

Aplicação da Regularização Implícita na Teoria
 $\lambda\phi_6^3$ sem massa

Carlos Renato Pontes

Junho de 2004

Carlos Renato Pontes

**Aplicação da Regularização Implícita na Teoria $\lambda\phi^3_6$
sem massa**

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de MESTRE EM CIÊNCIAS.

Área de concentração: Teoria Quântica de Campos
Orientador: Maria Carolina Nemes (UFMG)
Coorientador: Marcos Donizetti Sampaio (UFMG)

Departamento de Física - ICEX - UFMG

Junho de 2004

Agradecimentos

A Professora Carolina pelo apoio, ensino, paciência e dedicação.

Ao Professor Marcos pelo ensino paciente sem o qual este trabalho não seria possível.

Ao Antônio, Davi e José, pela discussão sobre as Funções Hipergeométricas.

Aos meus pais

A Claudia e Samuel

Aos amigos da República Sledge Hammer

A toda galera de Viçosa

Ao Edson e ao Ceará e aos colegas da UFMG

CONTEÚDO

1	Introdução	6
2	Ferramentas básicas	9
2.1	A teoria $\lambda\phi_6^3$ e seu grupo de Renormalização	9
2.1.1	Grupo de Renormalização	10
2.2	A técnica de Rosner	11
2.2.1	Relação entre as funções hipergeométricas e a série geométrica	14
2.3	Integrais divergentes importantes	16
2.3.1	A integral logicamente divergente $I_{log}(\mu^2)$	16
2.3.2	A integral quadraticamente divergente $I_{quad}(m^2)$	17
3	Cálculo da Auto Energia pela Técnica da Regularização Implícita	19
3.1	Introdução	19
3.2	O método da Regularização Implícita	19
3.2.1	Aplicação à auto energia da teoria $\lambda\phi_6^3$	20
3.3	Cálculo explícito das integrais típicas	21
3.3.1	Diferença entre integrais logicamente divergentes	27

CONTEÚDO	3
3.3.2 Resultado Final	28
3.4 Cálculo Alternativo da Auto energia	29
3.4.1 Cálculo explícito da auto energia	29
4 Cálculo da função γ	32
4.1 Introdução	32
4.1.1 Auto energia e constante de renormalização	34
4.1.2 Cálculo da função γ	35
5 Conclusões	36
6 Apêndice A: Cálculo de Integrais do Capítulo 3	37
6.1 Cálculo das integrais F,G e H	37
6.1.1 Cálculo da integral F	37
6.1.2 Cálculo da integral G	38
6.1.3 Cálculo da integral H	41
REFERÊNCIAS	44

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo testar a técnica de Regularização Implícita em teorias sem massa e investigar se é (ou não) necessário alterar a técnica para tratar as divergências infravermelha(IV). Aprende-se ainda que em teorias apenas UV(ultravioleta) divergentes pode-se ter suas divergências absorvidas na Renormalização. Divergências IV podem aparecer durante o processo de Regularização Implícita(RI) sendo necessário uma relação delicada entre a parte divergente UV e a parte finita UV para que ela seja eliminada. Faz-se ainda o cálculo da função γ .

Abstract

The purpose of the present work is to test the Implicit Regularization Technique in massless theories and to investigate if the treatment requires modifications to meet the IR divergences from the one used to treat UV divergences. One learns that no modifications are needed and that the cancellation of UV divergences requires a subtle relation between divergent and finite output of the amplitudes. We also obtain the anomalous dimension of the theory.

Introdução

A Regularização Implícita (RI) é um método de tratar infinitos que aparecem em cálculos perturbativos das teorias quântica de campos renormalizáveis, ver(9; 15). Ela apresenta características desejadas, como a) preserva a simetria no processo de regularização/renormalização, b) funciona diretamente no espaço dos momentos sem a necessidade de recorrer a continuação analítica no espaço-tempo, e c) não modifica a dimensão do espaço. Além disso a RI dá nova percepção de alguns cálculos e pode ser aplicado em casos em que outros métodos padrão não podem. Permite entender como certos resultados podem depender da regularização adotada.

Na RI uma função regularizadora, $R(k^2, \Lambda_i)$ é adotada mas somente de maneira implícita de modo a justificar os passos algébricos nos integrandos divergentes. Assume-se que $R(k^2, \Lambda_i)$ é par em k^2 no integrando, e Λ_i são parâmetros dessa distribuição. No limite de conexão $\lim_{\Lambda_i \rightarrow \infty} R(k^2, \Lambda_i) = 1$, de forma que as amplitudes não sejam modificadas. O propósito é mostrar que as divergências podem ser colocadas em termos de integrais divergentes que dependem somente dos momentos internos (chamadas integrais básicas) que não serão calculadas. Os termos restantes são uma diferença de integrais com mesmo grau superficial de divergência chamada relação de consistência (RC), e partes finitas UV que dependem do momento externo. O valor da RC depende da regularização adota, ou de um modo mais geral é indeterminada. Contudo seu valor pode ser determinado nos estágios finais dos cálculos pelas simetrias da teoria (1).

A principal característica da Regularização Implícita é deixar as integrais divergentes básicas intocadas. Nenhum termo finito está perdido, con-

siderando que os termos locais arbitrários podem ser parametrizadas pela RC. Termos arbitrários locais correspondem a colocar contra-termos finitos na lagrangeana, e podem ser acrescentados desde que obedeam a simetrias relevantes da teoria. Assim a RI por ter estas características é uma técnica bem geral.

Uma versão da RI em que as Relações de Consistência sejam zero teria vantagens do ponto de vista dos cálculos e fixaria desde de o início algumas escalas abitrárias fazendo com que as (identidades de calibre) fossem conservadas. Até o momento a RC esta conectada a invariancia na rotulação do momento do diagrama loop de Feynman. Se a RC desaparece a amplitude é invariante a rotulação do momento. Deve-se contudo tomar cuidado para calcular amplitudes que contém objetos que violam a paridade como as matrizes γ^5 .

A RC é particularmente importante no estudo de teorias Chirais e Anomalia Chiral veja (8), uma vez que a dependência na rotulação do momento tem um papel fundamental na descrição da Anomalia Chiral e já que as identidades de Ward referentes ao decaimento fraco do pión dependem fundamentalmente delas(16). Portanto formas que possibilitem facilidade nos cálculos em RI são importantes.

A técnica de Regularizaõa Implícita foi testada em vários contextos, em sua maioria em teorias massivas, com bastante êxito no que se refere a preservação de simtrias e determinação de anomalias, cálculos de funções do grupo de renormalização(GR). Menos atenção foi, no entanto devotada a teorias sem massa. Um dos problemas nesse contexto com vários tipos de regularizações é a obrigatoriedade de introduzir técnicas para tratar o IV e o UV. O objetivo desta dissertação é usar uma teoria simples que nos permita compreender o funcionamento da técnica em teorias sem massa. Em particular mostra-se que não é necessário introduzir mais “regras”. Aprende-se ainda, que, as divergências UV podem ser absorvidas na renormalização, o cancelamento das divergências IV necessita uma conexão delicada com a parte finita da amplitude. Como exemplo de aplicação calcula-se a dimensão anômala do campo.

Calculamos de duas maneiras diferentes a auto energia da teoria $\lambda\phi_3^6$ utilizando em passos intermediários a técnica de Rosner (2). No capítulo 3 aplicamos a Regularização Implícita (RI) juntamente com a técnica de

Rosner, que é especialmente adequada para teorias sem massa. No final do capítulo 3 uma técnica alternativa que não separa as divergências em um primeiro passo, é também aplicada. Esta segunda forma de fazer os cálculos é muito mais simples que o primeiro do ponto de vista calculacional, no entanto não se presta facilmente a sistematizações.

Ferramentas básicas

2.1 A teoria $\lambda\phi_6^3$ e seu grupo de Renormalização

A teoria de campos mais simples é uma teoria escalar ϕ auto interagente com acoplamento tipo ϕ^3 . Em seis dimensões essa teoria é renormalizável e tem sido usada como um “playground” para diversos testes de consistência, prova de renormalizabilidade, técnicas não perturbativas, etc.

A lagrangeana da teoria é:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_o)^2 - \frac{1}{2}m_o\phi_o^2 + \frac{g_o\phi_o^3}{3!}. \quad (2.1)$$

Pode-se definir variáveis renormalizadas através das constantes de renormalização

$$\begin{aligned} \phi_o &= Z^{\frac{1}{2}}\phi \\ m_o^2 &= Z_m m^2 \\ g_o &= Z_g g \end{aligned}$$

Com isso a lagrangeana (2.1) pode ser redefinida como:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m\phi^2 + \frac{g\phi^3}{3!} + \frac{1}{2}A(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}Bm\phi^2 + \frac{gC\phi^3}{3!}. \quad (2.2)$$

Definimos também

$$Z = 1 + A, \tag{2.3}$$

$$ZZ_m = 1 + B, \tag{2.4}$$

$$Z^{\frac{3}{2}}Z_g = 1 + C. \tag{2.5}$$

As regras de Feynman da teoria são

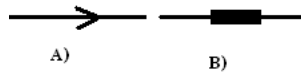


Figura 2.1: a) propagador $\frac{i}{p^2 - m^2}$, B) contra termo $i(Ap^2 - Bm^2)$

Há ainda

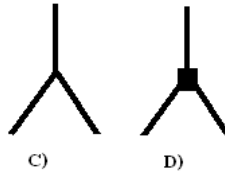


Figura 2.2: a) Vértice ig, B) contra termo igC

2.1.1 Grupo de Renormalização

Sempre que se faz uma renormalização perturbativa são obtidas amplitudes divergentes que devem ser regularizadas através de algum procedimento. Esse processo naturalmente introduz uma escala arbitrária. Esta escala é usada no processo de cálculo das funções do grupo de renormalização, e aparecerá nestes cálculos através das constantes Z e Z_g . A função de Green depende da escala introduzida pela renormalização, mas a função de Green nua não depende. Assim temos a relação:

$$Z^{(\frac{-n}{2})}\Gamma_R^n = \Gamma_o^n(pi, g_o, m_o).$$

Portanto sua derivada em relação a escala λ fornecerá a relação:

$$\frac{d}{d\lambda}[Z^{-\frac{n}{2}}\Gamma_R^n] = 0,$$

o que resulta em

$$\left. \frac{\partial Z^{(-\frac{n}{2})}}{\partial \lambda} \right|_{g,m} \Gamma_n + Z^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial g}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial g} + \frac{\partial m}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial m} \right) \Gamma_n \Big|_g = 0, \quad (2.6)$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} - n\gamma \right) \Gamma_n = 0, \quad (2.7)$$

onde β, γ_m e γ são definidas por

$$\beta = \lambda \left. \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right|_{g,m},$$

$$\gamma_m = -\frac{\lambda}{m} \left. \frac{\partial m}{\partial \lambda} \right|_{g,m},$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{2Z} \left. \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \right|_{g,m}.$$

Quando a teoria for não massiva ($m = 0$), o termo γ_m será nulo.

2.2 A técnica de Rosner

Nesta seção encontram-se as relações e propriedades necessárias para o cálculo de integrais, utilizando a técnica de Rosner, ver(3). Em princípio têm-se:

$$\frac{1}{(\vec{p} - \vec{k})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) C_n^2(\hat{p} \cdot \hat{k}), \quad (2.8)$$

o termo $C_n^\lambda(\hat{p} \cdot \hat{k})$ é um polinômio. Se $\lambda = 1/2$ têm-se um polinômio de Legendre, se $\lambda = 1$ têm-se um polinômio de Chebyshev e para $\lambda = 2$ ($N = 6$

dimensões) têm-se um polinômio de Gegenbauer, sendo que λ é dado pela relação $\lambda = N/2 - 1$ onde N é a dimensão. Os polinômios de Gegenbauer $C_n^\lambda(\hat{p} \cdot \hat{k})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, e $\lambda > -1/2$ formam um conjunto completo no intervalo $(-1, 1)$. O termo $\hat{p} \cdot \hat{k}$ é um cosseno do ângulo entre \vec{p} e \vec{k} . A relação de ortonormalidade é dada abaixo:

$$\frac{1}{\Omega_N} \int d\Omega_N C_n^\lambda(\hat{p} \cdot \hat{k}) C_m^\lambda(\hat{p} \cdot \hat{k}) = A_n \delta_{n,m}, \quad (2.9)$$

onde $A_n = \frac{\lambda \Gamma(n+2\lambda)}{n!(n+\lambda)\Gamma(2\lambda)}$ e $\Omega_N = \int d\Omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$.

É válido lembrar ainda os polinômios de Gegenbauer úteis neste trabalho:

$$C_0^\lambda(t) = 1. \quad (2.10)$$

A relação a seguir fornece os polinômios necessários apartir do polinômio anterior $C_0^\lambda(t) = 1$, veja(3):

$$2(n + \lambda)tC_n^\lambda(t) = (n + 1)C_{n+1}^\lambda(t) + (1 - \delta_{n,0})(n + 2\lambda - 1)C_{n-1}^\lambda(t), \quad (2.11)$$

também será importante a relação

$$C_1^\lambda(t) = 2\lambda t. \quad (2.12)$$

Agora o termo C_2^λ

$$C_2^\lambda(t) = 2\lambda(\lambda + 1)t^2 - \lambda, \quad (2.13)$$

e por último:

$$C_3^\lambda(t) = \frac{1}{3}\lambda(4\lambda^2 + 12\lambda + 8)t^3 - 2\lambda(\lambda + 1)t, \quad (2.14)$$

o t é ângulo nas relações anteriores e pode ser dado por

$$\hat{p} \cdot \hat{k} = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})}{(pk)} = t. \quad (2.15)$$

Para este trabalho que é feito em 6 dimensões, o $\lambda = 2$. Resta agora a relação $f_n(k, p)$, que será dada a seguir.

$$f_n(k, p) = \frac{1}{(pk)_>} z_{pk}^n G_n(z_{pk}^2), \quad (2.16)$$

onde

$$(pk)_> = \begin{cases} p^2 & \text{se } p > k \\ k^2 & \text{se } k > p \end{cases}.$$

Tem-se também

$$z_{kp} = \begin{cases} \frac{k}{p} & \text{se } p > k \\ \frac{p}{k} & \text{se } k > p \end{cases}.$$

Restando somente o $G_n(x)$ para ser definido abaixo:

$$G_n(x) = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\lambda)}(1-x)^{2\lambda-1}[_2F_1(\lambda, n+2\lambda; n+\lambda+1; x)], \quad (2.17)$$

sendo que $\lambda = 2$ e ${}_2F_1$ é uma função hipergeométrica que tem a série:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.18)$$

aqui $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$.

2.2.1 Relação entre as funções hipergeométricas e a série geométrica

É possível encontrar através de derivação da série geométrica uma relação para a função hipergeométrica (2.18) que não envolva o somatório. As relações necessárias neste trabalho são apresentadas aqui. A primeira relação é feita em detalhes, e as outras apenas os resultados são apresentados, pois são cálculos similares.

1. Caso ${}_2F_1(2, 5; 4; x)$: Após algumas manipulações da relação (2.18), obtemos

$${}_2F_1(2, 5; 4; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2)_n (5)_n}{(4)_n} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{4} \left[\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n + 5n x^n + 4x^n \right], \quad (2.19)$$

e da expressão $\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, que pode ser derivada dos dois lados da igualdade, resulta

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Para que a expressão acima tenha a forma de série geométrica é necessário fazer a mudança $m = n - 1$, o que resulta na relação

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{m=-1}^{\infty} (m+1)x^m.$$

Finalmente chega-se ao resultado

$$\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)} = \sum_{m=0}^{\infty} mx^m. \quad (2.20)$$

Derivando uma segunda vez a série geométrica e utilizando a mesma argumentação anterior, obtemos

$$\frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \sum_{p=0}^{\infty} p^2 x^p. \quad (2.21)$$

Pela substituição de (2.20) e (2.21) em (2.19) obtemos uma expressão sem somatório para ${}_2F_1(2, 5; 4; x)$, da forma:

$${}_2F_1(2, 5; 4; x) = \frac{1}{2(1-x)^3} + \frac{1}{2(1-x)^2}, \quad (2.22)$$

válida para $|x| < 1$.

2. Caso ${}_2F_1(2, 7; 6; x)$: Pelos mesmos argumentos obtemos

$${}_2F_1(2, 7; 6; x) = \frac{1}{3(1-x)^3} + \frac{2}{3(1-x)^2}. \quad (2.23)$$

3. Caso ${}_2F_1(2, 6; 5; x)$: De forma análoga temos

$${}_2F_1(2, 6; 5; x) = \frac{2}{5(1-x)^3} + \frac{3}{5(1-x)^2}. \quad (2.24)$$

4. Caso ${}_2F_1(2, 4; 3; x)$: Também argumentos idênticos levam a

$${}_2F_1(2, 4; 3; x) = \frac{2}{3(1-x)^3} + \frac{1}{3(1-x)^2}. \quad (2.25)$$

2.3 Integrais divergentes importantes

2.3.1 A integral logaritmicamente divergente $I_{log}(\mu^2)$

A integral logaritmicamente divergente UV, é importante neste trabalho, pois utilizando uma relação importante deduzida aqui, é possível cancelar a divergência IV que durante o uso da RI aparece nos cálculos.

Seja a integral logaritmicamente divergente UV:

$$I_{log}(\mu^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^3} \quad (2.26)$$

A integral está no espaço de Minkowski e μ é um cutoff IV. Quando no espaço euclidiano teremos

$$I_{log}(\mu^2) = -i \int_0^{\infty} \frac{k^5 dk}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + \mu^2)^3} \int d\Omega \quad (2.27)$$

foi usada relação ($d^6 k = k^5 dk d\Omega$). Pode-se ainda fazer ($dk^2 = 2k dk$), assim temos

$$I_{log}(\mu^2) = -\frac{i}{(4\pi)^3} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} k^4 d^2 k \frac{1}{(k^2 + \mu^2)^3} \quad (2.28)$$

Mudando-se as variáveis

$$y = k^2 + \mu^2 \longrightarrow dy = dk^2,$$

$$k^2 = 0 \longrightarrow y = \mu^2,$$

$$k^2 = \infty \longrightarrow y^2 = \infty.$$

A integral fica então com a forma

$$I_{log}(\mu^2) = -\frac{i}{(4\pi)^3} \frac{1}{2} \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{(y - \mu^2)^2 dy}{y^3}. \quad (2.29)$$

Assim, chamando $b = \frac{i}{2(4\pi)^3}$ obtmos a forma final desejada

$$I_{log}(\mu^2) = -b \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{dx}{x} + \frac{3b}{2} \quad (2.30)$$

Com a relação (2.30) pode-se obter mais uma relação importante que vai definir no contexto da RI a escala do grupo de renormalização e também impedir a catástrofe infravermelho. A relação é conseguida fazendo

$$I_{log}(\mu^2) - I_{log}(\lambda^2) = -b \left(\int_{\mu^2}^{\infty} \frac{dy}{y} - \int_{\lambda^2}^{\infty} \frac{dy}{y} \right). \quad (2.31)$$

A relação de escala fica

$$I_{log}(\mu^2) = I_{log}(\lambda^2) - b \ln \frac{\lambda^2}{\mu^2} \quad (2.32)$$

2.3.2 A integral quadraticamente divergente $I_{quad}(m^2)$

Em teorias não massivas a integral quadraticamente divergente não contribui, veja (4). Este comportamento é melhor compreendido quando parametrizamos a integral. Para a parametrização da integral com divergência quadrática é necessário o resultado da parametrização da integral logaritmicamente divergente. As duas parametrizações são apresentadas abaixo.

Seja a integral logaritmicamente divergente onde i assume valores inteiros.

$$\int_k^\Lambda \frac{k^{2i}}{(k^2 - m^2)^{i+2}}, \quad (2.33)$$

derivando-a em relação a m^2

$$\frac{\partial I_{log}^i(m^2)}{\partial m^2} = \frac{\partial}{\partial m^2} \int_k^\Lambda \frac{k^{2i}}{(k^2 - m^2)^{i+2}} = -\frac{b}{m^2}. \quad (2.34)$$

Aqui o $\int_k = \int d^N k$ (N é a dimensão da integração), i assume valores inteiros e $b = \text{constante}$.

Integrando (2.34) obtém-se uma parametrização geral para a integral $\int_k^\Lambda \frac{k^{2i}}{(k^2 - m^2)^{i+2}}$, cujo resultado é:

$$\tilde{I}_{log}^{i\Lambda}(m^2) = b \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \beta, \quad (2.35)$$

aqui β é uma constante finita. Será encontrada uma parametrização da I_{quad} de forma análoga.

$$I_{quad}^{i\Lambda}(m^2) = \int_k^\Lambda \frac{k^{2i}}{(k^2 - m^2)^{i+1}}. \quad (2.36)$$

A derivação em relação novamente a m^2 resulta

$$\frac{\partial I_{quad}^{i\Lambda}(m^2)}{\partial m^2} = (i+1) I_{log}^{i\Lambda}(m^2), \quad (2.37)$$

utilizando de (2.35) e integrando a equação acima

$$\tilde{I}_{quad}^{i\Lambda}(m^2) = b(i+1) \left(c\Lambda^2 + m^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + \alpha^2 m^2 \right). \quad (2.38)$$

Para uma teoria não massiva ($m \rightarrow 0$). A constante c é arbitrária, logo podemos adotá-la como sendo igual a zero. Assim para a teoria não massiva a contribuição do termo com divergência quadrática é zero.

Cálculo da Auto Energia pela Técnica da Regularização Implícita

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos a técnica de Regularização Implícita aplicada a auto energia um loop da teoria $\lambda\phi^3$ não massiva. Explicitamos a parte divergente e a parte finita, mostramos que não é necessário uma técnica diferente para tratar divergências UV (ultravioleta) e IV (infravermelho). Calculamos a escala do Grupo de Renormalização. Em particular, a parte finita é obtida usando-se uma elegante técnica proposta por Rosner, veja (3).

3.2 O método da Regularização Implícita

O objetivo principal da técnica de Regularização Implícita é, não modificar a amplitude de Feynman a ser calculada em nenhum passo do cálculo. Supomos a existência de uma regularização apenas para dar sentido às integrais divergentes. Outra idéia essencial do método é separar as integrais divergentes, independentes de momentos externos e deixá-las na forma de integrais, que eventualmente poderão ser calculadas por qualquer método. Desta forma a parte finita pode ser extraída sistematicamente.

A técnica baseia-se na utilização da seguinte identidade

$$\frac{1}{(p-k)^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{2p \cdot k - p^2}{k^2[(p-k)^2]} \quad (3.1)$$

Note que se uma amplitude física tiver dois ou mais denominadores a aplicação da identidade vai torná-la cada vez mais convergente, isolando as divergências independentes do momento físico, p na identidade acima.

3.2.1 Aplicação à auto energia da teoria $\lambda\phi_6^3$

A expressão da auto energia é:

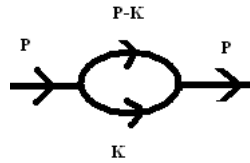


Figura 3.1: $-i\Sigma = \text{Auto energia}$

$$-i\Sigma = \frac{g^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6k}{(2\pi)^6} \frac{1}{k^2[(p-k)^2]}. \quad (3.2)$$

A integral acima é quadraticamente divergente, portanto aplicando a identidade (3.1) três vezes resultará na seguinte soma de integrais:

$$-i\Sigma = \frac{g^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6k}{(2\pi)^6} \left[\frac{1}{(k^2)^2} + \frac{(2p \cdot k - p^2)}{(k^2)^3} + \frac{(2p \cdot k - p^2)^2}{(k^2)^4} + \frac{(2p \cdot k - p^2)^3}{(k^2)^4[(p-k)^2]} \right] \quad (3.3)$$

a qual após alguma álgebra torna-se

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \frac{g^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \left[\frac{1}{k^4} \right. & \text{(A)} \\
&- \frac{p^2}{k^6} & \text{(B)} \\
&+ \frac{4(p \cdot k)^2}{k^8} & \text{(C)} \\
&+ \frac{p^4}{k^8} & \text{(D)} \\
&+ \frac{8(p \cdot k)^3}{k^8(p - k)^2} & \text{(E)} \\
&- \frac{p^6}{k^8(p - k)^2} & \text{(F)} \\
&- \frac{12p^2(p \cdot k)^2}{k^8(p - k)^2} & \text{(G)} \\
&+ \left. \frac{6p^4(p \cdot k)}{k^8(p - k)^2} \right] & \text{(H).} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Estas integrais acima apresentam divergências quadrática e logarítmica no UV e também divergências no IV. Algumas são finitas no UV e no IV.

3.3 Cálculo explícito das integrais típicas

A divergência IV aparece após a manipulação do integrando com a identidade básica(3.1) da RI. A divergência IV deve ser eliminada dos cálculos, uma vez que inicialmente ela não existia. Notaremos que ocorre o cancelamento da divergência IV através de uma relação delicada entre a parte divergente UV, e a parte finita UV.

As integrais têm as divergências UV distribuídas da seguinte forma: A integral (A) é quadraticamente divergente UV, as integrais (B) e (C), são logaritmicamente divergentes UV. Os outros cinco termos restantes (D,E,F,G e H) são finitos UV.

Os cálculos das duas primeiras integrais típicas (D e E) serão feitos detalhadamente por questão de clareza, neste capítulo. Calculamos as demais integrais no apêndice B, já que seus cálculos são similares. A primeira inte-

gral finita (D), não emprega a técnica de Rosner para ser calculada mas para as demais a técnica é empregada.

1. Cálculo da integral D

A primeira integral finita (D) está no espaço de Minkowski, e será transferida para o espaço euclidiano, ficando

$$D = i \frac{p^4 g^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6 k}{(2\pi)^6 k^8}. \quad (3.5)$$

Mudando para coordenadas polares e colocando um cut-off (μ) na integral em k , têm-se

$$D = i \frac{p^4 g^2}{2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{k^5 dk}{(2\pi)^6 k^8} \int d\Omega. \quad (3.6)$$

Como em 6 dimensões ($N = 6$), $\int d\Omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} = \pi^3$ e lembrando que $dk^2 = 2kdk$, a integral acima torna-se

$$D = i \frac{g^2}{4} p^4 \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{1}{k^4} \frac{d^2 k}{(2\pi)^6} \pi^3. \quad (3.7)$$

Podmos fazer a mudança da variável de integração para $x = \frac{k^2}{p^2}$, o que resulta

$$D = i \frac{g^2}{4} \frac{p^2}{(4\pi)^3} \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2}. \quad (3.8)$$

E o resultado é:

$$D = i \frac{g^2 p^2}{4(4\pi)^3} \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right). \quad (3.9)$$

O procedimento aqui utilizado para evitar a divergência IV foi impedir que a variável da integral assumisse o valor zero. Poderíamos ao invés disso ter acrescentado a massa μ ao propagador.

2. Cálculo da integral E

A segunda integral finita (E) depois de mudada do espaço de Minkowski para o espaço de Euclides fica:

$$E = \frac{i8g^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})^3}{k^8 (\vec{p} - \vec{k})^2}. \quad (3.10)$$

Para o cálculo desta integral é utilizado neste trabalho a técnica de Rosner, em que primeiro utiliza-se a relação (2.8) na integral acima, ficando:

$$E = \frac{i8g^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{k^8} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) C_n^2(\hat{p} \cdot \hat{k}) (\vec{p} \cdot \vec{k})^3. \quad (3.11)$$

Mudando para coordenadas polares o termo $\int_{-\infty}^{\infty} d^6 k$ vira $\int_0^{\infty} k^5 dk \int d\Omega$. Sendo $(\hat{p} \cdot \hat{k})^3 = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})^3}{(pk)^3}$, onde $\frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})}{(pk)} = (\hat{p} \cdot \hat{k})$ é ângulo um ângulo, obtemos:

$$E = \frac{i8g^2}{2(2\pi)^6} \left[\int_0^{\infty} \frac{k^5 dk}{k^8} \int d\Omega \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) C_n^2(\hat{p} \cdot \hat{k}) \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})^3}{(pk)^3} (pk)^3 \right]. \quad (3.12)$$

Com a relação (2.14), com $\lambda = 2$, e ainda $t = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})}{(pk)}$ que é um ângulo, chegamos após algumas manipulações a $t^3 = \frac{C_3^2}{32} + \frac{3C_1^2}{32}$. A integral (3.12) adquirirá então a forma

$$E = \frac{ig^2 8}{2(2\pi)^6} \left[\frac{p^3 \pi^3}{32} \int_0^{\infty} dk \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) \int \frac{d\Omega}{\pi^3} C_n^2 C_3^2 + \frac{3p^3 \pi^3}{32} \int_0^{\infty} dk \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) \int \frac{d\Omega}{\pi^3} C_n^2 C_1^2 \right], \quad (3.13)$$

onde $A_n = \frac{\lambda \Gamma(n+2\lambda)}{n!(n+\lambda)\Gamma(2\lambda)}$ e $\Omega_N = \int d\Omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$.

Com a relação de ortonormalização dos polinômios de Chebyshev (2.9), as integrais acima tornam-se:

$$E = \frac{ig^2 8}{2(2\pi)^6} \left[8 \frac{p^3 \pi^3}{32} \int_0^\infty dk f_3(p, k) + \frac{8p^3 \pi^3}{32} \int_0^\infty dk f_1(p, k) \right]. \quad (3.14)$$

O intervalo de integração deve ser partido para que se possa aplicar a identidade (2.16). Dividimos o intervalo de integração que vai de \int_0^∞ , em um intervalo que vai de $\int_0^p + \int_p^\infty$, além disso colocando um cut-off (μ) na integral, e com a relação (2.17), as integrais (3.14) tornam-se

$$E = \frac{ig^2 8}{2(2\pi)^6} \left[8 \frac{\pi^3}{32p^2} \int_\mu^p dk k^3 G_3\left(\left(\frac{k}{p}\right)^2\right) + 8 \frac{\pi^3 p^6}{32} \int_p^\infty dk \frac{1}{k^5} G_3\left(\left(\frac{p}{k}\right)^2\right) \right. \\ \left. + \frac{8\pi^3}{32} \int_\mu^p dk k G_1\left(\left(\frac{k}{p}\right)^2\right) + \frac{8p^4 \pi^3}{32} \int_p^\infty dk \frac{1}{k^3} G_1\left(\left(\frac{p}{k}\right)^2\right) \right]. \quad (3.15)$$

Fazendo a substituição ($d^2k = 2kdk$) nas integrais (3.15) temos:

$$E = \frac{ig^2 8}{2(2\pi)^6} \left[\frac{8\pi^3}{32p^2(2)} \int_0^{p^2} d^2k k^2 G_3\left(\left(\frac{k}{p}\right)^2\right) + \frac{8\pi^3 p^6}{32(2)} \int_{p^2}^\infty d^2k \frac{1}{k^6} G_3\left(\left(\frac{p}{k}\right)^2\right) \right. \\ \left. + \frac{8\pi^3}{32(2)} \int_0^{p^2} d^2k G_1\left(\left(\frac{k}{p}\right)^2\right) + \frac{8p^4 \pi^3}{32(2)} \int_{p^2}^\infty d^2k \frac{1}{k^4} G_1\left(\left(\frac{p}{k}\right)^2\right) \right]. \quad (3.16)$$

Mudando a variável ($x = \frac{k^2}{p^2}$) e colocando cut-off (μ) nas integrais, obtemos a expressão:

$$E = \frac{8ig^2}{2(2\pi)^6} \left[\frac{8p^2 \pi^3}{32(2)} \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 dx \cdot x \cdot G_3(x) + \frac{8p^2 \pi^3}{32(2)} \int_1^\infty dx \cdot \frac{1}{x^3} \cdot G_3\left(\frac{1}{x}\right) \right. \\ \left. + \frac{8\pi^3 p^2}{32(2)} \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 dx \cdot G_1(x) + \frac{8p^2 \pi^3}{32(2)} \int_1^\infty dx \cdot \frac{1}{x^2} \cdot G_1\left(\frac{1}{x}\right) \right]. \quad (3.17)$$

Ainda com as relações (2.17), obtemos:

$$\begin{aligned}
E = & \frac{8ig^2}{2(2\pi)^6} \left[\frac{8p^2\pi^3}{32(2)} \frac{1}{4} \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 dx \cdot x \cdot (1-x)^3 \cdot {}_2F_1(2, 7; 6; x) \right. \\
& + \frac{8p^2\pi^3}{32(2)} \frac{1}{4} \int_1^\infty dx \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 \cdot {}_2F_1(2, 7; 6; \frac{1}{x}) \\
& + \frac{8\pi^3 p^2}{32(2)} \frac{1}{2} \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^\infty dx \cdot (1-x)^3 \cdot {}_2F_1(2, 5; 4; x) \\
& \left. + \frac{8p^2\pi^3}{32(2)} \frac{1}{2} \int_1^\infty dx \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 \cdot {}_2F_1(2, 5; 4; \frac{1}{x}) \right]. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Observamos que há somatórios nos integrandos em ${}_2F_1$, mas isto pode ser contornado utilizando o recurso (2.22). Com a substituição das relações (2.22 e 2.23) na integral (3.18), e com mais alguma álgebra, obtemos as integrais abaixo

$$\begin{aligned}
E = & \frac{ig^2 8}{2(2\pi)^6} \left[8 \frac{p^2\pi^3}{32(2)} \frac{1}{4} \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 dx \cdot \left(x - \frac{2x^2}{3}\right) \right. \\
& + 8 \frac{p^2\pi^3}{32(2)} \frac{1}{4} \int_1^\infty dx \cdot \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{3x^4}\right) \\
& + \frac{8p^2\pi^3}{32(2)} \frac{1}{2} \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^\infty dx \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) \\
& \left. + \frac{8p^2\pi^3}{32(2)} \frac{1}{2} \int_1^\infty dx \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3}\right) \right]. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Fazemos a integração para obtermos:

$$\begin{aligned}
E = & \frac{ig^2 8}{2(2\pi)^6} \left[\frac{8p^2 \pi^3}{32(2)} \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{9} \right)_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 \right. \\
& + \frac{8p^2 \pi^3}{32(2)} \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{2x^2} + \frac{2}{9x^3} \right)_1^\infty \\
& + \frac{8p^2 \pi^3}{32(2)} \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{4} \right)_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 \\
& \left. + \frac{8p^2 \pi^3}{32(2)} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} \right)_1^\infty \right]. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

O resultado final no limite $\mu \rightarrow 0$, é:

$$E = \frac{4 ig^2 p^2}{9 (4\pi)^3}. \tag{3.21}$$

3. Cálculo da integral F

Os cálculos desta integral estão no apêndice A.

No espaço euclidiano temos:

$$F = -\frac{ip^6 g^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6 k}{(2\pi)^6 k^8 (\vec{p} - \vec{k})^2}, \tag{3.22}$$

depois de um pouco de álgebra similar a da integral (3.10) chegamos a solução

$$F = \frac{ip^2 g^2}{(4\pi)^3} \frac{11}{72} - \frac{ip^2 g^2}{4(4\pi)^3} \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) - \frac{ip^2 g^2}{(4\pi)^3} \frac{\ln\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)}{12}. \tag{3.23}$$

Notamos que o segundo termo do resultado acima, o qual é divergente Infravermelho, é cancelado pelo termo (3.9).

4. Cálculo da integral G

Mudamos a integral para o espaço de Euclides e fazmos os cálculos de forma similar as integrais anteriores, estes cálculos estão no apêndice A. Seja

$$G = -\frac{i12p^2g^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6k \cdot (\vec{p} \cdot \vec{k})^2}{(2\pi)^6 k^8 (\vec{p} - \vec{k})^2}. \quad (3.24)$$

O resultado do cálculo da integral é:

$$G = -\frac{ig^2p^2}{(4\pi)^3} \left(\frac{5}{6}\right) + \frac{ig^2p^2}{2(4\pi)^3} \ln \frac{\mu^2}{p^2}. \quad (3.25)$$

O termo com \ln será cancelado por um termo da próxima integral.

5. Cálculo da integral H

A integral H no espaço euclidiano é:

$$H = \frac{i6g^2p^4}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6k}{(2\pi)^6} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})}{k^8 (\vec{p} - \vec{k})^2}. \quad (3.26)$$

Estes cálculos também constam no apêndice A. A integral terá o resultado:

$$H = -\frac{ig^2p^2}{12(4\pi)^3} - \frac{ig^2p^2}{2(4\pi)^3} \ln\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right). \quad (3.27)$$

Devemos notar que o segundo termo do resultado acima, cancela o segundo termo com \ln da integral anterior.

Resta ainda o cálculo das integrais que tem divergência ultravioleta. O que será feito a seguir.

3.3.1 Diferença entre integrais logaritmicamente divergentes

A diferença entre as integrais logaritmicamente divergentes (B e C) pode ser tratada como segue.

$$B + C = -\frac{g^2}{2} p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6k}{k^6} + 4 \frac{g^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})^2}{k^8}. \quad (3.28)$$

As integrais são manipuladas para obtermos:

$$B + C = -\frac{g^2}{2} \left[p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6 k}{k^6} - 6 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})^2}{k^8} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})^2}{k^8} \right]. \quad (3.29)$$

A diferença entre as duas primeiras integrais logaritmicamente divergentes acima é uma constante arbitrária α ver (7). Assim:

$$B + C = -\frac{g^2}{2} \left[\alpha g^{\mu\nu} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})^2}{k^8} \right], \quad (3.30)$$

Usamos a relação (2.30), e após alguma álgebra temos:

$$B + C = -\frac{g^2}{2} \alpha g^{\mu\nu} + \frac{ig^2 p^2}{12(4\pi)^3} \left(\frac{I_{\log}(\mu^2)(4\pi)^3 2}{i} - \frac{3}{2} \right). \quad (3.31)$$

Usando a relação de escala (2.32), chegamos ao resultado:

$$B + C = -\frac{g^2}{2} \alpha g^{\mu\nu} + \frac{g^2 p^2}{6} I_{\log}(\lambda^2) - \frac{ig^2 p^2}{12(4\pi)^3} \ln \lambda^2 + \frac{ig^2 p^2}{12(4\pi)^3} \ln \mu^2 - \frac{ig^2 p^2}{8(4\pi)^3}. \quad (3.32)$$

O λ é uma escala arbitrária. O termo $\ln \mu^2$ de B+C contém a divergência IV, mas será cancelada pelo termo também $\ln \mu^2$ da integral F.

3.3.2 Resultado Final

As integrais a seguir são finitas UV. Dos resultados obtidos percebemos o cancelamento das divergências IV a partir de um sutil relação advinda da parte finita UV, e da parte divergente UV (3.32). Este cancelamento possibilita que quando o limite ($\mu \rightarrow 0$), for tomado nós teremos novamente a teoria sem massa e sem os problemas da divergência IV. A teoria não tem divergência IV inicialmente por isso a RI respeita este aspecto como deveria.

Integrais finitas UV e divergentes IR e mais alguns resultados finitos:

$$D = i \frac{g^2 p^2}{4(4\pi)^3} \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right)$$

$$E = \frac{4}{9} \frac{ig^2 p^2}{(4\pi)^3}$$

$$\begin{aligned}
F &= \frac{ip^2g^2}{(4\pi)^3} \frac{11}{72} - \frac{ip^2g^2}{4(4\pi)^3} \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) - \frac{ip^2g^2}{(4\pi)^3} \frac{\ln(\frac{\mu^2}{p^2})}{12} \\
G &= -\frac{ig^2p^2}{(4\pi)^3} \left(\frac{5}{6} \right) + \frac{ig^2p^2}{2(4\pi)^3} \ln \frac{\mu^2}{p^2} \\
H &= -\frac{ig^2p^2}{12(4\pi)^3} - \frac{ig^2p^2}{2(4\pi)^3} \ln \left(\frac{\mu^2}{p^2} \right).
\end{aligned}$$

Quando o limite $\mu \rightarrow 0$ é tomado, observamos que de D é divergente IV e será cancelado pelo segundo termo de F.

O termo E é finito e fica como está. Outro cancelamento análogo é entre os últimos termos de G e H.

Os termos perigosos ($\ln \mu^2$ e $p^2 \frac{p^4}{\mu^2}$) são cancelados.

Para finalizar devemos avaliar as divergências UV:

$$I_{quad} \rightarrow 0, \quad (3.33)$$

e ainda

$$I_{log}^a - 6I_{log}^b \rightarrow \alpha. \quad (3.34)$$

Os índices a e b são utilizados para distinguir as duas integrais logaritmicamente divergentes e o α é uma constante arbitrária, ver (16). A constante será determinada pelas condições de simetria da teoria.

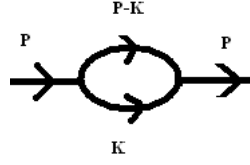
3.4 Cálculo Alternativo da Auto energia

A técnica utilizada nesta seção não efetua a separação das integrais divergentes e finitas no princípio do cálculo utilizando a identidade básica (3.1), como feito na seção anterior. A resolução feita aqui é mais prática do ponto de vista dos cálculos mas, a resolução com aplicação antes da identidade básica é mais útil para sistematizações. Os cálculos são totalmente análogos aos casos anteriores na sua estrutura de resolução assim não serão reproduzidos com todos os detalhes.

3.4.1 Cálculo explícito da auto energia

A auto energia no espaço euclidiano:

$$\frac{ig^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6k}{(2\pi)^6} \frac{1}{k^2[(p-k)^2]}. \quad (3.35)$$

Figura 3.2: $-i \Sigma = \text{Auto energia}$

Com a utilização da relação (2.8) obtemos

$$\frac{ig^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6 k}{(2\pi)^6 k^2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) C_n^2(\hat{p} \cdot \hat{k}), \quad (3.36)$$

Colocamos o cut-off μ , e com algumas manipulações, teremos:

$$= \frac{ig^2}{2} \frac{\pi^3}{(2\pi)^6} \left[\frac{1}{2p^2} \int_{\mu^2}^{p^2} k^2 dk^2 G_0\left(\left(\frac{k}{p}\right)^2\right) + \frac{p^2}{2} \int_{p^2}^{\infty} \frac{dk^2}{p^2} G_0\left(\left(\frac{p}{k}\right)^2\right) \right]. \quad (3.37)$$

Mudamos a variável para $x = \frac{k^2}{p^2}$ na primeira integral, multiplicamos e dividimos por p^2 a segunda integral, fazemos mais algumas manipulações algébricas, e obtemos:

$$= \frac{ig^2}{4} \frac{1}{(4\pi)^3} \left[p^2 \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 dx x(1-x)^3 \cdot {}_2F_1(2, 4; 3; x) + p^2 \int_{p^2}^{\infty} \frac{dk^2}{p^2} \left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^3 \cdot {}_2F_1\left(2, 4; 3; \frac{p^2}{k^2}\right) \right]. \quad (3.38)$$

O valor de ${}_2F_1(2, 4; 3; x)$ foi encontrado em (2.25). O intervalo da segunda integral é seccionado da forma: $\int_{p^2}^{\infty} = \int_{p^2}^{\lambda^2} + \int_{\lambda^2}^{\infty}$. Assim, obtemos

$$= \frac{ig^2}{4} \frac{1}{(4\pi)^3} \left[p^2 \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 dx \left(x - \frac{x^2}{3}\right) + p^2 \int_{p^2}^{\lambda^2} \frac{dk^2}{p^2} \left(1 - \frac{p^2}{3k^2}\right) + p^2 \int_{\lambda^2}^{\infty} \frac{dk^2}{p^2} \left(1 - \frac{p^2}{3k^2}\right) \right]. \quad (3.39)$$

Aqui mudamos a variável para $y = k^2$. Assim teremos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{ig^2}{4} \frac{1}{(4\pi)^3} \left[p^2 \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 dx \left(x - \frac{x^2}{3} \right) + \int_{p^2}^{\lambda^2} dy \left(1 - \frac{p^2}{3y} \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\lambda^2}^{\infty} dy \left(1 - \frac{p^2}{3y} \right) \right]. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

A relação (2.30) é utilizada e o resultado:

$$= -\frac{11ig^2p^2}{72(4\pi)^3} + \frac{ig^2}{4(4\pi)^3} \lambda^2 - \frac{ig^2p^2}{12(4\pi)^3} \ln \frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{ig^2}{4(4\pi)^3} \int_{\lambda^2}^{\infty} dy + \frac{ig^2p^2}{12(4\pi)^3} \left(\frac{I_{log}(\lambda^2)}{b} - \frac{3}{2} \right). \tag{3.41}$$

Aqui $b = \frac{i}{2(4\pi)^3}$ e $I_{log}(\lambda^2)$ é dado pela expressão (2.30). Novamente temos as integrais com divergência logaritmicas e quadráticas. As divergências quadráticas não contribuirão.

Cálculo da função γ

4.1 Introdução

A função do grupo de renormalização γ , tem um papel importante no comportamento assintótico da amplitude de Feynman(5). Ela é chamada de dimensão anômala e é importante para compreensão da dimensão do campo renormalizado. Está associada com a invariancia de escala.

Seja a transformação de escala (ou dilatação) no espaço-tempo:

$$x_\mu \longrightarrow e^{-t}x_\mu, \quad (4.1)$$

onde t é um parâmetro representando a dilatação. A transformação de escala acima gera a correspondente transformação do operador do campo. Restringindo-se a uma teoria escalar neutra com campo $\phi(x)$, a transformação de escala no operador do campo $\hat{\phi}(x)$ é:

$$\hat{\phi}(x) \longrightarrow U^\dagger \hat{\phi}(x) U = e^{-dt} \hat{\phi}(e^{-t}x), \quad (4.2)$$

aqui d é a constante característica para o campo $\phi(x)$ e U é o operador unitário que da origem a transformação de escala do campo $\phi(x)$. Se por exemplo $\hat{\phi}(x)$ é o campo livre, obtemos

$$d = \frac{D-2}{2} = 1, \quad (4.3)$$

sendo D a dimensão do espaço-tempo.

A equação (4.3) é obtida pela aplicação da transformação de escala (4.2) a relação de comutação canônica a seguir:

$$\left[\hat{\phi}(x), \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y_o} \right] \delta(x_o - y_o) = i\delta^D(x - y). \quad (4.4)$$

A dimensão d em (4.3) é uma ingênua dimensão de massa do $\hat{\phi}(x)$ obtida pela simples contagem de potências, sendo chamada dimensão canônica e representada por $d_o = \frac{D-2}{2}$. Se $\hat{\phi}(x)$ é o campo interagente renormalizado, a constante d não coincide necessariamente com a ingênua dimensão d_o do $\hat{\phi}(x)$. A constante d é em geral chamada dimensão de escala do campo $\hat{\phi}(x)$.

Considerando uma teoria sem massa, a ação é invariante escalar, ou seja invariante sob uma transformação (4.2). Vejamos por exemplo a ação para a teoria sem massa ϕ_6^3 :

$$A = \int d^6x \left[\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) + \frac{g}{3!}\phi^3 \right]. \quad (4.5)$$

Esta ação é invariante de escala para $d = d_o$. Note que ($D=6$). Devido a presença de um termo de interação, não é evidente se a função de Green renormalizada espelha a natureza da invariancia de escala. Na verdade o comportamento da amplitude de Feynman em geral difere de um esperado por uma contagem ingênua de potência. Se a teoria possui um ponto ultravioleta fixo em $g = g_c$, a função β desaparece naquele ponto $\beta(g_c) = 0$, e a invariancia de escala é readquirida, uma vez que a equação do grupo de renormalização se torna para $g = g_c$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 6 + nd_o + n\gamma \right) F_n(e^t p, g, \lambda) = 0, \quad (4.6)$$

aqui $d_o = 2$ para a teoria ϕ_6^3 . A solução da equação (4.6) será

$$F_n(e^t p, g_2, \lambda) = F_n(p, g_c, \lambda)(e^t)^{6-n(d_o+\gamma)}. \quad (4.7)$$

Por outro lado, uma vez que a teoria é invariante de escala para $g = g_c$, pela aplicação da transformação de escala (4.2) a amplitude de Feynman $F_n(p, g_c, \mu)$, encontra-se que:

$$F_n(e^t p, g_c, \lambda) = F_n(p, g_c, \lambda)(e^t)^{6-nd}. \quad (4.8)$$

Por comparação entre (4.7) e (4.8) obtemos

$$d = d_o + \gamma. \quad (4.9)$$

A relação anterior mostra que a quantidade γ definida por $\gamma = \frac{\lambda}{2Z} \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = \frac{\lambda^2}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \lambda^2}$ é a diferença entre a dimensão de escala e a dimensão canônica do campo $\phi(x)$. Uma vez que γ representa o desvio da dimensão de escala em relação a dimensão canônica, é natural chamar γ de dimensão anômala.

4.1.1 Auto energia e constante de renormalização

Para a auto energia temos o resultado

$$\frac{g^2}{2}(I_{quad}(m^2) - \frac{1}{3}p^2 I_{log}(m^2) + F), \quad (4.10)$$

onde F é parte finita.

A soma do contra-termo $i(Ap^2 - Bm^2)$ resulta

$$ip^2(A + \frac{ig^2}{6}I_{log}(m^2)) - im^2(B + \frac{ig^2}{2}I_{quad}(m^2)), \quad (4.11)$$

expandindo A e B em termos da constante de acoplamento g, têm-se $A = \Sigma_i a_i g^i$ e $B = \Sigma_i b_i g^i$. Como pode ser notado a equação (4.11) tem termos somente na ordem g^2 , assim os termos a_o , b_o , além de a_1 e b_1 da expansão de A e B devem ser zero. Desta forma encontramos

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{ig^2}{6}I_{log}(m^2) \\ b_2 &= -\frac{ig^2}{2}\frac{I_{quad}(m^2)}{m^2}. \end{aligned}$$

Do capítulo 2 sabe-se que $Z = 1 + A$, assim o valor do Z.

$$Z = 1 - \frac{ig^2}{6}I_{log}(\lambda^2) \quad (4.12)$$

4.1.2 Cálculo da função γ

A função γ é dada pela relação abaixo

$$\gamma = \frac{\lambda}{2Z} \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = \frac{\lambda^2}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \lambda^2}. \quad (4.13)$$

O λ é uma escala arbitrária, o Z é a constante infinita na renormalização do campo ϕ . Assim temos ($\phi_o = Z^{\frac{1}{2}}\phi$), onde ϕ_o é o campo nu e ϕ é o campo renormalizado. Como o valor de Z foi encontrado anteriormente, agora é possível encontrar o valor de γ . Lembrando que $I_{log}(\mu^2) = I_{log}(\lambda^2) - b \ln \frac{\lambda^2}{\mu^2}$, e derivando em relação a λ^2 , chega-se a

$$\lambda^2 \frac{\partial Z}{\partial \lambda^2} I_{log}(\lambda^2) = b = \frac{i}{2(4\pi)^3}. \quad (4.14)$$

Portanto chega-se

$$\frac{\lambda^2}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \lambda^2} = -\frac{ig^2}{6} \frac{i}{2(4\pi)^3} + O(g^3). \quad (4.15)$$

Este resultado é o mesmo obtido por Macfarlane, veja(6), utilizando Regularização Dimensional.

Conclusões

A Regularização Implícita(RI), tem sido empregada com sucesso em várias teorias massivas (9; 15). Ainda não havia sido tratada de forma sistemática o caso de teorias não massivas. Neste trabalho usamos a teoria não massiva ϕ^3 . Esta escolha é porque do ponto de vista dos cálculos a uma teoria simples ϕ^3 . A RI com a técnica de Rosner produziu os resultados esperados para o caso não massivo.

Usamos a técnica de Rosner (3) de duas maneiras equivalentes. A primeira com a aplicação da identidade básica (3.1) a integral divergente UV e usando a técnica de Rosner a cada termo resultante separadamente. O procedimento produziu os resultados esperados para a auto energia. Para a segunda maneira nós aplicamos diretamente à integral divergente UV inicial a técnica de Rosner, sem a aplicação da identidade básica da RI. Os resultados são os esperados, mas esta segunda maneira não é boa para sistematizações. Na manipulação pela RI das integrais divergente UV, apareceram divergências IV que foram canceladas graças a uma relação delicada entre a parte finita UV e divergente UV.

Calculamos ainda a função γ do grupo de renormalização para a teoria ϕ^3 , com os resultados anteriores.

Apêndice A: Cálculo de Integrais do Capítulo 3

6.1 Cálculo das integrais F, G e H

Consta neste apêndice os cálculos das integrais do capítulos 3, que não foram feitos naquele capítulo.

6.1.1 Cálculo da integral F

O cálculo desta integral é similar ao cálculo da integral (3.10). Começamos o cálculo da integral colocando-a no espaço de Euclidiano.

$$F = -\frac{ip^6 g^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6 k}{(2\pi)^6 k^8 (\vec{p} - \vec{k})^2}. \quad (6.1)$$

Com o uso da relação (2.8), teremos:

$$F = -\frac{ip^6 g^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6 k}{k^8 (2\pi)^6} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) C_n^2(\hat{p} \cdot \hat{k}). \quad (6.2)$$

O polinômio $C_0^\lambda = 1$ é usado para que a relação de ortonormalização seja empregada na resolução da integral. Assim:

$$F = -\frac{ip^6 g^2}{2} \int_0^\infty \frac{k^5 dk}{k^8 (2\pi)^6} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) \int d\Omega. C_n^2(\hat{p} \cdot \hat{k}) C_0^2(\hat{p} \cdot \hat{k}). \quad (6.3)$$

Após um pouco de álgebra e a mudança de variável ($x = \frac{k^2}{p^2}$), obtemos:

$$F = \frac{-ip^2g^2}{4(4\pi)^3} \left[\int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 \frac{dx}{x^2} (1-x)^3 \cdot {}_2F_1(2, 4; 3; x) + \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 \cdot {}_2F_1(2, 4; 3; \frac{1}{x}) \right]. \quad (6.4)$$

Com mais alguma álgebra:

$$F = \frac{-ip^2g^2}{4(4\pi)^3} \left[\left(-\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{3} \right) \Big|_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 + \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{9x^3} \right) \Big|_1^\infty \right]. \quad (6.5)$$

A solução fica:

$$F = \frac{-ip^2g^2}{4(4\pi)^3} \left[-\frac{11}{18} + \frac{p^2}{\mu^2} + \frac{\ln \frac{\mu^2}{p^2}}{3} \right]. \quad (6.6)$$

De uma forma mais explícita

$$F = \frac{ip^2g^2}{(4\pi)^3} \frac{11}{72} - \frac{ip^2g^2}{4(4\pi)^3} \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) - \frac{ip^2g^2}{(4\pi)^3} \frac{\ln \left(\frac{\mu^2}{p^2} \right)}{12}. \quad (6.7)$$

É interessante notar que o segundo termo do resultado acima, é divergente Infravermelho e é cancelado com o termo (3.9).

6.1.2 Cálculo da integral G

A álgebra de resolução desta integral é totalmente similar aos dois últimos casos. Seja:

$$G = -\frac{i12p^2g^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6k \cdot (\vec{p} \cdot \vec{k})^2}{(2\pi)^6 k^8 (\vec{p} - \vec{k})^2}, \quad (6.8)$$

novamente a substituição de (2.8) na integral resulta em:

$$G = -\frac{i12p^2g^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6k}{k^8 (2\pi)^6} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) C_n^2(\hat{p} \cdot \hat{k}) (\vec{p} \cdot \vec{k})^2. \quad (6.9)$$

Mudando para coordenadas polares o termo $\int_{-\infty}^{\infty} d^6 k$ torna-se: $\int_0^{\infty} k^5 dk \int d\Omega$. Temos também a relação $(\hat{p} \cdot \hat{k})^2 = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})^2}{(pk)^2}$. Assim

$$G = \frac{-i12p^2 g^2}{2(2\pi)^6} \left[\int_0^{\infty} \frac{k^5 dk}{k^8} \int d\Omega \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) C_n^2(\hat{p} \cdot \hat{k}) \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})^2}{(pk)^2} (pk)^2 \right]. \quad (6.10)$$

Com a definição (2.13) para $\lambda = 2$, $C_0^\lambda(t) = 1$ e após algumas manipulações algébricas obtemos $t^2 = \frac{C_2^2}{12} + \frac{C_0^2}{6}$. Aqui $t = \hat{p} \cdot \hat{k} = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})}{(pk)}$ é um ângulo. A integral (6.10) adquire a forma:

$$G = \frac{-i12p^4 g^2}{2(2\pi)^6} \left[\frac{\pi^3}{12} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) \int \frac{d\Omega}{\pi^3} C_n^2 C_2^2 + \frac{\pi^3}{6} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) \int \frac{d\Omega}{\pi^3} C_n^2 C_0^2 \right]. \quad (6.11)$$

Seguindo uma álgebra análoga a usada no quinto termo da integral (3.4) temos:

$$G = \frac{-i12p^4 g^2}{2(2\pi)^6} \left[\frac{5\pi^3}{12} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \sum_{n=0}^{\infty} f_2(p, k) + \frac{\pi^3}{6} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \sum_{n=0}^{\infty} f_0(p, k) \right]. \quad (6.12)$$

Para Utilizar a relação (2.16), dividimos o intervalo de integração que vai de \int_0^{∞} em $\int_0^p + \int_p^{\infty}$. Colocamos um cut-off (μ) na integral (6.12) e ficamos com:

$$G = \frac{-i12p^4 g^2}{2(2\pi)^6} \left[\frac{5\pi^3}{12p^4} \int_{\mu}^p dk \cdot k \cdot G_2\left(\left(\frac{k}{p}\right)^2\right) + \frac{5\pi^3 p^2}{12} \int_p^{\infty} dk \frac{1}{k^5} G_2\left(\left(\frac{p}{k}\right)^2\right) + \frac{\pi^3}{6p^2} \int_{\mu}^p \frac{dk}{k} G_0\left(\left(\frac{k}{p}\right)^2\right) + \frac{\pi^3}{6} \int_p^{\infty} \frac{dk}{k^3} G_0\left(\left(\frac{p}{k}\right)^2\right) \right]. \quad (6.13)$$

Fazemos a substituição ($d^2 k = 2kdk$) na integral e obtemos:

$$\begin{aligned}
G = & \frac{-i12p^4g^2}{2(2\pi)^6} \left[\frac{5\pi^3}{12p^4(2)} \int_{\mu^2}^{p^2} d^2k \cdot G_2\left(\left(\frac{k}{p}\right)^2\right) + \frac{5\pi^3p^2}{12(2)} \int_{p^2}^{\infty} d^2k \frac{1}{k^6} G_2\left(\left(\frac{p}{k}\right)^2\right) \right. \\
& \left. + \frac{\pi^3}{6p^2(2)} \int_{\mu^2}^p \frac{d^2k}{k^2} G_0\left(\left(\frac{k}{p}\right)^2\right) + \frac{\pi^3}{6(2)} \int_{p^2}^{\infty} \frac{d^2k}{k^4} G_0\left(\left(\frac{p}{k}\right)^2\right) \right]. \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Com um pouco de álgebra, análoga a usada na resolução da integral (3.10), e a mudança de variável ($x = \frac{k^2}{p^2}$), ficamos com

$$\begin{aligned}
G = & \frac{-i12p^4g^2}{2(2\pi)^6} \left[\frac{5\pi^3}{24p^2} \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 dx \frac{(1-x)^3}{3} \cdot {}_2F_1(2, 6; 5; x) \right. \\
& + \frac{5\pi^3}{p^224} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} \frac{(1-\frac{1}{x})^3}{3} \cdot {}_2F_1(2, 6; 5; \frac{1}{x}) \\
& + \frac{\pi^3}{12p^2} \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 \frac{dx}{x} (1-x)^3 \cdot {}_2F_1(2, 4; 3; x) \\
& \left. + \frac{\pi^3}{12p^2} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} (1-\frac{1}{x})^3 \cdot {}_2F_1(2, 4; 3; \frac{1}{x}) \right]. \quad (6.15)
\end{aligned}$$

As expressões (2.24) e (2.25) quando substituídas na integral resultam em:

$$\begin{aligned}
G = & \frac{-i12p^4g^2}{2(2\pi)^6} \left[\frac{5\pi^3}{72p^2} \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 dx (1 - \frac{3x}{5}) + \frac{5\pi^3}{72p^2} \int_1^{\infty} dx (\frac{1}{x^3} - \frac{3}{5x^4}) \right. \\
& \left. + \frac{\pi^3}{12p^2} \int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 dx (\frac{1}{x} - \frac{1}{3}) + \frac{\pi^3}{12p^2} \int_1^{\infty} dx (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x^3}) \right]. \quad (6.16)
\end{aligned}$$

Resta integrar e teremos:

$$\begin{aligned}
G = & \frac{-i12p^4g^2}{2(2\pi)^6} \left[\frac{5\pi^3}{72p^2} \left(x - \frac{3x^2}{10} \right)_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 + \frac{5\pi^3}{72p^2} \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{15x^3} \right)_1^{\infty} \right. \\
& \left. + \frac{\pi^3}{12p^2} \left(\ln x - \frac{x}{3} \right)_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 + \frac{\pi^3}{12p^2} \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^2} \right)_1^{\infty} \right], \quad (6.17)
\end{aligned}$$

A solução final constituída de duas partes, uma finita e outra infinita (I.V.).

$$G = -\frac{ig^2p^2}{(4\pi)^3}\left(\frac{5}{6}\right) + \frac{ig^2p^2}{2(4\pi)^3} \ln \frac{\mu^2}{p^2}. \quad (6.18)$$

6.1.3 Cálculo da integral H

Finalmente resta o último termo para ser integrado, cuja forma no espaço de Euclidiano é:

$$H = \frac{i6g^2p^4}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6k}{(2\pi)^6} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})}{k^8(\vec{p} - \vec{k})^2}. \quad (6.19)$$

A analogia com os casos anteriores continua válida. A substituição (2.8) fornece:

$$H = \frac{i6g^2p^4}{2(2\pi)^6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^6k}{k^8} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) C_n^2(\hat{p} \cdot \hat{k}) (\vec{p} \cdot \vec{k}). \quad (6.20)$$

Mudamos para coordenadas polares, o termo $\int_{-\infty}^{\infty} d^6k$ torna-se $\int_0^{\infty} k^5 dk \int d\Omega$. Aqui $t = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})}{(PK)}$, assim teremos:

$$H = \frac{i6g^2p^4}{2(2\pi)^6} \left[\int_0^{\infty} \frac{k^5 dk}{k^8} \int d\Omega \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) C_n^2(\hat{p} \cdot \hat{k}) \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})}{(pk)} (pk) \right], \quad (6.21)$$

com a definição (2.12) para $\lambda = 2$, temos $t = \frac{C_1^2}{4}$. A integral (6.21) adquirirá então a forma

$$H = \frac{i6g^2p^5}{2(2\pi)^6} \left[\int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2} \int \frac{d\Omega}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p, k) C_n^2(\hat{p} \cdot \hat{k}) \frac{C_1^2(\hat{p} \cdot \hat{k})}{4} \pi^3 \right]. \quad (6.22)$$

Com a relação (2.9) H torna-se:

$$H = \frac{i6g^2p^5}{8(2\pi)^6} \left[\int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2} f_1(p, k) \frac{8\pi^3}{3} \right]. \quad (6.23)$$

O intervalo de integração deve ser dividido para a aplicação das identidades (2.16). O intervalo de integração \int_0^∞ torna-se $\int_0^p + \int_p^\infty$. Colocamos um cut-off (μ) na integral e a relação (2.17). A integral (6.22) torna-se:

$$H = \frac{i6g^2p^5}{3(2\pi)^6} \left[\pi^3 \int_\mu^p \frac{dk}{k^2} \frac{1}{p^2} \frac{k}{p} G_1\left(\left(\frac{k}{p}\right)^2\right) + \pi^3 \int_p^\infty \frac{dk}{k^2} \frac{1}{k^2} \frac{p}{k} G_1\left(\left(\frac{p}{k}\right)^2\right) \right], \quad (6.24)$$

Fazemos a substituição ($d^2k = 2kdk$), para obtermos:

$$H = \frac{i6g^2p^5}{3(4\pi)^3} \left[\frac{1}{2p^3} \int_{\mu^2}^{p^2} \frac{d^2k}{k^2} G_1\left(\left(\frac{k}{p}\right)^2\right) + \frac{p}{2} \int_{p^2}^\infty \frac{d^2k}{k^6} G_1\left(\left(\frac{p}{k}\right)^2\right) \right]. \quad (6.25)$$

Após um pouco de álgebra similar a usada na resolução da integral (3.10) e a mudança de variável ($x = \frac{k^2}{p^2}$) teremos:

$$H = \frac{ig^2p^2}{(4\pi)^3} \left[\int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 \frac{dx}{x} \frac{(1-x)^3}{2} \cdot {}_2F_1(2, 5; 4; x) + \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} \frac{(1-\frac{1}{x})^3}{2} \cdot {}_2F_1(2, 5; 4; \frac{1}{x}) \right] \quad (6.26)$$

Há uma dificuldade na integral acima, ela contém um somatório em ${}_2F_1$. Podemos contornar este problema usando a relação (2.22). Obtemos assim

$$H = \frac{ig^2p^2}{2(4\pi)^3} \left[\int_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 dx \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) + \int_1^\infty dx \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^4} \right) \right]. \quad (6.27)$$

A resolução da integral fornece:

$$H = \frac{ig^2p^2}{2(4\pi)^3} \left[\left(\ln x - \frac{x}{2} \right) \Big|_{\frac{\mu^2}{p^2}}^1 + \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} \right) \Big|_1^\infty \right]. \quad (6.28)$$

Finalmente o resultado:

$$H = -\frac{ig^2p^2}{12(4\pi)^3} - \frac{ig^2p^2}{2(4\pi)^3} \ln\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right). \quad (6.29)$$

É importante notar que o segundo termo é cancelado com o segundo termo de (6.18).

REFERÊNCIAS

- [1] R Jackiw, A Shimonv, Phys. Perspect. **4**, 78-116 (2004)
- [2] J L Rosner, Ann. Phys.(N.Y.) **44** 11 (1967)
- [3] W Celmaster, R J Gonçalves, Phys. rev. D **21** 3112 (1980)
- [4] A P B Scarpelli, M Sampaio, M C Nemes, B Hiller,
hep-th/0102108
- [5] T Muta, Foundations of quantum chromodynamics; An introduction to
Pertubative Methods in Gauge Theories (Hiroshima University, World Sci-
entific, 1987)
- [6] A J Marcfarlane, G. Woo, Nuclear Phys. B, **77** (1974)
- [7] A P B Scarpelli, M Sampaio, M C Nemes, Phys. Rev. D **63**, 046004
(2001)
- [8] R Jackiw, S Treiman, R Jackiw, B Zumino, E Witten, Current Algebra
and Anomalies, (Princeton Un. Press/World Scientific, Singapore, 1985)
- [9] O A Battistel, A L Mota, M C Nemes, Mod. Phys. Lett. A **13**, 1597
(1998)
- [10] O A Batistel, tese de Doutorado (Universidade Federal de Minas Gerais,
2000)
- [11] A P B Scarpelli, M Sampaio, M C Nemes, Phys. Rev. D**63**, 046004
(2001)
- [12] A P B Scarpelli, M Sampaio, M C Nemes, Phys. Rev. D **62**, 046013
(2001)

-
- [13] M Sampaio, A P B Scarpelli, B Hiller, A Brizola, M C Nemes, S Gobira, Phys. Rev. D **65**, (2002)
- [14] A Brizola, O A Batistel, M Sampaio, M C Nemes, S Gobira, Mod.Phys. Lett. A **14**, 1509 (1999)
- [15] O A Batistel, M C Nemes, Phys. Rev. D **59**, 055010 (1999)
- [16] A P B Scarpelli, tese de Doutorado (Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil (2001))