

**Estudos de Formas de Equilíbrio em
Componentes de Sistemas Estelares Binários**

Mauro Lúcio Lobão Ianinni

Outubro 2003

MAURO LÚCIO LOBÃO IANINNI

**Estudos de Formas de Equilíbrio em
Componentes de Sistemas Estelares Binários**

Dissertação submetida à UNIVERSIDADE FEDERAL DE
MINAS GERAIS como requisito parcial para a obtenção do
grau de MESTRE EM FÍSICA.

Área de Concentração: ASTROFÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Luiz Paulo Ribeiro Vaz (UFMG)

Departamento de Física - ICEX - UFMG

2003

Agradecimentos

- Ao CNPQ, pelo apoio financeiro sem o qual tornaria inviável a realização do projeto.
- Ao professor Luiz Paulo Ribeiro Vaz, meu orientador, pelas valiosas orientações que me fizeram trilhar em caminhos produtivos.
- Ao meu companheiro Robson que desde a graduação tem contribuído de maneira significativa ao meu aprendizado acadêmico.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Objetivo do presente trabalho	4
2	Rotação simples	5
2.1	Marés	9
3	Rotação Sincronizada	13
3.1	Considerações iniciais	13
3.1.1	Centro de Massa de Dois Corpos em Rotação	13
3.1.2	Velocidade Angular Orbital dos Corpos, ω	14
3.1.3	O Potencial Gravitacional	14
3.1.4	O Potencial Devido a Rotação	14
3.2	A Equação do Potencial	15
3.3	O programa Mathcad	18
3.3.1	A Função Polyroots	18
3.3.2	Comentários	23
3.4	A Solução Analítica	23
3.4.1	Estudo da equação cúbica	25
3.4.2	O Algoritmo do Programa	27
3.5	Os Métodos de Newton e de Laguerre	31
3.5.1	Método de Newton	35
3.5.2	Método de Laguerre	36
3.5.3	Aplicação do método de Laguerre na equação do potencial	41
3.6	Discussão geral sobre rotação sincronizada:	44
4	Rotação Não Sincronizada:	45
4.1	Superfícies e curvas equipotenciais	48
4.1.1	Crescimento das superfícies equipotenciais:	49
5	Rotação Não Sincronizada e Diferencial	56
6	Conclusão e discussão geral dos resultados	64
6.1	A escolha do método	64
	Referências	72

Lista de Figuras

2.1	Forças equatoriais	5
2.2	Interseção de superfícies equipotenciais com os planos xz , yz e xy , $\Psi=4,1$ e diferentes taxas de rotação	7
2.3	Interseção de superfícies equipotenciais com os planos xz , yz e xy , para diferentes taxas de rotação: volume constante	8
2.4	Esquema de um sistema binário	9
2.5	Maré sem força centrípeta	11
2.6	Efeito da inclusão do termo de força centrípeta	11
2.7	Influência da companheira na forma de uma estrela	12
3.1	Esquema de um sistema binário	15
3.2	Exemplo de solução da Equação (3.24): sistema destacado	21
3.3	Exemplo de solução da Equação (3.24): potencial crítico	22
3.4	Exemplo de solução da Equação (3.24): potencial abaixo do valor crítico	23
3.5	Geometria para o cálculo do potencial efetivo	24
3.6	Esquema de quadrantes na solução da Equação do Potencial	27
3.7	Solução da Equação do Potencial, intervalos maiores	30
3.8	Solução da Equação do Potencial, intervalos menores	30
3.9	Esquema representando a descontinuidade da variável r_2	32
3.10	Esquema indicando subintervalos reais, $\Psi= 2,0$, r_2 , $\mu =0,5$	32
3.11	Esquema indicando subintervalos reais, $\Psi= 2,0$, r_1 , $\mu =0,5$	33
3.12	Projeção no plano xy	34
3.13	Esquema indicando subintervalos reais, $\Psi= 2,5$, r_1 , $\mu =0,25$	34
3.14	Esquema indicando subintervalos reais, $\Psi= 2,5$, r_1 , $\mu =0,25$	35
3.15	Projeção de superfície crítica com rotação constante	35
3.16	Parábolas construídas, $X=1,5$	40
3.17	Parábolas construídas, $X=2,5$	40
3.18	Parábola construída, $X=1,23206$	41
3.19	Gráfico $\Psi(\mu, r, \theta, \phi) - \Psi_0$ versus r	43
3.20	Gráfico $w(\mu, r, \theta, \phi, \Psi_0)$ versus r	43
3.21	Superfície equipotencial crítica	44
4.1	Rotação não sincronizada	45
4.2	Superfícies equipotenciais gravitacionais, $\mu=0,1$ e diversos valores de ω	50
4.3	Superfícies equipotenciais gravitacionais, $\mu=0,3$ e diversos valores de ω	51
4.4	Superfícies equipotenciais gravitacionais, $\mu=0,7$ e diversos valores de ω	52
4.5	Superfícies equipotenciais gravitacionais, $\mu=0,9$ e diversos valores de ω	53

4.6	Projeções de superfícies construídas com $\mu=0,3$, $\omega=0$ e vários valores dos potenciais Ψ	54
4.7	Potencial em função do raio, $\mu=0,3$	55
5.1	Representação das acelerações em um ponto na superfície da estrela	57
5.2	Representação das acelerações vistas por observadores diferentes	58
5.3	Projeção de superfície crítica com rotação constante	59
5.4	Distribuições de velocidades angulares em função da co-latitute	59
5.5	Projeções nos planos xz , yz e xy de formas com rotação diferencial, $\Omega_{\theta,\max}=4$	60
5.6	Projeções no plano xz de formas com rotação diferencial, $\Omega_{\theta,\max}=1$	61
5.7	Distribuição da velocidade angular em função da co-latitute para o Sol	62
5.8	Forma de uma estrela binária com a rotação diferencial solar	62
6.1	Gráfico potencial em função do raio	66
6.2	Gráfico $\partial\Psi/\partial r$ em função do raio	67
6.3	Gráfico $V(\mu, \Omega, \pi/2, \phi)$ em função do ângulo ϕ para $\theta = \pi/2$	68
6.4	Gráfico $V(\mu, \Omega, \pi/2, \phi)$ em função do ângulo ϕ para $\theta = \pi/3$	68
6.5	Gráfico $V(\mu, \Omega, \pi/2, \phi)$ em função do ângulo ϕ para $\theta = \pi/4$	69
6.6	Gráfico $V(\mu, \Omega, \pi/2, \phi)$ em função do ângulo ϕ para $\theta = \pi/6$	69
6.7	Gráfico velocidade angular em função da co-latitute para diversas distribuições de velocidade angular	70
6.8	Gráfico de $\frac{ r_u - r_x }{r_u}$ em função da co-latitute para diversas distribuições de velocidade angular	71
6.9	Gráfico de $\Omega_\theta^2 \sin \theta$ em função da co-latitute para diversas distribuições de velocidade angular	71

Lista de Tabelas

4.1	Valores do potencial crítico para diversos valores de μ e de ω	49
4.2	Comparação de resultados, $\mu = 0,1$	50
4.3	Comparação de resultados, $\mu = 0,3$	51
4.4	Comparação de resultados, $\mu = 0,7$	52
4.5	Comparação de resultados, $\mu = 0,9$	53
6.1	Comparação entre os métodos de Newton e de Laguerre: $\Psi=2,5$	64
6.2	Comparação entre os métodos de Newton e de Laguerre: $\Psi=2,1$	65
6.3	Comparação entre os métodos de Newton e de Laguerre: $\Psi=2,0$	65
6.4	Método de Newton para encontrar potencial crítico	67

Resumo

O modelo das superfícies equipotenciais gravitacionais efetivas continua sendo, até os dias atuais, o procedimento mais adequado para se estudar as formas assumidas por componentes de sistemas estelares binários. A forma das componentes é de fundamental importância na análise das curvas de luz de sistemas eclipsantes. A maior precisão das superfícies equipotenciais, entretanto, exige um trabalho computacional maior se comparados a modelos mais simples como o modelo esférico de Russell.

A equação do potencial, quanto trabalhada em representação direta, nos fornece o potencial de um ponto em função da distância e da orientação do mesmo, ou seja, em função de seu vetor posição. Nesta formulação, não requer grande trabalho computacional para seu cálculo. Porém, em sua formulação inversa, ou seja, encontrar o raio (vetor posição) em função do potencial estabelecido e da direção especificada, requer um tratamento elaborado e um significativo trabalho numérico. Um dos objetivos do presente trabalho consiste em controlar, por diferentes abordagens, a inversão dessa equação, para uso em modelos de sistemas binários eclipsantes. Uma consequência desse trabalho foi a implementação no modelo de rotação diferencial e discutimos as configurações geométricas originadas pelo mesmo.

Abstract

The gravitational effective equipotential surface model continues to be, even in the present, the more appropriated procedure to generate the form assumed by the components of stellar binary systems. The adopted figure for the components is of utmost importance in the light curve analysis of eclipsing binary systems. Despite its recognized great accuracy, the model demands a larger computational work if compared with the spherical model by Russell.

The potential equation, when worked in its direct representation, gives the potential as a function of the point distance and orientation (the radius vector) and, in this formulation, it does not require great computational effort for its calculation. However, in its inverse representation, when one wants to find the radius (vector) as a function of the potential and point direction, it demands a special treatment. The aim of this work is to control, in different ways, the inversion of this equation. As a by product of this work, we were able to introduce differential rotation in the model, and discuss the geometrical configurations created.

Capítulo 1

Introdução

A forma das superfícies estelares depende do balanço das forças gravitacionais e não inerciais com o gradiente da pressão, ou seja, a resultante das forças que atuam em um determinado ponto da superfície deve ser nula de maneira a obter o equilíbrio hidrostático. No caso de estrelas isoladas que não apresentam movimento de rotação, a forma de tais superfícies é esférica (pois, na ausência de forças não inerciais, o gradiente da pressão é antiparalelo ao vetor força gravitacional). Mesmo que saibamos a forma da estrela (esférica), devemos fazer algumas suposições quanto à distribuição da densidade em seu interior, de modo a resolvermos as equações de equilíbrio.

Uma das distribuições supõe que a relação entre pressão e densidade é expressa pela equação na forma de polítropos,

$$P = K\rho^\lambda, \quad (1.1)$$

onde K e λ são independentes do raio, embora possam depender de alguns parâmetros termodinâmicos, como a entropia, por exemplo. Através da equação de Poisson,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho, \quad (1.2)$$

e das relações $P = K\rho^\lambda$, $\rho = \lambda\theta^n$ e $r = \alpha\varepsilon$, temos a seguinte equação diferencial para nosso problema, denominada Equação de Lane-Emden,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\varepsilon^2 \frac{d\theta}{d\varepsilon} \right) = -\theta^n, \quad (1.3)$$

onde, para cada valor de n , teremos polítropos com características peculiares (configurações com densidade constante, infinitas, com massa independente da pressão central, etc.). Para esse modelo possuímos soluções analíticas e aproximadas para uma grande amplitude de valores para o índice n e podemos, com isso, obter informações como massa, raio, pressão central, energia de ligação para os mais diversos modelos de estrelas.

Outra configuração bem estudada (Jeans, 1928) refere-se a uma estrela isolada que apresenta movimento de rotação em torno do eixo que atravessa seu centro de massa. Neste modelo, considera-se a densidade tão alta no centro das estrelas, que o potencial

gravitacional pode ser considerado, com boa aproximação, como aquele originado por uma massa pontual. Para esse modelo, a equação de equilíbrio hidrostático é expressa por

$$\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (1.4)$$

Associando uma função potencial para cada uma das forças, temos

$$\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} = -\vec{\nabla} \left(-\frac{Gm}{r} - \frac{\omega^2 r_\Omega^2}{2} \right) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla}P = -\rho \vec{\nabla}(\Psi), \quad (1.5)$$

onde $\Psi = -\frac{Gm}{r} - \frac{\omega^2 r_\Omega^2}{2}$ e $r_\Omega = r \sin \theta$. Com isso, podemos encontrar as superfícies de pressão constante buscando superfícies equipotenciais.

Em seu livro “*The Problems of cosmogony and stellar dynamics*”, Jeans (1929) enumerou uma série de configurações geométricas para os mais diversos valores de ω . Outro trabalho sobre o problema rotacional foi apresentado por Chandrasekhar (1933a), com enfoque bem diferente do apresentado por Jeans, pois seu objetivo foi reformular a equação de Lane-Emdem, Eq. (1.3), adaptando-a ao problema rotacional. Partindo das equações do potencial em coordenadas esféricas

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \rho \omega^2 r (1 - \mu^2), \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \mu} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} - \rho \omega^2 r^2 \mu, \quad (1.7)$$

introduzindo-as na equação de Poisson, Eq. (1.2), e levando em conta as relações $P = K\rho^\lambda$, $\rho = \lambda\theta^n$ e $r = \alpha\varepsilon$, temos a equação

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \right) = -\theta^n + \frac{\omega^2}{2\pi G\lambda}. \quad (1.8)$$

Através de algumas aproximações e resolvendo-a numericamente, podemos encontrar propriedades físicas como forma, massa, volume, relação entre densidade média e central para polítrpos dos mais diversos valores de n (no artigo referido foram apresentadas soluções para $n=1, \frac{3}{2}, 2, 3$ e 4).

A diferença entre as soluções encontradas por Chandrasekhar e por Jeans está que, no modelo de Chandrasekhar, foi realizada uma extensão dos estudos dos polítrpos em modelos não rotacionais para os modelos rotacionais. Chandrasekhar estendeu o estudo dos polítrpos não apenas para o caso rotacional, mas também para o problema das marés (Chandrasekhar, 1933b) e para o estudo de sistemas binários (Chandrasekhar, 1933c). Com isso, foi possível desvendar uma série de propriedades físicas das estrelas para as mais variadas considerações termodinâmicas. Por outro lado, no trabalho de Jeans as únicas considerações eram uma fraca ou forte concentração de matéria no centro das estrelas.

Com o crescente avanço da Astronomia na observação de estrelas binárias eclipsantes e na obtenção e análise de suas curvas de luz, o estudo desses sistemas passou a fazer parte do interesse da comunidade científica. Era necessário elaborar modelos teóricos para a análise das observações, apesar de uma restrita precisão por falta de recursos computacionais na época. Um dos primeiros modelos foi o modelo esférico de Russell

(1912a, 1912b, 1939, 1942, 1945, 1948) que constitui um importante capítulo na história do estudo das binárias.

Por aproximadamente meio século, o modelo de Russell passou por sucessivas modificações progredindo das formas esféricas para as mais precisas (e intrincadas) configurações elipsoidais e, por essa razão, foi adotado em diversos modelos. Um deles é o modelo EBOP (Eclipsing Binary Orbit Program - Etzel 1981, Popper & Etzel 1981), que adota esferóides oblatos como a forma assumida pelas componentes. Por sua simplicidade, essa forma permite um processamento rápido com o custo de sua limitada precisão (o modelo é restrito a sistemas cujas componentes possuem raios menores que aproximadamente 10% da separação orbital). Outro modelo que utiliza elipsóides e é, portanto, mais preciso na representação geométrica das componentes que o EBOP, é o modelo WINK (Wood 1971, 1972, Vaz 1984, 1986). Utilizando elipsóides de 3 eixos para a forma das componentes, seus resultados são confiáveis em estrelas cujos raios são até 20% da separação orbital.

O grande problema em adotar tais configurações consiste, primeiro, na sua limitada precisão e, segundo, na impossibilidade de tais modelos assumirem algumas formas observadas por alguns estudiosos como Kuiper (1941), que fez uso de alguns conceitos de superfícies equipotenciais limites. Hoje, de acordo com a configuração do sistema com relação a essas superfícies (ver Cap. 3), esses sistemas são morfologicamente classificados como *detached* (destacado), *semi-detached* (semi-destacado), *contact* (contato) e *overcontact* (sobre-contato).

O primeiro modelo em que tais configurações morfológicas estavam presentes foi o de Kopal (1959). Suas principais idéias estão resumidas em sua obra "*Close Binary Systems*". Kopal fez uso das superfícies equipotenciais de Roche, denominação atribuída em honra do matemático francês Édouard Albert Roche (1820–1883) em cujos escritos a idéia de se construir superfícies equipotenciais surgiu pela primeira vez. A introdução das superfícies equipotenciais foi um grande progresso dos estudos de modelos de sistemas binários, uma vez que acrescentava ao modelo de Russell configurações como as mencionadas acima. Vale lembrar que os termos *detached*, *semi-detached*, *contact* e *overcontact* surgiram pela primeira vez nos trabalhos de Kopal.

Seu modelo foi usado por Söderhjelm (1974, 1976, 1978) para representar uma série de observações de sistemas binários e para compará-los com os usuais modelos elipsoidais. Com a introdução das superfícies equipotenciais podemos encontrar resultados confiáveis em estrelas que possuem raio com até 80% do valor do lobo de Roche, superfície equipotencial crítica, veja Capítulo 3.

Apesar do avanço significativo introduzido por Kopal, seu modelo mostrava-se pouco realista para estrelas próximas às configurações de contato, pois suas aproximações eram bastante limitadas, principalmente devido ao escasso recurso computacional de sua época. Posteriormente, os resultados do seu modelo de rotação sincronizada foram aperfeiçoados em diversos trabalhos (Wilson & Devinney 1971, Mochnacki & Doughty 1972a, 1972b, Mochnacki 1984). Outra deficiência do modelo de Kopal era a exclusão de parâmetros físicos importantes como a rotação não-sincronizada (Limber 1963) e de órbitas excêntricas, que foram incorporados aos modelos com o avanço na velocidade de processamento dos dados.

Um dos modelos mais conhecidos no meio científico é o de Wilson-Devinney (Wilson & Devinney 1971, Wilson 1979, 1993), reconhecido pela sigla WD. O programa, usando uma série de classes de vínculos impostos às soluções de curva de luz, elimina um grande número de soluções possíveis, do ponto vista do ajuste matemático do modelo às ob-

servações, mas incorretas fisicamente. Um dos vínculos é baseado na morfologia. Se, por exemplo, identificarmos, através da análise das curvas de luz, que uma das componentes do sistema binário preencha (ou esteja próximo de preencher) seu lobo de Roche (ver Cap. 3), podemos, através dessa configuração, encontrar a razão entre as massas das estrelas. Outros exemplos de vínculos e restrições que podem ser impostos às soluções são discutidos em Wilson (1988). Atualmente, o programa funciona de oito modos diferentes, cobrindo uma grande gama de possíveis configurações (Wilson 1992, 1993).

1.1 Objetivo do presente trabalho

Em diversos estudos de casos individuais de sistemas binários eclipsantes analisados com o programa WD, por exemplo, TY CrA (Casey *et al.* 1998) e LZ Cen (Vaz *et al.* 1995), percebeu-se que, em determinadas situações, uma ligeira variação no valor do potencial efetivo levava a uma variação um pouco grande demais em outros parâmetros. Esses efeitos foram mais significativos nos estudos que envolviam rotação não-sincronizada das componentes e, apesar da causa da variação não estar perfeitamente identificada, aventou-se a possibilidade de tal discrepância ser atribuída a problemas na inversão da equação do potencial (Limber 1963).

O presente trabalho tem como um dos seus objetivos estudar os mais diversos meios de se resolver tal equação, passando por soluções em programas específicos (por exemplo, `mathcad`), discutindo a possibilidade em construir superfícies equipotenciais de uma maneira analítica e propondo soluções numéricas que se adaptem melhor ao problema.

Na busca de nosso objetivo, visualizamos um meio de acrescentar ao modelo físico a rotação diferencial entre as camadas de uma estrela, onde a velocidade de rotação em torno do eixo que passa pelo centro de massa da estrela varia de acordo com a latitude das camadas.

No Capítulo 2 serão abordados (*i*) o problema rotacional simples, onde uma única estrela apresenta movimento de rotação em torno do seu centro de massa, e (*ii*) o problema das marés, onde serão estudadas as influências na morfologia estelar devidas à presença da companheira.

No Capítulo 3 abordaremos o problema da rotação sincronizada, onde a velocidade angular da estrela é a mesma da velocidade orbital do sistema, e discutiremos os métodos de solução para a equação apresentada pelo modelo.

No Capítulo 4 iremos estender as soluções apresentadas no modelo sincronizado para o modelo não sincronizado, fazendo as devidas adaptações necessárias, e acrescentaremos, no Capítulo 5, o modelo da rotação diferencial, discutindo os aspectos morfológicos originados pela implementação do modelo.

No final de cada capítulo foi acrescentado um comentário sobre as questões apresentadas nos mesmos, discutindo alguns aspectos como viabilidade dos métodos (Capítulo 4), implicações do modelo diferencial na morfologia estelar (Capítulo 5) e outros.

Capítulo 2

Rotação simples

Na rotação simples iremos considerar as deformações nas superfícies equipotenciais decorrentes apenas do efeito da rotação em uma estrela que gira com velocidade angular ω . Neste exemplo, as acelerações em um ponto na sua superfície podem ser esquematizadas como na Fig. 2.1, onde a_1 representa a aceleração provocada pela força de atração gra-

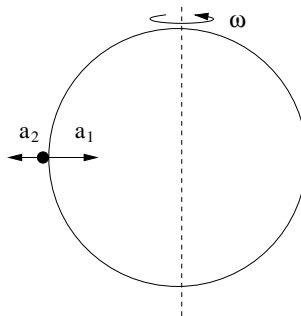


Figura 2.1: Esquema das forças equatoriais que agem numa partícula em uma estrela com rotação.

vitacional, e a_2 a aceleração centrífuga causada pelo movimento de rotação. Com isso, a aceleração resultante no corpo (vista por um observador no sistema não-inercial) será

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \frac{\vec{\nabla}P}{\rho} \quad (2.1)$$

onde

$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ representa a aceleração do corpo no sistema não inercial,
 m é a massa da estrela,
 $\vec{\omega}$ o vetor rotação angular,
 r a distância do corpo ao centro de massa da estrela,
 \hat{r} o vetor unitário,
 \vec{r} é o vetor que une o centro de massa da estrela ao ponto em questão, e
 $-\frac{\vec{\nabla} P}{\rho}$ a força devido à pressão, normal à superfície.

Em relação à superfície da estrela, o corpo em questão não apresentará aceleração e, portanto,

$$\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} = -\frac{Gm}{r^2} \hat{r} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.2)$$

As funções potencial associadas a essas acelerações são

$$-\vec{\nabla} \left(-\frac{Gm}{r} \right) = -\frac{Gm}{r^2} \hat{r} \quad (2.3)$$

$$-\vec{\nabla} \left(-\frac{\omega^2 r_\Omega^2}{2} \right) = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (2.4)$$

Onde $r_\Omega = r \sin \theta$ e, portanto,

$$\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} = -\vec{\nabla} \left(-\frac{Gm}{r} - \frac{\omega^2 r_\Omega^2}{2} \right) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} P = -\rho \vec{\nabla}(\Psi), \quad (2.5)$$

onde Ψ é o potencial associado as acelerações que atuam no corpo.

Através da equação $\vec{\nabla} P = -\rho \vec{\nabla}(\Psi)$ podemos buscar superfícies equipotenciais que além de apresentarem o mesmo potencial terão a mesma pressão (superfícies de densidade constante). Com isso, nosso objetivo passa a ser buscar valores de r aos quais possamos ter associado um potencial fixo.

$$\Psi = -\frac{Gm}{r} - \frac{\omega^2 r_\Omega^2}{2} \quad (2.6)$$

Como $r_\Omega = r \sin \theta$, e θ é o ângulo formado pela reta que une o centro de massa da estrela ao ponto e o eixo perpendicular ao plano da órbita, temos

$$\Psi = -\frac{Gm}{r} - \frac{\omega^2 (r \sin \theta)^2}{2} \quad (2.7)$$

Reescrevendo a equação acima em potências decrescentes de r , temos

$$\omega^2 \sin^2 \theta r^3 + 2\Psi r + 2Gm = 0 \quad (2.8)$$

A Eq. (2.8) não necessita de métodos de aproximação, pois trata-se de uma equação de terceiro grau possuindo solução analítica. Fazendo $m = \mu$ e $G = 1$, temos

$$\omega^2 \sin^2 \theta r^3 + 2\Psi r + 2\mu = 0. \quad (2.9)$$

Podemos dessa forma encontrar r para cada direção (θ e ϕ) especificada em função dos parâmetros Ψ e μ e ω .

Como exemplo, vamos imaginar uma estrela de massa $\mu = 1$ com as velocidades angulares $\omega=0, 4$ e 5 (em unidades arbitrárias), e que desejássemos encontrar o conjunto de pontos (superfície) que estivessem no potencial $\Psi=4,4$, desse modo, as equações cúbicas acima seriam, respectivamente,

$$\Psi r + \mu = 16 \text{sen}^2\theta r^3 + 8,8r + 2 = 0 \quad \text{e} \quad 25 \text{sen}^2\theta r^3 + 8,8r + 2 = 0.$$

Ao encontrarmos o valor da primeira raiz positiva dessa equação para cada valor de θ especificado podemos construir as projeções dessa superfície nos planos xz , yz e xy , como mostrado na Fig. 2.2.

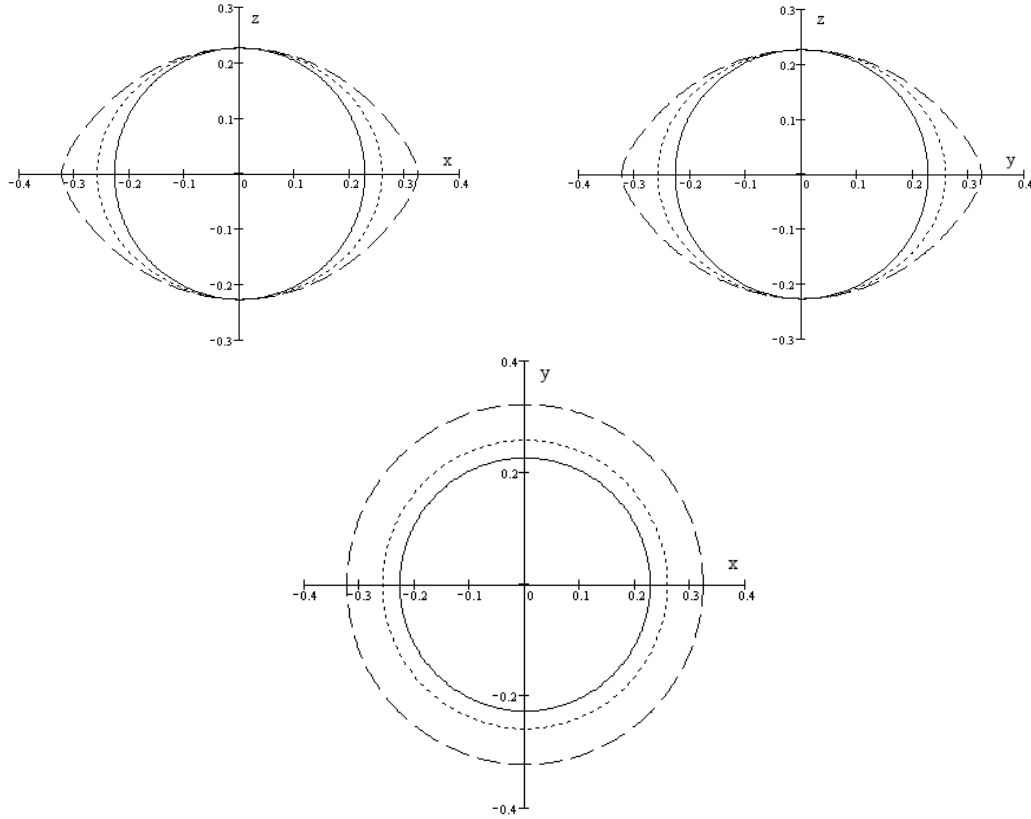


Figura 2.2: Interseção das superfícies equipotenciais gravitacionais efetivas, soluções da Eq. (2.7), para o potencial $\Psi=4,4$ e diversos valores de rotação angular em torno do eixo z , com os plano xz (painel superior esquerdo), yz (painel superior direito) e xy (painel inferior). A curva contínua representa a superfície para $\omega=0$ (nenhuma rotação), a curva pontilhada para $\omega=4$ e, finalmente, a curva tracejada para $\omega=5$. As dimensões estão em escala arbitrária.

Podemos facilmente verificar que, à medida que aumentamos a velocidade angular da estrela maior será sua deformação, mas deve-se observar que existe um limite para o valor da velocidade angular, a partir do qual a estrela não é mais estável. Tal limite pode ser encontrado buscando, no eixo x , um ponto que possua aceleração nula, ou $(\nabla\Psi = 0)$. A partir desse valor limite a estrela ejeta massa para o exterior.

As configurações apresentadas, apesar de serem construídas com grande precisão, possuem certas discrepâncias com relação a modelos reais, pois, à medida que aumentamos

a velocidade angular, observamos que a estrela aumenta seu volume enquanto que, nos modelo reais, a estrela tende a preservar seu volume original. Por isso, devemos escolher uma certa configuração da estrela, por exemplo $\Psi = 4,4$, $\omega = 4$, e estipular o raio da estrela original que possua o mesmo volume da superfície em questão.

Através de integração numérica, podemos calcular o volume da superfície equipotencial e encontrar o raio da estrela original. Mas como podemos encontrar a configuração dessa mesma estrela quando sua velocidade angular for $\omega = 5$? Ou seja, qual deve ser o valor do potencial que devemos introduzir na Eq. (2.7), de modo a gerar uma superfície cujo volume seja igual ao da estrela original?

Para isso devemos criar uma função que relaciona o potencial escolhido com o raio médio da superfície gerada. A definição de raio médio refere-se ao valor do raio da esfera cujo volume seja igual ao da superfície encontrada, e, através de métodos aproximativos, devemos buscar o valor do potencial que satisfaça tal condição.

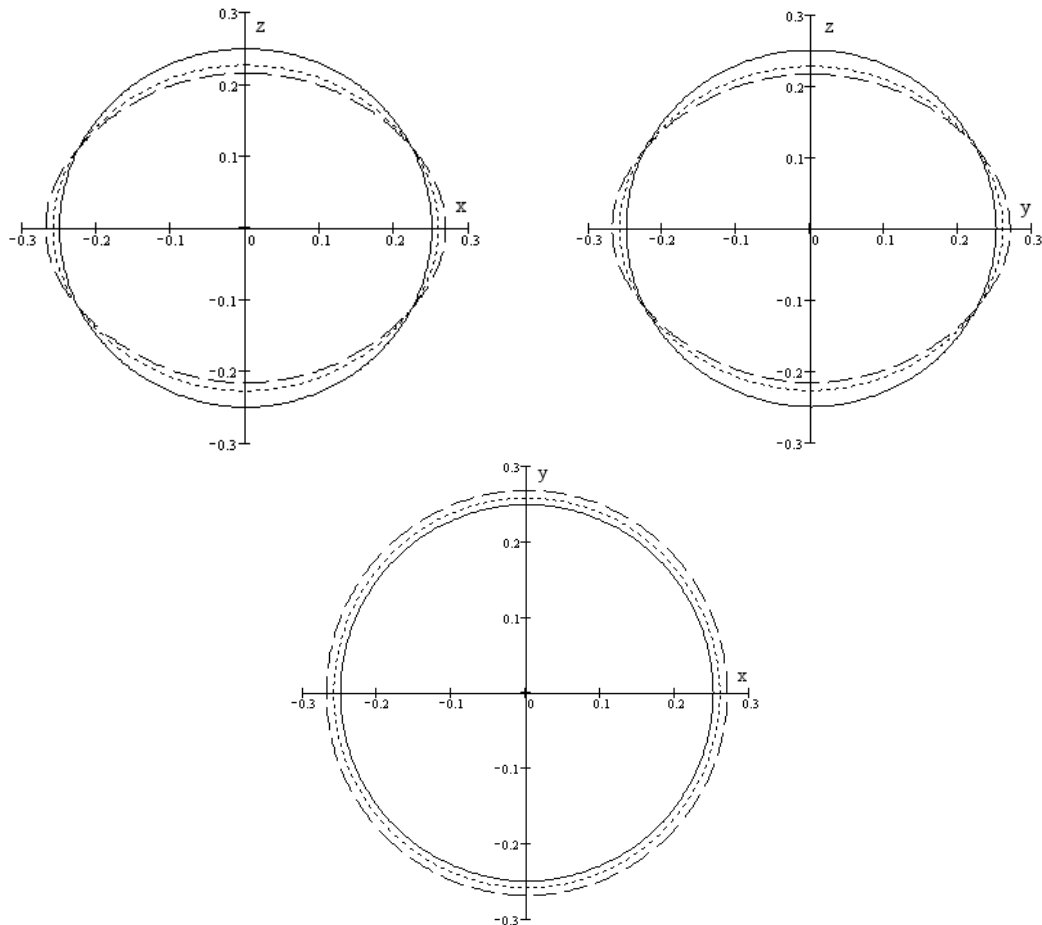


Figura 2.3: Interseção das superfícies equipotenciais gravitacionais efetivas, soluções da Eq. (2.7), para diversos valores de rotação angular em torno do eixo z , com os plano xz (painel superior esquerdo), yz (painel superior direito) e xy (painel inferior). A curva contínua representa a superfície para a estrela sem rotação ($\omega = 0$ e $\Psi = 4$), a curva pontilhada para $\omega = 4$ e $\Psi = 4,4$ e, finalmente, a curva tracejada para $\omega = 5$ e $\Psi = 4,62375$. Todas as configurações possuem o mesmo raio volumétrico médio. As dimensões estão em escala arbitrária.

Para o exemplo mostrado temos que o raio médio da superfície gerada pela configuração $\Psi = 4,4$, $\omega = 4$ é $r_m = 0,246844$. Para encontrar qual deve ser o valor do potencial associado a $\omega = 5$ que gere o mesmo raio médio, usamos métodos de aproximação (interpolação) que nos conduzirão ao valor do potencial $\Psi = 4,62375$. Assim, ao inserirmos esses valores na Eq. (2.7), temos as configurações mostradas na Fig. 2.3.

Nos painéis dessa figura, a curva em linha contínua representa a forma da estrela original (sem rotação), a em linha pontilhada e a tracejada correspondem às configurações referentes às rotações $\omega = 4$ e $\omega = 5$, respectivamente. À medida que a velocidade angular da estrela aumenta, observa-se um achatamento nos pólos e um correspondente aumento do raio equatorial. Tal configuração, por simetria, também será observada no plano yz (Fig. 2.3, painel superior direito). No plano xy houve um crescimento no raio relacionado ao aumento da velocidade angular, uma vez que os fluidos deslocaram-se dos pólos para o equador.

O problema rotacional tem solução analítica e, conseqüentemente, não apresenta dificuldades em sua solução. Partiremos agora para o problema das marés, ou seja, iremos considerar a presença de mais uma estrela influenciando na configuração das superfícies equipotenciais, mas, por razões de simplicidade, não iremos considerar o efeito rotacional das mesmas.

2.1 Marés

Para podermos equacionar o problema das marés considere a Fig. 2.4. ao que descreve as

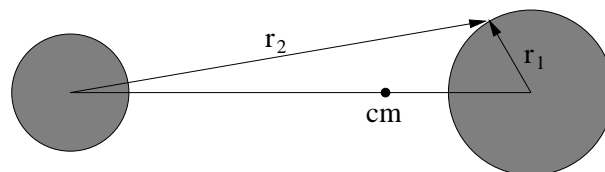


Figura 2.4: Representação esquemática dos vetores considerados na Eq. 2.10 em um sistema binário.

acelerações que atuam em um ponto situado na estrela 1 é

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r_1^2}\hat{r}_1 - \frac{Gm_2}{r_2^2}\hat{r}_2 - \frac{\vec{\nabla}P}{\rho} \quad (2.10)$$

onde: m_i , \vec{r} e \hat{r}_i são, respectivamente, a massa, o raio vetor do ponto em questão e o vetor unitário da estrela i ($i=1,2$) ao ponto. Como o ponto não apresenta aceleração no referencial não-inercial, temos $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$, e, assim

$$\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} = -\frac{Gm_1}{r_1^2}\hat{r}_1 - \frac{Gm_2}{r_2^2}\hat{r}_2. \quad (2.11)$$

As funções potencial associadas a essas acelerações são

$$-\vec{\nabla}\left(-\frac{Gm_1}{r_1}\right) = -\frac{Gm_1}{r_1^2}\hat{r}_1 \quad (2.12)$$

$$-\vec{\nabla}\left(-\frac{Gm_2}{r_2}\right) = -\frac{Gm_2}{r_2^2}\hat{r}_1 \quad (2.13)$$

e, portanto,

$$\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} = -\vec{\nabla}\left(-\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2}\right) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla}P = -\rho\vec{\nabla}(\Psi), \quad (2.14)$$

onde Ψ é o potencial associado as acelerações que atuam no corpo. Assim, nossa equação potencial fica

$$\Psi = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2}. \quad (2.15)$$

Como $r_2 = \sqrt{r_1^2 + 2r_1R \sin \theta \cos \phi + R^2}$, onde R é a distância entre os centros de massa das estrelas, temos

$$\Psi = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{\sqrt{r_1^2 + 2r_1R \sin \theta \cos \phi + R^2}} \quad (2.16)$$

Fazendo $\mu = \frac{m_1}{m_1+m_2}$, $m_1 + m_2 = 1$, $R = 1$, $G = 1$ temos

$$\Psi = -\frac{\mu}{r_1} - \frac{(1-\mu)}{\sqrt{r_1^2 + 2r_1 \sin \theta \cos \phi + 1}} \quad (2.17)$$

Ao expandir a equação do potencial, encontramos uma equação polinomial de quarto grau

$$\begin{aligned} &\Psi^2 r^4 + 2\Psi(\mu + \Psi \sin \theta \cos \phi)r^3 + \\ &[(1-\mu)^2 + \mu^2 + 4\Psi\mu \sin \theta \cos \phi + \Psi^2]r^2 \\ &+ 2\mu(\mu \sin \theta \cos \phi + \Psi)r + \mu^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Apesar de não dispormos de um método exato para a solução dessa equação, podemos, por métodos de aproximação, encontrar uma das raízes e, com isso, reduzir nossa equação para o terceiro grau, para a qual dispomos de recursos matemáticos para sua solução. Devemos sempre nos lembrar que, para o nosso problema, nos interessa a menor raiz real positiva para a construção das superfícies equipotenciais das estrelas.

Ao construir a superfície equipotencial da primeira estrela, fazendo $\mu = 0,5$ e $\Psi = 2,3$, e comparando com sua forma inicial, temos para o plano xz a Fig. 2.5,

Esta representação, apesar de correta, não nos possibilita observar um fenômeno bastante comum em marés, o respectivo deslocamento dos fluidos para ambos os lados do equador. A explicação para isso, é que devemos considerar as acelerações de cada ponto da estrela em relação a aceleração do centro de massa da estrela, e não em relação a um observador no referencial não inercial localizado em sua superfície. Para corrigir isto, deve-se acrescentar a equação do potencial o termo $-(1-\mu)r \sin \theta \cos \phi$, que representa o potencial associado a força que atua no centro de massa da estrela.

Ao ser acrescentado o respectivo termo teremos uma equação de sexto grau e para sua solução dependemos de métodos de aproximação que serão discutidos em detalhes no próximo capítulo. Utilizando estes recursos computacionais, e procurando o valor para o potencial que possua o mesmo raio médio que a estrela anterior temos a configuração mostrada na Fig. 2.6.

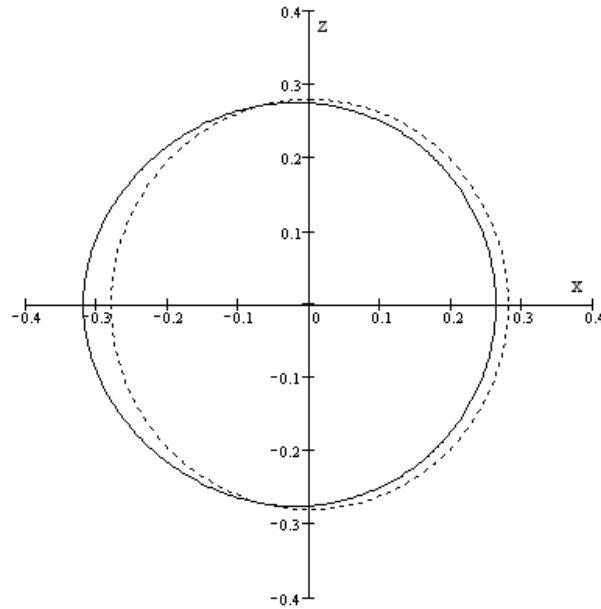


Figura 2.5: Configuração da estrela, no plano xz , com $r = 0,2798$ na ausência (linha pontilhada) e na presença (linha contínua) de sua companheira no referencial inercial.

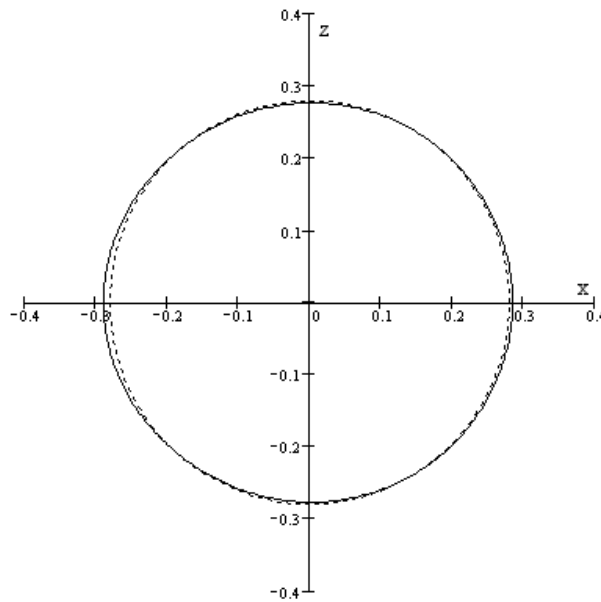


Figura 2.6: Efeito da inclusão do termo de força centrífuga do centro de massa na configuração da estrela, no plano xz , com $r = 0,2798$ na ausência (linha pontilhada) e na presença (linha contínua) de sua companheira em relação ao centro de massa.

Para essa razão de massas ($\mu=0,5$) e para esse tamanho da estrela ($r=0,2798$), o efeito das marés pode ser observado por uma pequena saliência em ambos os lados. Tal efeito pode ser mais significativo se aumentarmos o tamanho da estrela. Por exemplo, se a estrela tiver um raio médio de 0,36456, sua configuração no plano xz (Fig. 2.7) apresentaria uma protuberância mais acentuada no lado mais próximo da estrela companheira.

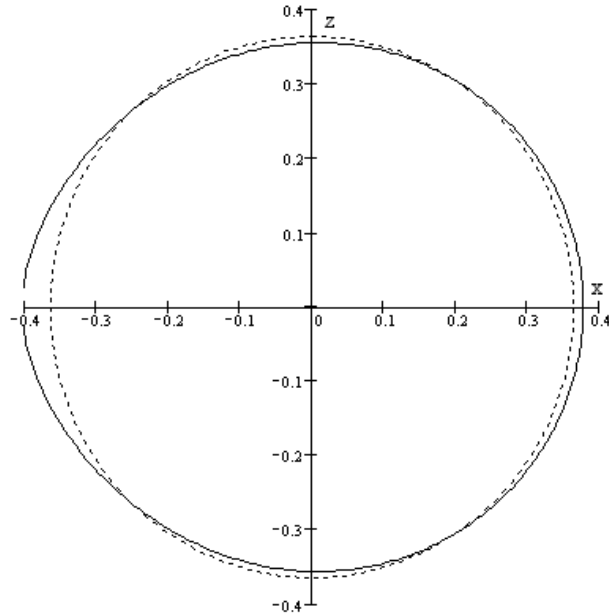


Figura 2.7: Configuração da estrela, no plano xz , com $r = 0,36456$ na ausência (linha pontilhada) e na presença (linha contínua) de sua companheira em relação ao centro de massa.

Se continuarmos a aumentar o tamanho da estrela (através da mudança no valor do potencial) atingiremos uma configuração limite ($\nabla\Psi = 0$), com o valor para o potencial limite para essa configuração (1,86722), encontramos um raio médio de 0,405 que corresponde ao tamanho máximo que a estrela, nesta configuração ($\mu=0,5$), pode apresentar sem ejetar massa.

O problema das marés, apesar de ser um pouco mais complexo se comparado ao problema rotacional, não apresenta dificuldades computacionais e pode ser melhorado, se levarmos em conta as deformações produzidas em sua companheira e introduzirmos tais modificações na equação do potencial. Tal acréscimo no modelo não será realizado no presente trabalho, pois estudaremos configurações mais complexas como a rotação sincronizada que será o tema do nosso próximo capítulo.

Capítulo 3

Rotação Sincronizada

No capítulo anterior estudamos a rotação simples e as marés, introduzimos o modelo das superfícies equipotenciais para gerar as formas das estrelas, e discutimos os procedimentos necessários para a solução da correspondente equação do potencial. No presente capítulo estudaremos a rotação sincronizada, que consiste na atração mútua entre duas estrelas que giram com velocidade angular constante em torno do centro de massa do sistema. Além desse movimento, as estrelas possuem uma rotação intrínseca em torno dos seus respectivos centros, cuja velocidade angular coincide com a do sistema.

Ao equacionar as forças que atuam nessa configuração e atribuir os respectivos potenciais a essas forças, geramos uma equação de difícil inversão. Neste capítulo, faremos um estudo de alguns métodos de resolução dessa equação, analisando a viabilidade ou não dos mesmos na solução da equação do potencial. Inicialmente, faremos o estudo do aspecto físico do problema da rotação sincronizada.

3.1 Considerações iniciais

Antes de descrevermos a equação do potencial no movimento sincronizado, devemos provar algumas identidades que usaremos freqüentemente nesta dissertação.

3.1.1 Centro de Massa de Dois Corpos em Rotação

Consideremos dois corpos de massa m_1 e m_2 , cujas distâncias em relação ao centro de massa sejam a_1 e a_2 , respectivamente. Assim, podemos encontrar tais distâncias, em função das massas dos corpos e da separação entre eles, pela definição de centro de massa

$$a_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}, \quad (3.1)$$

onde $r = a_1 + a_2$ é a distância total entre os corpos.

3.1.2 Velocidade Angular Orbital dos Corpos, ω

A velocidade angular dos corpos em rotação pode ser encontrada igualando a força de atração gravitacional entre os corpos à força centrípeta necessária para manter o corpo 1 (ou 2) em órbita

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1\omega^2a_1 \quad \text{ou} \quad \omega^2 = \frac{Gm_1m_2}{r^2m_1a_1}. \quad (3.2)$$

Substituindo a Eq. (3.1) na (3.2) temos

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}. \quad (3.3)$$

3.1.3 O Potencial Gravitacional

A força de atração gravitacional que um corpo esférico de massa m_1 exerce em um corpo de massa m_2 , a uma distância r do centro de massa da estrela 1 até o corpo 2, é dada pela relação

$$f = \frac{Gm_1m_2}{r^2}. \quad (3.4)$$

A variação de energia potencial gravitacional do sistema constituído pelos dois corpos, ao serem aproximados desde uma separação muito grande (infinita) até a distância mútua r , é, por definição, o negativo do trabalho realizado no processo. Considerando, convencionalmente, a energia potencial como sendo nula onde a força é nula, temos

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}. \quad (3.5)$$

O potencial será a razão entre a energia potencial e a massa m_2

$$\Psi = \frac{V(r)}{m_2} = -\frac{Gm_1}{r}. \quad (3.6)$$

3.1.4 O Potencial Devido a Rotação

No referencial em rotação, os corpos são submetidos a uma força centrífuga radial e, portanto, o rotacional desse campo de força é igual a zero ($\nabla \times f_c = 0$), o que nos possibilita encontrar uma função potencial na qual o trabalho realizado ao deslocar de um ponto ao outro seja independente da trajetória escolhida. Outra característica, é a de que o campo de forças é diretamente proporcional à distância do corpo ao centro do referencial em rotação ($m\omega^2r$),

Para encontrarmos a função energia potencial, basta calcularmos o trabalho realizado para deslocar um corpo de massa m do centro do referencial em rotação até um ponto a uma distância R ,

$$W = \int_0^R m\omega^2r \, dr = \frac{m\omega^2R^2}{2}. \quad (3.7)$$

Se atribuirmos o valor da energia potencial igual a zero no centro do referencial, teremos

$$E_p = -\frac{m\omega^2R^2}{2}. \quad (3.8)$$

O potencial é obtido dividindo a energia potencial pela massa,

$$\Psi = -\frac{\omega^2 R^2}{2}. \quad (3.9)$$

Em algumas situações, é desejável que escrevamos as acelerações de um ponto na superfície da estrela em relação ao centro de massa da mesma, e não em relação a um observador inercial. Para isso, devemos subtrair das acelerações que atuam no ponto a aceleração do centro de massa.

A aceleração que atua no centro de massa da estrela 1 é

$$\frac{Gm_2}{r^2} = \omega^2 a_1. \quad (3.10)$$

O potencial é obtido ao integrar a força ao longo da direção paralela a mesma e, assim, obter o potencial

$$\Psi = -\omega^2 \alpha_1 x, \quad (3.11)$$

onde x é a distância, em relação ao eixo x , do ponto ao centro de massa da estrela 1.

3.2 A Equação do Potencial

Consideremos duas estrelas próximas movendo-se, devido a atração gravitacional mútua, em órbita circular em torno do centro de massa do sistema. Conforme mencionado na Seção 3.1.2, sabemos que a velocidade angular (ω) desse sistema depende apenas das massas e da distância das estrelas, desde que essas não possuam movimentos internos, a não ser uma rotação uniforme (ω) em torno do seu eixo. Tal movimento permite que as estrelas não apresentem rotação em relação ao referencial do sistema (órbita sincronizada) e, portanto, as estrelas apresentarão constantemente a mesma face à outra durante a órbita. Um esquema do sistema está é apresentado na Fig. 3.1.

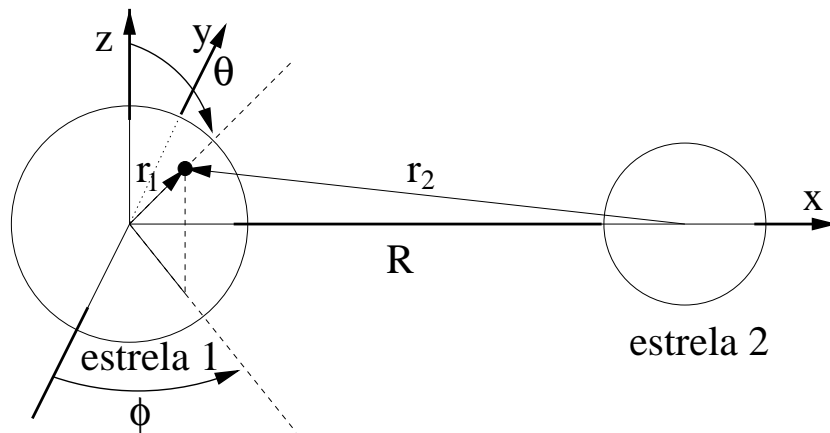


Figura 3.1: Esquema de um sistema estelar binário.

A fim de escrevermos a equação do potencial, usaremos o centro da estrela 1 como a origem do nosso sistema de coordenadas e inicialmente a escreveremos no sistema cartesiano. Denominaremos o eixo x , aquele que une os dois centros, com origem na estrela

1, e o eixo z , aquele perpendicular ao plano da órbita das estrelas, com o sentido da velocidade angular do sistema. Para comodidade, multiplicaremos o potencial por -1 , de forma a sempre considerarmos o módulo do potencial. A equação do potencial, referente às forças que agem em um ponto arbitrário $P(x, y, z)$, pode ser, então, expressa por

$$\Psi = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \frac{\omega^2}{2} \left[\left(x - \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \right)^2 + y^2 \right], \quad (3.12)$$

onde

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad r_2^2 = (R - x)^2 + y^2 + z^2. \quad (3.13)$$

O primeiro termo da equação representa o potencial gerado pela estrela 1, o segundo termo o produzido pela estrela 2 e, finalmente, o último termo representa o potencial originado pela atuação da força centrífuga. A fim de melhorarmos a forma da Eq. (3.12), converteremos do atual sistema de coordenadas cartesianas para as esféricas (veja a Fig. 3.1). Em coordenadas esféricas $x = R \sin \theta \cos \phi$ e $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ e, portanto,

$$\sqrt{(R - x)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{R^2 - 2Rr \sin \theta \cos \phi + r^2}, \quad (3.14)$$

$$\left(x - \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \right)^2 + y^2 = x^2 - \frac{2m_2 R x}{m_1 + m_2} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 R^2 + y^2. \quad (3.15)$$

Como $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta$, temos

$$\left(x - \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} \right)^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta - \frac{2m_2 R r \sin \theta \cos \phi}{m_1 + m_2} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 R^2. \quad (3.16)$$

Substituindo essas modificações na equação do potencial, Eq. (3.12),

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{\sqrt{R^2 - 2Rr \sin \theta \cos \phi + r^2}} + \\ &\quad \frac{\omega^2}{2} \left[r^2 \sin^2 \theta - \frac{2m_2 R r \sin \theta \cos \phi}{m_1 + m_2} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 R^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Lembrando que $\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}$, temos

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{\sqrt{R^2 - 2Rr \sin \theta \cos \phi + r^2}} + \\ &\quad \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3} \left[r^2 \sin^2 \theta - \frac{2m_2 R r \sin \theta \cos \phi}{m_1 + m_2} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 R^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Com o propósito de simplificar a Eq. (3.18), faremos as substituições

$$G = 1, \quad R = 1, \quad \omega = 1, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \sin \theta = \alpha, \quad \cos \phi = \beta \quad r_1 = r$$

A equação, alterada dessa forma, torna-se

$$\Psi = \frac{\mu}{r} + \frac{(1 - \mu)}{\sqrt{r^2 - 2r\alpha\beta + 1}} + \frac{1}{2} [r^2 \alpha^2 - 2(1 - \mu)r\alpha\beta + (1 - \mu)^2]. \quad (3.19)$$

Multiplicando por r ambos os lados da equação,

$$\Psi r = \mu + \frac{(1-\mu)r}{\sqrt{r^2 - 2r\alpha\beta + 1}} + \frac{1}{2} [r^3\alpha^2 - 2(1-\mu)r^2\alpha\beta + (1-\mu)^2r]. \quad (3.20)$$

Isolando o termo $\frac{(1-\mu)r}{\sqrt{r^2 - 2r\alpha\beta + 1}}$,

$$-2\frac{(1-\mu)r}{\sqrt{r^2 - 2r\alpha\beta + 1}} = 2\mu + r^3\alpha^2 - 2(1-\mu)r^2\alpha\beta + (1-\mu)^2r - 2\Psi r, \quad (3.21)$$

e elevando ao quadrado ambos os lados, ficamos com

$$\frac{4(1-\mu)^2r^2}{r^2 - 2r\alpha\beta + 1} = [2\mu + r^3\alpha^2 - 2r^2\alpha\beta(1-\mu) + (1-\mu)^2r - 2\Psi r]^2, \quad (3.22)$$

ou

$$[2\mu + r^3\alpha^2 - 2r^2\alpha\beta(1-\mu) + (1-\mu)^2r - 2\Psi r]^2 [r^2 - 2r\alpha\beta + 1] - 4(1-\mu)^2r^2 = 0. \quad (3.23)$$

Expandindo a Eq. (3.23) e organizando os termos em função de r^n , podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 = & \alpha^4 r^8 + \left\{ -4\alpha^3\beta(1-\mu) - 2\alpha^5\beta \right\} r^7 + \\ & \left\{ 2[(1-\mu)^2 - 2\Psi]\alpha^2 + 4\alpha^2\beta^2(1-\mu)^2 + 8\alpha^4\beta^2(1-\mu) + \alpha^4 \right\} r^6 + \\ & \left\{ 4\mu\alpha^2 - 4[(1-\mu)^2 - 2\Psi]\alpha\beta(1-\mu) - \right. \\ & \quad \left. 4\alpha\beta[(1-\mu)^2 - 2\Psi]\alpha^2 + 2\alpha^2\beta^2(1-\mu)^2 \right\} r^5 + \\ & \left\{ -8\mu\alpha\beta(1-\mu) + [(1-\mu)^2 - 2\Psi]^2 - \right. \\ & \quad \left. 8\alpha\beta[\mu\alpha^2 - [(1-\mu)^2 - 2\Psi]\alpha\beta(1-\mu)] + \right. \\ & \quad \left. 2[(1-\mu)^2 - 2\Psi]\alpha^2 + 4\alpha^2\beta^2(1-\mu)^2 \right\} r^4 + \\ & \left\{ 4\mu[(1-\mu)^2 - 2\Psi] - \right. \\ & \quad \left. 2\alpha\beta[-8\mu\alpha\beta(1-\mu) + [(1-\mu)^2 - 2\Psi]^2 + \right. \\ & \quad \left. 4\mu\alpha^2 - 4[(1-\mu)^2 - 2\Psi]\alpha\beta(1-\mu)] \right\} r^3 + \\ & \left\{ 4\mu^2 - 8\mu\alpha\beta[(1-\mu)^2 - 2\Psi] - 8\mu\alpha\beta(1-\mu) + [(1-\mu)^2 - 2\Psi]^2 - 4(1-\mu) \right\} r^2 + \\ & \left\{ -8\mu^2\alpha\beta + 4\mu[(1-\mu)^2 - 2\Psi] \right\} r + 4\mu^2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

ou

$$\sum_0^8 c_i r^i = 0. \quad (3.25)$$

Por tratar-se de uma equação de oitavo grau, devemos desenvolver meios aproximados de resolvê-la. Nas duas sessões seguintes serão apresentadas algumas soluções encontradas para contornar essa dificuldade.

3.3 O programa Mathcad

A primeira solução que nos ocorreu foi buscar, nos pacotes desenvolvidos especialmente para projetos em que a matemática é ferramenta imprescindível (**Mathcad**, **mathematica** e **mapple**), alguma programação específica que nos possibilitasse encontrar as raízes da Eq. (3.24). A vantagem de se utilizar tais programas é que a maioria das funções, relações, gráficos, aproximações numéricas já estão desenvolvidas.

Dentre os programas mencionados o **mathcad** foi o que se nos apresentou como melhor opção, não apenas pelo seu fácil manuseio, mas também pela familiaridade que possuíamos com o pacote. Posteriormente constatamos que as mesmas sintaxes contidas no **mathcad** faziam parte também dos outros softwares (especialmente o **Mathematica**).

3.3.1 A Função Polyroots

No ambiente de trabalho do **mathcad** existe uma rotina já estabelecida que encontra, através de sucessivas aproximações numéricas, as n raízes de um polinômio de $n^{\text{ésimo}}$ grau. Para entendermos melhor o processo na qual o **mathcad** desenvolve tais raízes, devemos estudar a função **polyroots**.

Como exemplo, imagine que desejássemos obter as raízes do polinômio $x^3 - 10x + 2$. Antes de utilizar a função, devemos escrever os coeficientes do polinômio em uma matriz, e, em nosso exemplo, teríamos

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde a primeira linha da nossa matriz representa o coeficiente do termo independente, a segunda a do termo x e a última linha refere-se ao coeficiente do polinômio x^3 .

Após criada a matriz podemos usar o comando **polyroots**, assim,

$$\text{polyroots}(v) = \begin{bmatrix} -3,258 \\ 0,201 \\ 3,057 \end{bmatrix},$$

onde os três números correspondem às três raízes da equação cúbica.

Ao aplicarmos o comando **polyroots** na Eq. (3.24) devemos, inicialmente, escrever a matriz dos coeficientes como uma função das variáveis Ψ , μ , α e β , pois cada mudança em uma dessas variáveis acarretará em novos coeficientes em nossa matriz. Assim,

$$A(\Psi, \alpha, \beta, \mu) = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

com os coeficientes c_i , $i = 0, 8$, dados pelas Eqs. (3.24) e (3.25).

Após a construção da matriz $A(\Psi, \alpha, \beta, \mu)$, criamos uma nova matriz $Z(\Psi, \theta, \phi, \mu)$ que possui a seguinte identidade

$$Z(\Psi, \theta, \phi, \mu) = A(\Psi, \text{sen } \theta, \text{cos } \phi, \mu). \quad (3.27)$$

O objetivo de construirmos tal matriz é que na matriz Z teremos como variáveis o potencial Ψ , os ângulos θ e ϕ , e a razão entre as massas μ . O fato de não termos introduzido diretamente as variáveis $\text{sen } \theta$ e $\text{cos } \phi$ na matriz $A(\Psi, \alpha, \beta, \mu)$ deve-se à necessidade de pouparmos espaço, já que as expressões tornavam-se cada vez maiores, nas linhas da matriz A . Com tais modificações introduzidas, podemos escrever a identidade

$$W(\Psi, \theta, \phi, \mu) = \text{polyroots}(Z(\Psi, \theta, \phi, \mu)). \quad (3.28)$$

Uma vez dados Ψ, θ, ϕ e μ , a matriz W conterà as raízes do polinômio representado pela matriz Z . Deve-se salientar que estas raízes ainda não correspondem aos valores dos raios desejados.

Uma maneira de aferir tais resultados foi criar mais duas matrizes $S(\Psi, \theta, \phi, \mu)$ e $T(\Psi, \theta, \phi, \mu)$; para cada uma, a $n^{\text{ésima}}$ linha representa o resultado produzido ao inserirmos a $n^{\text{ésima}}$ linha da matriz $W(\Psi, \theta, \phi, \mu)$ nas Eqs. (3.23) e (3.19), respectivamente.

$$T(\Psi, \theta, \phi, \mu) = \begin{bmatrix} t(\Psi, 0, \theta, \phi, \mu) \\ t(\Psi, 1, \theta, \phi, \mu) \\ t(\Psi, 2, \theta, \phi, \mu) \\ t(\Psi, 3, \theta, \phi, \mu) \\ t(\Psi, 4, \theta, \phi, \mu) \\ t(\Psi, 5, \theta, \phi, \mu) \\ t(\Psi, 6, \theta, \phi, \mu) \\ t(\Psi, 7, \theta, \phi, \mu) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S(\Psi, \theta, \phi, \mu) = \begin{bmatrix} s(\Psi, 0, \theta, \phi, \mu) \\ s(\Psi, 1, \theta, \phi, \mu) \\ s(\Psi, 2, \theta, \phi, \mu) \\ s(\Psi, 3, \theta, \phi, \mu) \\ s(\Psi, 4, \theta, \phi, \mu) \\ s(\Psi, 5, \theta, \phi, \mu) \\ s(\Psi, 6, \theta, \phi, \mu) \\ s(\Psi, 7, \theta, \phi, \mu) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

onde

$$t(\Psi, n, \theta, \phi, \mu) = \frac{\mu}{r} + \frac{(1 - \mu)}{\sqrt{r^2 - 2r\alpha\beta + 1}} + \frac{1}{2} [r^2\alpha^2 - 2(1 - \mu)r\alpha\beta + (1 - \mu)^2], \quad (3.30)$$

$$s(\Psi, n, \theta, \phi, \mu) = \frac{[2\mu + r^3\alpha^2 - 2r^2\alpha\beta(1 - \mu) + (1 - \mu)^2r - 2\Psi r]^2 [r^2 - 2r\alpha\beta + 1] - 4(1 - \mu)^2r^2}{4(1 - \mu)^2r^2} \quad (3.31)$$

e

$$r = r(\Psi, \theta, \phi, \mu)_n. \quad (3.32)$$

Com a finalidade de ilustrarmos melhor a maneira na qual o `mathcad` executa os algoritmos construídos, e de apresentar algumas dificuldades surgidas, vamos imaginar que desejássemos calcular as raízes do polinômio originado ao especificarmos

$$\Psi = 2, \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0, 8, \mu = 0, 5. \quad (3.33)$$

As matrizes $Z(\Psi, \theta, \phi, \mu)$ e $W(\Psi, \theta, \phi, \mu)$ ficaram

$$Z(\Psi, \theta, \phi, \mu) = \begin{bmatrix} 1 \\ -8,89 \\ 23,12 \\ -17,93 \\ -4,41 \\ 15,61 \\ -4,07 \\ -2,79 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W(\Psi, \theta, \phi, \mu) = \begin{bmatrix} -1,84 \\ -1,67 \\ 0,20 \\ 0,39 \\ 0,69 + 0,66i \\ 0,69 - 0,66i \\ 1,99 \\ 2,35 \end{bmatrix}.$$

Vemos que as linhas da matriz $W(\Psi, \theta, \phi, \mu)$ correspondem às raízes do polinômio cujos coeficientes estão especificados na matriz $Z(\Psi, \theta, \phi, \mu)$. Para certificarmos os resultados apresentados, construímos as matrizes

$$S(\Psi, \theta, \phi, \mu) = \begin{bmatrix} -6,7 \times 10^{-7} \\ 1,71 \times 10^{-11} \\ 1,47 \times 10^{-11} \\ 1,47 \times 10^{-11} \\ 1,47 \times 10^{-11} - 7,11 \times 10^{-15}i \\ 1,47 \times 10^{-11} + 7,55 \times 10^{-15}i \\ 2,79 \times 10^{-6} \\ 6,76 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(\Psi, \theta, \phi, \mu) = \begin{bmatrix} 2,38 \\ 2 \\ 3,15 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2,56 \end{bmatrix},$$

onde as matrizes $S(\Psi, \theta, \phi, \mu)$ e $T(\Psi, \theta, \phi, \mu)$ correspondem ao resultado encontrado ao introduzir as raízes do polinômio nas Eqs. (3.23) e (3.19), respectivamente. Na matriz $S(\Psi, \theta, \phi, \mu)$, os resultados estão bem próximos ao desejado, mas na matriz $W(\Psi, \theta, \phi, \mu)$ algumas raízes, especificamente $-1,84$, $0,2$ e $2,35$, quando inseridas na equação do potencial não dão o resultado desejado (2). Outro problema são as soluções complexas e reais negativas, que não interessa no nosso caso.

A maneira mais simples de contornar essa dificuldade foi modificar a expressão da Eq. (3.30), $t(\Psi, n, \theta, \phi, \mu)$, onde substituímos r por $|r|$. Desse modo, tanto as raízes negativas quanto as complexas, apresentaram resultados discordantes ao serem introduzidas na equação do potencial. Para selecionar apenas as soluções reais e positivas, basta construir o algoritmo

$$u(\Psi, n, \theta, \phi, \mu) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t(\Psi, n, \theta, \phi, \mu) - \Psi| \geq 0.0001 \\ r(\Psi, \theta, \phi, \mu)_n & \text{de outro modo} \end{cases}. \quad (3.34)$$

Finalizando o processo, construímos a matriz $R(\Psi, \theta, \phi, \mu)$, que contém em suas linhas a avaliação de todas as raízes encontradas

$$R(\Psi, \theta, \phi, \mu) = \begin{bmatrix} u(\Psi, 0, \theta, \phi, \mu) \\ u(\Psi, 1, \theta, \phi, \mu) \\ u(\Psi, 2, \theta, \phi, \mu) \\ u(\Psi, 3, \theta, \phi, \mu) \\ u(\Psi, 4, \theta, \phi, \mu) \\ u(\Psi, 5, \theta, \phi, \mu) \\ u(\Psi, 6, \theta, \phi, \mu) \\ u(\Psi, 7, \theta, \phi, \mu) \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Aproveitando nosso exemplo, as matrizes $T(\Psi, \theta, \phi, \mu)$ e $R(\Psi, \theta, \phi, \mu)$ ficaram

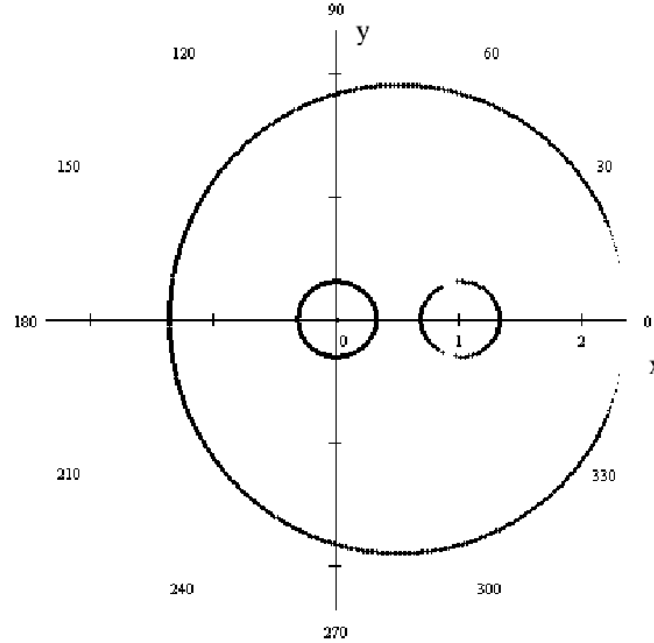


Figura 3.2: Exemplo de solução da Equação (3.24): projeção no plano xy da superfície construída com $\Psi = 2,3$ e $\mu = 0,5$. Sistema *destacado* ou *separado*.

$$T(\Psi, \theta, \phi, \mu) = \begin{bmatrix} 1.82 \\ 1.65 \\ 3.15 \\ 2 \\ 1.43 \\ 1.43 \\ 2 \\ 2.56 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R(\Psi, \theta, \phi, \mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.39 \\ 0 \\ 0 \\ 1.99 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O resultado nulo apresentado em muitas linhas deve-se a três possibilidades: o resultado encontrado (a) é um número complexo, ou (b) negativo, ou (c) trata-se de uma raiz real e positiva que satisfaz a equação polinomial, mas não satisfaz a equação do potencial. No nosso exemplo, apenas as raízes 0,39 e 1,99 satisfazem nossas exigências com relação aos critérios estabelecidos, e, desse modo, as raízes do polinômio tornam-se os raios da equação do potencial.

Uma vez obtidos os raios para cada direção θ e ϕ , podemos construir o gráfico r em função de θ e ϕ . Ainda no nosso exemplo, construímos o gráfico r em função de ϕ , para $\theta = \frac{\pi}{2}$. Vamos considerar um valor relativamente baixo do potencial, sempre lembrando que, de fato, os valores foram multiplicados por -1 (ou seja, valor absoluto do potencial grande). Vamos considerar $\mu = 0,5$ e o potencial $\Psi = 2,3$. Observamos a formação da curva equipotencial constituída de duas ovas independentes centradas nos pontos $(0,0,0)$ e $(0,1,0)$, como mostrado na Fig. 3.2.

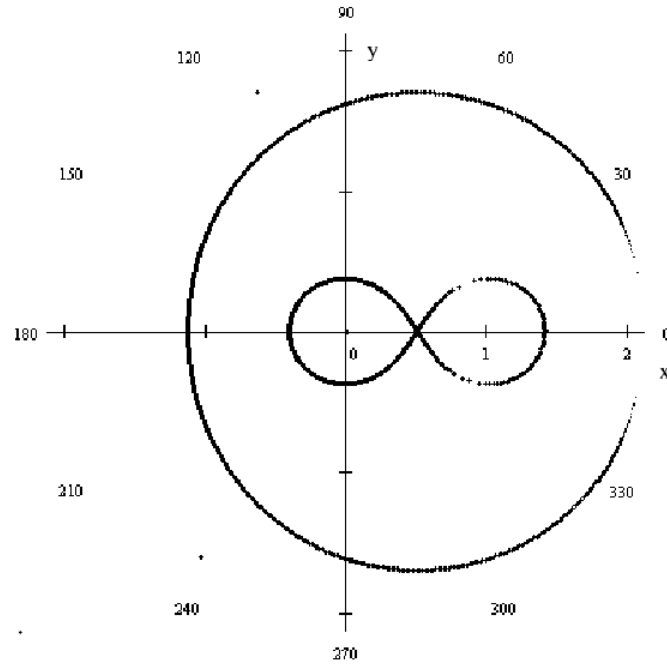


Figura 3.3: Exemplo de solução da Equação (3.24): projeção no plano xy da superfície construída com $\Psi = 2,0$ e $\mu = 0,5$. Superfície crítica ou lobos de Roche: sistema em *contacto*.

As imperfeições que observamos na configuração da segunda estrela deve-se ao fato de que os intervalos de ϕ não são pequenos o suficiente para dar continuidade a curva tracejada. Podemos minimizar tal efeito diminuindo o intervalo de ϕ .

Se formos aproximando o valor do potencial a zero, ou seja, diminuindo o seu valor absoluto, as figuras que envolvem cada componente tendem a aumentar, se afastando de ambas. Existe um valor do potencial para o qual teremos a última figura que envolve individualmente cada componente, isolando-a do resto do Universo. A esse valor do potencial denominamos “Potencial crítico”, ou “Limite de Roche” que, para $\mu = 0.5$ assume o valor $\Psi = 2$. Existe um valor do potencial crítico para cada razão entre as massas das estrelas, isto é, para cada valor de μ . Essas superfícies críticas denominam-se “lobos de Roche”, mostrados na Fig. 3.3.

Se diminuirmos mais ainda o potencial, teremos a formação de uma curva comum aos centros das duas estrelas, permitindo interação entre ambas. Todas essas configurações são possíveis em sistemas binários, gerando, inclusive, uma classificação para os mesmos (veja, por exemplo, Sahade & Wood 1978): se as estrelas estão bem separadas, com valores altos de potencial, como na Fig. 3.2, o sistema é denominado *separado*, ou *destacado* (“*detached*”); caso uma das estrelas seja definida pelo seu potencial crítico, o sistema é denominado *semi-separado*, ou *semi-destacado* (“*semi-detached*”); se ambas as estrelas preenchem seus lobos no potencial crítico, o sistema é denominado *contacto* (“*contact*”), como na Fig. 3.3; finalmente, se as estrelas estão ocupando figuras correspondente a potenciais menores ainda, como na Fig. 3.4, o sistema é dito estar em *sobre-contacto* (“*over-contact*”).

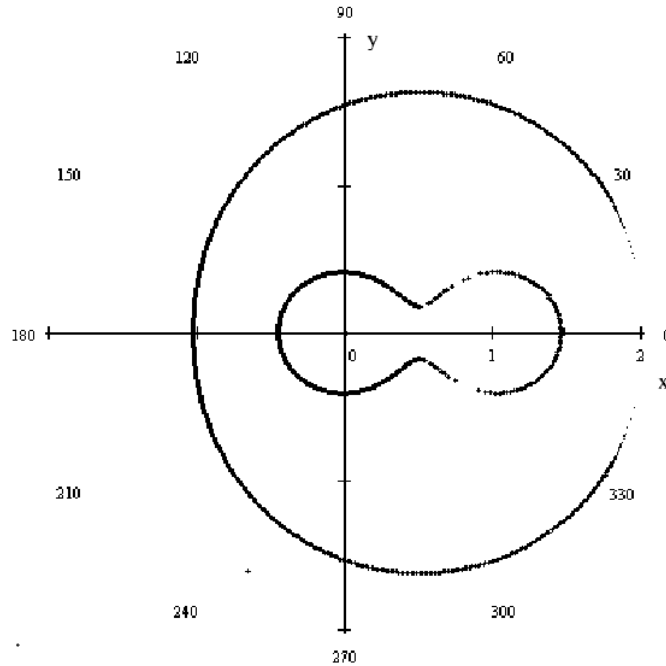


Figura 3.4: Exemplo de solução da Equação (3.24) para valores do potencial abaixo do valor crítico, $\Psi = 1,9$ e $\mu = 0,5$. Projeção no plano xy . Sistema em *sobre-contacto*.

3.3.2 Comentários

Os resultados encontrados ao utilizar a função `polyroots` são confiáveis, e estão em concordância com os obtidos em algumas publicações sobre o tema (e.g., Mochnacki 1984, Limber 1963). O inconveniente é que, apesar dos resultados serem confiáveis, não temos controle sobre a precisão das raízes e tampouco do procedimento matemático utilizado. Além disso, não temos nenhuma garantia que o programa poderá assegurar precisão em todas as alterações introduzidas nas variáveis da equação do potencial (θ , ϕ e μ).

Para contornar este problema buscamos métodos alternativos que serão, além de ferramentas adicionais na solução da equação, meios para testar e comparar as vantagens ou desvantagens de cada método.

3.4 A Solução Analítica

Antes de iniciar a descrição do método que batizei como “solução analítica”, gostaria de esclarecer alguns possíveis equívocos que poderão surgir referente ao título. O que chamo de exato neste método é que, sob certas condições (que serão demonstradas posteriormente), encontraremos r_1 em função de r_2 através da resolução de uma equação de terceiro grau para a qual dispomos de solução analítica. A descrição do método ficará restrita, a princípio, ao plano xy , conforme o trabalho de Moulton (1914), mas posteriormente estenderemos a idéia para qualquer plano.

Ao reescrever a equação do potencial em coordenadas cartesianas no plano xy temos

$$\Psi = \frac{\mu}{r_1} + \frac{1 - \mu}{r_2} + \frac{1}{2}r_{o\omega}^2, \quad (3.36)$$

onde $r_{o\omega} = x^2 + y^2$ (veja a Fig. 3.5) e $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$.

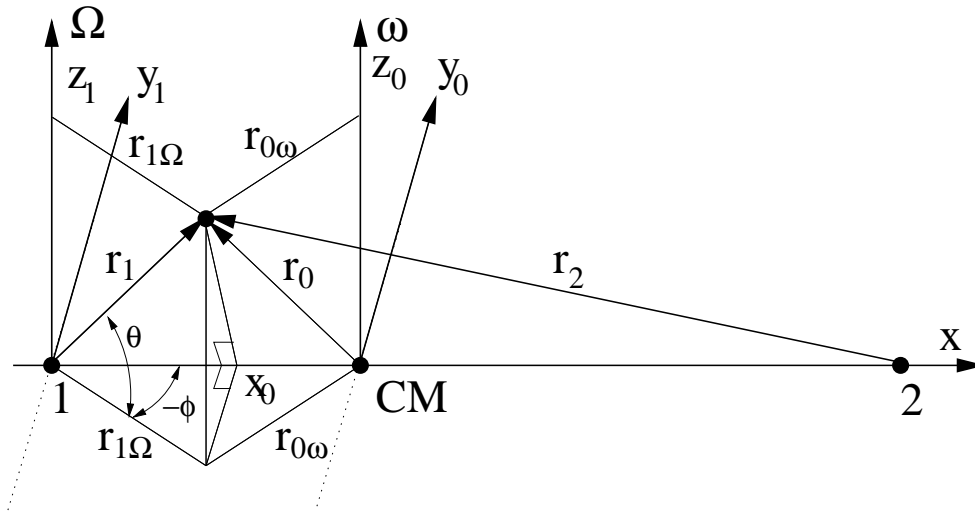


Figura 3.5: Geometria para o cálculo do potencial efetivo

A origem do nosso sistema de coordenadas está no centro de massa do sistema, r_1 é a distância do ponto em questão ao centro de massa da estrela 1, r_2 ao centro de massa da estrela 2 e $r_{o\omega}$ ao centro de massa do sistema. $1 - \mu$ e μ correspondem às distâncias dos centros de massa das estrelas 1 e 2, respectivamente, ao centro de massa do sistema. Das relações triangulares teremos

$$[(1 - \mu) + x]^2 + y^2 = r_1^2, \quad \text{e} \quad (3.37)$$

$$[\mu - x]^2 + y^2 = r_2^2. \quad (3.38)$$

Expandindo as expressões, obtemos

$$(1 - \mu)^2 + 2(1 - \mu)x + x^2 + y^2 = r_1^2, \quad \text{e} \quad (3.39)$$

$$\mu^2 - 2\mu x + x^2 + y^2 = r_2^2, \quad (3.40)$$

respectivamente. Com o propósito de eliminar o termo linear em x , multiplicamos a Eq. (3.40) por $\frac{1-\mu}{\mu}$ e a adicionamos à Eq. (3.39), após o que temos

$$(1 - \mu)^2 + \mu(1 - \mu) + \frac{x^2 + y^2}{\mu} = r_1^2 + \frac{r_2^2(1 - \mu)}{\mu}. \quad (3.41)$$

$$r_{o\omega}^2 = x^2 + y^2 = r_1^2\mu + r_2^2(1 - \mu) - (1 - \mu)\mu \quad (3.42)$$

Ao reescrever a equação do potencial em função apenas de r_1 e r_2 , obtemos

$$\Psi = \frac{\mu}{r_1} + \frac{1 - \mu}{r_2} + \frac{1}{2} [r_1^2\mu + r_2^2(1 - \mu) - \mu(1 - \mu)]. \quad (3.43)$$

Multiplicando por $2r_1$, isolando os termos em ordem decrescente de potências e dividindo por μ , obtemos

$$r_1^3 + \left[\frac{1-\mu}{\mu} \left(r_2^2 + \frac{2}{r_2} \right) - (1-\mu) - \frac{2\Psi}{\mu} \right] r_1 + 2 = 0, \quad (3.44)$$

de onde podemos encontrar r_1 em função do potencial, das razões entre as massas, e de um valor arbitrário de r_2 . O problema é que, matematicamente falando, poderemos atribuir qualquer valor para a variável r_2 e teremos uma solução (real ou complexa) para r_1 .

Na solução da equação do potencial devemos buscar uma faixa de valores de r_2 , de modo a gerar apenas valores reais para r_1 . Para isso, devemos buscar na literatura (por exemplo, Abramowitz 1970) meios que nos permitam encontrar tais valores.

3.4.1 Estudo da equação cúbica

Seja a equação cúbica

$$z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad (3.45)$$

e as grandezas auxiliares

$$q = \frac{a_1}{3} - \frac{a_2^2}{9}, \quad \text{e} \quad (3.46)$$

$$r = \frac{(a_1 a_2 - 3a_0)}{6} - \frac{a_2^3}{27}. \quad (3.47)$$

O número e o tipo das raízes da Eq. (3.45) depende de q e r (veja, por exemplo, em Abramowitz 1970) da seguinte maneira

$$q^3 + r^2 > 0 \implies \quad \text{uma raiz real e um par de raízes complexas conjugadas;} \quad (3.48)$$

$$q^3 + r^2 = 0 \implies \quad \text{apenas raízes reais, mas ao menos duas são iguais;} \quad (3.49)$$

$$q^3 + r^2 < 0 \implies \quad \text{todas as raízes são reais e distintas.} \quad (3.50)$$

Fazendo

$$s_1 = \sqrt[3]{r + \sqrt{q^3 + r^2}} \quad \text{e} \quad s_2 = \sqrt[3]{r - \sqrt{q^3 + r^2}}, \quad (3.51)$$

podemos encontrar as raízes da Eq. (3.45) pelas relações

$$\begin{aligned} z_1 &= s_1 + s_2 - \frac{a_2}{3}, \\ z_2 &= \frac{-(s_1 + s_2)}{2} - \frac{a_2}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2), \\ z_3 &= \frac{-(s_1 + s_2)}{2} - \frac{a_2}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ao reorganizar a Eq. (3.45), temos

$$r_1^3 + a_1 r_1 + a_0 = 0, \quad (3.53)$$

onde

$$a_1 = \frac{1-\mu}{\mu} \left[r_2^2 + \frac{2}{r_2} \right] - (1-\mu) - \frac{2\Psi}{\mu} \quad \text{e} \quad a_0 = 2. \quad (3.54)$$

Desde que $a_0 > 0$, há pelo menos uma raiz real negativa independente do valor que a_1 possa assumir, mas os únicos valores com significado físico no nosso problema são as raízes reais e positivas. Calculando os valores de q e r das Eqs. (3.53) e (3.54), temos

$$q = \frac{a_1}{3} \quad \text{e} \quad r = -1.$$

Conforme especificado nas condições representadas pelas Eqs. (3.48), (3.49) e (3.50), para termos somente raízes reais devemos ter

$$\frac{a_1^3}{27} + 1 \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 + 3 \leq 0,$$

e, portanto,

$$\frac{1-\mu}{\mu} \left[r_2^2 + \frac{2}{r_2} \right] - (1-\mu) - \frac{2\Psi}{\mu} + 3 \leq 0. \quad (3.55)$$

Multiplicando por r_2 e dividindo por $\frac{1-\mu}{\mu}$,

$$r_2^3 + \left[\frac{3\mu}{1-\mu} - \left(\mu + \frac{2\Psi}{1-\mu} \right) \right] r_2 + 2 \leq 0. \quad (3.56)$$

As três raízes da Eq. (3.55) podem ser encontradas usando as equações especificadas em (3.52). Para que possamos encontrar apenas soluções reais para o nosso intervalo devemos fazer $q^3 + 1 \leq 0$, assim

$$q \leq -1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3} \left[\frac{3\mu}{1-\mu} - \left(\mu + \frac{2\Psi}{1-\mu} \right) \right] \leq -1, \quad (3.57)$$

o que implica em

$$2\Psi + \mu(1-\mu) \geq 3 \quad \Longrightarrow \quad \Psi \geq \frac{3-\mu(1-\mu)}{2}. \quad (3.58)$$

Ou seja, devemos ter $\Psi \geq \frac{1}{2}(3-\mu(1-\mu))$, se quisermos ter certeza de termos uma solução real para a nossa equação do potencial.

Uma vez obedecido o critério da Eq. (3.58), teremos os números $-1 + \sqrt{q^3 + 1}$ e $-1 - \sqrt{q^3 + 1}$ localizados no segundo e terceiro quadrantes, respectivamente. Assim, s_1 deve estar localizada no primeiro quadrante, entre os arcos $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$, e s_2 no quarto quadrante, entre $-\frac{\pi}{3}$ e $-\frac{\pi}{6}$, conforme a Fig. 3.6. Os vetores 1 e 2 correspondem aos números $-1 + \sqrt{q^3 + 1}$ e $-1 - \sqrt{q^3 + 1}$, respectivamente, e os vetores 3 e 4 às suas correspondentes raízes cúbicas (s_1 e s_2) limitadas pelos arcos mencionados no parágrafo anterior. Podemos escrever s_1 e s_2 como $a + bi$ e $a - bi$, respectivamente, e temos

$$\text{tg } \theta = \frac{b}{a}, \quad (3.59)$$

onde θ é o argumento do número complexo. Como $a + bi$ deve estar limitado entre os arcos $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$, temos

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{b}{a} < \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (3.60)$$

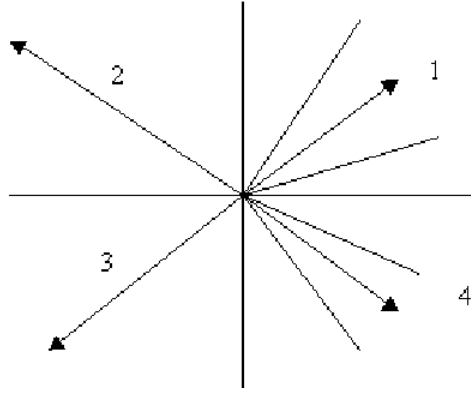


Figura 3.6: Esquema de quadrantes na solução da equação do potencial

Multiplicando por $a\sqrt{3}$ temos, após alguma álgebra, as três raízes de r_2 , escritas em função de a e b

$$\begin{aligned} r_{21} &= 2a, \\ r_{22} &= -a - b\sqrt{3}, \\ r_{23} &= -a + b\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Como a e b são números reais e positivos, temos que r_{22} é real e negativo e r_{21} real e positivo. Pela condição imposta pela Eq. (3.60) ($b\sqrt{3} > a$), devemos ter r_{23} positivo e menor que r_{21} , uma vez que $r_{21} - r_{23} = 3a - b\sqrt{3}$ e, de novo pela Eq. (3.60), $3a > b\sqrt{3}$.

Portanto, devido à condição da Eq. (3.50), teremos sempre duas raízes positivas e uma negativa. Fazendo o estudo do sinal da função encontramos que os intervalos $r_2 < r_{22}$ e $r_{23} < r_2 < r_{21}$ são aqueles para os quais a Eq. (3.56) é menor que zero, mas somente o intervalo $r_{23} < r_2 < r_{21}$ possui significado físico.

Podemos resumir o procedimento para construir as curvas equipotenciais com os seguintes passos

1. Especificar o valor do potencial, obedecendo à condição da Eq. (3.58), entre o potencial e a razão entre as massas das estrelas.
2. Com essas especificações, encontramos o intervalo de valores o qual atribuímos a r_2 .
3. Dividimos o intervalo em n pontos igualmente espaçados e, para cada valor de r_2 , temos o coeficiente a_1 da Eq. (3.53) determinado. Assim, encontramos as duas raízes reais positivas (z_1 e z_3) que correspondem aos valores de r_1 que, por sua vez, satisfazem a equação do potencial.
4. Com os valores de r_1 e r_2 podemos gerar as curvas equipotenciais; se dividirmos o intervalo de r_2 em um número maior de pontos melhoraremos a precisão do nosso gráfico.

3.4.2 O Algoritmo do Programa

Mesmo que tenhamos especificado com clareza o método da solução exata, precisamos apresentar as vantagens e desvantagens computacionais originadas ao implementar o programa no `mathcad`.

Esquemáticamente apresentado, nosso problema será resolver a Eq. (3.44) com as condições representadas pela Eq. (3.56), cujas raízes são dadas pelas Eqs. (3.52), lembrando que o intervalo compreendido entre as raízes z_3 e z_1 corresponde aos valores de r_2 que conduzirão a soluções reais, quando os mesmos forem introduzidos na equação

$$r_1^3 + \left[\frac{1-\mu}{\mu} \left[r_2^2 + \frac{2}{r_2} \right] - (1-\mu) - \frac{2\Psi}{\mu} \right] r_1 + 2 = 0. \quad (3.61)$$

Para operacionalizar a idéia acima, construímos as matrizes

$$s(\mu, \Psi) = \begin{bmatrix} -1 + \left(\left[\frac{3\mu - [2\Psi + \mu(1-\mu)]}{3(1-\mu)} \right]^3 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ -1 - \left(\left[\frac{3\mu - [2\Psi + \mu(1-\mu)]}{3(1-\mu)} \right]^3 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^{\frac{1}{3}}, \quad (3.62)$$

$$\rho(\mu, \Psi) = \begin{bmatrix} \frac{-[s(\mu, \Psi)_0 + s(\mu, \Psi)_1]}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} [s(\mu, \Psi)_0 - s(\mu, \Psi)_1] \\ \frac{-[s(\mu, \Psi)_0 + s(\mu, \Psi)_1]}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} [s(\mu, \Psi)_0 - s(\mu, \Psi)_1] \\ s(\mu, \Psi)_0 + s(\mu, \Psi)_1 \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

onde $s(\mu, \Psi)_0$ e $s(\mu, \Psi)_1$ correspondem à 1ª e à 2ª linha, respectivamente, da matriz $s(\mu, \Psi)$ e $\rho(\mu, \Psi)_0$, $\rho(\mu, \Psi)_1$, $\rho(\mu, \Psi)_2$ à 1ª, 2ª, e 3ª linha da matriz $\rho(\mu, \Psi)$, respectivamente.

Portanto, uma vez estabelecidos os valores de μ e Ψ , temos o intervalo de r_2 definido entre a segunda e a terceira raízes encontradas. Esses valores serão usados para definir o coeficiente a_1 da Eq. (3.53). Com a finalidade de encontrar os valores de r_1 correspondentes a cada valor de r_2 , foram criadas mais duas matrizes

$$a(\mu, \Psi, r_2) = \begin{bmatrix} \left(-1 + \left(\left[\frac{-[2\Psi + \mu(1-\mu)] + (1-\mu)[r_2^2 + \frac{2}{r_2}]}{3\mu} \right]^3 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(-1 - \left(\left[\frac{-[2\Psi + \mu(1-\mu)] + (1-\mu)[r_2^2 + \frac{2}{r_2}]}{3\mu} \right]^3 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

e

$$r(\mu, \Psi, r_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[a(\mu, \Psi, r_2)_0 + a(\mu, \Psi, r_2)_1] + \frac{i\sqrt{3}}{2}[a(\mu, \Psi, r_2)_0 - a(\mu, \Psi, r_2)_1] \\ -\frac{1}{2}[a(\mu, \Psi, r_2)_0 + a(\mu, \Psi, r_2)_1] - \frac{i\sqrt{3}}{2}[a(\mu, \Psi, r_2)_0 - a(\mu, \Psi, r_2)_1] \\ a(\mu, \Psi, r_2)_0 + a(\mu, \Psi, r_2)_1 \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

onde r_2 deve ser um número compreendido entre $\rho(\mu, \Psi)_1$ e $\rho(\mu, \Psi)_2$.

Das três raízes, apenas a segunda e a terceira ($r(\mu, \Psi, r_2)_1$ e $r(\mu, \Psi, r_2)_2$) são de interesse, uma vez que a primeira é negativa. Uma vez obtido o módulo dos raios, podemos encontrar as coordenadas x e y pelas relações, onde $m = 1, 2$

$$x(\mu, \Psi, r_2, m) = \frac{(r(\mu, \Psi, r_2)_m)^2 - r_2^2 + 1}{2}, \quad (3.66)$$

$$y(\mu, \Psi, r_2, m) = \begin{bmatrix} \left((r(\mu, \Psi, r_2)_m)^2 - \left[\frac{(r(\mu, \Psi, r_2)_m)^2 - r_2^2 + 1}{2} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ - \left((r(\mu, \Psi, r_2)_m)^2 - \left[\frac{(r(\mu, \Psi, r_2)_m)^2 - r_2^2 + 1}{2} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

O surgimento da variável m deve-se à necessidade de determinar, para cada valor de r_2 , os dois valores de r_1 ($r(\mu, \Psi, r_2)_1$ e $r(\mu, \Psi, r_2)_2$). Portanto, $x(\mu, \Psi, r_2, 1)$ [$m = 1$] refere-se ao valor da coordenada x ao se utilizar r_2 e $r(\mu, \Psi, r_2)_1$ como variáveis na Eq. (3.66). A necessidade de usarmos a matriz $y(\mu, \Psi, r_2, m)$ para determinar os valores de y é que, uma vez calculado x , temos, pela simetria na equação do potencial, dois valores para y ($y(\mu, \Psi, r_2, m)_0$ e $y(\mu, \Psi, r_2, m)_2$).

Com os valores de x e y encontrados podemos gerar as curvas equipotenciais. Como exemplo, faremos $\mu = 0,25$ e $\Psi = 1,9353295$ (o valor especificado para o potencial corresponde ao lobo de Roche para o respectivo μ) e, deste modo temos

$$\rho(0,25, 1,9353295) = \begin{bmatrix} -2,298 \\ 0,478 \\ 1,820 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, para os valores de μ e Ψ especificados, temos um intervalo entre $0,478 < r_2 < 1,820$ que nos conduzirá a valores reais para r_1 . Escolhendo $r_2=0,5$, os valores de r_1 serão

$$r_1(0,25, 1,9353295, 0,5) = \begin{bmatrix} -2,105 \\ 0,655 \\ 1,450 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, para apenas um valor de r_2 (0,5) possuímos 2 valores de r_1 (0,655 e 1,450) e, portanto, para cada par (r_1, r_2) temos dois pares x e y . No nosso exemplo, para $r_1 = 0,655$ os pares são: (0,339, 0,285) e (0,339, -0,285) ao passo que para $r_1 = 1,45$, (1,177, 0,260) e (1,177, -0,260).

Com o propósito de obter as curvas equipotenciais, dividimos o intervalo r_2 do seguinte modo

$$r_2 = \rho(\mu, \Psi)_1, \rho(\mu, \Psi)_1 + 0,01, \dots, \rho(\mu, \Psi)_2, \quad (3.68)$$

e, para cada valor de r_2 , determinamos os quatro pontos no plano xy , construindo a curva equipotencial mostrada na Fig. 3.7.

Podemos observar que, ao traçar a superfície da estrela 2, há uma descontinuidade na mesma na sua parte superior e inferior, isto se deve uma divisão insuficiente nos intervalos de r_2 . Alterando a Eq. (3.68) para

$$r_2 = \rho(\mu, \Psi)_1, \rho(\mu, \Psi)_1 + 0,001, \dots, \rho(\mu, \Psi)_2, \quad (3.69)$$

a curva ficará como a mostrada na Fig. 3.8.

A vantagem de se utilizar o método “exato” para construir curvas equipotenciais consiste no resultado preciso encontrado para os raios, uma vez que a equação de terceiro grau originada pela equação do potencial possui solução analítica. Para que possamos estender essa idéia para outros planos, devemos fazer algumas mudanças na equação original, proposta por Moulton (1914).

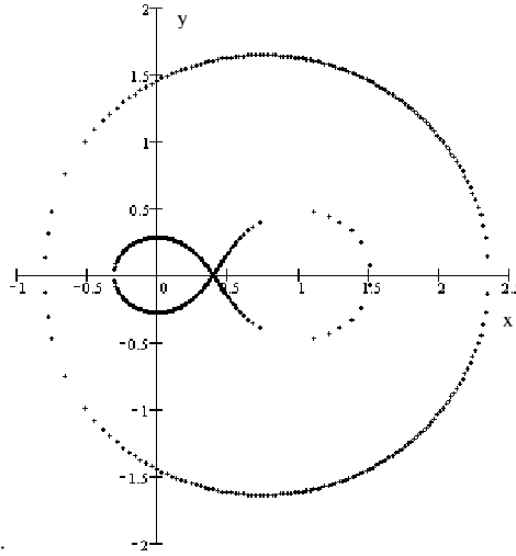


Figura 3.7: Solução da equação do potencial, intervalos maiores

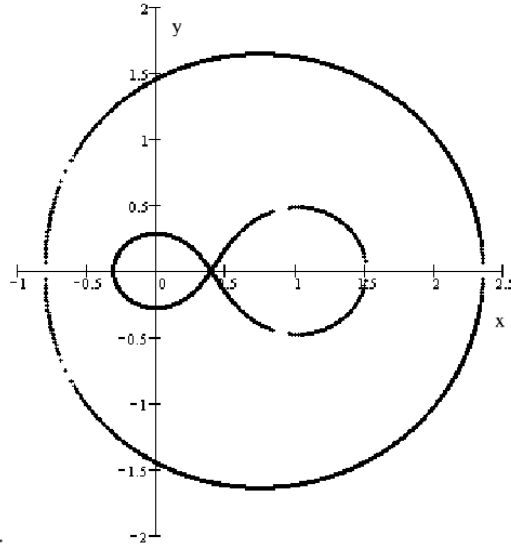


Figura 3.8: Solução da equação do potencial, intervalos menores

Assim, tínhamos a Eq. (3.36), com $r_{ow} = x^2 + y^2 = r_1^2\mu + r_2^2(1 - \mu) - \mu(1 - \mu)$, onde r_1 e r_2 representam as distâncias do ponto no plano xy aos centros de massa da estrela 1 e 2, respectivamente. Com o propósito de generalizar o método para outros planos no espaço sem, contudo, provocar mudanças significativas, devemos reescrever a Eq. (3.36) considerando R_1 e R_2 como as distâncias do ponto generalizado aos respectivos centros e fazer a seguinte alteração em r_{ow}

$$r_{ow} = (R_1^2 - z^2)\mu + (R_2^2 - z^2)(1 - \mu) - \mu(1 - \mu) = R_1^2\mu + R_2^2(1 - \mu) - \mu(1 - \mu) - z^2. \quad (3.70)$$

Na Eq. (3.70), r_1 e r_2 são as projeções de R_1 e R_2 no plano xy . Com isso, obtemos a nova

equação do potencial

$$\Psi = \frac{\mu}{R_1} + \frac{1-\mu}{R_2} + \frac{1}{2} [R_1^2\mu + R_2^2(1-\mu) - \mu(1-\mu) - z^2] \quad (3.71)$$

que, com as devidas simplificações, nos conduz a

$$R_1^3 + \left[\frac{1-\mu}{\mu} \left[R_2^2 + \frac{2}{R_2} \right] - (1-\mu) - \frac{2\Psi + z^2}{\mu} \right] R_1 + 2 = 0. \quad (3.72)$$

A equação que nos possibilita encontrar o intervalo de R_2 , o qual devemos aplicar na Eq. (3.72), será

$$R_2^3 + \left[\frac{3\mu}{1-\mu} - \left(\mu + \frac{2\Psi + z^2}{1-\mu} \right) \right] R_2 + 2 \leq 0. \quad (3.73)$$

O valor limite do potencial para o qual temos soluções reais para o intervalo R_2 é

$$\Psi \geq \frac{3 - \mu(1-\mu) - z^2}{2}. \quad (3.74)$$

Introduzindo as novas equações no programa e fazendo as modificações necessárias para a implementação da nova variável z , podemos construir as curvas equipotenciais para qualquer plano.

Podemos construir as curvas de nível da nossa superfície equipotencial variando em intervalos pequenos a variável z e construindo as curvas equipotenciais equivalentes. Desse modo, se superpusermos tais curvas de nível em um único gráfico, teremos a superfície equipotencial construída.

3.5 Os Métodos de Newton e de Laguerre

Apesar da precisão absoluta do método, da clareza dos procedimentos empregados, da facilidade na construção dos algoritmos e da possibilidade de o estender a outros planos, surgiram alguns problemas nos intervalos calculados pela Eq. (3.56). Em consequência disto, tivemos algumas dificuldades computacionais em gerar, com definição suficiente, as curvas equipotenciais.

A primeira dificuldade foi perceber que o intervalo de r_2 , para os casos em que o potencial possuía um valor superior ao limite de Roche, não poderia ser contínuo pois para uma certa variação em r_2 poderíamos construir a curva na estrela 2, mas teríamos um intervalo significativo entre a faixa de valores que gerariam a curva na estrela 2 e a faixa que construiria a estrela 1.

Por uma simples inspeção nas curvas produzidas percebemos que os intervalos responsáveis pela formação real das curvas equipotenciais são, na verdade, subintervalos dos intervalos especificados na solução da Eq. (3.56). Mas o que estaria matematicamente acontecendo com os subintervalos restantes, que os impossibilitasse de serem parte da solução do problema? A resposta está em que ao estabelecer os limites para o intervalo de r_2 , os quais conduziram a valores reais as raízes da Eq. (3.44), não nos preocupamos com o simples fato de que, apesar dos valores r_1 e r_2 serem soluções para a equação do potencial, temos, em certos casos, a impossibilidade dos mesmos formarem triângulos (pois não obedecem a condição $r_1 + r_2 > 1 > |r_1 - r_2|$). Ou seja, ao escrever a Eq. (3.44),

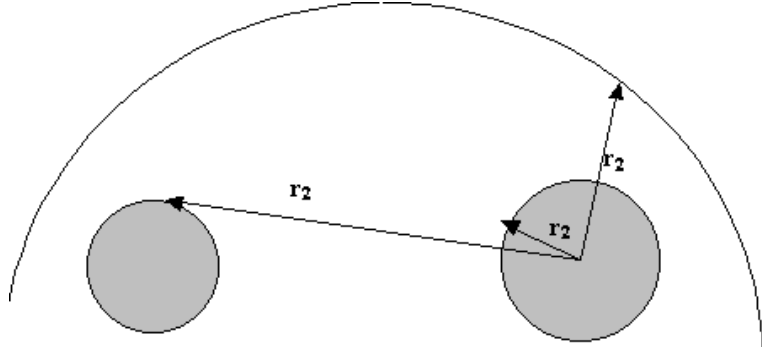


Figura 3.9: Esquema representando a descontinuidade nos intervalos da variável r_2

tendo r_1 e r_2 como variáveis independentes, ganhamos na simplicidade da solução, mas perdemos na exatidão dos intervalos que, além de satisfazerem a condição de conduzir a raízes reais para a Eq. (3.44), deverão encaixar-se na restrição

$$r_1 + r_2 > 1 > |r_1 - r_2|. \quad (3.75)$$

Com o objetivo de identificar computacionalmente qual(is) subintervalo(s) de r_2 satisfazem a Eq. (3.75), construímos o seguinte algoritmo

$$t(\Psi, \mu, r_2) = \begin{cases} r(\Psi, \mu, r_2)_1 & \text{se } r(\Psi, \mu, r_2)_1 + r_2 > 1 > |r(\Psi, \mu, r_2)_1 - r_2| \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases} \quad (3.76)$$

$$T(\Psi, \mu, r_2) = \begin{cases} r(\Psi, \mu, r_2)_2 & \text{se } r(\Psi, \mu, r_2)_2 + r_2 > 1 > |r(\Psi, \mu, r_2)_2 - r_2| \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases} \quad (3.77)$$

As funções $t(\Psi, \mu, r_2)$ e $T(\Psi, \mu, r_2)$ foram criadas com o objetivo de verificar para cada par r_1 e r_2 a condição $r_1 + r_2 > 1 > |r_1 - r_2|$.

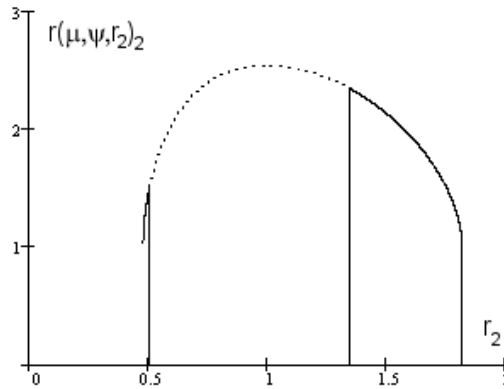


Figura 3.10: Esquema indicando subintervalos reais, a linha contínua (ou pontilhada) corresponde aos valores de $r(\mu, \Psi, r_2)_2$ (eixo y) e r_2 (eixo x) que satisfazem (ou não) a condição geométrica.

A curva pontilhada representa o subintervalo de $r(\mu, \Psi, r_2)_2$ e r_2 , que ambos satisfazem

a Eq. (3.44), mas não a restrição (3.75), ao passo que a região contínua corresponde ao subintervalo que satisfaz a ambas condições. Para $r(\mu, \Psi, r_2)_1$ temos a Fig. 3.11

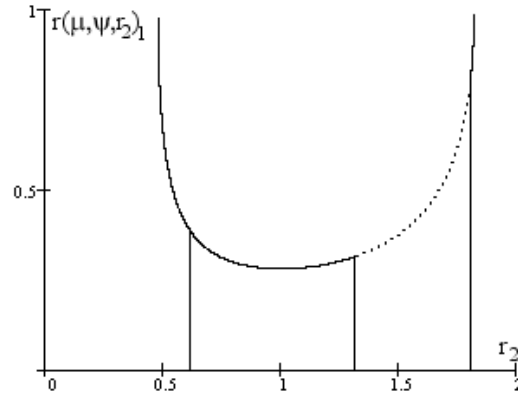


Figura 3.11: Esquema indicando subintervalos reais, a linha contínua (ou pontilhada) corresponde aos valores de $r(\mu, \Psi, r_2)_1$ (eixo y) e r_2 (eixo x) que satisfazem (ou não) a condição geométrica.

Para o potencial tratado em nosso exemplo, temos uma aparente continuidade dos subintervalos, uma vez que finalizado o subintervalo real em $r(\mu, \Psi, r_2)_1$ inicia-se o em $r(\mu, \Psi, r_2)_2$. Temos que lembrar que o potencial especificado (1,9353295) corresponde ao lobo de Roche para $\mu = 0,25$ e conseqüentemente esperamos uma certa continuidade nos valores de r_2 que nos conduziram ora a soluções apenas em $r(\mu, \Psi, r_2)_1$ e em outros casos a soluções apenas em $r(\mu, \Psi, r_2)_2$.

O problema agrava-se a medida que aumentamos o potencial, conservando o mesmo valor para μ , pois, nestes casos, as curvas geradas serão constituídas de duas ovas independentes e, quanto maior o potencial, mais próxima dos centro das estrelas estarão as mesmas. Para estes casos, os subintervalos reais serão cada vez menores, o que acarretará em um trabalho computacional maior para gerar, com nitidez, as curvas equipotenciais.

Para $\mu = 0,25$ e $\Psi = 2,5$ teríamos a curva da Fig. 3.12, que foi gerada com o mesmo intervalo entre os valores de r_2 que o da Fig. 3.8, mas neste caso a curva da estrela 2 está menos definida do que no caso anterior. Se inspecionarmos o que ocorreu com os subintervalos, temos a Fig. 3.13, para os valores de $r(\mu, \Psi, r_2)_1$, e a Fig. 3.14, para os valores de $r(\mu, \Psi, r_2)_2$.

Atráves dessas figuras, vemos que à medida que aumentamos o potencial, os subintervalos reais estão cada vez menores e dessa modo as curvas geradas para esses potenciais cada vez menos nítidas, uma vez que a divisão dos valores de r_2 é feita sobre o intervalo determinado pela Eq. (3.56).

No presente trabalho não foi possível encontrar os subintervalos reais de um modo analítico, mas poderíamos buscar na literatura métodos de aproximação numérica que nos permitisse determiná-los. Uma vez que decidimos usar métodos aproximados, é melhor desenvolvê-los de maneira a resolver diretamente a equação do potencial.

A vantagem de trabalhar diretamente na equação do potencial é que poderíamos (dados μ e Ψ) estipular o valor do raio para cada direção θ e ϕ especificada (ao contrário do método anterior que só nos informava, de uma maneira imprecisa, os intervalos de r_2 e

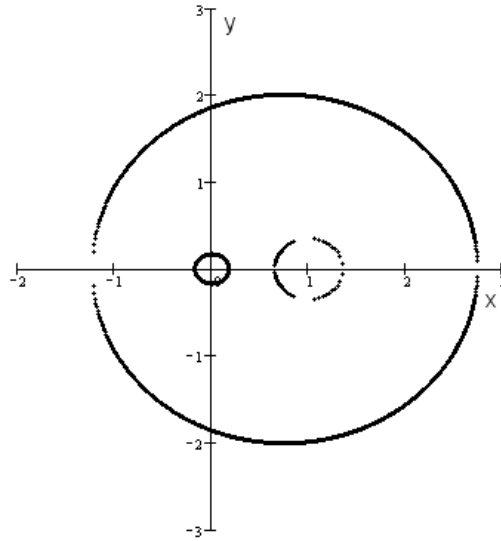


Figura 3.12: Projeção no plano xy da superfície com $\Psi = 2,5$ e $\mu = 0,25$

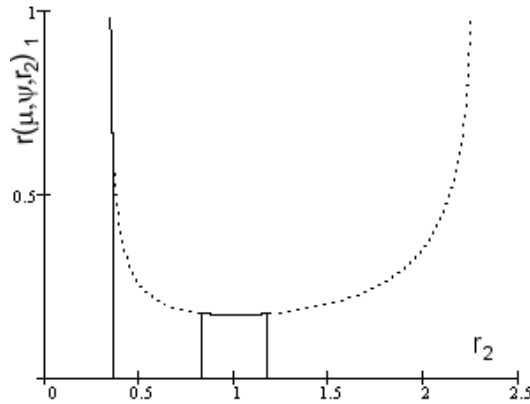


Figura 3.13: Esquema indicando subintervalos reais, a linha contínua (ou pontilhada) corresponde aos valores de $r(\mu, \Psi, r_2)_1$ (eixo y) e r_2 (eixo x) que satisfazem (ou não) a condição geométrica.

seus respectivos r_1).

Existem vários métodos aproximados que poderíamos usar para resolver a equação do potencial (método de Newton, das aproximações sucessivas, das cordas, secante, etc.). Mas existe um método de segunda ordem denominado método de Laguerre cujas referências sobre sua eficiência são promissoras e é reconhecido por alguns autores (Press *et al.*, 1992) como um dos mais poderosos meios de se encontrar as raízes de uma equação polinomial. Sua convergência é rápida, poderosa e independente da distância entre o valor estipulado e a raiz desejada. Também é freqüentemente utilizado como método de resolução das equações polinomiais em diversos softwares matemáticos (Mathcad, mathematica). Por essas razões, resolvemos estudá-lo e implementá-lo no nosso problema.

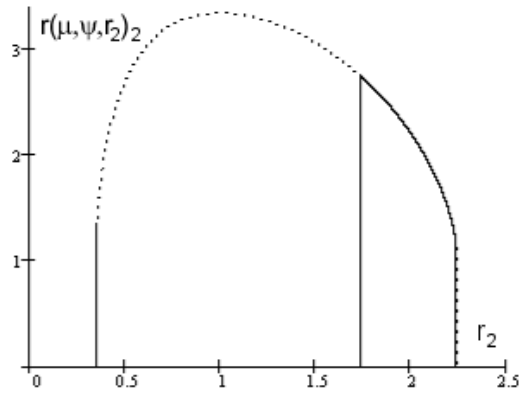


Figura 3.14: Esquema indicando subintervalos reais, a linha contínua (ou pontilhada) corresponde aos valores de $r(\mu, \Psi, r_2)_2$ (eixo y) e r_2 (eixo x) que satisfazem (ou não) a condição geométrica.

3.5.1 Método de Newton

Um dos métodos de aproximação numérica que faremos uso no nosso trabalho é o conhecido método de Newton, nesta sessão nos restringiremos apenas a esplanção do método sem contudo entrarmos em detalhes quanto a sua eficiência e suas limitações na resolução da equação do potencial, no capítulo 6 faremos essa discussão. A idéia principal do método consiste em usar a reta tangente à curva no ponto $x = x_1$ tomando-o como ponto de partida para uma melhor aproximação $x = x_2$. Começando com a aproximação $x = x_1$, desenhamos a reta tangente à curva no ponto $(x_1, f(x_1))$.

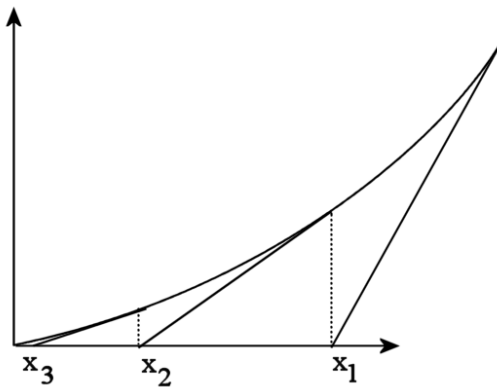


Figura 3.15: Projeção de superfície crítica com rotação constante. Representação gráfica do método de Newton.

Essa reta intercepta o eixo x no ponto $x = x_2$, que, em geral, é uma melhor aproximação do que x_1 . Repetindo esse processo, usamos a reta tangente em $(x_2, f(x_2))$ para obter o ponto $x = x_3$, que é uma aproximação ainda melhor. A Figura 3.15 ilustra a

idéia como procedimento geométrico, mas para aplicá-la nos cálculos precisamos de uma fórmula de recorrência. Essa fórmula pode ser obtida facilmente como se segue.

O coeficiente angular da primeira tangente é $f'(x_1)$. Se considerarmos essa reta como sendo determinada pelos pontos $(x_2, 0)$ e $(x_1, f(x_1))$, então o coeficiente angular será:

$$\frac{0 - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \text{logo} \quad \frac{0 - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1).$$

Essa equação leva a

$$-f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x_1) \quad \text{ou} \quad (x_2 - x_1) = \frac{-f(x_1)}{f'(x_1)}$$

logo,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Dessa maneira, partindo de nossa primeira aproximação x_1 obteremos a segunda aproximação x_2 por meio de (2), esta, por sua vez, leva a uma terceira aproximação x_3 , dada por:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

e assim criarmos a recorrência:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

3.5.2 Método de Laguerre

Seja

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) \quad (3.78)$$

um polinômio de grau n , cujas raízes são: x_1, x_2, x_3, x_n . Considere a expressão

$$S(\lambda) = \left[\frac{\lambda - x_1}{x - x_1} \right]^2 + \dots + \left[\frac{\lambda - x_n}{x - x_n} \right]^2 = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\lambda - x_k}{x - x_k} \right]^2, \quad (3.79)$$

onde x é um número e λ um parâmetro real. Inicialmente vamos supor que poderíamos, de algum modo, determinar o valor de $S(\lambda)$ sem conhecer as raízes do polinômio (mais tarde veremos como isso é possível). Se excluirmos os casos onde todas as raízes do polinômio são iguais, $S(\lambda)$ não admite raízes reais porque não seria possível anular simultaneamente todas as partes do somatório.

Considere a equação do segundo grau em X ,

$$\Phi(X) = \left[S(\lambda) - \left[\frac{\lambda - X}{x - X} \right]^2 \right] (x - X)^2 = (x - X)^2 S(\lambda) - (\lambda - X)^2 = 0. \quad (3.80)$$

Se $\lambda = x$, a equação terá duas raízes reais e iguais, $X = x$, pois $S(\lambda) = n$ e assim $\Phi(X) = (x - X)^2(n - 1) = 0$

Se $x \neq \lambda$, temos duas possibilidades: $x \neq x_j$ ou $x = x_j$. Das duas maneiras, teremos duas raízes reais e distintas X_1 e X_2 para a Eq. (3.80) com certas propriedades peculiares, a saber

$$\Phi(x) < 0 \quad \text{pois} \quad \Phi(x) = -(\lambda - x)^2 \quad (3.81)$$

e

$$\Phi(x_j) > 0, \quad (3.82)$$

sendo x_j a j -ésima raiz da Eq. (3.80), pois

$$\left[S(\lambda) - \left[\frac{\lambda - x_j}{x - x_j} \right]^2 \right] = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\lambda - x_k}{x - x_k} \right]^2 \quad (3.83)$$

com $k \neq j$ e, com isso,

$$\Phi(X) = \left[\sum_{k=1}^n \left[\frac{\lambda - x_k}{x - x_k} \right]^2 \right] (x - x_j)^2 > 0. \quad (3.84)$$

Dependendo do valor de x escolhido podemos ter três situações distintas

$$x < X_2 < x_1 < \cdots < x_n < X_1 \quad \text{se } x < x_1, \quad (3.85)$$

$$X_2 < x_1 < \cdots < x_n < X_1 < x \quad \text{se } x > x_n, \quad (3.86)$$

$$x_p < X_1 < x < X_2 < x_{p+1} \quad \text{se } x_p < x < x_{p+1}. \quad (3.87)$$

Nas equações acima, independentemente do valor de x escolhido, as raízes da Eq. (3.80) estarão sempre mais próximas de alguma raiz do polinômio (3.78) do que x .

A fim de obtermos uma maneira de encontrar $s(\lambda)$ em função de $\lambda - x$, $f(x)$ e suas derivadas temos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{x - x_j} \right] \quad (3.88)$$

e

$$\frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{[f(x)]^2} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{(x - x_j)^2} \right], \quad (3.89)$$

onde $f'(x)$ e $f''(x)$ correspondem às derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente, de f em relação a x . Temos ainda

$$\left[\frac{\lambda - x_j}{x - x_j} \right]^2 = \left[\frac{\lambda - x}{x - x_j} \right]^2 + 2 \left[\frac{\lambda - x}{x - x_j} \right] + 1 \quad (3.90)$$

e, portanto,

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{\lambda - x_j}{x - x_j} \right]^2 = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\lambda - x}{x - x_j} \right]^2 + 2 \sum_{j=1}^n \left[\frac{\lambda - x}{x - x_j} \right] + n. \quad (3.91)$$

Substituindo a Eq. (3.91) pelas relações (3.88) e (3.89), temos

$$S(\lambda) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\lambda - x_j}{x - x_j} \right]^2 = (\lambda - x)^2 \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{[f(x)]^2} + 2(\lambda - x) \frac{f'(x)}{f(x)} + n. \quad (3.92)$$

Esse resultado é de grande importância, uma vez que podemos encontrar o valor de $S(\lambda)$ sem necessidade de saber as raízes da equação polinomial. Fazendo $(\lambda - x) = y$ e substituindo na Eq. (3.80), temos

$$[f(x)]^2 \Phi(X) = y^2(x - X)^2 \left[(f'(x))^2 - f(x)f''(x) \right] + 2y(x - X)^2 f'(x)f(x) + [n(x - X)^2 - (\lambda - X)^2] [f(x)]^2. \quad (3.93)$$

$$(\lambda - X)^2 = [(\lambda - x) + (x - X)]^2 = y^2 + 2y(x - X) + (x - X)^2, \quad (3.94)$$

a Eq. (3.93) fica

$$[f(x)]^2 \Phi(X) = y^2 \left((x - X)^2 \left[(f'(x))^2 - f(x)f''(x) \right] - [f(x)]^2 \right) + 2y(x - X)f(x) [(x - X)f'(x) - f(x)] + (n - 1)(x - X)^2 [f(x)]^2. \quad (3.95)$$

Fazendo $\Phi(X) = 0$, temos uma equação quadrática em função da variável y , cujas raízes são funções contínuas do parâmetro $(x - X)$. Note que, neste caso, X representa as raízes da parábola $\Phi(X)$. Para valores pequenos desse parâmetro, teremos duas raízes (y_1 e y_2) para cada valor de $(x - X)$ escolhido. Deste modo, temos duas parábolas que poderão ser construídas pela Eq. (3.95), as quais possuem X como raiz comum. À medida que X afasta de x , estaremos nos aproximando de uma das raízes do polinômio e, pelas propriedades já discutidas anteriormente, X jamais poderá assumir o valor de uma dessas raízes (pois $\Phi(x_j) > 0$). Dessa maneira, em algum ponto teremos soluções complexas para as raízes (y_1 e y_2). Nosso objetivo, portanto, será encontrar o máximo valor de $(x - X)$ tal que y seja real. Tal solução pode ser obtida se buscarmos os valores de X tais que conduzam o discriminante da equação quadrática (3.95) a zero. Assim

$$y^2 \left((x - X)^2 \left[(f'(x))^2 - f(x)f''(x) \right] - [f(x)]^2 \right) + 2y(x - X)f(x) [(x - X)f'(x) - f(x)] + (n - 1)(x - X)^2 [f(x)]^2 = 0, \quad (3.96)$$

$$\Delta = [2(x - X)f(x) [(x - X)f'(x) - f(x)]]^2 - 4((x - X)^2 \left[(f'(x))^2 - f(x)f''(x) \right] - [f(x)]^2)(n - 1)(x - X)^2 [f(x)]^2 = 0. \quad (3.97)$$

Simplificando a expressão (3.97) e dividindo por $(x - X)^2$, temos a equação de segundo grau completa em $(x - X)$

$$[4f(x)^2 f'(x)^2 (2 - n) + 4f(x)^3 f''(x)(n - 1)] (x - X)^2 - 8f(x)^3 f'(x)(x - X) + 4f(x)^4 n = 0. \quad (3.98)$$

Usando algum algebrismo,

$$(x - X) = \frac{8f(x)^3 \left[f'(x) \pm \sqrt{f'(x)^2 (n - 1)^2 - n(n - 1)f''(x)f(x)} \right]}{8f(x)^2 [(2 - n)f'(x)^2 + (n - 1)f''(x)f(x)]}. \quad (3.99)$$

Multiplicando a Eq. (3.99), em cima e em baixo, por

$$f'(x) \mp \sqrt{f'(x)^2(n-1)^2 - n(n-1)f''(x)f(x)},$$

temos

$$\frac{nf(x) [(2-n)f'(x)^2 + (n-1)f''(x)f(x)]}{[(2-n)f'(x)^2 + (n-1)f''(x)f(x)] \left[f'(x) \mp \sqrt{f'(x)^2(n-1)^2 - n(n-1)f''(x)f(x)} \right]}, \quad (3.100)$$

e, portanto,

$$(x - X) = \frac{nf(x)}{f'(x) \mp \sqrt{f'(x)^2(n-1)^2 - n(n-1)f''(x)f(x)}}. \quad (3.101)$$

Fazendo $H(x) = f'(x)^2(n-1)^2 - n(n-1)f''(x)f(x)$, o valor máximo de X será

$$X = x - \frac{nf(x)}{f'(x) \mp \sqrt{H(x)}}. \quad (3.102)$$

A partir da Eq. (3.102), podemos encontrar a maior distância possível que X pode estar em relação ao valor aleatório x escolhido. A fim de construirmos um método iterativo, devemos estipular o próximo valor $x_1 = x - \frac{nf(x)}{f'(x) \mp \sqrt{H(x)}}$ e, assim, procurar o novo valor máximo que X poderá assumir. Com isso, podemos criar a recorrência

$$x_{n+1} = x_n - \frac{nf(x_n)}{f'(x_n) \mp \sqrt{H(x_n)}}. \quad (3.103)$$

Com o objetivo de esclarecer melhor o método apresentado, e de definir o critério para a escolha do sinal na expressão (3.103) em cada iteração subsequente, considere o polinômio $f(x) = x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 10x - 21$, cujas raízes são $-1, 1, 3$ e 7 . Vamos supor que tenhamos estipulado nosso valor inicial $x = 2$ e queremos os valores extremos de X . Usando a Eq. (3.102) temos $X_1 = 1,23206$ e $X_2 = 2,80937$. Portanto, para qualquer valor de X entre essa faixa de valores temos $\Delta > 0$ e, conseqüentemente, podemos construir duas parábolas que terão pelo menos uma das raízes iguais ao valor escolhido. Como exemplo, $X = 1.5 \rightarrow y_1 = -2,63501$ e $y_2 = 0,61578$. Substituindo os valores de y encontrados na solução da Eq. (3.95), os gráficos correspondentes são os mostrados na Fig. 3.16, onde a parábola contínua corresponde a y_1 e a pontilhada a y_2 .

Para $X = 2,5 \rightarrow y_1 = -0,56486$ e $y_2 = 2,87255$, e as parábolas construídas ao substituir esse valores em (3.95) são as da Fig. 3.17, onde, novamente, a parábola contínua corresponde a y_1 e a pontilhada a y_2 .

Nos limites $X = 1,23206$ e $2,80937$ os discriminantes serão nulos e, portanto, temos apenas uma parábola para cada um desses valores

$$X = 1,23206 \rightarrow y_1 \quad \text{e} \quad y_2 = 2,56661,$$

$$X = 2,80937 \rightarrow y_1 \quad \text{e} \quad y_2 = -2,19161.$$

Para valores de X fora desse intervalo estabelecido ($1,23206 < X < 2,80937$), o discriminante será menor que zero e, portanto, os valores de y_1 e y_2 serão complexos. Com

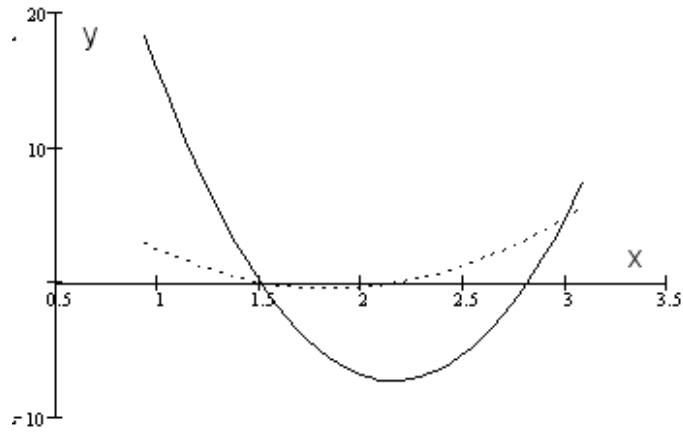


Figura 3.16: Parábolas construídas com $X = 1,5$ e $y_1 = -2,63501$ (curva contínua) $y_2 = 0,61578$ (curva pontilhada)

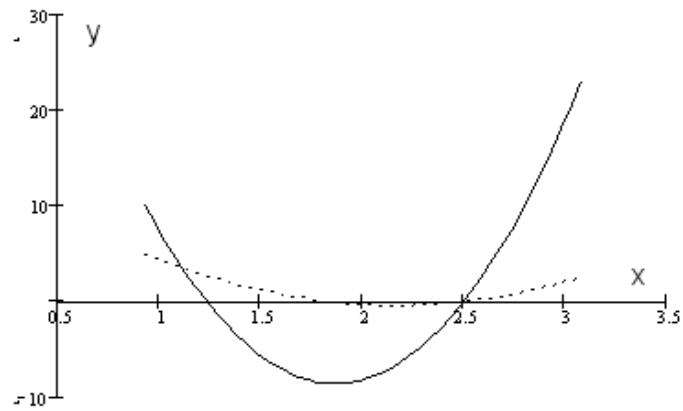


Figura 3.17: Parábolas construídas com $X = 2,5$ e $y_1 = -0,56486$ (curva pontilhada) $y_2 = 2,87255$ (curva contínua)

o propósito de estabelecer um processo iterativo devemos, inicialmente, definir qual das duas raízes possíveis desejamos nos aproximar à esquerda (ou à direita) de x , e tomar o menor (ou o maior) valor entre $x_n - \frac{nf(x_n)}{f'(x_n) + \sqrt{H(x_n)}}$ e $x_n - \frac{nf(x_n)}{f'(x_n) - \sqrt{H(x_n)}}$ em cada iteração, garantindo a aproximação. No exemplo acima, se tomarmos $x = 2$ como valor inicial, temos

$$X = 2 \rightarrow \begin{cases} 1,23206 \rightarrow \begin{cases} 1,00312 \rightarrow \begin{cases} 1 \\ 1,00936 \end{cases} \\ 1,65599 \end{cases} \\ 2,80937 \rightarrow \begin{cases} 2,46929 \\ 2,99894 \rightarrow \begin{cases} 2,99682 \\ 3 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ou seja, para cada valor de x temos dois extremos de X , a direita ou a esquerda de x . Desse modo, se forem selecionados apenas os menores (ou maiores) valores para x_n , na terceira iteração, encontraremos $x = 1$ ($x = 3$), ambas soluções do polinômio escolhido.

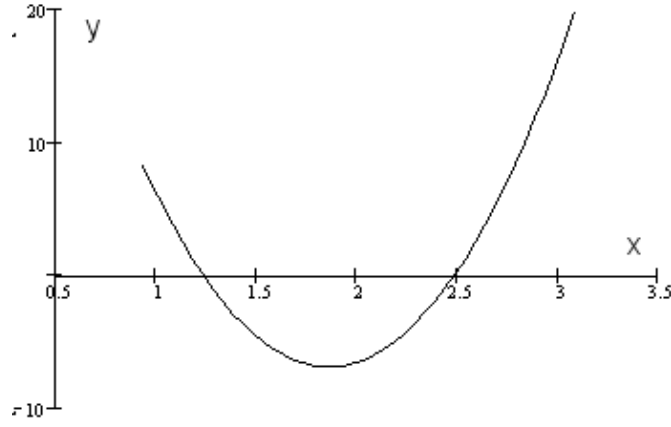


Figura 3.18: Parábola construída com: $X = 1,23206 \rightarrow y_1$ e $y_2 = 2,56661$

3.5.3 Aplicação do método de Laguerre na equação do potencial

A equação do potencial do sistema em rotação não sincronizada é dada pela Eq. (3.19), que repetimos abaixo

$$\Psi = \frac{\mu}{r} + \frac{(1-\mu)}{\sqrt{r^2 - 2r\alpha\beta + 1}} + \frac{1}{2} [r^2\alpha^2 - 2(1-\mu)r\alpha\beta + (1-\mu)^2]$$

onde $\alpha = \sin \theta$ e $\beta = \cos \phi$. Para podermos aplicar o método de Laguerre na equação acima devemos expandi-la em forma de polinômio (uma vez que o método aplica-se na resolução de polinômios). Assim, conforme as Eqs. (3.19) a (3.23), temos

$$[2\mu + r^3\alpha^2 - 2r^2\alpha\beta(1-\mu) + (1-\mu)^2r - 2\Psi r]^2 [r^2 - 2r\alpha\beta + 1] - 4(1-\mu)^2r^2 = 0. \quad (3.104)$$

Desse modo, foram estabelecidas as seguintes relações

$$w(\mu, r, \theta, \phi, \Psi) = [2\mu + r^3\alpha^2 - 2r^2\alpha\beta(1-\mu) + (1-\mu)^2r - 2\Psi r]^2 [r^2 - 2r\alpha\beta + 1] - 4(1-\mu)^2r^2, \quad (3.105)$$

$$t(\mu, r, \theta, \phi, \Psi) = \frac{\partial(w(\mu, r, \theta, \phi, \Psi))}{\partial r}, \quad (3.106)$$

$$T(\mu, r, \theta, \phi, \Psi) = \frac{\partial(t(\mu, r, \theta, \phi, \Psi))}{\partial r}, \quad (3.107)$$

$$h(\mu, r, \theta, \phi, \Psi) = [n-1] [(n-1)t^2(\mu, r, \theta, \phi, \Psi) - nw(\mu, r, \theta, \phi, \Psi)T(\mu, r, \theta, \phi, \Psi)]. \quad (3.108)$$

Como a expansão da expressão (3.23) nos conduzirá a uma equação de oitavo grau, devemos tomar $n = 8$. Apesar de encontrar as soluções da equação do potencial através das raízes do polinômio correspondente, não temos necessidade de expandir e organizar o polinômio em potências decrescentes de r (como foi feito na primeira parte do nosso trabalho), pois podemos encontrar as derivadas de primeira e segunda ordem de $w(\mu, r, \theta, \phi, \Psi)$ (a sua função equivalente na primeira parte do trabalho era $s(\Psi, n, \theta, \phi, \mu)$), aplicando a regra do produto na mesma.

Para construir a superfície equipotencial devemos dividir os intervalos θ e ϕ em η e m divisões, respectivamente, conforme as relações abaixo

$$j = 0, 1 \dots m \quad i = 0, 1 \dots \eta \quad \theta_i = \frac{\pi i}{\eta} \quad \phi_j = \frac{2\pi j}{m}.$$

Desse modo, para cada valor de i e j especificado, junto com os valores de Ψ e μ , temos o polinômio $w(\mu, r, \theta, \phi, \Psi)$ constituído.

Para encontrar o raio, uma vez fornecida as especificações acima, devemos escolher um valor inicial para a nossa aproximação. Uma boa sugestão seria desprezar o segundo e terceiro termo da Eq. (3.19) e, com isso, fazer

$$\Psi = \frac{\mu}{r_0} \rightarrow r_0 = \frac{\mu}{\Psi},$$

onde sabemos que a solução desejada r é maior que r_0 .

Com os valores μ , Ψ , j , i e r_0 , podemos encontrar r através do seguinte algoritmo

$$\rho(r, j, i) = \begin{cases} rr \leftarrow \begin{cases} r - \frac{nw}{t+\sqrt{h}} & \text{se } \frac{nw}{t+\sqrt{h}} > 0 \\ r - \frac{nw}{t-\sqrt{h}} & \text{de outro modo} \end{cases} \\ \text{enquanto } |rr - r| > 0,000001 \\ \begin{cases} r \leftarrow rr \\ rr \leftarrow \begin{cases} r - \frac{nw}{t+\sqrt{h}} & \text{se } \frac{nw}{t+\sqrt{h}} > 0 \\ r - \frac{nw}{t-\sqrt{h}} & \text{de outro modo} \end{cases} \\ rr \end{cases} \end{cases}$$

onde w , t e h são funções de μ , r , θ , ϕ e Ψ . A função $\rho(r, j, i)$ calcula, a partir de r_0 , as próximas iterações $r_1 > r_0$, $r_2 > r_1$, $r_{n+1} > r_n$ de maneira a estabelecer a continuidade do processo enquanto a diferença entre a iteração subsequente e a anterior não for menor que 0,000001.

Deve-se, também, averiguar se a raiz encontrada corresponde a solução da equação do potencial, uma vez que o resultado encontrado refere-se a solução da equação polinomial e não da equação do potencial (sabemos que as raízes da equação do potencial são subconjunto das raízes da equação polinomial). Para exemplificar o que afirmamos, foram construídos os gráficos $[\Psi(\mu, r, \theta, \phi) - \Psi_0]$ e $w(\mu, r, \theta, \phi, \Psi_0)$ onde $\Psi_0 = 2$, $\mu = 0.5$, $\theta = \pi/2$ e $\phi = 0$, mostrados nas Figs. 3.19 e 3.20. No gráfico $[\Psi(\mu, r, \theta, \phi) - \Psi_0]$, em função de r , Fig. 3.19, vemos que $r=0,5$ corresponde a solução desejada.

A Fig. 3.20, que mostra $w(\mu, r, \theta, \phi, \Psi_0)$ em função de r , possui como raízes os valores 0,19426 e 0,5, respectivamente, ou seja, a segunda raiz do polinômio corresponde à raiz encontrada na equação do potencial. Mesmo que o valor inicial $r_0 = \frac{\mu}{\Psi_0} = 0,25$ seja superior ao valor da primeira raiz (0,19426) e que, pela rotina implementada no método de Laguerre, encontremos somente soluções superiores ao valor inicial, não podemos garantir que a raiz encontrada em $\rho(r_0, j, i)$ corresponda a primeira solução da equação do

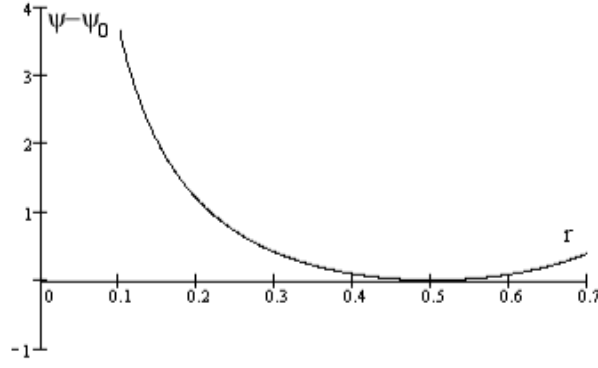


Figura 3.19: Gráfico $\Psi(\mu, r, \theta, \phi) - \Psi_0$ versus r com $\Psi_0 = 2, \mu = 0,5, \theta = \pi/2$ e $\phi = 0$

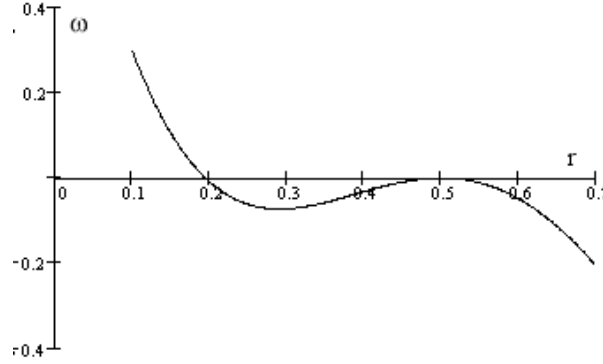


Figura 3.20: Gráfico $w(\mu, r, \theta, \phi, \Psi_0)$ versus r com $\Psi_0 = 2, \mu = 0,5, \theta = \pi/2$ e $\phi = 0$

potencial. Para contornar essa dificuldade, foi introduzido o seguinte algoritmo

$$z(j, i) = \begin{cases} rr \leftarrow \begin{cases} \rho(r, j, i) & \text{se } |\Psi(\mu, \rho(r, j, i), \theta_k, \phi_j, \chi)| < 0,00000001 \\ \rho(\rho(r, j, i) + 0.01, j, i) & \text{de outro modo} \end{cases} \\ \text{enquanto } |\Psi(\mu, \rho(rr, j, i), \theta_i, \phi_j, \chi)| > 0,00000001 \\ \left\{ \begin{array}{l} rrr \leftarrow rr \\ rr \leftarrow \begin{cases} rrr & \text{se } |\Psi(\mu, \rho(rrr, j, i), \theta_i, \phi_j, \chi)| < 0,00000001 \\ \rho(rrr + 0.01, j, i) & \text{de outro modo} \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$

Com isso, podemos assegurar que, se a primeira raiz encontrada pelo método não corresponder à solução da equação do potencial, temos garantida a continuidade do processo até que se encontre alguma raiz do polinômio que corresponda a primeira solução da equação do potencial.

Na prática, verificamos que os valores escolhidos para $r_0 = \frac{\mu}{\chi}$, estão além da primeira raiz do polinômio e que a segunda raiz (a primeira encontrada pelo método implementado) corresponde à solução desejada (a primeira raiz da equação do potencial) e, portanto, as soluções $\rho(r_0, j, i)$ são equivalentes às soluções $z(j, i)$.

Uma vez estabelecido o raio para cada direção θ e ϕ (através dos valores de k e j), podemos construir a superfície equipotencial especificando a localização x, y e z para cada raio encontrado. Assim, temos

$$X_{j,i} = z(j, i) \operatorname{sen} \theta_i \cos \phi_j \quad Y_{j,i} = z(j, i) \operatorname{sen} \theta_i \operatorname{sen} \phi_j \quad Z_{j,i} = z(j, i) \cos \theta_i.$$

Para construir a superfície, dividimos o ângulo θ em 20 intervalos iguais (fazendo $\eta=20$ temos $\theta_i=0, \frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{19}, \dots, \pi$) e para cada θ especificado dividimos o ângulo ϕ em 40 partes (fazendo $m=40$ temos $\phi_j=0, \frac{2\pi}{40}, \frac{2\pi}{39}, \dots, 2\pi$). Com isso, temos a superfície:

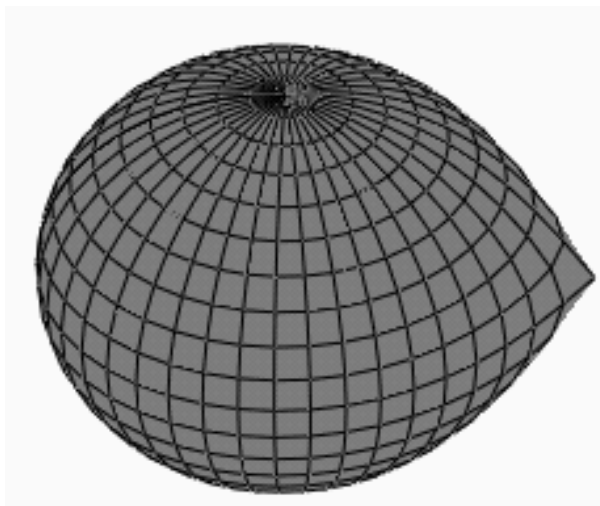


Figura 3.21: Superfície equipotencial crítica

3.6 Discussão geral sobre rotação sincronizada:

Foram abordados, neste capítulo, três métodos de solução para a equação do potencial. O primeiro foi utilizar a função `polyroots`, algoritmo construído no `mathcad`, para resolver a equação polinomial gerada pela equação do potencial. Tal procedimento, apesar de eficiente, não permite um controle sobre a precisão das raízes e tão pouco do procedimento matemático utilizado. O método da solução “exata”, o segundo, apesar de sua precisão inquestionável e da clareza na metodologia utilizada, torna-se computacionalmente inviável, devido à imprecisão nos intervalos reais de r_2 . Já o método de Laguerre, apesar de ser um método de aproximação, possui excelentes referências na literatura, sendo citado diversas vezes como um dos métodos mais poderosos e de rápida convergência para resolução de polinômios cujas raízes são reais e simples.

O único método que será utilizado em conjunto com o de Laguerre é o método de Newton. Sua convergência não é tão rápida quanto ao método de Laguerre, mas possui a vantagem de ser computacionalmente simples e de ação direta sobre a equação do potencial, ou seja, podemos trabalhar diretamente na equação do potencial e não em um polinômio derivado dela.

Por essa razão, usaremos a combinação acima para resolver o problema central do presente trabalho: a rotação não sincronizada. Os métodos anteriores, apesar de serem de fácil adaptação para o potencial não sincronizado, não serão mais utilizados por apresentarem limitações em sua eficiência.

Capítulo 4

Rotação Não Sincronizada:

A equação do potencial da rotação não sincronizada (Limber 1963) é dada por

$$\Psi = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \omega^2 r_{01} x_1 + \frac{\Omega^2 r_{1\Omega}^2}{2}, \quad (4.1)$$

onde

r_1 e r_2 são as distâncias dos centros de massa das estrelas 1 e 2, respectivamente, ao ponto em questão.

ω é a velocidade angular (orbital) do sistema.

r_{01} é a distância do centro de massa do sistema ao da estrela 1.

$r_{1\Omega}$ é a projeção de r_1 no plano perpendicular ao vetor ω .

$r_{0\omega}$ é a distância do centro de massa do sistema a projeção do ponto no plano da órbita.

Ω é a velocidade angular de rotação da estrela 1, medido por um referencial inercial, em torno do seu centro de massa.

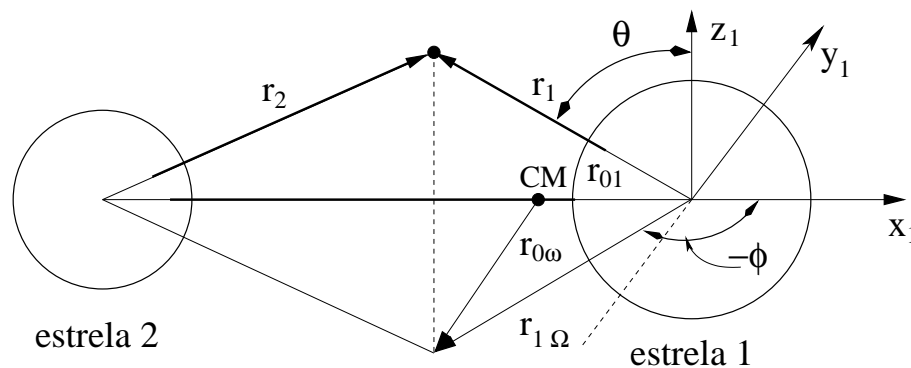


Figura 4.1: Configuração das estrelas no caso da rotação não-sincronizada.

Consideraremos na equação do potencial não sincronizado que as velocidades angulares ω e Ω sejam paralelas. Como $r_{01} = 1 - \mu$, temos $\Psi = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \omega^2(1 - \mu)x_1 + \frac{\Omega^2 r_{1\Omega}^2}{2}$. Acrescentando e isolando o termo $\frac{\omega^2 r_{1\Omega}^2}{2}$, e fazendo $x = r_{1\Omega} \cos \theta$, temos

$$\Psi = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \frac{(\Omega^2 - \omega^2) r_{1\Omega}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} [r_{1\Omega}^2 + 2(1 - \mu)r_{1\Omega} \cos \theta]. \quad (4.2)$$

Acrescentando o termo constante $\frac{(1-\mu)^2 \omega^2}{2}$ à equação do potencial,

$$\Psi = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \frac{(\Omega^2 - \omega^2) r_{1\Omega}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} [r_{1\Omega}^2 + 2(1 - \mu)r_{1\Omega} \cos \theta + (1 - \mu)^2]. \quad (4.3)$$

Como $r_{0\omega}^2 = r_{1\Omega}^2 + 2(1 - \mu)r_{1\Omega} \cos \theta + (1 - \mu)^2$, temos

$$\Psi = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \frac{(\Omega^2 - \omega^2) r_{1\Omega}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} r_{0\omega}^2. \quad (4.4)$$

Fazendo as mesmas considerações do caso sincronizado,

$$G = 1, \quad \omega = 1, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad r_1 = r$$

temos a equação do potencial efetivo,

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{\mu}{r} + \frac{(1 - \mu)}{\sqrt{r^2 - 2r \sin \theta \cos \phi + 1}} + \frac{(\Omega^2 - 1) r^2 \sin^2 \theta}{2} + \\ &\quad \frac{1}{2} [r^2 \sin^2 \theta + 2(1 - \mu)r \sin \theta \cos \phi + (1 - \mu)^2], \end{aligned} \quad (4.5)$$

que pode ser simplificada, assumindo a forma

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{\mu}{r} + \frac{(1 - \mu)}{\sqrt{r^2 + 2r \sin \theta \cos \phi + 1}} + \\ &\quad \frac{1}{2} [\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta + 2(1 - \mu)r \sin \theta \cos \phi + (1 - \mu)^2]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para a implementação do método de Laguerre, devemos expandir a equação do potencial na forma

$$\begin{aligned} \frac{-(1 - \mu)}{\sqrt{r^2 + 2r \sin \theta \cos \phi + 1}} &= \frac{\mu}{r} - \Psi + \\ &\quad \frac{1}{2} [\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta + 2(1 - \mu)r \sin \theta \cos \phi + (1 - \mu)^2]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

cuja resolução requer construção das funções dadas pelas Eqs. (4.8), (4.9), (4.10), (4.11) e (4.12), que são análogas às Eqs. (3.19), e de (3.105) a (3.108).

$$\begin{aligned} \Psi(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega) &= \frac{\mu}{r} + \frac{(1 - \mu)}{\sqrt{r^2 + 2r \sin \theta \cos \phi + 1}} + \\ &\quad \frac{1}{2} [\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta + 2(1 - \mu)r \sin \theta \cos \phi + (1 - \mu)^2] - \chi, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde χ é o valor do potencial desejado;

$$w(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega) = \frac{[2\mu + \Omega^2 r^3 \sin^2 \theta + 2(1 - \mu)r^2 \sin \theta \cos \phi + (1 - \mu)^2 r - 2\Psi r]^2}{[r^2 + 2r \sin(\theta) \cos(\phi) + 1] - 4(1 - \mu)^2 r^2}, \quad (4.9)$$

onde a função $w(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega)$ representa o polinômio e suas respectivas derivadas;

$$t(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega) = \frac{\partial}{\partial r} w(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega), \quad (4.10)$$

$$T(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega) = \frac{\partial}{\partial r} t(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega). \quad (4.11)$$

Com essas funções, podemos construir a função

$$h(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega) = [n - 1] [(n - 1)t^2(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega) - nw(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega)T(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega)]. \quad (4.12)$$

A rotina para implementação do método é idêntica à apresentada na rotação sincronizada, e, com isso temos

$$\rho(r, j, i, \Omega) = \begin{cases} rr \leftarrow \begin{cases} r - \frac{nw}{t + \sqrt{h}} & \text{se } \frac{nw}{t + \sqrt{h}} > 0 \\ r - \frac{nw}{t - \sqrt{h}} & \text{de outro modo} \end{cases} \\ \text{enquanto } |rr - r| > 0,000001 \\ \begin{cases} r \leftarrow rr \\ rr \leftarrow \begin{cases} r - \frac{nw}{t + \sqrt{h}} & \text{se } \frac{nw}{t + \sqrt{h}} > 0 \\ r - \frac{nw}{t - \sqrt{h}} & \text{de outro modo} \end{cases} \\ rr \end{cases} \end{cases}$$

e

$$z(r, j, i, \Omega) = \begin{cases} rr \leftarrow \begin{cases} \rho(r, j, i, \Omega) & \text{se } |\Psi(\mu, \rho(r, j, i, \Omega), \theta_i, \phi_j, \chi, \Omega)| < 0,00000001 \\ \rho(\rho(r, j, i, \Omega) + 0,01, j, i, \Omega) & \text{de outro modo} \end{cases} \\ \text{enquanto } |\Psi(\mu, \rho(rr, j, i, \Omega), \theta_i, \phi_j, \chi, \Omega)| > 0,00000001 \\ \begin{cases} rrr \leftarrow rr \\ rr \leftarrow \begin{cases} rrr & \text{se } |\Psi(\mu, \rho(rrr, j, i, \Omega), \theta_i, \phi_j, \chi, \Omega)| < 0,00000001 \\ \rho(rrr + 0,01, j, i, \Omega) & \text{de outro modo} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Como antes, além de utilizar o método de Laguerre, faremos uso do método de Newton (as vantagens e desvantagens do método foram abordadas no capítulo anterior e serão

discutidas na parte final desse trabalho). Para implementar o método de Newton foi contruída a função

$$\lambda(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega) = \frac{\partial}{\partial r} \Psi(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega) \quad (4.13)$$

e o procedimento

$$\delta(\mu, r, j, i, \chi, \Omega) = \begin{cases} rr \leftarrow r - \frac{\Psi(\mu, r, \theta_i, \phi_j, \chi, \Omega)}{\lambda(\mu, r, \theta_i, \phi_j, \chi, \Omega)} \\ \text{enquanto } |rr - r| > 0,000001 \\ \left\{ \begin{array}{l} r \leftarrow rr \\ rr \leftarrow r - \frac{\Psi(\mu, r, \theta_i, \phi_j, \chi, \Omega)}{\lambda(\mu, r, \theta_i, \phi_j, \chi, \Omega)} \end{array} \right. \\ rr \end{cases}$$

$$\alpha(\mu, j, i, \chi, \Omega) = \delta \left(\mu, \frac{\mu}{\chi}, j, i, \chi, \Omega \right), \quad \beta(\mu, j, i, \chi, \Omega) = z \left(\mu, \frac{\mu}{\chi}, j, i, \chi, \Omega \right), \quad (4.14)$$

onde $z(\mu, \frac{\mu}{\chi}, j, i, \chi, \Omega)$ é a função que encontra as raízes do polinômio pelo método de Laguerre e $\delta(\mu, \frac{\mu}{\chi}, j, i, \chi, \Omega)$ pelo de Newton. Com as duas funções podemos escolher o método que desejarmos, bastando para isso escrever as equações X, Y e Z em função de α ou β

$$X(\mu, j, i, \chi, \Omega) = \begin{bmatrix} \alpha(\mu, j, i, \chi, \Omega) \\ \beta(\mu, j, i, \chi, \Omega) \end{bmatrix} \text{sen } \theta_i \cos \phi_j, \quad (4.15)$$

$$Y(\mu, j, i, \chi, \Omega) = \begin{bmatrix} \alpha(\mu, j, i, \chi, \Omega) \\ \beta(\mu, j, i, \chi, \Omega) \end{bmatrix} \text{sen } \theta_i \text{sen } \phi_j, \quad (4.16)$$

$$Z(\mu, j, i, \chi, \Omega) = \begin{bmatrix} \alpha(\mu, j, i, \chi, \Omega) \\ \beta(\mu, j, i, \chi, \Omega) \end{bmatrix} \cos \theta_i. \quad (4.17)$$

4.1 Superfícies e curvas equipotenciais

Com o propósito de comparar as curvas equipotenciais geradas pelos métodos discutidos nas sessões precedentes com aquelas obtidas por Limber (1963), encontramos para cada variável μ e Ω , o valor do potencial Ψ que gerasse as curvas equipotenciais no limite de Roche, objeto de estudo do artigo do Limber (1963). Para isso calculamos as raízes da função $\lambda(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega)$, derivada da função $\Psi(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega)$ em relação a r , no ponto $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \pi$ (veja a Eq. 4.13). Para encontrar o Ψ_{lim} , basta introduzir o valor do raio encontrado na equação do potencial $\Psi(\mu, r_{\text{lim}}, \frac{\pi}{2}, \pi, 0, \Omega)$.

Com esse procedimento, calculamos o valor do potencial limite para as combinações entre os valores de μ (0,1 – 0,3 – 0,7 – 0,9) e os de Ω (0 – 1 – 4), contidos na Tabela 4.1, onde listamos as soluções obtidas. Geramos, ainda, para cada valor de μ , as curvas equipotenciais nos planos xy, xz e yz correspondente a cada um dos valores para a velocidade angular Ω .

Tabela 4.1: Valores do potencial crítico para diversos valores de μ (razão das massas, m_2/m_1) e de Ω (velocidade orbital de rotação).

μ	Ψ_{lim}		
	$\Omega=0$	$\Omega=1$	$\Omega=4$
0,1	1,75282	1,79848	2,15482
0,3	1,86881	1,96007	2,70276
0,7	1,77745	1,96007	3,38069
0,9	1,52971	1,79848	3,65191

Para facilitar a comparação de alguns resultados obtidos neste trabalho com os de Limber (1963), utilizamos as definições

$$\Delta r(x_+) = |x_-^*| - x_+^*, \quad (4.18)$$

$$\Delta r(y) = |x_-^*| - y^*, \quad (4.19)$$

$$\Delta r(z) = |x_-^*| - z^*, \quad (4.20)$$

onde $|x_-^*|$, x_+^* , y^* e z^* são as distâncias da origem ao ponto em que a superfície intercepta o eixo x negativo, x positivo, y e z , respectivamente. Os valores encontrados por Limber (1963), juntamente com os nossos resultados, são fornecidos nas Tabelas 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, para as razões de massa, $\mu=0,1, 0,3, 0,7$ e $0,9$, respectivamente, e os valores de $\Omega=0, 4$, e 5 .

Podemos ver que nosso método de encontrar as superfícies concorda integralmente com os resultados de Limber (1963). Essa concordância nos dá segurança que o método está correto e podemos, agora, investigar o efeito dos diversos parâmetros nas superfícies equipotenciais efetivas. Mais ainda, podemos estender as aproximações iniciais para o caso de rotação não sincronizada e diferencial, que será tratado no próximo capítulo desse trabalho.

4.1.1 Crescimento das superfícies equipotenciais:

As Figuras 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 representam as interseções das superfícies equipotenciais com os planos xz , yz e xy para diversos valores de μ e Ω , no limite de Roche. Elas mostram que, à medida que se aumenta o valor de Ω , as superfícies se afastam cada vez mais da configuração esférica. Mostram, ainda, que essas formas dependem também da razão das massas das estrelas componentes do sistema binário. Mas estamos interessados, além dessas superfícies, na avaliação do crescimento das mesmas à medida que se aproximam desse limite.

O interesse de tal avaliação é detectar alguma possível mudança na forma da superfície que seja, de alguma forma, desproporcional à variação do valor do potencial, ou seja, se pequenas mudanças no valor do potencial conduzem a mudanças substanciais na forma das superfícies. Esse problema foi a motivação inicial de nosso trabalho.

Se tais mudanças existem, devemos investigar se elas se referem a um crescimento natural da função $r(\Psi)$, ou se tais mudanças se devem ao problema da inversão da equação do potencial.

Tabela 4.2: Comparação entre os nossos cálculos e os de Limber (1963), para diferentes taxas de rotação intrínseca e razão de massas, $\mu=0,1$. Os valores estão em termos da separação orbital. Veja a Fig. 4.2.

$\mu = 0, 1$	Limber			presente trabalho		
	$\Omega = 0$	$\Omega = 1$	$\Omega = 4$	$\Omega = 0$	$\Omega = 1$	$\Omega = 4$
$ x_-^* $	0,3141	0,2910	0,1758	0,3141	0,2910	0,1758
$\Delta r(x_+)$	0,0663	0,0561	0,0159	0,0663	0,0560	0,0159
$\Delta r(y)$	0,1003	0,0873	0,0313	0,1003	0,0872	0,0313
$\Delta r(z)$	0,1003	0,0950	0,0590	0,1003	0,0950	0,0589

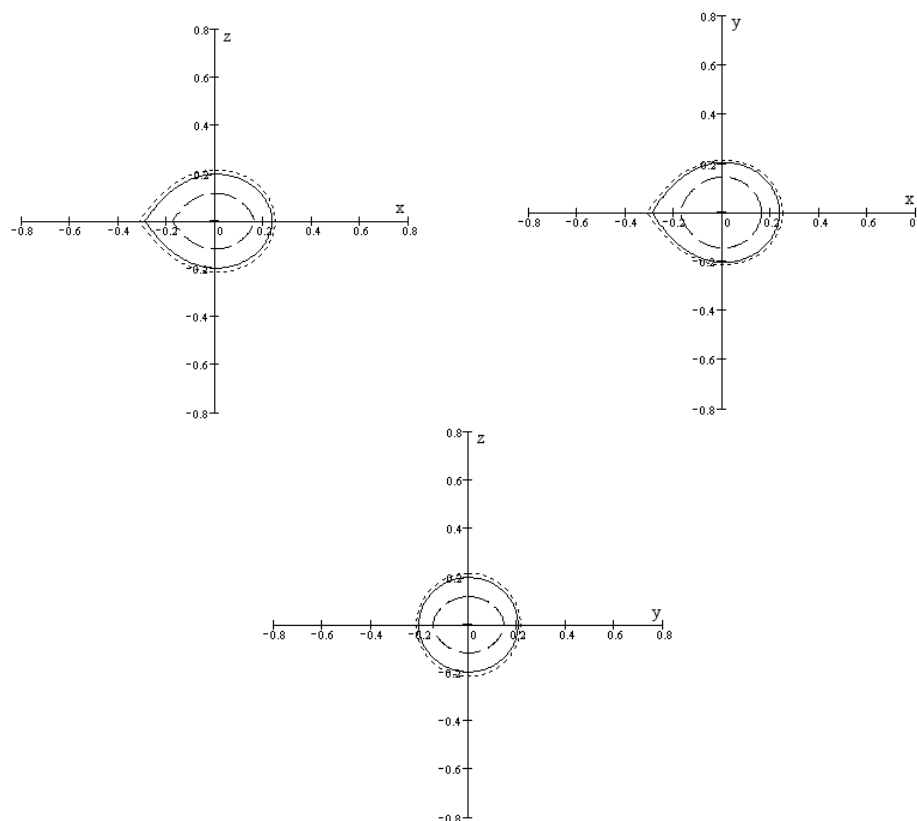


Figura 4.2: Superfícies equipotenciais gravitacionais efetivas, utilizando o procedimento combinando o método de Newton e o de Laguerre, para o potencial limite nas configurações $\mu = 0, 1$ e $\Omega = 0, 1$ e 4 . Mostramos a interseção das superfícies com o plano xz (painel superior esquerdo), xy (painel superior direito) e yz (painel inferior). As curvas com linha tracejada, contínua e pontilhada correspondem às superfícies para $\Omega=0$ (nenhuma rotação), $\Omega=1$ e 4 , respectivamente. As dimensões estão em escala da separação entre as estrelas.

Com o propósito de avaliar esse crescimento, construímos diversas superfícies para $\mu = 0, 3$ e $\Omega = 0$ e para os potenciais Ψ_{lim} , $\Psi_{\text{lim}} + 0, 2$, $\Psi_{\text{lim}} + 0, 4$, $\Psi_{\text{lim}} + 0, 6$ e $\Psi_{\text{lim}} + 0, 8$ onde Ψ_{lim} é o potencial limite. Lembramos, mais uma vez, que estamos trabalhando com o potencial multiplicado por -1 , de forma que a seqüência de curvas acima está representando superfícies cada vez mais próximas da massa puntual das componentes. Assim obtemos as superfícies mostradas nas Figuras 4.6 e 4.7.

Tabela 4.3: Comparação entre os nossos cálculos e os de Limber (1963), para diferentes taxas de rotação intrínseca e razão de massas, $\mu=0,3$. Os valores estão em termos da separação orbital. Veja a Fig. 4.3.

$\mu = 0.3$	Limber			presente trabalho		
	$\Omega = 0$	$\Omega = 1$	$\Omega = 4$	$\Omega = 0$	$\Omega = 1$	$\Omega = 4$
$ x_-^* $	0,4412	0,4139	0,2545	0,4412	0,4139	0,2545
$\Delta r(x_+)$	0,0927	0,0811	0,0246	0,0926	0,0811	0,0246
$\Delta r(y)$	0,1274	0,1138	0,042	0,1273	0,1137	0,0420
$\Delta r(z)$	0,1274	0,1260	0,0848	0,1273	0,1261	0,0848

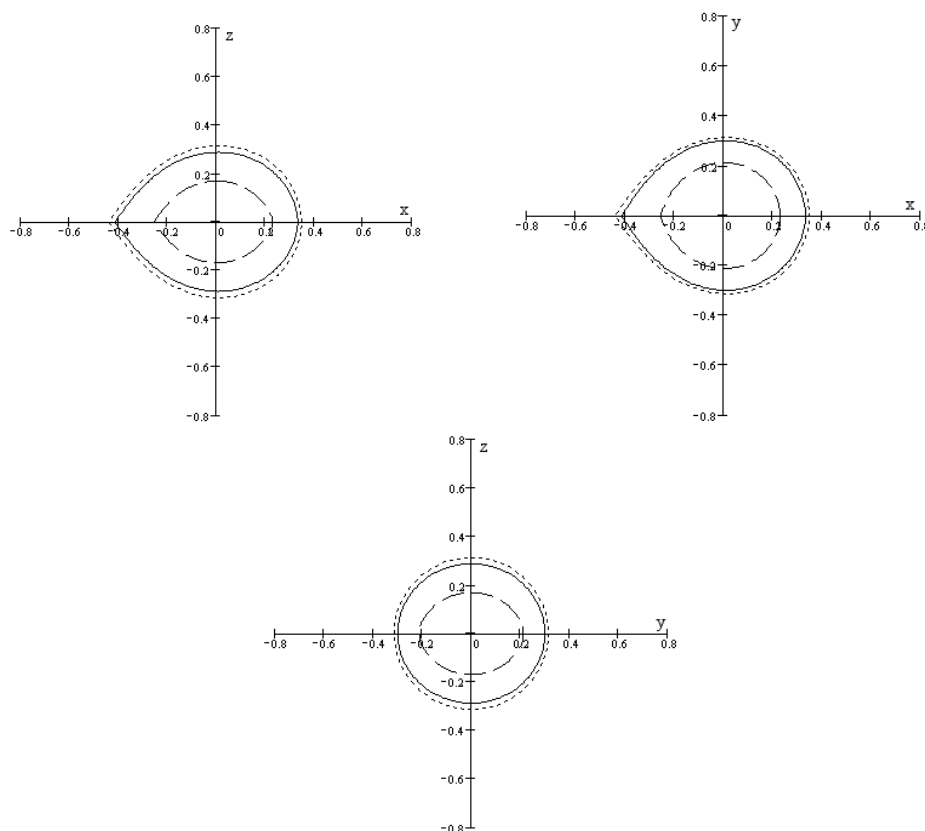


Figura 4.3: Superfícies equipotenciais gravitacionais efetivas, utilizando o procedimento combinando o método de Newton e o de Laguerre, para o potencial limite nas configurações $\mu = 0,3$ e $\Omega = 0, 1$ e 4 . Mostramos a interseção das superfícies com o plano xz (painel superior esquerdo), xy (painel superior direito) e yz (painel inferior). As curvas com linha tracejada, contínua e pontilhada correspondem às superfícies para $\Omega=0$ (nenhuma rotação), $\Omega=1$ e 4 , respectivamente. As dimensões estão em escala da separação entre as estrelas.

A Fig. 4.6 apresenta a interseção das superfícies equipotenciais efetivas com os planos xz , xy e yz para $\mu=0,3$ e $\Omega=0$ (rotação nula em relação a um observador externo, situado num referencial inercial) e diversos valores do potencial efetivo, Ψ . Os valores para $|x_-^*|$, são (em ordem decrescente para o módulo do potencial): 0,4098, 0,4529, 0,5078, 0,5832 e 0,7557. O crescimento é aproximadamente proporcional ao incremento no potencial até 0,5078, e depois cresce acentuadamente a medida que aproximamos do potencial limite.

Tabela 4.4: Comparação entre os nossos cálculos e os de Limber (1963), para diferentes taxas de rotação intrínseca e razão de massas, $\mu=0,7$. Os valores estão em termos da separação orbital. Veja a Fig. 4.4.

$\mu = 0.7$	Limber			presente trabalho		
	$\Omega = 0$	$\Omega = 1$	$\Omega = 4$	$\Omega = 0$	$\Omega = 1$	$\Omega = 4$
$ x_-^* $	0,6226	0,5861	0,3443	0,6226	0,5861	0,3443
$\Delta r(x_+)$	0,1155	0,1039	0,0277	0,1158	0,1040	0,0277
$\Delta r(y)$	0,1438	0,1311	0,0426	0,1437	0,1311	0,0426
$\Delta r(z)$	0,1438	0,1591	0,1143	0,1437	0,1591	0,1143

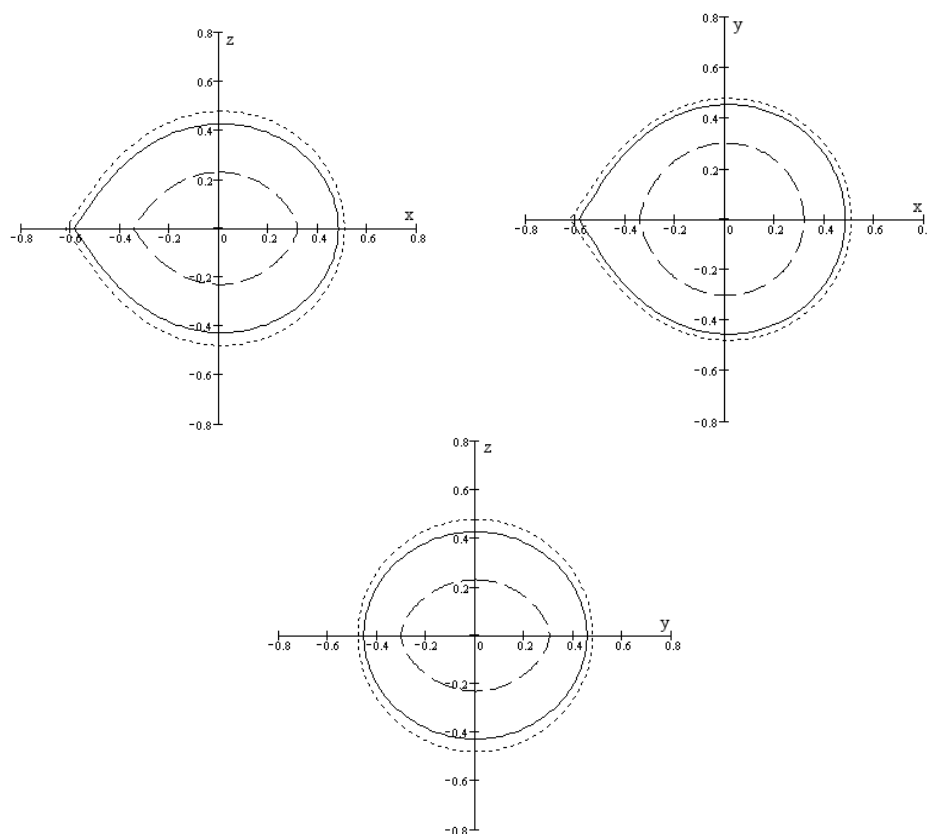


Figura 4.4: Superfícies equipotenciais gravitacionais efetivas, utilizando o procedimento combinando o método de Newton e o de Laguerre, para o potencial limite nas configurações $\mu = 0,7$ e $\Omega = 0, 1$ e 4 . Mostramos a interseção das superfícies com o plano xz (painel superior esquerdo), xy (painel superior direito) e yz (painel inferior). As curvas com linha tracejada, contínua e pontilhada correspondem às superfícies para $\Omega=0$ (nenhuma rotação), $\Omega=1$ e 4 , respectivamente. As dimensões estão em escala da separação entre as estrelas.

Mas tal crescimento não deve ser atribuído a possíveis problemas de inversão na equação do potencial, mas sim ao fato de que, à medida que o potencial aproxima do potencial limite, temos que o raio ($|x_-^*|$) cresce mais acentuadamente.

A função representada no gráfico da Fig. 4.7 encontra, de maneira direta, o potencial para cada valor do raio na direção $\theta = \pi/2$ e $\phi = \pi$. Podemos facilmente verificar que $\frac{\partial \nu}{\partial r}$ tende a zero, à medida que aproximamos do raio limite $0,7557$ e, por isso, mesmo

Tabela 4.5: Comparação entre os nossos cálculos e os de Limber (1963), para diferentes taxas de rotação intrínseca e razão de massas, $\mu=0,9$. Os valores estão em termos da separação orbital. Veja a Fig. 4.5.

$\mu = 0,9$	Limber			presente trabalho		
	$\Omega = 0$	$\Omega = 1$	$\Omega = 4$	$\Omega = 0$	$\Omega = 1$	$\Omega = 4$
$ x_-^* $	0,7557	0,7090	0,3798	0,7557	0,7090	0,3798
$\Delta r(x_+)$	0,1126	0,1040	0,0203	0,1127	0,1041	0,0204
$\Delta r(y)$	0,1307	0,1228	0,0304	0,1307	0,1229	0,0305
$\Delta r(z)$	0,1307	0,1812	0,1263	0,1307	0,1812	0,1263

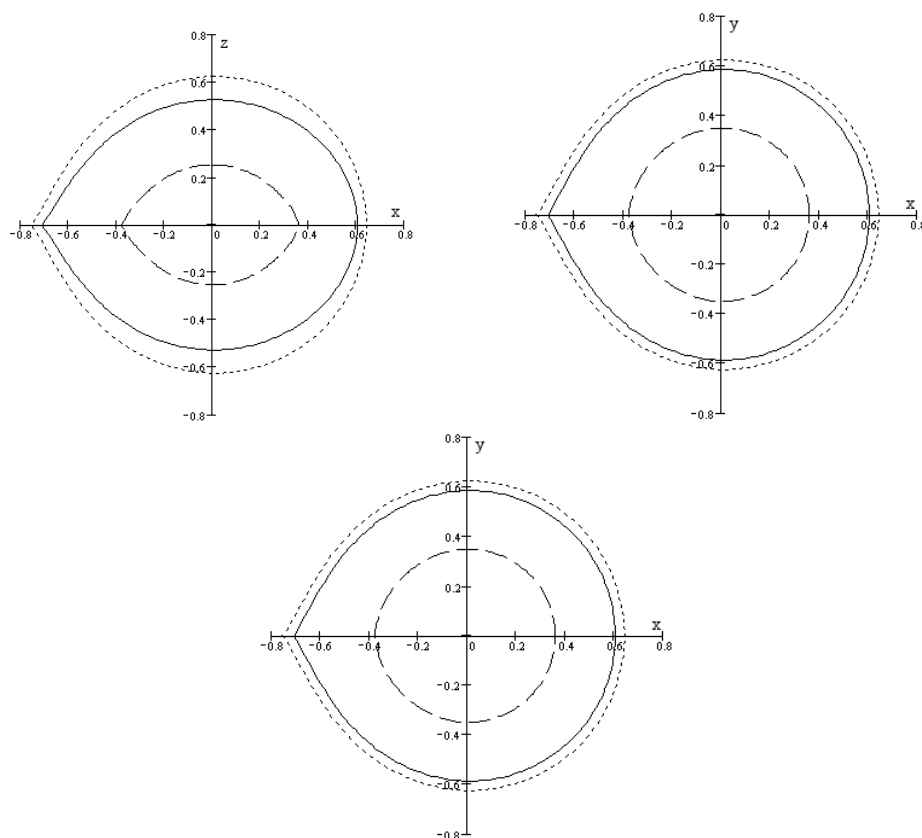


Figura 4.5: Superfícies equipotenciais gravitacionais efetivas, utilizando o procedimento combinando o método de Newton e o de Laguerre, para o potencial limite nas configurações $\mu = 0,9$ e $\Omega = 0, 1$ e 4 . Mostramos a interseção das superfícies com o plano xz (painel superior esquerdo), xy (painel superior direito) e yz (painel inferior). As curvas com linha tracejada, contínua e pontilhada correspondem às superfícies para $\Omega=0$ (nenhuma rotação), $\Omega=1$ e 4 , respectivamente. As dimensões estão em escala da separação entre as estrelas.

que não conheçamos de maneira direta a relação entre o raio e o potencial, sabemos que $\frac{\partial r}{\partial \nu} \rightarrow \infty$ à medida que o potencial aproxima do seu valor limite. Por isso, é perfeitamente natural esse crescimento ao aproximar do valor do potencial limite. Se estivéssemos dando um acréscimo de uma unidade no potencial a valores bem maiores do que o potencial limite, teríamos uma pequena mudança na forma da superfície equipotencial. Porém, ao contrário, uma mudança de apenas uma unidade no potencial, quando este está próximo

ao potencial limite, pode nos conduzir a superfícies bem diferentes das anteriores.

Aparentemente, a inversão da equação do potencial efetivo, Eq. (4.1), não seria responsável, de forma isolada, ao problema detectado por Vaz (comunicação privada) no uso do modelo WD na análise de curvas de luz de pelo menos dois sistemas binários eclipsantes, a saber, TY CrA (Casey *et al.* 1998 e LZ Cen (Vaz *et al.* 1995). Não está descartada, porém, que o próprio código do WD (Wilson & Devinney 1971, Wilson 1979, 1993, Vaz *et al.* 1995) seja o responsável pelas oscilações verificadas nas soluções.

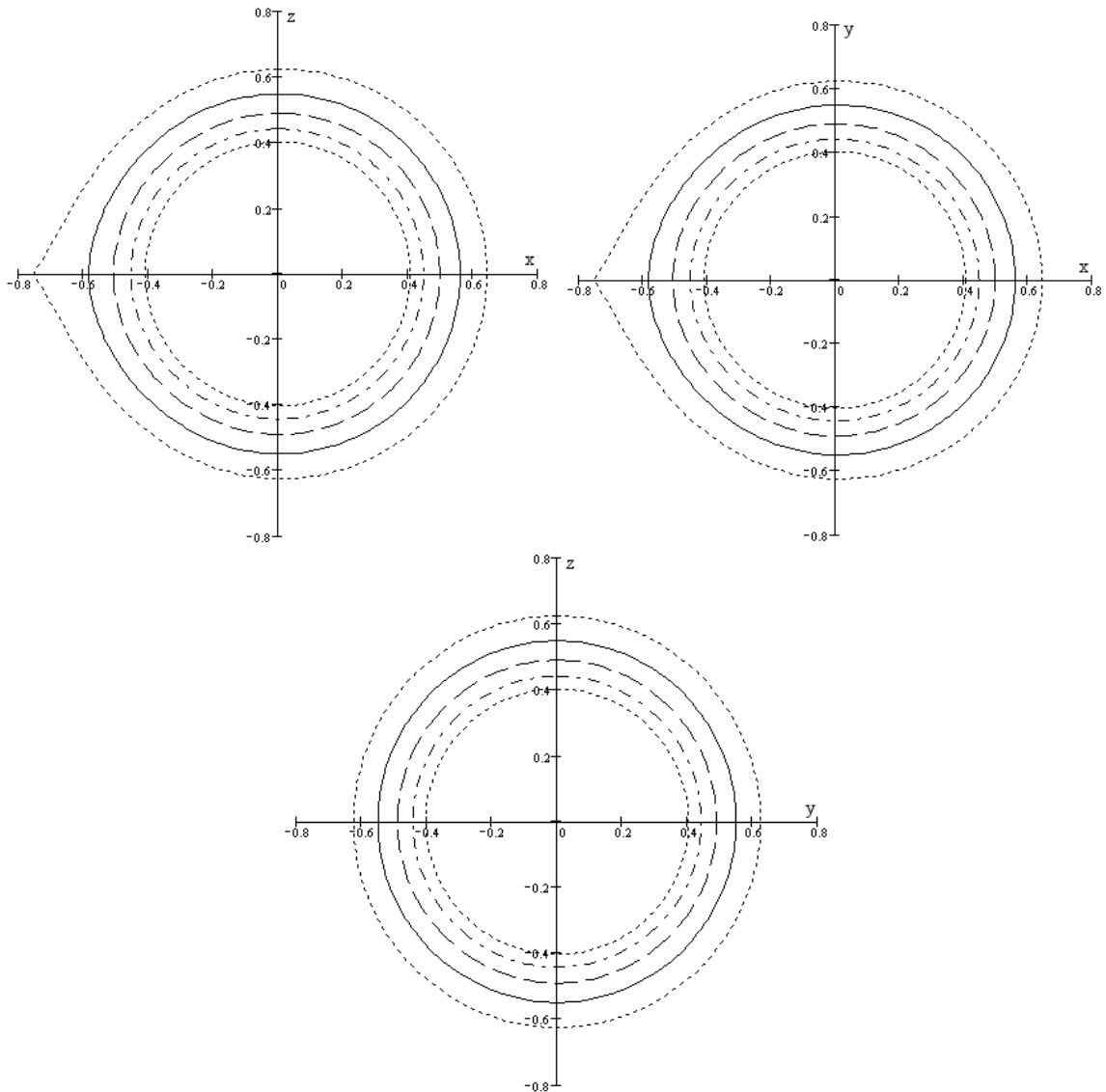


Figura 4.6: Projeções nos planos xz (painel superior esquerdo), xy (painel superior direito) e yz (painel inferior) das superfícies construídas com $\mu = 0,3$ e $\Omega = 0$ para os potenciais Ψ_{lim} (linha pontilhada), $\Psi_{\text{lim}} + 0,2$ (contínua), $\Psi_{\text{lim}} + 0,4$ (tracejada), $\Psi_{\text{lim}} + 0,6$ (linha traço-ponto), $\Psi_{\text{lim}} + 0,8$ (linha novamente pontilhada, mais externa).

Após compararmos os resultados obtidos pelo nosso programa com os de Limber e

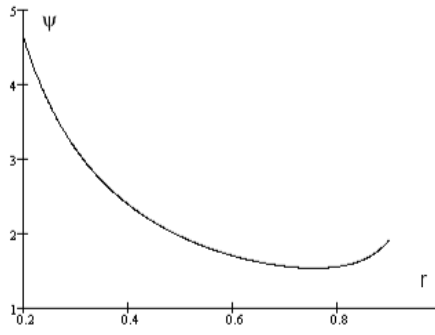


Figura 4.7: Gráfico potencial em função do raio para $\mu = 0,3$, $\Omega = 0$ na direção $\theta = \pi/2$ e $\phi = \pi$

realizarmos o estudo das mudanças morfológicas originadas pelo crescimento da estrela (atrás da mudança no valor do potencial) passaremos ao estudo, no próximo capítulo, da rotação diferencial.

Capítulo 5

Rotação Não Sincronizada e Diferencial

No capítulo anterior estudamos a solução do problema de encontrar a forma de uma superfície equipotencial efetiva para sistemas duplos de estrelas em rotação não sincronizada com a rotação orbital, porém rígida, onde todas as partes da estrela possuem a mesma velocidade angular. No processo, visualizamos que não seria muito difícil o tratamento do caso não rígido. No presente capítulo, faremos um importante acréscimo no modelo da rotação não-sincronizada. Introduziremos a possibilidade de tratar rotação diferencial. Nessa situação, as diversas camadas que constituem a estrela terão uma velocidade angular que varia de acordo com sua latitude. Por tratar-se de um modelo ainda não publicado, pelo que sabemos, faz-se necessário introduzirmos as equações físicas que irão nos conduzir a equação do potencial da rotação diferencial.

A equação que permite encontrar a aceleração, vista por um observador inercial, em função da aceleração vista por um observador não-inercial é

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + 2\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{A}_0 \quad (5.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} &= \text{aceleração vista por um observador no sistema inercial.} \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \text{aceleração vista por um observador no sistema não inercial.} \\ 2\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} &= \text{aceleração de Coriolis.} \\ \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) &= \text{aceleração centrípeta.} \\ \vec{A}_0 &= \text{aceleração da origem do sistema.} \end{aligned}$$

Considere um ponto que possui velocidade angular $\vec{\lambda}$ em torno do eixo da estrela 1, a qual, por sua vez, possui velocidade angular $\vec{\Omega}$ em torno de seu eixo. As únicas acelerações físicas que atuam nesse ponto, que gira com uma velocidade escalar $\vec{v} = \vec{\lambda} \times \vec{r}_{1\Omega}$ em torno da estrela, são mostradas na Fig. 5.1

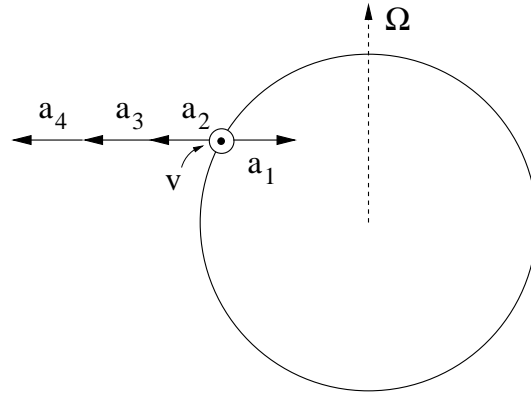


Figura 5.1: Representação das acelerações que atuam no ponto na superfície estelar vistas no referencial não-inercial. Note que \vec{v} aponta para fora da figura.

- $\vec{a}_1(\vec{A}_0)$ é a aceleração da origem da estrela, provocada pela rotação da mesma em torno do centro de massa do sistema, $\vec{a}_1 = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{01})$;
- $\vec{a}_2 \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)$ é a aceleração centrífuga vista por um observador que gira junto ao ponto, como o elemento gira com velocidade escalar $\vec{v} = \vec{\lambda} \times \vec{r}_1$ em torno da estrela, sua aceleração será: $\vec{a}_2 = -\vec{\lambda} \times \vec{\lambda} \times \vec{r}_1$;
- $\vec{a}_3 \left(-2\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$ corresponde a aceleração de Coriolis provocada pela velocidade escalar do ponto em relação ao referencial não inercial (estrela) $\vec{a}_3 = -2\vec{\Omega} \times (\vec{\lambda} \times \vec{r}_1)$;
- $\vec{a}_4 \left(-\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \right)$ é a aceleração centrífuga devida a rotação da estrela em torno do seu eixo $\vec{a}_4 = -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_1)$.

Analisada a situação no referencial não inercial, conforme Fig5.1, as acelerações são:

$$-\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_1) - 2\vec{\Omega} \times (\vec{\lambda} \times \vec{r}_1) - \vec{\lambda} \times \vec{\lambda} \times \vec{r}_1 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{01})$$

Quando vistas por um observador no referencial inercial, a velocidade angular do ponto corresponde a $\vec{\Omega} + \vec{\lambda}$ e portanto a aceleração centrípeta associada a essa velocidade será $(\vec{\lambda} + \vec{\Omega}) \times [(\vec{\lambda} + \vec{\Omega}) \times \vec{r}_1]$, com isso as acelerações que atuam no ponto são:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{01}) + (\vec{\lambda} + \vec{\Omega}) \times [(\vec{\lambda} + \vec{\Omega}) \times \vec{r}_1]$$

A vantagem em descrever as acelerações no referencial inercial consiste em agrupar em uma única aceleração as três observadas no referencial não inercial, pois:

$$(\vec{\lambda} + \vec{\Omega}) \times [(\vec{\lambda} + \vec{\Omega}) \times \vec{r}_1] = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_1) + 2\vec{\Omega} \times (\vec{\lambda} \times \vec{r}_1) + \vec{\lambda} \times \vec{\lambda} \times \vec{r}_1$$

A fim de descrever todas as acelerações que atuam no ponto devemos acrescentar as acelerações físicas provocadas pela atração gravitacional das estrelas. Sabemos que uma das componentes da força de reação normal (\vec{b}_1) deverá desempenhar a função das

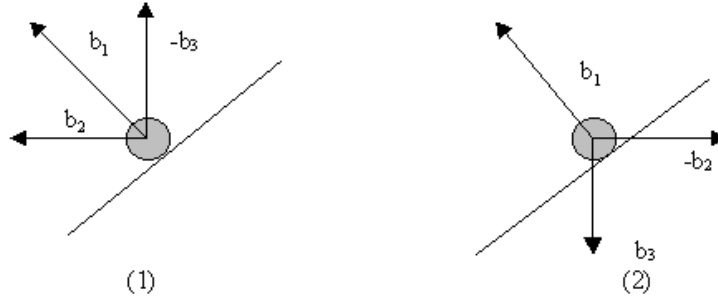


Figura 5.2: Representação das acelerações vistas por um observador no referencial inercial (1) e não-inercial (2)

acelerações mencionadas acima (\vec{b}_2), enquanto que outra componente ($-\vec{b}_3$) será a reação normal às acelerações gravitacionais (devido as estrelas), como mostrado na Fig. 5.2.

A mesma situação, vista por um observador no sistema não inercial (em rotação com o ponto), descreveria a reação normal a superfície (\vec{b}_1), como reação a soma das acelerações inerciais ($-\vec{b}_2$) com as acelerações gravitacionais (\vec{b}_3),

$$\vec{b}_2 = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{01}) + (\vec{\lambda} + \vec{\Omega}) \times [(\vec{\lambda} + \vec{\Omega}) \times \vec{r}_1], \quad (5.2)$$

$$\vec{b}_3 = -\vec{\nabla} \left[-\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} \right]. \quad (5.3)$$

Conforme a equação do equilíbrio hidrostático, temos

$$\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} = -\vec{\nabla} \left[-\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} \right] - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{01}) - (\vec{\lambda} + \vec{\Omega}) \times [(\vec{\lambda} + \vec{\Omega}) \times \vec{r}_1]. \quad (5.4)$$

Associando uma função potencial a cada uma das forças acima, temos

$$-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{01}) = -\vec{\nabla}(-\omega^2 r_{01} x_1), \quad (5.5)$$

$$-(\vec{\lambda} + \vec{\Omega}) \times [(\vec{\lambda} + \vec{\Omega}) \times \vec{r}_1] = -\vec{\nabla} \left(-\frac{(\lambda + \Omega)^2 r_{1\Omega}^2}{2} \right). \quad (5.6)$$

Pela equação do equilíbrio hidrostático,

$$\vec{\nabla}P = -\rho \vec{\nabla}\Psi \quad (5.7)$$

onde:

$$\Psi = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} - \omega^2 r_{01} x_1 - \frac{(\lambda + \Omega)^2 r_{1\Omega}^2}{2} \quad (5.8)$$

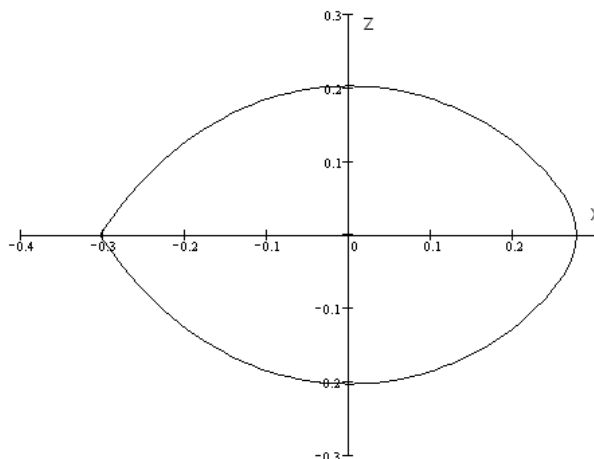
A Eq. (5.8) corresponde à mesma equação apresentada para a rotação não sincronizada (Limber 1963, Eq. (4.1)), com a diferença de termos incluído a velocidade angular da camada em relação a superfície estelar ($\vec{\lambda}$). Na verdade, podemos reagrupar o termo ($\vec{\lambda} + \vec{\Omega}$) em uma única velocidade angular, observada por um observador no sistema inercial (Ω_θ) e, assim, teremos

$$\Psi = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} - \omega^2 r_{01} x_1 - \frac{(\Omega_\theta)^2 r_{1\Omega}^2}{2}. \quad (5.9)$$

A diferença entre a Eq. (5.9) e a Eq. (4.1), de Limber, é que naquela considerávamos a velocidade angular constante e igual em todas as camadas da estrela, ao passo que nesta, a rotação é diferencial e, para cada valor do ângulo θ , teremos uma camada com velocidade angular definida por uma relação entre Ω_θ e θ .

Nos modelos que serão apresentados neste trabalho, faremos apenas uma restrição quanto a distribuição das velocidades ao longo das camadas: a maior velocidade angular deve-se concentrar no equador (por onde espera-se que a estrela perca matéria, caso a rotação seja demasiada). As mudanças que devem ser feitas em termos computacionais são mínimas, pois basta adicionar nos algoritmos já desenvolvidos uma dependência entre a direção θ e a velocidade angular Ω_θ . O exemplo que faremos a seguir refere-se a uma estrela de $\mu = 0,5$ e, inicialmente, $\Omega_\theta(\text{const}) = 4$. O potencial escolhido corresponderá ao valor limite (lobo de Roche), $\Psi = 3,075454$. Assim a forma da estrela será a da mostrada

Figura 5.3: Projeção no plano xz da superfície crítica construída com $\mu = 0,5$ e $\Omega_\theta = 4$, constante em todas as camadas.



na Fig. 5.3, que corresponde à projeção da superfície no plano xz .

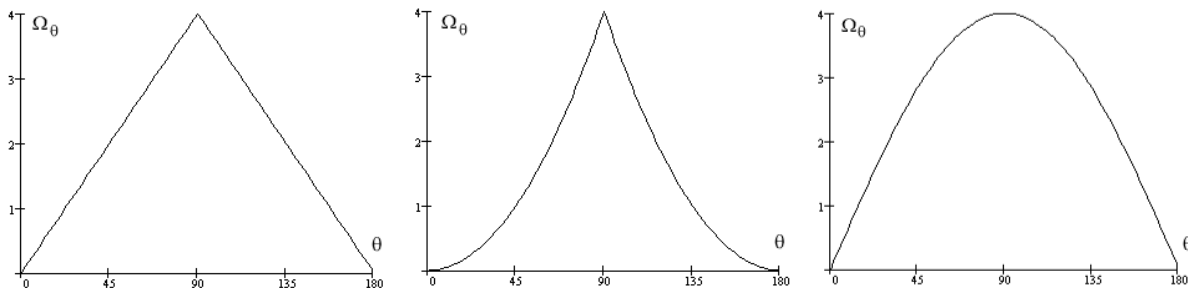


Figura 5.4: Distribuição da velocidade angular(Ω_θ) em função do ângulo θ . Linear, quadrática, senoidal.

Agora introduziremos 3 distribuições diferentes e arbitrárias de velocidade angular: na primeira teremos uma dependência linear entre a velocidade angular e o ângulo θ , na segunda uma quadrática e na terceira uma dependência senoidal. A forma dessas distribuições de velocidade angular está na Fig. 5.4. Note que os valores de Ω_θ vão de zero a 4 vezes a velocidade orbital.

Com isso temos os seguintes aspectos morfológicos mostrados na Fig. 5.5. Podemos

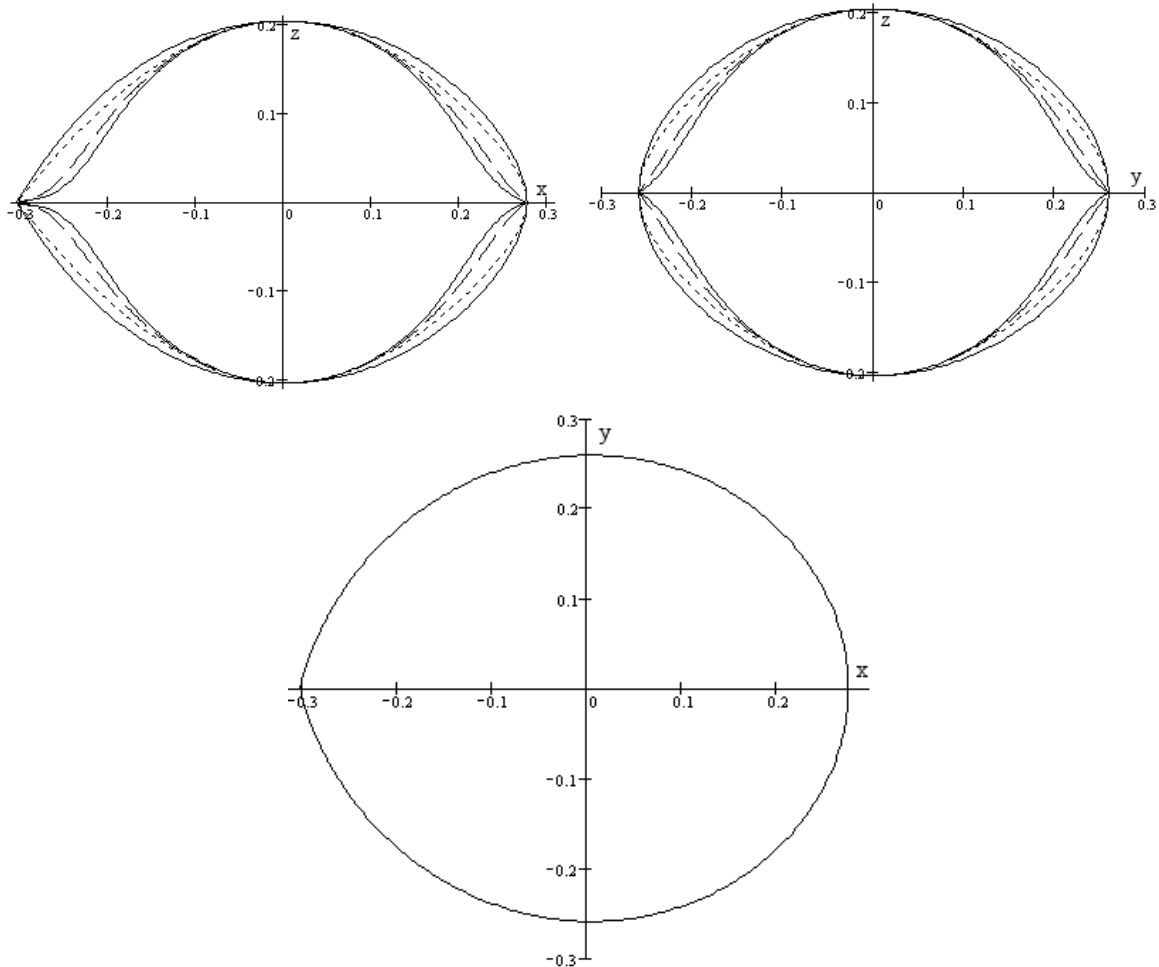


Figura 5.5: Projeções nos planos xz (painel da esquerda), yz (painel da direita) e xy (painel inferior) para diversas formas de rotação diferencial. A forma traçada pela curva mais externa corresponde à distribuição $\Omega_\theta = 4$ (constante). A partir dessa, sempre em direção ao centro, a segunda forma corresponde à distribuição senoidal, a terceira à linear e a quarta, a mais interna, à distribuição quadrática, mostradas na Fig. 5.4. Note que o painel inferior (projeção no plano xy) mostra somente uma curva, já que elas são coincidentes para todas as distribuições de rotação angular, uma vez que todas possuem $\Omega_\theta = 4$ no equador estelar.

notar a gradual deformação da estrela com o aumento de sua velocidade angular de rotação em direção ao equador, quase que sugerindo a formação de um disco em torno do equador estelar. A configuração no plano xy , não mostrada na Fig. 5.5, corresponde à mesma da configuração obtida para a rotação uniforme ou rígida, uma vez que, nos nossos exemplos,

a distribuição de velocidades atinge seu valor máximo no equador.

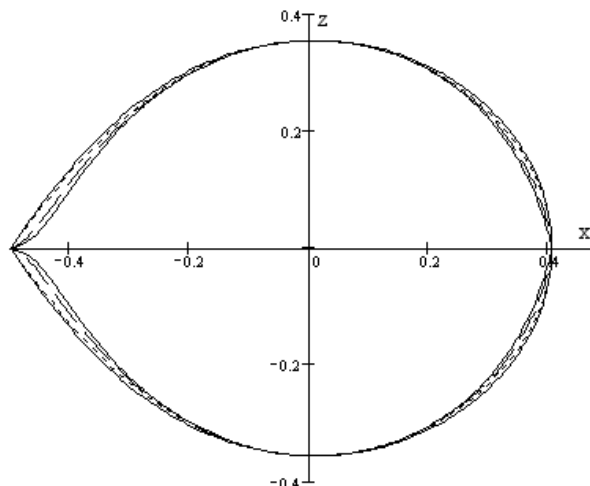


Figura 5.6: O mesmo que a Fig. 5.5, somente com as projeções no plano xz , para $\Omega_{\theta,\max}=1$.

A configuração das componentes no lobe de Roche eram únicas uma vez estabelecido os valores para as variáveis μ e Ω , com a introdução do modelo da rotação diferencial precisamos não apenas do valor de Ω , mas sim sua distribuição ao longo das posições latitudinais (Ω_θ), com isso podemos ter infindáveis configurações no lobe de Roche e não apenas uma (como esperado no modelo anterior).

As mudanças nas componentes não serão tão significativas se a amplitude de valores para a velocidade angular ao longo da estrela não for tão grande, por exemplo se fizermos as mesmas distribuições do exemplo anterior, mas o valor máximo da velocidade angular for 1, temos as seguintes configurações mostradas na Fig. 5.6.

Por inspeção do gráfico acima podemos facilmente verificar que a configuração senoidal coincide praticamente com a distribuição uniforme, as formas linear e quadrática apresentam diferenças substanciais a medida que nos aproximamos do equador, mas menores se comparadas com o exemplo anterior.

O modelo da rotação diferencial consiste, em última análise, de uma seleção e agrupamento de diversas camadas obtidas por configurações que variam continuamente o valor da velocidade angular seguindo a distribuição desejada. O único problema advindo deste procedimento refere-se à possibilidade de produzir formas descontínuas ao se escolher alguma distribuição específica. Podemos eliminar tal possibilidade obedecendo dois critérios. O primeiro consiste na escolha de funções contínuas para as distribuições de velocidade angular, que, uma vez assegurada, garante a continuidade da variável r . O segundo consiste numa escolha apropriada de funções que não excedam os valores máximos permitidos para o valor de Ω_θ de acordo com a sua posição latitudinal.

Para encerrar nosso trabalho acrescentamos ao modelo da rotação diferencial as variações das velocidades angulares observadas no Sol. Para isto dispomos de apenas três pontos e seus respectivos períodos (encontrados a partir da observação das manchas solares), no equador, de 25 dias, a 40° de latitude (ou $\theta = 50^\circ$), de 27 dias, e nos pólos, de

36 dias. As velocidades relativas dos pontos são, respectivamente, $1, \frac{25}{27}$ e $\frac{25}{36}$.

Com esses dados, ajustamos uma curva do tipo

$$\Omega_\theta = \Omega_{\theta, \max} (1 - \gamma (1 - \sin \theta)) \quad (5.10)$$

onde $\Omega_{\theta, \max}$ e γ são constantes ($\Omega_{\theta, \max}=1$, $\gamma=0,30613$). Utilizando essa distribuição, dada na Fig. 5.7 e Eq. (5.10), comparamos essa configuração com o modelo constante ($\Omega_\theta=1$). Obtemos a configuração cuja projeção no plano zx está representada na Fig. 5.8.

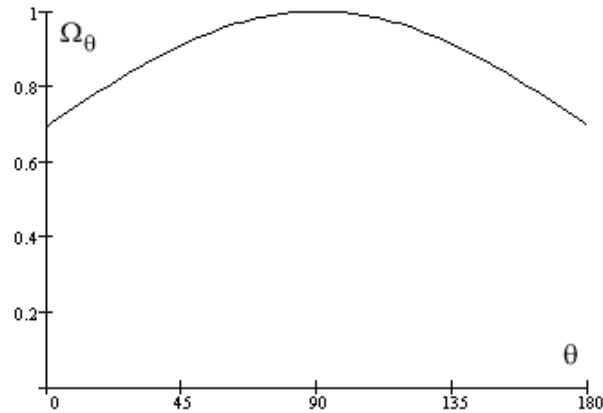


Figura 5.7: Distribuição da velocidade angular em função do ângulo θ para o modelo solar.

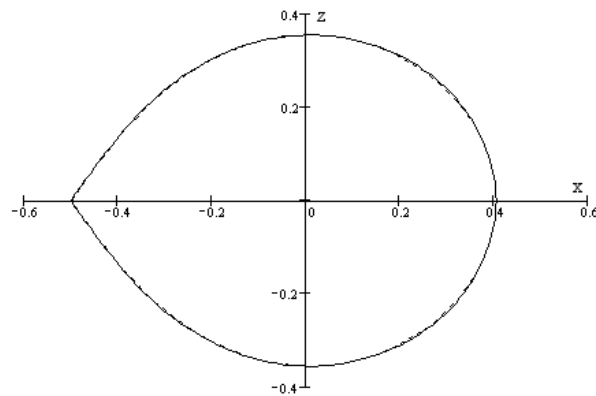


Figura 5.8: Configuração indicando a projeção no plano zx das superfícies com Ω_θ constante e variando de acordo com distribuição indicada na Fig. 5.7, Note que, para a rotação diferencial solar, o efeito é praticamente desprezível.

Como pode ser notado, as formas geradas para a rotação uniforme e para a rotação diferencial são muito próximas uma da outra, de modo que, na escala da Fig. 5.8, não se percebe qualquer diferença entre elas. Se aumentarmos Ω_θ máximo até 16, ainda assim não observamos qualquer diferença visível entre as projeções.

Os modelos onde a velocidade nos pólos não vai a zero, como o observado no Sol não provocam mudança substancial na morfologia estelar quando comparados com as distribuições de velocidade da Fig. 5.4. Se comparados com a rotação uniforme, as diferenças mais significativas são apresentadas em superfícies que variam de maneira brusca, mas contínua, sua velocidade de rotação ao se aproximarem do equador (como exemplo podemos citar as distribuições linear e quadrática).

Capítulo 6

Conclusão e discussão geral dos resultados

Um dos problemas centrais do trabalho foi criar recursos matemáticos que conduzissem, de maneira segura, a soluções para a inversão da equação do potencial, ou seja, para encontrar a superfície (vetores posição) correspondente a determinado valor do potencial gravitacional efetivo. No estudo da implementação do método de Laguerre associado ao método de Newton realizado no Capítulo 3, não foram apresentadas as condições em que um seria melhor do que o outro. No presente capítulo faremos essa discussão, especificando as situações em que um método se adapta melhor que o outro, e faremos uma discussão geral sobre o trabalho.

6.1 A escolha do método

Para esclarecer melhor o critério para essa escolha, considere o exemplo em que desejássemos encontrar o raio na direção $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \pi$ para $\mu = 0,5$, $\Psi = 2,5$ e $\Omega = 1$. Usando o método de Newton e o método de Laguerre temos os resultados apresentados na Tabela 6.1. Neste simples exemplo temos que o método de Laguerre apresentou uma

Tabela 6.1: Comparação entre os métodos de Newton e de Laguerre para encontrar o raio que apresenta o potencial $\Psi=2,5$ em uma estrela num sistema binário de massas iguais ($\mu=0,5$), sincronizada com a órbita ($\Omega=1$), na direção $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \pi$. N representa o número da iteração e o raio está apresentado em termos da separação orbital.

N	Newton	Laguerre
0	0,250000	0,250000
1	0,276887	0,279081
2	0,280711	0,280776
3	0,280776	0,280776

performance melhor do que o de Newton, pois na terceira iteração já atingiu a raiz da equação dentro da precisão requerida, enquanto foi necessário uma quarta iteração para o método de Newton alcançar o resultado desejado.

O próximo exemplo será encontrar a raiz com as mesmas especificações do exemplo anterior, só que dessa vez o potencial desejado será $\Psi = 2, 1$, onde a estrela é maior. Os resultados estão na Tabela 6.2. Nesse segundo exemplo já podemos observar que, para

Tabela 6.2: Comparação entre os métodos de Newton e de Laguerre para encontrar o raio que apresenta o potencial $\Psi=2,1$ em uma estrela num sistema binário de massas iguais ($\mu=0,5$), sincronizada com a órbita ($\Omega=1$), na direção $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \pi$. N representa o número da iteração e o raio está apresentado em termos da separação orbital.

N	Newton	Laguerre
0	0,312500	0,312500
1	0,370117	0,379494
2	0,391214	0,393794
3	0,393828	0,393866
4	0,393866	0,393866

ambos os métodos, foi necessário adicionar mais uma iteração para se alcançar a raiz desejada.

No último exemplo, faremos $\Psi = 2$, mostrado na Tabela 6.3. Para este valor do

Tabela 6.3: Comparação entre os métodos de Newton e de Laguerre para encontrar o raio que apresenta o potencial $\Psi=2,0$ em uma estrela num sistema binário de massas iguais ($\mu=0,5$), sincronizada com a órbita ($\Omega=1$), na direção $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \pi$. N representa o número da iteração e o raio está apresentado em termos da separação orbital.

N	Newton	Laguerre
0	0,333333	0,333333
1	0,407843	0,424016
1	0,452442	0,476346
2	0,476019	0,493215
3	0,487493	0,498073
4	0,493988	0,499453
5	0,496994	0,499845
6	0,498497	0,499956
7	0,499248	0,499988
8	0,499624	0,499996
9	0,499812	0,499999
10	0,499906	0,500000

potencial, a situação é um pouco mais delicada. Na 12ª iteração, o método de Laguerre atingiu o valor desejado (0,5) mas somente na 20ª iteração o método de Newton atinge a raiz da equação.

O que estaria acontecendo para este valor do potencial, que dificultasse tanto a convergência de ambos os métodos? Se, nestes casos, o modelo de Laguerre é o mais apropriado, como identificar, para cada configuração específica (μ e ω), o valor desse potencial crítico? Que garantia temos que mesmo para potenciais diferentes do potencial limite não tenhamos a mesma situação se tomarmos outras direções θ e ϕ ?

Para responder a primeira questão, observe o gráfico mostrado na Fig. 6.1. Podemos

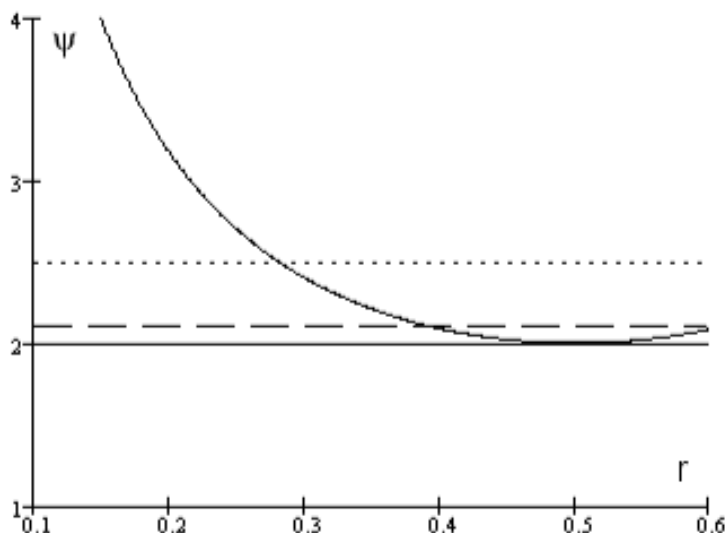


Figura 6.1: Gráfico potencial em função do raio, a reta pontilhada corresponde ao $\Psi = 2,5$, a tracejada para $\Psi = 2,1$ e a contínua $\Psi = 2$.

concluir através desse gráfico, que a convergência do método de Newton para os valores do potencial $\Psi = 2,5$ e $\Psi = 2,1$ é rápida devido ao fato de que, para esses potenciais escolhidos, temos satisfeitas duas condições matemáticas que garantem a convergência do método. A primeira refere-se ao fato de que a derivada de primeira ordem da função potencial é diferente de zero e negativa, pois neste intervalo a função é decrescente até o ponto em questão. E a segunda, de que a derivada segunda é contínua (além de ser positiva) dentro desse intervalo.

Nesse casos, mesmo com a melhor performance do método de Laguerre, o ideal seria utilizar a aproximação de Newton devido a simplicidade no cálculo computacional apresentada. Na situação $\Psi = 2$ encontramos o primeiro ponto de mínimo da função potencial ($\partial\Psi/\partial r = 0$), e para estas configurações devemos adotar o método de Laguerre, pois o modelo de Newton apresenta convergência pouco eficiente.

Com o propósito de se responder a segunda questão levantada devemos derivar a

equação potencial em função do raio,

$$\lambda(\mu, r, \theta, \phi, \chi, \Omega) = -\frac{\mu}{r^2} - \frac{(1-\mu)(2r + 2\operatorname{sen}\theta\cos\phi)}{2\sqrt{(r^2 + 2r\operatorname{sen}\theta\cos\phi + 1)^3}} + \Omega^2 r \operatorname{sen}^2(\theta) + (1-\mu)\operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi) \quad (6.1)$$

representando graficamente a função acima na Fig. 6.2. Ao encontrar a raiz dessa equação,

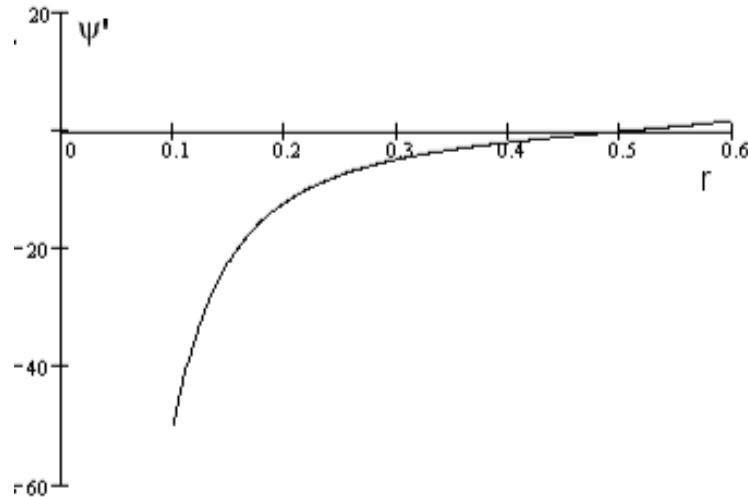


Figura 6.2: Gráfico de $\partial\Psi/\partial r$ em função do raio para $\mu = 0,5$ e $\Omega = 1$.

com a aproximação de Newton por exemplo, teremos o valor do potencial crítico. A convergência nesse caso é rápida, como mostrado na Tabela 6.4. Substituindo o raio

Tabela 6.4: Uso do método de Newton para encontrar o valor do potencial crítico para $\mu = 0,5$ e $\Omega = 1$.

N	Newton
0	0,333333
1	0,446215
2	0,497727
3	0,500000

encontrado na equação do potencial, temos que $\Psi = 2$.

Devemos averiguar se, para outras direções, temos o valor do módulo do potencial crítico superior ao encontrado na direção $\theta = \pi/2$ e $\phi = \pi$. Para isso, construímos a função $V(\mu, \Omega, \theta, \phi)$ que encontra, para cada configuração escolhida, o módulo do potencial crítico. Inicialmente inspecionamos o comportamento do potencial crítico em função do ângulo ϕ , para $\theta = \pi/2$, mostrado na Fig. 6.3.

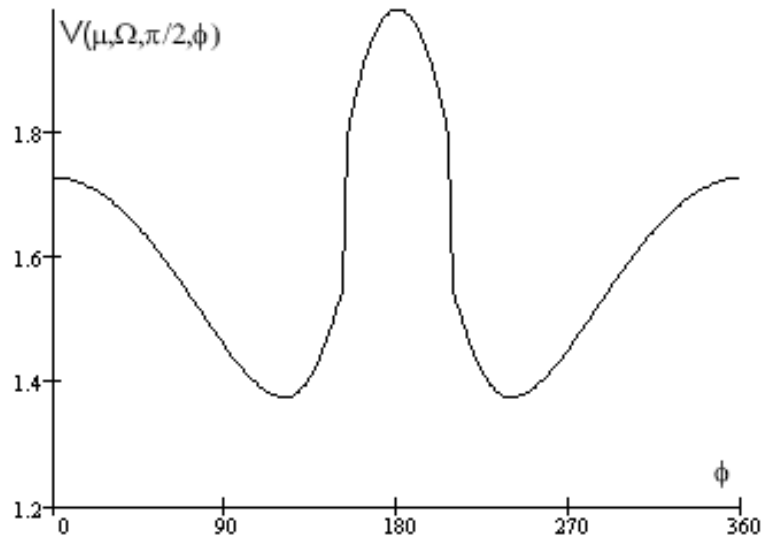


Figura 6.3: Gráfico $V(\mu, \Omega, \pi/2, \phi)$ em função do ângulo ϕ para $\theta = \pi/2$.

Através da análise do gráfico da Fig. 6.3, podemos concluir que o módulo do potencial crítico oscila entre 1,38 até 2,00 (para $\phi = \pi$). Continuando nossa inspeção, faremos o gráfico correspondente para $\theta = \pi/3, \pi/4$ e $\pi/6$, nas Figs. 6.4, 6.5 e 6.6.

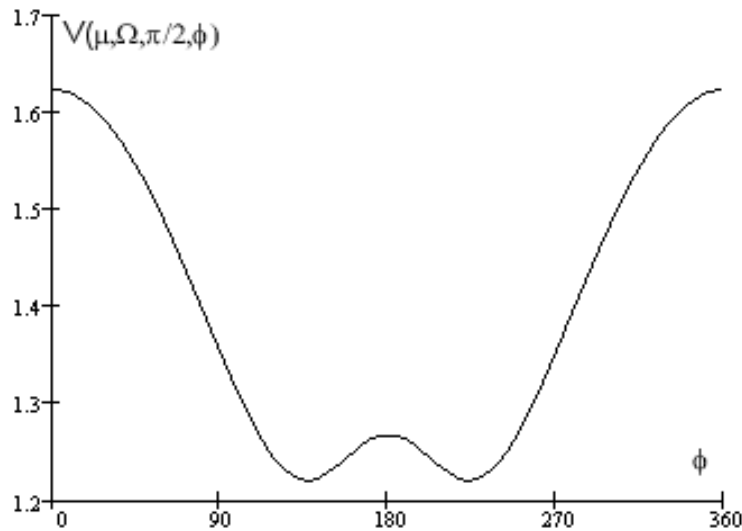


Figura 6.4: Gráfico $V(\mu, \Omega, \pi/2, \phi)$ em função do ângulo ϕ para $\theta = \pi/3$.

Para $\theta = \pi/3$, os valores para os potenciais críticos oscilam entre 1,22 até 1,62. Para $\theta = \pi/4$ (Fig. 6.5), a faixa de valores para o módulo do potencial crítico é de 0,95 até 1,49. Para $\theta = \pi/6$ de 0,66 até 1,28, conforme gráfico da Fig. 6.6. Podemos facilmente observar que, à medida que diminuimos o ângulo θ , os valores para os potenciais críticos vão diminuindo. Assim, fica fácil ver que é no plano xy que encontraremos o ponto onde

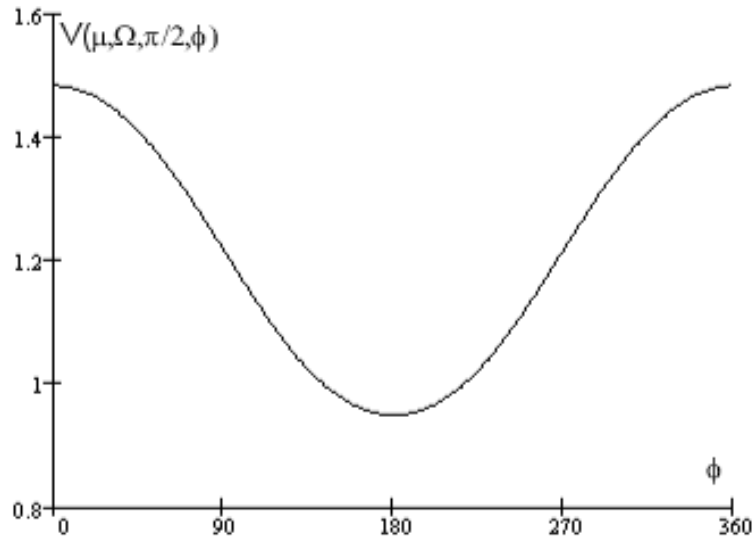


Figura 6.5: Gráfico $V(\mu, \Omega, \pi/2, \phi)$ em função do ângulo ϕ para $\theta = \pi/4$.

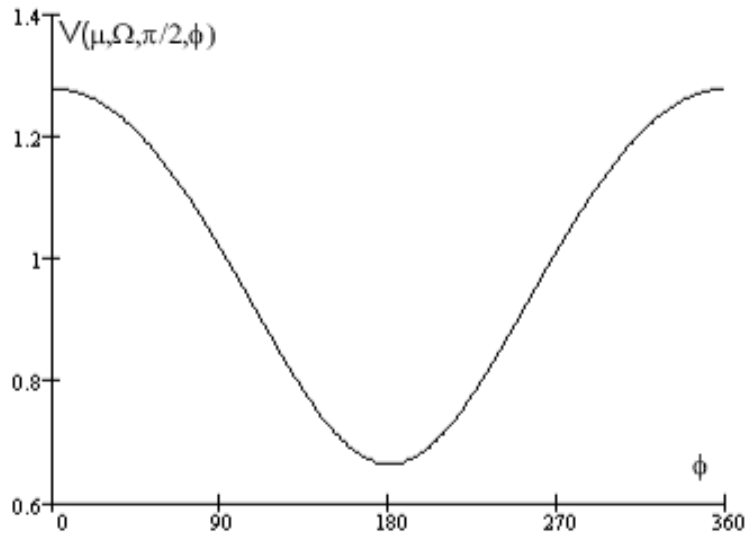


Figura 6.6: Gráfico $V(\mu, \Omega, \pi/2, \phi)$ em função do ângulo ϕ para $\theta = \pi/6$.

o potencial crítico será maior, e, como já mencionado para $\theta = \pi/2$ e $\phi = \pi$, o potencial crítico assume seu maior valor, $\Psi = 2$. Pensando no aspecto físico do problema, é de se esperar este resultado, pois é exatamente neste ponto que a estrela perde matéria ao aumentarmos continuamente seu tamanho. Inclusive, o procedimento utilizado para encontrar o valor do potencial limite (potencial cujo valor conduz a estrela para a forma de contacto com seu lobo de Roche) consiste em buscar, nessa direção, qual o valor do raio para o qual temos $\nabla\Psi = 0$ e $\partial\Psi/\partial r = 0$.

Uma vez que o menor valor para o módulo do potencial que trabalharemos será o potencial limite, pois nosso estudo limita-se a estrelas que estejam nas configurações *detached* ou *semi-detached*, o único ponto em que teremos problema de convergência será em $\theta = \pi/2$ e $\phi = \pi$. Mesmo assim, esse problema aparecerá apenas quando a

estrela encontrar-se na configuração de contacto com seu lobo crítico. Para potenciais cujo módulo seja superior ao potencial crítico, não temos problema algum em aplicar o método de Newton, pois todos os pontos satisfazem as condições de convergência. Para as configurações *semi-detached*, é apenas para os pontos bem próximos as direções $\theta = \pi/2$ e $\phi = \pi$, que devemos utilizar o método de Laguerre para uma melhor aproximação.

Feitas as devidas ponderações quanto à precisão das raízes, partiremos agora para a aplicação das soluções da equação do potencial, ou seja, a rotação não-sincronizada e diferencial, que constitui uma das contribuições mais inéditas deste trabalho.

Com a finalidade de se estudar as mudanças na morfologia estelar, construiu-se o gráfico velocidade angular (com $\Omega_{\theta(\text{máx})} = 1$) em função do ângulo θ , para todas as distribuições estudadas, mestrada na Fig. 6.7. Ao estudar as configurações das estrelas

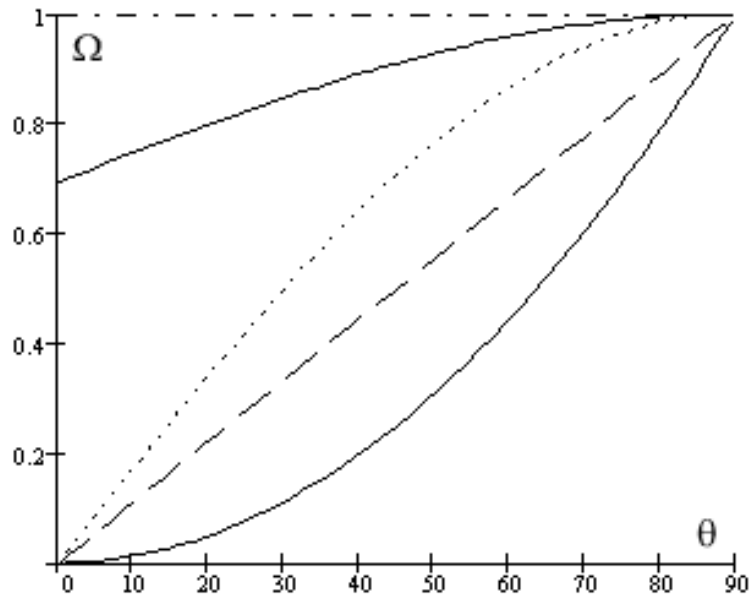


Figura 6.7: Gráfico velocidade angular em função do ângulo θ (medido em graus) para as distribuições: uniforme (linha tracejada pontilhada), solar (contínua), senoidal (pontilhada), linear (tracejada) e quadrática (contínua).

pode-se observar que, mesmo com as mais variadas funções apresentadas, as mudanças próximas aos pólos das estrelas não apresentam alterações significativas, apesar do valor da velocidade angular variar bruscamente entre uma configuração e outra, conforme observado na Fig. 6.7. Por outro lado, para algumas distribuições (linear e quadrática, por exemplo) próximas ao equador, observa-se mudanças substanciais na distância radial, como pode ser verificado na Fig. 6.8.

O que, em parte, justifica essas fortes alterações próximas ao equador, mas pouco significativas nos pólos, não está na diferença entre as velocidades angulares, mas sim nas diferenças entre as acelerações centrífugas ($\Omega_{\theta}^2 \text{sen } \theta$) percebidas pelos pontos em questão. Na Fig. 6.9 podemos observar que, nos pólos, as diferenças entre as acelerações são desprezíveis, ao passo que, à medida que aproximamos do equador, essas diferenças aumentam, voltando a se anular no equador.

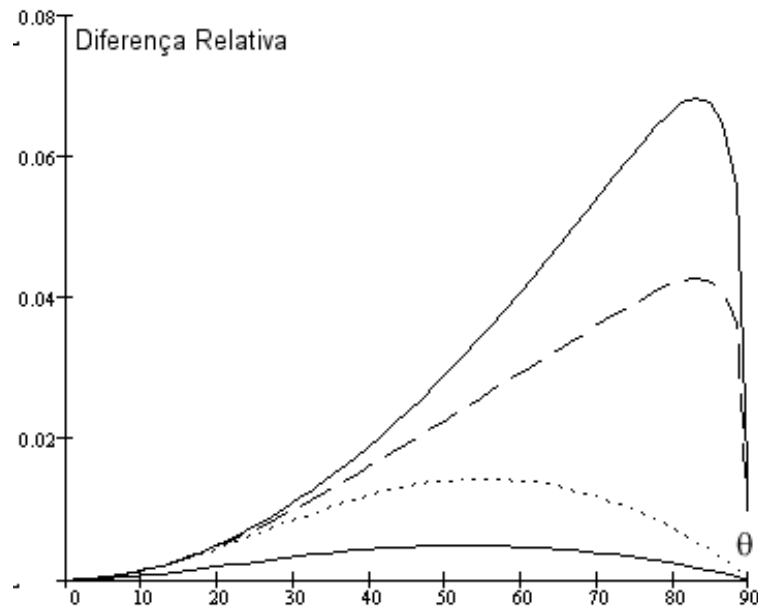


Figura 6.8: Gráfico diferença relativa ($\frac{|r_u - r_x|}{r_u}$, onde r_x e r_u representam o raio da configuração escolhida e uniforme respectivamente) entre os raios em função do ângulo θ (medido em graus) para as distribuições: solar (contínua), senoidal (pontilhada), linear (tracejada) e quadrática (contínua).

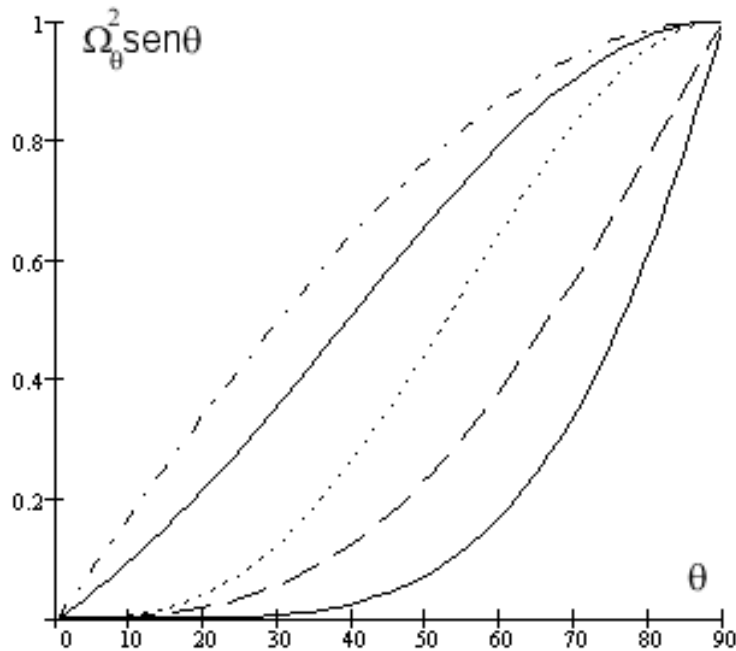


Figura 6.9: Gráfico $\Omega_\theta^2 \sin \theta$ (medidas em relação a $\Omega_{\theta(máx)} = 1$) em função do ângulo θ (medido em graus) para as distribuições: uniforme (linha ponto-traço), solar (contínua), senoidal (pontilhada), linear (tracejada) e quadrática (contínua).

A conclusão a que chegamos, com relação a rotação diferencial, é que sua influência na forma estelar só é significativa quando possuímos distribuições com mudanças substanciais no valor da aceleração centrífuga ao longo das camadas, para distribuições como a do

sol sua influência é muito pequena podendo ser ignorada ao se construir as superfícies equipotenciais (conforme a Fig. 6.9, onde observa-se que as curvas estão muito próximas).

A conclusão final a que chegamos é que a introdução do modelo diferencial permite-nos obter uma quantidade incalculável de configurações estelares se comparados ao modelo não sincronizado uniforme, mas devemos nos lembrar que o interesse em se estudar os aspectos morfológicos das estrelas não termina com o modelo da rotação diferencial, podendo ainda serem acrescentadas outras condições físicas não desenvolvidas neste trabalho como a inclinação do eixo de rotação das estrelas não coincidir com o eixo da órbita, ou acrescentar uma terceira estrela no nosso sistema. As equações físicas para esses casos são bem mais complexas que os modelos apresentados e portanto devem merecer uma atenção especial em trabalhos posteriores.

Referências

- Abramowitz M., 1970, in *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Eds. Abramowitz M. & Stegun, I.A., Dover Publications Inc. New York, Cap. 3
- Casey B.W., Mathieu R.D., Vaz L.P.R., Andersen J., Suntzeff N.B., 1998, AJ **115**, 1617
- Chandrasekhar S., 1933a, MNRAS **93**, 391
- Chandrasekhar S., 1933b, MNRAS **93**, 449
- Chandrasekhar S., 1933c, MNRAS **93**, 462
- Etzel P.B., 1981, in: *Photometric and Spectroscopic Binary Systems*. Carling E.B., Kopal Z. (eds). Reidel, Dordrecht, p. 111
- Jeans, J.H, 1929, in *The Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics* (Cambridge University Press)
- Jeans, J.H, 1928, in *Astronomy and cosmogony* (Cambridge University Press), chap. 9
- Kopal, Z. 1959, in *Close Binary Systems* (New York, Wiley)
- Kuiper, G.P. 1941, ApJ **93**, 133
- Limber D.N., 1963, ApJ **138**, 1112
- Mochnacki, S.W.: 1984, ApJS **55**, 551
- Mochnacki, S.W., and Doughty, N. A. 1972a, MNRAS **156**, 51
- Mochnacki, S.W., and Doughty, N. A. 1972b, MNRAS **156**, 243
- Moulton F.R., 1914, *An introduction to Celestial Mechanics* (2nd. ed.; New York: Macmillan Co.), Cap. viii
- Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., and Flannery, B.P., 1992, *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
- Popper D.M., Etzel P.B., 1981, AJ **86**, 102
- Russell, H. N 1912a, ApJ, **35**, 315
- Russell, H. N 1912b, ApJ, **36**, 54
- Russell, H. N 1939, ApJ, **90**, 641
- Russell, H. N 1942, ApJ, **95**, 345
- Russell, H. N 1945, ApJ, **102**, 1
- Russell, H. N 1948, ApJ, **108**, 388
- Sahade J., Wood F.B., 1978, *Interacting Binary Stars*, Pergamon Press.
- Söderhjelm, S. 1974, A&A **34**, 59
- Söderhjelm, S. 1976, Lund Obs Rep., No. 10
- Söderhjelm, S. 1978, A&A **66**, 161

- Vaz L.P.R., 1984, Tese de Doutorado, Universidade de Copenhague
- Vaz L.P.R., 1986, Revista Mexicana de Astron. y Astrof. **12**, 177
- Vaz L.P.R., Andersen J., Rabello Soares M.C., 1995, A&A **301**, 693
- Wilson R.E., Devinney E.J., 1971, ApJ **166**, 605
- Wilson R.E., 1979, ApJ **234**, 1054
- Wilson, R.E. 1988, in IAU Symposium 107, Critical Observations versus Physical Models for Close Binary Systems, ed. K.C Leung (Montreux, Switzerland, Gordon and Breach)
- Wilson, R.E. 1992, Documentation of Eclipsing Binary Computer Model, privately circulated monograph.
- Wilson R.E., 1993, in “New Frontiers in Binary Star Research”, Pacific RIM colloquium, (K.C. Leung & I.-S. Nha , Eds.), ASP Conf. Series **38**, 91
- Wood D.B., 1971, AJ **76**, 701
- Wood D.B., 1972, “A Computer Program for Modelling Non-Spherical Eclipsing Star Systems”, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland