

**Interferômetro de Hong-Ou-Mandel  
com Um e Dois Pares de Fótons**

Olavo Cosme da Silva

Setembro 2004

# **Interferômetro de Hong-Ou-Mandel com Um e Dois Pares de Fótons**

Olavo Cosme da Silva

Orientador: Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua

Dissertação apresentada à **Universidade Federal de Minas Gerais**, como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Física**.

Setembro de 2004

# Agradecimentos

- Agradeço ao Grande Arquiteto do Universo, Deus.
- Agradeço aos meus pais e todos os meus antepassados.
- Agradeço ao meu orientador Sebastião de Pádua, pelo apoio, confiança e amizade.
- Aos amigos do grupo de Óptica Quântica.
- Ao Caio Olindo pelas discussões.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.

## **Sabedoria**

“Existem dois tipos de sabedoria: a inferior e a superior. A inferior adquire-se na medida em que se estuda e aprende. A superior é formada quando se tem a consciência de que nada se sabe.”

**Desconhecido**

# Resumo

No processo óptico não linear da conversão paramétrica descendente espontânea, um feixe de laser, ao incidir em um cristal não-linear, gera pares de fótons. Neste processo, energia e momento são conservados. Este processo é usado em diversos estudos em Óptica Quântica. Tratamos aqui o processo de conversão paramétrica descendente em que são gerados dois e quatro fótons e este estado é usado no interferômetro de Hong-Ou-Mandel (HOM). É vasto o uso do interferômetro HOM para estudos com dois fótons emaranhados. Uma fenômeno intrigante, observado neste e em muitos outros interferômetros que utilizam bombeamento óptico, é a diminuição da visibilidade da taxa de coincidências dos fótons, na saída do interferômetro, com o aumento da potência do laser de bombeamento. Neste trabalho estudamos a dependência da visibilidade do padrão de interferência de quarta ordem com a potência do laser que gera os pares de fótons. Nossas previsões estão em bom acordo com os resultados experimentais.

# Abstract

In the nonlinear optical process of spontaneous parametric down conversion, a laser beam incident in a nonlinear crystal, generates pairs of photons. In this process energy and momentum are conserved. This process is used in diverse studies in Quantum Optics. We worked with state of the parametric down-conversion process where two and four photons are generated. This state is used in the Hong-Ou-Mandel interferometer (HOM). The use of the HOM interferometer for studies with two entangled photons is vast. An intriguing phenomenon, observed in this and many other interferometer that uses optic pumping, is the reduction of the visibility of the tax of coincidence of photons, in the exit of the interferometer, with the increase of the power of the laser pump. In this work we study the dependence of the visibility of the standard of interference of fourth order with the power of the laser that generates the pairs of photons. Our results are in good agreement with experimental results.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Conversão Paramétrica Descendente (CPD)</b>	<b>12</b>
2.1	Introdução . . . . .	12
2.2	Energia do campo eletromagnético em um meio dielétrico . . .	12
2.3	Geração de harmônico óptico . . . . .	14
2.4	Conversão paramétrica descendente CPD . . . . .	14
2.4.1	Casamento de fases tipo I e tipo II em CPD. . . . .	16
2.4.2	Estado com dois e quatro fótons da conversão paramétrica descendente com bombeamento pulsado . . . . .	19
2.4.3	Taxa de conversão descendente . . . . .	24
<b>3</b>	<b>O agrupamento de fótons, interferência entre fontes independentes de CPD e o interferômetro de Hong-Ou-Mandel</b>	<b>26</b>
3.1	Introdução . . . . .	26
3.2	O agrupamento de fótons em CPD. . . . .	26
3.3	Interferência entre fontes independentes de CPD. . . . .	30
3.4	O interferômetro de Hong-Ou-Mandel . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Interferômetro de Hong-Ou-Mandel com um e dois pares de fótons</b>	<b>37</b>
4.1	Introdução . . . . .	37
4.2	Medida fotoelétrica do campo óptico e ordenamento normal .	37
4.2.1	Fotodetecção múltipla e função correlação de alta ordem	40
4.2.2	Ordenando símbolos e ordenando operadores . . . . .	41
4.2.3	Funções de correlação . . . . .	42
4.3	Interferômetro de Hong-Ou-Mandel usando CPD e com casamento de fase tipo I . . . . .	43
4.4	Interferômetro de Hong-Ou-Mandel usando CPD e com casamento de fase tipo II . . . . .	45

<b>5</b>	<b>O experimento e estudo da visibilidade com a potência</b>	<b>48</b>
5.1	Objetivo . . . . .	48
5.2	Análise teórica do experimento. . . . .	48
5.3	Medidas e interpretações . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>58</b>
<b>A</b>	<b>Cálculos referentes ao capítulo 4</b>	<b>60</b>
A.1	Taxa de coincidências no interferômetro de HOM onde estado tem casamento de fase tipo I . . . . .	60
A.2	Taxa de coincidências no interferômetro de HOM onde estado tem casamento de fase tipo II . . . . .	66
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Interferência quântica com pares de fótons correlacionados tem sido uma importante regra nos recentes desenvolvimentos do estudo fundamental da não-localidade quântica. Violações mais dramática têm ocorrido nos casos que envolvem um número maior de partículas. O efeito de interferência entre dois fótons têm maiores consequências quando envolvem fontes independentes de campos quânticos.

O primeiro experimento em interferência de quarta ordem foi realizado usando duas fontes coerentes e independentes, em torno de 1967. No ramo da Óptica Quântica trabalha-se com fótons emaranhados (produzidos, por exemplo, com o uso de um feixe coerente e cristais não-lineares, promovendo a chamada conversão paramétrica descendente [1, 2, 3, 4, 5, 6]). São inúmeras as contribuições da Óptica Quântica para o desenvolvimento e comprovação de teorias da Física Quântica. Podemos citar contribuições em sistemas de informação [1, 7, 8], de emaranhamento envolvendo fótons [1, 4, 5, 7, 9, 10, 11], e clonagem quântico, que usa conversão paramétrica descendente para produzir cópias de estados quânticos com uma certa qualidade (fidelidade). Bouwmeester e colaboradores realizaram, em 2002, o experimento de clonagem quântica de fótons simples com fidelidade de  $\frac{5}{6}$  [12]. Interferência envolvendo fontes independentes convertidas de forma descendente é usada no processo de informação quântica, tal como para teleportar um arbitrário e desconhecido estado polarizado. Em todas estas aplicações é necessária alta visibilidade.

Um dos experimentos mais citados em Óptica Quântica é o interferômetro de Hong-Ou-Mandel [13]. Este interferômetro tem sido utilizado em interferência multimodal [2], para testes de Desigualdades de Bell [14], testes de não localidade, medida de tunelamento de fótons [15], cancelamento por dispersão [16], demonstração do apagador quântico [17], teleporte quântico [18], construção de portas lógicas e processo de informação quântica. O meio

usual de determinar a duração de um pulso curto de luz é sobrepor dois pulsos similares para medir o ‘overlap’ com um dispositivo não-linear de resposta. O interferômetro de Hong-Ou-Mandel envolve pacotes de onda com comprimentos de alguns picosegundos, produzidos em conversão paramétrica descendente.

Um fato observado no interferômetro de Hong-Ou-Mandel é a diminuição da visibilidade do padrão de interferência, quando se aumenta o número de fótons nos braços do interferômetro. Quando o feixe de bombeamento tem intensidade suficientemente alta, é possível gerar mais do que um par de fótons através da conversão paramétrica descendente. Assim, aumentando a potência do feixe que bombeia o cristal não-linear, aumenta a quantidade de fótons nos braços do interferômetro.

O objetivo deste trabalho é apresentar a taxa de coincidência em um interferômetro de Hong-Ou-Mandel em que se tem um e dois pares de fótons produzidos na conversão paramétrica descendente, além de determinar a dependência desta taxa de coincidência com a potência óptica do laser de bombeamento. O cálculo foi feito para ambos casamentos de fase, com um e dois pares de fótons em cada braço do interferômetro. Será feita a análise do experimento realizado por Sebastião de Pádua e colaboradores, em 2001, no Laboratório de Óptica Quântica do Departamento de Física da “*Università de Roma La Sapienza*”. Neste experimento, foi medida a visibilidade do padrão de interferência de Hong-Ou-Mandel, em função da potência média do laser de bombeamento pulsado, no regime em que um e dois pares de fótons são gerados simultaneamente na conversão paramétrica descendente. No texto representamos os operadores com  $(\hat{\cdot})$  e os vetores em negrito (os vetores uniários têm  $\hat{\cdot}$  e isto em negrito).

No Capítulo 2 (*Conversão Paramétrica Descendente CPD*), trataremos a conversão paramétrica descendente de um modo geral e com o uso de feixe de bombeamento pulsado, bem como o casamento de fases dos feixes convertidos de forma descendente e o estado com dois e quatro fótons.

No Capítulo 3 (*O agrupamento de fótons, interferência entre fontes independentes de CPD e o interferômetro de Hong-Ou-Mandel*), discutiremos o efeito de agrupamento de fótons tratado na referência [19]. A interferência entre dois campos independentes no divisor de feixes e o interferômetro de Hong-Ou-Mandel são apresentados neste capítulo.

No Capítulo 4 (*Interferômetro de Hong-Ou-Mandel com um e dois pares de fótons*), discutiremos a detecção fotoelétrica, o ordenamento normal e espacial. Além disso, calcularemos a taxa de coincidência de um interferômetro de Hong-Ou-Mandel com um e dois pares de fótons e com casamento de fase tipo I e tipo II.

No Capítulo 5 (*O experimento e estudos da dependência da visibilidade*

*com a potência*), compararemos os resultados do experimento feito em Roma por Pádua e colaboradores com o cálculo teórico obtido no capítulo 4. Foram produzidas dois e quatro pares de fótons com o uso do laser RegA [22]. Este laser promove a concentração de pulsos, alterando a frequência de repetição do laser Mira [21] de 76MHz para 250KHz, conservando a largura de cada pulso. Assim, cada pulso passa a ter um número maior de fótons, aumentando a taxa em que ocorrem duas conversões simultâneas.

No Capítulo 6 (*Conclusões*), discutiremos o esperado na teoria desenvolvida no Capítulo 4 e o obtido experimentalmente, discutido no Capítulo 5.

No Apêndice complementaremos o texto com o cálculo mais detalhado das contribuições dos operadores que ocorrem no capítulo 4.

# Capítulo 2

## Conversão Paramétrica Descendente (CPD)

### 2.1 Introdução

Em efeitos óptico não-lineares, o átomo pode seguir as regras de um transmissor não-linear para o campo eletromagnético incidente, por exemplo, quando se incide um campo eletromagnético com uma certa frequência e temos como resposta dois outros campos obedecendo certas leis de conservação. Igualmente efeitos não-lineares fortes ocorrem quando um átomo está ligado de modo dispersivo com um grande número de átomos ou está em um meio não linear, neste caso grandezas são redistribuídas e o campo eletromagnético resposta difere do incidente. Tais interações são tratadas no ramo denominado óptica não-linear.

### 2.2 Energia do campo eletromagnético em um meio dielétrico

No eletromagnetismo clássico a energia eletromagnética do campo eletromagnético em um meio não magnético é dada pela seguinte expressão, no sistema SI de unidade e medidas [23]:

$$H = \int \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) d^3r + \int d^3r \int_0^{\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  é o vetor deslocamento elétrico [24]. De forma rigorosa a integração com o respectivo  $\mathbf{D}$  não é trivial devido a complicada dependência de  $\mathbf{D}$  com  $\mathbf{E}$ . No vácuo ou em meios lineares isotrópicos,  $\mathbf{D}$  é proporcional

ao campo  $\mathbf{E}$  e a integral em  $\mathbf{D}$  reduz a  $[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)]/2$ , que é a expressão usual da densidade de energia elétrica. Algumas simplificações são possíveis em um meio não-linear de forma que  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

e a polarização  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  induzida no meio pode ser uma série de potências do campo elétrico  $\mathbf{E}$

$$P_i = \chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \quad (2.3)$$

$\chi^{(n)}$  é o tensor suscetibilidade elétrica. Esta equação é apropriada para representar um meio não dispersivo, ou sob circunstâncias onde a frequência efetiva do campo não está muito próxima da frequência de ressonância do meio (falamos em frequência efetiva porque é possível a ocorrência de diversas frequências em um meio). Nesse caso é mais natural fazer uma decomposição de Fourier de ambos,  $P_i$  e  $E_i$  e relatar as componentes de Fourier  $P_i(\omega)$  e  $E_i(\omega)$  via uma série de potências. Como  $\chi^{(n)}$ , em geral, envolve  $n$  diferentes campos elétricos; da equação (2.3) temos

$$\begin{aligned} P_i(\omega_1) &= \chi_{ij}^{(1)}(\omega_1; \omega_1) E_j(\omega_1) + \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1; \omega_1 - \omega_2, \omega_2) E_j(\omega_1 - \omega_2) E_k(\omega_2) \\ &+ \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1; \omega_1 - \omega_2 - \omega_3, \omega_2, \omega_3) E_j(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) E_k(\omega_2) E_l(\omega_3) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Substituindo a polarização expandida equação (2.4) no vetor deslocamento elétrico equação (2.2), os primeiros termos da energia, na equação 2.1, são

$$H = \int \left[ \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \chi_1(\mathbf{r}) + \chi_2(\mathbf{r}) + \dots \right] d^3r, \quad (2.5)$$

onde os termos do Hamiltoniano

$$\chi_1(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{2} \int \int d\omega d\omega' \chi_{ij}^{(1)}(\omega, \omega') E_i(\mathbf{r}, \omega') E_j(\mathbf{r}, \omega)$$

e

$$\chi_2(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{2} \int \int \int d\omega d\omega' d\omega'' \chi_{ijk}^{(2)}(\omega'', \omega - \omega, \omega') E_i(\mathbf{r}, \omega'') E_j(\mathbf{r}, \omega - \omega') E_k(\mathbf{r}, \omega')$$

onde o termo  $\chi_{ijk}^{(2)}$  representa a menor ordem da contribuição não-linear para energia.

Usamos aqui a forma quantizada do campo eletromagnético [23] substituindo os campos vetoriais elétrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  pelos correspondentes operadores de campo livre do espaço de Hilbert.

## 2.3 Geração de harmônico óptico

Geração de harmônico é o mais antigo e conhecido exemplo de processo óptico não-linear. Um feixe de luz monocromática de frequência  $\omega_1$  incidente em um meio não-linear gera um campo na frequência harmônica  $\omega_2 = 2\omega_1$ .

Expressamos a energia do sistema da seguinte forma:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^2 \hbar\omega_i \left( \hat{n}_i + \frac{1}{2} \right) + \hbar g [\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^2 + \hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_2], \quad (2.6)$$

os índices 1 e 2 referimos ao modo fundamental e harmônico, respectivamente. O modo de acoplamento real (termo com a constante  $g$ ) contém a suscetibilidade não-linear  $\chi^{(2)}$ . O Hamiltoniano  $\hat{H}$  descreve um processo em que dois fótons de frequência  $\omega_1$  combinamos em um novo fóton de frequência  $\omega_2$  além do processo inverso. É fácil mostrar que

$$[\hat{n}_1 + 2\hat{n}_2, \hat{H}] = 0, \quad (2.7)$$

implicando que a soma  $(\hat{n}_1 + 2\hat{n}_2)$  é uma constante do movimento. Os dois fótons do modo fundamental são destruídos para emitir um fóton harmônico. Ocasionalmente é conveniente substituir os operadores  $\hat{a}_1$  e  $\hat{a}_2$  por operadores que variam lentamente no tempo  $\hat{A}_1$  e  $\hat{A}_2$  [23], definidos da forma

$$\hat{A}_1 = \hat{a}_1 e^{i\omega_1 t}, \quad (2.8)$$

$$\hat{A}_2 = \hat{a}_2 e^{i\omega_2 t}. \quad (2.9)$$

Tais operadores obedecem as mesmas relações de comutação dos operadores aniquilação  $\hat{a}$  e destruição  $\hat{a}^\dagger$  do oscilador harmônico quântico.

## 2.4 Conversão paramétrica descendente CPD

Nesta seção consideraremos o tratamento da conversão paramétrica descendente por um único modo de frequência e vetor de onda para os fótons envolvidos no processo.

Na conversão paramétrica descendente um fóton incidente gera dois outros em um meio não-linear cujo tensor suscetibilidade não-linear é  $\chi^{(2)}$ , (vide Figura 2.1). Por motivos históricos os fótons gerados são denominados sinal e complementar

No caso degenerado (isto é, quando os fótons gerados têm a mesma frequência), temos o mesmo Hamiltoniano da equação (2.6). No caso geral

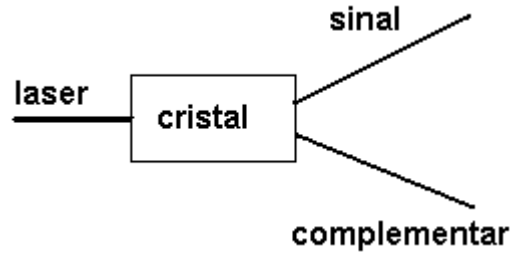


Figura 2.1: Processo de conversão paramétrica descendente em um cristal não-linear

o fóton de frequência  $\omega_0$  é quebrado em dois outros de frequência  $\omega_1$  e  $\omega_2$  obedecendo a conservação da energia

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad (2.10)$$

onde  $\omega_0$  é conhecida como frequência de bombeamento do processo paramétrico e  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são conhecidas como frequências sinal e complementar, respectivamente ou não. Foi mostrado que no processo de conversão paramétrica descendente os fótons são gerados simultaneamente [25, 26]. A condição obedecida pelos vetores de onda é

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad (2.11)$$

similar ao mostrado na equação (2.10),

O Hamiltoniano do processo de conversão paramétrica é então

$$\hat{H} = \sum_{i=0}^2 \hbar\omega_i(\hat{n}_i + \frac{1}{2}) + \hbar g[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 + h.c.]. \quad (2.12)$$

E é fácil mostrar

$$[\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_0, \hat{H}] = 0. \quad (2.13)$$

Logo  $\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_0$  é uma constante do movimento refletindo na destruição de um fóton de bombeamento e a criação dos fótons sinal e um complementar.

### 2.4.1 Casamento de fases tipo I e tipo II em CPD.

Considere um fóton incide em um cristal não-linear e na interação resultam dois outros com energia mais baixa e emaranhados pelo processo de conversão paramétrica descendente [27]. Para conservação da energia devemos observar a condição imposta pela equação (2.10),

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$$

aqui  $\omega_0$  é a frequência do feixe de bombeamento incidente e  $\omega_1$  e  $\omega_2$  as frequências. Para conservação do momento temos o relatado pela equação (2.11)

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$$

Usando coordenadas esféricas, o vetor de onda do bombeamento é expresso no sistema principal de eixos do cristal,  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  com os ângulos polar  $\phi_0$  e azimutal  $\theta_0$  mostrados na Figura 2.2. Em um cristal uniaxial há somente um eixo de simetria de revolução, então a direção do bombeamento pode ser especificada usando somente um ângulo do bombeamento,  $\theta_0$ . No entanto, para um cristal biaxial os dois ângulos são requeridos,  $\phi_0$  e  $\theta_0$ .

Como os eixos do cristal não são convenientes para calcular a configuração resultante, expressaremos os vetores de onda sinal e complementar no sistema de coordenadas do laboratório definido pelos eixos rotacionados  $\hat{x}''$ ,  $\hat{y}''$  e  $\hat{z}''$ , como mostrado na Figura 2.2. No sistema de coordenadas do laboratório os vetores de onda do feixe de bombeamento sinal e complementar são dados por

$$\mathbf{k}_0 = n_0(\theta_0, \phi_0) \frac{\omega_0}{c} \hat{\mathbf{s}}_0 \quad (2.14)$$

$$\mathbf{k}_1 = n_1(\theta_1, \phi_1) \frac{\omega_1}{c} \hat{\mathbf{s}}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{k}_2 = n_2(\theta_2, \phi_2) \frac{\omega_2}{c} \hat{\mathbf{s}}_2 \quad (2.15)$$

onde  $n_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) são os índices de refração para os fótons em uma dada direção  $\hat{s}_i$ . Onde  $\theta_0$  é o ângulo entre  $\hat{s}_0$  e o eixo  $\hat{z}$ , enquanto  $\phi_0$  é o ângulo azimutal do eixo  $\hat{x}$  para o eixo  $\hat{s}_0$  no plano  $x - y$ . Para os feixes convertidos de forma descendente, os ângulos de abertura  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são especificados com relação ao ângulo  $\theta_0$ , e os ângulos azimutais  $\phi_1$  e  $\phi_0$  referimos a rotações no plano normal para  $\hat{s}_0$  (Figura 2.3)

Os cossenos diretores dos vetores de propagação na direção  $\hat{s}$  são  $s_x = \sin \theta \cos \phi$ ,  $s_y = \sin \theta \sin \phi$  e  $s_z = \cos \theta$ . A direção do bombeamento é especi-



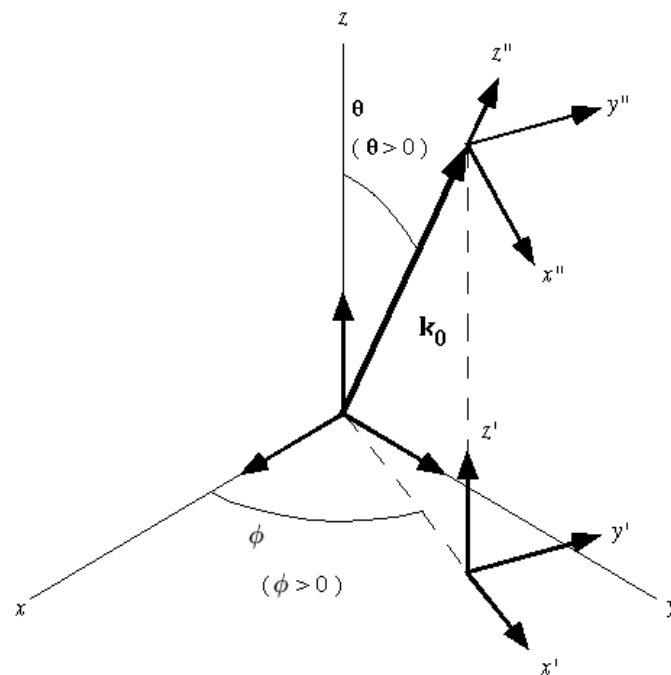


Figura 2.2: Os eixos do cristal e o sistema de eixos do laboratório  
 $x$ ,  $y$  e  $z$ : eixos do cristal dielétrico (plano  $x - y$  é o óptico,  $n_z > n_y > n_x$ )  
 $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ : eixos rodados (rodados de um ângulo  $\phi$  em torno do eixo  $z$ )  
 $x''$ ,  $y''$  e  $z''$ : sistema de coordenadas do laboratório (rodado de um ângulo de  $\theta$  em torno do eixo  $z'$ )

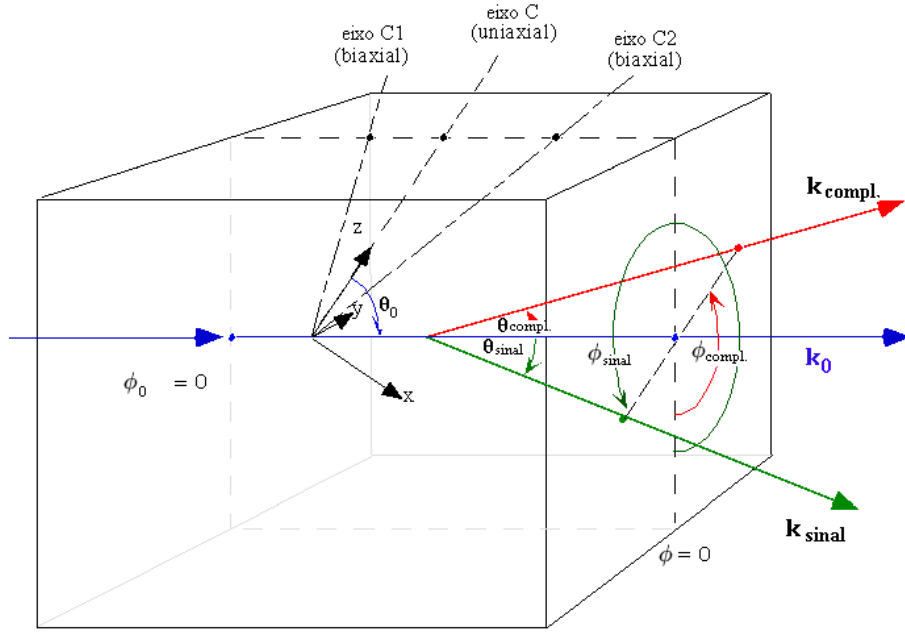


Figura 2.3: Outro ponto de vista do sistema de coordenadas do cristal e do laboratório, mostrando um arranjo experimental típico de conversão paramétrica descendente dentro de um cristal. Nesta figura o plano  $x - y$  ( $\phi_0 = 0$  plano) está no plano da página; para cristais uniaxiais, esta escolha pode ser sempre bem feita, mas para cristais biaxiais, esta figura representa um caso especial em que o eixo do cristal  $C_1$ ,  $C_2$  e o feixe de bombeamento estão no mesmo plano (plano da página). O feixe sinal emerge para abaixo e para o visor enquanto o feixe complementar emerge para cima e para o visor. Os ângulos azimutais  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são medidos a partir do plano  $x - y$ . Os pontos indicam a intersecção dos feixes com o cristal.

ficada com o respectivo eixo do cristal da seguinte forma

$$\hat{s}_0 = \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ \sin \theta_0 \sin \phi_0 \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix}_{x,y,z}, \quad (2.16)$$

enquanto os campos sinal e complementar ficam

$$\hat{s}_i = \begin{pmatrix} \sin \theta_i \cos \phi_i \\ \sin \theta_i \sin \phi_i \\ \cos \theta_i \end{pmatrix}_{x,y,z}, \quad (2.17)$$

onde  $i = 1, 2$ .

A transformação entre os sistemas de coordenadas é dada pelas seguintes matrizes [27]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \cos \theta_0 & -\sin \phi_0 & \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ \cos \theta_0 \sin \theta_0 & -\cos \phi_0 & \sin \theta_0 \sin \phi_0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \cos \theta_0 & \cos \theta_0 \sin \phi_0 & -\sin \theta_0 \\ -\sin \phi_0 & \cos \phi_0 & 0 \\ \sin \theta_0 \cos \phi_0 & \sin \theta_0 \sin \phi_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

O problema é resolvido usando as variáveis:  $\theta_0, \phi_0, \theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, \omega_0, \omega_1$  e  $\omega_2$ . São nove variáveis e somente quatro equações, no entanto, cinco variáveis podem ser escolhidas como parâmetros e igualamos assim o número de variáveis e equações. De forma conveniente, escolhemos a direção e frequência do feixe de bombeamento (dadas por  $\theta_0, \phi_0$  e  $\omega_0$ ).

Em geral há dois diferentes índices de refração para uma única direção de propagação. Para cristais uniaxiais elas são referidas como índice de refração “*extraordinário*” e índice de refração “*ordinário*”, enquanto que para cristais biaxiais temos o índice “*rápido*” e o índice “*lento*” onde o índice rápido é menor que o lento. Como são dois diferentes índices de refração para cada comprimento de onda, segue que o casamento das fases será dada de duas formas

$$\mathbf{k}_0(\textit{rápido}) = \mathbf{k}_1(\textit{lento}) + \mathbf{k}_2(\textit{lento}) \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0(\textit{rápido}) &= \mathbf{k}_1(\textit{rápido}) + \mathbf{k}_2(\textit{lento}) \\ \mathbf{k}_0(\textit{rápido}) &= \mathbf{k}_1(\textit{lento}) + \mathbf{k}_2(\textit{rápido}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Estas são as configurações mais comuns de casamento de fase e são classificadas como tipo. Sendo tipo I ou tipo II [27]. A configuração da equação (2.20) é denominada **tipo I**, nela as polarizações dos feixes saem sempre paralelas. As duas equações (2.21) é denominada **tipo II**, neste caso as polarizações dos feixes saem sempre ortogonais.

## 2.4.2 Estado com dois e quatro fótons da conversão paramétrica descendente com bombeamento pulsado

O Hamiltoniano da equação (2.22) descreve parcialmente o processo de conversão paramétrica descendente, parcialmente porque a luz convertida

pode ter uma distribuição de frequência finita em torno de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , e ser bem diferente de monocromática. Faremos aqui uma expansão do vetor campo e expressaremos o Hamiltoniano de interação  $\hat{H}_I$  [28] na forma

$$\hat{H}_I = \int_{Volume} d\mathbf{r} \chi_{lij} \hat{\mathbf{E}}_l^{(+)} \hat{\mathbf{E}}_i^{(-)} \hat{\mathbf{E}}_j^{(-)} + h.c., \quad (2.22)$$

onde  $\hat{\mathbf{E}}_l^+$  é o operador campo elétrico com frequência positiva [23] e será dado pelo perfil do laser de bombeamento. Podemos expressar o Hamiltoniano de interação da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) &= \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}', s'} \sum_{\mathbf{k}'', s''} E_p \chi_{lij}^{(2)}(\omega_0, \omega', \omega'') (\mathbf{e}_{\mathbf{k}', s'}^*)_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}'', s''}^*)_j \\ &\times \int_{Volume} e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega' + \omega'' - \omega_0)t} \hat{a}_{\mathbf{k}', s'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'', s''}^\dagger d^3r + h.c., \end{aligned} \quad (2.23)$$

$\mathbf{k}_0$ ,  $\omega_0$  são, o vetor de onda e a frequência da onda de bombeamento respectivamente, tal campo é considerada ter amplitude  $\mathbf{E}_p$ , ser monocromática e tratada como um campo de radiação clássica, por isso,  $\hat{a}_{\mathbf{k}_0 s_0}$  foi incorporado na amplitude  $E_p$ . Assim,  $\mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{k}''$ ,  $\omega'$ ,  $\omega''$  são os vetores de onda e as frequências de onda dos feixes convertidos,  $\chi$  é a suscetibilidade magnética não-linear [28].

### Estado com dois fótons

Sendo  $|\Psi(0)\rangle$  o estado do campo em  $t = 0$  na figura de interação, temos o seguinte estado no tempo posterior  $\tau_i$ , denominado tempo de interação:

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left[\frac{1}{i\hbar} \int_0^{\tau_i} \hat{H}_I(t') dt'\right] |\Psi(0)\rangle. \quad (2.24)$$

No caso especial em que o estado inicial do campo convertido de forma descendente é o vácuo, temos no tempo de interação  $\tau_i$ , temos:

$$\begin{aligned} |\Psi(\tau_i)\rangle &= |vac\rangle_s |vac\rangle_i + \\ &+ L^{-3} \frac{E_p}{i\hbar} \int d\omega_0 \sum_{[\mathbf{k}_1 s_1]_s} \sum_{[\mathbf{k}_2 s_2]_i} \chi_{lij}^{(2)}(\omega_0, \omega_1, \omega_2) (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_1 s_1}^*)_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_2 s_2}^*)_j \times \\ &\times E_0(\omega_0) \prod_{m=1}^3 \left[ \frac{\sin \frac{1}{2}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)_m l_m}{\frac{1}{2}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)_m} \right] e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0)\tau_i/2} \times \\ &\times \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0)\tau_i}{\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0)} |\mathbf{k}_1, s_1\rangle_s |\mathbf{k}_2, s_2\rangle_i + \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

Neste caso o meio não linear forma de um paralelepípedo com lados  $l_1, l_2$  e  $l_3$ . Os índices denotam produto escalar entres as componenetes dos vetores de onda ( $\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ ) e os eixos do cristal. sabendo

$$\mathbf{k}_i = \frac{n_i(\omega_i)}{c} \omega_i \mathbf{q}_i \quad (i = 0, 1, 2). \quad (2.26)$$

Onde denotaremos o campo laser por 0 e os campos convertidos por 1 e 2.  $\mathbf{q}_i$  é o vetor unitário, direção de propagação do campo convertido.  $l_m (m = 1, 2, 3)$  é o comprimento de interação do meio não linear. A função sinc dá o casamento de fase para os campos convertidos.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{k} &= \mathbf{k}_0(\omega_0) - \mathbf{k}_1(\omega_1) - \mathbf{k}_2(\omega_2) \\ \Delta k_x &= \Delta k_y = k_1(\omega_1) \sin(\theta'_1) - k_2(\omega_2) \sin(\theta'_2) \\ \Delta k_z &= k_0(\omega_0) - k_1(\omega'_1) \cos(\theta_1) - k_2(\omega_2) \cos(\theta'_2) \end{aligned}$$

Podemos considerar, sem que se perca a generalidade, somente  $\text{sinc}(\Delta k_z l_3)$ , pois  $\cos(\theta_1) \approx 1$  e  $\sin(\theta'_1) \approx \theta'_1 \approx 0$ . Assumindo que o casamento de fase é satisfeito para os campos com a frequência central da conversão paramétrica descendente  $\omega_1^i$  e  $\omega_2^i$  e para o campo laser  $\omega_0^i$ , temos:

$$k_0^i - k_1^i - k_2^i = 0. \quad (2.27)$$

Tendo o conjunto  $\omega_0 = \omega_0^i + \Omega_0$  e  $\omega_1 = \omega_1^i + \Omega_0/2 + \Omega$  e

$$\omega_2 = \omega_2^i + \Omega_0/2 - \Omega, \quad (2.28)$$

onde  $\Omega_0$  e  $\Omega$  são desvios da frequência central do laser e dos campos convertidos respectivamente, podemos expressar o argumento da função sinc de casamento de fase da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta k_z(\Omega_0, \Omega) &\equiv k_0(\omega_0) - k_1(\omega_1) - k_2(\omega_2) \\ &= (k'_0 - \frac{1}{2}(k'_1 + k'_2))\Omega_0 + (k'_1 - k'_2)\Omega + \frac{1}{2}(k''_0 - \frac{1}{4}(k''_1 + k''_2))\Omega_0^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(k''_1 - k''_2)\Omega_0\Omega - \frac{1}{2}(k''_1 + k''_2)\Omega^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde  $k'_m = dk_m/d\omega_m$  e  $k''_m = d^2k_m/d\omega_m^2 (m = 0, 1, 2)$ . Note que  $\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  e  $\Omega_0 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_0^i$ . Assim,  $\Delta k(\Omega, \Omega_0) = \Delta k(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$  e podemos escrever

$$\begin{aligned}
|\Psi(\tau_i)\rangle &= |vac\rangle_s |vac\rangle_i + \\
&+ L^{-3} \frac{E_p}{i\hbar} \int d\omega_0 \int d\omega_1 \int d\omega_2 E_0(\omega_0) \chi_{lij}^{(2)}(\omega_0, \omega_1, \omega_2) \times \\
&\times \sum_{i,j} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_1 s_1})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_2 s_2})_j^* \frac{\sin[\Delta k_z(\omega_0, \omega_1, \omega_2) L_z]}{\Delta k_z(\omega_0, \omega_1, \omega_2)} e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0)\tau_i/2} \times \\
&\times \frac{\sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0)\tau_i}{\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0)} |\mathbf{k}_1, s_1\rangle_s |\mathbf{k}_2, s_2\rangle_i + \dots \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Finalmente podemos escrever o estado com dois fótons da seguinte forma:

$$|\Psi\rangle = M|vac\rangle + \eta E_p \int \int d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \dagger a_1 |\mathbf{k}_1, s_1\rangle_s |\mathbf{k}_2, s_2\rangle_i, \quad (2.31)$$

onde  $M$  dá a normalização do estado  $|\Psi\rangle$ ,  $\eta$  é dado por

$$\eta = \frac{\chi_{lij}^{(2)}(\omega_0, \omega_1, \omega_2)\tau_i}{i\hbar L^3 \sqrt{4\pi A_p}}, \quad (2.32)$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega_1, \omega_2) &= \sin[\Delta k(\omega_0, \omega_1, \omega_2) L_z] \text{sinc}[(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0)\tau_i/2] \\
&\times E_0(\omega_0) e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0)\tau_i/2}, \quad (2.33)
\end{aligned}$$

é uma das possíveis formas da função peso, e deve ser normalizada

$$\int d\omega_1 d\omega_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 = 1. \quad (2.34)$$

Para o caso de casamento de fase tipo II, basta substituir o hamiltoniano monocromático na expressão da equação (2.31).

### Estado com quatro fótons

Partiremos do seguinte:

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= \exp\left[\frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t') dt'\right] |\Psi(0)\rangle \\
&= \left\{ \mathbf{1} + \left[\frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t') dt'\right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t') dt'\right]^2 + \dots \right\} |\Psi(0)\rangle \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Considerando o tratamento para a obtenção do estado com dois fótons e um Hamiltoniano de interação monocromático, para cada caso de casamento de fase tipo I ou tipo II, temos o estado, geral, com quatro fótons:

$$|\Psi\rangle = M|vac\rangle + \eta E_p |\Phi_1\rangle + \eta^2 E_p^2 |\Phi_2\rangle. \quad (2.36)$$

onde  $M$  dá a normalização do estado,  $E_p$  é a amplitude do campo de bombeamento.

Quando consideramos o casamento de tipo I o Hamiltoniano de interação para o caso monocromático que ocorre na equação (2.12) é dado por:

$$\hat{H}_I = \hat{a}_1^\dagger(\omega_1)\hat{a}_2^\dagger(\omega_2)\hat{a}_0(\omega_0) + h.c., \quad (2.37)$$

Assim os estados com um par de fótons  $|\Phi_1^I\rangle$  e com dois pares de fótons  $|\Phi_2^I\rangle$  são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} |\Phi_1^I\rangle &= \int d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \hat{a}_s^\dagger(\omega_1) \hat{a}_i^\dagger(\omega_2) |vac\rangle, \\ |\Phi_2^I\rangle &= \frac{1}{2} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \\ &\quad \times \hat{a}_s^\dagger(\omega_1) \hat{a}_i^\dagger(\omega_2) \hat{a}_s^\dagger(\omega'_1) \hat{a}_i^\dagger(\omega'_2) |vac\rangle, \end{aligned} \quad (2.38)$$

a função peso  $\Phi(\omega_1, \omega_2)$  é normalizada, equação (2.34), então  $|\Phi_1\rangle$  e  $|\Phi_2\rangle$  estão ambas normalizadas.

Quando o casamento de fase das onda é do tipo II o Hamiltoniano de interação para o caso monocromático pode ser dado por:

$$\hat{H}_I = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{a}_H^\dagger(\omega_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \pm \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega_2)] + h.c. \quad (2.39)$$

onde temos as polarizações horizontal (H) e vertical (V), a soma referimos ao estado tripleto e diferença de fase representada pela subtração referimos ao estado singleto.

Os estados com um par de fótons  $|\Phi_1^{II}\rangle$  e com dois pares de fótons  $|\Phi_2^{II}\rangle$  são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} |\Phi_1^{II}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) [\hat{a}_H^\dagger(\omega_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \pm \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega_2)] |vac\rangle, \\ |\Phi_2^{II}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\ &\quad \times [\hat{a}_H^\dagger(\omega_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \pm \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega_2)] \\ &\quad \times [\hat{a}_H^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) \pm \hat{a}_V^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2)] |vac\rangle, \end{aligned}$$

assim,

$$|\Phi_1^{II}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) [\hat{a}_H^\dagger(\omega_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \pm \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega_2)] |vac\rangle, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} |\Phi_2^{II}\rangle &= \frac{1}{4} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \\ &\times \{ \hat{a}_H^\dagger(\omega_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) \pm \\ &\pm \hat{a}_H^\dagger(\omega_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) \pm \\ &\pm \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) + \\ &+ \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) \}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Nas próximas seções usaremos os estados com dois e quatro fótons aqui deduzidos.

### 2.4.3 Taxa de conversão descendente

Usando o casamento de fase tipo I como exemplo, calcularemos a taxa de conversão descendente [23]. Estando um detector no caminho do feixe denominado por sinal a uma distância  $c\tau_s$  do meio não-linear. Então o campo sinal presente no detector em um tempo  $t$  é representado pela seguinte expansão [23]:

$$\hat{E}_s^{(+)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{a}_s(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (2.42)$$

O termo  $\hat{a}_s(\omega)$  é o operador aniquilação de fótons para o modo sinal de frequência  $\omega$ . A taxa média  $R_s$  em que o detector registra fótons sinal é agora dada por

$$R_s(t) = \alpha_s \langle \Psi(t) | \hat{E}_s^{(-)}(t) \hat{E}_s^{(+)}(t) | \Psi(t) \rangle, \quad (2.43)$$

$\alpha$  é a eficiência quântica do detector e das equações (2.36) e (2.42) temos a primeira não nula em  $\eta$  para a taxa de conversão será [19] :

$$R_s(t) = \alpha_s \frac{|\eta|^2 E_p^2}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega_2 \left| \int d\omega_1 \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1 t} \right|^2 \quad (2.44)$$

Desde que o campo de bombeamento é pulsado, a probabilidade de conversão será dada pela média temporal para todos os tempos:

$$P_{1s} = \int_{-\infty}^{\infty} dt R_s(t) = |\eta|^2 E_p^2 \int \int d\omega_1 d\omega_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 \quad (2.45)$$



Como  $|E_p|^2$  dá a taxa com que os fótons do bombeamento caem no meio não-linear,  $|\eta|^2$  dará a fração de fótons de bombeamento incidentes que convertemos em pares sinal e complementar.

Logo a taxa com que os fótons são registrados é dado pelo seguinte:

$$Tr_i = \alpha_i |\eta E_p|^2 \quad (2.46)$$

## Capítulo 3

# O agrupamento de fótons, interferência entre fontes independentes de CPD e o interferômetro de Hong-Ou-Mandel

### 3.1 Introdução

O tratamento apresentado neste capítulo foi baseado no artigo [19]. Interferência com campos de conversão paramétrica descendente independentes é aplicada no processamento da informação [1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 30].

O agrupamento temporal de fótons é um efeito de alta ordem bem conhecido [9, 31, 32]. Tal efeito tem sido ignorado em todas as medidas de alta ordem em conversão paramétrica descendente pois, aparentemente, não ocorrem conexões entre visibilidade da interferência e o efeito de agrupamento dos fótons dos campos convertidos de maneira descendente.

Em seguida, apresentaremos um dos experimentos mais citados e reproduzidos em Óptica Quântica - o interferômetro de Hong-Ou-Mandel [13].

### 3.2 O agrupamento de fótons em CPD.

O estado contendo um e dois pares de fótons na CPD bombeada por um pulso coerente pode ser obtido usando o propagador de estado [32] e o Hamiltoniano da conversão paramétrica descendente, presente na equação

(2.24). Desta forma, temos (2.36) [33]:

$$|\Psi\rangle = (M)|vac\rangle + \eta E_p |\Phi_1\rangle + \eta^2 E_p^2 |\Phi_2\rangle, \quad (3.1)$$

onde  $E_p$  é a amplitude do campo de bombeamento e  $|\Phi_1\rangle$  e  $|\Phi_2\rangle$  são dados por (2.38):

$$\begin{aligned} |\Phi_1\rangle &= \int d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \hat{a}_s^\dagger(\omega_1) \hat{a}_i^\dagger(\omega_2) |vac\rangle, \\ |\Phi_2\rangle &= \frac{1}{2} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \\ &\quad \times \hat{a}_s^\dagger(\omega_1) \hat{a}_i^\dagger(\omega_2) \hat{a}_s^\dagger(\omega'_1) \hat{a}_i^\dagger(\omega'_2) |vac\rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

A função peso  $\Phi(\omega_1, \omega_2)$  é (2.34):

$$\int d\omega_1 d\omega_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 = 1. \quad (3.3)$$

Então  $|\Phi_1\rangle$  e  $|\Phi_2\rangle$  estão ambas normalizadas, como já apresentado na seção 2.4.2.

A taxa de detecção de dois fótons em um feixe de conversão paramétrica descendente será calculada. Os operadores campo elétrico são dados por [23]:

$$\begin{aligned} \hat{E}_s(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{a}_s(\omega) e^{-i\omega t}, \\ \hat{E}_i(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{a}_i(\omega) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Então, a probabilidade de detecção do campo sinal ou do campo complementar é dada por

$$p_{1s}(t) = \langle \Psi | \hat{E}_s^\dagger(t) \hat{E}_s(t) | \Psi \rangle = \|\hat{E}_s(t) | \Psi \rangle\|^2. \quad (3.5)$$

Calculando, para primeira ordem da equação (2.36), temos

$$p_{1s}(t) = \frac{|\eta|^2 E_p^2}{2\pi} \int d\omega_2 \left| \int d\omega_1 \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1 t} \right|^2. \quad (3.6)$$

A probabilidade de detecção de um fóton sobre todo tempo é

$$P_{1s} = \int_{-\infty}^{\infty} dt p_1(t) = |\eta|^2 E_p^2 \int d\omega_1 d\omega_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 = |\eta|^2 E_p^2. \quad (3.7)$$

Ou seja,  $|\eta|^2$  é a probabilidade de conversão, dado um pulso no cristal, como visto na equação (2.21).

No caso do agrupamento de fótons, a probabilidade de detecção de dois fótons deve ser calculada e comparada com a intensidade de cada fóton:

$$\begin{aligned} p_{2s}(t_1, t_2) &= \|\hat{E}_s(t_1)\hat{E}_s(t_2)|\Psi\rangle\|^2 \\ &= |\eta|^2 E_p^2 \|\hat{E}_s(t_1)\hat{E}_s(t_2)|\Phi_2\rangle\|^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Usando a seguinte relação de comutação

$$\begin{aligned} &[\hat{a}_s(\omega)\hat{a}_s(\omega'), \hat{a}_s^\dagger(\omega_1)\hat{a}_s^\dagger(\omega'_1)] \\ &= \delta(\omega - \omega_1)\delta(\omega' - \omega'_1) + \delta(\omega - \omega'_1)\delta(\omega' - \omega_1) \\ &+ \text{termos que anulam o vácuo,} \end{aligned} \quad (3.9)$$

temos:

$$\begin{aligned} p_{2s}(t_1, t_2) &= \frac{|\eta|^4}{4(2\pi)^2} \int d\omega_2 d\omega'_2 \{|F(\omega_2, \omega'_2)|^2 \\ &+ F(\omega_2, \omega'_2)F^*(\omega'_2, \omega_2)\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde

$$\begin{aligned} F(\omega_2, \omega'_2) &\equiv \int d\omega_1 d\omega'_1 \Phi(\omega_1, \omega_2)\Phi(\omega'_1, \omega'_2) \\ &\times (e^{-i\omega_1 t_1 - i\omega'_1 t_2} + e^{-i\omega'_1 t_1 - i\omega_1 t_2}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

O cálculo sobre toda probabilidade de detectar dois fótons é obtido integrando as variáveis  $t_1$  e  $t_2$  sobre todo o tempo, já que a janela de detecção é muito maior que o tempo de correlação:

$$\begin{aligned} P_{2s} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 p_{2s}(t_1, t_2), \\ &= \frac{|\eta|^4}{2(2\pi)^2} \int d\omega_2 d\omega'_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 |F(\omega_2, \omega'_2)|^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Expandindo tal equação e usando a equação (3.11) temos

$$\begin{aligned}
P_{2s} &= |\eta|^4 E_p^4 \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 [|\Phi(\omega_1, \omega_2)\Phi(\omega'_1, \omega'_2)|^2 \\
&\quad + \Phi(\omega_1, \omega_2)\Phi(\omega'_1, \omega'_2)\Phi^*(\omega_1, \omega'_2)\Phi^*(\omega'_1, \omega_2)] \\
&\equiv E_p^4(A + \varepsilon),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

onde

$$\begin{aligned}
A &= |\eta|^4 \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)\Phi(\omega'_1, \omega'_2)|^2, \\
&= |\eta|^4 = P_{1s}^2
\end{aligned} \tag{3.14}$$

é a probabilidade acidental e

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= |\eta|^4 \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2)\Phi(\omega'_1, \omega'_2) \\
&\quad \times \Phi^*(\omega_1, \omega'_2)\Phi^*(\omega'_1, \omega_2)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

é o termo de excesso que possibilita o efeito de agrupamento. É fácil notar, pela desigualdade de Schwatz, que  $\varepsilon \leq A$ . A igualdade ocorreria caso a função  $\Phi(\omega_1, \omega_2)$  pudesse ser fatorada; isto não é possível, devido à dependência não trivial de  $\Phi$  com  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . No entanto, podemos usar filtros para modificar  $\Phi$ . Devemos, então, modificar o campo elétrico para

$$\begin{aligned}
\hat{E}_s(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega f(\omega - \omega_0) \hat{a}_s(\omega) e^{-i\omega t}, \\
\hat{E}_i(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega f(\omega - \omega_0) \hat{a}_i(\omega) e^{-i\omega t},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

sendo  $f(\omega - \omega_0)$  a função transmissão [23] do filtro centrada na frequência central da conversão paramétrica descendente de frequência  $\omega_0$ .

Podemos aproximar a razão  $\varepsilon/A$  a 1, utilizando os citados filtros, de forma que a dependência da função  $\Phi(\omega_1, \omega_2)$  com  $\omega_1$  e  $\omega_2$  possa ser aproximada pela forma fatorada  $f(\omega_1)f(\omega_2)$ . Sob estas condições, o agrupamento perfeito será dado por:

$$g_2 = P_{2s}/P_{1s}^2 = (A + \varepsilon)/A = 2. \tag{3.17}$$

### 3.3 Interferência entre fontes independentes de CPD.

Calcularemos aqui a visibilidade de duas fontes independentes de conversão paramétrica descendente contendo dois fótons cada feixe.

Considerando dois processos de bombeamento por um pulso comum descrito por  $a_p(\omega)$ . Conforme Figura 3.1, temos o estado quântico do sistema dado por

$$|\Psi\rangle = |\Psi^{(1)}\rangle \otimes |\Psi^{(2)}\rangle. \quad (3.18)$$

onde  $|\Psi^{(1)}\rangle$  e  $|\Psi^{(2)}\rangle$  descrevem os estados quânticos de cada processo paramétrico. Da equação (2.36) com  $\hat{a}_s$  modificados para  $\hat{a}_{s1}$  ou  $\hat{a}_{s2}$  e  $\hat{a}_i$  para  $\hat{a}_{i1}$  ou  $\hat{a}_{i2}$ .

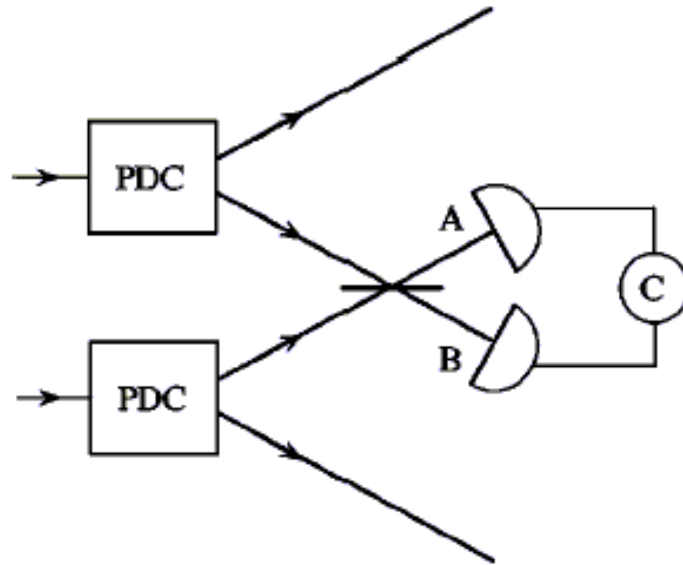


Figura 3.1: Interferência entre dois campos sinal de duas fontes independentes de conversão paramétrica

O campo na saída do divisor de feixes tem a seguinte conexão com os campos  $s1$  e  $s2$ ,

$$\begin{aligned} \hat{E}_A(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{E}_{s1}(t) + \hat{E}_{s2}(t + \delta)], \\ \hat{E}_B(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{E}_{s1}(t) - \hat{E}_{s2}(t - \delta)]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Onde  $\delta$  é o atraso entre o feixe transmitido e o refletido. Quando  $\delta = 0$  temos total superposição e máxima interferência.

Dois fótons coincidentes entre os campos  $\hat{E}_A$  e  $\hat{E}_B$  são proporcionais a

$$p_2(t_1, t_2) = \|\hat{E}_A(t_1)\hat{E}_B(t_2)|\Psi\rangle\|^2. \quad (3.20)$$

Do campo na saída do divisor de feixes equação (3.19) temos

$$\begin{aligned} \hat{E}_A(t_1)\hat{E}_B(t_2) &= \frac{1}{2}[\hat{E}_{s1}(t_1)\hat{E}_{s2}(t_2) - \hat{E}_{s2}(t_1 + \tau)\hat{E}_{s1}(t_2 - \delta) \\ &+ \hat{E}_{s2}(t_1 + \delta)\hat{E}_{s1}(t_2) - \hat{E}_{s1}(t_1)\hat{E}_{s1}(t_2 - \delta)]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Devido a existência do campo complementar é fácil mostrar que a probabilidade temporal de coincidência equação (3.20)  $\hat{E}_{s1}\hat{E}_{s1}|\Psi\rangle$ ,  $\hat{E}_{s2}\hat{E}_{s2}|\Psi\rangle$  e  $(\hat{E}_{s1}\hat{E}_{s2} - \hat{E}_{s2}\hat{E}_{s1})|\Psi\rangle$  são mutuamente ortogonais. Restando apenas os seguintes termos com contribuição não nula.

$$\begin{aligned} p_2(t_1, t_2) &= \frac{1}{4}\{\|\hat{E}_{s1}(t_1)\hat{E}_{s1}(t_2 - \delta)|\Psi\rangle\|^2 \\ &+ \|\hat{E}_{s2}(t_1 + \delta)\hat{E}_{s2}(t_2)|\Psi\rangle\|^2 \\ &+ \|\hat{E}_{s2}(t_1)\hat{E}_{s2}(t_2) - \hat{E}_{s2}(t_1 + \delta) \\ &\times \hat{E}_{s1}(t_2 - \delta)|\Psi\rangle\|^2\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Na maioria dos casos a janela de coincidência seja muito maior que a de coerência do campo convertido, a coincidência observada é uma média temporal da probabilidade dada pela equação (3.22)

$$P_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 p_2(t_1, t_2). \quad (3.23)$$

O primeiro dos dois termos da probabilidade equação (3.22) é dado pelas equações (3.8) e (3.13).

$$\begin{aligned} \int dt_1 dt_2 \|\hat{E}_{s1}(t_1)\hat{E}_{s1}(t_2 - \delta)|\Psi\rangle\|^2 &= \int dt_1 dt_2 \|\hat{E}_{s2}(t_1 + \delta)\hat{E}_{s2}(t_2)|\Psi\rangle\|^2, \\ &= (A + \varepsilon)E_p^4 \end{aligned} \quad (3.24)$$

os dois termos independem do atraso  $\delta$ . O outro termo da equação (3.23) contribui da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{s1}(t_1)\hat{E}_{s2}(t_2)|\Psi\rangle &= \hat{E}_{s1}(t_1)|\Psi^{(1)}\rangle\hat{E}_{s2}(t_2)|\Psi^{(2)}\rangle, \\
&= \frac{\eta^2 E_p^2}{2\pi} \int d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1 t_1} \hat{a}_{i1}^\dagger(\omega_2) |vac^{(1)}\rangle \\
&\times d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega'_1, \omega'_2) e^{-i\omega'_1 t_2} \hat{a}_{i2}^\dagger(\omega'_2) |vac^{(2)}\rangle, \\
&= \frac{\eta^2 E_p^2}{2\pi} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \\
&\times e^{-i\omega_1 t_1 - i\omega'_1 t_2} \hat{a}_{i1}^\dagger(\omega_2) \hat{a}_{i2}^\dagger(\omega'_2) |vac^{(2)}\rangle |vac^{(1)}\rangle.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

O outro termo é obtido repondo  $t_1$  por  $t_2 - \delta$  e  $t_2$  por  $t_1 + \delta$  na equação (3.25)

$$\begin{aligned}
\|[\hat{E}_{s2}(t_1)\hat{E}_{s2}(t_2) - \hat{E}_{s2}(t_1 + \delta)\hat{E}_{s1}(t_2 - \delta)]\|^2 &= \frac{|\eta|^4 E_p^4}{(2\pi)^2} \int d\omega_2 d\omega'_2 \left| \int d\omega_1 d\omega'_1 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \right. \\
&\times [e^{-i\omega_1 t_1 - i\omega'_1 t_2} - e^{-i\omega_1(t_2 - \delta) - i\omega'_1(t_1 + \delta)}] \left. \right|^2, \\
&= \frac{|\eta|^4 E_p^4}{(2\pi)^2} \int d\omega_2 d\omega'_2 \left| \int d\omega_1 d\omega'_1 e^{-i\omega_1 t_1 - i\omega'_1 t_2} \right. \\
&\times [\Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) - \Phi(\omega'_1, \omega_2) \Phi(\omega_1, \omega'_2) e^{-i(\omega'_1 - \omega_1)\delta}] \left. \right|^2
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Após a integração temporal

$$\begin{aligned}
\int dt_1 dt_2 \|[\hat{E}_{s2}(t_1)\hat{E}_{s2}(t_2) - \hat{E}_{s2}(t_1 + \delta)\hat{E}_{s1}(t_2 - \delta)]|\Psi\rangle\|^2 &= |\eta|^4 E_p^4 \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \left| \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \right. \\
&- \Phi(\omega'_1, \omega_2) \Phi(\omega_1, \omega'_2) e^{-i(\omega'_1 - \omega_1)\tau} \left. \right|^2, \\
&= [A - \varepsilon(\delta)] E_p^4
\end{aligned} \tag{3.27}$$

com



$$\begin{aligned}
\varepsilon(\delta) \equiv & |\eta|^4 \operatorname{Re} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \\
& \times \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \Phi^*(\omega'_1, \omega_2) \\
& \times \Phi^*(\omega_1, \omega_2) e^{-i(\omega'_1 - \omega_1)\delta}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Como  $\varepsilon(0) = \varepsilon$  e  $\varepsilon(\infty) = 0$ , a coincidência fica dada por

$$P_2(\tau) = [A + \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon(\delta))]E_p^4, \tag{3.29}$$

e a visibilidade fica

$$v = \frac{P_2(\infty) - P_2(0)}{P_2(\infty)} = \frac{\varepsilon}{2A + \varepsilon}. \tag{3.30}$$

Como  $\varepsilon \leq A$ , o valor máximo de  $v$  é  $1/3$ .

### 3.4 O interferômetro de Hong-Ou-Mandel

No processo óptico não linear da conversão paramétrica descendente, um feixe de laser de frequência  $\omega_0$ , ao incidir em um cristal não-linear, gera pares de fótons com frequência  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Neste processo, energia ( $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ ) e momento ( $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ ) são conservados. No interferômetro de Hong-Ou-Mandel [13], pares de fótons com mesma frequência ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0/2$ ) são selecionados e combinados em um divisor de feixes. Neste interferômetro, observamos que ao igualar os caminhos dos fótons gerados, do cristal ao divisor de feixes, a taxa de coincidência medida na saída do divisor cai consideravelmente chegando a zero em alguns casos. Este efeito corresponde a um processo de interferência destrutiva de quarta ordem no divisor de feixes. O interferômetro está representado na Figura 3.2:

Sendo o estado de entrada do divisor de feixes do interferômetro o estado de Fock de dois fótons  $|1_{01}, 1_{02}\rangle$ , o estado na saída do divisor de feixes é descritos da seguinte forma [13]

$$|\Psi_{out}\rangle = (R - T)|1_1, 1_2\rangle + i(2RT)^{1/2}(|2_1, 0_2\rangle + |0_1, 2_2\rangle), \tag{3.31}$$

onde R e T são as reflectividade e a transmissividade do divisor de feixes, e os índices 1, 2 significam os modos do campo na saída do divisor de feixes.

Na prática, os fótons nunca são monocromáticos, logo a maneira mais geral de representar o estado de saída do cristal é [13]

$$|\Psi\rangle = \int d\omega \phi(\omega, \omega_0 - \omega)|\omega, \omega_0 - \omega\rangle, \tag{3.32}$$

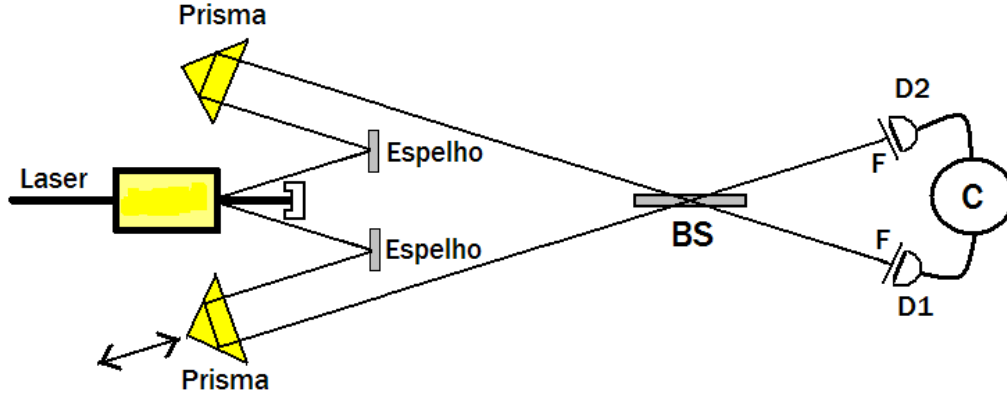


Figura 3.2: Aparato experimental do interferômetro de Hong-Ou-Mandel.

onde a informação sobre a conservação de energia no processo não-linear está contida na função  $\phi(\omega, \omega_0 - \omega)$ .

A probabilidade conjunta de detecção em ambos os detectores D1 e D2 nos tempos  $t$  e  $t + \tau$  é dada por [13, 23]

$$P_{12}(\tau) = K \langle \hat{E}_1^{(-)}(t) \hat{E}_2^{(-)}(t + \tau) \hat{E}_2^{(+)}(t + \tau) \hat{E}_1^{(+)}(t) \rangle \quad (3.33)$$

onde  $\hat{E}_1^{(+)}(t)$  e  $\hat{E}_2^{(+)}(t)$  são os operadores campo com frequências positivas nos detectores D1 e D2, e  $K$  é uma constante característica do detector. Tais campos se relacionam com os campos  $\hat{E}_{01}^{(+)}(t)$  e  $\hat{E}_{02}^{(+)}(t)$  dos dois espelhos E1 e E2, respectivamente, da seguinte forma:

$$\hat{E}_1^{(+)}(t) = \sqrt{T} \hat{E}_{01}^{(+)}(t - \tau_1) + i\sqrt{R} \hat{E}_{02}^{(+)}(t - \tau_1 + \delta), \quad (3.34)$$

$$\hat{E}_2^{(+)}(t) = \sqrt{T} \hat{E}_{02}^{(+)}(t - \tau_1) + i\sqrt{R} \hat{E}_{01}^{(+)}(t - \tau_1 - \delta), \quad (3.35)$$

aqui  $\tau_1$  é o tempo de propagação do espelho aos detectores D1 e D2 e  $\pm c\delta$  é o deslocamento espacial do prisma, sendo  $\delta$  o atraso temporal entre os fótons no divisor de feixes.

A probabilidade é portanto [13],

$$P_{12}(\tau) = K|G(0)|^2 T^2 |g(\tau)|^2 + R^2 |g(2\delta - \tau)| - RT[g^*(2\delta - \tau) + c.c.] \quad (3.36)$$

onde  $G(\tau)$  é a transformada de Fourier da função  $\phi(\omega_0/2 - \omega, \omega_0/2 + \omega)$  com o respectivo  $\omega$ .

$$G(\tau) = \int \phi(\omega_0/2 - \omega, \omega_0/2 + \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (3.37)$$

e  $g(\tau) \equiv G(\tau)/G(0)$ . Quando a função  $\phi(\omega_0/2 - \omega, \omega_0/2 + \omega)$  for simétrica e real em  $\omega$ ,  $G(\tau)$  e  $g(\tau)$  também serão funções simétricas em  $\tau$ .

Na prática, a medida da taxa de coincidência é a soma da probabilidade  $P_{12}$  em todo o tempo de coincidência, mas como tal tempo é muito maior que o de correlação de  $g(\tau)$  no experimento, podemos considerá-lo infinito na integração.

O número esperado para a taxa de coincidências observadas é dado por

$$N_c = C \left[ R^2 + T^2 - 2RT \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(\tau - 2\delta)d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(\tau)d\tau} \right], \quad (3.38)$$

onde  $C$  é uma constante. Assim,  $N_c = C(R - T)^2$  quando  $\delta = 0$  e  $N_c = C(R^2 + T^2)$  quando  $\delta$  excede apreciavelmente o tempo de correlação de  $g(\tau)$ .

No caso especial em que  $\phi(\omega_0/2 - \omega, \omega_0/2 + \omega)$  é gaussiano em  $\omega$  com largura a meia altura  $\Delta\omega$  então  $g(\tau)$  tem a seguinte forma gaussiana:

$$g(\tau) = e^{-(\Delta\omega\tau)^2/2}. \quad (3.39)$$

outras formas de  $\phi(\omega_0/2 - \omega, \omega_0/2 + \omega)$  podem ser dadas [33]

Finalmente o número esperado para a taxa de coincidências observadas fica

$$N_c = C(T^2 + R^2) \left[ 1 - \frac{2RT}{T^2 + R^2} e^{-(\Delta\omega\delta)^2} \right]. \quad (3.40)$$

A Figura 3.3 mostra o comportamento da taxa de coincidências em função da diferença de caminho entre os braços do interferômetro de HOM dado pela equação (3.40) para dois diferentes valores de reflectância  $R$  e transmitância  $T$  do divisor de feixes. A Figura 3.2 mostra o resultado e curva teórica obtida por HOM [13].

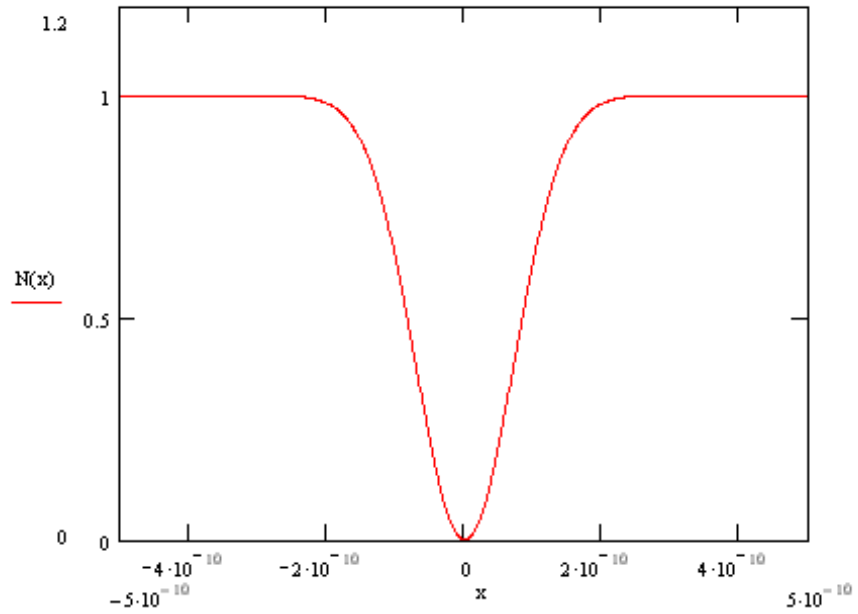


Figura 3.3: Resultado esperado para a taxa de coincidências considerando com  $C = 1$ ,  $\Delta\omega = 10^{10}Hz$  e  $R = T = 0.5$  na equação (3.40).

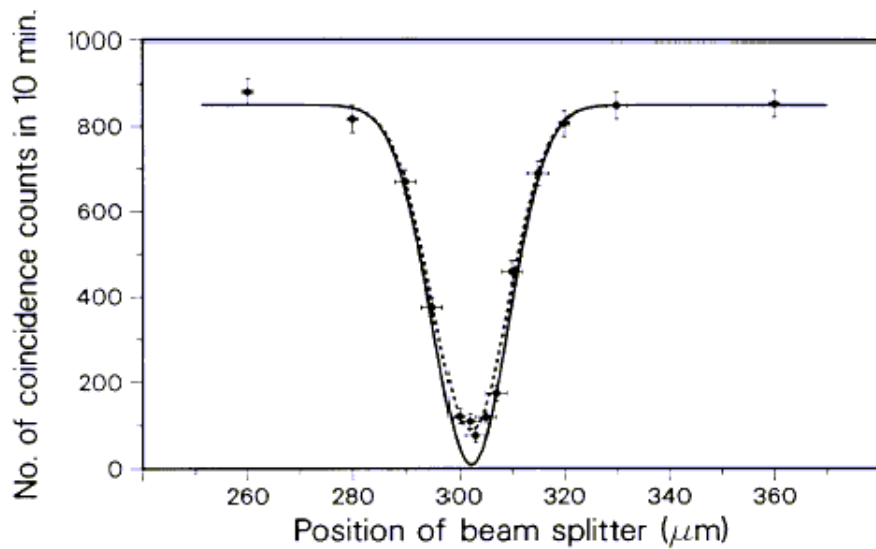


Figura 3.4: Resultados obtidos por HOM e curva teórica. Aqui  $R/T = 0.95$ ,  $\Delta\omega = 3 \times 10^{13}Hz$

# Capítulo 4

## Interferômetro de Hong-Ou-Mandel com um e dois pares de fótons

### 4.1 Introdução

Será feito aqui, o cálculo do número esperado para taxa de coincidência observada em um interferômetro de Hong-Ou-Mandel [13] com um e com dois pares de fótons na entrada dos divisores. No capítulo 3 deste texto, foi feita uma apresentação do interferômetro de Hong-Ou-Mandel com um par de fótons convertidos de forma descendente e com casamento de fase tipo I [27].

### 4.2 Medida fotoelétrica do campo óptico e ordenamento normal

Nesta seção seguiremos o tratamento feito por Mandel e Wolf na referência [23]. Da expansão do campo eletromagnético, vemos que todas as expansões ( $\hat{E}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{A}$ ) têm a seguinte forma geral

$$\frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [l(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + h.c.], \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}s}$  é um vetor unitário de polarização ortogonal ao modo  $\mathbf{k}$  e  $l(\omega)$  uma função de  $\omega$ , por exemplo  $\left(\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0}\right)$  para o potencial vetor. É conveniente combinar estas expansões escrevendo

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \quad (4.2)$$

onde  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$  é um operador vetorial campo com a seguinte forma

$$\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s l(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (4.3)$$

$$\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s l^*(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, (\omega = ck) \quad (4.4)$$

onde  $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  e  $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  são os operadores com frequências positiva e negativa, respectivamente, dos campos vetoriais.

Discutiremos agora a detecção fotoelétrica do campo óptico na representação de interação [32, 34]. Se o campo eletromagnético encontramos no estado quântico inicial  $|\psi_1\rangle$ , e após detecção o campo elétrico encontramos no estado quântico  $|\psi_2\rangle$ , então a amplitude de probabilidade do processo em que um fóton é detectado nas coordenadas  $\mathbf{r}$  e  $t$  será dada pelo seguinte elemento de matriz  $\langle \psi_2 | \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s, \mathbf{r}, t) | \psi_1 \rangle$ , enquanto que a probabilidade de transição é dada por  $|\langle \psi_2 | \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s, \mathbf{r}, t) | \psi_1 \rangle|^2$ . Assim a probabilidade de transição para todo estado final é dada por

$$\sum_{\text{todo } \psi_2} |\langle \psi_2 | \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s, \mathbf{r}, t) | \psi_1 \rangle|^2. \quad (4.5)$$

De modo mais geral, se o estado inicial  $|\psi_1\rangle$  não for um estado puro, mas sim um conjunto de estados caracterizados pelo operador densidade [32]:

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi_1} p(\psi_1) |\psi_1\rangle \langle \psi_1|, \quad (4.6)$$

onde  $p(\psi_1)$  é a probabilidade associada com o estado  $|\psi_1\rangle$ , temos a taxa de detecção para um conjunto de estados dada por

$$\text{Taxa de detecção} = C_1 \sum_{\psi_1} p(\psi_1) \sum_{\text{todo } \psi_2} |\langle \psi_2 | \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s, \mathbf{r}, t) | \psi_1 \rangle|^2, \quad (4.7)$$

onde  $C_1$  é uma constante característica do detector. Para um intervalo de tempo curto  $\Delta t$  em que a taxa de detecção não varie de forma considerável, podemos obter a probabilidade diferencial,

Probabilidade de  
fotodetecção para  
polarização  $s$  em

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \text{ e } t \text{ dentro de } \Delta t &\equiv P_1(s, \mathbf{r}, t)\Delta t \\ &= C_1\Delta t \sum_{\psi_1} p(\psi_1) \sum_{\text{all } \psi_2} |\langle \psi_2 | \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s, \mathbf{r}, t) | \psi_1 \rangle|^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Enfatizamos aqui que  $\Delta t$  é suficientemente curto de forma que o último termo da probabilidade descrita na equação (4.8) é bem menor que a unidade; enfatizamos também que temos somente um detector.

Expandindo a parte do módulo quadrado da probabilidade (4.8) temos

$$\begin{aligned} P_1(s, \mathbf{r}, t)\Delta t &= C_1\Delta t \sum_{\psi_1} p(\psi_1) \sum_{\text{todo } \psi_2} \langle \psi_2 | \hat{\mathbf{F}}_i^{(-)}(s, \mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{F}}_i^{(+)}(s, \mathbf{r}, t) | \psi_1 \rangle \\ &= C_1\Delta t \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{\mathbf{F}}_i^{(-)}(s, \mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{F}}_i^{(+)}(s, \mathbf{r}, t)] \\ &= C_1\Delta t \langle \hat{\mathbf{F}}_i^{(-)}(s, \mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{F}}_i^{(+)}(s, \mathbf{r}, t) \rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Entenda o índice repetido  $i$  como uma soma nas coordenadas cartesianas. A probabilidade aqui é proporcional ao valor esperado do produto escalar de  $\hat{\mathbf{F}}_i^{(-)}(s, \mathbf{r}, t)$  com  $\hat{\mathbf{F}}_i^{(+)}(s, \mathbf{r}, t)$  nesta ordem. Aqui o ordenamento ocorreu naturalmente.

Introduzimos a noção de operador intensidade de campo como sendo o seguinte produto escalar

$$\hat{\mathbf{I}}(s, \mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{F}}_i^{(-)}(s, \mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{F}}_i^{(+)}(s, \mathbf{r}, t). \quad (4.10)$$

Este operador intensidade está associado a uma certa polarização  $s$ . Podemos ter o operador intensidade total do campo usando o operador total  $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$

$$\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t). \quad (4.11)$$

Com a introdução do operador intensidade podemos reescrever a probabilidade (4.9)

$$P_1(s, \mathbf{r}, t)\Delta t = C_1\Delta t \langle \hat{\mathbf{I}}(s, \mathbf{r}, t) \rangle = C_1\Delta t \langle \mathbf{I}(s, \mathbf{r}, t) \rangle_{\phi}. \quad (4.12)$$

No último termo, usamos  $\mathbf{I}(s, \mathbf{r}, t) = \mathbf{F}^{(-)}(s, \mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{F}^{(+)}(s, \mathbf{r}, t)$  onde  $\mathbf{F}^{(-)}(s, \mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{F}^{(+)}(s, \mathbf{r}, t)$  são os autovalores à esquerda e à direita dos operadores  $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(s, \mathbf{r}, t)$  e  $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s, \mathbf{r}, t)$ , respectivamente. O índice  $\phi$  indica que o estado presente é o autoestado do operador  $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s, \mathbf{r}, t)$ . Usando o operador total  $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  temos

$$P_1(\mathbf{r}, t)\Delta t = C_1\Delta t\langle\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{r}, t)\rangle = C_1\Delta t\langle\mathbf{I}(\mathbf{r}, t)\rangle_\phi. \quad (4.13)$$

Aqui  $C_1$  não é necessariamente a mesma constante da probabilidade (4.12).

### 4.2.1 Fotodeteção múltipla e função correlação de alta ordem

Examinaremos agora a probabilidade conjunta [32] de detecção com vários detectores. Eventos diferentes de fotodeteção podem, também, ser registrados pelo mesmo detector em tempos diferentes. Considere um certo número de fotodetectores nas posições  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , etc. com os polarizadores  $s_1, s_2, \dots$ , em frente de cada fotodetector. Queremos calcular a probabilidade conjunta de detecção registrada na posição  $\mathbf{r}_1$  e no tempo  $t_1$ , com intervalo de tempo curto  $\Delta t_1$ , na posição  $\mathbf{r}_2$  e no tempo  $t_2$  com intervalo de tempo curto  $\Delta t_2$ , etc. Sendo  $N$  detectores, considere o seguinte ordenamento temporal

$$t_1 < t_2 < \dots < t_N. \quad (4.14)$$

A amplitude de probabilidade para a transição do estado inicial do campo  $|\psi_1\rangle$  para o estado final  $|\psi_2\rangle$  será então:

$$\langle\psi_2|\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s_N, \mathbf{r}_N, t_N) \cdots \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s_2, \mathbf{r}_2, t_2)\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(s_1, \mathbf{r}_1, t_1)|\psi_1\rangle, \quad (4.15)$$

com o operador absorção sendo aplicado  $N$  vezes em sucessão. O produto direto dos operadores deve ser entendido como um operador tensor. Multiplicamos a amplitude de probabilidade por seus complexos conjugados e somamos sobre todo o conjunto ortogonal completo  $|\psi_2\rangle$ . Caso o estado inicial não seja um estado puro, mas um estado caracterizado pelo operador densidade  $\hat{\rho}$  como os operadores da equação (4.6), então, devemos somar sobre todo  $\psi_1$  com o peso  $p(\psi)$ , então

Probabilidade conjunta  $N$ -ésima de fotodeteção  
para polarização  $s_1$  em  $\mathbf{r}_1, t_1$  dentro de  $\Delta t_1$ ,



$$\begin{aligned}
& \text{para polarização } s_2 \text{ em } \mathbf{r}_2, t_2 \text{ dentro de } \Delta t_2, \\
& \vdots \\
& \text{para polarização } s_N \text{ em } \mathbf{r}_N, t_N \text{ dentro de } \Delta t_N \\
\equiv & P_N(s_1, \mathbf{r}_1, t_1; s_2, \mathbf{r}_2, t_2; \cdots s_N, \mathbf{r}_N, t_N) \Delta t_1 \Delta t_2 \cdots \Delta t_N \\
= & C_N \Delta t_1 \cdots \Delta t_N \sum_{\psi_1} p(\psi_1) \sum_{\text{todo } \psi_2} \langle \psi_1 | \hat{\mathbf{F}}_{i_1}^{(-)}(s_1, \mathbf{r}_1, t_1) \cdots \hat{\mathbf{F}}_{i_N}^{(-)}(s_N, \mathbf{r}_N, t_N) | \psi_2 \rangle \\
& \times \langle \psi_2 | \hat{\mathbf{F}}_{i_N}^{(+)}(s_N, \mathbf{r}_N, t_N) \cdots \hat{\mathbf{F}}_{i_1}^{(+)}(s_1, \mathbf{r}_1, t_1) | \psi_1 \rangle \\
= & C_N \Delta t_1 \cdots \Delta t_N \langle \hat{\mathbf{F}}_{i_1}^{(-)}(s_1, \mathbf{r}_1, t_1) \cdots \hat{\mathbf{F}}_{i_N}^{(-)}(s_N, \mathbf{r}_N, t_N) \hat{\mathbf{F}}_{i_N}^{(+)}(s_N, \mathbf{r}_N, t_N) \\
& \times \cdots \hat{\mathbf{F}}_{i_1}^{(+)}(s_1, \mathbf{r}_1, t_1) \rangle, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

onde somamos os índices repetidos e  $C_N$  é uma constante característica do  $N$ -ésimo detector.

## 4.2.2 Ordenando símbolos e ordenando operadores

A expressão para a probabilidade de detecção  $P_N$  pode ser simplificada com o uso do operador intensidade dado pela equação (4.10) ou (4.11), no entanto, não se pode simplesmente fazer um produto dos operadores. Introduziremos uma notação para indicar o ordenamento. Utilizaremos aqui dois pontos para o ordenamento dos operadores criação e aniquilação [23] de forma que  $:\hat{a}^\dagger \hat{a} := \hat{a}^\dagger \hat{a}$  e  $:\hat{a} \hat{a} := \hat{a} \hat{a}$ . Usaremos o símbolo  $\mathfrak{S}$  para indicar o ordenamento temporal dos operadores [23] de forma que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S} \hat{\mathbf{F}}_i^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\mathbf{F}}_j^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{F}}_k^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) \hat{\mathbf{F}}_l^{(+)}(\mathbf{r}_4, t_4) \\
= \hat{\mathbf{F}}_j^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{F}}_i^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\mathbf{F}}_l^{(+)}(\mathbf{r}_4, t_4) \hat{\mathbf{F}}_k^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3)
\end{aligned}$$

onde  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \cdots$ , ou seja, os operadores criação (aniquilação) são ordenados no sentido crescente (decrescente) temporalmente.

Usando a notação acima temos

$$\begin{aligned}
P_N(s_1, \mathbf{r}_1, t_1; \cdots, s_N, \mathbf{r}_N, t_N) \Delta t_1 \cdots \Delta t_N \\
= C_N \Delta t_1 \cdots \Delta t_N \langle \mathfrak{S} : \hat{\mathbf{I}}(s_1, \mathbf{r}_1, t_1) \cdots \hat{\mathbf{I}}(s_N, \mathbf{r}_N, t_N) : \rangle \\
= C_N \Delta t_1 \cdots \Delta t_N \langle \hat{\mathbf{I}}(s_1, \mathbf{r}_1, t_1) \cdots \hat{\mathbf{I}}(s_N, \mathbf{r}_N, t_N) \rangle_\phi, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Igualmente, em termos dos operadores totais, temos

$$\begin{aligned}
P_N(\mathbf{r}_1, t_1; \dots, \mathbf{r}_N, t_N) \Delta t_1 \cdots \Delta t_N \\
&= C_N \Delta t_1 \cdots \Delta t_N \langle \mathfrak{S} : \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdots \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{r}_N, t_N) : \rangle \\
&= C_N \Delta t_1 \cdots \Delta t_N \langle \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdots \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{r}_N, t_N) \rangle_\phi.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Algumas propriedades do ordenamento dos geradores são diretas

$$: \hat{A} + \hat{B} : := : \hat{A} : + : \hat{B} :, \tag{4.19}$$

e sendo  $\hat{A} = \hat{B}$  temos

$$: \hat{A} : := : \hat{B} : . \tag{4.20}$$

Além disso, para

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1, \tag{4.21}$$

temos:

$$: \hat{a}\hat{a}^\dagger : \neq : \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 : . \tag{4.22}$$

### 4.2.3 Funções de correlação

A descrição de um experimento de correlação fotoelétrica envolvendo dois fotodetectores é dada pela seguinte expressão:

$$\langle \hat{\mathbf{F}}_i^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{F}}_j^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{F}}_j^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) \hat{\mathbf{F}}_i^{(+)}(\mathbf{r}_4, t_4) \rangle, \tag{4.23}$$

onde os índices  $i, j$  indicam a polarização do respectivo campo.

Esta é uma função correlação ordenada e de quarta ordem em que todos os argumentos são diferentes. Igualmente, uma função correlação para  $N$  detectores terá ordem  $2N$ .

### 4.3 Interferômetro de Hong-Ou-Mandel usando CPD e com casamento de fase tipo I

O processo de conversão paramétrica descendente bombeada por um pulso coerente, usando casamento de fase tipo I, pode ser descrito pela equação (2.36)

$$|\Psi\rangle = M|vac\rangle + \eta E_p |\Phi_1\rangle + \eta^2 E_p^2 |\Phi_2\rangle,$$

onde, da equação (2.38),

$$|\Phi_1\rangle = \int d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \hat{a}^\dagger(\omega_1) \hat{b}^\dagger(\omega_2) |vac\rangle, \quad (4.24)$$

e

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{2} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\ \times \hat{a}^\dagger(\omega_1) \hat{b}^\dagger(\omega_2) \hat{a}^\dagger(\omega'_1) \hat{b}^\dagger(\omega'_2) |vac\rangle. \quad (4.25)$$

Aqui modificamos  $\hat{a}_s$  para  $\hat{a}$  e  $\hat{a}_i$  para  $\hat{b}$ ;  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{b}^\dagger$  indica em qual braço do interferômetro de Hong-Ou-Mandel o operador criação criou um fóton (vide Figura 3.2, interferômetro de Hong-Ou-Mandel).

No estado da equação (4.24), temos um par de fótons gêmeos gerados de um fóton do feixe de bombeamento e no estado da equação (4.25) temos dois pares de fótons gêmeos gerados por dois fótons do feixe de bombeamento.

Por analogia com a equação (3.19), os operadores campos ópticos na saída do divisor de feixes BS (Figura 3.2) são dados por

$$\hat{\mathbf{F}}_1^{(+)}(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_1) + \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_1 + \delta)], \\ \hat{\mathbf{F}}_2^{(+)}(t_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_2) - \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_2 - \delta)], \quad (4.26)$$

onde os operadores do campo elétrico na entrada do divisor de feixes são

$$\hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{a}(\omega) e^{-i\omega t}, \\ \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{b}(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (4.27)$$

Usando o operador intensidade, descrito no seção 4.2, temos

$$\hat{\mathbf{I}}_1(t_1) = \hat{\mathbf{F}}_1^{(-)}(t_1) \cdot \hat{\mathbf{F}}_1^{(+)}(t_1), \quad (4.28)$$

$$\hat{\mathbf{I}}_2(t_2) = \hat{\mathbf{F}}_2^{(-)}(t_2) \cdot \hat{\mathbf{F}}_2^{(+)}(t_2), \quad (4.29)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{I}}_1(t_1) = & \frac{1}{2} \{ \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_1 + \delta) \cdot \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_1 + \delta) + \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_1 + \delta) \cdot \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_1) \\ & + \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_1) \cdot \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_1 + \delta) + \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_1) \cdot \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_1) \} \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{I}}_2(t_2) = & \frac{1}{2} \{ \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_2) \cdot \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_2) - \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_2) \cdot \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_2 - \delta) \\ & - \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_2 - \delta) \cdot \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_2) + \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_2 - \delta) \cdot \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_2 - \delta) \}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Finalmente, a probabilidade de detecção de coincidências após o divisor de feixes é dada por

$$P_I(t_1, t_2) = \langle \mathfrak{S} : \hat{\mathbf{I}}_1(t_1) \hat{\mathbf{I}}_2(t_2) : \rangle. \quad (4.32)$$

A taxa de coincidência é obtida pela integração da probabilidade de detecção de coincidências em todos os tempos  $t_1$  e  $t_2$ :

$$N_{Ic}(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_I(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (4.33)$$

Após o ordenamento temporal e espacial da probabilidade (4.32), temos [35]:

$$P_I(t_1, t_2) = \frac{1}{4} \{ \langle \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_1 + \delta) \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_1 + \delta) \rangle \} \quad (4.34)$$

$$+ \langle \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_1) \rangle - \quad (4.35)$$

$$- \langle \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_1 + \delta) \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_1) \rangle - \quad (4.36)$$

$$- \langle \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_1 + \delta) \rangle + \quad (4.37)$$

$$+ \langle \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_1) \rangle + \quad (4.38)$$

$$+ \langle \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_1) \rangle \}. \quad (4.39)$$

No apêndice fizemos em detalhes o cálculo da contribuição de cada uma das equações acima para a taxa de coincidências do interferômetro HOM com casamento de fase tipo I, temos (A.20):

$$\begin{aligned}
N_c &= \frac{E_p^2}{2}(X - X(\delta)) \\
&+ \frac{E_p^4}{2}(3A - A(\delta)) \\
&+ \frac{E_p^4}{2}(3\varepsilon - \varepsilon(\delta) - \varepsilon'(\delta) - \varepsilon''(\delta)), \tag{4.40}
\end{aligned}$$

onde  $E_p$  é a amplitude do campo de bombeio,  $X = |\eta|^2$ , o termo  $X(\delta)$  é dado pela equação (A.13),  $A$ ,  $\varepsilon$  e  $\varepsilon(\delta)$  foram definidos no capítulo 3, pelas equações (3.14), (3.15) e (3.28), respectivamente. Os termos  $\varepsilon'(\delta)$  e  $\varepsilon''(\delta)$  são dados por (A.15) e (A.16), respectivamente, ou seja

$$\begin{aligned}
X &= |\eta|^2 \\
X(\delta) &= |\eta|^2 \iint d\omega_1 d\omega_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)\delta}, \\
A &= |\eta|^4 \\
A(\delta) &= |\eta|^4 \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 |\Phi(\omega'_1, \omega'_2)|^2 e^{i(\omega_1 - \omega_2)\delta}, \\
\varepsilon &= |\eta|^4 \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi^*(\omega_1, \omega'_2) \Phi^*(\omega'_1, \omega_2), \\
&\quad \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2), \\
\varepsilon(\delta) &= |\eta|^4 \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi^*(\omega_1, \omega'_2) \Phi^*(\omega'_1, \omega_2), \\
&\quad \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) e^{i(\omega_1 - \omega'_1)\delta}, \\
\varepsilon'(\delta) &= |\eta|^4 \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi^*(\omega_1, \omega'_1) \Phi^*(\omega'_2, \omega_2), \\
&\quad \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2)\delta}, \\
\varepsilon''(\delta) &= |\eta|^4 \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi^*(\omega_1, \omega'_1) \Phi^*(\omega'_2, \omega_2), \\
&\quad \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) e^{i(\omega_1 - \omega'_2)\delta}.
\end{aligned}$$

## 4.4 Interferômetro de Hong-Ou-Mandel usando CPD e com casamento de fase tipo II

O processo de conversão paramétrica descendente bombeada por um pulso coerente usando casamento de fase tipo II, pode ser descrito por uma variação da equação (2.36)

$$|\Psi\rangle = M|vac\rangle + \eta E_p |\Phi_1\rangle + \eta^2 E_p^2 |\Phi_2\rangle,$$

onde

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \left[ \hat{a}_H^\dagger(\omega_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \pm \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \right] |vac\rangle, \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} |\Phi_2\rangle &= \frac{1}{4} \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \\ &\times \{ \hat{a}_H^\dagger(\omega_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) \pm \\ &\pm \hat{a}_H^\dagger(\omega_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) \pm \\ &\pm \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) + \\ &+ \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) \}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Calcularemos aqui a probabilidade após o divisor de feixes de um interferômetro de Hong-Ou-Mandel, generalizando os operadores (4.26)-(4.39) para o caso em que se deve discriminar polarização. Temos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{ai}^{(+)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{a}_i(\omega) e^{-i\omega t}, \\ \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(+)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{b}_i(\omega) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

além disso,

$$N_{IIc}(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{II}(t_1, t_2), \quad (4.44)$$

com

$$P_{II}(t_1, t_2) = \frac{1}{4} \sum_{i=H,V} \sum_{j=H,V} \{ \langle \hat{\mathbf{F}}_{ai}^{(-)}(t_1 + \delta) \hat{\mathbf{F}}_{bj}^{(-)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_{bj}^{(+)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_{ai}^{(+)}(t_1 + \delta) \rangle + \quad (4.45)$$

$$+ \langle \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(-)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(+)}(t_1) \rangle + \quad (4.46)$$

$$+ \langle \hat{\mathbf{F}}_{ai}^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(-)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{ai}^{(+)}(t_1) \rangle + \quad (4.47)$$

$$+ \langle \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_{bj}^{(-)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_{bj}^{(+)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(+)}(t_1) \rangle - \quad (4.48)$$

$$- \langle \hat{\mathbf{F}}_{ai}^{(-)}(t_1 + \delta) \hat{\mathbf{F}}_{bj}^{(-)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(+)}(t_1) \rangle - \quad (4.49)$$

$$- \langle \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(-)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(+)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(+)}(t_1 + \delta) \rangle \}. \quad (4.50)$$

No Apêndice mostramos o cálculo da contribuição de cada operador acima para a taxa de coincidência para o interferômetro de HOM quando temos casamento de fase tipo II, resultando em (A.60):

$$\begin{aligned}
N_c &= \frac{E_p^2}{2} (X \mp X(\delta)) \\
&+ \frac{E_p^4}{2} (3A \mp A(\delta)) \\
&+ \frac{E_p^4}{4} (3\varepsilon \mp \varepsilon(\delta) \mp \varepsilon'(\delta) - \varepsilon''(\delta))
\end{aligned} \tag{4.51}$$

onde (+) indica o resultado para o estado singlete e (−) o estado tripleto com  $X = \eta^2$  e com  $X(\delta)$ ,  $A$ ,  $A(\delta)$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon(\delta)$ ,  $\varepsilon'(\delta)$  e  $\varepsilon''(\delta)$  definidos nas respectivas equações (A.13), (3.14), (A.14), (3.15), (3.28), (A.15) e (A.16), ou seja

$$\begin{aligned}
X &= |\eta|^2 \\
X(\delta) &= |\eta|^2 \iint d\omega_1 d\omega_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)\delta}, \\
A &= |\eta|^4 \\
A(\delta) &= |\eta|^4 \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 |\Phi(\omega'_1, \omega'_2)|^2 e^{i(\omega_1 - \omega_2)\delta}, \\
\varepsilon &= |\eta|^4 \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi^*(\omega_1, \omega'_2) \Phi^*(\omega'_1, \omega_2), \\
&\quad \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2), \\
\varepsilon(\delta) &= |\eta|^4 \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi^*(\omega_1, \omega'_2) \Phi^*(\omega'_1, \omega_2), \\
&\quad \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) e^{i(\omega_1 - \omega'_1)\delta}, \\
\varepsilon'(\delta) &= |\eta|^4 \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi^*(\omega_1, \omega'_1) \Phi^*(\omega'_2, \omega_2), \\
&\quad \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2)\delta}, \\
\varepsilon''(\delta) &= |\eta|^4 \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi^*(\omega_1, \omega'_1) \Phi^*(\omega'_2, \omega_2), \\
&\quad \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) e^{i(\omega_1 - \omega'_2)\delta}.
\end{aligned}$$

# Capítulo 5

## O experimento e estudo da visibilidade com a potência

### 5.1 Objetivo

Durante o período em que Pádua esteve na Itália, em um estágio de pós-doutorado ele e colaboradores recolheram medidas que propiciaram a investigação da relação entre a visibilidade do experimento de interferência de Hong-Ou-Mandel e a potência do laser. Um fenômeno interessante que ocorre no interferômetro de HOM é a redução da visibilidade do pico de coincidências com o aumento da potência do bombeamento. As medidas foram obtidas em 2001 no laboratório de Óptica Quântica do Departamento de Física da *Università de Roma "La Sapienza"*. Este trabalho foi feito por F. Bovino, A. Mossei, F. Schiarrino, S. Pádua e F. De Martini.

### 5.2 Análise teórica do experimento.

Pádua e colaboradores realizaram o experimento do interferômetro de Hong-Ou-Mandel, usando conversão paramétrica descendente espontânea gerando pares de fótons com casamento de fase tipo II. A taxa de coincidência na saída do interferômetro, para os estados de polarização singleto (+) e tripleto (−), é dada pela equação (A.60) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} N_c(\delta) &= \frac{E_p^2}{2} (X \mp X(\delta)) \\ &+ \frac{E_p^4}{2} (3A \mp A(\delta)) \end{aligned}$$



$$+ \frac{E_p^4}{4} (3\varepsilon \mp \varepsilon(\delta) \mp \varepsilon'(\delta) - \varepsilon''(\delta)), \quad (5.1)$$

onde  $E_p^2$  é a taxa na qual os fótons do feixe de bombeamento atingem o cristal,  $X = \eta^2$  e  $X(\delta)$  está mostrado na equação (A.13),  $A$  está mostrado na equação (3.14),  $A(\delta)$  está mostrado na equação (A.14),  $\varepsilon$  está mostrado na equação (3.15),  $\varepsilon(\delta)$  está mostrado na equação (3.28),  $\varepsilon'(\delta)$  está mostrado na equação (A.15) e  $\varepsilon''(\delta)$  está mostrado na equação (A.16).

O experimento realizado usou casamento de fase tipo II e o estado usado foi o estado singleto ou seja a taxa de coincidências é dado pelo seguinte

$$\begin{aligned} N_c(\delta) &= \frac{E_p^2}{2} (X + X(\delta)) \\ &+ \frac{E_p^4}{2} (3A + A(\delta)) \\ &+ \frac{E_p^4}{4} (3\varepsilon + \varepsilon(\delta) + \varepsilon'(\delta) - \varepsilon''(\delta)). \end{aligned} \quad (5.2)$$

A visibilidade do pico de coincidência, para estado singleto de polarização é obtida de

$$v = \frac{N_c(0) - N_c(\infty)}{N_c(\infty)}. \quad (5.3)$$

Da taxa de coincidência(5.1) e da visibilidade (5.3), obtivemos a seguinte visibilidade dependente do campo de bombeio:

$$v(E_p) = \frac{\frac{|E_p \eta|^2}{2} + \frac{1}{4} E_p^4 (2A + \varepsilon)}{\frac{|E_p \eta|^2}{2} + \frac{3}{4} E_p^4 (2A + \varepsilon)}, \quad (5.4)$$

onde usamos

$$X(0) = X = |\eta|^2, \quad (5.5)$$

$$A(0) = A, \quad (5.6)$$

$$\varepsilon(0) = \varepsilon'(0) = \varepsilon''(0) = \varepsilon, \quad (5.7)$$

$$X(\infty) = A(\infty) = \varepsilon(\infty) = \varepsilon'(\infty) = \varepsilon''(\infty) = 0. \quad (5.8)$$

A visibilidade dada pela equação (5.4) pode ser escrita de outra forma:

$$v(E_p) = 1 - \frac{E_p^4 (2A + \varepsilon)}{|\eta E_p|^2 + \frac{3}{2} E_p^4 (2A + \varepsilon)}. \quad (5.9)$$

Aqui a potência média do campo de bombeamento é igual  $E_p^2 h\nu$ . Como  $E_p^2$  é a taxa com que os fótons caem no meio não linear e sabendo que a potência média do laser é  $P$  (Energia por segundo), temos então que  $\frac{P}{h\nu} = E_p^2$ . Substituindo a potência na visibilidade, temos,

$$v(P) = 1 - \frac{\left(\frac{P}{h\nu}\right)^2(2A + \varepsilon)}{\left(\frac{P}{h\nu}\right)|\eta|^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{P}{h\nu}\right)^2(2A + \varepsilon)} = 1 - \frac{\frac{(2A+\varepsilon)}{(h\nu)^2}P}{\frac{|\eta|^2}{h\nu} + \frac{3}{2}\frac{(2A+\varepsilon)}{(h\nu)^2}P}. \quad (5.10)$$

Devemos, então, determinar os valores de  $\frac{|\eta|^2}{h\nu}$  e  $\frac{(2A+\varepsilon)}{(h\nu)^2}$ .

A grandeza  $|\eta|^2$  foi interpretada como a probabilidade de conversão de um fóton no bombeio em um par de fótons para um único pulso incidente no cristal.

Para as deduções a seguir usaremos os seguintes símbolos:

- $|\eta|^2$  = probabilidade de conversão por pulso =  $P_{1s}$
- $N_p$  = número médio de fótons por pulso do feixe de bombeamento incidente
- $N_s^p$  = número médio de fótons individuais gerados (sinal ou complementar) por pulso do feixe incidente
- $N_s^1$  = número de fótons individuais (sinal ou complementar) gerados em 1 segundo
- $N_{ds}^1$  = número de fótons individuais detectados por segundo
- $R$  = Taxa de repetição do laser
- $P$  = Potência média do laser
- $\alpha_i$  = eficiência de um detector
- $h$  = constante de Planck
- $\nu$  = frequência do laser

### **Determinando a dependência do número de fótons individuais detectados por segundo ( $N_{ds}^1$ ) com a potência**

Da probabilidade de conversão, temos:

$$|\eta|^2 = \frac{N_s^p}{N_p}. \quad (5.11)$$

Da taxa de repetição do laser sabemos quantos pulsos ocorrem por segundo no feixe de bombeamento. Assim, utilizando (5.11), obtemos:

$$N_s^1 = N_s^p R = |\eta|^2 N_p R. \quad (5.12)$$

O número de fótons individuais detectados está limitado pela eficiência do detector, ou seja,

$$N_{ds}^1 = \alpha_i N_s^1, \quad (5.13)$$

e além disso, conhecendo a potência média do laser sabemos o número de fótons por pulso existente no feixe de bombeamento

$$N_p = \frac{P/R}{h\nu}, \quad (5.14)$$

onde  $P/R$  é a energia existente em cada pulso e  $h\nu$  é a energia de cada fóton individual do feixe de bombeamento. Assim, das grandezas acima relacionadas (5.12), (5.13) e (5.14),

$$N_{ds}^1 = \frac{|\eta|^2 \alpha_i}{h\nu} P. \quad (5.15)$$

### 5.3 Medidas e interpretações

A Figura 5.3 mostra um esquema do aparato experimental realizado por Pádua e colaboradores. O laser Mira [21] é bombeado e produz um feixe pulsado no infravermelho com taxa de repetição de 76 MHz e a largura temporal do pulso de 200 fs, tal feixe bombeia o laser RegA [22]. O laser RegA amplifica a energia de cada pulso do laser Mira e reduz a taxa de repetição dos pulsos para 250 kHz e mesma largura 200 fs.

Com energias maiores por pulso, aumentamos as chances de produção de dois pares de fótons em uma conversão paramétrica descendente, pois aumentamos a população de fótons em cada pulso no feixe de bombeamento.

Medimos o perfil de coincidência versus o deslocamento do prisma de um dos braços do interferômetro de Hong-Ou-Mandel (Vide Figura 3.2) para diferentes potências. Com o uso de filtros podemos substituir as funções  $\Phi(\omega, \omega')$  por  $\Phi(\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2})f(\omega')f(\omega'')$  onde

$$f(\omega) = \frac{\exp\left[\frac{-(\omega - \frac{\omega_0}{2})^2}{(\Delta\omega)^2}\right]}{\sqrt{\Delta\omega}\sqrt{\pi}}. \quad (5.16)$$

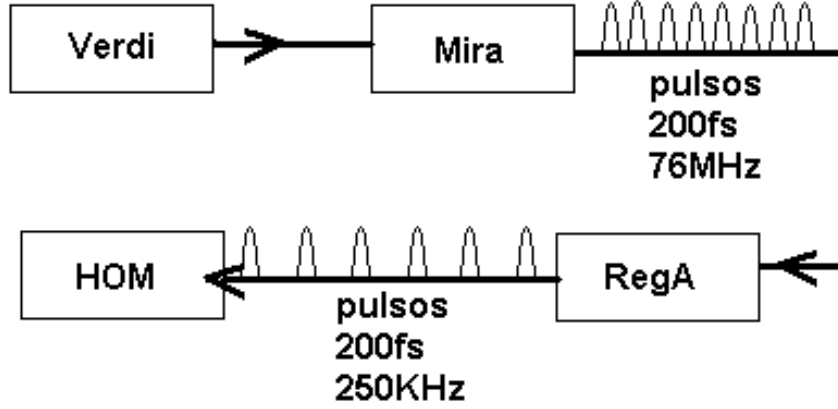


Figura 5.1: Esquema da montagem experimental, mostrando o ordenamento de cada laser. A caixa HOM representa o interferômetro de Hong-Ou-Mandel. O laser RegA amplifica a energia e deixa inalterada a largura de cada pulso, quando comparado com o laser Mira.

Assim a taxa de coincidências pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 N_{cf}(\delta) &= \frac{E_p^2}{2} X_0 \left\{ 1 + e^{-(\Delta\omega)^2 \delta^2} \right\} \\
 &+ \frac{E_p^4}{2} A_0 \left\{ 3 + e^{-(\Delta\omega)^2 \delta^2} \right\} \\
 &+ \frac{E_p^4}{4} \varepsilon_0 \left\{ 3 + e^{-(\Delta\omega)^2 \delta^2} \right\}, \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

onde  $X_0$ ,  $A_0$  e  $\varepsilon_0$  são as funções filtradas.

Medimos a dependência da contagem simples por segundo com a potência do feixe de bombeamento, resultando no gráfico da Figura 5.2.

Modelamos uma reta para a dependência da contagem simples por segundo com a potência e o coeficiente obtido foi  $(63,6 \pm 0,8) \times 10^3$  fótons individuais por segundo por Watt.

Bloqueando um dos braços do interferômetro antes do divisor de feixes e medindo o número de coincidências por segundo. Temos a taxa de coincidência dada pela contribuição dos operadores (A.24) ou (A.25) para  $N_{IIc}(\delta)$ ,

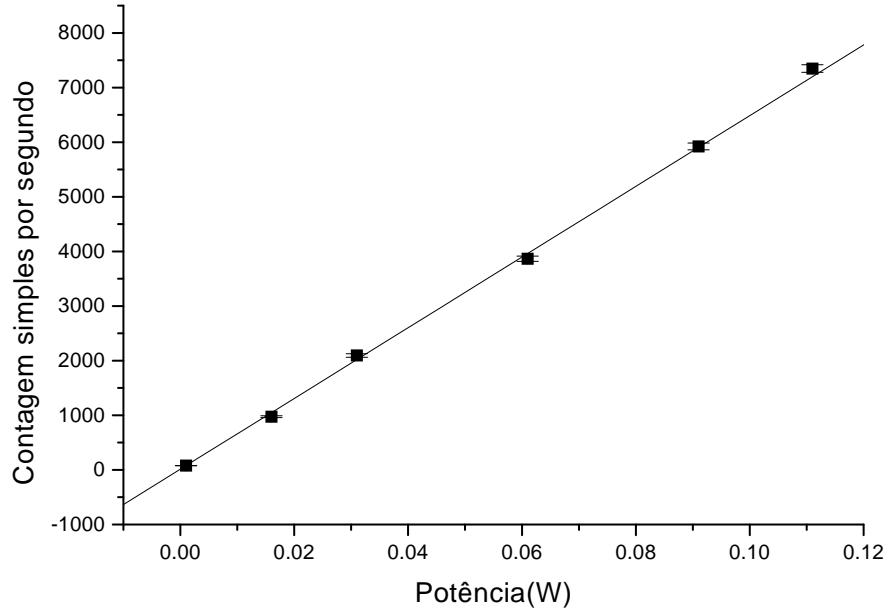


Figura 5.2: Contagem Simples versus Potência

ou seja:

$$N_{Bc} = \alpha_i \alpha_j \frac{(2A_0 + \varepsilon_0)}{2(h\nu)^2} P^2, \quad (5.18)$$

onde  $N_{Bc}$  é a taxa de coincidência quando um braço do interferômetro é bloqueado,  $A_0$  e  $\varepsilon_0$  são dados pela aplicação de filtros nas equações (3.14) e (3.15) respectivamente e  $\alpha_i$  e  $\alpha_j$  as eficiências dos detectores. Medimos tal taxa de coincidências  $N_{Bc}$  para diversas potências, como mostrado na Figura 5.3.

Modelamos a seguinte função para dependência da taxa de coincidências  $N_{Bc}$  com a potência:

$$N_{Bc} = aP^b, \quad (5.19)$$

e obtivemos os seguintes resultados após os ajustes aos dados experimentais:  $a = (4,9 \pm 0,2) \times 10^3$  coincidências por segundo por Watt<sup>2</sup> e  $b = 2,00 \pm 0,02$ .

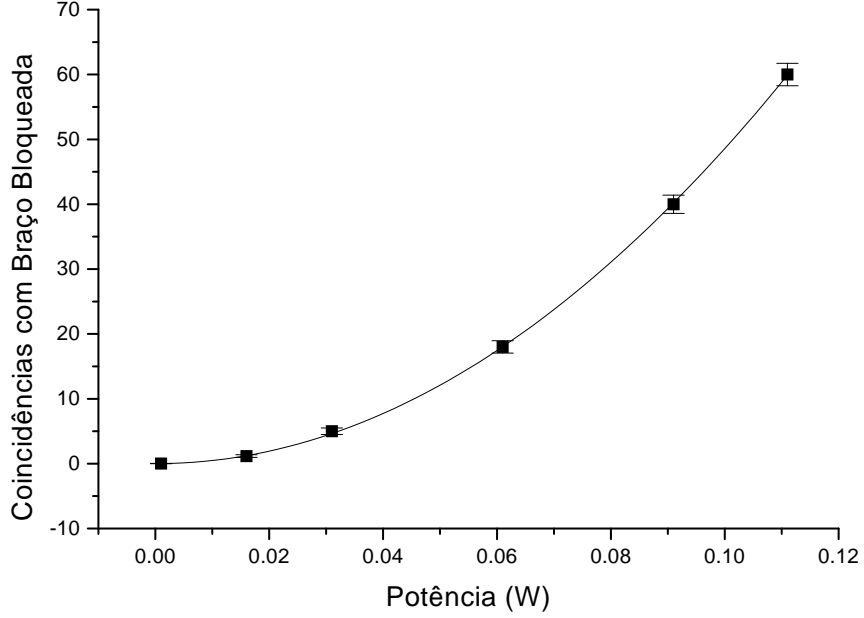


Figura 5.3: Contagem Dupla versus Potência

Dos valores obtidos anteriormente, temos, da contagem simples,

$$\alpha_i \frac{|\eta|^2}{h\nu} = (65,2 \pm 0,9) \times 10^3, \quad (5.20)$$

e, da taxa de coincidência com um braço do interferômetro bloqueado, dado pela equação (5.18) temos

$$\alpha_i \alpha_j \frac{(2A_0 + \varepsilon_0)}{(h\nu)^2} = (5,6 \pm 0,2) \times 10^3. \quad (5.21)$$

Para se determinar o valor da eficiência dos detectores podemos usar a detecção de fótons em coincidência quando se tem potência baixa e a contagem de fótons individuais. A potência baixa é para garantir a presença de somente fótons individuais em cada braço do interferômetro. Sabemos que a taxa média na qual o detector registra fótons (sinal ou complementar) é dado pela equação (2.46) no capítulo 2, subseção 2.4.3

$$Tr_i = \alpha_i |\eta E_p|^2. \quad (5.22)$$

Sabendo, também, que a taxa de coincidências para baixa potência do feixe de bombeamento é dada pelo primeiro termo da equação (A.60), temos

$$Nc = \alpha_i \alpha_j \frac{|\eta E_p|^2}{2}, \quad (5.23)$$

termos com  $|\eta|^4$  foram desprezados e escolhemos aqui  $\delta = \infty$ .

Assim, fazemos a razão entre as grandezas dadas pelas equações (5.22) e (5.23), para se medir a eficiência dos detectores incluindo outras perdas. A menor potência avaliada foi de 1 mW. Com tal potência obtivemos uma eficiência de  $\alpha_i = (9,0 \pm 0,6) \times 10^{-3}$ . Considerando os dois detectores com a mesma eficiência e mesma perda para os braços.

Podemos obter uma expressão teórica para visibilidade, dada por

$$v(P) = 1 - \frac{(91 \pm 4) \times 10^6 P}{(72 \pm 1) \times 10^5 + \frac{3}{2}(91 \pm 4) \times 10^6 P} \quad (5.24)$$

e finalmente,

$$v(P) = 1 - \frac{(91 \pm 4) \times 10P}{(72 \pm 1) + (137 \pm 6) \times 10P} \quad (5.25)$$

Na Figura 5.3 temos o valor teórico e o experimental medido para a visibilidade do padrão de interferência do interferômetro de Hong-Ou-Mandel em termos da potência óptica do feixe de bombeamento. Note que a concordância entre a visibilidade experimental e a prevista teoricamente é bastante satisfatória. Discrepâncias se devem à instabilidade da potência do laser durante medida.

Uma observação importante é que a visibilidade tende para  $\frac{1}{3}$  quando a potência tende para infinito, na verdade:

$$v(P)_{P \rightarrow \infty} = 0,3 \pm 0,1. \quad (5.26)$$

Como já foi discutido na secção 3.3 a interferência entre fontes independentes tende  $\frac{1}{3}$ .

Agora podemos obter as taxas de coincidências teóricas, pois conhecendo o valor de  $2A_0 + \varepsilon_0$  e de  $X_0$  temos os resultados mostrados na Figura 5.5, onde temos a curva teórica e o medido.

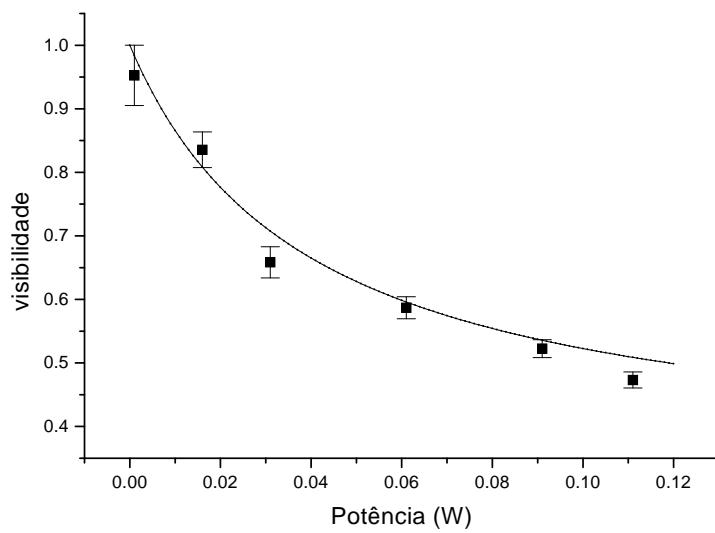


Figura 5.4: Visibilidade em função da potência. Dados experimentais e esperado teoricamente.



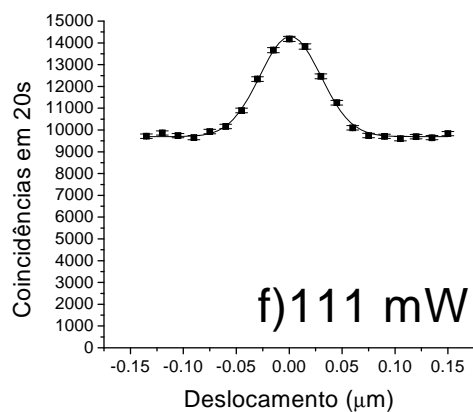
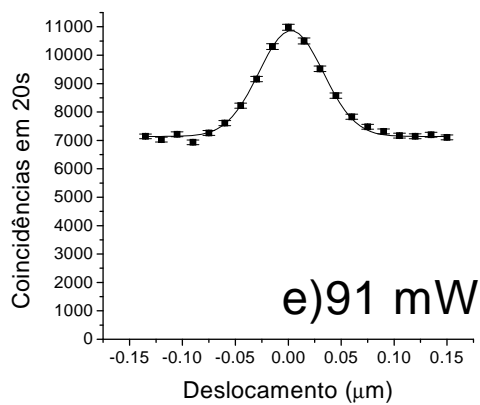
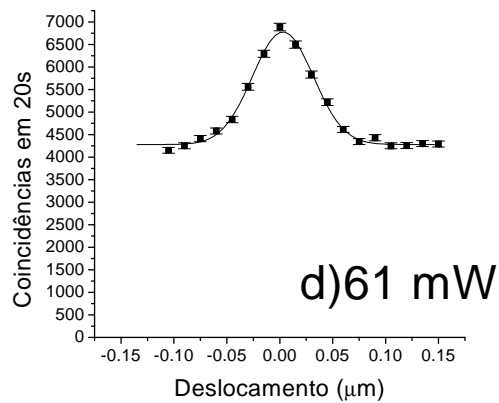
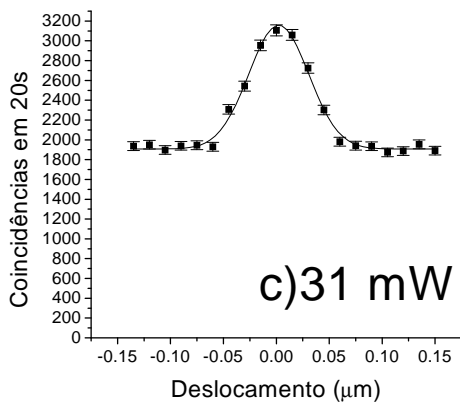
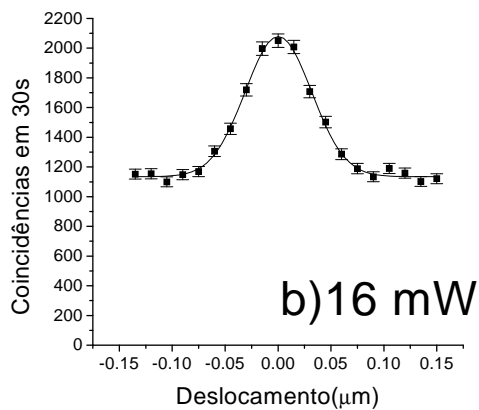
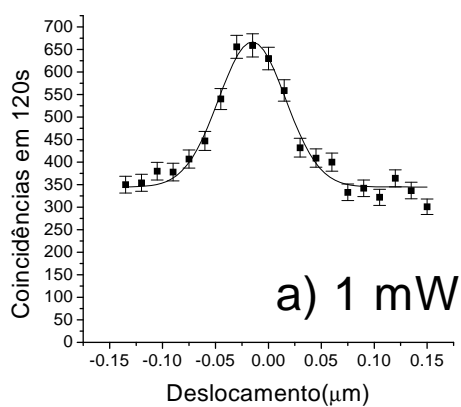


Figura 5.5: Perfis de coincidências versus deslocamento do prisma para diferentes Potências: (a) 1 mW, (b) 16 mW, (c) 31 mW, (d) 61mW, (e) 91 mW e (f) 111 mW.

# Capítulo 6

## Conclusões

Na introdução desta dissertação apresentamos a motivação deste trabalho. Vimos o grande interesse na produção de um número cada vez maior de partículas emaranhadas, para violar mais fortemente a hipótese do realismo local. Usamos tais partículas também em sistemas de informação e em testes da Física Quântica. Um fenômeno estudado usando o interferômetro de Hong-Ou-Mandel foi a diminuição da visibilidade do pico de interferência com o aumento da potência média do laser incidente no cristal gerador de pares de fótons.

Na primeira parte desta dissertação apresentamos o processo de conversão paramétrica descendente. Vimos a dedução do estado no processo de conversão paramétrica descendente e a dependência do estado com a taxa ( $E_p^2$ ) com que os fótons caem no meio não linear, posteriormente associado com a potência média do laser. Apresentamos também o casamento de fase dos feixes convertidos.

O experimento feito por Hong-Ou-Mandel em 1987 usa estados simétricos de forma que quando a diferença de caminho óptico entre os braços do interferômetro for nula os fótons tendem a seguir para o mesmo lado no interferômetro, provocando uma queda na taxa de coincidência. Tal fenômeno de agrupamento é justificado com o fato dos fótons serem bósons e terem maior probabilidade de serem encontrados no mesmo estado. Vimos também que interferência entre dois pares de fótons independentes de conversão paramétrica descendente em um divisor de feixes, sem o uso de filtros, tem uma visibilidade máxima de  $1/3$ .

Apresentamos o cálculo da taxa de coincidência do interferômetro de Hong-Ou-Mandel quando o estado é singlete, quando o estado é tripleto e quando temos um e dois pares de fótons presentes nos braços do interferômetro. Lançamos mão das funções de correlação juntamente com o ordenamento normal e temporal. Tais estudos foram retirados da referência

[13]. Usamos o propagador de estados para se deduzir o estado singlete e tripleto com um e dois pares de fótons e posteriormente calculamos a taxa de coincidência para o caso de casamento de fase tipo I e tipo II.

Finalmente, uma comparação com os resultados experimentais foi feita. O padrão de interferência medido versus a diferença de caminho óptico para diversas potências foi mostrado. Além disso, bloqueamos um dos braços do interferômetro antes do divisor de feixes e medimos a dependência da taxa de coincidência com o quadrado da potência média do laser. Da curva de taxa de coincidências com um braço versus potência obtivemos informação sobre  $(2A_0 + \varepsilon_0)/(h\nu)^2$  e da reta contagem simples versus potência obtivemos informação sobre  $|\eta|^2/(h\nu)$ . Tais grandezas são necessárias para a determinação da visibilidade da interferência do interferômetro de Hong-Ou-Mandel. A eficiência dos detectores foi deduzida da contagem simples e da taxa de coincidências quando se tem potência óptica baixa, encontrando  $(9,0 \pm 0,6) \times 10^{-3}$ . A curva teórica e o resultado experimental para visibilidade estão presentes no Figura 5.3. Notamos grande proximidade entre os pontos teóricos e os experimentais, medidos diretamente. Observando as curvas dos picos de coincidências para diversas potências Figura 5.5, notamos que as contagens em coincidências do pico de interferência aumenta de forma diferente comparada com o aumento da taxa de coincidência do patamar. Isso altera fortemente a visibilidade 5.3. Quando temos quatro fótons o número de combinações no divisor de feixes que geram coincidências é maior que no caso em que se tem apenas dois fótons. Uma constatação importante é o fato de a visibilidade teórica e experimental tenderem a  $1/3$  quando a potência tende a infinito. Neste caso os pares de fótons tendem a serem independentes, como já foi discutido na seção 3.3 e na referência [19]

# Apêndice A

## Cálculos referentes ao capítulo 4

### A.1 Taxa de coincidências no interferômetro de HOM onde estado tem casamento de fase tipo I

Calcularemos a contribuição dada para a taxa de coincidência (4.33),

$$N_{Ic}(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_I(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (\text{A.1})$$

dada pelo seguinte grupo de operadores presente no Capítulo 4:

$$P_I(t_1, t_2) = \frac{1}{4} \{ \langle \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_1 + \delta) \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_1 + \delta) \rangle + (\text{A.2})$$

$$+ \langle \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_1) \rangle - \quad (\text{A.3})$$

$$- \langle \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_1 + \delta) \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_1) \rangle - \quad (\text{A.4})$$

$$- \langle \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_1 + \delta) \rangle + \quad (\text{A.5})$$

$$+ \langle \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_1) \rangle + \quad (\text{A.6})$$

$$+ \langle \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_1) \rangle \} \quad (\text{A.7})$$

No conjunto das equações acima, (A.2)-(A.7) os termos do tipo  $\langle \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)} \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)} \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)} \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)} \rangle$ ,  $\langle \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)} \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)} \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)} \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)} \rangle$ ,  $\langle \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)} \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)} \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)} \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)} \rangle$  e os hermiteanos conjugados, respectivos, não aparecem por serem todos nulos, uma vez que o estado contém, no máximo, dois fótons sinal e dois fótons complementares.

Para simplificação de alguns cálculos, observaremos algumas simetrias. O operador (A.2) dá a mesma contribuição que a dada pelo operador (A.3) quando fazemos a troca  $t_1 + \delta$  por  $t_2$  e  $t_2 - \delta$  por  $t_1$ . O operador (A.4) é o hermiteano conjugado do operador (A.5). Os operadores (A.6) e (A.7) são iguais quando trocamos  $a$  por  $b$  e  $t_2 - \delta$  por  $t_2$ . Outro fato a ser usado é que  $\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = 0$ , assim, podemos calcular separadamente as contribuições de  $|\Phi_1\rangle$  e  $|\Phi_2\rangle$ .

### Calculando a contribuição de (A.2) à $N_{Ic}(\delta)$ .

Basta calcular  $\hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_2 - \delta)\hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_1 + \delta)|\psi\rangle$  e em seguida o hermiteano conjugado de tal termo.

Assim,

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_2 - \delta)\hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_1 + \delta)|\psi\rangle = \\ & \frac{\eta E_p}{2\pi} \iiint \int d\omega d\omega' d\omega_1 d\omega_2 e^{-i\omega(t_2 - \delta)} e^{-i\omega'(t_1 + \delta)} \times \\ & \quad \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \hat{b}(\omega) \hat{a}(\omega') \hat{a}^\dagger(\omega_1) \hat{b}^\dagger(\omega_2) |vac\rangle + \\ & + \frac{\eta^2 E_p^2}{4\pi} \iiint \int \int d\omega d\omega' d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 e^{-i\omega(t_2 - \delta)} e^{-i\omega'(t_1 + \delta)} \times \\ & \quad \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \hat{b}(\omega) \hat{a}(\omega') \hat{a}^\dagger(\omega'_1) \hat{b}^\dagger(\omega'_2) \hat{a}^\dagger(\omega_1) \hat{b}^\dagger(\omega_2) |vac\rangle. \end{aligned}$$

Fazendo uso das seguintes relações de comutação  $[\hat{a}(\omega), \hat{a}^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega')$  a dada pela equação (3.9) e

$$[\hat{a}(\omega), \hat{a}^\dagger(\omega') \hat{a}^\dagger(\omega'')] = \delta(\omega - \omega') \hat{a}^\dagger(\omega'') + \delta(\omega - \omega'') \hat{a}^\dagger(\omega'), \quad (\text{A.8})$$

podemos substituir o produto de operadores aniquilação e criação pela soma de um delta de Dirac com um produto de operadores criação e aniquilação ; este último termo é nulo quando aplicado no vácuo, resultando a seguinte expressão

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_2 - \delta)\hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_1 + \delta)|\psi\rangle = \\ & = \frac{\eta E_p}{2\pi} \iint d\omega_1 d\omega_2 e^{-i\omega_2(t_2 - \delta)} e^{-i\omega_1(t_1 + \delta)} \Phi(\omega_1, \omega_2) |vac\rangle + \\ & + \frac{\eta^2 E_p^2}{4\pi} \iiint \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \{ & \hat{a}^\dagger(\omega_1)\hat{b}^\dagger(\omega_2)e^{-i\omega_2(t_2-\delta)}e^{-i\omega_1(t_1+\delta)} + \\ & + \hat{a}^\dagger(\omega_1)\hat{b}^\dagger(\omega'_2)e^{-i\omega_2(t_2-\delta)}e^{-i\omega'_1(t_1+\delta)} + \\ & + \hat{a}^\dagger(\omega'_1)\hat{b}^\dagger(\omega_2)e^{-i\omega_2(t_2-\delta)}e^{-i\omega_1(t_1+\delta)} + \\ & + \hat{a}^\dagger(\omega'_1)\hat{b}^\dagger(\omega'_2)e^{-i\omega_2(t_2-\delta)}e^{-i\omega_1(t_1+\delta)} \} |vac\rangle. \end{aligned}$$

Assim o m3dulo quadrado fica:

$$\begin{aligned} & |\hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_2 - \delta)\hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_1 + \delta)|\psi\rangle|^2 = \\ & = \frac{\eta^2 E_p^2}{4\pi^2} \iiint d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_2 d\omega_1 d\omega_2 \Phi^*(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) \Phi(\omega_1, \omega_2) \times \\ & \quad \times e^{-i(\omega_2 - \bar{\omega}_2)(t_2 - \delta)} e^{-i(\omega_1 - \bar{\omega}_1)(t_1 + \delta)} + \\ & + \frac{\eta^4 E_p^4}{16\pi^2} \iiint \iiint d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}'_1 d\bar{\omega}'_2 d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \times \\ & \quad \times \Phi^*(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) \Phi^*(\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2) \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\ & \{ \hat{a}(\bar{\omega}_1)\hat{b}(\bar{\omega}_2)\hat{a}^\dagger(\omega_1)\hat{b}^\dagger(\omega_2)e^{-i(\omega_2 - \bar{\omega}'_2)(t_2 - \delta)}e^{-i(\omega'_1 - \bar{\omega}'_1)(t_1 + \delta)} + \\ & + \hat{a}(\bar{\omega}_1)\hat{b}(\bar{\omega}_2)\hat{a}^\dagger(\omega'_1)\hat{b}^\dagger(\omega_2)e^{-i(\omega'_2 - \bar{\omega}'_2)(t_2 - \delta)}e^{-i(\omega_1 - \bar{\omega}'_1)(t_1 + \delta)} + \\ & + \hat{a}(\bar{\omega}_1)\hat{b}(\bar{\omega}_2)\hat{a}^\dagger(\omega_1)\hat{b}^\dagger(\omega'_2)e^{-i(\omega_2 - \bar{\omega}'_2)(t_2 - \delta)}e^{-i(\omega'_1 - \bar{\omega}'_1)(t_1 + \delta)} + \\ & + \hat{a}(\bar{\omega}_1)\hat{b}(\bar{\omega}_2)\hat{a}^\dagger(\omega'_1)\hat{b}^\dagger(\omega'_2)e^{-i(\omega_2 - \bar{\omega}'_2)(t_2 - \delta)}e^{-i(\omega_1 - \bar{\omega}'_1)(t_1 + \delta)} + \\ & + \hat{a}(\bar{\omega}'_1)\hat{b}(\bar{\omega}_2)\hat{a}^\dagger(\omega_1)\hat{b}^\dagger(\omega_2)e^{-i(\omega'_2 - \bar{\omega}_2)(t_2 - \delta)}e^{-i(\omega'_1 - \bar{\omega}_1)(t_1 + \delta)} + \\ & + \hat{a}(\bar{\omega}'_1)\hat{b}(\bar{\omega}_2)\hat{a}^\dagger(\omega'_1)\hat{b}^\dagger(\omega_2)e^{-i(\omega'_2 - \bar{\omega}_2)(t_2 - \delta)}e^{-i(\omega_1 - \bar{\omega}_1)(t_1 + \delta)} + \\ & + \hat{a}(\bar{\omega}'_1)\hat{b}(\bar{\omega}_2)\hat{a}^\dagger(\omega_1)\hat{b}^\dagger(\omega'_2)e^{-i(\omega_2 - \bar{\omega}_2)(t_2 - \delta)}e^{-i(\omega'_1 - \bar{\omega}_1)(t_1 + \delta)} + \\ & + \hat{a}(\bar{\omega}'_1)\hat{b}(\bar{\omega}_2)\hat{a}^\dagger(\omega'_1)\hat{b}^\dagger(\omega'_2)e^{-i(\omega_2 - \bar{\omega}_2)(t_2 - \delta)}e^{-i(\omega_1 - \bar{\omega}_1)(t_1 + \delta)} + \\ & + \hat{a}(\bar{\omega}'_1)\hat{b}(\bar{\omega}_2)\hat{a}^\dagger(\omega_1)\hat{b}^\dagger(\omega_2)e^{-i(\omega'_2 - \bar{\omega}'_2)(t_2 - \delta)}e^{-i(\omega'_1 - \bar{\omega}'_1)(t_1 + \delta)} + \\ & + \hat{a}(\bar{\omega}'_1)\hat{b}(\bar{\omega}_2)\hat{a}^\dagger(\omega'_1)\hat{b}^\dagger(\omega_2)e^{-i(\omega'_2 - \bar{\omega}'_2)(t_2 - \delta)}e^{-i(\omega_1 - \bar{\omega}'_1)(t_1 + \delta)} + \\ & + \hat{a}(\bar{\omega}'_1)\hat{b}(\bar{\omega}_2)\hat{a}^\dagger(\omega_1)\hat{b}^\dagger(\omega'_2)e^{-i(\omega_2 - \bar{\omega}'_2)(t_2 - \delta)}e^{-i(\omega'_1 - \bar{\omega}'_1)(t_1 + \delta)} + \\ & + \hat{a}(\bar{\omega}'_1)\hat{b}(\bar{\omega}_2)\hat{a}^\dagger(\omega'_1)\hat{b}^\dagger(\omega'_2)e^{-i(\omega_2 - \bar{\omega}'_2)(t_2 - \delta)}e^{-i(\omega_1 - \bar{\omega}'_1)(t_1 + \delta)} \}. \end{aligned}$$

Na sequência, usamos novamente propriedades de comutação e uma integração sobre todos os tempos de  $t_1$  e  $t_2$ , uma vez que o tempo de coerência é muito menor que o tempo de detecção. Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega' - \bar{\omega}')t} = 2\pi\delta(\omega' - \bar{\omega}'), \quad (\text{A.9})$$

temos

$$\begin{aligned} &= \eta^2 E_p^2 \int \int \int \int d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_2 d\omega_1 d\omega_2 \delta(\omega_2 - \bar{\omega}_2) \delta(\omega_1 - \bar{\omega}_1) \Phi^*(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) \Phi(\omega_1, \omega_2) + \\ &+ \frac{\eta^4 E_p^4}{4} \int \int \int \int \int \int \int \int d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}'_1 d\bar{\omega}'_2 d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \times \\ &\times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \Phi^*(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) \Phi^*(\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2) \times \\ &\times 4\{\delta(\bar{\omega}_1 - \omega_1) \delta(\bar{\omega}_2 - \omega_2) \delta(\omega'_2 - \bar{\omega}'_2) \delta(\omega'_1 - \bar{\omega}'_1) + \\ &+ \delta(\bar{\omega}_1 - \omega'_1) \delta(\bar{\omega}_2 - \omega_2) \delta(\omega'_2 - \bar{\omega}'_2) \delta(\omega_1 - \bar{\omega}'_1) + \\ &+ \delta(\bar{\omega}_1 - \omega_1) \delta(\bar{\omega}_2 - \omega'_2) \delta(\omega_2 - \bar{\omega}'_2) \delta(\omega'_1 - \bar{\omega}'_1) + \\ &+ \delta(\bar{\omega}_1 - \omega'_1) \delta(\bar{\omega}_2 - \omega'_2) \delta(\omega_2 - \bar{\omega}'_2) \delta(\omega_1 - \bar{\omega}'_1)\}. \end{aligned}$$

Assim a contribuição da equação (A.2) à  $N_{Ic}(\delta)$  é

$$\begin{aligned} &\eta^2 E_p^2 \int \int d\omega_1 d\omega_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 + \\ &+ 2\eta^4 E_p^4 \int \int \int \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \{|\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 |\Phi(\omega'_1, \omega'_2)|^2 + \\ &\Phi(\omega'_1, \omega_2) \Phi(\omega_1, \omega'_2) \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2)\}, \end{aligned}$$

ou

$$\eta^2 E_p^2 + 2E_p^4(A + \varepsilon). \quad (\text{A.10})$$

onde  $A$  e  $\varepsilon$  foram definidos no capítulo 3, em (3.14) e (3.15).

**Calculando a contribuição de (A.3) à  $N_{Ic}(\delta)$ .**

Usando de simetria notamos mesma contribuição para (A.2) e (A.3), ou seja, (A.10).

$$= \eta^2 E_p^2 + 2E_p^4(A + \varepsilon). \quad (\text{A.11})$$

**Calculando a contribuição de (A.4).**

Devemos calcular  $\langle \hat{\mathbf{F}}_a^{(-)}(t_1 + \delta) \hat{\mathbf{F}}_b^{(-)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_a^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_b^{(+)}(t_1) \rangle$ , isto é,

$$\begin{aligned} & \langle vac | \frac{\eta^2 E_p^2}{4\pi^2} \iiint d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_2 d\omega_1 d\omega_2 \Phi^*(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) \Phi(\omega_1, \omega_2) \times \\ & \quad \times e^{i\bar{\omega}_2(t_2 - \delta)} e^{i\bar{\omega}_1(t_1 + \delta)} e^{-i(\omega_1)t_2} e^{-i(\omega_2)t_1} |vac\rangle + \\ & + \langle vac | \frac{\eta^4 E_p^4}{16\pi^2} \iiint \iiint d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}'_1 d\bar{\omega}'_2 d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \times \\ & \quad \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \Phi^*(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) \Phi^*(\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2) \times \\ & \quad \times [\hat{a}(\bar{\omega}_1) \hat{b}(\bar{\omega}_2) e^{i\bar{\omega}'_1(t_1 + \delta)} e^{i\bar{\omega}'_2(t_2 - \delta)} + \hat{a}(\bar{\omega}'_1) \hat{b}(\bar{\omega}_2) e^{i\bar{\omega}_1(t_1 + \delta)} e^{i\bar{\omega}_2(t_2 - \delta)} + \\ & \quad \hat{a}(\bar{\omega}_1) \hat{b}(\bar{\omega}'_2) e^{i\bar{\omega}'_1(t_1 + \delta)} e^{i\bar{\omega}_2(t_2 - \delta)} + \hat{a}(\bar{\omega}'_1) \hat{b}(\bar{\omega}_2) e^{i\bar{\omega}_1(t_1 + \delta)} e^{i\bar{\omega}'_2(t_2 - \delta)}] \times \\ & \quad \times [\hat{a}^\dagger(\omega_1) \hat{b}^\dagger(\omega_2) e^{-i\omega'_1(t_2)} e^{-i\omega'_2(t_1)} + \hat{a}^\dagger(\omega_1) \hat{b}^\dagger(\omega'_2) e^{-i\omega'_1(t_2)} e^{-i\omega_2(t_1)} + \\ & \quad \hat{a}^\dagger(\omega'_1) \hat{b}^\dagger(\omega_2) e^{-i\omega_1(t_2)} e^{-i\omega'_2(t_1)} + \hat{a}^\dagger(\omega'_1) \hat{b}^\dagger(\omega'_2) e^{-i\omega_1(t_2)} e^{-i\omega_2(t_1)}] |vac\rangle. \end{aligned}$$

Usando (A.9) e a relação de comutação dada por (3.9), temos

$$\begin{aligned} & \eta^2 E_p^2 \iiint \iiint d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_2 d\omega_1 d\omega_2 \Phi^*(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) \Phi(\omega_1, \omega_2) \times \\ & \quad \times \delta(\bar{\omega}_2 - \omega_1) \delta(\bar{\omega}_1 - \omega_2) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)\delta} + \\ & + \frac{\eta^4 E_p^4}{4} \iiint \iiint \iiint d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}'_1 d\bar{\omega}'_2 d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \times \\ & \quad \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \Phi^*(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) \Phi^*(\bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2) \times \\ & \quad \times 2\{ \delta(\bar{\omega}_1 - \omega_1) \delta(\bar{\omega}_2 - \omega_2) \delta(\omega'_2 - \bar{\omega}'_1) \delta(\omega'_1 - \bar{\omega}'_2) e^{-i(\omega'_1 - \omega'_2)\delta} + \\ & + \delta(\bar{\omega}'_1 - \omega_1) \delta(\bar{\omega}_2 - \omega_2) \delta(\omega'_2 - \bar{\omega}_1) \delta(\omega'_1 - \bar{\omega}'_2) e^{-i(\omega'_1 - \omega'_2)\delta} + \\ & + \delta(\bar{\omega}_1 - \omega_1) \delta(\bar{\omega}'_2 - \omega_2) \delta(\omega'_2 - \bar{\omega}'_1) \delta(\omega'_1 - \bar{\omega}_2) e^{-i(\omega'_1 - \omega'_2)\delta} + \\ & + \delta(\bar{\omega}'_1 - \omega_1) \delta(\bar{\omega}_2 - \omega_2) \delta(\omega'_2 - \bar{\omega}_1) \delta(\omega'_1 - \bar{\omega}'_2) e^{-i(\omega'_1 - \omega'_2)\delta} + \\ & + \delta(\bar{\omega}_1 - \omega'_1) \delta(\bar{\omega}_2 - \omega_2) \delta(\omega'_2 - \bar{\omega}'_1) \delta(\omega_1 - \bar{\omega}'_2) e^{-i(\omega_1 - \omega'_2)\delta} + \\ & + \delta(\bar{\omega}'_1 - \omega'_1) \delta(\bar{\omega}_2 - \omega_2) \delta(\omega'_2 - \bar{\omega}_1) \delta(\omega_1 - \bar{\omega}'_2) e^{-i(\omega_1 - \omega'_2)\delta} + \\ & + \delta(\bar{\omega}_1 - \omega'_1) \delta(\bar{\omega}'_2 - \omega_2) \delta(\omega'_2 - \bar{\omega}'_1) \delta(\omega_1 - \bar{\omega}_2) e^{-i(\omega_1 - \omega'_2)\delta} + \\ & + \delta(\bar{\omega}'_1 - \omega'_1) \delta(\bar{\omega}_2 - \omega_2) \delta(\omega'_2 - \bar{\omega}_1) \delta(\omega_1 - \bar{\omega}'_2) e^{-i(\omega_1 - \omega'_2)\delta} \}. \end{aligned}$$

Assim, a contribuição de (A.4) à  $N_{Ic}(\delta)$  é

$$\eta^2 E_p^2 \iint d\omega_1 d\omega_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)\delta} +$$



$$\begin{aligned}
& +\eta^4 E_p^4 \int \int \int \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2)|^2 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)} + \\
& +\eta^4 E_p^4 \int \int \int \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \Phi(\omega_1, \omega'_2) \Phi(\omega'_1, \omega_2) e^{-i(\omega_1 - \omega'_2)} + \\
& +\eta^4 E_p^4 \int \int \int \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \Phi(\omega_2, \omega'_2) \Phi(\omega'_1, \omega_1) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)} + \\
& +\eta^4 E_p^4 \int \int \int \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \Phi(\omega_2, \omega'_2) \Phi(\omega'_1, \omega_1) e^{-i(\omega_1 - \omega'_2)} \},
\end{aligned}$$

ou de outra forma,

$$E_p^2 X(\delta) + E_p^2 (A(\delta) + \varepsilon(\delta) + \varepsilon'(\delta)\varepsilon''(\delta)), \quad (\text{A.12})$$

onde

$$X(\delta) = |\eta|^2 \iint d\omega_1 d\omega_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)\delta}, \quad (\text{A.13})$$

$$A(\delta) = |\eta|^4 \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 |\Phi(\omega'_1, \omega'_2)|^2 e^{i(\omega_1 - \omega_2)\delta}, \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\delta) = |\eta|^4 \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 & \Phi^*(\omega_1, \omega'_1) \Phi^*(\omega'_2, \omega_2), \\ & \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2)\delta}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon''(\delta) = |\eta|^4 \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 & \Phi^*(\omega_1, \omega'_1) \Phi^*(\omega'_2, \omega_2), \\ & \times \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) e^{i(\omega_1 - \omega'_2)\delta}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

### Calculando a contribuição de (A.5).

A contribuição de (A.5) à  $N_{Ic}(\delta)$  é a mesma da equação (A.4), ou seja, (A.12).

$$E_p^2 X(\delta) + E_p^2 [A(\delta) + \varepsilon(\delta) + \varepsilon'(\delta)\varepsilon''(\delta)] \quad (\text{A.17})$$

### Calculando a contribuição de (A.6) à $N_{Ic}(\delta)$ .

O cálculo da contribuição de (A.6) à  $N_{Ic}(\delta)$  já foi feito no capítulo 3 e é dado por (3.13),

$$E_p^4 (A + \varepsilon). \quad (\text{A.18})$$

Calculando a contribuição de (A.7) à  $N_{Ic}(\delta)$ .

A contribuição de (A.7) à  $N_{Ic}(\delta)$  é a mesma da equação (A.6), ou seja, (3.13).

$$E_p^4(A + \varepsilon). \quad (\text{A.19})$$

Finalmente, a taxa de coincidência é dada por

$$\begin{aligned} N_c &= \frac{E_p^2}{2}(X - X(\delta)) \\ &+ \frac{E_p^4}{2}(3A - A(\delta)) \\ &+ \frac{E_p^4}{2}(3\varepsilon - \varepsilon(\delta) - \varepsilon'(\delta) - \varepsilon''(\delta)), \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

onde  $E_p$  é a amplitude do campo de bombeio,  $X = |\eta|^2$ , o termo  $X(\delta)$  é dado por (A.13),  $A$ ,  $\varepsilon$  e  $\varepsilon(\delta)$  foram definidos no capítulo 3 por (3.14), (3.15) e (3.28), respectivamente. Os termos  $\varepsilon'(\delta)$  e  $\varepsilon''(\delta)$  são dados por (A.15) e (A.16), respectivamente.

## A.2 Taxa de coincidências no interferômetro de HOM onde estado tem casamento de fase tipo II

No caso de casamento de fase tipo II temos

$$N_{IIc}(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{II}(t_1, t_2), \quad (\text{A.21})$$

com

$$P_{II}(t_1, t_2) = \frac{1}{4} \sum_{i=H,V} \sum_{j=H,V} \{ \langle \hat{\mathbf{F}}_{ai}^{(-)}(t_1 + \delta) \hat{\mathbf{F}}_{bj}^{(-)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_{bj}^{(+)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_{ai}^{(+)}(t_1 + \delta) \rangle + \quad (\text{A.22})$$

$$+ \langle \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(-)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(+)}(t_1) \rangle + \quad (\text{A.23})$$

$$+ \langle \hat{\mathbf{F}}_{ai}^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(-)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{ai}^{(+)}(t_1) \rangle + \quad (\text{A.24})$$

$$+ \langle \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_{bj}^{(-)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_{bj}^{(+)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(+)}(t_1) \rangle - \quad (\text{A.25})$$

$$- \langle \hat{\mathbf{F}}_{ai}^{(-)}(t_1 + \delta) \hat{\mathbf{F}}_{bj}^{(-)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(+)}(t_1) \rangle - \quad (\text{A.26})$$

$$- \langle \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(-)}(t_1) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(-)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(+)}(t_2 - \delta) \hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(+)}(t_1 + \delta) \rangle \}. \quad (\text{A.27})$$

Aqui ocorrem as mesmas simetrias do grupo de operadores (A.2)-(A.7).

### Calculando a contribuição de (A.22) à $N_{IIc}(\delta)$ .

Todos os cálculos feitos aqui, consideram as técnicas utilizadas na seção 4.3. Quando  $i = j = H$ , a contribuição de  $|\Phi_1\rangle$  é nula. Assim,

$$\hat{\mathbf{F}}_{bH}^{(+)}(t_2 - \delta)\hat{\mathbf{F}}_{aH}^{(+)}(t_1 + \delta)|\Psi\rangle = \hat{\mathbf{F}}_{bH}^{(+)}(t_2 - \delta)\hat{\mathbf{F}}_{aH}^{(+)}(t_1 + \delta)|\Phi_2\rangle, \quad (\text{A.28})$$

tem contribuição não nula no segundo e no terceiro termo da equação (4.42), ou seja,

$$\begin{aligned} & \pm \frac{\eta^2 E_p^2}{4(2\pi)} \iiint\!\!\!\int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \\ & \times \{ \hat{a}_V^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) e^{-i\omega'_2(t_2-\delta)} e^{-i\omega_1(t_1+\delta)} + \\ & \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) e^{-i\omega_2(t_2-\delta)} e^{-i\omega'_1(t_1+\delta)} \} |vac\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

A função de correlação (A.22) para  $i = j = H$  é igual ao módulo quadrado da equação (A.29) e a integração sobre todos os tempos  $t_1$  e  $t_2$  produz

$$\frac{\eta^4 E_p^4}{4} \iiint\!\!\!\int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 |\Phi(\omega'_1, \omega'_2)|^2 = \frac{E_p^4}{4} A, \quad (\text{A.30})$$

onde o termo  $A$  foi definido em (3.14).

Quando  $i = j = V$  temos

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{F}}_{bV}^{(+)}(t_2 - \delta)\hat{\mathbf{F}}_{aV}^{(+)}(t_1 + \delta)|\Psi\rangle = \\ & = \pm \frac{\eta^2 E_p^2}{4(2\pi)} \iiint\!\!\!\int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \\ & \times \{ \hat{a}_H^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega_2) e^{-i\omega'_2(t_2-\delta)} e^{-i\omega_1(t_1+\delta)} + \\ & \hat{a}_H^\dagger(\omega_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) e^{-i\omega_2(t_2-\delta)} e^{-i\omega'_1(t_1+\delta)} \} |vac\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

que dá, por simetria, a mesma contribuição dada por (A.30) à (A.22).

$$\frac{\eta^4 E_p^4}{4} \iiint\!\!\!\int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 |\Phi(\omega'_1, \omega'_2)|^2 = \frac{E_p^4}{4} A. \quad (\text{A.32})$$

Quando  $i = H$  e  $j = V$  temos

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{F}}_{bV}^{(+)}(t_2 - \delta)\hat{\mathbf{F}}_{aH}^{(+)}(t_1 + \delta)|\Psi\rangle &= \\
&= \frac{\eta E_p}{\sqrt{2}(2\pi)} \iint d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_2(t_2 - \delta)} e^{-i\omega_1(t_1 + \delta)} + \\
&\quad \frac{\eta^2 E_p^2}{4(2\pi)} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\
&\quad \times \{ e^{-i\omega_2(t_2 - \delta)} e^{-i\omega_1(t_1 + \delta)} [\hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega'_1) \pm \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega'_1)] + \\
&\quad + e^{-i\omega'_2(t_2 - \delta)} e^{-i\omega'_1(t_1 + \delta)} [\hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega_1) \pm \hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega_1)] + \\
&\quad + e^{-i\omega_2(t_2 - \delta)} e^{-i\omega'_1(t_1 + \delta)} \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega_1) + \\
&\quad + e^{-i\omega'_2(t_2 - \delta)} e^{-i\omega_1(t_1 + \delta)} \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega'_1) \}. \tag{A.33}
\end{aligned}$$

Após calcular o módulo quadrado de (A.33) e realizar integração sobre todos os tempos  $t_1$  e  $t_2$  obtivemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\eta^2 E_p^2}{2} \iint d\omega_1 d\omega_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 + \\
&\quad + \frac{\eta^4 E_p^4}{2} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \Phi(\omega_1, \omega'_2) \Phi(\omega'_1, \omega_2) + \\
&\quad + \frac{3\eta^4 E_p^4}{4} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 |\Phi(\omega'_1, \omega'_2)|^2.
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{E_p^2}{2} X + \frac{3E_p^4}{4} A + \frac{E_p^4}{2} \varepsilon \tag{A.34}$$

onde  $X = \eta^2$ ,  $A$  e  $\varepsilon$  foram definidos nas equações (3.14) e (3.15) respectivamente.

Quando  $i = V$  e  $j = H$ , temos

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{F}}_{bH}^{(+)}(t_2 - \delta)\hat{\mathbf{F}}_{aV}^{(+)}(t_1 + \delta)|\Psi\rangle &= \\
&= \pm \frac{\eta E_p}{\sqrt{2}(2\pi)} \iint d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_2(t_2 - \delta)} e^{-i\omega_1(t_1 + \delta)} + \\
&\quad \frac{\eta^2 E_p^2}{4(2\pi)} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\
&\quad \times \{ e^{-i\omega_2(t_2 - \delta)} e^{-i\omega_1(t_1 + \delta)} [\hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega'_1) \pm \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega'_1)] + \\
&\quad + e^{-i\omega'_2(t_2 - \delta)} e^{-i\omega'_1(t_1 + \delta)} [\hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \pm \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega_1)] + \\
&\quad + e^{-i\omega_2(t_2 - \delta)} e^{-i\omega'_1(t_1 + \delta)} \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) + \\
&\quad + e^{-i\omega'_2(t_2 - \delta)} e^{-i\omega_1(t_1 + \delta)} \hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega'_1) \}. \tag{A.35}
\end{aligned}$$

Após calcular o módulo quadrado de (A.35) e realizar a integração sobre todos os tempos  $t_1$  e  $t_2$  temos a mesma contribuição dada por (A.34) à  $N_{IIc}(\delta)$ :

$$\frac{E_p^2}{2}X + \frac{3E_p^4}{4}A + \frac{E_p^4}{2}\varepsilon, \quad (\text{A.36})$$

onde  $X = \eta^2$ ,  $A$  e  $\varepsilon$  foram definidos em (3.14) e (3.15) respectivamente.

Assim a contribuição total de (A.22) à  $N_{IIc}(\delta)$  será:

$$E_p^2X + 2E_p^4A + E_p^4\varepsilon \quad (\text{A.37})$$

**Calculando a contribuição de (A.23) à  $N_{IIc}(\delta)$ .**

A contribuição dada por (A.23) é a mesma contribuição dada por (A.22) à  $N_{IIc}(\delta)$ , ou seja,

$$E_p^2X + 2E_p^4A + E_p^4\varepsilon \quad (\text{A.38})$$

**Calculando a contribuição de (A.24) à  $N_{IIc}(\delta)$ .**

Todos os termos  $|\Phi_1\rangle$  tem contribuição nula. Quando  $i = j = H$ , temos

$$\hat{\mathbf{F}}_{aH}^{(+)}(t_2)\hat{\mathbf{F}}_{aH}^{(+)}(t_1)|\Psi\rangle = \hat{\mathbf{F}}_{aH}^{(+)}(t_2)\hat{\mathbf{F}}_{aH}^{(+)}(t_1)|\Phi_2\rangle, \quad (\text{A.39})$$

tem contribuição não nula somente no primeiro termo de (4.42). Usando a propriedade de comutação dada na equação (3.9) do capítulo 3, temos

$$\begin{aligned} & \frac{\eta^2 E_p^2}{4(2\pi)} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\ & \times \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) \{e^{-i\omega_2(t_2)} e^{-i\omega_1(t_1)} + e^{-i\omega'_2(t_2-\delta)} e^{-i\omega'_1(t_1+\delta)}\}. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Assim, após calcular o módulo quadrado e realizar a integração sobre todos os tempos  $t_1$  e  $t_2$  temos

$$\begin{aligned} & \frac{\eta^4 E_p^4}{4} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \Phi(\omega_1, \omega'_2) \Phi(\omega'_1, \omega_2) + \\ & + \frac{\eta^4 E_p^4}{4} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 |\Phi(\omega'_1, \omega'_2)|^2. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{E_p^4}{4}(A + \varepsilon). \quad (\text{A.41})$$

Quando  $i = j = V$ , apenas o último termo de (4.42) dá contribuição não nula com o seguinte termo

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{aV}^{(+)}(t_2)\hat{\mathbf{F}}_{aV}^{(+)}(t_1)|\Psi\rangle &= \\ &= \frac{\eta^2 E_p^2}{4(2\pi)} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\ &\quad \times \hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) \{e^{-i\omega'_1(t_2)} e^{-i\omega_1(t_1)} + e^{-i\omega_1(t_2)} e^{-i\omega'_2(t_1)}\}, \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

onde após o módulo quadrado e integração sobre todos os tempos  $t_1$  e  $t_2$  temos a mesma contribuição dada por (A.41), ou seja:

$$\frac{E_p^4}{4}(A + \varepsilon). \quad (\text{A.43})$$

Quando  $i = H$  e  $j = V$ , temos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{aV}^{(+)}(t_2)\hat{\mathbf{F}}_{aH}^{(+)}(t_1)|\Psi\rangle &= \\ &= \pm \frac{\eta^2 E_p^2}{4(2\pi)} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\ &\quad \times \{\hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) e^{-i\omega_1(t_2)} e^{-i\omega'_1(t_1)} + \\ &\quad \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) e^{-i\omega'_1(t_2)} e^{-i\omega_1(t_1)}\}, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

o qual após calcular o módulo quadrado e realizar a integração sobre todos os tempos  $t_1$  e  $t_2$  obtivemos

$$\frac{\eta^4 E_p^4}{4} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 |\Phi(\omega'_1, \omega'_2)|^2 = \frac{E_p^4}{4} A. \quad (\text{A.45})$$

Quando  $i = V$  e  $j = H$ , temos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{aH}^{(+)}(t_2)\hat{\mathbf{F}}_{aV}^{(+)}(t_1)|\Psi\rangle &= \\ &= \pm \frac{\eta^2 E_p^2}{4(2\pi)} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\ &\quad \times \{\hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) e^{-i\omega_1(t_2)} e^{-i\omega'_1(t_1)} + \\ &\quad \hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) e^{-i\omega'_1(t_2)} e^{-i\omega_1(t_1)}\}, \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

o qual após calcular o módulo quadrado e realizar a integração sobre todos os tempos  $t_1$  e  $t_2$  temos a mesma contribuição da equação (A.45), ou seja,

$$\frac{E_p^4}{4}A. \quad (\text{A.47})$$

Assim, a contribuição total de (A.24) à  $N_{IIc}(\delta)$  será:

$$\frac{E_p^4}{2}(2A + \varepsilon). \quad (\text{A.48})$$

**Calculando a contribuição de (A.25) à  $N_{IIc}(\delta)$ .**

Por simetria a contribuição de (A.25) é a mesma contribuição dada por (A.24), ou seja,

$$\frac{E_p^4}{2}(2A + \varepsilon). \quad (\text{A.49})$$

**Calculando a contribuição de (A.26) à  $N_{IIc}(\delta)$ .**

Devemos calcular as contribuições de  $\hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(+)}(t_2)\hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(+)}(t_1)|\Psi\rangle$  e  $\hat{\mathbf{F}}_{bj}^{(+)}(t_2-\delta)\hat{\mathbf{F}}_{ai}^{(+)}(t_1+\delta)|\Psi\rangle$  e em seguida fazer o hermiteano conjugado de  $\hat{\mathbf{F}}_{bj}^{(+)}(t_2-\delta)\hat{\mathbf{F}}_{ai}^{(+)}(t_1+\delta)|\Psi\rangle$  aplicado em  $\hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(+)}(t_2)\hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(+)}(t_1)|\Psi\rangle$ . Observe que o segundo termo é dado por (A.22) antes do módulo quadrado. Assim, quando  $i = j = H$ ,  $\hat{\mathbf{F}}_{aj}^{(+)}(t_2)\hat{\mathbf{F}}_{bi}^{(+)}(t_1)|\Psi\rangle$  fica:

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{F}}_{aH}^{(+)}(t_2)\hat{\mathbf{F}}_{bH}^{(+)}(t_1)|\Psi\rangle = \\ & = \pm \frac{\eta^2 E_p^2}{4(2\pi)} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \\ & \quad \times \{ \hat{a}_V^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) e^{-i\omega'_2 t_1} e^{-i\omega_1 t_2} + \\ & \quad \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) e^{-i\omega_2 t_1} e^{-i\omega'_1 t_2} \}. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Fazendo o hermiteano conjugado de (A.29), aplicando em (A.50) e realizar integração sobre todos os tempos  $t_1$  e  $t_2$ , temos a contribuição de (A.26) quando  $i = j = H$

$$\begin{aligned} & \frac{\eta^4 E_p^4}{4} \iiint\!\!\!\int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\ & \quad \times \Phi(\omega'_1, \omega_1) \Phi(\omega'_2, \omega_2) e^{-i\delta(\omega_1 - \omega'_2)} = \frac{E_p^4}{4} \varepsilon''(\delta), \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

onde  $\varepsilon''(\delta)$  foi definido em (A.16).

Quando  $i = j = V$ , temos

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{F}}_{aV}^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{bV}^{(+)}(t_1) |\Psi\rangle = \\ & = \pm \frac{\eta^2 E_p^2}{4(2\pi)} \iiint\!\!\!\int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \\ & \quad \times \{ \hat{a}_H^\dagger(\omega'_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega_2) e^{-i\omega'_2 t_1} e^{-i\omega_1 t_2} + \\ & \quad \hat{a}_H^\dagger(\omega_1) \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) e^{-i\omega_2 t_1} e^{-i\omega'_1 t_2} \}. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Fazendo o hermiteano conjugado de (A.31) e aplicando no resultado de (A.52), temos o mesmo resultado obtido em (A.51), ou seja,

$$\frac{E_p^4}{4} \varepsilon''(\delta), \quad (\text{A.53})$$

onde  $\varepsilon''(\delta)$  foi definido em (A.16).

Quando  $i = H$  e  $j = V$  temos

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{F}}_{aV}^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{bH}^{(+)}(t_1) |\Psi\rangle = \\ & = \frac{\eta E_p}{\sqrt{2}(2\pi)} \iint d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_2 t_1} e^{-i\omega_1 t_2} + \\ & \quad + \frac{\eta^2 E_p^2}{4(2\pi)} \iiint\!\!\!\int d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\ & \quad \times \{ e^{-i\omega_2 t_1} e^{-i\omega_1 t_2} [\hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \pm \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega_1)] + \\ & \quad + e^{-i\omega'_2 t_1} e^{-i\omega_1 t_2} [\hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) \pm \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega_1)] + \\ & \quad + e^{-i\omega_2 t_1} e^{-i\omega'_1 t_2} \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega_1) + \\ & \quad + e^{-i\omega'_2 t_1} e^{-i\omega_1 t_2} \hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega'_1) \}. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Basta fazer o complexo conjugado de (A.33), aplicar em (A.54) e realizando integração sobre todos os tempos  $t_1$  e  $t_2$ , obtivemos a contribuição de (A.26) à  $N_{IIc}(\delta)$  quando  $i = H$  e  $j = V$ :



$$\begin{aligned}
& \pm \frac{\eta^2 E_p^2}{2} \iint d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_2, \omega_1) \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-i\delta(\omega_1 - \omega_2)} \\
& \pm \frac{3\eta^4 E_p^4}{8} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 |\Phi(\omega_1, \omega_2)|^2 |\Phi(\omega'_1, \omega'_2)|^2 e^{-i\delta(\omega_1 - \omega_2)} \\
& \pm \frac{3\eta^4 E_p^4}{16} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\
& \quad \times \Phi(\omega'_1, \omega_1) \Phi(\omega'_2, \omega_2) e^{-i\delta(\omega_1 - \omega_2)} \\
& \pm \frac{3\eta^4 E_p^4}{16} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\
& \quad \times \Phi(\omega'_1, \omega_1) \Phi(\omega'_2, \omega_2) e^{-i\delta(\omega_1 - \omega'_2)},
\end{aligned}$$

de outra forma:

$$\pm \left( \frac{E_p^2}{2} X(\delta) + \frac{E_p^4}{2} A(\delta) + \frac{E_p^4}{4} \varepsilon'(\delta) + \frac{E_p^4}{4} \varepsilon''(\delta) \right), \quad (\text{A.55})$$

onde  $X(\delta)$ ,  $A(\delta)$ ,  $\varepsilon'(\delta)$  e  $\varepsilon''(\delta)$  estão definidos em (A.13), (A.14), (A.15) e (A.16), respectivamente.

Quando  $i = V$  e  $j = H$  temos

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbf{F}}_{aH}^{(+)}(t_2) \hat{\mathbf{F}}_{bV}^{(+)}(t_1) |\Psi\rangle = \\
& = \frac{\eta E_p}{\sqrt{2}(2\pi)} \iint d\omega_1 d\omega_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_2 t_1} e^{-i\omega_1 t_2} + \\
& + \frac{\eta^2 E_p^2}{4(2\pi)} \iiint d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2 \Phi(\omega_1, \omega_2) \Phi(\omega'_1, \omega'_2) \times \\
& \quad \times \{ e^{-i\omega_2 t_1} e^{-i\omega_1 t_2} [\hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega'_1) \pm \hat{b}_H^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega'_1)] + \\
& \quad + e^{-i\omega'_2 t_1} e^{-i\omega'_1 t_2} [\hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega_1) \pm \hat{b}_H^\dagger(\omega_2) \hat{a}_V^\dagger(\omega_1)] + \\
& \quad + e^{-i\omega_2 t_1} e^{-i\omega'_1 t_2} \hat{b}_V^\dagger(\omega'_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega_1) + \\
& \quad + e^{-i\omega'_2 t_1} e^{-i\omega_1 t_2} \hat{b}_V^\dagger(\omega_2) \hat{a}_H^\dagger(\omega'_1) \}. \quad (\text{A.56})
\end{aligned}$$

Basta fazer o hermiteano conjugado de (A.35), aplicar no resultado de (A.56) e integrando sobre todos os tempos  $t_1$  e  $t_2$ , temos a mesma contribuição dada por (A.55), ou seja,

$$\pm \left( \frac{E_p^2}{2} X(\delta) + \frac{E_p^4}{2} A(\delta) + \frac{E_p^4}{4} \varepsilon'(\delta) + \frac{E_p^4}{4} \varepsilon''(\delta) \right), \quad (\text{A.57})$$

onde  $X(\delta)$ ,  $A(\delta)$ ,  $\varepsilon'(\delta)$  e  $\varepsilon''(\delta)$  estão definidos em (A.13), (A.14), (A.15) e (A.16), respectivamente.

Assim a contribuição total de (A.26) à  $N_{IIc}(\delta)$  é:

$$\pm \left( E_p^2 X(\delta) + \frac{E_p^4}{2} A(\delta) + \frac{E_p^4}{2} \varepsilon(\delta) + \frac{E_p^4}{2} \varepsilon'(\delta) \right) + \frac{E_p^4}{2} \varepsilon''(\delta), \quad (\text{A.58})$$

onde  $X(\delta)$ ,  $A(\delta)$ ,  $\varepsilon'(\delta)$  e  $\varepsilon''(\delta)$  estão definidos nas respectivas equações (A.13), (A.14), (A.15) e (A.16).

### Calculando a contribuição de (A.27) à $N_{IIc}(\delta)$ .

Por simetria a contribuição de (A.27) é a mesma contribuição dada por (A.26) à  $N_{IIc}(\delta)$ , ou seja:

$$\pm \left( E_p^2 X(\delta) + \frac{E_p^4}{2} A(\delta) + \frac{E_p^4}{2} \varepsilon(\delta) + \frac{E_p^4}{2} \varepsilon'(\delta) \right) + \frac{E_p^4}{2} \varepsilon''(\delta), \quad (\text{A.59})$$

onde  $X(\delta)$ ,  $A(\delta)$ ,  $\varepsilon'(\delta)$  e  $\varepsilon''(\delta)$  estão definidos em (A.13), (A.14), (A.15) e (A.16), respectivamente.

Finalmente o valor esperado para a coincidência é dado pelas contribuições de (A.37), (A.38), (A.48), (A.49), (A.58) e (A.59); resultando em:

$$\begin{aligned} N_c &= \frac{E_p^2}{2} (X \mp X(\delta)) \\ &+ \frac{2E_p^4}{3} (3A \mp A(\delta)) \\ &+ \frac{E_p^4}{3} (3\varepsilon \mp \varepsilon(\delta) \mp \varepsilon'(\delta) - \varepsilon''(\delta)), \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

onde (+) indica o estado singlete e (-) o estado tripleto com  $X = \eta^2$  e com  $X(\delta)$ ,  $A$ ,  $A(\delta)$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon(\delta)$ ,  $\varepsilon'(\delta)$  e  $\varepsilon''(\delta)$  definidos em (A.13), (3.14), (A.14), (3.15), (3.28), (A.15) e (A.16), respectivamente.

# Bibliografia

- [1] M. Bourennane, M. Eibl, S. Gaertner, C. Kurtsiefer, A. Cabello e H. Weinfurter, “Decoherence-Free Quantum Information Processing with Four-Photon Entangled States” *Phys. Rev. Lett.* **92**, 107901-1 (2004).
- [2] S. P. Walborn, A. N. de Oliveira, S. Pádua e C. H. Monken, “Multimode Hong-Ou-Mandel Interference”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 143601 (2003).
- [3] Y. H. Kim, “Quantum interference with beamlike type-II spontaneous parametric down-conversion”, *Phys. Rev. A* **68**, 013804 (2003).
- [4] M. Zukowski, A. Zeilinger e H. Weinfurter, “Entangling Photons Radiated by Independent Pulse Sources”, *ANNALS NEW YORK ACADEMY OF SCIENCE* 91–102 (1995).
- [5] H. Weinfurter e M. Zukowski, “Four-photon entanglement from down-conversion”, *Phys. Rev. A* **64**, 010102(R) (2001).
- [6] C. Kurtsiefer, M. Oberparlieter e H. Weinfurter, “High-efficiency entangled photon pair collection in type-II parametric fluorescence”, **64** 023802 (2001).
- [7] M. Barbieri, F. De Martini, G. Di Nepi e P. Mataloni, “Generation and Characterization of Werner States and Maximally Entangled Mixed States by a Universal Source of Entanglement”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 177901 (2004).
- [8] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge, 2000).
- [9] A. Miranowicz, H. Matsueda, J. Bajaj, M. R. B. Wahiddin e R. Tanas, “Comparative Study of Photon Bunching of Classical Fields” *J. Opt. B: Quantum Semiclass Opt.* **I**,603–609 (1999).

- [10] A. Zeilinger, M. A. Horne, H. Weinfurter e M. Zukowski, “Three-Particle Entanglement from Two Entangled Pairs”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3031–3034 (1997).
- [11] M. Zukowski e D. Kaslikowski, “Critical visibility for N-particle Greenberger-Horne-Zeilinger correlation to violate local realism”, *Phys. Rev. A* **56**, R1682–R1685 (1997).
- [12] A. L. Linares, C. Simon, J. C. Howell e D. Bouwmeester, “Experimental Quantum Cloning of Single Photons”, *Scienceexpress* 28 Março 2002.
- [13] C. K. Hong, Z. Y. Ou e L. Mandel, “Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference” *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044–2046 (1987)
- [14] Z. Y. Ou and L. Mandel, “Violation of Bell’s Inequality and Classical Probability in a Two-Photon Correlation Experiment” *Phys. Rev. Lett.* **61**, 50–53 (1991); Y. Shih and C. Alley, “New Type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Experiment Using Pairs of Light Quanta Produced by Optical Parametric Down Conversion” *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 2921–2924 (1988).
- [15] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, “Measurement of the single-photon tunneling time” *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 708–711 (1993).
- [16] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, “Dispersion cancellation in a measurement of the single-photon propagation velocity in glass” *Phys. Rev. Lett.*, **68** 2421–2424 (1992).
- [17] P. G. Kwiat, A. M. Steinberg, and R. Y. Chiao, “Observation of a “quantum eraser”: A revival of coherence in a two-photon interference experiment” *Phys. Rev. A*, **45**, 7729–7739 (1992).
- [18] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “Experimental Entanglement Swapping: Entangling Photons That Never Interacted” *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 3891–3894 (1998).
- [19] Z. Y. Ou, J. -K. Rhee e L. J. Wang, “Photon bunching and multiphoton interference in parametric down-conversion”, *Phys. Rev. A* **60**, 593–604 (1999).
- [20] Operator’s Manual - The Coherent - Verdi<sup>TM</sup> - Diode-Pumped Lasers.
- [21] Operator’s Manual - The Coherent - Mira Model 900-F Laser.

- [22] Operator's Manual - The Coherent - RegA model 9000.
- [23] L. Mandel, E. Wolf *Optical coherence and quantum optics*, (Cambridge University Press, 1995).
- [24] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Edition (Prentice Hall, 1999).
- [25] D. N. Klyshko, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **55**, 1006 (1968) [Tradução para o inglês em *Sov. Phys. JETP* **28**, 522 (1969)].
- [26] D. C. Burnham e D. L. Weinberg, "Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs" *Phys. Rev. Lett.* **25**, 84 (1970).
- [27] N. Boeuf, D. Branning, I. Chaperot, E. Dauler, S. Guérin, G. Jaeger, A. Muller, A. Migdall *Calculating Characteristics of Non-collinear Phase-matching in Uniaxial and Biaxial Crystals* - Web page: <http://physics.nist.gov/Divisions/Div844/facilities/cprad/cprad.html>
- [28] Z. Y. Ou, L. J. Wang e L. Mandel, "Vacuum effects on interference in two-photon down conversion", *Phys. Rev. A* **40**, 1428–1435 (1989).
- [29] L. J. Wang Master thesis
- [30] Z. Y. Ou, J. -K. Rhee e L. J. Wang, "Observation of four-photon interference with a beam splitter by pulsed parametric down-conversion", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 959–962 (1999)
- [31] X. T. Zou e L. Mandel, "Photon-antibunching and sub-Poissonian photon statistics", *Phys. Rev. A* **41**, 475–476 (1989).
- [32] L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics: a Modern Development*, (World Scientific, New Jersey, 1998).
- [33] Z. Y. Ou, "Parametric down-conversion with coherent pulse pumping and quantum interference between independent fields", *Quantum Semi-class. Opt.* **9**, 599–614 (1997).
- [34] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, *Quantum Mechanics*, (Hermann, Paris, 1977).
- [35] Aldo Delgado, "Entangled state in linear polarization considering dispersive in frequency" visita ao Brasil, Agosto e Setembro de 2003