pi n \quad (2.35)$$

A energia E é bem finita.

Vamos nos interessar agora no caso $n = 1$ (solução clássica com energia mínima), isto é:

$$\omega(Z) = \frac{Z - Z_0}{\lambda} \quad (2.36)$$

Neste caso temos quatro modos de frequências zero da solução clássica. Z_0 corresponde a 2 modos de translação e $\lambda = a \exp(i\theta)$ corresponde a uma rotação e a uma dilatação da configuração clássica. Cada modo da frequência está associado à simetria do sóliton. Por exemplo, considerando θ , vimos que os campos de spin (Φ_1, Φ_2) são invariantes perante uma combinação espacial

de rotação (em torno do centro do sólito) e de transformação interna (U_1). É óbvio que para um θ arbitrário, $\Phi_i(\vec{x}) = \Phi_i^\theta(\vec{x})$, $i=1, 2$ pode ser escrito como:

$$\Phi_i^\theta(\vec{x}) = R_{ij}\Phi_j^{\theta=0}(\vec{x}) = \Phi_i^{\theta=0}(R\vec{x}) \quad (2.37)$$

$R_{11} = R_{22} = \cos \theta$, $R_{12} = -R_{21} = \sin \theta$. Em função de W , a condição de invariância leva a:

$$[(Z^* - Z_0^*)\frac{\partial}{\partial Z^*} - (Z - Z_0)\frac{\partial}{\partial Z}]W + W = 0 \quad (2.38)$$

Agora estamos interessados em saber se estas simetrias acima são conservadas no caso de um sólito quântico. Na teoria quântica designaremos por $\Psi_{Z_0, \lambda}$ o estado quântico que atinge um pico em redor de $n = 1$, estado fundamental clássico, e associado a um dado Z_0 e λ . Classicamente os estados fundamentais são degenerados, mas esperamos ter um único estado fundamental quântico que é uma superposição dos $\Psi_{Z_0, \lambda}$. Nós alegaremos que isso não é o caso. Contudo, vamos supor que tem estados quânticos degenerados que são parametrizados por λ . Já que estes graus de liberdade ligam classicamente estados fundamentais degenerados, eles podem ser incluídos em qualquer aproximação semi-clássica da teoria quântica. No procedimento vamos considerar que Z_0 e λ dependem do tempo e substituímo-los no lagrangeano para fazer as integrações espaciais. Obtemos:

$$\begin{aligned} l[\Phi] &= \int d^2x L(\Phi, \partial\Phi) = 8 \int d^2x \frac{(\partial^\mu W^i)^2}{(4 + |W|^2)^2} \\ &= 2\pi|\dot{Z}_0|^2 + \frac{I[\Phi]}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\mu[\Phi]}{2}\dot{a}^2 - 4\pi \end{aligned} \quad (2.39)$$

A equação (2.39) mostra que a massa inercial do sólito dada por $M = 4\pi$ é finita. É fácil verificar que os momentos $I[\Phi]$ e $\mu[\Phi]$ são ambos logicamente divergentes. Integando até o limite superior R , obtemos:

$$\frac{I[\Phi]}{a^2} = \mu[\Phi] = 16\pi \ln(1 + \frac{R^2}{4a^2}) - \frac{R^2}{4a^2 + R^2} \quad (2.40)$$

O fato do momento $I[\Phi]$ ser infinito é visto pela substituição no momento angular conservado J :

$$J = \int d^2x \varepsilon_{ij} x_i \partial_j \Phi_a \dot{\Phi}_a \quad (2.41)$$

Para a parte rotacional do s3l3iton $\dot{\theta} \neq 0$, J 3 divergente. Similarmente substituindo a express3o dilatacional do s3l3iton no gerador de dilata33o, obtemos:

$$M = \int d^2x x_i \partial_i \Phi^a \dot{\Phi}^a \quad (2.42)$$

Assim o resultado 3 divergente para $\dot{a} \neq 0$.

O acima mencionado mostra que uma energia finita 3 necess3ria para girar um s3l3iton cl3ssico r3gido. Do mesmo modo, uma energia infinita 3 necess3ria para dilatar um s3l3iton e ainda conservar a forma dada em (2.36). Agora vamos discutir o sistema qu4ntico correspondente. Vamos perturbar a solu3o cl3ssica para obter v3rias configura33es de campo virtual $\tilde{\Phi}$. As configura33es $\tilde{\Phi}$ associadas a valores finitos dos momentos $I[\tilde{\Phi}]$ e $\mu[\tilde{\Phi}]$ podem permitir qu4nticamente um tunelamento entre os v3rios estados fundamentais degenerados da teoria.

Foi verificado que se o acima dito 3 o caso da classe de configura33es que s3o rotacionalmente invariantes (isto 3 que satisfaz a equa3o (2.38)), a solu3o geral de (2.38) 3:

$$W(Z, Z^*) = f\left(\left|\frac{Z - Z_0}{\lambda}\right|\right) \frac{Z - Z_0}{\lambda} \quad (2.43)$$

onde f 3 uma fun3o real. Somente para o caso $f = \text{constante}$, W 3 uma fun3o anal3tica e ent3o a energia 3 m3nima para o setor $n = 1$.

Considere agora um sistema determinado pelo Lagrangeano seguinte:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^i \partial_\mu \Phi^i + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^z \partial_\mu \Phi^z, \quad (2.44)$$

onde $i = 1, 2$ ou x, y e $\mu = it, x, y$

Vamos fazer as passagens matem3ticas em todos os detalhes. Geralmente estas passagens s3o omitidas em artigos, mas o dom3nio da 3lgebra 3 importante se queremos aplicar o modelo σ em casos mais complexos.

Assim do v3nculo(2.2), temos:

$$\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 = 1 \quad (2.45)$$

$$\Phi_z^2 = 1 - \Phi_x^2 - \Phi_y^2$$

Derivando os dois membros da igualdade em rela3o a μ temos:

$$\begin{aligned}
2\Phi_z\partial_\mu\Phi_z &= -2\Phi_x\partial_\mu\Phi_x - 2\Phi_y\partial_\mu\Phi_y \\
\Phi_z\partial_\mu\Phi_z &= -(\Phi_x\partial_\mu\Phi_x + \Phi_y\partial_\mu\Phi_y) = -\Phi_i\partial_\mu\Phi_i
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\Phi_z\partial_\mu\Phi_z &= \frac{\Phi_z^2}{\Phi_z^2}(\partial_\mu\Phi_z\partial_\mu\Phi_z) \\
&= \frac{(\Phi_x\partial_\mu\Phi_x + \Phi_y\partial_\mu\Phi_y)^2}{\Phi_z^2} \\
&= \frac{(\Phi_x\partial_\mu\Phi_x + \Phi_y\partial_\mu\Phi_y)^2}{\Phi_z^2} \\
&= \frac{1}{\Phi_z^2}(\Phi_i\partial_\mu\Phi_i)(\Phi_j\partial_\mu\Phi_j) \\
&= \frac{\Phi_i\Phi_j(\partial_\mu\Phi_i)(\partial_\mu\Phi_j)}{1 - \Phi_k\Phi_k}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Logo

$$L = \frac{1}{2}[\partial_\mu\Phi_i\partial_\mu\Phi_i + \frac{\Phi_i\Phi_j}{1 - \Phi_k\Phi_k}\partial_\mu\Phi_i\partial_\mu\Phi_j] \tag{2.48}$$

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\partial_\mu\Phi_i\partial_\mu\Phi_j, \quad g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\Phi_i\Phi_j}{1 - \Phi_k\Phi_k} \tag{2.49}$$

Sabemos que $W_i = \frac{2\Phi_i}{1-\Phi_z} \Rightarrow \Phi_i = \frac{1}{2}(1 - \Phi_z)W_i$

Vem:

$$L = \frac{1}{2}[\partial_\mu\Phi_i\partial_\mu\Phi_i + \frac{(1 - \Phi_z)^2}{4\Phi_z^2}W_iW_j\partial_\mu\Phi_i\partial_\mu\Phi_j] \tag{2.50}$$

$$W_1^2 + W_2^2 = \frac{4(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)}{(1 - \Phi_z)^2} = \frac{4(1 - \Phi_z^2)}{(1 - \Phi_z)^2} = \frac{4(1 + \Phi_z)}{1 - \Phi_z} = W_iW_i \tag{2.51}$$

$$W_k\partial_\mu W_k = \frac{4\partial_\mu\Phi_z}{(1 - \Phi_z)^2} \Rightarrow \partial_\mu\Phi_z = \frac{1}{4}(1 - \Phi_z)^2W_k\partial_\mu W_k \tag{2.52}$$

Das expressões (2.27), temos:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \Phi_i &= \frac{1}{2}(1 - \Phi_z)\partial_\mu W_i - \frac{W_i}{2}\partial_\mu \Phi_z \\
&= \frac{1}{2}(1 - \Phi_z)\partial_\mu W_i - \frac{W_i}{8}(1 - \Phi_z)^2 W_k \partial_\mu W_k \\
(\partial_\mu \Phi_i)(\partial_\mu \Phi_i) &= \frac{1}{4}(1 - \Phi_z)^2 (\partial_\mu W_i)(\partial_\mu W_i) + \frac{1}{64}(1 - \Phi_z)^4 W_i W_i W_k W_j (\partial_\mu W_k)(\partial_\mu W_j) \\
&\quad - \frac{1}{8}(1 - \Phi_z)^3 W_i W_k (\partial_\mu W_i)(\partial_\mu W_k)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}
T &= (\partial_\mu \Phi_i)(\partial_\mu \Phi_i) + (\partial_\mu \Phi_z)(\partial_\mu \Phi_z) \\
&= \frac{1}{4}(1 - \Phi_z)^2 \left[1 + \frac{(1 - \Phi_z)^2}{16} W_i W_i W_k W_j + \frac{1}{4}(1 - \Phi_z)^2 W_k W_j \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(1 - \Phi_z) W_i W_k \right] \partial_\mu W \partial_\mu W
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Substituindo $\frac{(1-\Phi_z)}{4}W_iW_i$ por $1 + \Phi_z$ na expressão acima, vem:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{4}(1 - \Phi_z)^2 \left[1 + \frac{(1 - \Phi_z)(1 + \Phi_z)}{4} W_k W_j + \frac{(1 - \Phi_z)^2}{4} W_k W_j \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(1 - \Phi_z) W_i W_k \right] \partial_\mu W \partial_\mu W \\
&= \frac{1}{4}(1 - \Phi_z)^2 \left[1 + \frac{1}{4}(1 + \Phi_z - \Phi_z - \Phi_z^2 + 1 - 2\Phi_z + \Phi_z^2) W_k W_j \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(1 - \Phi_z) W_i W_k \right] \partial_\mu W \partial_\mu W \\
&= \frac{1}{4}(1 - \Phi_z)^2 \left[1 + \frac{1}{2}(1 - \Phi_z) W_k W_j - \frac{1}{2}(1 - \Phi_z) W_i W_k \right] \partial_\mu W \partial_\mu W \\
&= \frac{1}{4}(1 - \Phi_z)^2 \partial_\mu W^i \partial_\mu W^i
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{(1 - \Phi_z)^2}{4} &= \frac{1}{\left(\frac{2}{1 - \Phi_z}\right)^2} = \left(\frac{1 - \Phi_z + 1 + \Phi_z}{1 - \Phi_z}\right)^{-2} \\
&= \left[1 + \left(\frac{1 + \Phi_z}{1 - \Phi_z}\right) \right]^{-2} = \left(1 + \frac{W_i W_i}{4} \right)^{-2}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

De onde

$$L = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}g_{ij}(\omega)\partial_\mu W^i\partial_\mu W^j, \quad g_{ij}(\omega) = \left(1 + \frac{W_i W_i}{4}\right)^{-2} \quad (2.57)$$

Podemos escrever as variáveis complexas W como:

$$W = W_1 + iW_2 \quad \text{e} \quad W^* = W_1 - iW_2$$

$$WW^* = |W|^2 = W_1^2 + W_2^2$$

Temos então:

$$L = \frac{16}{2} \frac{\partial_\mu W \partial_\mu W^*}{(4 + WW^*)^2} = \frac{8(\partial_\mu W_i)^2}{(4 + |W|^2)^2} \quad (2.58)$$

Agora vamos escrever W na forma:

$$W(Z) = \frac{Z - Z_0}{\lambda}, \quad \text{com} \quad \lambda = a \exp(i\theta) \quad \text{e} \quad Z = x + iy$$

$$Z_0 = Z_0(t), \quad \lambda = a(t) \exp(i\theta(t))$$

Vem:

$$\begin{aligned} W &= \frac{Z - Z_0}{a \exp(i\theta)} \\ W^* &= \frac{Z^* - Z_0^*}{a \exp(-i\theta)} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Calculando as derivadas temporais, temos:

$$\begin{aligned} \partial_t W &= \frac{\dot{Z} - \dot{Z}_0}{a \exp(i\theta)} - \frac{W}{a}(\dot{a} + ai\dot{\theta}) \\ &= \frac{1}{a}[(\dot{x} + iy - \dot{x}_0 - iy_0)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &\quad - (W_1 + iW_2)(\dot{a} + ia\dot{\theta})] \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t W)(\partial_t W^*) &= \frac{1}{a^2}[(\dot{x} - \dot{x}_0)^2 \cos\theta - (\dot{y} - \dot{y}_0) \sin\theta - W_1 \dot{a} + W_2 a \dot{\theta}]^2 \\ &\quad + [(\dot{y} - \dot{y}_0) \cos\theta + (\dot{x} - \dot{x}_0) \sin\theta - W_1 a \dot{\theta} + W_2 \dot{a}]^2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

As integrais dos termos ímpares são nulas, assim fazendo a integração, só interessam os termos pares, isto é:

$$T' = \frac{1}{a^2}[(\dot{x} - \dot{x}_0)^2 + (\dot{y} - \dot{y}_0)^2 + (W_1^2 + W_2^2)\dot{a}^2 + (W_1^2 + W_2^2)a^2\dot{\theta}^2] \quad (2.62)$$

$(\partial_i W)(\partial_i W^*)$ corresponde à energia (ou melhor -E).

$$W_1 = \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{a} \quad W_2 = \frac{y \cos \theta - x \sin \theta}{a}$$

$$\begin{aligned} W_1^2 + W_2^2 &= \frac{1}{a^2}[x^2 \cos^2 \theta + 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta + y^2 \cos^2 \theta - 2xy \cos \theta \sin \theta + x^2 \sin^2 \theta] \\ &= \frac{1}{a^2}[x^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + y^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)] \\ &= \frac{x^2 + y^2}{a^2} \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} L(\Phi) &= 8 \int \frac{d^2x (\partial_\mu W^i)^2}{[4 + (\frac{x^2+y^2}{a^2})]^2} \\ &= 8a^4 \int \frac{d^2x (\partial_\mu W^i)^2}{(4a^2 + x^2 + y^2)^2} \\ &= 8a^2 \int d^2x \frac{|\dot{Z} - \dot{Z}_0|^2 + (W_1^2 + W_2^2)(\dot{a}^2 + a^2\dot{\theta}^2)}{(4a^2 + x^2 + y^2)^2} - E \end{aligned} \quad (2.64)$$

Substituindo (2.63) em (2.64) e substituindo r^2 por $x^2 + y^2$, vem:

$$\begin{aligned} L(\Phi) &= 8a^2 |\dot{Z} - \dot{Z}_0|^2 \int_0^\infty \frac{2\pi r dr}{(4a^2 + r^2)^2} \\ &\quad + 8(\dot{a}^2 + a^2\dot{\theta}^2) \int_0^R \frac{2\pi r^3 dr}{(4a^2 + r^2)^2} - E \end{aligned} \quad (2.65)$$

Vamos resolver as integrais acima, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{2\pi r dr}{(4a^2 + r^2)^2} &= \pi \int_0^\infty \frac{du}{(4a^2 + u)^2} \\ &= \pi \int_{4a^2}^\infty y^{-2} dy = \frac{\pi}{4a^2} \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^R \frac{2\pi r^3 dr}{(4a^2 + r^2)^2} &= \pi \int_0^R \frac{udu}{(4a^2 + u)^2} \\
&= \pi \int_{4a^2}^{4a^2+R^2} \frac{(y - 4a^2)dy}{y^2} \\
&= \pi \left[\ln y + \frac{4a^2}{y} \right]_{4a^2}^{4a^2+R^2} \\
&= \pi \left[\ln\left(\frac{4a^2 + R^2}{4a^2}\right) - \frac{R^2}{4a^2 + R^2} \right] \quad (2.67)
\end{aligned}$$

Finalmente substituindo os resultados das integrais (2.66) e (2.67) na expressão (2.64), temos:

$$L(\Phi) = 2\pi|\dot{Z} - \dot{Z}_0|^2 + 8\pi(\dot{a}^2 + a^2\dot{\theta}^2) \left[\ln\left(\frac{4a^2 + R^2}{4a^2}\right) - \frac{R^2}{4a^2 + R^2} \right] - E \quad (2.68)$$

que é a equação (2.39) com $E = 4\pi$.

Capítulo 3

Modelo sigma não linear: caso anisotrópico.

3.1 Introdução

É bem conhecido que o modelo σ não linear em duas dimensões, em várias circunstâncias, é similar a uma teoria de gauge não abeliana em quatro dimensões. Eles têm como soluções da equação do campo, pseudopartículas.

Também pode se notar que o modelo σ não linear anisotrópico é um importante modelo na física do estado sólido. É de interesse dos físicos teóricos da matéria condensada, não somente como modelo ferromagnético clássico em duas dimensões, mas também como modelo antiferromagnético quântico. A natureza topológica deste modelo foi estudada por *Belavin e Poliakov*⁽⁵⁾ que obteram estados metaestáveis não triviais produzindo energia mínima local. Estas soluções estáveis com energia finita são particularmente relevantes na mecânica estática de sistemas da matéria condensada. Como foi mostrado por *T. Watanabe e H. Otsu*⁽³⁾, o modelo σ anisotrópico contém um mínimo clássico não trivial. O modelo anisotrópico é uma generalização do modelo σ não linear que estudamos anteriormente. Esta teoria numa dimensão temporal e duas dimensões espaciais é definida pelo lagrangeano seguinte:

$$L = \frac{1}{2}J \int [(\partial_0 S)^2 - (\partial_\mu S)^2 - \lambda(\partial_\mu S_3)^2] d^2x \quad (3.1)$$

com o vínculo não linear

$$\sum_{a=1}^3 S_a^2 = 1 \quad (3.2)$$

onde $\mu = 1, 2$; $\partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$; S designa o campo de spin.

Neste caso J é a constante de troca, λ uma anisotropia e c é a velocidade da onda de spin. Dependendo do parâmetro de anisotropia, o lagrangeano (3.1) reproduz diversos modelos. Por exemplo para $\lambda = 0$, temos o caso isotrópico; para $-1 \leq \lambda \leq 0$, temos um comportamento do tipo XY e para $\lambda > 0$, o comportamento é do tipo Ising.

3.2 As pseudopartículas no modelo O(3) anisotrópico

Vamos considerar um sóliton, solução da equação do movimento. Para este fim, primeiro pegamos a parte estática da densidade lagrangeana. Usando o vínculo (3.2), podemos escrever a densidade lagrangeana como:

$$L = \frac{1}{2} J \left[\sum_{i=1}^2 (\partial_\mu S_i)(\partial_\mu S_i) + \frac{(1 + \lambda) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 S_i S_j (\partial_\mu S_i)(\partial_\mu S_j)}{1 - \sum_{i=1}^2 S_i S_i} \right] \quad (3.3)$$

Da equação (3.3) é evidente que as soluções sólitons, isto é, aquelas com energia não nula mas finita devem satisfazer:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S(\vec{r}) \longrightarrow \text{constante} \quad (3.4)$$

Então seria conveniente introduzir uma nova variável de campo:

$$W = \frac{S_1 + iS_2}{1 + S_3} \quad (3.5)$$

obtido do campo (S_1, S_2, S_3) , tomando valores na esfera unitária S^2 por projeção estereográfica. Podemos escrever $W = W_1 + iW_2$, onde W_1 e W_2 definem o plano no espaço interno onde S_2 foi projetada estereograficamente. Em função destas variáveis, a densidade lagrangeana fica:

$$L = \frac{1}{2} J \sum_{ij} g_{ij}(W) \partial_\mu W_i \partial_\mu W_j \quad i, j = 1, 2 \quad (3.6)$$

onde a métrica $g_{ij}(W)$ é dada por:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 4(1 + |W|^2)^{-2} [1 + 4\lambda W_1^2 (1 + |W|^2)^{-2}], \\ g_{22} &= 4(1 + |W|^2)^{-2} [1 + 4\lambda W_2^2 (1 + |W|^2)^{-2}], \\ g_{12} &= g_{21} = 16\lambda W_1 W_2 (1 + |W|^2)^{-4}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Vimos que a anisotropia λ deforma a métrica usual sobre a esfera (caso isotrópico)

$$g_{ij}(W) = 4\delta_{ij}(1 + |W|^2)^{-2} \quad (\lambda = 0) \quad (3.8)$$

Considerando que $W = W_1 + iW_2$, podemos reescrever (3.3) como:

$$L = \frac{1}{2}J \left\{ \frac{4|\partial_\mu W|^2}{(1 + |W|^2)^2} + \frac{4\lambda[W(\partial_\mu \bar{W}) + \bar{W}(\partial_\mu W)^2]}{(1 + |W|^2)^4} \right\} \quad (3.9)$$

e a equação (3.1) pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned} L &= 2J \int \frac{|\partial_0 W|^2}{(1 + |W|^2)^2} d^2x - 8J \int \frac{|\partial_{\bar{Z}} W|^2}{(1 + |W|^2)^2} \left[1 + \frac{2\lambda|W|^2}{(1 + |W|^2)^2} \right] d^2x \\ &= -8\lambda J \int \frac{[W^2(\partial_Z \bar{W})(\partial_{\bar{Z}} \bar{W}) + (\bar{W})^2(\partial_Z W)(\partial_{\bar{Z}} W)]}{(1 + |W|^2)^4} d^2x - QAJ \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde usamos $\partial_Z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar{Z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, do mesmo modo, $Z = x + iy$, $\bar{Z} = x - iy$. Na equação (3.10) Q é o número topológico dado por:

$$Q = \frac{4}{A} \int \frac{[(\partial_Z W)(\partial_{\bar{Z}} \bar{W}) - (\partial_{\bar{Z}} W)(\partial_Z \bar{W})]}{(1 + |W|^2)^2} \left[1 + \frac{2\lambda|W|^2}{(1 + |W|^2)^2} \right] d^2x \quad (3.11)$$

Ele mede o número de vezes que a esferóide interna de área A é atravessada no mapeamento. Está área é: $A = \frac{4}{3}\pi(3 + \lambda)$

Estamos interessados antes de tudo em achar soluções estáticas com energia finita (sólitons) das equações de campo. Da equação (3.10) vimos que o valor mínimo da energia dos campos tendo como número topológico $Q \geq 0$ é igual a:

$$E_c = QAJ. \quad (3.12)$$

Este valor é atingido por campos satisfazendo $\partial_{\bar{Z}} W = 0$. Segue-se que o campo é dado por

$$W_c(Z) = \frac{P_0(Z)}{P_1(Z)} \quad (3.13)$$

onde $P_0(Z)$, $P_1(Z)$ são polinômios; o número topológico Q do sóliton (3.13) assume somente valores inteiros e é igual ao grau máximo de $P_0(Z)$, $P_1(Z)$.

É conveniente escrever o sóliton tendo número topológico Q , como:

$$W_c(Z) = \prod_i \left[\frac{Z - Z_i}{\delta} \right]^{n_i} \prod_j \left[\frac{\delta}{Z - Z_j} \right]^{n_j}, \quad (3.14)$$

onde δ , Z_i e Z_j são parâmetros complexos.

Da equação (3.12), vimos que a energia clássica destas configurações de sólitons estáticos depende somente do número topológico Q . Então no nível clássico, as pseudopartículas não interagem. Isto é uma consequência do fato da configuração de sóliton múltiplo ser uma solução exata das equações do movimento, e $E_N = NE_1 = NAJ$.

As coordenadas estereográficas nos permitem generalizar as soluções estáticas. Num outro sistema de coordenadas, uma tal generalização seria uma tarefa muito difícil. Embora a energia do sóliton clássico depende do parâmetro anisotrópico, a sua configuração (3.13) em coordenadas estereográficas não depende de λ . Num outro sistema de coordenada estas soluções não são tão simples. Geralmente as pseudopartículas têm os seus spins apontados em todas as direções enquanto r varia, e esta configuração depende de λ .

O campo de spin destas soluções foi encontrado por *Watanabe e Otsu*⁽³⁾. Ele foi encontrado pela especificação de como a função mapeamento depende de $\theta(r)$ e $\Phi(r)$, que são os dois campos escalares usados para parametrizar S : $S(\vec{r}) = (\sin \theta \cos \Phi, \sin \theta \sin \Phi, \cos \theta)$. Qualitativamente, para os casos de XY-like cada estado metaestável classificado pelo número topológico Q , carrega Q vórtices e Q antivórtices.

Usando o grau máximo $\sum m_i > \sum n_j = Q$, considerando agora o mais simples não trivial caso de número topológico, isto é, $m_1 = 1$, $m_i = 0$, $i > 1$, $n_j = 0$, temos:

$$W_c(Z) = \frac{Z - Z_1}{\delta} \quad (3.15)$$

Os parâmetros complexos δ e Z_1 se referem ao tamanho e à posição da solução (sóliton). A magnitude de δ fornece a extensão do sóliton, enquanto a fase de δ dá a orientação rotacional da configuração do sóliton. Como exemplo, para $\lambda = 1$ (tipo XY), o campo de spin, com número topológico $Q = 1$, é dado por:

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \arctan \left[\frac{y + |\delta|}{x} \right] - \arctan \left[\frac{y - |\delta|}{x} \right], \\ \theta(r) &= \arccos \frac{2y|\delta|^{\frac{1}{2}}}{\{|y|[x^2 + (|y| + |\delta|^2)]\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde escolhemos $Z_1 = 0$ para a posição do sólito e $\frac{\pi}{2}$ para sua fase.

A configuração (3.16) do sólito parece um par vortex-antivortex com o vortex em $(0, -|\delta|)$ e o antivortex em $(0, |\delta|)$. A distância entre os centros vortex-antivortex é $R = 2|\delta|$, mas a energia desta configuração é simplesmente:

$$E_c = \frac{8}{3}\pi J, \quad (3.17)$$

É somente no caso clássico que o vortex e o antivortex não interagem neste modelo. O fato da solução existir para um arbitrário δ e Z_1 e o fato de nem Q , nem E_c depender destas constantes são uma consequência da escala e da invariância translacional do lagrangeano (3.1). Então cada pseudopartícula pode ter um tamanho arbitrariamente grande, devido a invariância da escala.

As configurações múltiplos de sólito(e antisólito), obtidas trocando Z por \bar{Z} , discutidas acima, são soluções exatas com energia finita das equações do movimento.

Agora considere o lagrangeano (3.1), como fizemos no modelo isotrópico, faremos todas as passagens matemáticas a fim de comparar os dois casos. Do vínculo (3.2), temos:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1 \quad (3.18)$$

$$S_3^2 = 1 - S_1^2 - S_2^2$$

Derivando os dois membros da igualdade em relação a μ , temos;

$$2S_3\partial_\mu S_3 = -2(S_1\partial_\mu S_1 + S_2\partial_\mu S_2)$$

$$\begin{aligned} S_3\partial_\mu S_3 &= -S_i\partial_\mu S_i \quad i = 1, 2 & (3.19) \\ \partial_\mu S_3\partial_\mu S_3 &= \frac{S_3^2}{S_3^2}\partial_\mu S_3\partial_\mu S_3 \\ &= \frac{(S_3\partial_\mu S_3)(S_3\partial_\mu S_3)}{S_3^2} \\ &= \frac{(S_i\partial_\mu S_i)(S_j\partial_\mu S_j)}{S_3^2} \\ &= \frac{S_i S_j \partial_\mu S_i \partial_\mu S_j}{1 - S_k S_k} & (3.20) \end{aligned}$$

Vamos fazer a seguinte mudança de variável:

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{2S_i}{1 - S_3}, \\ \Rightarrow S_i &= \frac{1}{2}(1 - S_3)W_i \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} W_1^2 + W_2^2 &= \frac{4S_1^2}{(1 - S_3)^2} + \frac{4S_2^2}{(1 - S_3)^2} \\ &= 4 \frac{S_1^2 + S_2^2}{(1 - S_3)^2} = 4 \frac{(1 - S_3^2)}{(1 - S_3)^2} \\ W_k W_k &= 4 \frac{(1 + S_3)}{(1 - S_3)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Diferenciando a equação (3.22) temos:

$$\begin{aligned} 2W_k \partial_\mu W_k &= 4 \frac{\partial_\mu S_3 (1 - S_3) + (\partial_\mu S_3 (1 - S_3))}{(1 - S_3)^2} = 4 \frac{2\partial_\mu S_3}{(1 - S_3)^2} \\ W_k \partial_\mu W_k &= 4 \frac{\partial_\mu S_3}{(1 - S_3)^2} \\ \Rightarrow \partial_\mu S_3 &= \frac{1}{4}(1 - S_3)^2 W_k \partial_\mu W_k \end{aligned} \quad (3.23)$$

A equação (3.21) leva a:

$$\begin{aligned} \partial_\mu S_i &= \frac{1}{2}(1 - S_3)\partial_\mu W_i - \frac{W_i}{2}\partial_\mu S_3 \\ &= \frac{1}{2}(1 - S_3)\partial_\mu W_i - \frac{W_i}{8}(1 - S_3)^2 W_k \partial_\mu W_k \\ \partial_\mu S_i \partial_\mu S_i &= \frac{1}{4}(1 - S_3)^2 (\partial_\mu W_i)(\partial_\mu W_i) - \frac{(1 - S_3)^3}{8} W_i W_k \partial_\mu W_i \partial_\mu W_k \\ &+ \frac{1}{64}(1 - S_3)^4 W_i W_i W_k W_j \partial_\mu W_j \partial_\mu W_k \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\partial_0 S_i = -\frac{1}{2}W_i \partial_0 S_3 + \frac{1}{2}(1 - S_3)\partial_0 W_i \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
(\partial_0 S_i)(\partial_0 S_i) &= \frac{1}{4}(\partial_0 S_3)^2 W_i W_i + \frac{1}{4}(1 - S_3)^2 \partial_0 W_i \partial_0 W_i - \frac{1}{2}(1 - S_3) W_i \partial_0 S_3 \partial_0 W_i \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{16} (1 - S_3)^4 W_i W_i W_j W_k \partial_0 W_j \partial_0 W_k + \\
&+ \frac{1}{4} (1 - S_3)^2 \partial_0 W_i \partial_0 W_i - \frac{1}{8} (1 - S_3)^3 W_i W_k \partial_0 W_i \partial_0 W_k \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Seja $T = (\partial_0 S)^2 - (\partial_\mu S)^2 - \lambda(\partial_\mu S_3)^2$. Substituindo (3.27), (3.24) e (3.23) em T temos:

$$\begin{aligned}
T &= (\partial_0 S)^2 - (\partial_\mu S)^2 - \lambda(\partial_\mu S_3)^2 \\
&= \frac{1}{64} (1 - S_3)^4 W_i W_i W_j W_k \partial_0 W_j \partial_0 W_k + \frac{1}{4} (1 - S_3)^2 \partial_0 W_i \partial_0 W_i \\
&- \frac{1}{8} (1 - S_3)^3 W_i W_k \partial_0 W_i \partial_0 W_k + \frac{1}{16} (1 - S_3)^4 W_k W_j \partial_0 W_k \partial_0 W_j \\
&- \frac{1}{64} (1 - S_3)^4 W_i W_i W_j W_k \partial_\mu W_j \partial_\mu W_k - \frac{1}{4} (1 - S_3)^2 \partial_\mu W_i \partial_\mu W_i \\
&+ \frac{1}{8} (1 - S_3)^3 W_i W_k \partial_\mu W_i \partial_\mu W_k - \frac{1}{16} (1 - S_3)^4 W_k W_j \partial_\mu W_k \partial_\mu W_j \\
&- \frac{\lambda}{16} (1 - S_3)^4 W_k W_j \partial_\mu W_k \partial_\mu W_j \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Substituído $\frac{1}{4}(1 - S_3)W_i W_i$ por $(1 + S_3)$ e colocando em evidência $\frac{1}{4}(1 - S_3)^2$ vem:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{4} (1 - S_3)^2 \left\{ \frac{1}{4} (1 - S_3) (1 + S_3) W_j W_k \partial_0 W_j \partial_0 W_k + \partial_0 W_i \partial_0 W_i \right. \\
&- \frac{1}{2} (1 - S_3) W_i W_k \partial_0 W_i \partial_0 W_k + \frac{1}{4} (1 - S_3)^2 W_k W_j \partial_0 W_k \partial_0 W_j \\
&- \frac{1}{4} (1 - S_3) (1 + S_3) W_j W_k \partial_\mu W_j \partial_\mu W_k - \partial_\mu W_i \partial_\mu W_i \\
&+ \frac{1}{2} (1 - S_3) W_i W_k \partial_\mu W_i \partial_\mu W_k - \frac{1}{4} (1 - S_3)^2 W_k W_j \partial_\mu W_k \partial_\mu W_j \\
&\left. - \frac{\lambda}{4} (1 - S_3)^2 W_k W_j \partial_\mu W_k \partial_\mu W_j \right\} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

De onde temos:

$$\begin{aligned}
T = \frac{1}{4}(1 - S_3)^2 & \left[\left\{ \frac{1}{4}(1 - S_3^2 + 1 - 2S_3 + S_3^2)W_jW_k + 1 - \frac{1}{2}(1 - S_3)W_iW_k \right\} \partial_0 W \partial_0 W \right. \\
& + \left\{ -\frac{1}{4}(1 - S_3^2 + 1 - 2S_3 + S_3^2 + \lambda - 2\lambda S_3 + \lambda S_3^2)W_kW_j \right. \\
& \left. \left. - 1 + \frac{1}{2}(1 - S_3)W_iW_k \right\} \partial_\mu W_i \partial_\mu W_k \right] \quad (3.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T & = \frac{1}{4}(1 - S_3)^2 \left[\left\{ \frac{1}{2}(1 - S_3)W_jW_k + 1 \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2}(1 - S_3)W_iW_k \right\} \partial_0 W \partial_0 W + \left\{ +\frac{1}{2}(1 - S_3)W_iW_k \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2}(1 - S_3)W_jW_k - \frac{1}{4}(\lambda - 2\lambda S_3 + \lambda S_3^2)W_jW_k - 1 \right\} \partial_\mu W \partial_\mu W \right] \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T & = \frac{1}{4}(1 - S_3)^2 [\partial_0 W \partial_0 W \\
& + \left\{ -\frac{1}{4}(\lambda - 2\lambda S_3 + \lambda S_3^2)W_jW_k - 1 \right\} \partial_\mu W \partial_\mu W] \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Do outro lado sabemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{(1 - S_3)^2}{4} & = \frac{1}{\left(\frac{2}{1-S_3}\right)^2} = \left(\frac{1 - S_3 + 1 + S_3}{1 - S_3}\right)^{-2} \\
& = \left[1 + \frac{1 + S_3}{1 - S_3}\right]^{-2} = \left[1 + \frac{W_iW_i}{4}\right]^{-2} \\
& = \left[\frac{4}{4 + W_iW_i}\right]^2 \quad (3.32)
\end{aligned}$$

De onde temos,

$$1 - S_3 = \frac{8}{4 + W_iW_i} \quad (3.33)$$

Substituindo (3.33) em (3.31) temos:

$$\begin{aligned}
T &= \left(1 + \frac{W_i W_i}{4}\right)^{-2} [\partial_0 W \partial_0 W \\
&+ \left\{-\frac{1}{4}(\lambda - 2\lambda S_3 + \lambda S_3^2) W_j W_k - 1\right\} \partial_\mu W \partial_\mu W] \\
&= \frac{16}{(4 + W_i W_i)^2} \partial_0 W \partial_0 W \\
&+ \frac{16}{(4 + W_i W_i)^2} \left\{-\frac{1}{4}(\lambda - 2\lambda \frac{W_i W_i - 4}{W_i W_i + 4}) + \lambda \frac{W_i W_i - 4}{(W_i W_i + 4)^2} W_j W_k - 1\right\} \partial_\mu W \partial_\mu W \\
&= \frac{16}{(4 + W_i W_i)^2} [\partial_0 W \partial_0 W \\
&- \left\{\left(\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda(W_i W_i - 4)}{2(W_i W_i + 4)} + \frac{\lambda(W_i W_i - 4)^2}{(W_i W_i + 4)^2}\right) W_j W_k - 1\right\} \partial_\mu W \partial_\mu W] \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Logo temos:

$$L = \frac{1}{2} J \int T d^2 x \quad (3.35)$$

Substituindo (3.34) em (3.35) temos:

$$\begin{aligned}
L &= \int d^2 x \frac{8J}{(4 + W_i W_i)^2} \left\{ \partial_0 W \partial_0 W \right. \\
&- \left[\left(\frac{12\lambda - \lambda W_i W_i}{4(4 + W_i W_i)} + \frac{\lambda(W_i W_i - 4)}{(4 + W_i W_i)^2} \right) W_j W_k - 1 \right] \partial_\mu W \partial_\mu W \left. \right\} \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Seja $W = W_1 + iW_2 \Rightarrow W^* = W_1 - iW_2$
 $WW^* = |W|^2 = W_1^2 + W_2^2 = W_i W_i$, temos então:

$$\begin{aligned}
L &= \int d^2 x \frac{8J}{(4 + |W|^2)^2} \left\{ \partial_0 W \partial_0 W \right. \\
&- \left[\left(\frac{12\lambda - \lambda |W|^2}{4(4 + |W|^2)} + \frac{\lambda(|W|^2 - 4)^2}{(4 + |W|^2)^2} \right) W_j W_k - 1 \right] \partial_\mu W \partial_\mu W \left. \right\} \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Escrevemos $W(Z) = \frac{Z - Z_0}{\lambda}$, com $\lambda = a \exp i\theta$ e $Z = x + iy$

Estudaremos agora soluções dependentes do tempo para este modelo, similar ao que foi feito para o modelo isotrópico. Estes calculos não existem na literatura e são aqui apresentados pela primeira vez.

Vamos supor que Z e λ dependem do tempo da seguinte forma:

$$Z = Z(t), \quad \lambda = a(t) \exp(i\theta(t))$$

$$\text{Temos: } W(Z) = \frac{Z-Z_0}{a \exp(i\theta)} \quad \text{e } W^*(Z) = \frac{Z^*-Z_0^*}{a \exp(-i\theta)}$$

Calculando as derivadas temporais temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\dot{Z} - \dot{Z}_0}{a \exp(i\theta)} - \frac{Z - Z_0}{a^2 \exp(2i\theta)} (\dot{a} \exp(i\theta) + ai \exp(i\theta) \dot{\theta}) \\ &= \frac{\dot{Z} - \dot{Z}_0}{a \exp(i\theta)} - \frac{W}{a} (\dot{a} + ia\dot{\theta}) \\ &= \frac{1}{a} [(\dot{x} + i\dot{y} - \dot{x}_0 - i\dot{y}_0)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &\quad - (W_1 + iW_2)(\dot{a} + ia\dot{\theta})] \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial W^*}{\partial t}\right) &= \frac{1}{a^2} \{[(\dot{x} - \dot{x}_0) + i(\dot{y} - \dot{y}_0)][\cos \theta + i \sin \theta] \\ &\quad - (W_1 + iW_2)(\dot{a} + ia\dot{\theta})\} \{[(\dot{x} - \dot{x}_0) - i(\dot{y} - \dot{y}_0)][\cos \theta - i \sin \theta] \\ &\quad - (W_1 - iW_2)(\dot{a} - ia\dot{\theta})\} \\ &= \frac{1}{a^2} \{[(\dot{x} - \dot{x}_0)^2 + (\dot{y} - \dot{y}_0)^2][\cos^2 \theta + \sin^2 \theta] \\ &\quad - [(\dot{x} - \dot{x}_0) + i(\dot{y} - \dot{y}_0)][(\cos \theta + i \sin \theta)(W_1 - iW_2)(\dot{a} - ia\dot{\theta})] \\ &\quad - [(\dot{x} - \dot{x}_0) - i(\dot{y} - \dot{y}_0)][(\cos \theta - i \sin \theta)(W_1 + iW_2)(\dot{a} + ia\dot{\theta})] \\ &\quad + (W_1^2 + W_2^2)(\dot{a}^2 + a^2\dot{\theta}^2)\} \\ &= \frac{1}{a^2} \{(\dot{x} - \dot{x}_0)^2 + (\dot{y} - \dot{y}_0)^2 - [(\dot{x} - \dot{x}_0) \cos \theta + i(\dot{x} - \dot{x}_0) \sin \theta + i(\dot{y} - \dot{y}_0) \cos \theta \\ &\quad - (\dot{y} - \dot{y}_0) \sin \theta][W_1\dot{a} - ia\dot{\theta}W_1 - i\dot{a}W_2 - a\dot{\theta}W_2] \\ &\quad - [(\dot{x} - \dot{x}_0) \cos \theta - i(\dot{x} - \dot{x}_0) \sin \theta - i(\dot{y} - \dot{y}_0) \cos \theta \\ &\quad - (\dot{y} - \dot{y}_0) \sin \theta][W_1\dot{a} + ia\dot{\theta}W_1 + i\dot{a}W_2 - a\dot{\theta}W_2] \\ &\quad + (W_1^2 + W_2^2)(\dot{a}^2 + a^2\dot{\theta}^2)\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

temos ainda:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial W^*}{\partial t}\right) = \frac{1}{a^2} \{(\dot{x} - \dot{x}_0)^2 + (\dot{y} - \dot{y}_0)^2 - (\dot{a}W_1(\dot{x} - \dot{x}_0) \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
& - ia\dot{\theta}W_1(\dot{x} - \dot{x}_0) \cos \theta - ia\dot{W}_2(\dot{x} - \dot{x}_0) \cos \theta - a\dot{\theta}W_2(\dot{x} - \dot{x}_0) \cos \theta \\
& + ia\dot{W}_1(\dot{x} - \dot{x}_0) \sin \theta + a\dot{\theta}W_1(\dot{x} - \dot{x}_0) \sin \theta + \dot{a}W_2(\dot{x} - \dot{x}_0) \sin \theta \\
& - ia\dot{\theta}W_2(\dot{x} - \dot{x}_0) \sin \theta + ia\dot{W}_1(\dot{y} - \dot{y}_0) \cos \theta + a\dot{\theta}W_1(\dot{y} - \dot{y}_0) \cos \theta \\
& + \dot{a}W_2(\dot{y} - \dot{y}_0) \cos \theta - ia\dot{\theta}W_2(\dot{y} - \dot{y}_0) \cos \theta - \dot{a}W_1(\dot{y} - \dot{y}_0) \sin \theta \\
& + ia\dot{\theta}W_1(\dot{y} - \dot{y}_0) \sin \theta + ia\dot{W}_2(\dot{y} - \dot{y}_0) \sin \theta + a\dot{\theta}W_2(\dot{y} - \dot{y}_0) \sin \theta \\
& + \dot{a}W_1(\dot{x} - \dot{x}_0) \cos \theta + ia\dot{\theta}W_1(\dot{x} - \dot{x}_0) \cos \theta + ia\dot{W}_2(\dot{x} - \dot{x}_0) \cos \theta \\
& - a\dot{\theta}W_2(\dot{x} - \dot{x}_0) \cos \theta - ia\dot{W}_1(\dot{x} - \dot{x}_0) \sin \theta + a\dot{\theta}W_1(\dot{x} - \dot{x}_0) \sin \theta \\
& + aW_2(\dot{x} - \dot{x}_0) \sin \theta + ia\dot{\theta}W_2(\dot{x} - \dot{x}_0) \sin \theta - ia\dot{W}_1(\dot{y} - \dot{y}_0) \cos \theta \\
& + a\dot{\theta}W_1(\dot{y} - \dot{y}_0) \cos \theta + \dot{a}W_2(\dot{y} - \dot{y}_0) \cos \theta + ia\dot{\theta}W_2(\dot{y} - \dot{y}_0) \cos \theta \\
& - \dot{a}W_1(\dot{y} - \dot{y}_0) \sin \theta - ia\dot{\theta}W_1(\dot{y} - \dot{y}_0) \sin \theta - ia\dot{W}_2(\dot{y} - \dot{y}_0) \sin \theta \\
& + a\dot{\theta}W_2(\dot{y} - \dot{y}_0) \sin \theta) + (W_1^2 + W_2^2)(\dot{a}^2 + a^2\dot{\theta}^2) \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Somando os termos iguais temos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial W^*}{\partial t}\right) &= \frac{1}{a^2}\{(\dot{x} - \dot{x}_0)^2 + (\dot{y} - \dot{y}_0)^2 - 2\dot{a}W_1(\dot{x} - \dot{x}_0) \cos \theta \\
&+ 2a\dot{\theta}W_2(\dot{x} - \dot{x}_0) \cos \theta - 2a\dot{\theta}W_1(\dot{x} - \dot{x}_0) \sin \theta - 2\dot{a}W_2(\dot{x} - \dot{x}_0) \sin \theta \\
&- 2a\dot{\theta}W_1(\dot{y} - \dot{y}_0) \cos \theta - 2\dot{a}W_2(\dot{y} - \dot{y}_0) \cos \theta + 2\dot{a}W_1(\dot{y} - \dot{y}_0) \sin \theta \\
&- 2a\dot{\theta}W_2(\dot{y} - \dot{y}_0) \sin \theta + (W_1^2 + W_2^2)(\dot{a}^2 + a^2\dot{\theta}^2)\} \quad (3.41)
\end{aligned}$$

As integrais dos termos impares são nulas, assim fazendo a integração só interessam os termos pares, isto é:

$$T' = \frac{1}{a^2}\{(\dot{x} - \dot{x}_0)^2 + (\dot{y} - \dot{y}_0)^2 + (W_1^2 + W_2^2)(\dot{a}^2 + a^2\dot{\theta}^2)\} \quad (3.42)$$

Sabemos que $W_1 = \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{a}$ e $W_2 = \frac{y \cos \theta - x \sin \theta}{a}$

$$\begin{aligned}
W_1^2 + W_2^2 &= \frac{1}{a^2}[x^2 \cos^2 \theta + 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta \\
&+ y^2 \cos^2 \theta - 2xy \cos \theta \sin \theta + x^2 \sin^2 \theta] \\
&= \frac{1}{a^2}[x^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + y^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)] \\
&= \frac{x^2 + y^2}{a^2} = W_i W_i \quad (3.43)
\end{aligned}$$

De onde temos,

$$\begin{aligned}
L(\Phi) &= \frac{8J}{a^2 c^2 (4 + \frac{x^2+y^2}{a^2})^2} \int d^2x \{ |\dot{Z} - \dot{Z}_0|^2 + (W_1^2 + W_2^2)(\dot{a}^2 + a^2 \dot{\theta}^2) \\
&\quad - \int d^2x \left(\frac{\lambda(12 - |W|^2)}{4(4 + |W|^2)} + \frac{\lambda(|W|^2 - 4)^2}{(4 + |W|^2)^2} \right) W_i W_k - 1 \} \partial_\mu W \partial_\mu W \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Note que $\partial_\mu W \partial_\mu W$ corresponde a $-E$ (energia).

Finalmente temos;

$$\begin{aligned}
L(\Phi) &= \frac{8a^2 J}{c^2} \left[\int d^2x \frac{|\dot{Z} - \dot{Z}_0|^2 + (W_1^2 + W_2^2)(\dot{a}^2 + a^2 \dot{\theta}^2)}{(4a^2 + x^2 + y^2)^2} - E \right. \\
&\quad \left. - \int d^2x \lambda \left(\frac{12a^2 - x^2 - y^2}{4(4a^2 + x^2 + y^2)} + \frac{(x^2 + y^2 + 4a^2)^2}{(4a^2 + x^2 + y^2)^2} \right) W_i W_k \partial_\mu W \partial_\mu W \right] \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Este resultado era de se esperar, pois a anisotropia leva a uma expressão mais complicada, o que dificulta a interpretação do resultado. Note que para $\lambda = 0$ temos uma expressão análoga ao resultado que foi encontrado no caso isotrópico (2.64).

3.3 Correção quântica da energia dos sólitons

Nesta seção examinaremos a equação dependente do tempo para pequenas perturbações, $\xi(\vec{r}, t)$, que se propagam classicamente com o número topológico $Q = 1$. Para isto, escrevemos:

$$W = W_c + \xi, \quad (3.46)$$

onde o desvio do mínimo clássico ξ representa o modo da onda de spin. Minimizando a ação correspondente ao lagrangeano (3.10) em segundo ordem em ξ , temos:

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi = V_1 \xi + V_2 \xi, \quad (3.47)$$

onde

$$V_1 = 8 \partial_z \ln(1 + |W_c|^2) \left[\partial_{\bar{z}} - \frac{\lambda}{(1 + |W_c|^2)} \partial_{\bar{z}} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4\lambda|W_c|^2}{(1+|W_c|^2)^2} \partial_{\bar{z}} + \frac{4\lambda W_c (\partial_{\bar{z}} \bar{W}_c)}{(1+|W_c|^2)^2} + \frac{8\lambda \bar{W}_c (\partial_z W_c)}{(1+|W_c|^2)^2} \partial_{\bar{z}} \\
& - \frac{8\lambda (\partial_z W_c) (\partial_{\bar{z}} \bar{W}_c)}{(1+|W_c|^2)^2} - \frac{8\lambda W_c (\partial_{\bar{z}} \bar{W}_c)}{(1+|W_c|^2)^2} \partial_z - \frac{2\lambda|W_c|^2}{(1+|W_c|^2)^2} \nabla^2 \quad (3.48)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
V_2 & = \frac{16\lambda W_c^2}{(1+|W_c|^2)^2} [\partial_z \ln(1+|W_c|^2) \partial_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} \ln(1+|W_c|^2) \partial_z] \\
& - \frac{8\lambda W_c (\partial_z W_c)}{(1+|W_c|^2)^2} \partial_{\bar{z}} - \frac{2\lambda W_c^2}{(1+|W_c|^2)^2} \nabla^2 \quad (3.49)
\end{aligned}$$

A equação (3.47) é válida para todos os valores possíveis da anisotropia que aparece como um parâmetro na expressão do potencial. Os dois operadores potenciais têm uma extensão finita. Uma consequência disso é que os estados contínuos usuais, com energia finita dada pela frequência ω de pequenas oscilações existem. Escrevendo $\xi(\vec{r}, t) = \psi_{qn}(\vec{r}) \exp(i\omega t)$, obtemos no limite $r \rightarrow \infty$, duas soluções onda de spin da equação (3.47) com frequência $\omega(q) = cq$. Então a solução da equação (3.47) no limite $r \rightarrow \infty$ resulta da superposição de uma onda cilíndrica incidente e de uma onda cilíndrica divergente com a fase modificada. Quando r tende para infinito, $\psi(\vec{r})$ é dada por:

$$\psi_{qn}(\vec{r})_{r \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \{ H_{|n|}^2(qr) \exp(in\Phi) + \sum_m \exp[-2i\Delta_{nm}(q)] \cdot H_{|n|}^2(qr) \exp(im\Phi) \}, \quad (3.50)$$

onde usamos coordenadas cilíndricas (r, Φ) . $\Delta_{nm}(q)$ é a matriz mudança de fase.

Nosso objetivo é calcular a correção quântica da energia do sóliton quântico, dada pela energia do ponto zero das pequenas flutuações medidas no vácuo. A correção quântica da energia depende somente dos elementos da diagonal de $\Delta_{nm}(q)$ e é obtida pela generalização dos argumentos usados na quantização semi-clássica dos sólitons em $(1+1)$ dimensões.

$$E = E_c - E_0 \quad (3.51)$$

onde

$$E_0 = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^{\frac{1}{a}} \left[\frac{\partial \omega}{\partial q} \right]_{t_r} \Delta_{nm}(q) dq, \quad (3.52)$$

o valor $\frac{1}{a}$ foi introduzido considerando que os sistemas de estado sólido têm um comprimento natural, a constante a assegura um truncamento natural, fazendo que a teoria seja finita.

Agora considere um sóliton clássico como pseudopartícula ($Q = 1$) dado por (3.15). Devido à translação da origem na equação (3.50) que transforma simplesmente a mudança de fase para uma transformação unitária $\Delta(q) \rightarrow U^t \Delta(q) U$ onde $t_r \Delta(q)$ é invariante. As correções quânticas não dependem de Z_1 , então é suficiente considerar o problema correspondente à configuração mais simples $W_c(Z) = \frac{Z}{\delta}$. Substituindo esta configuração de sóliton nas equações (3.47) e (3.48), notamos que o operador potencial V_1 tem uma simetria cilíndrica enquanto o outro operador potencial V_2 não tem. Para obter E_0 temos que calcular a soma dos elementos da diagonal da matriz mudança de fase. A mudança de fase depende do potencial. Devido à forma complicada da interação (3.46), não podemos resolver exatamente o problema. Podemos entretanto, achar a mudança de fase usando a aproximação de Born. Os termos de Born de primeira ordem para os elementos da diagonal e da não diagonal são dados respectivamente neste caso por:

$$\Delta_n(q) = -\frac{\pi}{2} \int_0^\infty \langle J_{|n|}(qr) \exp(-in\Phi) V_1 \exp(in\Phi) J_{|n|}(qr) \rangle_\Phi r dr, \quad (3.53)$$

$$\Delta_{nm}(q) = -\frac{\pi}{2} \int_0^\infty i^{(m-n)} \langle J_m(qe) \exp(im\Phi) V_2 \exp(-in\Phi) J_n(qr) \rangle_\Phi r dr, \quad (3.54)$$

onde $\langle \dots \rangle_\Phi$ denota uma média ângular.

Primeiro consideremos $-1 \leq \lambda \leq 0$ (anisotropia do tipo XY). Neste caso usaremos $R = 2|\delta|$ representando a separação de um par vortex. Para calcular $t_r \Delta_{nm}$ usaremos $W_c = \frac{Z}{\delta}$ para obter V_1 . Então,

$$t_r \Delta_{nm}(q) = -\frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \langle J_{|n|}(qr) \exp(-in\Phi) V_1 \exp(in\Phi) J_{|n|}(qr) \rangle_\Phi r dr \quad (3.55)$$

de onde temos

$$t_r \Delta_{nm}(q) = -2\pi\lambda \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{qR}{2} n^2 [K_{n-1}[\frac{qR}{2}] I_n[\frac{qR}{2}] - K_n[\frac{qR}{2}] I_{n+1}[\frac{qR}{2}]] \right\} \quad (3.56)$$

O termo não diagonal dado pela equação (3.54) corresponde as transições entre os canais de momento angular n , $n+1$ para V_2 dado pela equação (3.50) e $W_c = \frac{Z}{\delta}$. Todas as outras transições são impossíveis.

Vimos que a energia da configuração do par vortex-antivortex não depende da separação R entre eles e que os vórtices classicamente não interagem. Entretanto, quanticamente as mudanças de fase de pequenas oscilações desta configuração são dependentes da separação R entre os vórtices. Assim resolvendo a equação (3.52) no caso limite $R \rightarrow 0$ (pequena separação) demonstramos explicitamente como a interação entre vórtex e antivortex aparece devido aos efeitos quânticos no modelo σ não linear com a anisotropia do tipo XY.

No limite $R \rightarrow 0$, podemos aproximar (3.56) por:

$$t_r \Delta_{nm}(q) \simeq -2\pi\lambda[1 - [\frac{qR}{2}]^2 \ln[\frac{qR}{2}]] \quad (3.57)$$

Inserindo a expressão (3.57) na equação (3.51), temos:

$$E_{R \rightarrow 0} \simeq \frac{4\pi}{3}(3 + \lambda)J - \frac{2\hbar c}{a}\lambda[\frac{1}{3}[\frac{R}{2a}]^2 \ln[\frac{R}{2a}] - 1] \quad (-1 \leq \lambda < 0). \quad (3.58)$$

Vimos que, quando $-1 \leq \lambda < 0$, as correções quânticas semi-clássicas abaixam a energia do sóliton clássico numa anisotropia do tipo XY e induz um potencial interativo efetivo entre os vórtices num par. Então pequenas flutuações da configuração estática de sóliton do modelo sigma não linear em duas dimensões, com a anisotropia do tipo XY induz um grau de liberdade interno para cada sóliton. A quantização destes sólitons quebra a invariância da escala estática e dá um tamanho preferido de sóliton, isto é, uma distância preferida R_0 entre os vórtices num sóliton. Isso é obtido usando $\frac{dE}{dR} = 0$, que leva a $R_0 \sim a$. Então este potencial interativo efetivo é repulsivo para $R < R_0$ e atrativo para $R > R_0$. A equação (3.58) é também válida para a anisotropia do tipo Ising. Neste caso devemos substituir $\frac{R}{2}$ por $|\delta|$ onde $|\delta|$ dá o tamanho do sóliton. Assim para a anisotropia do tipo Ising a correção quântica da energia do sóliton clássico é:

$$E_{|\delta| \rightarrow 0} \approx \frac{4\pi}{3}(3 + \lambda)J - \frac{2\hbar c}{a}\lambda[\frac{1}{3}[\frac{|\delta|}{a}]^a \ln[\frac{|\delta|}{a}] - 1] \quad (\lambda > 0) \quad (3.59)$$

3.4 conclusão

Então as correções quânticas levantam a energia do sóliton clássico numa anisotropia do tipo Ising. Note que a equação (3.59) tem a mesma dependência funcional com $|\delta|$ do que a energia do sóliton calculada por *Kosenovich*⁽⁹⁾ num modelo ferromagnético em duas dimensões, isto é, a energia aumenta da mesma forma que o tamanho do sóliton cresce com $|\delta|^2 \ln |\delta|$. Assim mostramos como as pequenas oscilações linearizadas do sóliton estático no modelo sigma anisotrópico em duas dimensões modificam a energia destas configurações.

Capítulo 4

MERONS

4.1 Introdução

As configurações de instanton múltiplo e anti- instanton múltiplo são soluções de ação finita e exatas das equações do movimento. *Woo*⁽¹¹⁾ mostrou que estas são as únicas soluções de ação finita. Os merons são configurações de campo localizadas que possuem uma metade ($\frac{1}{2}$) de carga topológica e uma ação que diverge com o logaritmo do volume do espaço-tempo. Para explorar essa possibilidade devemos examinar as equações não lineares do movimento. A fim de simplificar consideravelmente nosso estudo, consideramos configurações de campo que apresentam simetria axial. Esta consideração é suficiente para discutir o caso de um único *par de merons*⁽¹²⁾, que por uma transformação conformal pode apresentar uma simetria axial. Podemos pensar em um instanton como um par meron-meron. No modelo σ não linear um instanton possui 4 graus de liberdades correspondendo à posição, ao tamanho e ao ângulo. Podemos imaginá-lo como um dipolo. Veremos que um instanton pode ser separado em dois merons, cada um caracterizado por 4 graus de liberdades: posição, escala e uma carga discreta. Então os merons são os polos dos quais o dipolo de instanton é formado.

4.2 Estudo de um par de merons como solução da equação do movimento

consideramos o campo W definido da seguinte forma:

$$W = \sqrt{\frac{Z}{Z^*}} \tan \frac{1}{4} \Psi(t), \quad t = \ln |Z|. \quad (4.1)$$

Esta consideração não satisfaz a condição de contorno, $W(\infty) = 1$, mas ela sempre pode ser transformada por uma transformação conformal. Esta consideração especifica a simetria axial ($Z \rightarrow \exp(i\theta)Z$) da ação e pode ser usada para expressar a ação em função de ψ .

$$S = \frac{\pi}{g^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 + (1 - \cos \psi) \right] \quad (4.2)$$

É fácil reconhecer que é o funcional energia da configuração estática da *teoria de Sine – Gordon*⁽¹⁾. A carga topológico é dada por:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \left[\cos \frac{1}{2} \psi \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{1}{2} \psi(+\infty) - \cos \frac{1}{2} \psi(-\infty) \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Usando a equação de Euler-Lagrange a equação do movimento é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \dot{\psi} &= \sin \psi(t) \\ \ddot{\psi}(t) &= \sin \psi(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

As únicas soluções de ação finita são claramente $\psi = 0$ ou $\psi = 2\pi$ que correspondem ao vácuo e a um único instanton.

$$\psi = 4 \tan^{-1} \exp t = 4 \tan^{-1} |Z|, \quad W = Z \quad (4.5)$$

Existem várias soluções de ação finita da equação (4.4). Mas se nós as restringirmos às soluções que têm carga topológica localizada, teremos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

e a única solução é a solução meron singular

$$\psi = \pi, \quad W = \sqrt{\frac{Z}{Z^*}} \quad (4.7)$$

Esta solução é singular em $Z = 0$ e $Z = \infty$. Se procedermos a uma transformação conformal obteremos a mais geral configuração de meron singular consistente com a condição de contorno $W = 1$ em $Z = \infty$.

$$W = \left\{ \left(\frac{Z - a^-}{Z^* - a^{-*}} \right) \left(\frac{Z^* - a^{+*}}{Z - a^+} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

A densidade de ação para esta solução é:

$$\mathcal{L} = \frac{4}{g^2} \left| \frac{1}{Z - a^+} - \frac{1}{Z - a^-} \right|^2 \quad (4.9)$$

A ação total é infinita devido a singularidade em $Z = a^{\pm*}$. De fato ela é proporcional à energia de Coulomb de duas cargas pontuais de cargas opostas no espaço bidimensional. Para obter uma configuração de meron não singular é necessário introduzir condições que fixam o tamanho dos merons individuais e eliminam a singularidade. Isso pode ser conseguido vinculando $\psi(t)$ a π em $t_1 = \ln r_1$ e $t_2 = \ln r_2$. A solução então obtida é:

$$\psi(t) = \begin{cases} 4 \tan^{-1} \exp(t - t_1), & -\infty < t \leq t_1 \\ \pi, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 4 \tan^{-1} \exp(t - t_2), & t_2 \leq t < \infty \end{cases} \quad (4.10)$$

ou

$$W = \begin{cases} \frac{Z}{r_1}, & 0 < |Z| < r_1 \\ \sqrt{\frac{Z}{Z^*}}, & r_1 < |Z| < r_2 \\ \frac{Z}{r_2}, & r_2 < |Z| < \infty \end{cases} \quad (4.11)$$

O que nós vimos corresponde a uma metade de instanton localizada dentro de um círculo $|Z| = r_2$ e a outra metade de instanton localizada fora do círculo $|Z| = r_2$. A ação total é dada por :

$$S = \frac{4\pi}{g^2} + \frac{2\pi}{g^2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{4\pi}{g^2} \quad (4.12)$$

Os termos na equação (4.11) surgem de $|Z| \leq r_1$, $r_1 \leq |Z| \leq r_2$ e $r_2 \leq |Z|$ respectivamente. A densidade de carga agora é nula para $r_1 < |Z| < r_2$ e quando integrada sobre cada meron, é igual a $\frac{1}{2}$.

$$\int_{|x|<r_1} d^2x Q(x) = \int_{|x|>r_2} d^2x Q(x) = \frac{1}{2} \quad (4.13)$$

A transformação conformal produz as duas configurações gerais não-singulares de merons ($r_1 < 1 < r_2$).

$$W = \begin{cases} \frac{1}{r_1} \left(\frac{Z-a^-}{Z-a^+} \right), & \left| \frac{Z-a^-}{Z-a^+} \right| < r_1, \\ \frac{1}{r_2} \left(\frac{Z-a^-}{Z-a^+} \right), & \left| \frac{Z-a^-}{Z-a^+} \right| > r_2, \\ \left[\left(\frac{Z-a^-}{Z-a^+} \right) \left(\frac{Z^*-a^{+*}}{Z^*-a^{*+}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, & \text{por outro lado} \end{cases} \quad (4.14)$$

Esta é uma outra versão da equação (4.10) consistindo de uma metade de instanton (meron M_-) localizada dentro de um círculo C_1 e a outra metade de instanton (meron M_+) localizada dentro de um círculo C_2 , tal que

$$C_1 = \left| \frac{Z-a^-}{Z-a^+} \right| = r_1 \quad \text{e} \quad C_2 = \left| \frac{Z-a^-}{Z-a^+} \right| = r_2.$$

Quando $r_1 = r_2 = 1$ os dois merons unem-se para formar um instanton. Quando $r_1 = r_2^{-1} = 0$ obtemos a configuração singular de meron. Neste caso podemos interpretar as singularidades da solução exata das equações do movimento. Elas são caracterizadas por:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \delta^{(2)}(X_\mu - a_\mu^+) + \frac{1}{2} \delta^{(2)}(X_\mu - a_\mu^-) \quad (4.15)$$

com $a_\mu^\pm = (R_e a^\pm, I_m a^\pm)$.

quando os merons são muito distantes um do outro comparados a seus tamanhos, isto é, $r_1 \ll 1$ e $r_2 \gg 1$, as configurações consistem de um meron M_- em a^- dentro do círculo de raio $\rho_1 = r_1 |a^+ - a^-|$ e de um meron M_+ em a^+ dentro do círculo de raio $\rho_2 = \frac{1}{r_2} |a^+ - a^-|$. Os merons são então caracterizados por três coordenadas coletivas, suas posições e suas dimensões. Os merons vêm em duas variedades, M_- e M_+ que são distinguíveis. Eles podem ser considerados como os monópolos de onde foi formado o dipolo instanton. O tamanho do instanton ($= |a^+ - a^-|$) é a distância entre os monópolos, e o ângulo caracterizando o instanton é simplesmente o vetor unitário apontando de M_+ para M_- .

A ação para o par de merons, de tamanhos, ρ_1 e ρ_2 e separação $d = |a^+ - a^-|$ é:

$$S = \frac{8\pi}{g^2} + \frac{4\pi}{g^2} \ln \frac{d}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} \quad (4.16)$$

Dentro dos limites da simetria axial podemos contruir configurações de anti-meron e de múltiplo meron. Para as configurações de anti-meron devemos simplesmente substituir W por W^* ; então obtemos duas configurações de anti-meron singular. Os anti-merons ainda aparecem em duas variedades; \bar{M}_+ e \bar{M}_- com uma ação dada pela expressão (4.16).

As configurações meron-anti-meron nunca podem ser obtidas como soluções exatas das equações do movimento, exatamente como não há soluções instanton-anti-instanton. Portanto uma configuração meron-anti-meron vinculada é facilmente contruida, temos:

$$W = \begin{cases} \frac{1}{r_1} Z, & |Z| < r_1 \\ \sqrt{\frac{Z}{Z^*}}, & r_1 < |Z| < r_2 \\ \frac{r_2}{Z^*}, & r_2 < |Z| \end{cases} \quad (4.17)$$

ou

$$W = \begin{cases} \frac{1}{r_1} \frac{Z-a^-}{Z-a^+}, & \left| \frac{Z-a^-}{Z-a^+} \right| < r_1 \\ \sqrt{\left(\frac{Z-a^-}{Z-a^+} \right) \left(\frac{Z^*-a^{+*}}{Z^*-a^{-*}} \right)}, & \text{caso contrário} \\ r_2 \frac{Z^*-a^{+*}}{Z^*-a^{-*}}, & \left| \frac{Z^*-a^{+*}}{Z^*-a^{-*}} \right| > r_2 \end{cases} \quad (4.18)$$

Esta configuração é de um meron M_- em $Z = a^-$ e de anti-meron M_+ em $Z = a^+$. A ação é dada também pela expressão (4.16). Uma outra configuração consistindo de um par $\bar{M}_- M_+$ é obtida pela substituição de W por W^* na equação (4.17) ou (4.18). Finalmente as configurações múltiplas de meron axialmente simetricas são obtidas tomando como W e S as seguintes expressões:

$$\begin{cases} W = \left(\frac{Z}{Z^*} \right)^{\frac{N}{2}} \tan \frac{\psi(t_N)}{4}, & t_N = N \ln |Z| \\ S = \frac{N\pi}{g^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 + (1 - \cos \psi) \right]. \end{cases} \quad (4.19)$$

As soluções para $\psi(t_N)$ são dadas pela equação (4.5) que é agora uma solução N -instanton, $W = Z^N$ com ação $S = \left(\frac{8\pi}{g^2} \right) N$ e pela equação (4.7) que dá um $2N$ -solução meron singular. Quando substituímos W por $W^{\frac{1}{N}}$ na equação (4.14), obtemos uma configuração que consiste de N merons M_+ em $Z = a^+$ e N merons M_- em $Z = a^-$. Neste caso a ação é dada por :

$$S = \frac{8\pi}{g^2} N + N^2 \frac{4\pi}{g^2} \ln \frac{d}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} \quad (4.20)$$

Similarmente construímos facilmente configurações de N anti-merons (\bar{M}_+) e N anti-merons (\bar{M}_-) ou N merons (M_-) com ação idêntica.

4.3 conclusão

Tudo que vimos anteriormente é consistente com a interpretação dos merons e anti-merons como monópolos e a ação como sendo um potencial químico $\beta\mu = \frac{4\pi}{g^2}$. Os merons e anti-merons são relacionados por uma interação coulombiana. Os merons M_+ e \bar{M}_+ são carregados positivamente enquanto M_- e \bar{M}_- têm cargas negativas.

Capítulo 5

O MODELO CP_N

5.1 Introdução

O Modelo $O(3)$ em $(1 + 1)$ dimensões tem várias propriedades interessantes, muitas delas são similares às da teoria de *Yang – Mills*⁽⁴⁾ em $(3 + 1)$ dimensões. Os dois sistemas produzem instantons que são caracterizados por índices topológicos inteiros. Os procedimentos para obter as soluções também são similares, nos dois casos obtemos uma desigualdade que dá o limite inferior da ação S e este limite é proporcional ao número homotópico Q . A minimização de S permite achar equações diferenciais de primeira ordem que então resolvemos. Também os dois modelos produzem instantons de tamanhos arbitrários. Ao mesmo tempo o modelo $O(3)$ é comparativamente simples. Ele consiste somente de 3 campos escalares em duas dimensões com um simples lagrangeano. Consequentemente, além da sua relevância em sistemas ferromagnéticos em duas dimensões, o modelo $O(3)$ é um proveitoso modelo a partir do qual ulteriores introspecções podem ser tirados sobre as mais complicadas teorias de gauge não abelianas. Entretanto a similaridade falha num aspecto. O sistema Yang-Mills $SU(2)$ pode ser usado em teorias de calibre $SU(N)$ com N arbitrariamente grande e mesmo assim as soluções serão ainda instantons. Isso nos dá a possibilidade de comparar os efeitos quânticos de instanton com a ampla expansão $N^{(18,19)}$. Infelizmente, como nós já afirmamos, a generalização correspondente do modelo $O(3)$ para o modelo $O(N)$ não produz instanton quando $N > 3$. Porém, existe uma outra família de teorias de campo escalar, ainda em $(1 + 1)$ dimensões que compartilha todas as características mencionadas acima do modelo $O(3)$, e ao mesmo

tempo produzindo soluções instantons, mesmo quando N , o número de campos, torna-se arbitrariamente grande. Esses são os então chamados modelos $CP_N^{(14,15,16)}$. Veremos que para $N = 1$, o modelo CP_1 é essencialmente o mesmo que o modelo $O(3)$. Para N grande ele constitui uma generalização apropriada, mais do que o $O(N)$, no sentido de que ele continue produzindo soluções instantons. Um trabalho considerável foi feito sobre este modelo devido a suas características muito atraentes. Por esta razão vamos dedicar este capítulo a este modelo a fim de obter suas soluções instantons ^(18,20).

5.2 Estudo do modelo CP_N

O modelo consiste de $N + 1$ campos (complexos) escalares $n_a(x)$, $a = 1, \dots, N + 1$, em duas dimensões. Vamos designar os campos por $\vec{n}(x) = \{n_a(x)\}$. Já que estamos interessados em instantons, trabalharemos no espaço euclidiano bidimensional com coordenadas $x = \{x_1, x_2\}$. Os campos são sujeitos ao vínculo

$$(\vec{n}(x))^* \cdot \vec{n}(x) = \sum_{a=1}^{N+1} n_a^*(x)n_a(x) = 1 \quad (5.1)$$

com a densidade lagrangeana

$$L(x) = (\partial_\mu \vec{n})^* \cdot (\partial_\mu \vec{n}) + (\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n})(\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n}) \quad (5.2)$$

com $\mu = 1, 2$. O vínculo (5.1), quando diferenciado em relação a X_μ dá:

$$\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n} + \partial_\mu \vec{n}^* \cdot \vec{n} = 2R_e(\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n}) = 0 \quad (5.3)$$

Então $\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n}$ é imaginário puro, um fato que vamos usar repetidamente. Agora considere o conjunto de transformações dependentes do espaço

$$n_a(x) \rightarrow n_a(x) \exp(i\Lambda(x)). \quad (5.4)$$

A fase $\Lambda(x)$, enquanto dependente do espaço, é independente do índice a . Todos os $N + 1$ campos são multiplicados pelo mesmo fator de fase. Sob esta transformação temos:

$$\begin{cases} \partial_\mu \vec{n} \rightarrow (\partial_\mu \vec{n} + i\partial_\mu \Lambda \vec{n}) \exp i\Lambda \\ \vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n} \rightarrow \vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n} + i\partial_\mu \Lambda \\ L(x) \rightarrow L(x) \end{cases} \quad (5.5)$$

Destas equações é claro que o sistema desfruta de uma invariância local de gauge sob as transformações $U(1)$ (5.4). A situação é até certo grau semelhante na eletrodinâmica abeliana, e neste sistema nós identificamos todos os campos que diferem um do outro, somente pelas transformações (5.4). O lagrangeano é invariante perante uma transformação de calibre. O conjunto de $N + 1$ números complexos sujeitos a esta identificação e também ao vínculo (5.1), forma um espaço complexo projetivo N -dimensional. Esta invariância de gauge é tirada mais claramente pela introdução de um campo vetorial auxiliar $A_\mu(x)$ e escrevendo de novo o lagrangeano como:

$$L(x) = \partial_\mu \vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n} + A_\mu^2 - 2A_\mu(i\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n}) \quad (5.6)$$

Extremando a ação $S = \int d^2x L(x)$ em relação a $A_\mu(x)$, temos:

$$\frac{\partial S}{\partial A_\mu} = 2(A_\mu - i\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n}) = 0$$

Então

$$A_\mu = i(\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n}) \quad (5.7)$$

Isso é claramente uma equação de vínculo par $A_\mu(x)$. O campo A_μ não representa graus de liberdades arbitrários, mas é inteiramente determinado em função de $\vec{n}(x)$ através de (5.7). Quando (5.7) é introduzido no lagrangeano (5.6), obtemos o lagrangeano (5.2). Os dois lagrangeanos (5.2) e (5.6) são consequentemente equivalentes. Lembre-se que $\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n}$ é imaginário puro, então $A_\mu(x)$ é real.

Usando (5.7) e (5.3), o lagrangeano (5.6) pode ser escrito compactamente como:

$$L(x) = (D_\mu \vec{n}^*) \cdot (D_\mu \vec{n}) \quad (5.8)$$

onde

$$D_\mu \vec{n} \equiv (\partial_\mu + iA_\mu)\vec{n}. \quad (5.9)$$

Sob a transformação de calibre (5.4) temos:

$$\begin{cases} A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x) \\ D_\mu \vec{n} \rightarrow (D_\mu \vec{n}) \exp i\Lambda. \end{cases} \quad (5.10)$$

A invariância de gauge do lagrangeano escrito na forma (5.8) é agora transparente. Porém repare que a expressão (5.8) não é completamente o lagrangeano de campos complexos escalares interagindo com um campo eletromagnético. Os termos cinéticos correspondentes a A_μ são ausentes em (5.8).

Isto é por quê A_μ aqui não é um campo independente, mas completamente determinado por (5.7) em função de $\vec{n}(x)$. A equação de campo é obtida extremado a ação S .

$$S = \int d^2x (D_\mu \vec{n})^* \cdot (D_\mu \vec{n}) \quad (5.11)$$

com $\vec{n}(x)$ sujeito ao vínculo (5.1). O vínculo é introduzido no processo variacional com um multiplicador de Lagrange. Isso é, extremamos $S + \int d^2x \lambda(x) (\vec{n}^* \cdot \vec{n} - 1)$. A equação de campo resultante é:

$$D_\mu D_\mu \vec{n} + \lambda \vec{n} = 0 \quad (5.12)$$

O multiplicador de Lagrange é eliminado usando:

$$\lambda = \lambda \vec{n}^* \cdot \vec{n} = -\vec{n}^* \cdot D_\mu D_\mu \vec{n} = 0$$

Assim temos:

$$D_\mu D_\mu \vec{n} - (\vec{n}^* \cdot D_\mu D_\mu \vec{n}) \vec{n} = 0 \quad (5.13)$$

Os instantons que estamos procurando são soluções de ação finita desta equação. Obtemos indiretamente os instantons, primeiramente pela classificação das configurações de ação finita. Quando $r \equiv |\vec{x}| \rightarrow \infty$, temos:

$$D_\mu \vec{n} \equiv \partial_\mu \vec{n} + iA_\mu \vec{n} = 0. \quad (5.14)$$

Tomando cada componente $n_a \equiv |n_a| \exp i\Phi_a$ separadamente, temos:

$$-iA_\mu = \frac{\partial_\mu n_a}{n_a} = \frac{\partial_\mu |n_a|}{|n_a|} + i\partial_\mu \Phi_a \quad (5.15)$$

Note que $-iA_\mu$ na equação (??) é imaginário puro e é independente de a . Isso significa que quando $r \rightarrow \infty$, temos:

$$\begin{cases} \partial_\mu |n_a| = 0 \\ \partial_\mu \Phi_a \text{ é independente de } a \end{cases}$$

Consequentemente, a condição de contorno (5.14) implica que quando $r \rightarrow \infty$,

$$\vec{n}(x) \rightarrow \vec{n}^0 \exp i\Phi(\theta) \quad (5.16)$$

Onde $\vec{n}^{(0)}$ é qualquer vetor complexo fixo com $(\vec{n}^{(0)})^* \cdot \vec{n}^{(0)} = 1$ e Φ é uma fase angular. Φ pode depender de θ , o ângulo em coordenada espacial que parametriza a fronteira do espaço que é, neste problema, o círculo $S_1^{(phy)}$. Entretanto os valores permitidos da fase Φ formam também um círculo $S_1^{(int)}$. Conseqüentemente o conjunto de condições de contorno permitidos por (5.16) é um mapeamento de $S_1^{(phy)} \rightarrow S_1^{(int)}$. Nós já sabemos que tais mapeamentos representam classes homotópicas caracterizadas por um número de enrolamento Q . Uma expressão para Q é da forma:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int d\theta \frac{d\Phi}{d\theta} \quad (5.17)$$

A liberdade na escolha do vetor complexo constante normalizado $\vec{n}^{(0)}$ não induz uma classificação homotópico adicional. Note que o lagrangeano goza de uma simetria global (pois é independente de x) $SU(N+1)$. Diante de tais rotações globais $SU(N+1)$, podemos mudar continuamente de um valor de $\vec{n}^{(0)}$ para outro. A expressão (5.17) pode ser reescrita em função de A_μ . A componente θ de A_μ é dada por:

em $S_1^{(phy)}$,

$$A_\theta = \frac{i}{r} \vec{n}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{n} = -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{d\theta}$$

Então

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{1}{2\pi} \int_{(S_1^{(phy)})} d\theta r A_\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_1^{(phy)}} \vec{dl} \cdot \vec{A} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \end{aligned} \quad (5.18)$$

Usando a equação (5.7) podemos também reescrever Q como:

$$Q = -\frac{i}{2\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} (D_\mu \vec{n})^* \cdot (D_\nu \vec{n}) \quad (5.19)$$

Como fizemos nos casos anteriores usaremos a desigualde seguinte:

$$\int d^2x (D_\mu \vec{n} \pm i\varepsilon_{\mu\nu} D_\nu \vec{n})^* \cdot (D_\mu \vec{n} \pm i\varepsilon_{\mu\nu} D_\nu \vec{n}) \geq 0 \quad (5.20)$$

$$2 \int d^2x \{ (D_\mu \vec{n})^* \cdot (D_\mu \vec{n}) \pm i\varepsilon_{\mu\nu} (D_\nu \vec{n})^* \cdot (D_\nu \vec{n}) \} \geq 0$$

ou

$$S \geq 2\pi Q \quad (5.21)$$

As equações (5.14) e (5.21) são válidas para qualquer configuração de ação finita. Entretanto, enquanto a desigualdade em (5.20) permanecer, isto é, quando S atingir seu valor mínimo num dado setor Q , o campo extremará a ação neste setor e satisfará a equação de campo. A condição para a desigualdade (5.20) valer é claramente:

$$D_\mu \vec{n} = \pm i \varepsilon_{\mu\nu} D_\nu \vec{n} \quad (5.22)$$

Repare que a equação (5.22) é uma equação diferencial de primeira ordem, mais fácil resolver do que (5.13). Minimizando S , as soluções da equação (5.22) resolverão a equação (5.13) mas o contrário não é necessariamente verdadeiro.

Para resolver a equação (5.22) faremos uma mudança de variável, vamos substituir \vec{n} por um conjunto de variáveis invariantes perante uma transformação de gauge. Lembre-se que devido ao vínculo $\vec{n}^* \cdot \vec{n} = 1$, todos os campos $n_a(x)$ não são nulos em nenhum ponto. Considere uma região R_1 no espaço de coordenada, onde $n_1 \neq 0$. Nesta região, definimos

$$\vec{W}(x) \equiv \frac{\vec{n}(x)}{n_1(x)} \quad (5.23)$$

Note que os campos $\vec{W}(x) \equiv \{W_a, a = 1, \dots, N+1\}$ são invariantes perante uma transformação de gauge. A transformação (5.4) introduz o mesmo fator $\exp i\Lambda(x)$ no numerador e no denominador de (5.23). Assim $W_1(x) = 1$ para todo x pertencente a R_1 de tal maneira que há somente N campos complexos W_a invariantes perante uma transformação de gauge. Isto é consistente com a dimensão do modelo CP_N . A medida que avançamos na região R_1 , n_1 poderá anular-se e a definição (5.23) não será mais válida. Entretanto devido a $\vec{n}^* \cdot \vec{n} = 1$ deverá ter uma região contínua R_2 onde alguma outra componente chamada n_2 não é nula. Alí, definimos W' como:

$$\vec{W}' = \frac{\vec{n}}{n_2} \quad (5.24)$$

Podemos escolher n_2 de tal maneira que R_1 e R_2 coincidirem numa sub-região onde, nem n_1 , nem n_2 são nulos. Nesta sub-região, W e W' são relacionados por:

$$\vec{W}' = \frac{\vec{W}n_1}{n_2} \quad (5.25)$$

Desta maneira podemos definir W (ou W' , W'' etc.), dividindo o espaço em regiões de superposição e definindo os campos da mesma forma que na equação (5.25) nas regiões de superposição.

A equação (5.22) é local, então nós vamos a resolvê-la em qualquer uma das regiões, por exemplo R_1 onde W é definido por (5.23). Os mesmos argumentos são válidos para qualquer uma das regiões, e as soluções são obtidas continuamente de uma região para outra usando a relação (5.25). Vamos reescrever (5.22) em função de W . Temos:

$$\vec{n} = n_1 \vec{W}$$

Então (5.22) torna-se:

$$D_\mu(W_a n_1) \pm i\varepsilon_{\mu\nu} D_\nu(W_a n_1); \quad a = 1, \dots, N + 1$$

ou

$$W_a D_\mu n_1 + n_1 \partial_\mu W_a = \pm i\varepsilon_{\mu\nu} (W_a D_\nu n_1 + n_1 \partial_\nu W_a). \quad (5.26)$$

Usando a equação (5.22) para n_1 a fim de cancelar os dois primeiros termos dos dois membros da equação (5.26) e dividindo os dois termos sobrando por n_1 temos:

$$\partial_\mu W_a = \pm i\varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu W_a \quad (5.27)$$

Note que na equação (5.27) temos derivadas ordinárias e não derivadas covariantes. Como no modelo $O(3)$ a equação (5.27) pode ser reconhecida como a condição de Cauchy-Riemann. O sinal menos especifica que W_a é uma função analítica de $Z = x_1 + ix_2$. O sinal mais mostra que W_a é uma função analítica de Z^* .

Assim encontramos nosso instanton. Qualquer conjunto de funções analíticas $W_a(Z)$; $a = 2, \dots, N + 1$, com $W_1 = 1$, resolverá (5.22). Pelos argumentos dados acima, sempre que estas funções forem escritas em função de \vec{n} e x_μ , elas darão soluções de ação finita exatas explícitas da equação de campo euclidiano (5.13). Estas soluções são então os instantons deste modelo.

Como exemplo vamos escolher

$$\vec{W}(Z) = \vec{u} + \left[\frac{(Z - Z_0)}{\lambda} \right] \vec{v} \quad (5.28)$$

onde \vec{u}, \vec{v} são qualquer par de vetores complexos ortonormais satisfazendo

$$u_1 = 1, \quad \nu_1 = 0 \\ \vec{u}^* \cdot \vec{u} = \vec{v}^* \cdot \vec{v} = 1 \quad \text{e} \quad \vec{u}^* \cdot \vec{v} = 0$$

Claramente (5.28) é um conjunto de funções analíticas e então uma solução. A constante λ é um número real e representa o tamanho do instanton enquanto o número complexo $Z_0 \equiv (x_1)_0 + i(x_2)_0$ representa sua posição no plano $Z = x_1 + ix_2$. A liberdade de escolher λ e Z_0 arbitrariamente reflete a escala e a invariância perante uma translação da ação (5.11). Para escrever a solução mais explicitamente vamos inverter a equação (5.23). Teremos:

$$\vec{n} = n_1 \vec{W} = \frac{\vec{W}}{|\vec{W}|}, \quad \text{onde} \quad |\vec{W}|(\vec{W}^* \cdot \vec{W})^{\frac{1}{2}} = |n_1|^{-1}$$

Inserindo (5.28) na expressão de \vec{n} acima, a solução torna-se;

$$\begin{aligned} \vec{n}(Z) &= \frac{\vec{W}}{|\vec{W}|} = \frac{\vec{W}}{(\vec{W}^* \cdot \vec{W})^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\vec{u} + \frac{(Z-Z_0)}{\lambda} \vec{v}}{\left(1 + \frac{|Z-Z_0|^2}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\lambda \vec{u} + (Z-Z_0) \vec{v}}{\lambda}}{\frac{(\lambda^2 + |Z-Z_0|^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda}} \\ &= \frac{\lambda \vec{u} + (Z - Z_0) \vec{v}}{(\lambda^2 + |Z - Z_0|^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (5.29)$$

É realmente direto verificar explicitamente se $n(Z)$ resolve a equação de campo (5.13). Assim no infinito espacial, quando $Z \rightarrow \infty$, temos;

$$\vec{n}(Z) \rightarrow \left(\frac{Z}{|Z|}\right) \vec{v} = \exp(i\theta) \vec{v}$$

o que satisfaz a condição de contorno (5.16) com a fase angular $\Phi(\theta) = \theta$. Sabendo que $A_\theta = -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{d\theta}$ e $Q = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_1^{(phy)}} d\theta r A_\theta$, determinamos o valor do setor Q;

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{S_1^{(phy)}} d\theta r \cdot \frac{1}{r} \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_1^{(phy)}} d\theta = 1$$

Vimos que a solução $n(Z)$ pertence ao setor $Q = 1$ e representa um único instanton. O anti-instanton é obtido substituindo Z por Z^* . Para os multi-instantons a escolha de $W(Z)$ é mais complicada.

É profícuo escrever A_μ e Q diretamente em função de $W(Z)$.

$$\begin{aligned}
A_\mu &= i(\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n}) \\
&= \frac{i}{2|\vec{W}|^2} (\vec{W}^* \cdot \partial_\mu \vec{W} + \vec{W} \cdot \partial_\mu \vec{W}^*) \\
&= \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \frac{\vec{W}^* \cdot \partial_\nu \vec{W} + \vec{W} \cdot \partial_\nu \vec{W}^*}{|\vec{W}|^2} \\
&= \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial_\nu (\vec{W}^* \cdot \vec{W})}{|\vec{W}|^2} \\
&= \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial_\nu |\vec{W}|^2}{|\vec{W}|^2} \\
&= \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \ln |\vec{W}|^2
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Da mesma maneira temos:

$$\begin{aligned}
Q &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \\
&= \pm \frac{1}{4\pi} \int d^2x \partial_\mu \partial_\mu \ln |\vec{W}|^2
\end{aligned} \tag{5.31}$$

A ação, conforme a igualdade em (5.21) é $S = 2\pi Q$. Inserindo (5.28) em (5.31) teremos $Q = 1$ e então $S = 2\pi$.

Finalmente vimos que o modelo CP_N goza de uma invariância de gauge; lembre-se também que o modelo CP_N é quase o mesmo do que o modelo $O(3)$ para $N = 1$. Neste caso o modelo CP_1 tem dois campos complexos n_i , $i = 1, 2$ com o vínculo $\sum_i |n_i|^2 = 1$. A partir dos campos complexos construímos os campos reais Φ^a , $a = 1, 2, 3$ tais que:

$$\Phi^a \equiv n_p^* (\sigma^a)_{pq} n_q \tag{5.32}$$

onde os σ^a são os três matrizes de Pauli. Explicitamente os Φ^a são:

$$\begin{cases} \Phi^1 = 2R_e(n_1^* n_2) \\ \Phi^2 = 2I_m(n_1^* n_2) \\ \Phi^3 = |n_1|^2 - |n_2|^2 \end{cases}$$

Assim a densidade lagrangeana (5.2) escrita em função dos Φ^a tem a forma $L(x) = \sum_a (\partial_\mu \Phi^a)(\partial_\mu \Phi^a)$.

Conclusão geral

Foi mostrado que o modelo sigma não linear é muito importante em duas dimensões (pois gera instantons). Ele é caracterizado por uma infinidade de quantidades conservadas. O modelo $O(3)$ é muito relevante na descrição da mecânica estatística de um antiferromagneto isotrópico. Vimos que as pequenas oscilações linearizadas do sóliton estático no modelo sigma não linear anisotrópico em duas dimensões modificam a energia destas configurações. As soluções das equações de campo euclidiano do modelo $O(3)$ em duas dimensões são análogas às configurações de campo de merons que existem nas teorias de gauge em quatro dimensões. Vimos também que as interações meron-meron e meron-anti-meron são idênticas às interações do gás de Coulomb em duas dimensões. Enfim espera-se que este trabalho sirva de apoio bibliográfico para físicos interessados nas aplicações do modelo $O(3)$.

Referências bibliográficas

- 1- R. Rajaraman, Solitons and Instantons (North-Holland, Amsterdam, 1984).
- 2- A. S. T. Pires and S. L. Talim, Z. Phys. **B 69**, 283 (1987).
- 3- T. Watanabe and H. Otsu, Prog. Theor. Phys. **65**, 164 (1981).
- 4- Yang, C. N. and Mills, R. (1954), Phys. Rev. **96**, 191.
- 5- A. A. Belavin and A. M. Polyakov, JETP Lett. **22**, 245 (1975).
- 6- A. R. Pereira, A. S. T. Pires, and M. E. Gouvêa, J. Magn. Mater. **134**, 121 (1994).
- 7- S. Chakravarty, B. I. Halperin, and D. R. Nelson, Phys. Rev. Lett. **60**, 1057 (1988).
- 8- D. J. Gross, Nucl. Phys. **B132**, 439 (1978)
- 9- A. M. Kosevich, Sólitons (North-Holland, Amsterdam, 1986).
- 10- F. D. M. Haldane, Phys. Lett. **93A**, 464 (1983).
- 11- G. Woo, Harvard preprint (1977).
- 12- C. Callan, R. Dashen and D. Gross, Phys. Lett. **66B** (1977) 375; I. A. S. preprint COO-2220-115 (june, 1977).
- 13- A. M. Polyakov, Phys. Lett. **59B** (1975) 82.
- 14- A. A. Balavin, A. M. Polyakov, A. S. Scwartz and Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. **59B** (1975) 85.
- 15- Cremmer, E. and Scherk, J. (1978), Phys. Lett.**74B**, 341.
- 16- Eichenherr, H. (1978), Nucl. Phys.**B146**, 215.
- 17- Golo, V. and Perelemov, A. M. (1978) Phys. Lett.**79B**, 112.
- 18- Goldstein, H. (1950), "Classical Mechanics", Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., U.S.A.
- 19- Witten, E. (1979a), Nucl. Phys. **B149**, 285.
- 20- Witten, E. (1979b), Lectures at Cargese Summer School (1979), Harvard Preprint HUTP-79/A078.
- 21- D'Adda, A., Luscher, M., and DiVecchia, P. (1978), Nucl. Phys.**B146**, 63.

- 22- Faddeev, L D. (1974), Leningrad Preprint MPI-PAE/16.
- 23- A. A. Belavin and A. M. Polyakov, JETP Lett. **22** (1975) 245.
- 24- J. Kosterlitz and D. Thouless, J. of Phys. **C6** (1973) 1181.
- 25- J. Kosterlitz, J. of Phys. **C7** (1974) 1046.
- 26- A. Belavin and A. Zacharov, Landau Inst. preprint (1977).
- 27- R. S. Ward, Phys. Lett. **61A** (1977) 81.
- 28- R. Jackiw, C. Nohl and C. Rebbi, Phys. Rev. **D15** (1977) 1642.
- 29- V. de Alfaro. S. Fubini and G. furlan, Phys. Lett. **65B** (1977) 1631.
- 30- G.'t Hooft, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8.
- 31- T. H. R. Skyrme, Proc. R. Soc. London **A260**, 127 (1961).
- 32- F. D. M. Haldane, Phys. Lett. **93A**, 464 (1983).
- 33- J. P. Rodriguez, Phys. Rev. **B39** 2906 (1989).
- 34- J. F. Currie, J. A. Krumhansl, A. R. Bishop and S. E. Trullinger, Phys. Rev. **B29** 477 (1980).
- 35- Fradkin, Field Theories of Condensed Matter Systems (Addison-Wesley, Redwood City, 1991).
- 36- S. Caracciolo, R. G. Edwards, A. Pelissetto e A. P. Sokal, Phys. Rev. Lett.**75** (1995) 1891.
- 37- H. Flyvbjerg e S. Varsted, Nuclear Physics **B344** (1990) 646.