

**Rotação de ápsides e Método SIMPLEX no
Modelo WD para Binárias Eclipsantes**

Leandro de Abreu Vieira

Junho 2003

LEANDRO DE ABREU VIEIRA

**Rotação de ápsides e Método SIMPLEX no
Modelo WD para Binárias Eclipsantes**

Dissertação submetida à UNIVERSIDADE FEDERAL DE
MINAS GERAIS como requisito parcial para a obtenção do
grau de MESTRE EM FÍSICA.

Área de Concentração: ASTROFÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Luiz Paulo Ribeiro Vaz (UFMG)

Departamento de Física - ICEX - UFMG

2003

Agradecimentos

- Ao Professor Luiz Paulo pela orientação firme, pela paciência e pela compreensão;
- À todos os colegas e amigos da astrofísica e sala de astronomia;
- Ao CNPQ pelo auxílio monetário, sem o qual seria muito difícil realizar este trabalho;
- Ao Departamento de Física, como também ao seus corredores e escadas, cheios de pessoas conhecidas e desconhecidas.
- À Cantina;
- À UFMG, por ser um lugar agradável;
- Aos meus irmãos Shaolin;
- Àquele senhor que eu não conheço, mas que todo dia está na mesma esquina...
- Àqueles que nem ao menos sabem o quanto a simples presença contribuiu para o feitiço deste trabalho;
- Àquilo que não pode ser nomeado;
- Aos meus pais, por tudo.

爸 儿 孙
爸 子 子
模 模 模
子 子 子

第三十三章

知人者智，自知者明。
勝人者有力，自勝者強。
知足者富。
強行者有志。
不失其所者久。
死而不亡者壽。

*Aquele que conhece os outros é inteligente,
aquele que conhece a si mesmo é sábio.*

*Aquele que conquista os outros tem força,
aquele que conquista a si próprio é a força.*

*Aquele que conhece o contentamento é rico,
aquele que é determinado tem força de vontade.*

*Aquele que não perdeu seu domicílio, dura,
aquele que morre, mas não perece, é eterno.*

(Poema XXXIII, Tao Te Ching)

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Modelos de Sistemas Binários Eclipsantes	1
1.2	Rotação de ápsides	3
1.3	Métodos numéricos de solução	6
2	Movimento de Ápsides: Perturbações e Equações Planetárias	9
2.1	Introdução	9
2.2	Perturbações	12
2.3	Modificações necessárias no WD	17
3	O Método SIMPLEX	21
3.1	Considerações iniciais	22
3.2	Implementação	24
4	Aplicação à GL Carinae	26
4.1	Testes para o movimento de ápsides	27
4.1.1	Versão em precisão dupla	27
4.1.2	Testes com um sistema binário real	28
4.2	Testes para o Método SIMPLEX	35
5	Conclusão	39
	Referências	40
	Apêndices	43
A.1	MODIFICAÇÕES NO PROGRAMA WD	43
A.1.1	Subrotina <code>omgat.f</code>	43
A.1.2	Subrotina <code>faset.f</code>	44
A.1.3	Modificações estruturais	44
A.2	EQUAÇÕES DO MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS	45
A.3	ESQUEMA PARA SE FAZER UM SIMPLEX	47
A.3.1	Subrotina <code>reflex.f</code>	49
A.3.2	Subrotina <code>contrx.f</code>	49
A.3.3	Subrotina <code>shrinx.f</code>	49
A.3.4	Subrotina <code>fplex.f</code>	50

Lista de Figuras

1.1	Variações em curvas de luz de RU Mon, devido à rotação da linha dos ápsides	5
2.1	Órbita de uma estrela binária vista de cima.	10
2.2	Órbita de uma estrela binária.	11
2.3	Valores médios observados versus preditos do $\log k_2$	16
3.1	Possíveis saídas para um passo no Método SIMPLEX	24
4.1	Curva de luz e resíduos - Teste 1	32
4.2	Curva de luz e resíduos - Teste 2	33
4.3	Curva de luz e resíduos - Teste 3	34
4.4	Curva de luz e resíduos - Teste 4	36
4.5	Curva de luz e resíduos - Teste 5	37
4.6	Curva de luz e resíduos - Teste 6	38
A.1	Fluxograma para o algoritmo SIMPLEX	47

Lista de Tabelas

1.1	Características de alguns sistemas com rotação de ápsides. Tabela extraída de Faria, 1987. Note que alguns períodos apsidais devem ser estimados devido à escassez de dados.	6
2.1	Relação entre índices politrópicos n e coeficientes k	16
2.2	Valores de a_n	19
4.1	Dados de GL Car	30
4.2	Soluções com o Método de Mínimos Quadrados para o ano de 1982	31
4.3	Soluções com o Método de Mínimos Quadrados para o ano de 1983	32
4.4	Soluções do Modelo WD com os Métodos de Mínimos Quadrados e SIM- PLEX e do Modelo WINK para todas as observações	33
4.5	Soluções com o Método SIMPLEX para o ano de 1982	35
4.6	Soluções com o Método SIMPLEX para o ano de 1983	36

Resumo

Este trabalho apresenta os resultados de mais um esforço no sentido de melhorar o código computacional e as aproximações físicas do Modelo de Wilson–Devinney, denominado simplesmente WD, para a análise de curvas de luz e de velocidades radiais de sistemas binários eclipsantes. As melhorias aqui relatadas são: (1) possibilidade de tratar-se sistemas que apresentam movimento de ápsides (sistemas excêntricos cujo eixo maior não mantêm sua orientação fixa no tempo) e (2) possibilidade de fazer-se o ajuste dos parâmetros com o Método SIMPLEX (como alternativa para o Método de Mínimos Quadrados, originalmente implementado). Ambas as melhorias visam a tornar mais realista a análise dos sistemas observados.

O Modelo WD é tradicionalmente mais utilizado para sistemas denominados “cerrados”, onde as componentes possuem raios da ordem de 20% ou mais da separação orbital. Isso deve-se ao fato do modelo ser relativamente “caro” em termos computacionais, devido às aproximações mais realistas feitas no tratamento da forma assumida pelas componentes. Nesses sistemas cerrados (denominados “*close binaries*”), os efeitos de proximidade provocam, com o passar do tempo, uma atenuação da excentricidade orbital e, portanto, nunca se fez um esforço para a análise de sistemas excêntricos com o Modelo WD. Porém, com o advento de processadores cada vez mais rápidos e de observações cada vez mais precisas, o Modelo WD vem sendo cada vez mais necessário para a análise mais correta de sistemas menos cerrados, que podem possuir órbitas excêntricas e, conseqüentemente, podem apresentar movimento de ápsides. Isso justifica o nosso esforço.

A outra implementação no modelo, do método de minimização de funções denominado SIMPLEX, visa a evitar possíveis complicações que freqüentemente afetam o Método de Mínimos Quadrados, tradicionalmente utilizado. Tais complicações (derivadas parciais calculadas de forma imprecisa, distribuição não-normal de erros nas observações, correlação entre parâmetros considerados independentes, mínimos locais da função a ser minimizada no hiper-espço das variáveis, conjunto mal-condicionado de equações normais etc.) não existem na concepção do Método SIMPLEX e sua implementação, como mais uma opção no processo de solução, e serve para dar mais robustez às soluções. O procedimento de otimização SIMPLEX, por sua filosofia, não pode divergir, não faz uso de derivadas parciais, pode ser implementado de forma a fazer iterações automáticas, é operacionalmente estável e é computacionalmente eficiente.

As modificações implementadas foram testadas com dados da estrela binária GL Carinae (HD 306168, CoD $-59^{\circ}3630$, $V = 9^m.5$) para a qual geramos soluções que pudessem ser comparadas com resultados anteriormente publicados e aceitos pela comunidade científica internacional. Por comparação dos resultados (e.g., inclinação orbital, excentricidade da órbita etc), vemos que os nossos são, de certa forma, mais robustos que àqueles devido à aproximação mais realista para as componentes e também às aproximações numéricas, o que valida inteiramente as modificações apresentadas por nós.

Abstract

This work presents results of another attempt to improve the computational code and the physical approximations of the Wilson-Devinney Model, also named WD, for the analysis of the light curves and radial velocities of eclipsing binaries systems. The improvements presented here are: (1) possibility to treat systems with apsidal motion (eccentric systems whose major axis changes its orientation with respect to the observer with time), and (2) possibility to make the adjustment of the parameters with SIMPLEX Method (as an alternative to Least Square Method, originally implemented). Both improvements aim a more realistic analysis of the observed systems.

WD Model is traditionally used for the so-called “close” systems, where the components have radii larger than around 20% orbital separation. This is so because the model is relatively ”expensive” in computational terms due to the more realistic approximations made in the treatment of the figure of the components. In such systems (called “close binaries”), the proximity effects causes, as time passes, an attenuation of the orbital eccentricity and, then, an attempt for the analysis of eccentric systems with WD Model which has never been made. However, as the number of faster processors and more precise observations rise, WD Model becomes more necessary for the correct analysis of systems which potentially present apsidal motion. This justify our effort.

Another implementation in the model, namely the method of function minimization called SIMPLEX, aims avoiding common complications of the LEAST SQUARE Method, traditionally used. Such complications (inaccurate partial derivatives, not normal distribution of observational errors, correlation between parameters that should be independent, local minimum of the function to be minimized on the hyperspace of the variables, ill-conditioned set of normal equations, etc.) do not exist on the conception of the Method SIMPLEX and its implementation, as one extra option in the solution’s process, is useful to strengthen the solutions. The SIMPLEX optimization procedure, by its own philosophy, cannot diverge, does not use partial derivatives, can be implemented in a such way to make automatic iterations, it is operationally stable and computationally efficient.

The modifications implemented were tested with data from the binary star GL Carinae (HD 306168, CoD $-59^{\circ}3630$, $V = 9^m.5$) for which we made solutions that could be compared with previous published results and accepted by international scientific community. By comparison of the results (e.g., orbital inclination, eccentricity of the orbit etc), we can see that our results are, more robust than that ones mentioned before due the more realistic approximation for the components and too due the numerical approximations, it validates entirely the modifications presented by us.

Capítulo 1

Introdução

Para começar a falar de estrelas, é necessário primeiro ouvi-las e entendê-las tal como foi sabiamente dito por Olavo Bilac. Este entendimento pode ter diversas acepções. Para os gregos, as estrelas mostravam o reconhecimento dos deuses para com os feitos de diversos seres e pessoas (e.g., Hércules e Hydra), com o que tais seres ficariam no céu e seriam lembrados para sempre. Para os índios brasileiros, as estrelas significavam guerreiros mortos ou o fogo que é feito nas aldeias a noite.

Há milhares de formas de entendimento desses pontinhos luminosos e cintilantes. Eis aqui uma dessas formas.

1.1 Modelos de Sistemas Binários Eclipsantes

Nosso trabalho enquadra-se num espírito de análise mais “realista”, segundo o qual obtemos informações a partir de observações da Natureza, para daí podermos descrever e/ou sugerir uma interpretação consistente para a realidade do mundo que nos cerca, tal como os vemos. Para os estudos das estrelas, em particular, nossas teorias dizem-nos que os parâmetros mais importantes na determinação das características individuais são sua **massa** e sua **composição química**. Outras características tais como temperatura efetiva e raio que, combinadas, fornecem-nos a luminosidade, são funções dos dois parâmetros fundamentais e da idade da estrela. A composição química tem influência de segunda ordem, se comparada com a influência da massa nas características estelares. Dessa forma, para controlar nossas teorias a partir de dados, devemos obter das observações os parâmetros acima mencionados. Luminosidades, temperaturas efetivas e, em última instância, composição química podem, em princípio, ser determinadas a partir de observações fotométricas e espectroscópicas de estrelas isoladas. Caso essas estrelas pulsem, de forma mensurável, podemos, também em princípio, determinar seu tamanho, sua massa e, até mesmo, obter mais informações acerca da distribuição da massa em termos da distância ao seu centro. Porém, as estrelas não pulsam em todas as fases de seu desenvolvimento, passando a maior parte de sua vida em fases muito estáveis, com pulsações, como no caso do nosso Sol, muito pequenas para serem detectadas à distância. Para

estrelas que não variam, torna-se praticamente impossível determinar parâmetros como massa e raio. Precisamos, por assim dizer, de uma balança e uma régua adequadas. Na escala de dimensões das estrelas, encontramos nas *variáveis eclipsantes* uma fonte muito rica em informações dessas propriedades físicas, que podem nos ajudar a entender os caminhos evolucionários gerais de seu desenvolvimento. Essas variáveis eclipsantes são sistemas múltiplos, onde uma componente orbita em torno da(s) outra(s) e, por acaso, encontramos-nos como observadores relativamente próximos de seu plano orbital. Nesse caso, vão ocorrer eclipses ao longo da linha de visada com determinada periodicidade e, com uma simples aplicação de princípios básicos de física (Leis de Kepler), podemos usar suas componentes estelares como “balança” e “régua” adequadas para medir mutuamente suas massas e raios. Ao observarmos (medirmos) a luz proveniente desses sistemas, os eclipses que ocorrem periodicamente causam decréscimos no brilho total e, devido ao seu movimento orbital, detecta-se, também, variações nas linhas espectrais da luz que recebemos (Efeito Doppler) do chamado Sistema Binário Eclipsante (de agora em diante chamado SBE). Por meio da análise combinada desses fenômenos, podemos determinar simultaneamente as massas, raios e temperaturas efetivas das componentes dos SBE's.

Então, o estudo de SBE's tem enorme importância para o desenvolvimento da Astrofísica atual, visto que a análise das perturbações que esses sistemas sofrem (deformação das componentes, efeitos relativísticos, presença de um terceiro corpo e de um meio resistivo) levam à determinação direta das características físicas dos componentes individuais, que são impossíveis (e.g., massa) de determinar-se diretamente para as estrelas solitárias. A análise de sistemas múltiplos é a principal fonte de dados observacionais para testar-se as teorias evolutivas.

Um dos métodos iniciais para determinar-se os elementos orbitais a partir da curva de luz foi chamado “modelo esférico”, devido a H.N. Russell e a J.E. Merrill (Russell, 1946, Russell & Merrill, 1952). Por meio de modelos simples, uma análise matemática das curvas de luz permitiu determinar alguns dos elementos do SBE (os raios e brilhos relativos das estrelas e sua inclinação orbital). Rapidamente, as observações evidenciaram que era possível, também, estudar “efeitos finos” como o quão desviadas da forma esférica as componentes estão, a lei do escurecimento de bordo para o disco estelar e o chamado “efeito reflexão” (aquecimento mútuo entre as componentes) manifestando-se em um sistema binário. Os modelos começaram a evoluir para levar em conta os efeitos que as observações evidenciavam, e logo reconheceu-se a impossibilidade de resolver-se os parâmetros orbitais a partir das observações com modelos analíticos. Com o surgimento dos computadores, apareceram os modelos numéricos, entre os quais podemos citar o WINK (Wood, 1972) e o WD (Wilson & Devinney, 1971).

Os métodos de análise de curvas de luz conseguem determinar principalmente a inclinação orbital e os tamanhos (relativos à separação orbital) das componentes. Muito pouca informação direta é obtida acerca das massas individuais. Porém, as órbitas espectroscópicas das componentes relativas ao centro de massa do SBE, determinadas a partir de curvas de velocidades radiais, fornecem-nos valores absolutos (em km/s) das velocidades projetadas ($v \sin i$) na linha de visada, além de valores absolutos (em kg ou massas solares, M_{\odot}) de uma combinação de massas e inclinação orbital ($m \sin^3 i$). Então, um conhecimento da inclinação do plano orbital torna possível determinar não apenas os elementos geométricos, mas também as massas das componentes eclipsantes, as dimensões físicas da órbita e, conseqüentemente, o tamanho das componentes em unidades absolutas.

À medida que os estudos foram sendo realizados, as observações, cada vez mais pre-

cisas, demonstraram a existência de um grande número de aspectos que necessitavam tratamento mais consistente para testar as teorias de formação, estrutura e evolução estelares, que também foram se tornando cada vez mais realistas. Inúmeras implementações têm sido realizadas nos modelos, tanto em aspectos teóricos quanto em detalhes numéricos. Em nosso grupo, temos trabalhado essencialmente com 3 modelos de SBE, aqui descritos com relação à aproximação geométrica para a forma assumida pelas componentes:

- SBOP (“Spectroscopic Binary Orbiting Program”, Etzel, 1985) e EBOP (“Eclipsing Binary Orbiting Program”, Popper & Etzel, 1981): idealizados para sistemas onde as componentes são bem pequenas em relação à separação orbital e, portanto, possuem sua forma aproximada por esferóides oblatos;
- WINK: adequado para análise de curvas de luz de SBE com componentes relativamente próximas entre si, cuja forma pode ser aproximada por elipsóides de três eixos;
- WD: adequado para tratar sistemas em qualquer estado de proximidade, inclusive em semi-contacto (contacto com as respectivas superfícies equipotenciais de Roche) ou, até mesmo, superando-as ligeiramente.

O Modelo WD é o modelo mais consistente em termos da forma geométrica considerada para as componentes, e o mais abrangente, em termos das soluções numéricas possíveis, enquanto que o Modelo WINK é superior no tocante à física do tratamento fotométrico do modelo, após inúmeras modificações (Vaz 1984, 1986). As diferenças em favor do WINK, com relação ao WD, estão, entretanto, diminuindo. Além do WD permitir soluções simultâneas de várias curvas de luz e de curvas de velocidades radiais - possibilidades não presentes no Modelo WINK - as aproximações físicas para o tratamento fotométrico (modelo de atmosferas, Vaz *et al.*, 1995), incluindo resultados teóricos (Alencar *et al.*, 1999, Alencar & Vaz, 1997, 1999), estão sendo paulatinamente introduzidas em ambos os modelos.

Uma das modificações significantes introduzidas no Modelo WINK, e ainda não presente no WD, é a possibilidade de tratar sistemas que apresentam rotação de ápsides (Faria, 1987). Uma outra melhoria, já implementada na literatura, mas ainda ausente de nossa versão, é a substituição do Método de Mínimos Quadrados, comum a todos os três modelos acima citados, por outro método com características diferentes, o SIMPLEX (Kallrath, 1987). O uso do Método SIMPLEX com o Modelo WD foi na análise do SBE núcleo de uma nebulosa planetária MT Serpentis (Bruch *et al.*, 2001).

1.2 Rotação de ápsides

De acordo com as leis de movimento, a órbita de uma massa puntual sob a influência do campo gravitacional de um outro corpo é uma curva da família das cônicas (círculo, elipse, parábola ou hipérbole). Essa curva é estável, isto é, repete-se indefinidamente, somente se algumas condições são satisfeitas (ver seção 2.2), caso contrário, a órbita não se fecha após cada ciclo. Quando as perturbações são pequenas, pode-se considerar que a órbita fechada movimenta-se no espaço.

Para melhor visualizarmos essa mudança na órbita, podemos tomar como referência o eixo maior da órbita do sistema, a chamada *linha dos ápsides*. A posição desse eixo

é determinada, em princípio, pela longitude do periastro ω , que é o ângulo que a linha dos ápsides faz com o nodo ascendente da órbita (interseção entre o plano celeste e o plano orbital no qual o corpo está.) Esse ângulo seria constante se não houvesse essas perturbações e, de acordo com as leis da dinâmica, ele somente será constante se:

1. Os corpos criam campos gravitacionais como se fossem massas pontuais;
2. Os campos gravitacionais seguem a lei de gravitação de Newton (lei r^{-2});
3. Os corpos formam um sistema isolado gravitacionalmente.

Em SBE's cerrados, as estrelas provocam distorções uma na outra e, como consequência, as componentes perdem sua simetria esférica (já alterada por forças inerciais devido à rotação). Com isso, as componentes não se equivalem a massas pontuais, para efeito de geração do campo gravitacional, e a órbita não se fecha (ou, equivalentemente, começa a mover-se). Esse efeito está presente em maior ou menor grau em todos os sistemas binários. Outra causa de desvio das três condições acima, é uma situação em que a configuração do sistema é tal que os campos gravitacionais são muito intensos ou em que as componentes aproximam-se de tal forma que as aproximações Newtonianas sejam insuficientes. Com isso, é necessário lançar mão da teoria da Relatividade Geral, como no caso da precessão da órbita de Mercúrio em torno do Sol. Esse efeito aparece em sistemas com componentes massivas e/ou em sistemas de órbita muito excêntrica. Finalmente, qualquer sistema embebido em um meio resistivo (nuvem) ou que possua componentes além do par eclipsante (sistemas múltiplos) não pode ser considerado um sistema isolado e, mais uma vez, a órbita não vai se fechar e precessará conseqüentemente.

Como queremos interpretar os sistemas observados de forma cada vez mais realista, é necessário que reconheçamos a existência dessas perturbações em nossa análise. As condições listadas acima são válidas para estrelas que gerem seu campo gravitacional como se fossem estritamente esféricas, isoladas da presença de outro corpo de uma massa apreciável. Portanto, se essas condições não são satisfeitas, o tamanho, a forma e a posição espacial da órbita variarão. E, de todas as variações, a posição da órbita é a mais fácil de detectar-se em sistemas eclipsantes.

Como a órbita varia sua orientação com relação ao observador e, de modo geral, o período orbital é muito curto em relação ao do movimento dos ápsides, a determinação do período de rotação de ápsides não pode ser feita diretamente de uma curva de luz do sistema em um pequeno número de ciclos, mas somente por meio da análise de uma extensa coleção de tempos de mínimo de luz (eclipses), observando a variação no tempo das posições relativas desses mínimos e também de sua duração. O efeito observável é mostrado na Figura 1.1, que dá a variação da curva de luz de RU Mon em um período de aproximadamente 60 anos, junto com as correspondentes posições da órbita (o observador está no plano da figura). Podemos notar uma diferença na duração dos mínimos, apesar dessa variação ser menos evidente, por exemplo, na curva de 1907-1910, para $\omega \sim 0^\circ$, pois ambos os mínimos têm a mesma largura, ao passo que na curva de 1964-1965, a largura do mínimo secundário tem quase duas vezes a do mínimo primário, com ω próximo de 90° . Deve-se lembrar que a largura de ambos os mínimos está variando (conseqüência direta da segunda lei de Kepler) e, portanto, a duração relativa dos tempos de mínimos varia com ω .

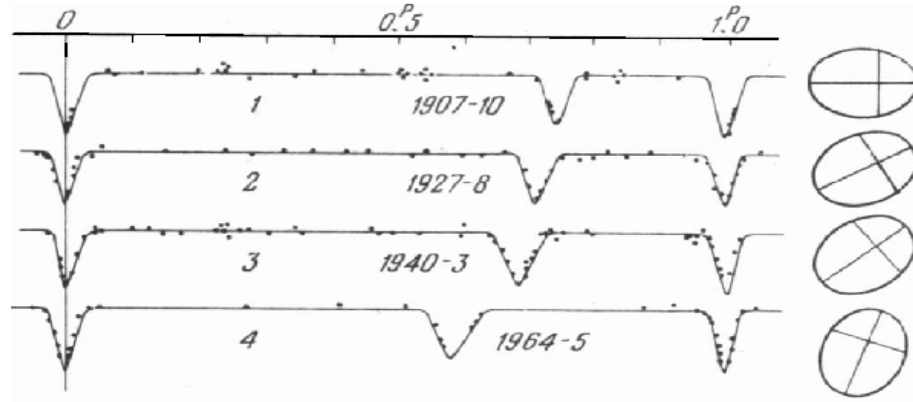


Figura 1.1: Variações progressivas em curvas de luz de RU Mon, devido à rotação da linha dos ápsides. (Figura retirada de Smart, 1953)

Quando se detecta um sistema com movimento apsidal, a causa desse efeito pode ser a violação de qualquer das três condições acima, ou, ainda, de uma combinação delas. Torna-se necessário determinar a contribuição de cada uma delas para identificar a causa principal. Para determinarmos a componente relativística do movimento apsidal, devemos conhecer as massas das componentes, o período e a excentricidade da órbita. Já para determinarmos a contribuição da interação de maré, devemos conhecer seus raios relativos e os parâmetros de concentração de massa, k_2 (ver seção 2.2), que dependem da estrutura interna de cada componente e são determinados a partir de cálculos de estrutura e evolução estelar. Vale mencionar que quanto maior é o valor de k_2 , mais descentralizada será a massa da componente. (Petrova, 1999).

Como a determinação das diversas contribuições ao movimento de ápsides depende de parâmetros estelares das componentes, a solução desses sistemas tem de ser feita de forma iterativa. Ao detectar-se evidência de movimento de ápsides em algum sistema, determina-se o seu período (após a obtenção relativamente demorada de uma coleção suficiente de tempos de mínimo) e parte-se para a determinação das dimensões absolutas preliminares do sistema, conseguidas a partir da análise conjunta de curvas de luz e de velocidades radiais. Como os períodos orbitais são relativamente curtos em relação aos períodos apsidais ($P_a/U \sim 10^{-4}$), pode-se supor que as observações de uma determinada época ocorreram com uma única posição da órbita, ou seja, supor que a órbita esteja fixa no espaço. Além disso ser uma aproximação sabidamente errada (pois sabemos que o sistema teve sua órbita alterada durante as medidas), muitas vezes o intervalo de tempo que cobre as observações é grande (ver Fig. 1.1) e os parâmetros determinados estarão seriamente comprometidos. Torna-se necessário, portanto, um modelo que consiga tratar os dados levando em conta a variação da posição da órbita relativa ao observador.

Uma parte do que vamos fazer neste trabalho é introduzir modificações no Modelo WD que permitam a análise de sistemas que apresentem variação (suposta conhecida) da linha dos ápsides, independente de qual ou quais das perturbações supracitadas sejam as responsáveis pelo fenômeno (ver Capítulo 2). Na versão original do programa temos que a longitude do periastro (ω) é constante no tempo. Para sistemas com $d\omega/dt$ diferente de zero, a solução não estará correta. Faremos isso de forma análoga à utilizada por Faria (1987) para introduzir a mesma possibilidade no Modelo WINK, ou seja, de forma

a poder-se analisar as curvas de luz de um SBE que apresente rotação de ápsides.

Na Tabela 1.1 identificamos alguns sistemas com rotação de ápsides. São sistemas que, além de possuírem, em geral, grandes excentricidades, também apresentam longos períodos apsidais.

Tabela 1.1: Características de alguns sistemas com rotação de ápsides. Tabela extraída de Faria, 1987. Note que alguns períodos apsidais devem ser estimados devido à escassez de dados.

Estrela	Tipo Espectral	Período orbital (dias)	e	$\frac{M_p}{M_s}$	Período Apsidal (anos)
AG Per	B5V	2,03	0,07	1,13	72
HV 7498	A0	3,47	0,55	1,08	600
YY Sgr	B8/B9II	3,47	0,55	1	330
CO Lac	B9V	1,54	0,03	1	40
V523 Sgr	A4II/III	2,32	0,17	1	200

1.3 Métodos numéricos de solução

Outro aspecto do presente trabalho está relacionado com o método utilizado no ajuste dos dados. A análise pela qual as curvas de luz dos SBE's passam envolve muitos detalhes distintos:

1. o modelo físico (leis físicas, teorias e aproximações utilizadas);
2. a representação matemática e numérica (tradução do modelo físico em equações aproximativas);
3. método de ajuste do modelo às observações e discussão dos erros dos parâmetros determinados.

O primeiro aspecto requer a escolha de um modelo físico apropriado para a investigação. Nossa escolha recai no Modelo WD, que estamos aprimorando com a introdução do tratamento de sistemas com movimento de ápsides.

O segundo aspecto refere-se às aproximações feitas no equacionamento matemático e numérico das teorias físicas. Quanto maior o grau de exatidão na correspondência das equações utilizadas e a teoria que pretendem reproduzir, mais consistente é o modelo. Infelizmente, em geral, os modelos mais consistentes são, também, os mais complexos e elaborados, sendo “caros” em tempo computacional. Procura-se, sempre, um compromisso satisfatório entre exatidão e eficiência numérica.

O terceiro aspecto diz respeito ao procedimento de ajuste do modelo às observações, ou seja, à otimização de um conjunto de parâmetros que reproduza o mais perfeitamente possível os dados. Há duas formas genéricas para determinar-se a solução do problema (ou seja, encontrar quais os parâmetros que, colocados no modelo, reproduzam as observações): direta e inversa (ver Vaz, 1977). Pela forma direta, utilizamos informações obtidas diretamente das observações (como a razão das durações dos mínimos tanto entre

si como em relação ao período orbital, a razão das profundidades dos mínimos, sua posição relativa, sua curvatura na parte mais profunda etc.) para, por meio de propriedades dos modelos (tabelas, nomogramas etc.), obtermos valores para os seus parâmetros a fim de, então, calcularmos as curvas de luz. Comparamos a curva de luz resultante com as observações e, iterativamente, melhoramos a solução. É um processo essencialmente analítico, que somente pode ser aplicado a modelos relativamente simples, como o de Russell-Merrill (ver Seção 1.1, pág. 2). Modelos complexos como o WINK ou o WD, que procuram incluir aproximações físicas mais consistentes, tornam impraticável a solução do problema direto. Nesse caso, temos de aplicar o problema inverso.

No problema inverso, precisamos de um modelo que, a partir de valores fornecidos para os parâmetros, produza uma curva de luz que possa ser comparada com as observações. Uma vez que consigamos, de algum modo, um conjunto de parâmetros iniciais com os quais o modelo produza uma solução aproximada, utilizamos algum método de ajuste para otimizar os parâmetros iniciais.

Um dos métodos de ajuste mais universalmente utilizados é o Método de Mínimos Quadrados (ver, por exemplo, Khaliullina *et al.*, 1984). Todos os modelos de SBE's utilizados por nosso grupo (WINK, EBOP, WD) fazem uso desse método. Apesar da universalidade do Método de Mínimos Quadrados, sua aplicação exige alguns cuidados. Em primeiro lugar, o método depende do cálculo de derivadas parciais da função a ser minimizada com relação aos parâmetros a serem ajustados. Além de ser uma grandeza “cara” (em termos computacionais) de ser calculada, a existência de mínimos locais no hiperespaço dos parâmetros é um fenômeno comum. Além do mais, uma das hipóteses fundamentais para a aplicação do método é a de que as medidas a serem ajustadas devem apresentar uma distribuição **normal** de erros, os quais não devem se correlacionar com as próprias medidas. Isso não é o caso, pois temos que as medidas fotométricas apresentam uma estatística de Poisson (Ross, 1987) a qual diz que quanto mais fraca é uma medida, maior seu erro. Uma hipótese adicional é a de que não existem correlações entre os parâmetros, que são considerados independentes. Também essa hipótese não pode ser garantida para todos os casos.

Todos esses aspectos causam confusão no processo de solução com o Método de Mínimos Quadrados, levando, freqüentemente, a soluções incorretas. Todos os métodos de ajuste apresentam qualidades e deficiências e precisam ser bem compreendidos antes de serem utilizados. Quando se tem cuidado, as soluções e suas margens de incerteza são bem determinadas e confiáveis. Seria, porém, desejável poder comparar a solução obtida com outro método para o ajuste das observações. Kallrath & Linnell (1987) apresentaram um método alternativo que possui características bastante diferentes daquelas do Método de Mínimos Quadrados e de muitos outros métodos de minimização de funções. Esse método baseia-se numa busca lógica do mínimo de uma determinada função, sem depender de nada além de um mecanismo para o cálculo de seu valor. Tal método recebeu o nome de SIMPLEX (Nelder *et al.*, 1965). Entre as desvantagens do Método de Mínimos Quadrados mencionadas por Kallrath & Linnell (1987) em seu trabalho estão:

1. O método requer que o conjunto inicial de parâmetros seja bastante próximo do mínimo real (para evitar mínimos locais);
2. A convergência para uma solução ótima requer valores precisos (portanto “caras”, computacionalmente) das derivadas parciais;

3. O Método de Mínimos Quadrados é muito sensível à existência de correlação entre parâmetros;
4. A matriz formada por todas as derivadas parciais é freqüentemente degenerada;
5. Os critérios de convergência, para parar as iterações, podem ser arbitrários (na verdade, um problema comum a vários métodos).

Em suma, esses problemas podem ser reduzidos a problemas de precisão e de eficiência no processo de solução. Kallrath & Linnell sugerem duas possíveis ações para resolver a situação. Uma delas seria calcular as derivadas parciais analiticamente, mudança essa que proporciona alta precisão e dispensa um bom número de curvas de luz calculadas. Porém, isto não é possível para todos os parâmetros. A segunda ação é dispensar o uso de derivadas parciais por completo, o que é conseguido por meio do uso do Método SIMPLEX, ação que adotaremos neste trabalho.

A seguir, descreveremos a detalhes o fenômeno de rotação de ápsides (Capítulo 2) e o modo como modificamos o código do Modelo WD. No Capítulo 3 falaremos do Método SIMPLEX de minimização de funções e de sua implementação no WD. O Capítulo 4 trata dos testes realizados para controle das implementações e o Capítulo 5 apresenta nossas conclusões e perspectivas para futuras implementações.

Capítulo 2

Movimento de Ápsides: Perturbações e Equações Planetárias

2.1 Introdução

O estudo de movimento apsidal em sistemas binários relativamente cerrados¹ é um dos melhores meios para testar-se modelos teóricos de interiores (estrutura) e evolução estelares. Nesse contexto, os SBE's fornecem não somente os dados mais precisos de parâmetros estelares fundamentais como também informações sobre fenômenos como distorções rotacionais e de maré, escurecimento de bordo, irradiação mútua etc., praticamente impossíveis de se estudar em estrelas isoladas ou outros tipos de sistemas estelares.

Uma importante consequência da atuação destas distorções na configuração estelar de sistemas binários excêntricos é uma mudança secular na posição da longitude do periastro. Tais distorções podem ser descritas como uma função da estrutura interna das estrelas componentes (Claret, 1993), como veremos mais adiante.

Como foi dito na introdução, para entendermos o movimento de ápsides, primeiramente devemos ter algumas condições que estabelecem o movimento elíptico para dois corpos gravitando em torno de um centro de massa comum. Tais condições são:

1. Os corpos são considerados como massas pontuais;
2. Seguem a lei da gravitação de Newton;
3. Formam um sistema isolado gravitacionalmente.

A Figura 2.1 mostra a órbita relativa de um sistema binário qualquer. O ângulo ν denota a longitude da órbita, ou longitude verdadeira, contada a partir da conjunção superior da componente luminosa. Como Faria menciona, o que realmente observamos são tempos de mínimos e não o tempo de passagem pelo periastro, cujo ângulo é dado

¹Aqui o termo “cerrado” significa que as estrelas estão próximas o bastante uma da outra de tal forma que a proximidade relativa tenha uma influência significativa durante a evolução das estrelas componentes.

pela anomalia verdadeira v , que é contada a partir da passagem do astro pelo periastro. A longitude eclíptica do nodo ascendente é Ω , N indica o nodo e ω indica a longitude do periastro, que nos possibilita localizar a órbita no espaço. Como podemos ver na figura abaixo. Uma visão mais geral dessa órbita pode ser vista na Figura 2.2.

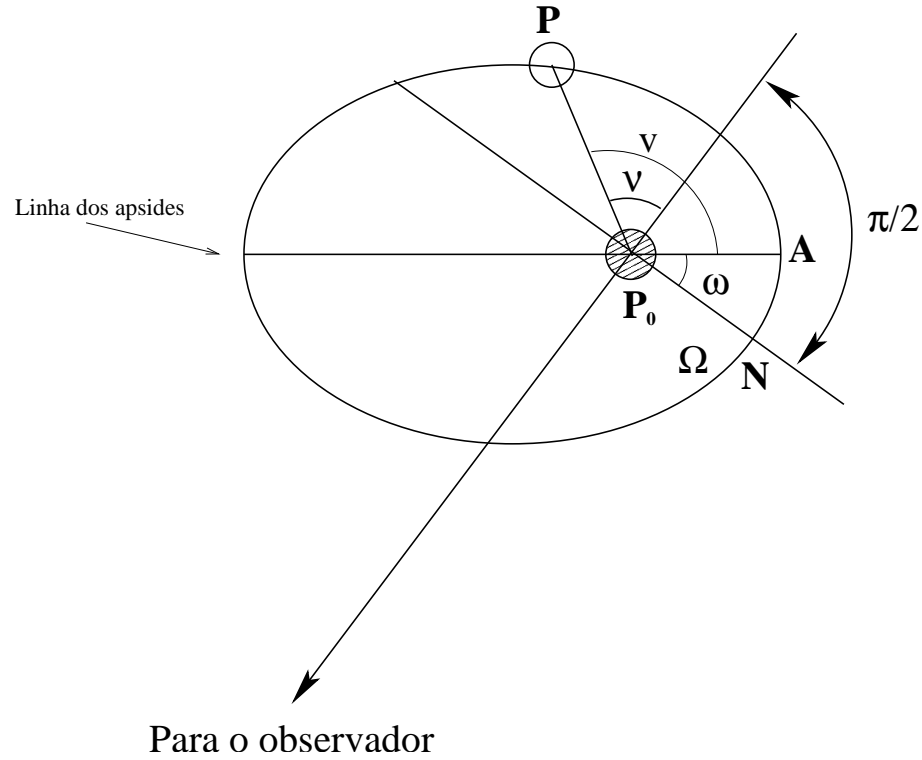


Figura 2.1: Órbita de uma estrela binária vista de cima.

A relação entre v e ν é então dada por ²:

$$v = \nu - \omega + \pi/2 \quad (2.1)$$

Em sistemas cerrados, a separação aparente entre os centros de ambas as componentes pode ser expresso por (Tsesevich, 1973):

$$\Delta = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \sin(\nu - \omega)} \sqrt{1 - \sin^2 i \cos^2 \nu} \quad (2.2)$$

Após localizarmos a órbita no espaço, o que queremos fazer agora é achar os ν 's para os quais ocorrem mínimos de luz e assim obtermos uma expressão para um tempo de mínimo qualquer. Para tanto, fazemos $d\Delta/d\nu = 0$ e $d^2\Delta/d\nu^2 > 0$ e obtemos:

$$\tan \nu_{1,2} = \mp \frac{e \cos \omega \cos^2 i}{\cos \nu_{1,2} \sin^2 i \pm e \sin \omega} \quad (2.3)$$

²Os ângulos estão em radianos.

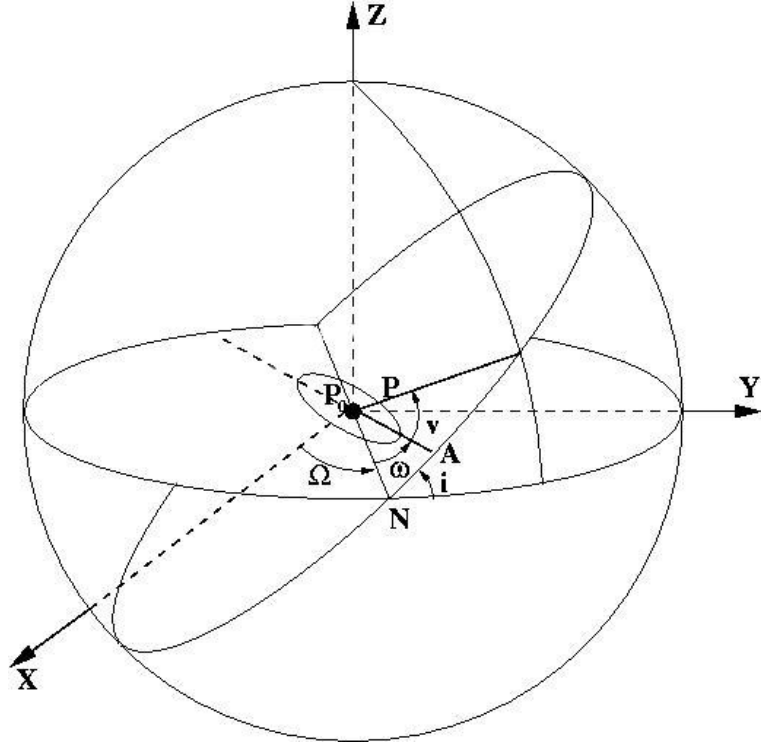


Figura 2.2: Órbita de uma estrela binária.

onde os índices 1,2 correspondem aos mínimos primário e secundário, respectivamente.

Feito isso, o que queremos agora é uma relação entre a anomalia verdadeira v e a anomalia média M , que é dada pela equação do centro. Esta equação expressa a diferença entre a posição que o astro estaria se se movesse uniformemente em um círculo e a sua posição relativa ao movimento em uma elipse, ou seja, a diferença $M - v$. Ela é usada como uma primeira aproximação da equação de Kepler $v = M + 2e \sin M$. Invertendo a equação e expandindo os termos temos (Martynov, 1973):

$$M = v + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^n \frac{(1 + n\sqrt{1 - e^2})}{(1 + \sqrt{1 - e^2})^n} \sin nv \quad (2.4)$$

Por definição,

$$M = \frac{2\pi(t - t_0)}{P_a}, \quad (2.5)$$

onde $t - t_0$ é o intervalo de tempo transcorrido desde a última passagem pelo periastro e P_a é o período orbital anomalístico (obtido por meio da anomalia verdadeira).

Reescrevendo a Eq. (2.5) numa forma tal que possamos introduzir o instante de tempo no qual $\nu = 0$, ou seja, para que possamos introduzir o tempo de mínimo t_{\min} , temos:

$$M = \frac{2\pi(t - t_{\min} + t_{\min} - t_0)}{P_a}, \quad (2.6)$$

e, pela Figura 2.1, podemos deduzir que

$$\frac{2\pi(t_{\min} - t_0)}{P_a} = \frac{\pi}{2} - \omega \quad (2.7)$$

Então, levando (2.6) e (2.7) em (2.4) obtemos uma expressão para um tempo qualquer como função do tempo de mínimo, a excentricidade, o período e a longitude da órbita:

$$t = t_{\min} + \frac{\nu P_a}{2\pi} + \frac{P_a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \right)^n \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1 - e^2} \right) \sin nv \quad (2.8)$$

Podemos também expressar a equação (2.8) como função da data do mínimo primário inicial relativo à época $E = 0$ (t_c) e do período sideral, de acordo com a equação linear:

$$t_{\min} = T_0 + P_s E \quad (2.9)$$

e

$$P_s = P_a \left(1 - \frac{\omega_1}{2\pi} \right). \quad (2.10)$$

Com isso, obtemos a equação mais geral para o estudo do movimento apsidal em um SBE, que é:

$$T = T_0 + P_s E + \frac{\nu P_a}{2\pi} + \frac{P_a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^n \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1 - e^2} \right) \sin nv, \quad (2.11)$$

sendo que o termo β foi tomado como:

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.12)$$

Vamos agora, uma vez que já introduzimos as equações para os elementos orbitais e para as condições de equilíbrio do sistema, fazer considerações sobre as possíveis perturbações que agem no sistema.

2.2 Perturbações

Na seção anterior falamos sobre os efeitos que o movimento de ápsides causam, obtivemos as equações do problema, bem como uma equação geral para o estudo do movimento de ápsides, mas não nos aprofundamos na causa primária deste movimento.

Esta seção trata destas causas primárias, ou seja, as perturbações nas equações de movimento, que passam a conter um termo perturbativo R , cuja natureza será especificada mais adiante, assim:

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (2.13)$$

A partir destas equações perturbadas, Lagrange (Smart, 1953) desenvolveu toda uma álgebra e obteve as equações para o sistema perturbado:

$$\sum_{r,i=1}^3 ([\alpha_r, \alpha_i] \dot{\alpha}_i + [\alpha_r, \beta_i] \dot{\beta}_i) = \frac{\partial R}{\partial \alpha_r} \quad (2.14)$$

$$\sum_{r,i=1}^3 ([\beta_r, \alpha_i] \dot{\alpha}_i + [\beta_r, \beta_i] \dot{\beta}_i) = \frac{\partial R}{\partial \beta_r} \quad (2.15)$$

os termos em colchetes são os colchetes de Lagrange e os termos α e β designam os elementos orbitais, como é mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a, & \alpha_2 &= e, & \alpha_3 &= \chi, \\ \beta_1 &= \Omega, & \beta_2 &= \omega, & \beta_3 &= i.\end{aligned}$$

fizemos $\chi = -nt_0$, com $n = 2\pi/P_a$, sendo n a velocidade angular média. E os colchetes de Lagrange são definidos como:

$$[u, v] = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial q_r}{\partial u} \frac{\partial p_r}{\partial v} - \frac{\partial p_r}{\partial u} \frac{\partial q_r}{\partial v} \right) \quad (2.16)$$

Assim, avaliando-se os colchetes de Lagrange para os respectivos elementos orbitais, obtemos:

$$\frac{-na\dot{\chi}}{2} - \frac{na\sqrt{1-e^2}(\dot{\Omega} \cos i + \dot{\omega})}{2} = \frac{\partial R}{\partial a} \quad (2.17)$$

$$\frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}}(\dot{\Omega} \cos i + \dot{\omega}) = \frac{\partial R}{\partial e} \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{2}na\dot{a} = \frac{\partial R}{\partial \chi} \quad (2.19)$$

$$\frac{na\sqrt{1-e^2}}{2} \cos i \left(\dot{a} - \frac{2ae}{1-e^2}\dot{e} - 2a \tan i \frac{di}{dt} \right) = \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2} \left(\dot{a} - \frac{2ae}{1-e^2}\dot{e} \right) = \frac{\partial R}{\partial \omega} \quad (2.21)$$

$$Pna^2\sqrt{1-e^2} \sin i \dot{\Omega} = \frac{\partial R}{\partial i} \quad (2.22)$$

Destas equações obtemos as equações de variação dos elementos orbitais com o tempo:

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \chi} \quad (2.23)$$

$$\dot{e} = \frac{1}{na^2e} \left[(1-e^2) \frac{\partial R}{\partial \chi} - \sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial a} \right] \quad (2.24)$$

$$\dot{\chi} = -\frac{(1-e^2)}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \quad (2.25)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (2.26)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (2.27)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\cot i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \csc i \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) \quad (2.28)$$

Estas são as chamadas *equações planetárias* em termos de a , e , χ , Ω , ω e i . Elas mostram a variação dos elementos orbitais com o tempo. Tais variações são seculares e, no momento, a única que nos interessa é a 2.27.

É preciso fazer-se uma pausa aqui para podermos entender a natureza da função perturbação R , antes de fazermos outras suposições sobre ω . Há vários tipos de perturbações que podem causar a rotação de ápsides, as quais são (Faria 1987):

1. Deformação de maré mútua das componentes;
2. Deformação das componentes devido à rotação axial;
3. Efeitos relativísticos;
4. Presença de um terceiro corpo;
5. Regressão devido a um movimento em um meio resistivo.

Deve-se ter em mente que a perturbação R é a somatória de todas as perturbações mencionadas acima, de modo que $R = R_{def} + R_{rel} + R_{t.c.} + R_{reg.}$ Por R_{def} entenda-se a perturbação devido aos dois primeiros itens.

Em um sistema binário cerrado, a causa dominante do movimento apsidal é devido à deformação das componentes. Podemos falar sobre tal deformação em termos de harmônicos esféricos, cujos parâmetros de deformação são determinados por k_2, k_3, k_4, \dots , ou seja, dependem da estrutura interna das estrelas. Então a elipse orbital do sistema girará para frente (avanço) na direção do movimento orbital, com uma velocidade angular tal que o período U de uma rotação completa está relacionado com o período anomalístico P_a por (Martynov,1973):

$$\begin{aligned} \frac{P_a}{U} &= k_{2,1} a_1^5 \left[\frac{M_2}{M_1} 15 f_2(e) + \left(\frac{\omega_{r,1}}{\omega_k} \right)^2 \left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right) \frac{1}{(1-e^2)^2} \right] + \\ &+ k_{2,2} a_2^5 \left[\frac{M_1}{M_2} 15 f_2(e) + \left(\frac{\omega_{r,2}}{\omega_k} \right)^2 \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right) \frac{1}{(1-e^2)^2} \right] + \\ &+ 28 f_3(e) \left[k_{3,1} a_1^7 \frac{M_2}{M_1} + k_{3,2} a_2^7 \frac{M_1}{M_2} \right] + 45 f_4(e) \left[k_{4,1} a_1^9 \frac{M_2}{M_1} + k_{4,2} a_2^9 \frac{M_1}{M_2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

Aqui, o primeiro índice dos k 's indica a ordem do parâmetro e o segundo indica se ele pertence à primeira ou segunda componente. M_i é a massa e a_i é o raio da respectiva componente (relativo ao eixo maior da órbita). Os termos $k_{2,i}$ para $i = 1, 2$ estão relacionados com as contribuições de maré e deformação rotacional, ω_r é a velocidade angular de rotação axial e ω_k é a velocidade angular orbital. As funções $f_i(e)$ são expressas por:

$$f_2(e) = (1 - e^2)^{-5} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{1}{8} e^4 \right) \quad (2.30)$$

$$f_3(e) = (1 - e^2)^{-7} \left(1 + \frac{15}{4} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \frac{5}{64} e^6 \right) \quad (2.31)$$

$$f_4(e) = (1 - e^2)^{-9} \left(1 + 7e^2 + \frac{35}{4} e^4 + \frac{35}{16} e^6 + \frac{7}{128} e^8 \right) \quad (2.32)$$

Existem fartas evidências observacionais, de alargamento da linha espectral para estrelas em sistemas cerrados, que $\omega_r \neq \omega_k$ (Martynov 1973). Podemos, ainda, desprezar os

k 's com índice superior a k_2 , pois tais valores são geralmente algumas ordens de grandeza menores que os valores de k_2 para modelos estelares realistas (Martynov 1973). Com isso, temos uma relação aproximada para a relação dos períodos:

$$\frac{P_a}{U} = c_{21}k_{21} + c_{22}k_{22} \quad (2.33)$$

onde,

$$c_{2i} = \left[\frac{\omega_r}{\omega_k} \left(1 + \frac{m_{3-i}}{m_i} \right) f(e) + \frac{15m_{3-i}}{m_i} g(e) \right] \left(\frac{R_i}{A} \right)^5 \quad (2.34)$$

e,

$$\begin{aligned} f(e) &= (1 - e^2)^{-2} \\ g(e) &= \frac{(8 + 12e^2 + e^4)f(e)^{2.5}}{8} \end{aligned} \quad (2.35)$$

No caso de órbitas sincronizadas, ou seja, quando $\omega_r = \omega_k$ (isto ocorre em sistemas mais “velhos”, que tenham tido tempo para chegar ao sincronismo no periastro), podemos simplificar a expressão 2.33. Teoricamente, a média ponderada para o valor de k_2 é dada por (os valores de k_{21} e k_{22} são computados a partir de modelos para massas e raios observados de cada componente):

$$\bar{k}_{2,\text{teo}} = \frac{c_{21}k_{21} + c_{22}k_{22}}{c_{21} + c_{22}}, \quad (2.36)$$

e, observacionalmente, por:

$$\bar{k}_{2,\text{obs}} = \frac{1}{c_{21} + c_{22}} \left(\frac{P_a}{U} \right) \quad (2.37)$$

cujo o valor de P_a/U é dado por:

$$\frac{P_a}{U} = \frac{\dot{\omega}}{2\pi} \quad (2.38)$$

sendo que $\dot{\omega}$ é expressa em radianos por ciclo.

Claret e Giménez (1993) fazem uma comparação dessas equações usando os dados de diversos sistemas binários que apresentam movimento de ápsides e obtém como resultado uma excelente concordância entre os valores teóricos (Eq. 2.36), e os observacionais (Eq. 2.37), comprovando, assim, que as aproximações e especificações feitas sobre a equação 2.29 são válidas (ver Figura 2.3).

Para RU Mon por exemplo, o termo P_a/U seria (usando a Eq. 2.29):

$$\frac{P_a}{U} = 0.00286k_2 + 0.000143k_3 + 0.000007k_4 \quad (2.39)$$

Para chegar à informação sobre o grau de concentração de matéria no interior estelar, tomamos o valor de P_a/U e determinamos o índice politrópico n e os coeficientes

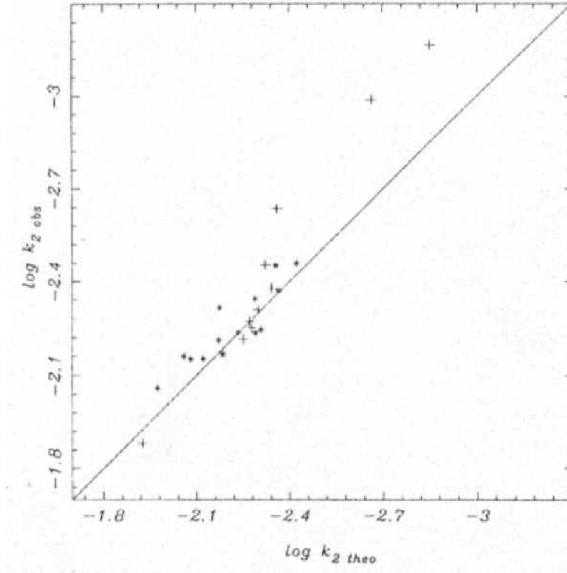


Figura 2.3: Valores médios observados versus preditos do $\log k_2$. Os astriscos e as cruces designam diferentes amostras utilizadas.

k . Os coeficientes k são determinados somente pela distribuição de massa dentro das componentes do sistema, ou seja, pela estrutura interna das estrelas. Eles são calculados para diferentes modelos (e.g., para o modelo homogêneo, os k 's são, a saber, $k_2 = 3/4$, $k_3 = 3/8$, $k_4 = 1/4$ e para o Modelo de Roche, no qual toda a massa está concentrada no centro, os k 's são todos iguais à zero). Então, podemos perceber que o período apsidal é mais longo quanto mais descentralizada estiver a massa. Entretanto, em pares cerrados, a determinação do grau de concentração de matéria dentro da estrela está baseada nos valores observados de P_a/U e o índice politrópico é uma medida dessa concentração (Martynov, 1973). Chandrasekhar calculou os coeficientes para vários valores de n para um modelo particular (Tabela 2.1).

Tabela 2.1: Relação entre índices politrópicos n e coeficientes k

$k \setminus n$	0	1	1.5	2	3	4	5
k_2	0,750	0,2599	0,1446	0,0741	0,0144	0,00134	0
k_3	0,375	0,1064	0,0540	0,0244	0,0037	0,00024	0
k_4	0,250	0,0602	0,0281	0,0116	0,0014	0,00007	0

Por comparação, a classe de politropia para o coeficiente de k_2 de RU Mon está entre 3 e 4. Pela análise dos tempos de mínimos podemos determinar a variação na linha dos ápsides e, juntamente com as dimensões absolutas e o uso de modelos de evolução estelar, determinar o estágio evolutivo do sistema. Claret usa do parâmetro k_2 para controlar seu modelo de interior estelar. Deve-se ressaltar novamente que uma boa determinação deste parâmetro implica em um melhor ajuste da estrela ao diagrama HR.

É claro que não poderíamos deixar de mencionar as outras contribuições para o movi-

mento apsidal. Efeitos relativísticos serão consideráveis apenas para o caso de sistemas massivos e muito cerrados (períodos muito curtos). Este caso é análogo ao desvio relativístico do periélio de Mercúrio.

Se desprezamos de antemão a contribuição relativística, o valor de U estará errado e conseqüentemente o valor da concentração interna k_2 também. Com relação à influência de um terceiro corpo e ao movimento dos corpos em um meio resistivo (ou regressão), Faria (1987) faz um apanhado geral muito bom, o qual referimos para leitura acerca do procedimento.

É interessante averiguar que podemos expressar a variação em ômega da forma $\dot{\omega} = \dot{\omega}_D + \dot{\omega}_R + \dot{\omega}_{TC} + \dot{\omega}_{Reg}$, sendo que os termos $\dot{\omega}_D, \dot{\omega}_R, \dot{\omega}_{TC}, \dot{\omega}_{Reg}$ referem-se à variação em cada uma das causas mencionadas no texto. Este trabalho visa a melhoraria da análise de sistemas que apresentem rotação de ápsides.

2.3 Modificações necessárias no WD

O programa utilizado por nós nesse estudo é o chamado WD, idealizado por Robert E. Wilson e Edward J. Devinney (1971). O código foi sofrendo modificações em diversos trabalhos posteriores, inclusive por nosso grupo e tem uma de suas descrições mais completas dada por Wilson (1993).

O modelo utiliza, para a figura assumida pelas componentes, superfícies eqüipotenciais gravitacionais efetivas, dadas pelo Modelo de Roche clássico para binárias cerradas com rotação, que pode ser sincronizada ($\omega_r = \omega_k$), ou não com a rotação orbital (os potenciais são calculados assumindo-se uma completa condensação central para ambas as componentes). Essa aproximação geométrica para a forma das componentes é uma das principais vantagens do WD com relação a outros modelos de SBE. Além disso, o Modelo WD também apresenta outros aspectos, dessa vez de caráter numérico, que o colocam em vantagem na análise de SBE's (sempre em comparação com outros modelos), como a possibilidade de solução simultânea de diferentes curvas de luz (diferentes comprimentos de onda) em conjunto ou separadamente com curvas de velocidades radiais para cada componente (em separado ou simultaneamente com as curvas supracitadas). Por um lado, a forma geométrica permite a análise de sistemas em uma grande variedade de configurações, em termos da proximidade relativa das componentes. Por outro, as vantagens numéricas acima mencionadas permitem a obtenção de soluções necessariamente consistentes para o sistema. Quando analisa-se separadamente diferentes curvas de luz e de velocidades radiais de um SBE, é uma situação freqüente a não concordância entre os parâmetros encontrados para diferentes curvas (e.g., inclinação orbital, temperaturas efetivas, tamanhos das componentes etc.). Muitas vezes isso é interpretado como uma indicação tanto da diferença dos dados propriamente ditos como uma medida da qualidade da solução. Nesse caso, a obtenção de uma solução “única” fica por conta do pesquisador por meio do uso iterativo dos modelos em sucessivas aproximações. Com a possibilidade de gerar-se soluções simultâneas, evita-se o problema, pois todos os dados são utilizados pelo código na geração do ajuste.

Apesar dessas vantagens, o código WD ainda apresenta algumas deficiências em seu tratamento fotométrico se comparado, por exemplo, ao Modelo WINK. Algumas dessas diferenças, como o uso de modelos de atmosferas mais modernos (Vaz *et al.*, 1995), o tratamento de efeitos causados pela aproximação mútua entre eles, o chamado “efeito

reflexão” (Vaz ,1984, 1985), nos coeficientes de escurecimento de bordo (Alencar & Vaz, 1999) e nos expoentes de brilho por gravidade (Alencar & Vaz, 1997; Alencar *et al.*, 1999), vêm sendo paulatinamente introduzidos no WD. Uma característica importante, que constitui uma desvantagem significativa com relação ao Modelo WINK, a qual já foi introduzida por (Faria, 1987), é a possibilidade de se tratar SBE’s que apresentem movimento (avanço ou recessão) da linha dos ápsides.

A presente seção descreve o processo de introdução da possibilidade de tratar sistemas que apresentem movimento da linha de ápsides. O modelo já possui implementada toda a maquinaria para o cálculo da posição da órbita em relação ao observador e, em seguida, das componentes na órbita, como uma função do tempo. Nesse processo, uma das grandezas necessárias é ω , o ângulo de passagem pelo periastro em relação à linha dos nodos (ver Fig. 2.1), considerada como sendo constante no intervalo de tempo correspondente às observações utilizadas no ajuste. O que precisamos fazer, portanto, pode ser simplesmente colocado como: devemos preparar o código para que este considere que a posição do periastro seja dependente do tempo, ou seja, como $\omega(t)$.

De acordo com Giménez (1983), podemos aproximar a variação da longitude do periastro ω com o tempo por:

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}E \quad (2.40)$$

ou seja, é aplicada para o que é conhecida como equação linear para o movimento apsidal, e pode ser aplicada para períodos de tempos curtos, em relação, por exemplo, ao período do próprio movimento apsidal.

O termo E indica a época, ω_0 é a posição do periastro quando $E = 0$ e $\dot{\omega}$ é a variação da longitude do periastro durante um período orbital (compare com a Eq. 2.27), que está relacionado com o período de movimento apsidal U pela Eq. (2.38).

Vamos considerar que os outros elementos orbitais são constantes no tempo. Esta suposição é baseada no comportamento dinâmico dos SBE’s e é geralmente verdadeira apenas se os planos equatorial e orbital coincidirem e se não há retardo por forças de maré.

Então, usando a equação dos tempos de mínimos, Eq. (2.11), e com ν e v dados pelas Eqs. (2.1) e (2.3) respectivamente, juntamente com a Eq. (2.40), podemos posicionar corretamente a órbita do nosso sistema em determinado ciclo e encontrar os valores para $\omega(t)$ e $\nu(t)$.

Para trabalharmos com a expressão (2.11), é necessário cortar-se a série em um número finito de termos, por motivos práticos. Giménez usa um parâmetro para indicar a convergência da série, a amplitude a_n , que é expresso por:

$$a_n = \frac{P_a}{\pi} \beta^n \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1 - e^2} \right), \quad (2.41)$$

e a condição de que a amplitude a_n deve ser menor ou igual ao erro mínimo médio σ_m para todos os tempos observados t_i .

Para ter-se uma idéia do valor do coeficiente (a_n), pode-se usar valores representativos, tais como $P_a = \pi$ dias e $e = 0,3$, para estimar os valores mostrados na Tabela 2.2. Como as melhores medidas foto-elétricas possuem erros relativos maiores que 10^{-4} na determinação dos mínimos de luz, fica clara a motivação e conveniência de se descartar os valores das ordens acima de $n = 5$, já que as amplitudes tornam-se menores que o erro

Tabela 2.2: Valores de a_n fornecidos pela Equação (2.41), obtidos de Giménez (1983).

n	a_n
1	0.30000
2	0.03427
3	0.00466
4	0.00067
5	0.00010

permitido. Isso faz com que a equação dos tempos de mínimos tome a forma (já com a devida aproximação para a longitude verdadeira ν) dada pela Eq. (2.3):

$$\begin{aligned}
t &= t_c + P_s E + (j-1) \frac{P_a}{2} \\
&+ (2j-3) \frac{eP_a}{2\pi} \left[f_{11}(i) + \frac{e^2}{4} \left(f_{21}(i) + \frac{e^2}{4} f_{31}(i) \right) \right] \cos \omega \\
&+ \frac{e^2 P_a}{4\pi} \left[f_{12}(i) + \frac{e^2}{4} f_{22}(i) \right] \sin 2\omega \\
&- (2j-3) \frac{e^3 P_a}{8\pi} \left[f_{13}(i) + \frac{e^2}{4} f_{23}(i) \right] \cos 3\omega \\
&- \frac{e^4 P_a}{16\pi} f_{14}(i) \sin 4\omega + (2j-3) \frac{e^5 P_a}{32\pi} f_{15}(i) \cos 5\omega.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Onde usamos as funções auxiliares da inclinação orbital, dadas por:

$$f_{1n}(i) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cot^2 i \sum_{k=1}^n (n-k+1) (\csc^2 i)^{(k-1)}, \tag{2.43}$$

$$f_{2n}(i) = \frac{2}{n+2} [(6-n)(n+2) - (-1)^n] + n f_{1(n+2)} - 6 f_{1n}, \quad e \tag{2.44}$$

$$f_{31}(i) = 2[f_{15} - 3(f_{13} - f_{11})] - 6, 4. \tag{2.45}$$

Se fizermos $\tilde{\omega} = \omega + \pi/2$, a expressão 2.42 pode ser simplificada para:

$$t = t_c + P_s E + (j-1) \frac{P_a}{2} - \frac{P_a}{\pi} \sum_{n=1}^5 \left(\frac{e}{2} (3-2j) \right)^2 \left[\sum_{m=1}^3 \left(\frac{e}{2} \right)^{2m-2} f_{mn}(i) \right] \sin n\tilde{\omega}, \tag{2.46}$$

onde $f_{2n} = 0$ para $n > 3$ e $f_{3n} = 0$ para $n > 1$.

Foi partindo destas equações que modificamos o programa WD. Primeiramente posicionamos corretamente a órbita no espaço usando a Eq. (2.40). O cálculo de $\dot{\omega}$ é feito através da análise de tempos de mínimos (observados ao longo de muitos anos!). Também devemos posicionar as estrelas na órbita, calculando a fase ν (Eq. 2.1). A relação entre a variação dos deslocamentos do mínimo secundário relativamente ao primário tem uma forma senoidal. No limite de pequenas excentricidades orbitais e , temos (Kämper 1986):

$$t_{II} - t_I - \frac{P}{2} = \frac{eP}{\pi} (1 + \csc^2 i) \cos(\omega_0 + \dot{\omega} E) \tag{2.47}$$

Da astronomia esférica (Binnendijk 1960), a anomalia verdadeira pode ser expressa por:

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E_c}{2} \quad (2.48)$$

onde E_c é a anomalia excêntrica. Então, usando a equação de Kepler e a Eq. (2.5):

$$M = E_c - e \sin E_c = \frac{2\pi(t_c - t_0)}{P_a} \quad (2.49)$$

Agora, para sistemas que não apresentem rotação de ápsides, a fase orbital é a parte fracionária de épocas correspondentes, de modo que:

$$f_{ase} = \text{frc} \left(\frac{t - t_c}{P_a} \right) \quad (2.50)$$

onde $\text{frc}(x)$ indica a parte fracionária de x e t_c é o tempo de conjunção.

Explicitando o termo entre parênteses a partir da Eq. (2.46) e usando as expressões anteriores (Eqs. 2.10, 2.43, 2.44, 2.45, 2.48 e 2.49) e com $j = 1$ (posições relativas ao mínimo primário) obtemos:

$$\begin{aligned} f_{ase} = \text{frc} \left(\frac{t - t_c}{P_s} - \frac{e}{2\pi - \dot{\omega}} \left\{ \left[f_{11}(i) + \frac{e^2}{4} \left(f_{21}(i) + \frac{e^2}{4} f_{31}(i) \right) \right] \cos \omega \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e}{2} \left[f_{12}(i) + \frac{e^2}{4} f_{22}(i) \right] \sin 2\omega - \frac{e^2}{4} \left[f_{13}(i) + \frac{e^2}{4} f_{23}(i) \right] \cos 3\omega \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e^3}{8} f_{14}(i) \sin 4\omega + \frac{e^4}{16} f_{15}(i) \cos 5\omega \right\} \right) - f_{ase}(t_c) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Quando estivermos em um tempo de conjunção, é um procedimento padrão termos a fase igual à zero, e devemos fazer a correção representada pelo termo $f_{ase}(t_c)$, cujo valor pode ser facilmente calculado da própria Eq. (2.51). (Notamos aqui que a expressão apresentada por Faria continha um erro de sinal que, entretanto não se propagou na implementação então realizada no Modelo WINK.)

Assim, com a Eq. (2.51) podemos calcular a fase devidamente corrigida dos efeitos de variação de ω , e o procedimento para tratar sistemas com rotação de ápsides, modificando o Modelo WD, pode ser descrito como:

1. Precisamos de uma maneira de calcular a posição da linha dos ápsides para uma época arbitrária, $\omega(t)$. Os dados necessários (por exemplo, $\dot{\omega}$ e o valor da posição do periastro numa determinada época, ω_0) são obtidos através de uma análise preliminar envolvendo os tempos de mínimo, em geral baseada em uma longa base de tempo, após verificação da existência de desvio nas posições esperadas dos mínimos;
2. Precisamos de, uma vez conhecida a posição da órbita numa época arbitrária, posicionar as estrelas na órbita, calculando o valor correspondente da anomalia verdadeira através da fase orbital.

As modificações acima foram implementadas com a criação de duas novas subrotinas, `omgat.f` e `faset.f` que, utilizando as equações descritas acima, calculam a posição do periastro $\omega(t)$, e a posição das estrelas na órbita, respectivamente, em função do tempo. Essas rotinas estão listadas no Apêndice A.1. Os testes da implementação, realizados com o sistema GL Carinae, estão detalhados no Capítulo 4.

Capítulo 3

O Método SIMPLEX

Uma vez que possuímos um modelo teórico-computacional de sistemas binários eclipsantes, o problema torna-se encontrar qual o conjunto de parâmetros que melhor reproduza as observações. Tal problema pode ser tratado de inúmeras formas, e uma delas lida com a minimização dos resíduos encontrados entre as observações de sistemas reais e as correspondentes predições calculadas por meio do modelo. Supondo que o modelo (físico e numérico) seja adequado, definir o conjunto de parâmetros que minimiza esses resíduos é a solução desejada.

Apesar de poder ser colocada de uma forma simples e objetiva, a solução desse problema é complexa e delicada. Em primeiro lugar, uma inadequação (em termos das aproximações físicas e/ou numéricas) do modelo para a interpretação das observações vai levar, certamente, a uma solução errada fisicamente, mesmo que os resíduos sejam eficientemente minimizados. Um exemplo disso, pertinente ao presente trabalho, seria a interpretação de curvas de luz e/ou de curvas de velocidades radiais de um SBE que apresente movimento de ápsides com um modelo que não previsse tal efeito. Mesmo se as observações cobrirem um intervalo de tempo curto o suficiente para que a órbita possa ser considerada como aproximadamente imóvel, os valores dos parâmetros serão, na melhor das hipóteses, valores médios para o referido intervalo. Como, essencialmente, o único parâmetro que variou foi a posição do periastro, e todos os demais (inclinação orbital, tamanho das componentes etc.) ficaram constantes, o fato de estarmos determinando valores “médios” implica que estamos obtendo valores imprecisos para os parâmetros. Quando estes são utilizados para controle de outras teorias, como as de estrutura e evolução estelar, as pequenas imprecisões relacionadas à uma inadequação do modelo podem impedir que tais controles sejam realizados ou, o que seria ainda pior, que se chegue a conclusões erradas.

Mesmo que o modelo seja adequado, o procedimento de ajuste é importante na obtenção da solução desejada. O tema é de amplo interesse científico e não cabe aqui entrar em detalhes a respeito. Vamos nos ater a descrever um pouco mais detalhadamente somente dois dos métodos existentes na literatura: o Método de Mínimos Quadrados, que temos utilizado em nossos estudos, e o Método SIMPLEX, o qual implementaremos como uma opção a mais no Modelo WD.

3.1 Considerações iniciais

O Método mais usado para a solução das curvas de luz de SBE's é o de Mínimos Quadrados (MMQ). O método tem uma justificativa estatística (Press *et al.* 1992) e, para que possa ser aplicado com segurança, várias condições devem ser satisfeitas (os parâmetros devem ser independentes entre si, os erros das observações devem possuir distribuição normal etc.). As equações básicas, descritas no Apêndice A.2, são simples e mostram que o método faz uso do cálculo de derivadas parciais da intensidade teórica em relação aos parâmetros que se pretende ajustar.

As derivadas parciais devem ser avaliadas numericamente, da forma mais precisa possível, usando a forma simétrica (ver Eq. (A.1), Apêndice A.2):

$$\frac{\partial I(X, t_\sigma)}{\partial X_j} \approx \frac{I(X_1, X_2, \dots, X_j + \frac{1}{2}\Delta X_j, \dots, t_\sigma) - I(X_1, X_2, \dots, X_j - \frac{1}{2}\Delta X_j, \dots, t_\sigma)}{\Delta X_j} \quad (3.1)$$

sendo Δx_j um incremento fornecido pelo usuário, podendo corresponder a cerca de 10% do valor do parâmetro, dependendo tanto do parâmetro em si quanto da configuração do sistema. Como a Eq. (A.1) é aproximada, pois despreza termos de ordem superior na expansão da função I , é claro que o processo de obtenção dos elementos corretos tem de ser iterativo, pois as correções δX_j serão somente aproximadas. Quanto mais o conjunto de parâmetros se aproxima da solução (que torna mínima a soma dos resíduos quadrados), mais correta se torna a Eq. (A.1), ou seja, menores se tornam os termos de maior ordem desprezados, e o processo de iteração tende à convergir. Os critérios de convergência são vários, mas, em geral, as iterações são interrompidas quando as correções calculadas forem menores (ou da mesma ordem de grandeza) que os erros médios calculados.

O procedimento, porém, apresenta vários pontos delicados. Em primeiro lugar, o cálculo das derivadas parciais é necessariamente numérico para a grande maioria dos parâmetros (somente dois parâmetros para curvas de luz e um para curvas de velocidade radial, todos de normalização, podem ter as correspondentes derivadas parciais calculadas analiticamente: a contribuição de terceira luz e a magnitude de normalização das curvas de luz e o semi-eixo maior em unidades astronômicas para as curvas de velocidade radiais). Sendo numérico, o cálculo é demorado e impreciso. O uso de derivadas parciais assimétricas induz a tendências indesejáveis na solução (Vaz 1984) e, apesar de tentador, por economizar tempo computacional, deve ser evitado. E, quanto mais preciso for o cálculo numérico, mais tempo se gasta na obtenção das derivadas parciais.

Em segundo lugar, como a Eq. A.1 é somente aproximada, podendo os termos desprezados serem bastante significativos quando o conjunto de parâmetros ainda está distante da solução, o método requer um conjunto de parâmetros inicial de relativa qualidade, ou seja, não muito distante do conjunto “correto”. Apesar dessa estimativa inicial não ser característica do Método de Mínimos Quadrados, esse método é muito sensível a uma boa escolha de parâmetros iniciais, podendo até divergir em determinados casos. O MMQ utiliza-se dos gradientes da função a ser minimizada (a soma \mathcal{S} , dada pela Eq. (A.2)) no hiperespaço das variáveis. Nesse caso, a existência de mínimos locais nas vizinhanças do conjunto inicial de parâmetros é mais uma “armadilha” conhecida do método, que precisa da intervenção do usuário para sair dos referidos mínimos locais e poder novamente dirigir a solução para o tão desejado mínimo absoluto.

Uma suposição fundamental do MMQ é a independência dos parâmetros. A existência de correlações (não importando se por causas físicas ou numéricas) viola essa suposição

e o comportamento do MMQ é sensível a elas. Na prática, a única forma de evitar-se problemas dessa natureza é nunca deixar parâmetros altamente correlacionados serem ajustados simultaneamente, além da necessidade de utilizar-se o máximo de informações físicas para fixar os parâmetros ou limitar seus valores a um intervalo mais realistas. As correlações produzem famílias de soluções virtualmente indistinguíveis no tocante à qualidade do ajuste das observações, além de, freqüentemente, dificultar ou mesmo impedir a obtenção de convergência.

Um quarto ponto problemático no MMQ é que a matriz de equações normais, dada pela Eq. (A.11), às vezes, é mal condicionada e a solução do problema, Eq. (A.14), fica comprometida. Isso pode acontecer, por exemplo, quando se tenta ajustar simultaneamente um grande número de parâmetros.

Kallrath & Linnell (1987) fazem algumas alusões aos problemas do MMQ, acima mencionados, e sugerem um método alternativo para reduzi-los: o Método SIMPLEX. A estratégia, no caso, é evitar-se completamente o cálculo das derivadas parciais no processo de minimização.

O Método SIMPLEX (daqui por diante MS) é devido a Nelder & Mead (1965) e requer apenas avaliações da função a ser minimizada em diferentes pontos do hiperespaço de parâmetros. Não depende, portanto, de gradientes (derivadas de primeira ordem) ou de formas quadráticas (derivadas de segunda ordem), sendo, por isso, um método de procura direta. Ele não é muito eficiente em termos do número de funções avaliadas, mas, frequentemente, é o melhor método a usar-se quando o objetivo é obter respostas rápidas para um problema cuja carga computacional é grande (principalmente devido ao cálculo de derivadas parciais) e torna-se mais eficiente quando há mais que dois ou três parâmetros a serem ajustados.

Um “simplex” é uma figura geométrica, um hiperpoliedro num espaço de N dimensões, de N+1 vértices e todos os segmentos de linhas, faces poligonais etc, que o compõem. Por exemplo, para N igual a dois, temos um triângulo (3 vértices), para N igual a três temos um tetraedro (4 vértices). Nenhuma figura precisa ser regular, mas é conveniente que sejam figuras fechadas (possuam volume interno finito). Tomando-se um vértice como origem, os outros N pontos definem um espaço N-dimensional de vetores.

Para uma minimização multidimensional devemos fornecer um vetor de N variáveis independentes (um N-vetor) como ponto de partida, P_0 . Isso feito, podemos construir um simplex inicial com base no ponto P_0 (ponto inicial), então os outros N pontos serão (Press *et al.*, 1992):

$$\vec{P}_i = \vec{P}_0 + \lambda_i \vec{e}_i \quad (3.2)$$

onde os e_i 's são N-vetores unitários e os λ_i 's são constantes que representam nossa tentativa para a escala de comprimento do problema. A definição dos λ_i 's depende de critérios a serem estabelecidos, e pode ser que mais de uma opção seja válida, dependendo do problema em questão.

O processo é realizado em vários passos ou operações realizadas sobre o simplex, todas elas relacionadas com o vértice que apresenta a pior solução do problema. São quatro as operações permitidas: reflexão, contração, expansão e encolhimento (contração múltipla, ver Figura 3.1). Com essas operações, o simplex move-se através do espaço de parâmetros, adapta-se à topologia local e procura contrair-se para o mínimo final. Para achar o mínimo local na hipersuperfície, o simplex determina, a cada passo, o vértice de maior e menor

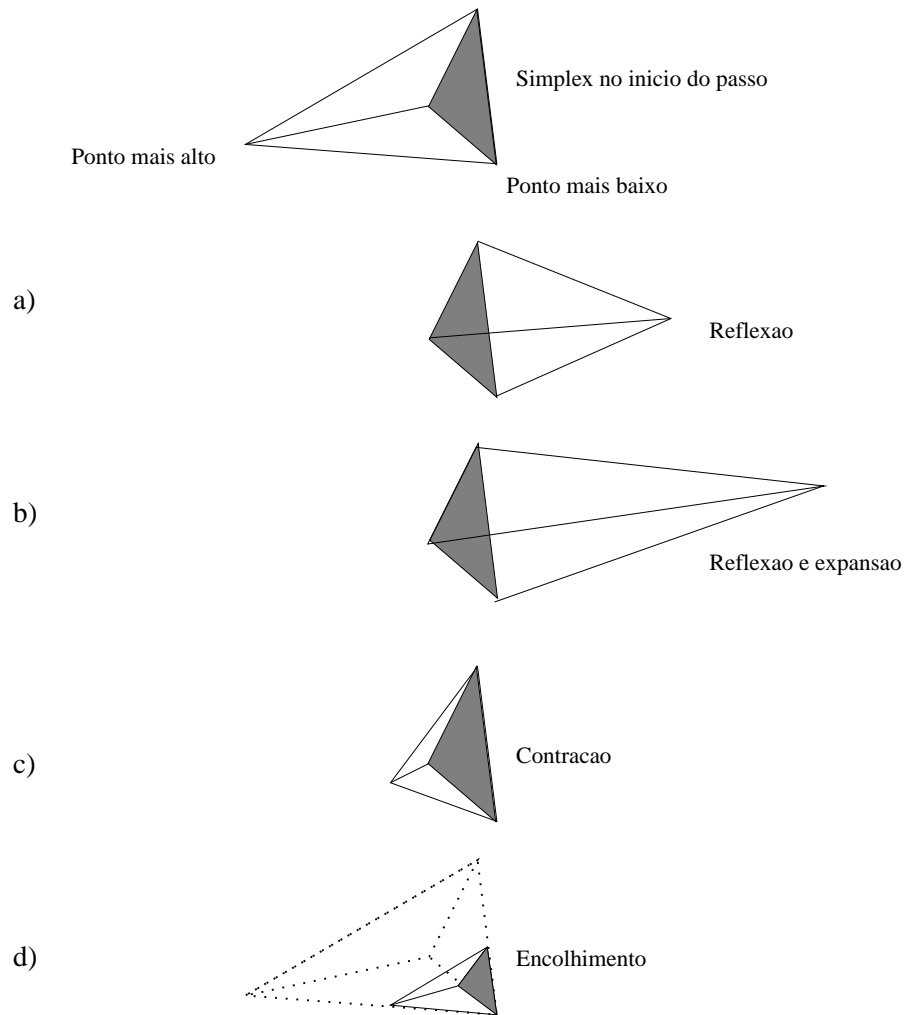


Figura 3.1: Possíveis saídas para um passo no Método SIMPLEX

valor da função e elimina o de maior valor. É um procedimento global de procura por um mínimo absoluto no espaço dos parâmetros. Usando o simplex final, é possível estabelecer critérios para o cálculo de todos os parâmetros estimados e seus respectivos erros.

3.2 Implementação

Antes de começar a implementar o Método SIMPLEX como alternativa no Modelo WD, fizemos com ele algumas experiências. O livro *Numerical Recipes in Fortran*, de 1992, fornece uma rotina para o uso do método para a minimização de uma função arbitrária com N parâmetros (o autor dá o nome de “*amoeba*” para tal rotina devido à semelhança entre o conhecido movimento amebóide deste protozoário unicelular e os movimentos que são realizados pela figura). Aplicamos o programa teste a um conjunto de funções diferentes, e ele foi bem sucedido em encontrar os parâmetros corretos. Apesar da lógica dos passos para a escolha da operação adequada para movimentar o simplex em busca da região de solução desejada ser basicamente a mesma, optamos por seguir a lógica delineada por Kallrath & Linnell (1987), mais adequada para nosso problema específico.

Como eles, nós também modificamos o programa original, adicionando algumas sub-rotinas (ver Apêndice A.1), mudando algumas estruturas originais e acrescentando novas variáveis a fim de usar as equações e procedimentos do artigo.

Nossas modificações, porém, foram implementadas como mais uma opção do modelo, que pode ser ativada ou não com um simples parâmetro de controle. Dependendo do usuário, o modelo realiza a solução pelo tradicional Método de Mínimos Quadrados ou pelo recém-introduzido Método SIMPLEX. Um grande esforço foi envidado em deixar intocada toda a estrutura original do modelo, o que, além de facilitar os testes de nossa implementação, permite comparações entre as diferentes soluções. Com essa filosofia, as nossas implementações relativas à possibilidade de análise de SBE's com movimento de ápsides podem ser utilizadas sem maiores esforços.

O Apêndice A.3 contém as definições, fórmulas e o algoritmo para fazer-se os passos do SIMPLEX. Nele apresentamos a listagem das subrotinas auxiliares, desenvolvidas para a implementação do método (`reflex.f`, `shrinx.f`, `contrx.f` e `fplex.f`). No Capítulo 4 descrevemos os testes de nossa implementação, aplicando o modelo ao sistema binário eclipsante GL Carinae.

Capítulo 4

Aplicação à GL Carinae

Temos de testar e controlar as modificações introduzidas no Modelo WD, descritas nos Capítulos 2 e 3. Esses testes serão facilitados pela forma como fizemos nossas implementações. Além de procurar deliberadamente alterar o mínimo possível o código original, introduzimos as novas possibilidades como **opções** controladas por meio de parâmetros de controle do fluxo do programa. Preservamos todas as características originais do código, em termos de suas aproximações físicas, e criamos mecanismos para ativar ou não as novas possibilidades.

Essa filosofia de ativação do modelo em diferentes “modos” de funcionamento, de certa forma já presente no código original (cite-se, como exemplo, a possibilidade de escolha de configuração do sistema por meio de parâmetros de controle, ou “*flags*” (Wilson & Devinney, 1971), foi ampliada de forma abrangente por nosso grupo. Uma das características do Modelo WD é a sua pouca automação no processo de solução, opção declarada explicitamente pelos autores (Wilson & Devinney, 1973; Wilson, 1993), segundo os quais foi implementada qualquer forma automatizada de executar-se as soluções para iterações sucessivas por acreditarem que o usuário tem de ter plena consciência, a cada passo, do caminho seguido pelo modelo em busca da solução. Essa atitude de fazer o usuário manipular os dados pessoalmente (sem auxílio do computador) faz-se notar, também, na divisão do Modelo WD em dois programas computacionais distintos. Um para o cálculo simples da curva de luz e/ou de velocidade radial a partir de um determinado conjunto de parâmetros (chamado normalmente de LC) e outro para o cálculo das correções diferenciais a serem implementadas no conjunto atual em busca da solução (originalmente usando o Método de Mínimos Quadrados, chamado DC).

Apesar de entendermos e concordarmos com a justificativa daqueles autores, um dos aspectos mais importantes na análise de curvas de luz e de velocidades radiais de Sistemas Binários Eclipsantes é a atenção com a consistência interna para com os parâmetros físicos e numéricos do modelo. Por exemplo, quando o modelo ajusta a temperatura efetiva de uma das componentes, os coeficientes de escurecimento de bordo desta componente a serem utilizados na próxima iteração devem ser fisicamente consistentes com a nova temperatura, e assim por diante. Tais ajustes tinham de ser feitos individualmente pelo usuário do programa, num processo que dava margem a inúmeras fontes de erro. En-

tretanto, a partir do momento em que se escolhe um modelo físico para determinado parâmetro, esse tipo de ajuste segue um procedimento automático, e somos da filosofia de que todos os procedimentos automáticos devem poder ser feitos pelo computador.

Em uma série de modificações, algumas já comunicadas (Vaz *et al.*, 1995; Casey *et al.*, 1998), uma bateria de programas e procedimentos UNIX foi desenvolvida de forma a facilitar o uso do WD no processo iterativo, sem introduzir, contudo, qualquer modificação nos programas LC e DC, que compõem o Modelo WD. Além dessas modificações no procedimento iterativo, modificações no modelo físico também foram introduzidas, como as relacionadas à variação dos expoentes de brilho por gravidade em atmosferas convectivas (Alencar & Vaz, 1997; Alencar *et al.*, 1999), o efeito da iluminação mútua nos coeficientes de escurecimento de bordo (Alencar & Vaz, 1999), melhor tratamento do chamado “efeito reflexão” (Alencar *et al.*, 1997; Vaz *et al.*, 1997), uso de modelos de atmosferas mais modernos (Vaz *et al.*, 1995), entre outras. Todas as modificações acima foram introduzidas como opções adicionais, sendo sempre possível utilizar o modelo com as aproximações originais.

Continuamos, nesse trabalho, com essa filosofia, o que nos ajudará nos testes das implementações, conforme descrito a seguir.

4.1 Testes para o movimento de ápsides

Além de testes internos das novas subrotinas criadas para a implementação da possibilidade de análise de curvas de luz e de velocidades radiais de SBE’s que apresentam movimento de ápsides (sintaxe de código na linguagem FORTRAN77 e correção de resultados), precisamos testar as modificações feitas no fluxo do Modelo WD. Como mencionado anteriormente, o modelo consistiu-se de dois programas, um para gerar as curvas de luz e/ou de velocidades radiais, denominado genericamente de LC, e outro para realizar a solução propriamente dita, denominado DC.

Por motivos óbvios, as modificações foram implementadas inicialmente no programa LC, uma vez que ele somente calcula as curvas desejadas e não tem de se preocupar com detalhes extras do procedimento de minimização, como o cálculo das derivadas parciais do Método de Mínimos Quadrados ou o algoritmo para a administração interna na geração da matriz de equações normais para o cálculo das correções diferenciais. Conforme delineado no Capítulo 2, as modificações necessárias podem ser resumidas na alteração da lógica do programa para que considere o ângulo de passagem pelo periastro, que posiciona a órbita em seu plano, como função do tempo, $\omega(t)$. Além de um subprograma para calcular $\omega(t)$ para os instantes das observações, precisamos modificar o cálculo da fase orbital (que posiciona as componentes na órbita) sem afetar o funcionamento das demais partes do código.

4.1.1 Versão em precisão dupla

Após os testes das rotinas `omgat.f` e `faset.f`, individualmente (ver a listagens nos Apêndices A.1.1 e A.1.2, respectivamente), modificamos o algoritmo do programa para calcular para cada observação o valor de $\omega(t)$ e usá-lo de forma correta, considerando-o constante para aquele determinado instante. Uma das primeiras modificações foi fazer o Modelo WD ler as observações com os tempos em data juliana heliocêntrica, em vez

simples fases orbitais. Como os números são grandes e precisos, pelo menos da ordem de 10^4 dias com precisão da ordem de até 10^{-6} dias, o cálculo tanto de $\omega(t)$ quanto da fase correspondente tem de ser feito em precisão dupla, para não se introduzir erros graves de truncamento pelo computador.

Após algumas tentativas de compatibilização entre a representação dos números e variáveis em precisão simples, originalmente usada nesta parte do código, com a precisão dupla necessária para os novos cálculos, decidimos fazer uma modificação global no código, transformando-o integralmente em precisão dupla. Com o auxílio do pacote **NAGWare Fortran Tools** (ver <http://www.nag.co.uk/nagware/NQ.asp>), adquirido com verba do Colegiado de Pós-Graduação em Física da UFMG, fizemos a transformação de forma fácil e segura. Aproveitamos a oportunidade para fazer um controle global de todas as variáveis e blocos de memória do código, eliminando completamente qualquer variável não inicializada ou outras inconsistências.

Aproveitando a ampla modificação que estava se processando, ou seja, transformação integral do programa de precisão simples para precisão dupla, fizemos mais uma modificação, descrita a seguir. Os modelos de análise de curvas de luz e de velocidades radiais de SBE's são, todos, passíveis de paralelização no sentido **SPMD**, Single Program Multiple Data, (ver, por exemplo, Pacheco, 1996, ou o excelente livro “on-line” *Designing and Building Parallel Programs*, por Ian Foster, em <http://www-unix.mcs.anl.gov/dbpp/>), ou seja, um único código partilhado pelos processadores disponíveis executando cálculos com condições diferente (por exemplo, as datas das observações). A necessidade e conveniência de uma paralelização do código do WD é evidenciada de diversas formas, e podemos citar imediatamente que os cálculos estão se tornando cada vez mais exigentes para os processadores e que as curvas de luz e de velocidades radiais estão cada vez mais completas e com mais pontos. No momento de execução do presente trabalho, havia no Laboratório de Astrofísica do DF-ICEX-UFMG sete processadores de alto desempenho (com mais 4 que chegaram quando esse trabalho estava em fase final), o que torna possível a imediata utilização de programas paralelizados. Antevendo a implementação de uma versão paralelizada do modelo, eliminamos todas as chamadas a subprogramas com a estrutura de **função** (**FUNCTION**) e os transformamos na estrutura de **subrotina** (**SUBROUTINE**), com o objetivo de preservar melhor os blocos de memória do código, preparando-o para uma futura paralelização.

Essas modificações foram realizadas com as ferramentas de análise de códigos do **NAGWARE** e testadas integralmente **antes** de começarmos a introduzir nossas modificações no modelo (rotação de ápsides e Método **SIMPLEX**). Os resultados com a versão original e com a nova versão usando somente subrotinas e em precisão dupla foram integralmente compatíveis com diferenças no quinto dígito significativo.

4.1.2 Testes com um sistema binário real

Para testarmos as modificações feitas no programa WD, usamos um sistema binário muito conhecido pelo seu rápido movimento de ápsides, o sistema GL Carinae (HD 306168, CoD -59°3630, $V = 9^m.5$).

Esse sistema é uma binária eclipsante do hemisfério sul, jovem e separada, sendo suas componentes quase idênticas. Foi descoberto por Oosterhoff (Hertzprung, 1930) por meio de estudos fotográficos. Swope & Shapley (1938), usando estimativas de magnitudes fotográficas de 1700 placas, puderam mostrar profundidades similares para os eclipses

mas com durações diferentes. Hertzsprung (1942) estudou os eclipses em mais detalhes e confirmou diferenças na duração dos mínimos primários e secundários. A excentricidade da órbita estava em torno de $e=0,157$ e o período apsidal, U , em torno de 25 anos. Sua classe espectral é do tipo B3.

A primeira solução com maior precisão para o sistema foi publicada por Giménez & Clausen, (1986). Suas observações consistiam de 542 medidas simultâneas em cada cor (sistema *uvby*), realizadas de janeiro de 1982 até maio de 1983. Em seu trabalho, Giménez & Clausen fornecem as efemérides para os anos de 1982 e 1983, e as analisam separadamente, pois os modelos usados por eles (EBOP e WINK), não possibilitavam o tratamento de sistemas com rotação de ápsides para uso de todas as observações de forma simultânea. Apesar de tratarem os dois conjuntos de observações separadamente, sua análise baseia-se principalmente nas curvas de luz de 1983, por essas possuírem maior número de medidas (308 medidas).

Fica clara, portanto, a conveniência de uma análise utilizando simultaneamente todas as curvas de luz, pois dispõe-se de um maior número de medidas, o que provavelmente produzirá uma solução mais consistente, em termos físicos.

As efemérides calculadas por Giménez & Clausen (1986) são:

$$\begin{array}{rcll} 1982: & \text{Min I} & = & \text{HJD } 244\,5049,73505 + 2,422238 \text{ E} \\ & & & \pm 27 \qquad \qquad \qquad \pm 2 \\ 1983: & \text{Min I} & = & \text{HJD } 244\,5388,84548 + 2,422238 \text{ E}, \\ & & & \pm 22 \qquad \qquad \qquad \pm 2 \end{array}$$

sendo que o fato de terem calculado o mesmo período para o mínimo primário está relacionado com a orientação que a órbita do sistema apresenta em relação ao observador nas épocas mencionadas. O avanço no periastro de GL Car a cada ano é de aproximadamente 15° , fazendo com que o mínimo secundário avance cerca de 15 minutos com relação ao primário, de acordo com a Equação (2.47) para a sua configuração naquela época. Fazendo um estudo mais detalhado dos tempos de mínimo disponíveis na época, Giménez & Clausen encontraram os valores abaixo para predições separadas dos mínimos primário e secundário:

$$\begin{array}{rcll} & \text{Min I} & = & \text{HJD } 244\,2070,317 + 2,422265 \text{ E} \\ & & & \pm 31 \qquad \qquad \qquad \pm 20 \\ & \text{Min II} & = & \text{HJD } 244\,2071,427 + 2,422213 \text{ E}, \\ & & & \pm 39 \qquad \qquad \qquad \pm 16 \end{array}$$

evidenciando mais ainda o movimento dos ápsides com a diferença entre os períodos calculados para os dois mínimos.

Não entraremos nos aspectos astrofísicos da análise do sistema, mas nos concentraremos em controlar as soluções numéricas obtidas para o mesmo com o Modelo WD, tendo como objetivo testar nossas modificações. Os valores finais para alguns parâmetros de GL Car, obtidos por Giménez & Clausen são dados na Tabela 4.1.

Utilizaremos os dados da parte inferior da Tabela para o cálculo de $\omega(t)$ e das fases. Os parâmetros da parte de cima (i , e , r_A e r_B) serão utilizados como controle, pois deverão ser reproduzidos por nossas soluções. Nossa estratégia será usar os valores da Tabela 4.1 para controlar nossas soluções com as mesmas observações usadas por Giménez & Clausen. Seguiremos, de forma geral, os mesmos passos dados por Faria (1987), quando introduziu e testou essa mesma possibilidade no Modelo WINK (Wood, 1972). Partiremos de um determinado conjunto inicial de parâmetros, relativamente distante da solução encontrada

Tabela 4.1: Dados astrofísicos de GL Car obtidos por Giménez & Clausen (1986). Os dados com * foram obtidos por Claret e Giménez (1993)

inclinação(°)	86,38 ± 0,20			
excentricidade	0,1457 ± 0,0010			
r_A (semi-eixo maior)	0,2204 ± 0,0060			
r_B (semi-eixo maior)	0,2094 ± 0,0060			
ω_{1982} (°)	185,12			
ω_{1983} (°)	196,74			
L_B/L_A	0,854(<i>u</i>)	0,864(<i>v</i>)	0,866(<i>b</i>)	0,864 (<i>y</i>)
Período (dias)	2,4228682 ± 0,0000008			
U (anos)	25,22 ± 0,03			
ω_0 (°)	66,1 ± 0,3			
$\omega_1 = \dot{\omega}$ (°/ciclo)	0,0947 ± 0,00011			
T_{conj} (HJD)	2 442 070,2783 ± 0,00026			
m_1^* (massas solares)	13,5			
m_2^* (massas solares)	13,0			
$\log T_{eff 1}^*$	4,476			
$\log T_{eff 2}^*$	4,468			

por Giménez & Clausen, e iteraremos o modelo, esperando encontrar valores compatíveis entre si e com os da Tabela 4.1.

Cabe aqui uma observação acerca de algumas diferenças entre os Modelos EBOP, WINK e WD. O Modelo EBOP usa como parâmetro de brilho das estrelas a razão de intensidades centrais monocromáticas do disco estelar, normalmente denominado por J_B/J_A . Na realidade, esse é o parâmetro importante para o cálculo das curvas de luz. Entretanto, tanto o WINK como o WD utilizam como parâmetro de entrada o conceito de temperaturas efetivas que, com o auxílio de um modelo de atmosferas, é traduzido internamente como J_B/J_A . Mesmo entre o WINK e o WD existem diferenças, pois enquanto o WINK se baseia na temperatura efetiva do ponto “sub-terrestre” (que seria o centro do disco estelar para o observador na Terra), o WD lê a temperatura efetiva polar (do pólo da estrela). Outra diferença, claro, é a forma assumida para a figura das componentes, que é um esferóide oblato de dois eixos para o EBOP, um elipsóide de três eixos para o WINK e uma superfície equipotencial gravitacional efetiva no sistema co-movente com a órbita para o WD. Essas diferenças tornam um pouco difícil a comparação entre os resultados dos diferentes modelos.

Não existem na literatura, pelo que sabemos, curvas de velocidades radiais de GL Car. Então, não podemos calcular as dimensões absolutas do sistema. Como mencionado anteriormente, o WD foi planejado para ser utilizado sem qualquer facilidade nas iterações. O procedimento que permite iterações de forma confortável foi desenvolvido por Vaz (comunicado parcialmente em Vaz *et al.*, 1995 e em Casey *et al.*, 1998) para sistemas com curvas de luz e de velocidades radiais que possibilitam determinação de elementos absolutos. Para usufruir dessa facilidade, tivemos de utilizar dados artificiais (calculados iterativamente para obtermos dimensões absolutas fisicamente razoáveis) de amplitudes de velocidades radiais e velocidades rotacionais para GL Car. Esses valores não afetam, de forma nenhuma, os parâmetros orbitais que estamos usando para controlar nossas modificações.

Tabela 4.2: Soluções com os tempos de observação em fase e em Data Juliana Heliocêntrica, usando o Modelo WD e o Método de Mínimos Quadrados para a curva de luz obtida em 1982. A Tabela apresenta valores que podem ser comparados com aqueles da parte superior da Tabela 4.1 e, ao final, a soma dos resíduos quadrados, indicador da qualidade da solução.

Parâmetro	Observações em fase	Observações (HJD) $\omega_1 = 0$	Observações (HJD) $\omega_1 \approx 0$
i ($^\circ$)	$86,535 \pm 0.014$	$86,518 \pm 0.013$	$86,527 \pm 0.014$
e	$0,14501 \pm 0.00012$	$0,14503 \pm 0.00011$	$0,144988 \pm 0.000089$
ω_{1982} ($^\circ$)	$183,5356 \pm 0,0089$	$183,5848 \pm 0,0083$	$183,5848$ (fixo)
$r_{\text{rot,A}}$	0,22179	0,22179	0,22160
$r_{\text{rot,B}}$	0,21750	0,21801	0,21796
L_B/L_A (b)	$0,913 \pm 0.099$	$0,915 \pm 0.099$	$0,916 \pm 0.099$
$\Sigma(O-C)^2$	0,0092641	0,0092270	0,0091167

Nosso procedimento pode ser delineado da seguinte forma. Possuimos dois conjuntos de dados, obtidos em 1982 e 1983 (com 234 e 308 medidas, respectivamente). Vamos gerar soluções separadas para cada um dos conjuntos de dados, numa série de passos. Em primeiro lugar, vamos gerar soluções para os dois conjuntos separadamente, com $\omega_1 = \dot{\omega} = 0$ e introduzindo as observações em fase. Nesse primeiro passo, as soluções geradas utilizarão o código WD original sem qualquer de nossas modificações.

O próximo passo será, ainda usando $\dot{\omega} = 0$ (ou seja, uma órbita que não apresenta movimento de ápsides) e geraremos soluções para os mesmos dados, dessa vez introduzindo as observações com os tempos em datas julianas heliocêntricas (HJD), de forma a testar parte das nossas modificações relativas ao cálculo das fases. Nesta parte estaremos, de fato, testando somente a Eq. (2.50), que é o primeiro termo da Eq. (2.51).

Em seguida, numa forma de acionar todo o mecanismo introduzido, geraremos soluções para os dois conjuntos, ainda tratados separadamente e com os tempos das observações em HJD, dessa vez com $\dot{\omega} \approx 0$. Utilizaremos o valor $\dot{\omega} = 2 \times 10^{-7}^\circ/\text{ciclo}$. Percebendo que existe uma taxa de variação de ω (apesar de ínfima), o fluxo do programa disparará o mecanismo de cálculo de $\omega(t)$ e das fases, utilizando as Eqs. (2.40) e (2.51) integralmente.

O resultado desses três passos devem ser muito próximos entre si, pois estão, de fato, resolvendo o mesmo problema, ou seja, aquele de uma órbita estável no espaço, pois $\dot{\omega} \cong 0$. As Tabelas 4.2 e 4.3 mostram os resultados para os dois conjuntos de dados, obtidos em 1982 e 1983.

Assim, pela análise das tabelas e das fases calculadas, vemos que este primeiro objetivo foi alcançado, apesar de ter ocorrido pequenas variações entre os testes (geralmente entre a terceira e quarta casas decimais). Apresentamos primeiramente as curvas de luz obtidas por meio do MMQ. Optamos por apresentar somente as curvas de luz em fase pelo fato que as outras ($\dot{\omega} = 0$ e $\dot{\omega} \approx 0$) são completamente similares. As curvas são para a cor b com os respectivos resíduos para as observações dos anos de 82 e 83 em separado (Figuras 4.1 e 4.2). Os resultados para as cores y , v e u , são tão bons quanto os mostrados para a cor b . Note que a variação dos resíduos $\Delta(O-C)$ está em torno de $\pm 0,018$ indicando um ajuste teórico (linha contínua) bem razoável, apesar de tal ajuste ter sido feito ao longo de 19 iterações e que cada iteração gastou em média 2 a 3 minutos de tempo computacional, dependendo do número de variáveis livres (para o presente caso, por exemplo, foram sete). Então a convergência final esperada (momento em que as correções nos parâmetros

Tabela 4.3: Soluções com os tempos de observação em fase e em Data Juliana Heliocêntrica, usando o Modelo WD e o Método de Mínimos Quadrados para a curva de luz obtida em 1983. A Tabela apresenta valores que podem ser comparados com aqueles da parte superior da Tabela 4.1 e, ao final, a soma dos resíduos quadrados, indicador da qualidade da solução.

Parâmetro	Observações em fase	Observações (HJD) $\omega_1 = 0$	Observações (HJD) $\omega_1 \approx 0$
i ($^\circ$)	$86,539 \pm 0,012$	$86,620 \pm 0,014$	$86,529 \pm 0,012$
e	$0,14601 \pm 0,00022$	$0,14613 \pm 0,00023$	$0,146127 \pm 0,000064$
ω_{1983} ($^\circ$)	$197,4100 \pm 0,0047$	$197,5187 \pm 0,0048$	$197,5187$ (fixo)
$r_{\text{rot,A}}$	0,21848	0,22363	0,21857
$r_{\text{rot,B}}$	0,21688	0,21182	0,21712
L_B/L_A (b)	$0,932 \pm 0,099$	$0,855 \pm 0,099$	$0,933 \pm 0,099$
$\Sigma(O-C)^2$	0,015428	0,013380	0,013478

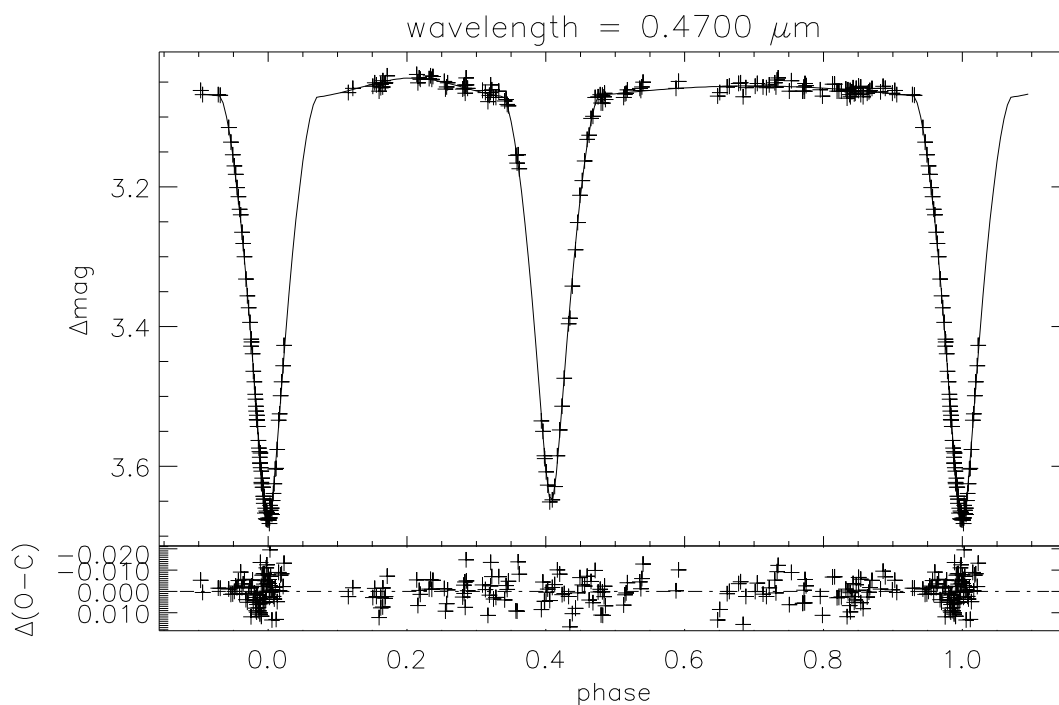


Figura 4.1: Curva de luz e resíduos para as observações de 82 em fase (MMQ)

tornam-se menores que os prováveis erros) levou cerca de 38 a 57 minutos.

Esses testes nos dão segurança que as alterações introduzidas não afetaram o funcionamento do modelo em seu estado original, que somente tratava sistemas com órbita estável), e que o novo procedimento para o tratamento de órbitas com movimento de ápsides dá resultados corretos, quando o movimento é insignificante. Foram importantes pois, com eles, percebemos inúmeros pontos que haviam passado despercebido, no fluxo do programa, e que necessitavam ser modificados para passar a perceber a órbita como dependente do tempo. Todos esses pontos foram corrigidos e os resultados apresentados são os finais.

O próximo passo de nossa análise consistiu na união de todas as observações (82+83) e

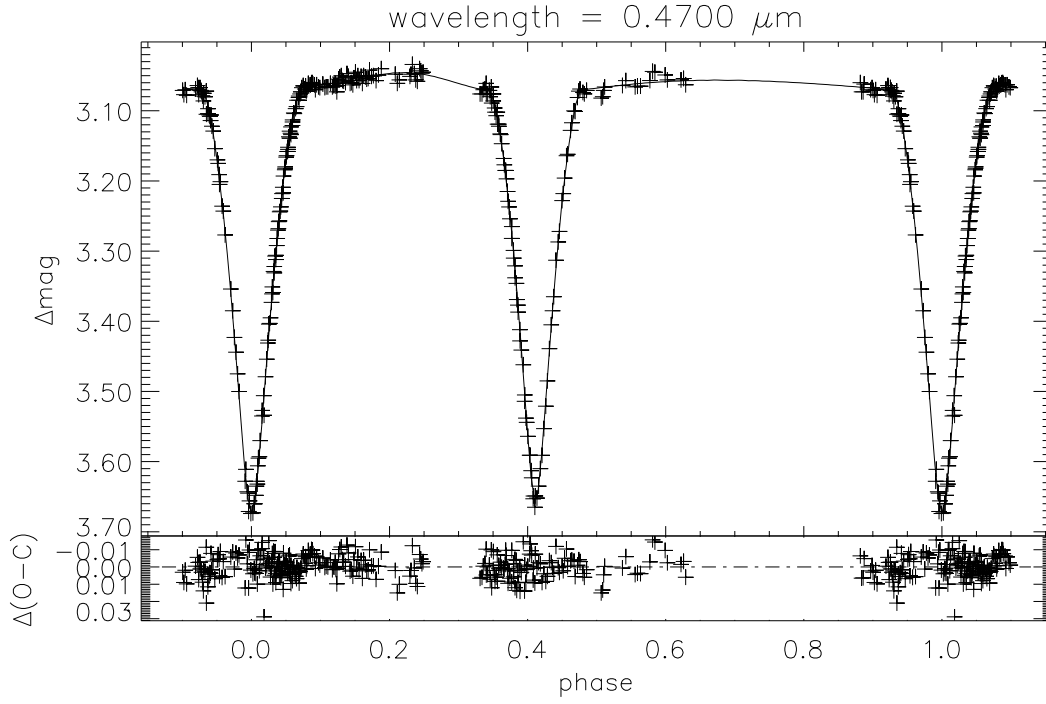


Figura 4.2: Curva de luz e resíduos para as observações de 83 em fase (MMQ)

Tabela 4.4: Soluções (cor b) com os tempos de observação introduzidos em Data Juliana Heliocêntrica, usando o Modelo WD e os dois métodos de minimização (Mínimos Quadrados, MMQ, e SIMPLEX, MS) para a curva de luz combinada com dados obtidos em 1982 e 1983. Apresentamos, para comparação, as soluções obtida por Faria (1987) com o Modelo WINK. A tabela apresenta valores que podem ser comparados com aqueles da parte superior da Tabela 4.1 e, ao final, a soma dos resíduos quadrados, indicador da qualidade da solução.

Parâmetro	82 + 83 WD+MMQ	82 + 83 WD+MS	82 + 83 WINK
i ($^\circ$)	$86,5465 \pm 0,0074$	$86,5656 \pm 0,0072$	86,3
e	$0,145355 \pm 0,000050$	$0,145287 \pm 0,000017$	0,1457
$r_{\text{rot,A}}$	0,22343	0,22265	0,2180
$r_{\text{rot,B}}$	0,21438	0,21382	0,2071
L_B/L_A (b)	$0,880 \pm 0,099$	$0,881 \pm 0,099$	0,875
$\Sigma(O-C)^2/(n-1)$	0,00004356	0,00004428	0,00003969

o uso do valor de ω_1 dado pela Tabela 4.1, que é o valor esperado para o sistema. Fazendo isso, testamos nossas modificações em toda a sua extensão, confrontando o modelo com observações reais. Os resultados estão na Tabela 4.4 e Figura 4.3.

Percebemos pela Figura 4.3 que a variação dos resíduos se encontra na mesma faixa que a do caso anterior, assim como o ajuste matemático. Percebemos, ainda, que não existe qualquer tendência sistemática no gráfico dos resíduos. Fazendo uma comparação com os dados apresentados por Faria (1987) para o Modelo WINK notamos que a variação dos resíduos do seu trabalho estão numa faixa um pouco maior ($\approx \pm 0,025$). Note que os nossos resíduos para a análise das observações em conjunto (82+83) são significativamente

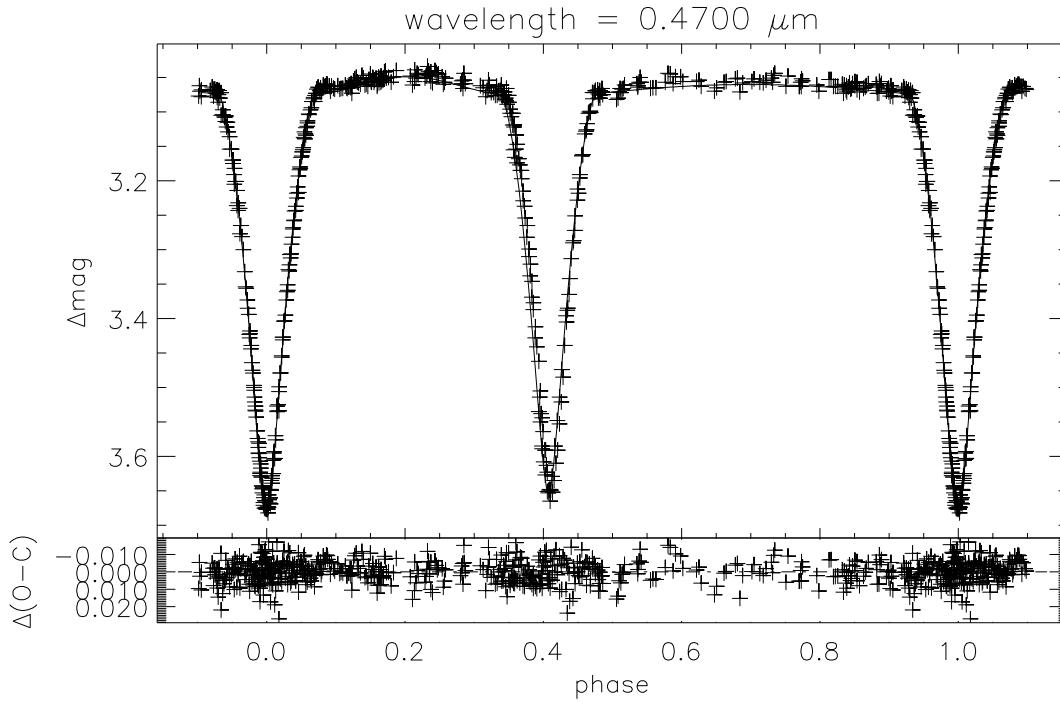


Figura 4.3: Curva de luz e resíduos para as observações de 82+83 em JD com $\omega = 0.0947^\circ/\text{ciclo}$ (MMQ). Note que, perto das fases 0,36 e 0,38 apesar de haver um certo espalhamento nas observações, reflexo da mudança de posição do mínimo secundário devida à alteração de $\sim 15^\circ$ na longitude do periastro entre 1982 e 1983, não existe evidência de resíduos sistemáticos nessas fases, indicando a qualidade da solução.

menores que aqueles obtidos para as observações tratadas em separado com o valor de ω aproximadamente constante!

Como já foi mencionado, o Modelo WD é mais adequado que o Modelo WINK no tocante às aproximações físicas para o tamanho e forma das componentes, pelo uso de superfícies equipotenciais efetivas (enquanto que WINK trunca essa aproximação em elipsóides de três eixos). Uma das grandezas que exigem maior precisão na determinação é a constante de estrutura interna (ver Seção 2.2). Claret (1993) e Faria (1987) fazem diversas alusões a essa constante e suas implicações nos estudos da evolução estelar (na “vida” de uma estrela). Faria (1987), em particular, menciona de maneira mais específica a estrela GL Car. Nossos resultados estão coerentes com os obtidos anteriormente na literatura (Giménez & Clausen, 1986), e com os obtidos por Faria (1987). Cabe salientar, porém, que nossos resultados são muito mais robustos que os anteriormente publicados, pois foram obtidos com o estudo integrado de todas as observações disponíveis e com um modelo consistente. Dessa forma, acreditamos que as pequenas discrepâncias encontradas são reais e que merecem ser publicadas. Como o sistema ainda não possui, até onde sabemos, curvas de velocidades radiais publicadas, esperamos solicitar tempo observacional no Laboratório Nacional de Astrofísica (LNA/MCT, telescópio de 1,6 m) para obtermos essas curvas e, assim, refazer a análise de GL Car integralmente, aplicando as melhorias recém-implementadas no Modelo WD.

Para este caso, o tempo computacional foi estimado como sendo da ordem de 104 minutos, perfazendo novamente um total de 19 iterações.

Tabela 4.5: Soluções com os tempos de observação em fase e em Data Juliana Heliocêntrica, usando o Modelo WD e o Método SIMPLEX para a curva de luz obtida em 1982. A tabela apresenta valores que podem ser comparados com aqueles da parte superior da Tabela 4.1 e, ao final, a soma dos resíduos quadrados, indicador da qualidade da solução.

Parâmetro	Observações em fase	Observações (HJD) $\omega_1 = 0$	Observações (HJD) $\omega_1 \approx 0$
i ($^\circ$)	$86,6782 \pm 0,0023$	$86,6498 \pm 0,0036$	$86,62658 \pm 0,00095$
e	$0,1442616 \pm 0,0000023$	$0,144331 \pm 0,000041$	$0,1445921 \pm 0,0000049$
ω_{1982} ($^\circ$)	$183,1136 \pm 0,0029$	$183,6436 \pm 0,0030$	183.6436 (fixo)
$r_{\text{rot,A}}$	0,21935	0,21915	0,22317
$r_{\text{rot,B}}$	0,20907	0,20922	0,21348
L_B/L_A (b)	$0,883 \pm 0,099$	$0,885 \pm 0,099$	$0,886 \pm 0,099$
$\Sigma(O-C)^2$	0,01402	0,01398	0,09400

4.2 Testes para o Método SIMPLEX

Essencialmente, esta seção apresenta os mesmos testes que a seção anterior, exceto pelo fato que desta vez usamos o Método SIMPLEX ao invés do MMQ usado até então. Apesar de, em resumo, os testes referirem-se a nossa implementação do MS, estamos, de fato, repetindo os testes da Seção 4.1 para sistemas com movimento de ápsides, pois a lógica do programa e seu fluxo não torna possível separar os procedimentos. Seguimos, portanto, os mesmos passos, tratando as observações de 1982 e 1983, primeiro separadamente, com $\dot{\omega} = 0$ (introduzidas em fase e em datas julianas heliocêntricas) e $\dot{\omega} \approx 0$ (HJD) e depois em conjunto.

Esses testes mostraram-se importantes, pois, por mais de uma vez, descobrimos pontos que ainda não haviam sido exercitados pelo programa, agora em seu novo fluxo, que também afetavam a solução pelo MMQ. Esses testes foram acompanhados, de forma simultânea por Vaz, em sua análise de outro sistema eclipsante, SMMV 790 (Stassun *et al.* 1999) ou V1174 Ori. Trata-se de um sistema com componentes ainda na fase da pré-seqüência principal que não apresenta excentricidade (nem, portanto, movimento de ápsides) cuja análise será publicada em breve (Stassun *et al.* 2003). A necessidade do Método SIMPLEX para V1174 Ori deve-se ao fato das componentes do sistema apresentarem manchas frias, cuja solução pelo Método de Mínimos Quadrados estava sendo inconsistente, tendo sido a análise de V1174 Ori, de fato, a motivação maior para a implementação do MS no Modelo WD.

As Tabelas 4.5 e 4.6 apresentam nossos resultados para os dois conjuntos de dados (1982 e 1983) analisados separadamente. Aqui também optamos por apresentar somente as curvas de luz em fase e para a cor b (Figuras 4.4 e 4.5). Nesta etapa, os tempos computacionais ficaram em torno de 75 minutos com um total de 80 iterações, considerando-se 7 variáveis livres (mencionadas no texto) e na mesma máquina. Pelos valores da soma dos resíduos quadrados, $\Sigma(O-C)^2$, podemos perceber que a variação das soluções foi praticamente a mesma para as observações em fase, com $\omega_1 = 0$ e $\omega_1 \approx 0$. Os valores dos raios das componentes (não mostrados aqui) em relação à sua orientação tiveram, no geral, uma variação de $\sim 1,5\%$ (de acordo com o valor médio), tanto para o MS como para o MMQ.

Cabe aqui mencionar que as soluções com o MMQ e o MS não são, de fato, completa-

Tabela 4.6: Soluções com os tempos de observação em fase e em Data Juliana Heliocêntrica, usando o Modelo WD e o Método SIMPLEX para a curva de luz obtida em 1983. A tabela apresenta valores que podem ser comparados com aqueles da parte superior da Tabela 4.1 e, ao final, a soma dos resíduos quadrados, indicador da qualidade da solução.

Parâmetro	Observações em fase	Observações (HJD) $\omega_1 = 0$	Observações (HJD) $\omega_1 \approx 0$
i ($^\circ$)	$86,5995 \pm 0,00048$	$86,5635 \pm 0,0038$	$86,62057 \pm 0,00055$
e	$0,1469592 \pm 0,0000026$	$0,146036 \pm 0,000046$	$0,1461699 \pm 0,0000031$
ω_{1983} ($^\circ$)	$198,27406 \pm 0,00045$	$197,1472 \pm 0,0077$	$197,1472$ (fixo)
$r_{\text{rot,A}}$	0,22106	0,22070	0,22095
$r_{\text{rot,B}}$	0,20912	0,20912	0,21186
L_B/L_A (b)	$0,867 \pm 0,099$	$0,869 \pm 0,099$	$0.884 \pm 0,099$
$\Sigma(O-C)^2$	0,01557	0,01617	0,01422

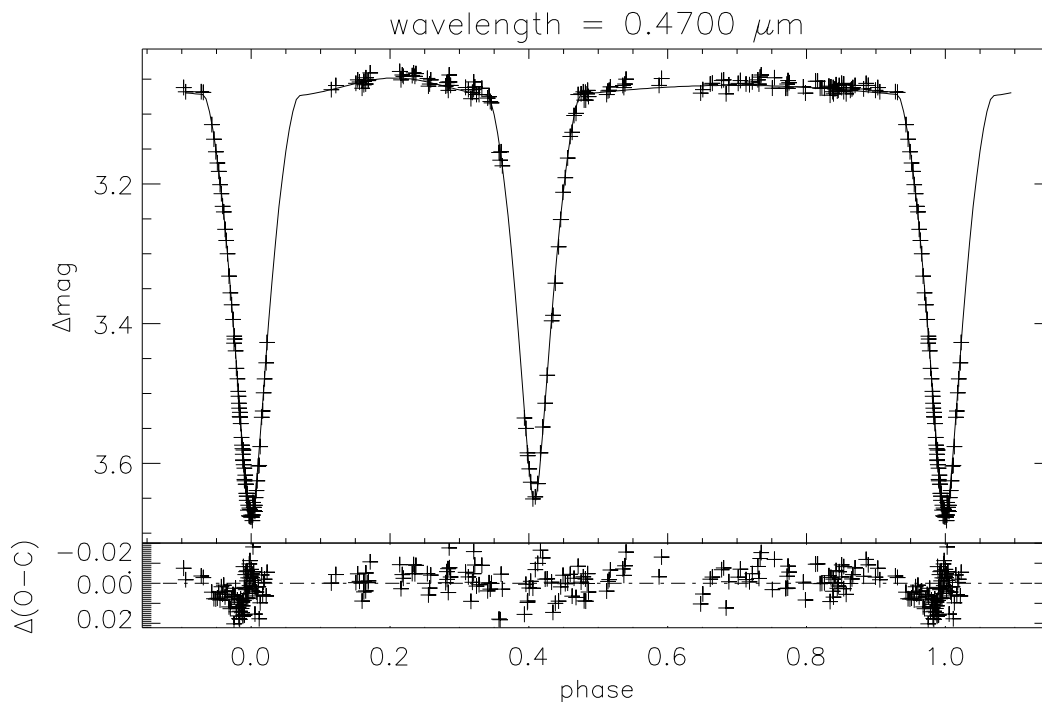


Figura 4.4: Curva de luz e resíduos para as observações de 82 em fase (MS)

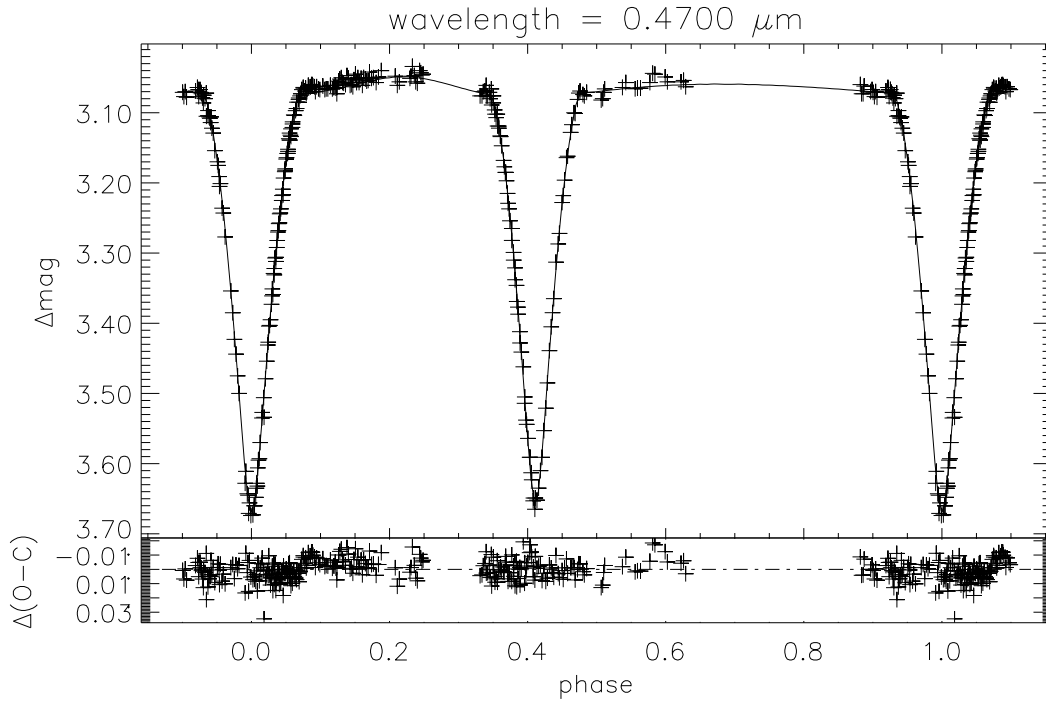


Figura 4.5: Curva de luz e resíduos para as observações de 83 em fase (MS)

mente idênticas. Enquanto que a lógica e estrutura da implementação original do MMQ no Modelo WD permite o ajuste de variáveis que afetam o modelo tanto globalmente como em somente um comprimento de onda, isso não é, ainda, possível, em nossa implementação do MS. O motivo deve-se ao fato de estarmos minimizando a soma (ponderada pelos pesos observacionais) dos resíduos $O-C$ para todas as observações. Em outras palavras, os parâmetros que afetam somente um comprimento de onda (parâmetros não-globais) vão alterar essa soma de forma diferente, se comparado com o efeito dos parâmetros globais, que afetam a **todos** os comprimentos de onda. Se estamos analisando mais de uma curva de luz em comprimentos de onda diferentes, a soma dos resíduos quadrados para as variáveis dependentes do comprimento de onda terá sua variação “diluída” pela não influência de um daqueles parâmetros para um determinado comprimento de onda em uma curva de luz de outra banda espectral. Preferimos impedir por lógica de programa essa possibilidade, deixando-a somente acessível quando se analisar somente uma curva de luz.

Por outro lado, enquanto que a introdução da possibilidade de ajustar-se ω_0 e $\dot{\omega}$ da Eq. (2.40) no Modelo WD com seu método tradicional, MMQ, implica em alterações estruturais importantes, é praticamente trivial essa possibilidade com o Método SIMPLEX. Essa possibilidade, claramente importante, está planejada para ser implementada em breve com o modo de solução pelo Método SIMPLEX, devendo demorar bem mais para o modo MMQ (devido às dificuldades antecipadas).

Apresentamos nossos resultados na Tabela 4.4. A Figura 4.6 apresenta a curva de luz que contém os resultados para todas as observações (82+83) para os Métodos de Mínimos Quadrados e SIMPLEX, como também os resultados obtidos por Faria (1987) para o Modelo WINK. Para uma melhor comparação das soluções, normalizamos a soma dos resíduos quadrados de acordo com o número de observações feitas, n (542 observações para

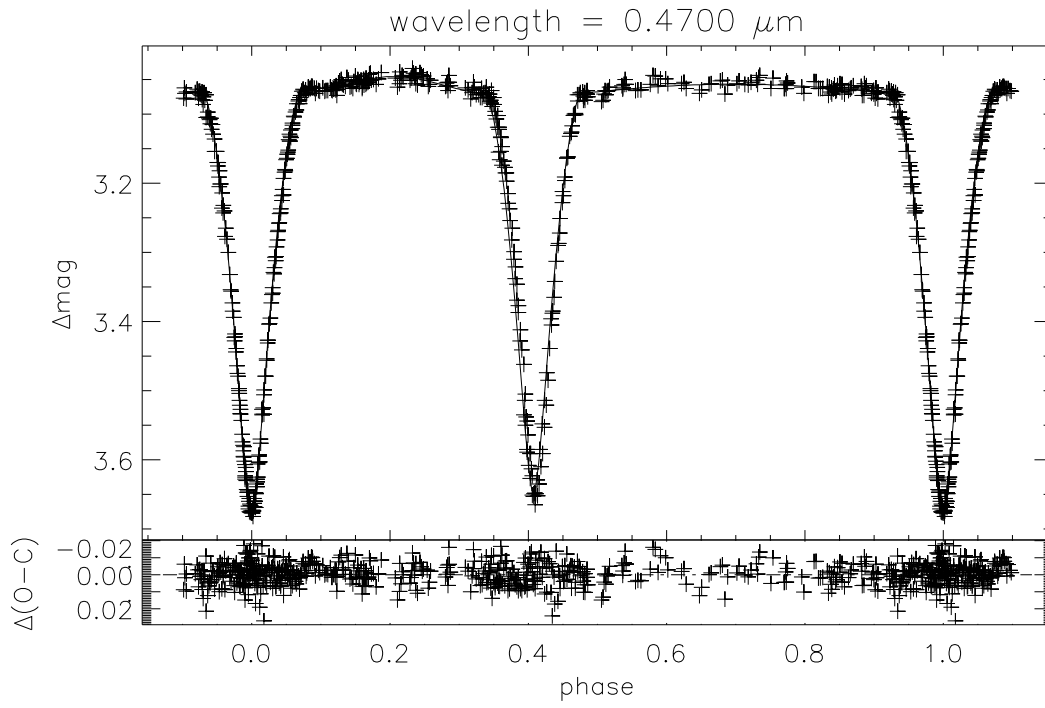


Figura 4.6: Curva de luz e resíduos para as observações de $82 + 83$ em JD com $\dot{\omega} = 0.0947^\circ/\text{ciclo}$ (MS)

cada cor). Percebe-se que os valores obtidos pelo Modelo WD são ligeiramente superiores aos valores do Modelo WINK por causa das aproximações físicas das componentes. E para este caso, o tempo computacional foi estimado como sendo da ordem de 200 minutos, perfazendo um de 90 iterações.

Capítulo 5

Conclusão

Como foi dito na introdução, o trabalho dos astrofísicos é tentar mostrar de uma forma sucinta a realidade de uma parte do nosso Universo. Então, nada se faz mais necessário do que melhorarmos os nossos modelos físicos. Em particular o Modelo Wilson-Devinney para Sistemas Binários Eclipsantes, pois estes são umas das fontes mais ricas de dados e informações. Por melhorias nos modelos entenda-se a forma de obtenção e tratamento dos dados de uma forma mais consistente.

Utilizando-se de curvas de luz para a determinação das dimensões absolutas e da análise dos tempos de mínimo para a taxa de avanço ou retrocesso da linha dos ápsides podemos determinar o valor de k_2 de uma maneira mais precisa e real, posicionando de uma maneira melhor o sistema binário em questão em um diagrama evolutivo.

A implementação de um método de convergência que não depende de derivadas (Método SIMPLEX) provou-se útil nas aplicações em sistemas binários eclipsantes, apesar do que seria necessário uma formulação um pouco mais eficiente para obtermos um valor mais otimizado. Devemos mencionar aqui um outro ponto importante na implementação da longitude do periastro nos dois métodos usados. Os valores de ω_0 e $\dot{\omega}$ na Eq. (2.40) foram mantidos constantes para todas as soluções que possuem $\dot{\omega} > 0$ pelo fato de não termos implementado o cálculo das suas derivadas no código original. Tal implementação acarretará uma mudança radical do MMQ, o que não justifica o esforço nesse momento. Entretanto, ela pode ser implementada mais facilmente na subrotina `fplex.f` (ver Apêndice A.3.4) do Método SIMPLEX.

O ajuste de um parâmetro global (isto é, que afeta todas as curvas de luz e/ou de velocidades radiais em análise) pode ser feito por esta versão do MS. Porém, se o parâmetro afetar somente um determinado comprimento de onda ou tipo de curva (por exemplo, escurecimento de bordo, luminosidade de uma das estrelas, terceira luz, semi-eixo maior da órbita, etc.), as somas dos desvios quadrados serão diferentes para cada cor, não sendo possível compararmos de forma correta tais desvios. Calculando-se uma curva de luz ou de velocidade radial por vez, é possível ajustar-se as somas. Isso é uma limitação da atual implementação. Uma solução que seria possível, trabalhosa e nem um pouco trivial seria calcularmos um outro SIMPLEX para os parâmetros não globais. Por enquanto podemos contornar a situação resolvendo uma curva de luz de cada vez para ajustar tais parâmetros,

deixando, momentaneamente, tal questão em aberto. Outra alternativa a ser pensada seria calcularmos um SIMPLEX para os parâmetros que dependem do comprimento de onda e outro para os parâmetros que só afetam as curvas de velocidade radiais (e.g. semi-eixo maior), não levando em conta os resíduos para as outras cores. Esta versão do código WD também permite-nos escolher entre os métodos de convergência utilizados, visando uma diminuição ainda maior do tempo de execução do programa.

Em termos de precisão numérica, as modificações introduzidas tornaram o código mais lento, mas completamente consistente internamente. Elas tornam-se necessárias e até convenientes. Ainda há muito por fazer, como a paralelização do código (Capítulo 3). Com ela será possível diminuir o tempo de execução do programa, realizando os cálculos das curvas de luz em vários processadores diferentes (pelo menos seis) ao invés de sobrecarregar apenas um, tornando a análise mais eficiente e acenando com a possibilidade de fazermos a integração do modelo de SBE com modelos de atmosferas estelares.

Como continuação do trabalho, devemos solicitar tempo observacional no LNA/MCT para a primeira determinação das curvas de velocidade radial de GL Car e, após sua redução, empreender uma reanálise do sistema, que prevemos trará uma significativa melhoria nos resultados já publicados para o sistema. Podemos, ainda, estender este tratamento a outros sistemas que possuam o mesmo tipo de relevância para os controles de modelos evolutivos (Petrova, 1999 e 2002). Um dos sistemas seria *U Ophiuchi*, que possui observações desde 1881 e que provavelmente é um sistema quádruplo. Neste sistema, as componentes são deformadas de tal maneira que as aproximações do Modelo WINK não são suficientes.

Referências

- Alencar S.H.P., Vaz L.P.R., 1997, A&A **326**, 257
- Alencar S.H.P., Vaz L.P.R., 1999, A&AS **135**, 555
- Alencar S.H.P., Vaz L.P.R., Helt B., 1997, A&A **326**, 709
- Alencar S.H.P., Vaz L.P.R., Nordlund Å., 1997, A&A **346**, 556
- Bevington P.R., 1969, Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, 1st edition, McGraw-Hill, New York
- Binnendijk L., 1960, Properties of Double Stars, The Oxford University Press, London
- Bruch A., Vaz L.P.R., Diaz M.P., 2001, A&A **377**, 898
- Casey B.W., Mathieu R.D., Vaz L.P.R., Andersen J., Suntzeff N.B., 1998, AJ **115**, 1617
- Claret A., 1997, A&A **327**, 11
- Claret A. and Giménez A., 1993 A&A , **277**, 487
- Etzcel P.B., 1985, “SBOP – Spectroscopic Binary Orbit Program”, Program’s Manual
- Faria P.L., 1987, Tese de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Giménez A., and Garcia-Pelayo J. M., 1983, Ap&SS **92**, 203
- Giménez A., Clausen J.V., Helt B.E., and Vaz, L.R.P., 1985, A&AS **62**, 179
- Giménez A. 1985, ApJ **297**, 405
- Giménez A., Clausen J.V. and Andersen J., 1986, A&A **160**, 310
- Giménez A., Clausen J.V. 1986, A&A **161**, 275
- Hertzprung, E., 1930, Bull. Astron. Neth. **6**, 4
- Hertzprung, E., 1942, Bull. Astron. Neth. **9**, 280
- Khaliullina A.I., and Khaliullin Kh.F., 1984, Soviet Astr., **28(2)**, 228
- Kämper B.C., 1986, ApJ **120**, 167
- Kallrath J., and Linnel A.P., 1987, ApJ **313**, 346
- Moulton F.R. 1947, An introduction to Celestial Mechanics. The Macmillan Co., New York
- Martynov D. Ya., 1973, in V.P. Tsesevich (ed.) Eclipsing variable stars, IPST Astrophys. Lybrary, Jerusalem.
- Nelder, J.A., and Mead,R., 1965, Comput J., **7**, 308
- Pacheco P.B., 1996, Parallel Programming with MPI, Harcourt Publishers Ltd.
- Popper D.M., Carlos R., 1970, PASP, **82**, 762
- Popper D.M., Etzel P.B., 1981, AJ **86**, 102
- Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., and Flannery, B.P., 1992, Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press.

- Pritchard J., 1997, *Southern Stars*, **37**, 160
- Petrova A.V. and Orlov V.V. 1999, *AJ* **117**, 587
- Petrova A.V. and Orlov V.V. 2002, *Ap* **45**, 334
- Ross S.M., 1987, *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*.
John Wiley & Sons, Nova Iorque.
- Russell H.N., 1946, *AJ* **52**, 25
- Russell H.N., Merrill J.E., 1952, *Contr. Princeton Univ. Obs.* No. 26
- Smart W.M., 1953, *Celestial Mechanics*. Longmans, Green and Co. London (New York-Toronto)
- Splendley W., Hext G.R., and Himsforth, F.R., 1962, *Technometrics*, **4**, 441
- Söderhjelm S., 1975, *A&A* **42**, 229
- Stassun, K.G., Mathieu, R.D., Mazeh, T., & Vrba, F.J., 1999, *AJ* **117**, 2941
- Stassun, K.G., Mathieu, R.D., Vaz, L.P.R., & Vrba, F.J., 2003, em andamento.
- Swope, H.H., Shapley, H., 1938, *Harvard Obs. Bull.* **909**, 14
- Tsesevich V.P., 1973, *Eclipsing Variable Stars*. A Halsted Press Book.
- Vaz L.P.R., 1977, *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Vaz L.P.R., 1984, *Tese de Doutorado*, Universidade de Copenhague, não publicada.
- Vaz L.P.R., 1985, *Ap&SS* **113**, 349
- Vaz L.P.R., 1986, *RMxAA* **12**, 177
- Vaz L.P.R., Andersen J., Rabello Soares M.C., 1995, *A&A* **301**, 693
- Vaz L.P.R., Cunha N.C.S., Vieira E.F., Myrrha M.L.M., 1997, *A&A* **327**, 1094
- Wilson R.E., Devinney E.J., 1971, *ApJ* **166**, 605
- Wilson R.E., Devinney E.J., 1973, *ApJ* **182**, 539
- Wilson R.E., 1979, *ApJ* **234**, 1054
- Wilson R.E., 1993, in “New Frontiers in Binary Star Research”, Pacific RIM colloquium,
(K.C. Leung & I.-S. Nha, Eds.), ASP Conf. Series **38**, 91
- Wood D.B., 1972, “A Computer Program for Modelling Non-Spherical Eclipsing Star Systems”, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland

Apêndices

A.1 MODIFICAÇÕES NO PROGRAMA WD

Apresentamos aqui as subrotinas criadas para tornar viável o trato de sistemas que apresentem rotação de ápsides através do programa WD, como também modificações de cunho estrutural e computacional. Também foram feitas inclusões de novos parâmetros no arquivo de dados (longitude inicial do periastro ω_0 , a variação da longitude do periastro $\dot{\omega}$, a época inicial E e o tempo de conjunção T_{conj0}).

A.1.1 Subrotina `omgat.f`

Esta subrotina calcula a longitude do periastro posicionando a órbita corretamente, usando a equação 2.40.

```
SUBROUTINE OMGAT(T,THETZZ,OMEGAT)
DOUBLE PRECISION OMEGAT,T,THETZZ
DOUBLE PRECISION DPERIO,E2,E26,E3,E4,EPOCHW,EXC,FTC,QQ,QQ4,RWT,
+ TCONJO,TCONJW,TTG,W0,W1,ZCOSI2,ZINCR,ZSINI2
INTEGER ICPHAS
C .. Local Scalars ..
DOUBLE PRECISION DTHTZ,ECOSWZ,ECWCI2,ESINWZ,QCOSW,QQ1,QQ2,QQ3,QQE,
+ QSINW,THATZX,THATZZ,THETZX
C .. Intrinsic Functions ..
INTRINSIC DABS,DACOS,DATAN,DBLE,DCOS,DINT,DSIN
C .. Common blocks ..
COMMON /APS/W0,W1,EPOCHW,DPERIO,TCONJW,EXC,RWT,ZINCR,ZCOSI2,ZSINI2
COMMON /FASW/E2,E3,E4,E26,QQ,QQ4,FTC,TCONJO,TTG,ICPHAS
RWT = (W0 + (T-EPOCHW)*W1* (1.d0-W1*.2777777778d-2)/DPERIO)*
+ .2777777778d-2
IF (RWT.GT.0.d0) THEN
RWT = (RWT-DINT(RWT))*6.283185308d0
ELSE IF (RWT.LT.0.d0) THEN
RWT = (RWT-DINT(RWT)+1.d0)*6.283185308d0
END IF
OMEGAT = DBLE(RWT*57.29577951d0)
QSINW = DSIN(RWT)
QCOSW = DCOS(RWT)
ESINWZ = EXC*QSINW
ECOSWZ = EXC*QCOSW
QQ1 = 1.d0 + EXC*ESINWZ
QQE = (QSINW+EXC)/QQ1
QQ2 = DACOS(QQE)
QQ3 = ECOSWZ*QQ/qq1
IF (QQ3.LE.0.d0) THEN
QQ4 = QQ3 + QQ2
ELSE
QQ4 = QQ3 - QQ2
END IF
ECWCI2 = -ECOSWZ*ZCOSI2
c first approximation: thetzz = 0
THETZX = ECWCI2/ (ZSINI2+ESINWZ)
THETZZ = DATAN(THETZX)
5100 THATZX = ECWCI2/ (DCOS(THETZZ)*ZSINI2+ESINWZ)
THATZZ = DATAN(THATZX)
DTHTZ = (THATZZ-THETZZ)/ (1.d0+THETZX*THETZX)
THETZZ = THATZZ + DTHTZ
```

```

THETZX = THATZX
IF (DABS(DTHTZ).GT.1.d-9) GO TO 5100
RETURN
END

```

A.1.2 Subrotina faset.f

Esta subrotina calcula a fase correta do movimento apsidal no caso de rotação de ápsides, usando a equação 2.51.

```

SUBROUTINE FASET(TT,FF)
DOUBLE PRECISION FF,TT
C .. Scalars in Common ..
DOUBLE PRECISION DPERIO,E2,E26,E3,E4,EPOCHW,EXC,FTC,PERRO,PERR1,
+ QQ,QQ4,RWT,TCONJO,TCONJW,TTG
INTEGER ICPHAS
C .. Local Scalars ..
DOUBLE PRECISION COS3TT,COS5TT,COSTT,DTR,PI,PT,SIN2TT,SIN4TT,TOIW,
+ TWOPI
C .. Intrinsic Functions ..
INTRINSIC DCOS,DSIN
C .. Common blocks ..
COMMON /APS/PERRO,PERR1,EPOCHW,DPERIO,TCONJW,EXC,RWT
COMMON /FASW/E2,E3,E4,E26,QQ,QQ4,FTC,TCONJO,TTG,ICPHAS
PI = 3.14159265358979323846264d0
TWOPI = 2.d0*PI
DTR = 57.29577951d0
c TOIW esta em radianos assim como rwt
c TOIW e' a anomalia verdadeira
c segue de TOIW=theta-rwt, onde theta=TT+pi/2 e' a longitude da orbita
TOIW = TT - RWT
COSTT = DCOS(TOIW)
SIN2TT = DSIN(2.d0*TOIW)
COS3TT = DCOS(3.d0*TOIW)
SIN4TT = DSIN(4.d0*TOIW)
COS5TT = DCOS(5.d0*TOIW)
C.....
PT = - (EXC* (COSTT+EXC*.375D0* (1.D0+E26)*SIN2TT-E26* (1.D0+
+ E2*.375D0)*COS3TT-E3*.078125D0*SIN4TT+E4*.0375D0*COS5TT)-
+ .5D0*TT)*DPERIO/ (PI* (1.D0-PERR1/360.D0))
FF = PT - FTC
IF (ICPHAS.NE.0) FTC = FF
C.....
RETURN
END

```

A.1.3 Modificações estruturais

Para realizar modificações de cunho estrutural usamos o NAGWARE Compilers and Tools, Fortran Tools, Release 4.0. As ferramentas de transformação do código utilizadas permitem modernização dos mesmos, identificando seus problemas, selecionando rotinas e algoritmos. São, pois, de grande importância estas ferramentas, possibilitando interações de diversas versões do código FORTRAN.

A.2 EQUAÇÕES DO MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS

Seja $I(X_j, t)$ uma função de diversos parâmetros X_j ($j=1,2,3, \dots$) e do tempo t , que possa ser considerada como um modelo para determinado fenômeno observável. A partir de observações realizadas em diferentes instantes, devemos escolher um conjunto ótimo dos parâmetros X_j que melhor reproduza as observações. Normalmente, o conjunto de parâmetros X_j não é completamente arbitrário, e vários deles são fixados a valores teóricos ou relacionados aos outros parâmetros, restando, portanto, um sub-conjunto de parâmetros, X_i , que podem ser ajustados.

Consideremos que possuímos observações para um conjunto de instantes t_σ as quais, se comparadas com o modelo, produzem as seguintes diferenças:

$$\mathcal{D}_\sigma = \delta I_{\sigma, O-C} \equiv I(\text{obs}, t_\sigma) - I(X_j, t_\sigma), \quad (\text{A.0})$$

onde (O – C) representa “observado” menos “calculado”, e a dependência temporal foi representada simplesmente pelo subscrito σ , por simplicidade. Uma das formas de encontrar a solução do problema (o conjunto correto dos X_j), é minimizar as diferenças \mathcal{D}_σ . Em primeira aproximação, podemos escrever, desprezando termos de maior ordem:

$$\delta I_\sigma = \delta I(X_j, t_\sigma) \cong \sum_i \frac{\partial I(X_j, t_\sigma)}{\partial X_i} \delta X_i + \dots \quad (\text{A.1})$$

onde o somatório se faz nos parâmetros que se quer ajustar. O Método de Mínimos Quadrados procura minimizar a soma, \mathcal{S} , para todos os dados, dos quadrados das diferenças entre as Equações (A.0) e (A.1), onde

$$\mathcal{S} = \sum_\sigma (\mathcal{D}_\sigma - \delta I_\sigma)^2 \cong \sum_\sigma \left(\mathcal{D}_\sigma - \sum_i \frac{\partial I(X_j, t_\sigma)}{\partial X_i} \delta X_i \right)^2. \quad (\text{A.2})$$

Denominando de $\mathcal{A}_{\sigma,i}$ a matriz de derivadas parciais e de \mathcal{C}_i o vetor de correções a serem aplicadas aos parâmetros X_i , temos

$$\mathcal{A}_{\sigma,i} = \frac{\partial I(X_j, t_\sigma)}{\partial X_i} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_i = \delta X_i, \quad (\text{A.3})$$

e podemos escrever a Eq. (A.2) como

$$\mathcal{S} = \sum_\sigma \left(\mathcal{D}_\sigma - \sum_i \mathcal{A}_{\sigma,i} \mathcal{C}_i \right)^2. \quad (\text{A.4})$$

A condição de fazer \mathcal{S} um mínimo para os parâmetros X_i pode ser escrita como

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathcal{C}_j} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Aplicando, então, a condição acima na Eq. (A.4), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathcal{C}_j} &= \sum_\sigma \left[2 \left(\mathcal{D}_\sigma - \sum_i \mathcal{A}_{\sigma,i} \mathcal{C}_i \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{C}_j} \left((-1) \times \sum_i \mathcal{A}_{\sigma,i} \mathcal{C}_i \right) \right] \\ &= 2 \sum_\sigma \left[\left(\mathcal{D}_\sigma - \sum_i \mathcal{A}_{\sigma,i} \mathcal{C}_i \right) (-1) \times \sum_i \left(\mathcal{A}_{\sigma,i} \frac{\partial \mathcal{C}_i}{\partial \mathcal{C}_j} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde no segundo passo usamos o fato das derivadas parciais com relação ao parâmetro X_i serem independentes de variações no parâmetro X_j . Supondo que os diferentes parâmetros sejam independentes entre si, uma hipótese relativamente forte e frequentemente violada (pois existem inúmeros casos de correlações entre os parâmetros), temos que as derivadas parciais podem ser representadas pela função delta de Kronecker:

$$\frac{\partial \mathcal{C}_i}{\partial \mathcal{C}_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{caso } i \neq j \\ 1, & \text{caso } i = j \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

A Eq. (A.6) fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathcal{C}_j} &= (-1) \times 2 \sum_{\sigma} \left[\left(\mathcal{D}_{\sigma} - \sum_i \mathcal{A}_{\sigma,i} \mathcal{C}_i \right) \mathcal{A}_{\sigma,j} \right] \\ &= (-1) \times 2 \sum_{\sigma} \mathcal{A}_{j,\sigma}^T \mathcal{D}_{\sigma} - 2 \sum_i \left[\sum_{\sigma} (\mathcal{A}_{j,\sigma}^T \mathcal{A}_{\sigma,i}) \right] \mathcal{C}_i = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde $\mathcal{A}_{j,\sigma}^T$ é a matrix transposta de $\mathcal{A}_{\sigma,j}$. Como todas nossas matrizes e vetores são grandezas reais, o produto matricial da transposta por sua matriz real é uma matriz quadrada, simétrica e real e podemos escrever

$$\sum_{\sigma} \mathcal{A}_{j,\sigma}^T \mathcal{D}_{\sigma} = \sum_i \left[\sum_{\sigma} (\mathcal{A}_{j,\sigma}^T \mathcal{A}_{\sigma,i}) \right] \mathcal{C}_i \quad (\text{A.9})$$

ou, definindo

$$\mathcal{D}'_j = \sum_{\sigma} (\mathcal{A}_{j,\sigma}^T \mathcal{D}_{\sigma}), \quad (\text{A.10})$$

$$\mathcal{B}_{j,i} = \sum_{\sigma} (\mathcal{A}_{j,\sigma}^T \mathcal{A}_{\sigma,i}), \quad (\text{A.11})$$

$$(\text{A.12})$$

podemos escrever

$$\mathcal{D}'_j = \sum_i \mathcal{B}_{j,i} \mathcal{C}_i, \quad (\text{A.13})$$

cuja solução se resume em encontrar a inversa da matriz (quadrada, real e simétrica) \mathcal{B} ,

$$\mathcal{C}_j = \sum_i \mathcal{B}_{j,i}^{-1} \mathcal{D}'_i = \sum_i \left[\sum_k \mathcal{B}_{j,k}^{-1} \mathcal{B}_{k,i} \right] \mathcal{C}_i \quad (\text{A.14})$$

Existem formas de se calcular coeficientes de correlação entre os diferentes parâmetros, bem como de se estimar os erros internos nos valores encontrados para as correções $\mathcal{C}_i = \delta X_i$, que devem diminuir as diferenças da Eq. (A.0). Entretanto, isso está fora do objetivo desse apêndice e fazemos referência a, por exemplo, Bevington (1969).

A.3 ESQUEMA PARA SE FAZER UM SIMPLEX

A Figura A.1 mostra o algoritmo lógico seguido por nossa implementação do Método SIMPLEX. Ela ilustra uma combinação das operações que devem ser feitas (reflexão, expansão, contração e encolhimento) para obtermos um passo no processo de obtenção da solução final. O esquema sugerido por Kallrath & Linnell (1987), pode ser descrito como

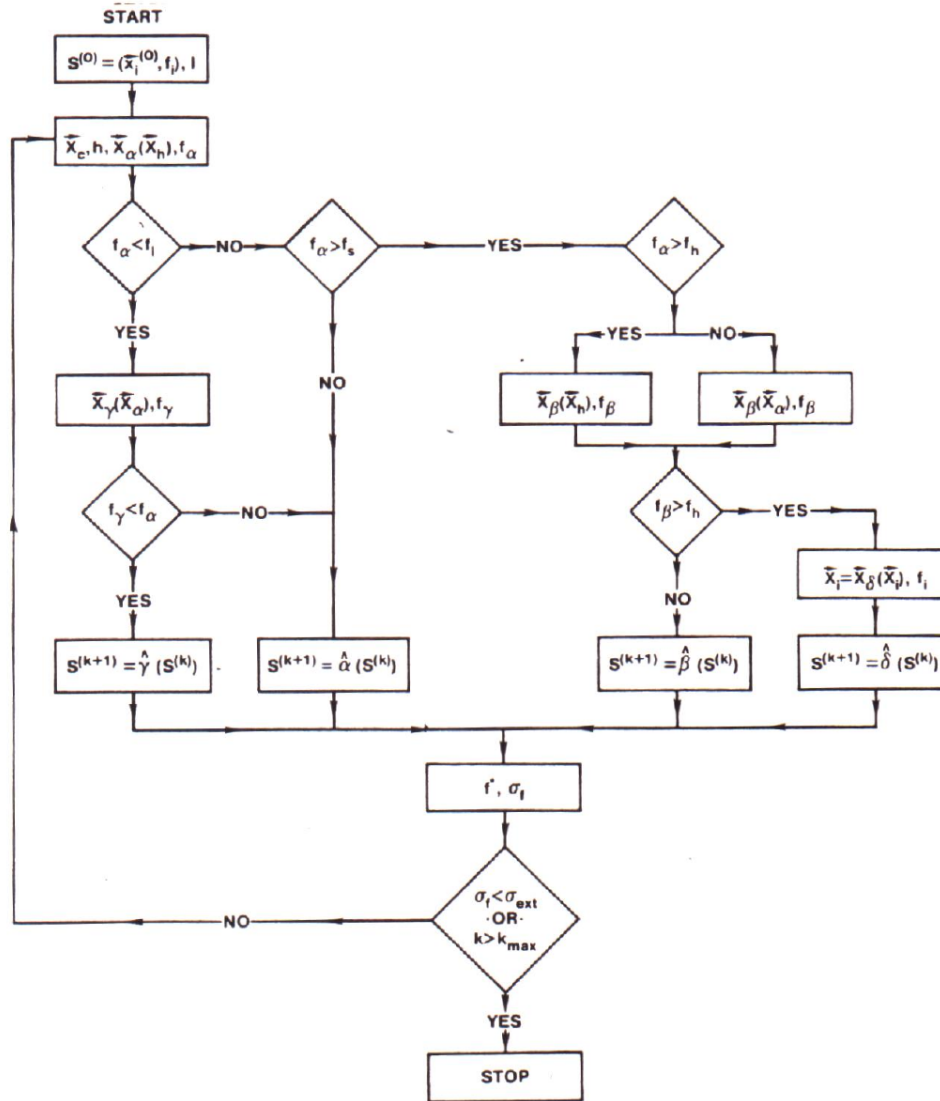


Figura A.1: Fluxograma para o algoritmo SIMPLEX.

segue. Primeiramente possuímos m parâmetros e temos que definir nossa matriz $S^{(k)}$, cujas componentes representam os vértices de nosso simplex $S_{ij}^{(k)}$ na k -ésima iteração:

$$S_{ij}^{(k)} = \begin{cases} x_{ij}^{(k)}, & \text{caso } 1 \leq j \leq m \\ f_i = f(x_i), & \text{caso } j = m + 1 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Para calcularmos o maior, o segundo maior, o menor desvio $(O - C)^2$ e o centro do simplex usamos as respectivas fórmulas:

$$f_h = \max[f_i, 1 \leq i \leq m + 1] \quad (\text{A.16})$$

$$f_s = \max[f_i, 1 \leq i \leq m + 1, i \neq h] \quad (\text{A.17})$$

$$f_l = \min[f_i, 1 \leq i \leq m + 1] \quad (\text{A.18})$$

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1, i \neq h}^{m+1} x_i \quad (\text{A.19})$$

E para construir o simplex inicial usamos o algoritmo abaixo:

$$x_{ij}^{(0)} = x_{1j}^{(0)} + \Delta S_j \times \begin{cases} 0 & \text{caso } i = 1 \\ p & \text{caso } j = i - 1 \\ q & \text{de outro modo} \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

$$p = \frac{(m + 1)^{1/2} + m - 1}{\sqrt{2m}} \quad (\text{A.21})$$

$$q = \frac{(m + 1)^{1/2} - 1}{\sqrt{2m}} \quad (\text{A.22})$$

Então, a matriz $S^{(0)}$ é dada por $S^{(0)} = S^{(0)}[m, x_1^{(0)} - q\Delta S, \Delta S]$, onde ΔS contém o tamanho do passo para cada parâmetro. As funções que possibilitam o simplex mover-se no espaço de parâmetros, adaptando-o à topologia local e contraindo-o para o mínimo final são:

$$x_\alpha = x_\alpha(x) = (1 + \alpha)x_c - \alpha x, \quad 0 < \alpha \quad (\text{A.23})$$

$$x_\beta = x_\beta(x) = (1 - \beta)x_c + \beta x, \quad 0 < \beta < 1 \quad (\text{A.24})$$

$$x_\gamma = x_\gamma(x) = (1 - \gamma)x_c + \gamma x, \quad 0 < \gamma \quad (\text{A.25})$$

$$x_\delta = x_\delta(x) = x_l + \delta(x - x_l), \quad 0 < \delta \quad (\text{A.26})$$

onde os coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são os coeficientes de reflexão, contração, expansão e encolhimento (ver figura 3.1). Os valores utilizados por nós para os coeficientes foram os mesmos utilizados por Kallrath: $\alpha = 1$, $\beta = 0.35$, $\gamma = 2.0$ e $\delta = 0.5$.

As condições que estabelecem qual operação será feita estão baseadas na comparação dos valores dessas funções com os valores das funções A.16, A.17 e A.18, de modo que:

1. Reflexão $\rightarrow f_s > f_\alpha > f_i$;
2. Expansão $\rightarrow f_\gamma < f_\alpha < f_i$;
3. Contração $\rightarrow f_h < f_\alpha$ ou $f_\alpha < f_h$
4. Encolhimento $\rightarrow f_\beta \geq f_h$

Abaixo estão listadas as subrotinas criadas baseadas nas equações A.23, A.24 e A.26. Note que o critério de parada está relacionado ou com um número previamente dado (k_{max}) ou com o desvio padrão dos resíduos observacionais (σ_{ext}):

A.3.1 Subrotina reflex.f

Subrotina para o cálculo da operação de reflexão (eq. A.23).

```

subroutine reflex(spxc,spx,alphas,nvar,xalpha)
implicit none
double precision spx(32),spxc(32),xalpha(32)
double precision alphas
integer i,nvar
do 10 i=1,nvar
10  xalpha(i) = (1.d0+alphas)*spxc(i) - alphas*spx(i)
return
end

```

A.3.2 Subrotina contrx.f

Subrotina para o cálculo da operação de contração (eq. A.24).

```

subroutine contrx(spxc,spx,betas,nvar,xbeta)
implicit none
double precision spx(32),spxc(32),xbeta(32)
double precision betas
integer i,nvar
do 10 i=1,nvar
10  xbeta(i) = (1.d0-betas)*spxc(i) + betas*spx(i)
return
end

```

A.3.3 Subrotina shrinx.f

Subrotina para o cálculo da operação de encolhimento (eq. A.26).

```

subroutine shrinx(spx,splx,deltas,nvar,imin)
implicit none
double precision spx(32),splx(32,32)
double precision deltas
integer i,j,nvar,imin
do 10 i=1,nvar+1
do 10 j=1,nvar
10  splx(i,j) = spx(j) - deltas*(splx(i,j) - spx(j))
return
end

```

A.3.4 Subrotina fplex.f

Subrotina para o cálculo do simplex (eq. A.15).

```

SUBROUTINE FPLEX(spx,RV,GRX,GRY,GRZ,RVQ,GRXQ,GRYQ,GRZQ,
& MMSAVH,FR1,FR2,HLD,SLUMP1,SLUMP2,THETA,RHO,AA,BB,
& POT1,POT2,N1,N2,FF1,FF2,D,HL,CL,X1,X2,Y1,Y2,G1,G2,WLA,SM1,SM2,
& TPH,TPC,SBRH,SBRC,T1,T2,A1,A2,XBOL1,
& XBOL2,YBOL1,YBOL2,PHAS,RMASS,XINC,HOT,COOL,
& SNTHH,CSTHH,SNFIH,CSFIH,TLDH,GLUMP1,GLUMP2,XX1,XX2,
& YY1,YY2,ZZ1,ZZ2,DINT1,DINT2,GRV1,GRV2,RFTEMP,RF1,
& RF2,CSBT1,CSBT2,GMAG1,GMAG2,MODE,MOD,THE,IOUT)
  implicit none
  DOUBLE PRECISION A1,A2,ALB1,ALB2,CL,COOL,
& D,
& DINT1,DINT2,E,
& DTR,ELIT,
& F1,F2,FF1,FF2,
& G1,G2,GR1,GR2,HL,HOT,HTT,PCSV,
& PERR,PHNORM,PHP,PHSV,
& PSHIFT,
& RM,RMASS,S,SBRC,SBRH,SM1,
& SM2,
& T1,T2,
& TAVC,TAVH,THE,TPC,TPH,
& VC1,VC2,X1,X2,XBOL1,XBOL2,
& XINC,XINCL,XLT,XR,Y1,Y2,
& YBOL1,YBOL2
  DOUBLE PRECISION AA(20),BB(20),BR(5000),CLA(15),
& CSBT1(762),
& CSBT2(762),CSFIH(1600),CSTHH(65),
& D3(5000),
& EL3(15),
& EL3A(15),
& FLUX(5000),FR1(762),FR2(762)

  DOUBLE PRECISION GLUMP1(762),GLUMP2(762),GMAG1(762),GMAG2(762),
& GRV1(762),GRV2(762),GRX(762),GRXQ(762),GRY(762),
& GRYQ(762),GRZ(762),GRZQ(762),HLA(15),HLD(800),
& OBS(100000),OMEGAT(5000),
& PHAS(5000),
& RADSP(2,100),RF1(762),RF2(762),
& RFTEMP(762),RHO(260),RV(762),RVQ(762),
& SLUMP1(762),SLUMP2(762),SNFIH(1600),
& SNTHH(65)
  DOUBLE PRECISION TEMSP(2,100),THETA(260),TLDH(1600),
& WLA(15),WT(5000),
& X1A(15),X2A(15),XLAT(2,100),XLONG(2,100),
& XNORM(17),XX1(762),XX2(762),Y1A(15),
& Y2A(15),YY1(762),YY2(762),ZZ1(762),ZZ2(762)
  DOUBLE PRECISION A,DP,DPERIO,DSUM,EC,
& ECOS,EF,EFC,EPOCHW,EXC,PCONJ,PER,PERIOD,
& PERRO,PERR1,PERT,PHPER,PHPERI,POT1,POT2,PSH,
& RWT,SINI,TCONJW,TRC,
& VF,VFAC,VFVU,VGA,VGAM,VKM1,VKM2,VOL1,VOL2,VRA1,
& VRA2,VSUM1,VSUM2,VUNIT,ZCOSI2,ZINCR,ZSINI2
  DOUBLE PRECISION AGR(9,24,2),AGT(9,24),CSLAT(2,100),
& DA(9,24,2),CSLNG(2,100),
& RDSP(2,100),SNLAT(2,100),
& SNLNG(2,100),TMSP(2,100),XLNG(2,100)
  double precision spx(32),aaxis,pshg,clg
  INTEGER NAT(9)
  INTEGER KEEP(31),KNOBS(17),
& MMSAVH(124)
  INTEGER IFAT1,IFAT2,IFC,IFIL,
& IFVC1,IFVC2,IOUT,
& NLC,NSP1,NSP2
  INTEGER I,IB,IB1,I5,
& II,
& ISP,IST,IX,
& KPH,KS,
& KSPA,KSPB,
& MOD,MODE,N1,N2,
& NLVC,NSPA,NSPB,
& NVAR,NVC,NVCP
  integer nvsplx
  common /siplea/xlat,xlong,radsp,temsp
  common /sipleb/flux,obs,wt
  common /siplex/aaxis,alb1,alb2,cla,e,el3,el3a,f1,f2,gr1,gr2,hla,
& omegat,pcsv,phsv,perr,phnorm,pshift,rm,tavh,tavc,xnorm,xincl,
& x1a,x2a,y1a,y2a,keep,knobs,kph,nvar,nlvc,nspace,nspace,kspa,kspb,
& nvcp,nvc
  COMMON /APS/PERRO,PERR1,EPOCHW,DPERIO,TCONJW,EXC,RWT,ZINCR,ZCOSI2,

```

```

&      ZSINI2
COMMON /ECCEN/EC, A, PERIOD, VGA, SINI, VF, VFAC, VGAM, VOL1, VOL2, IFC
COMMON /FLVAR/PER, PSH, DP, DSDUM, EF, EFC, ECOS, PERT, PHPER, PCONJ,
&      PHPERI, VSUM1, VSUM2, VRA1, VRA2, VKM1, VKM2, VUNIT, VVU, TRC
COMMON /SPOTS/SNLAT, CSLAT, SNLNG, CSLNG, RDSP, TMSP, XLNG
COMMON /INCON/IFVC1, IFVC2, NLC
COMMON /NSPT/NSP1, NSP2, IFAT1, IFAT2
COMMON /WORK2/AGR, AGT, DA, NAT, IFIL

DTR = 1.745329D-2
ii = 1
spx(nvar+1)=0.d0

c lpv simplex 17/07/02 -----
c calculates the function at all SIMPLEX vertices
c NLVC = total number of radial/light curves
c lpv simplex 17/07/02 -----
      IFIL = 0
      DO 6417 IB = 1, NLVC
        VC1 = 0.DO
        VC2 = 0.DO
        ELIT = 0.DO
        IF (IB.GT.NVC) THEN
          ELIT = 1.DO/XNORM(IB)
        END IF
        IFIL = IFIL + 1
        IF (IB.EQ.IFVC1) VC1 = 1.DO
        IF (IB.EQ. (IFVC2* (1+IFVC1))) VC2 = 1.DO
        IST = KNOBS(IB) + 1
        IB1 = IB + 1
        ISP = KNOBS(IB1)
      c-----
c ks runs over all variables, 30 until now
c ks > 25 refers to wavelength dependent variables (radial/light curves)
c-----
      nvsplx=0
      DO 6420 KS = 1, 30

cc-----
cc modification introduced by Wilson in his 93 version, in order to place
cc correctly the calculated partial derivatives, when there are radial
cc velocity and light curves being solved simultaneously
cc-----

c lpv simplex 17/07/02 -----
c block to implement the variables - splx contains the SIMPLEX vertices
c lpv simplex 17/07/02 -----
      IF (NSPA.ne.0) then
        if (ks .eq. 1) then
          if (keep(ks) .eq. 1) then
            XLT = DTR*XLAT(KSPA, NSPA)
          else
            nvsplx=nvsplx+1
            xlt = DTR*spx(nvsplx)
          end if
          SNLAT(KSPA, NSPA) = SIN(XLT)
          CSLAT(KSPA, NSPA) = COS(XLT)
        else if (ks .eq. 2) then
          if (keep(ks) .eq. 1) then
            XLNG(KSPA, NSPA) = DTR*XLONG(KSPA, NSPA)
          else
            nvsplx=nvsplx+1
            xlng(KSPA, NSPA)=DTR*spx(nvsplx)
          end if
          SNLNG(KSPA, NSPA) = SIN(XLNG(KSPA, NSPA))
          CSLNG(KSPA, NSPA) = COS(XLNG(KSPA, NSPA))
        else if (ks .eq. 3) then
          if (keep(ks) .eq. 1) then
            RDSP(KSPA, NSPA) = RADSP(KSPA, NSPA)
          else
            nvsplx=nvsplx+1
            rdsp(KSPA, NSPA)=spx(nvsplx)
          end if
        else if (ks .eq. 4) then
          if (keep(ks) .eq. 1) then
            TMSP(KSPA, NSPA) = TEMSP(KSPA, NSPA)
          else
            nvsplx=nvsplx+1
            tmsp(KSPA, NSPA)=spx(nvsplx)
          end if
        end if
      IF (NSPB.ne.0) then
        if (ks .eq. 5) then

```

```

if (keep(ks) .eq. 1) then
  XLT = DTR*XLAT(KSPB,NSPB)
else
  nvsplx=nvsplx+1
  xlt = DTR*spx(nvsplx)
end if
SNLAT(KSPB,NSPB) = SIN(XLT)
CSLAT(KSPB,NSPB) = COS(XLT)
else if (ks .eq. 6) then
if (keep(ks) .eq. 1) then
  XLNG(KSPB,NSPB) = DTR*XLONG(KSPB,NSPB)
else
  nvsplx=nvsplx+1
  xlng(KSPB,NSPB)=DTR*spx(nvsplx)
end if
SNLNG(KSPB,NSPB) = SIN(XLNG(KSPB,NSPB))
CSLNG(KSPB,NSPB) = COS(XLNG(KSPB,NSPB))
else if (ks .eq. 7) then
if (keep(ks) .eq. 1) then
  RDSP(KSPB,NSPB) = RADSP(KSPB,NSPB)
else
  nvsplx=nvsplx+1
  rdsp(KSPB,NSPB)=spx(nvsplx)
end if
else if (ks .eq. 8) then
if (keep(ks) .eq. 1) then
  TMSP(KSPB,NSPB) = TEMSP(KSPB,NSPB)
else
  nvsplx=nvsplx+1
  tmsp(KSPB,NSPB)=spx(nvsplx)
end if
end if
end if
if (ks .eq.9) then
if (keep(ks) .eq. 1) then
  A = aaxis
else
  nvsplx=nvsplx+1
  A=spx(nvsplx)
end if
else if (ks .eq.10) then
if (keep(ks) .eq. 1) then
  EC = E
else
  nvsplx=nvsplx+1
  if (spx(nvsplx) .lt. 0.d0 ) then
    print *, ' WARNING: negative eccentricity, (' ,spx(nvsplx),')'
    spx(nvsplx) = 0.d0
  end if
  ec=spx(nvsplx)
end if
else if (ks .eq.11) then
if (keep(ks) .eq. 1) then
  PERT = PERR
else
  nvsplx=nvsplx+1
  pert=spx(nvsplx)*dtr
end if
else if (ks .eq.12) then
if (keep(ks) .eq. 1) then
  FF1 = F1
else
  nvsplx=nvsplx+1
  ff1=spx(nvsplx)
end if
else if (ks .eq.13) then
if (keep(ks) .eq. 1) then
  FF2 = F2
else
  nvsplx=nvsplx+1
  ff2=spx(nvsplx)
end if
else if (ks .eq.14) then
if (keep(ks) .eq. 1) then
  PSH = PSHIFT
else
  nvsplx=nvsplx+1
  psh=spx(nvsplx)
end if
pshg=psh
else if (ks .eq.15) then
if (keep(ks) .eq. 1) then
  VGAM = VGA
else

```

```

      nvsplx=nvsplx+1
      vgam=spx(nvsplx)
    end if
  else if (ks .eq.16) then
    if (keep(ks) .eq. 1) then
      XINC = XINCL
    else
      nvsplx=nvsplx+1
      xinc=spx(nvsplx)
    end if
  else if (ks .eq.17) then
    if (keep(ks) .eq. 1) then
      G1 = GR1
    else
      nvsplx=nvsplx+1
      g1=spx(nvsplx)
    end if
  else if (ks .eq.18) then
    if (keep(ks) .eq. 1) then
      G2 = GR2
    else
      nvsplx=nvsplx+1
      g2=spx(nvsplx)
    end if
  else if (ks .eq.19) then
    if (keep(ks) .eq. 1) then
      T1 = TAVH
    else
      nvsplx=nvsplx+1
      t1=spx(nvsplx)
    end if
  else if (ks .eq.20) then
    if (keep(ks) .eq. 1) then
      T2 = TAVC
    else
      nvsplx=nvsplx+1
      t2=spx(nvsplx)
    end if
  else if (ks .eq.21) then
    if (keep(ks) .eq. 1) then
      A1 = ALB1
    else
      nvsplx=nvsplx+1
      a1=spx(nvsplx)
    end if
  else if (ks .eq.22) then
    if (keep(ks) .eq. 1) then
      A2 = ALB2
    else
      nvsplx=nvsplx+1
      a2=spx(nvsplx)
    end if
  else if (ks .eq.23) then
    if (keep(ks) .eq. 1) then
      POT1 = PHSV
    else
      nvsplx=nvsplx+1
      pot1=spx(nvsplx)
    end if
  else if (ks .eq.24) then
    if (keep(ks) .eq. 1) then
      POT2 = PCSV
    else
      nvsplx=nvsplx+1
      pot2=spx(nvsplx)
    end if
  else if (ks .eq.25) then
    if (keep(ks) .eq. 1) then
      RMASS = RM
    else
      nvsplx=nvsplx+1
      rmass=spx(nvsplx)
    end if
  else if (ks .gt. 25 .and. ks .lt. 31) then
    if (nvc.ne.nlvc) then
      do 63437 i = nvc,nlvc
        i5 = (i-1)*5
        if (ks .eq.26) then
          if (keep(ks) .eq. 1) then
            HL = HLA(IB)
          else
            nvsplx=nvsplx+1
            hl=spx(nvsplx+i5)
          end if
        end if
      end do
    end if
  end if

```

```

else if (ks .eq.27) then
  if (keep(ks) .eq. 1) then
    CL = CLA(1B)
  else
    nvsplx=nvsplx+1
    cl=spx(nvsplx+i5)
  end if
clg=cl
else if (ks .eq.28) then
  if (keep(ks) .eq. 1) then
    X1 = X1A(1B)
  else
    nvsplx=nvsplx+1
    x1=spx(nvsplx+i5)
  end if
else if (ks .eq.29) then
  if (keep(ks) .eq. 1) then
    X2 = X2A(1B)
  else
    nvsplx=nvsplx+1
    x2=spx(nvsplx+i5)
  end if
else if (ks .eq.30) then
  end if
63437  continue
end if
Y1 = Y1A(1B)
Y2 = Y2A(1B)
end if
6420  CONTINUE

cc-----
cc the partial derivative with respect to third light (kh = 30) should be
cc calculated analytically, different equations according to the
cc definition of L3 **Vaz 04/mar/94**
cc correct if no radial velocity curve (ib)
cc-----

c aqui termina de implementar as variaveis
c comeca o calculo da curva de luz

c lavieira 04/jul/2002-----
c 872 CONTINUE
c lavieira 04/jul/2002-----
  if (iout .eq. 9) then begin
    open(unit=23,FILE='m3a',FORM='FORMATTED',STATUS='UNKNOWN')
    write(23,*) ec
    write(23,*) PER,PSH,DP,DSUM,EF,EFC,ECOS,PERT,PHPER,PCONJ,
    & PHPERI,VSUM1,VSUM2,VRA1,VRA2,VKM1,VKM2,VUNIT,VFVU,TRC
    write(23,*) RV,GRX,GRY,GRZ,RVQ,GRXQ,GRYQ,GRZQ,MMSAVH,FR1,
    & FR2,HLD,RMASS,POT1,POT2,G1,G2,A1,A2,N1,N2,FF1,
    & FF2,MOD,XINC,THE,MODE,SNTHH,CSTHH,SNFIH,CSFIH,
    & GRV1,GRV2,XX1,YY1,ZZ1,XX2,YY2,ZZ2,GLUMP1,GLUMP2,
    & CSBT1,CSBT2,GMAG1,GMAG2,IOUT
    write(23,*) '-----'
  end if
  CALL MODLOG(RV,GRX,GRY,GRZ,RVQ,GRXQ,GRYQ,GRZQ,MMSAVH,FR1,
  & FR2,HLD,RMASS,POT1,POT2,G1,G2,A1,A2,N1,N2,FF1,
  & FF2,MOD,XINC,THE,MODE,SNTHH,CSTHH,SNFIH,CSFIH,
  & GRV1,GRV2,XX1,YY1,ZZ1,XX2,YY2,ZZ2,GLUMP1,GLUMP2,
  & CSBT1,CSBT2,GMAG1,GMAG2,IOUT)
  if (iout .eq. 9) then begin
    write(23,*) ec
    write(23,*) PER,PSH,DP,DSUM,EF,EFC,ECOS,PERT,PHPER,PCONJ,
    & PHPERI,VSUM1,VSUM2,VRA1,VRA2,VKM1,VKM2,VUNIT,VFVU,TRC
    write(23,*) RV,GRX,GRY,GRZ,RVQ,GRXQ,GRYQ,GRZQ,MMSAVH,FR1,
    & FR2,HLD,RMASS,POT1,POT2,G1,G2,A1,A2,N1,N2,FF1,
    & FF2,MOD,XINC,THE,MODE,SNTHH,CSTHH,SNFIH,CSFIH,
    & GRV1,GRV2,XX1,YY1,ZZ1,XX2,YY2,ZZ2,GLUMP1,GLUMP2,
    & CSBT1,CSBT2,GMAG1,GMAG2,IOUT
  close(23)
  end if
  if (kph.eq.0 .and. phnorm.lt.10.d0) then
    php = phnorm
  else
    php = phper
  end if
c to calculate the normalization intensity at php
  CALL BBL(RV,GRX,GRY,GRZ,RVQ,GRXQ,GRYQ,GRZQ,MMSAVH,FR1,FR2,
  & HLD,SLUMP1,SLUMP2,THETA,RHO,AA,BB,POT1,POT2,N1,N2,
  & FF1,FF2,D,HL,CL,X1,X2,Y1,Y2,G1,G2,WLA(1B),SM1,SM2,
  & TPH,TPC,SBRH,SBRC,IFAT1,IFAT2,T1,T2,A1,A2,XBOL1,
  & YBOL2,YBOL1,YBOL2,php,RMASS,XINC,HOT,COOL,
  & SNTHH,CSTHH,SNFIH,CSFIH,TLDH,GLUMP1,GLUMP2,XX1,XX2,

```



```

&          YY1,YY2,ZZ1,ZZ2,DINT1,DINT2,GRV1,GRV2,RFTEMP,RF1,
&          RF2,CSBT1,CSBT2,GMAG1,GMAG2,MODE)
  if (iout .eq. 9) then begin
    open(unit=23,FILE='sec',FORM='FORMATTED',STATUS='UNKNOWN')
    write(23,*) ec
    write(23,*) PER,PSH,DP,DSDUM,EF,EFC,ECOS,PERT,PHPER,PCONJ,
&          PHPERI,VSUM1,VSUM2,VRA1,VRA2,VKM1,VKM2,VUNIT,VFVU,TRC
    write(23,*) RV,GRX,GRY,GRZ,RVQ,GRXQ,GRYQ,GRZQ,MMSAVH,FR1,FR2,
&          HLD,SLUMP1,SLUMP2,THETA,RHO,AA,BB,POT1,POT2,N1,N2,
&          FF1,FF2,D,HL,CL,X1,X2,Y1,Y2,G1,G2,WLA(1B),SM1,SM2,
&          TPH,TPC,SBRH,SBRC,IFAT1,IFAT2,T1,T2,A1,A2,XBOL1,
&          XBOL2,YBOL1,YBOL2,php,RMASS,XINC,HOT,COOL,
&          SNTHH,CSTHH,SNFIH,CSFIH,TLDH,GLUMP1,GLUMP2,XX1,XX2,
&          YY1,YY2,ZZ1,ZZ2,DINT1,DINT2,GRV1,GRV2,RFTEMP,RF1,
&          RF2,CSBT1,CSBT2,GMAG1,GMAG2,MODE
    close(23)
    stop
  end if

cc lavieira 04/jul/2002-----
-----
c ix runs over all individual observations in each obs. curve
c N1/N2 MMSAVH,SNTHH,CSTHH,SNFIH,CSFIH,TLDH refer to high precision mesh
c-----
      DO 6418 IX = IST,ISP
        cl=clg
        IF (PERR1.GT.1.d-7) THEN
          PER = OMEGAT(IX)
          PERR = DTR*PER
        PERT = PERR
        psh=pshg
        CALL MODLOG(RV,GRX,GRY,GRZ,RVQ,GRXQ,GRYQ,GRZQ,MMSAVH,FR1,
&          FR2,HLD,RMASS,POT1,POT2,G1,G2,A1,A2,N1,N2,FF1,
&          FF2,MOD,XINC,THE,MODE,SNTHH,CSTHH,SNFIH,CSFIH,
&          GRV1,GRV2,XX1,YY1,ZZ1,XX2,YY2,ZZ2,GLUMP1,GLUMP2,
&          CSBT1,CSBT2,GMAG1,GMAG2,IOUT)
        END IF
c restore CL to the correct value
        CALL BBL(RV,GRX,GRY,GRZ,RVQ,GRXQ,GRYQ,GRZQ,MMSAVH,FR1,FR2,
&          HLD,SLUMP1,SLUMP2,THETA,RHO,AA,BB,POT1,POT2,N1,N2,
&          FF1,FF2,D,HL,CL,X1,X2,Y1,Y2,G1,G2,WLA(1B),SM1,SM2,
&          TPH,TPC,SBRH,SBRC,IFAT1,IFAT2,T1,T2,A1,A2,XBOL1,
&          XBOL2,YBOL1,YBOL2,PHAS(IX),RMASS,XINC,HOT,COOL,
&          SNTHH,CSTHH,SNFIH,CSFIH,TLDH,GLUMP1,GLUMP2,XX1,XX2,
&          YY1,YY2,ZZ1,ZZ2,DINT1,DINT2,GRV1,GRV2,RFTEMP,RF1,
&          RF2,CSBT1,CSBT2,GMAG1,GMAG2,MODE)
        HTT = HOT
        IF (MODE.EQ.-1) HTT = 0.DO
        XR = (HTT+COOL+EL3A(1B))*ELIT + VKM1*VC1 + VKM2*VC2
        BR(IX) = XR
        OBS(II) = FLUX(IX) - XR
        IF (IOUT.GE.4) then
          WRITE (6,FMT=15) PHAS(IX),XR,OBS(II)
        end if
        IF (KEEP(30).EQ.0 .AND. KPH.EQ.0 .AND.
&          PHNORM.LT.10.DO) D3(IX) = (1.DO-XR)/(1.DO+EL3(1B))
        spx(nvar+1) = spx(nvar+1) + obs(ii)*obs(ii)*wt(ix)
        ii=ii+1
6418      CONTINUE
6417      CONTINUE
        if (iout .gt. 0) print '((10f12.7))',(spx(ii), ii=1,nvar+1)
        RETURN
15  FORMAT (1x,11 (D12.5))
      END

```