

Dois modos de campo eletromagnético em cavidades dissipativas: coeficientes de dissipação cruzada e estados resistentes

Romeu Rossi Junior

Orientadora: Maria Carolina Nemes

Coorientador: Arthur Rodrigo Bosco de Magalhães

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer à Carolina e ao Arthur que me orientaram com paciência, confiança e sabedoria.

Gostaria de agradecer aos professores funcionários do Departamento de Física que mostram empenho e dedicação na formação dos alunos.

Gostaria de agradecer também aos meus amigos e familiares que contribuíram para que meus momentos de descanso nos últimos anos fossem agradáveis.

À minha mãe, ao meu pai, à Nathália e à Nívea um agradecimento especial pelo carinho e motivação proporcionados diariamente.

Resumo

Apresentamos uma proposta de um experimento capaz de investigar a relevância dos coeficientes de dissipação cruzada, em sistemas formados por dois modos de campo eletromagnético que interagem com um reservatório térmico. Nós mostramos que se nestes sistemas os coeficientes de dissipação cruzada tiverem valores quantitativamente relevantes, alguns estados serão mais resistentes a perda de coerência e energia do que outros. E para algumas condições específicas existem subespaços livres de decoerência.

Abstract

We describe a feasible experiment sensitive to the magnitudes and phases of the cross decay rates in a system composed by two electromagnetic modes interacting with the same reservoir. We show that if the cross decay rates are appreciable there are states less exposed to decoherence and dissipation, and in limiting situations a decoherence free subspaces appears.

Conteúdo

1	Introdução	6
2	Ferramentas Preliminares	9
2.1	Quantização do Campo Eletromagnético	9
2.2	Estados de Fock	13
2.3	Tratamento Quântico da Interação entre Matéria e Radiação .	15
3	Dedução da Equação Mestra a partir da Extensão do Modelo de Caldeira-Legget	20
4	Proposta Experimental	35
4.1	Preparação do estado	37
4.2	Deteção dos estados	38
4.3	Avaliando a influência dos coeficientes K_{ab} e Δ_{ab}	40
4.4	Identificando estados resistentes	45
4.5	Explicitando os Estados Resistentes e os Subespaços Livres de Decoerência	49
5	Conclusão	53
A	Apêndice	55

1 Introdução

A Mecânica Quântica atende muito bem a todas aplicações praticas, é uma teoria responsável por previsões precisas de dados experimentais registrados em análises de sistemas muito sutis. Ela proporcionou o avanço em áreas da Física, Química e Biologia, atravessou a fronteira entre as ciências empíricas e a Filosofia fazendo de antigos debates filosóficos temas atuais em Física. Como exemplo podemos citar a revogação do "realismo classicista" [1], tese filosófica que defende a idéia da estrutura da realidade ser formada por nossas concepções clássicas a respeito do mundo.

Muitos pensadores (como N.Bohr, W.Heisenberg, K.Popper, E.Wigner, W.Pauli, P.M.Dirac, etc) dedicaram-se ao refinamento da teoria quântica e assim criaram interpretações para ela. A mais aceita é a interpretação de Copenhague [2,3,4], que usa elementos do instrumentalismo, ou seja, trata a teoria como um instrumento para realizar previsões de eventos mensuráveis. Interpretações com caráter mais realista, apesar de enfrentarem muitas controvérsias, ainda são defendidas por alguns. Como exemplo podemos citar a interpretação Dualista Realista (ou de variáveis ocultas) [5], que defende a existência de variáveis que seriam capazes de completar a descrição do universo através de estados quânticos.

Entretanto, grande parte dos estudos atuais desenvolvidos em fundamentos de Mecânica Quântica ainda são motivados por questões relacionadas com a interpretação da teoria. Aspectos como quantização da energia, caráter indeterminista [6], não-localidade [7], dualidade onda-partícula [8], emaranhamento [9, 10], superposição de estados, enfim, aspectos que, a principio, contrariam o bom senso de qualquer indivíduo acostumado a presenciar apenas fenômenos clássicos geram um desconforto que enfatiza a questão da oculta transição entre a descrição quântica e a clássica.

A busca da identificação do mecanismo responsável pela camuflagem, no mundo clássico, de fenômenos como a superposição de estados e o emaranhamento leva a abordagens que destacam o papel da interação entre sistema e ambiente [11, 12].

São chamados de sistemas quânticos abertos subsistemas que estão acoplados a outro subsistema maior (com muitos graus de liberdade) que representará o ambiente. Esta interação é responsável por dois processos: a decoerência e a dissipação. Considerando S o subsistema de interesse e R o ambiente, sabemos que o acoplamento entre S e R faz o sistema S trocar energia com alguns modos do ambiente, como este é composto por um número muito grande de modos, a transferência de energia será um processo irreversível. Este processo possui análogo clássico e é chamado de dissipação. O acoplamento entre S e R também faz com que o sistema se entrelace com os

estados do ambiente. O entrelaçamento provoca a perda de pureza do estado quântico que representa S, fazendo com que uma superposição quântica se torne mistura estatística. Este é o processo conhecido como decoerência.

Avanços tecnológicos em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades permitem que a investigação a respeito da perda de coerência de estados quânticos seja experimentalmente acessível. Particularmente, o Experimento de Paris, proposto em [13] e realizado em [14], é o maior exemplo da utilização da tecnologia em benefício desta investigação.

A conhecida equação de Liouville-von Neumann, que descreve a evolução temporal de um sistema quântico, só pode ser aplicada a sistemas fechados. O sistema S-R é um sistema fechado (pois R modela todo o universo com exceção do subsistema S). Portanto, conhecemos a evolução temporal de S-R, e podemos deduzir uma equação mestra que explicita a evolução temporal de S [15, 16, 17]. Durante o processo de dedução de uma equação mestra devem ser feitas especificações a respeito: do sistema de interesse, do ambiente e da interação entre eles.

Neste trabalho trataremos de sistemas de dois modos de campo eletromagnéticos, aprisionados em cavidades de microondas, e interagindo com um ambiente em equilíbrio térmico. O hamiltoniano usado para tratar este sistema foi obtido através da extensão do modelo de Caldeira-Legget, desenvolvida em [18]. Também acompanharemos a dedução da equação mestra desenvolvida em [18]. Esta dedução conserva aspectos sutis da interação entre S e R, que estão associados a efeitos interessantes, como a identificação de estados mais resistentes ao decaimento provocado pelo ambiente e a possibilidade teórica de construção de subespaços livres de decoerência.

O objetivo final do trabalho será a proposta para a realização de um experimento, envolvendo duas cavidades (como o proposto em [19] ou no esquema de teleportação [20]), capaz de investigar em detalhes a interação entre S e R. Informações a respeito desta interação são relevantes não apenas para o estudo dos fundamentos de Mecânica Quântica, mas também para o estudo de Informação Quântica, pois, o qubit (o bit quântico) é um estado puro e portanto sofre os efeitos dos processos de dissipação e decoerência devido à interação com o ambiente. Conhecer em detalhes esta interação é um passo importante para a preservação do qubit.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

- O capítulo 1 é a presente introdução.
- No capítulo 2 está apresentada uma revisão que engloba conceitos fundamentais em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades como quantização do campo eletromagnético, estados de fock e modelo de Jaynes-Cummings.
- No capítulo 3 está apresentado o hamiltoniano do modelo Caldeira-Legget estendido e a dedução da equação mestra a partir dele. Também mostramos a fatoração do Liouvilliano obtido na dedução da equação mestra.
- No capítulo 4 está apresentada a proposta de um experimento factível capaz de investigar a relevância dos coeficientes de dissipação cruzada no contexto de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades [21]. Estes coeficientes são introduzidos teoricamente a partir do modelo Caldeira-Legget estendido, e são responsáveis por efeitos interessantes mas ainda não observados experimentalmente.
- No capítulo 5 expomos nossas conclusões.
- O apêndice contém a evolução temporal detalhada do estado $\rho_S(0) = (A_1|0, 1\rangle + A_2|1, 0\rangle) (h.c)$ utilizado na proposta experimental.

2 Ferramentas Preliminares

Este capítulo é dedicado à discussão de ferramentas essenciais para o desenvolvimento e compreensão de tópicos que serão abordados nos próximos capítulos ¹.

Partindo da teoria eletromagnética clássica, desenvolveremos a descrição quântica para a radiação através da quantização do campo eletromagnético. Posteriormente apresentaremos o modelo de Jaynes-Cummings, que nos permite, através de um hamiltoniano simples, modelar a interação entre radiação e matéria. Finalizaremos mostrando a evolução temporal associada ao hamiltoniano do modelo de Jaynes-Cummings.

2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

A descrição clássica do campo eletromagnético é dada pelas equações de Maxwell. Na ausência de fontes podemos escreve-las da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0, \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t},\end{aligned}$$

onde $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ é a velocidade da luz no vácuo.

Usando as equações de Maxwell, podemos deduzir as equações de onda para o campo elétrico e para o campo magnético:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Os vetores campo elétrico e campo magnético que obedecem as equações de onda tem a forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E'_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\nu t)} \vec{\epsilon}_1, \quad (3)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B'_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\nu t)} \vec{\epsilon}_2, \quad (4)$$

¹Referências importantes para a realização deste capítulo foram [17, 22, 23, 24, 25, 26].

onde $\vec{\epsilon}_1$ e $\vec{\epsilon}_2$ são vetores unitários responsáveis pela polarização dos campos, $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, E'_0 e B'_0 são as amplitudes complexas das ondas (constantes no espaço e no tempo), \vec{k} é o vetor de onda, que define a direção de propagação da onda eletromagnética e ν é a frequência da radiação.

Das equações $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$ e $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$ derivamos a condição de ortogonalidade entre os vetores de polarização e o vetor de onda

$$\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{k} = 0, \quad (5)$$

$$\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{k} = 0, \quad (6)$$

e substituindo as soluções (3) e (4) na equação $\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ teremos a condição:

$$i \left[(\vec{k} \times \vec{\epsilon}_1) E'_0 - \nu B'_0 \vec{\epsilon}_2 \right] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \nu t)} = 0. \quad (7)$$

Portanto $\vec{\epsilon}_1$ e $\vec{\epsilon}_2$ são perpendiculares e as amplitudes estão relacionadas por $\frac{k}{\nu} E'_0 = B'_0$, onde k é o modulo do vetor de onda. Como a propagação está sendo tratada no vácuo, $\frac{\nu}{k} = c$.

Os vetores \vec{k} , \vec{E} e \vec{B} formam um conjunto ortogonal. As ondas descritas pelas soluções (3) e (4) são ondas transversais que propagam na direção do vetor de onda \vec{k} .

Escolhendo a direção do eixo z como a direção de propagação da onda eletromagnética ($\vec{k} = k\hat{z}$), o campo elétrico no eixo x e exigindo que o campo magnético e o campo elétrico apresentem apenas valores reais, podemos escrevê-los como:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \nu t) \hat{x}, \quad (8)$$

$$\vec{B}(z, t) = B_0 \cos(kz - \nu t) \hat{y}, \quad (9)$$

onde E_0 e B_0 são as partes reais das amplitudes E'_0 e B'_0 . Da relação $E_0 = cB_0$ podemos concluir que:

$$\vec{E}(z, t) \cdot \vec{E}(z, t) = c^2 \vec{B}(z, t) \cdot \vec{B}(z, t). \quad (10)$$

Assim, a contribuição em energia do campo elétrico para a onda eletromagnética é idêntica à contribuição do campo magnético, portanto o hamiltoniano clássico tem a forma:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \int_V dV \left(\epsilon_0 \vec{E}(z, t) \cdot \vec{E}(z, t) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(z, t) \cdot \vec{B}(z, t) \right), \quad (11)$$

$$= \int_V dV \left(\epsilon_0 \vec{E}(z, t) \cdot \vec{E}(z, t) \right). \quad (12)$$

Da equação (8):

$$\vec{E}(z, t) = E_0(\cos kz \cos \nu t + \sin kz \sin \nu t)\hat{x}. \quad (13)$$

Definindo as funções:

$$q(t) = \frac{E_0}{\nu} \sin \nu t, \quad (14)$$

$$p(t) = E_0 \cos \nu t, \quad (15)$$

que estão relacionadas por $p(t) = \dot{q}(t)$, podemos escrever o campo elétrico como:

$$\vec{E}(z, t) = (q(t)\nu \sin kz + p(t) \cos kz)\hat{x}, \quad (16)$$

Impondo condições de contorno periódicas num volume $V = L^3$ ($\vec{E}(z, t) = \vec{E}(z + L, t)$), teremos valores quantizados para o modulo do vetor de onda, $k_j = \frac{2\pi j}{L}$ (onde $j = 1, 2, 3, \dots$). Como os valores de E_0 , ν , $p(t)$ e $q(t)$ estão associados aos valores de k_j podemos expressar a solução geral para o campo elétrico como:

$$\vec{E}(z, t) = \sum_j \vec{E}_j(z, t) = \sum_j (q_j(t)\nu_j \sin k_j z + p_j(t) \cos k_j z)\hat{x}. \quad (17)$$

O hamiltoniano clássico pode ser escrito como a soma $\mathbf{H} = \sum_j \mathbf{H}_j$, onde \mathbf{H}_j é o Hamiltoniano associado a cada modo da onda eletromagnética. Assim:

$$\mathbf{H}_j = \int_0^L dv \left(\epsilon_0 \vec{E}_j(z, t) \cdot \vec{E}_j(z, t) \right), \quad (18)$$

$$= \int_0^L dv \epsilon_0 (q_j(t)\nu_j \sin k_j z + p_j(t) \cos k_j z)^2, \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 V (q_j^2(t)\nu_j^2 + p_j^2(t)). \quad (20)$$

Definindo:

$$Q_j(t) = (\epsilon_0 V)^{\frac{1}{2}} q_j(t), \quad (21)$$

$$P_j(t) = (\epsilon_0 V)^{\frac{1}{2}} p_j(t), \quad (22)$$

temos

$$\mathbf{H}_j = \frac{1}{2} (Q_j^2(t) \nu_j^2 + P_j^2(t)). \quad (23)$$

Associando $Q_j(t)$ com coordenada generalizada e $P_j(t)$ com momento generalizado, notamos que \mathbf{H}_j tem a mesma forma do hamiltoniano para um oscilador harmônico de frequência ν_j .

A quantização do campo é feita a partir da identificação de Q_j e P_j como operadores \hat{Q}_j e \hat{P}_j que obedecem as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{Q}_j, \hat{P}_l] = i\hbar\delta_{jl}, \quad (24)$$

$$[\hat{Q}_j, \hat{Q}_l] = [\hat{P}_j, \hat{P}_l] = 0. \quad (25)$$

Definindo os operadores

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\nu_j}} (\nu_j \hat{Q}_j + i\hat{P}_j), \quad (26)$$

$$a_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\nu_j}} (\nu_j \hat{Q}_j - i\hat{P}_j), \quad (27)$$

que obedecem as relações de comutação:

$$[a_j, a_l^\dagger] = \delta_{jl}, \quad (28)$$

$$[a_j, a_l] = [a_j^\dagger, a_l^\dagger] = 0, \quad (29)$$

e agora associando o hamiltoniano clássico com o operador hamiltoniano, podemos escreve-lo como função dos operadores a_j e a_j^\dagger :

$$H_j = \hbar\nu_j \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right). \quad (30)$$

Finalmente, o operador Hamiltoniano total, correspondente a onda eletromagnética submetida a condições de contorno periódicas, tem a forma:

$$H = \sum_j H_j = \sum_j \hbar\nu_j \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right). \quad (31)$$

2.2 Estados de Fock

O hamiltoniano de um modo do campo eletromagnético quantizado pode ser escrito como:

$$H = \hbar\nu \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (32)$$

Os estados de Fock são os autoestados de H com autovalor E_n :

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (33)$$

Aplicando o operador a , pela esquerda, nos dois lados desta equação de autovalores, e usando a relação de comutação $[a, a^\dagger] = 1$, podemos escrever:

$$Ha|n\rangle = (E_n - \hbar\nu)a|n\rangle, \quad (34)$$

onde fica claro que $a|n\rangle$ também é um autovetor de H e portanto é um estado de Fock, assim podemos definir:

$$\frac{a}{\alpha_n}|n\rangle = |n-1\rangle, \quad (35)$$

que possui autovalor $E_{n-1} = E_n - \hbar\nu$. O parâmetro α_n é um fator de normalização.

Definindo o estado $|0\rangle$ como o estado de menor energia, podemos escrever:

$$a|0\rangle = 0, \quad (36)$$

$$H|0\rangle = \hbar\nu a^\dagger a|0\rangle + \frac{1}{2}\hbar\nu|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\nu|0\rangle = E_0|0\rangle, \quad (37)$$

assim:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\nu, \quad (38)$$

$$E_1 = E_0 + \hbar\nu, \quad (39)$$

\vdots

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\nu \quad (40)$$

usando novamente a equação (32) podemos definir o operador número:

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle, \quad (41)$$

$$N = a^\dagger a, \quad (42)$$

este operador nos informa o número de fótons com energia $\hbar\nu$ que existem no sistema.

Portanto, conhecendo a aplicação do operador número nos estados de Fock, podemos calcular o fator de normalização α_n .

$$\langle n-1 || n-1 \rangle = \frac{1}{|\alpha_n|^2} \langle n | a^\dagger a | n \rangle = \frac{n}{|\alpha_n|^2} = 1, \quad (43)$$

$$|\alpha_n| = \sqrt{n}. \quad (44)$$

Assim, a menos de uma fase global, podemos escrever:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (45)$$

e através do mesmo processo podemos também conhecer o resultado da operação $a^\dagger|n\rangle$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (46)$$

Os operadores a^\dagger e a são conhecidos respectivamente como operador de criação e operador de aniquilação, pois a ação deles nos estados de Fock provocam aumento ou diminuição no número de fótons do sistema.

Os estados de Fock também podem ser definidos para um sistema de um campo com vários modos. O hamiltoniano neste sistema tem a forma:

$$H = \sum_k H_k, \quad (47)$$

onde:

$$H_k = \hbar\nu_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (48)$$

A equação de autovalores de H_k é conhecida:

$$H_k |n_k\rangle = \hbar\nu_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right) |n_k\rangle. \quad (49)$$

Como estamos tratando agora de um campo com vários modos, o número de fótons no modo k (n_k) pode ser diferente do número de fótons no modo k' ($n_{k'}$). Assim os autovetores de H podem ser escritos como:

$$|n_1, n_2, \dots, n_l, \dots\rangle \equiv |\{n_k\}\rangle. \quad (50)$$

Os operadores criação e aniquilação também devem ser específicos para cada modo:

$$a_l |n_1, n_2, \dots, n_l, \dots\rangle = \sqrt{n_l} |n_1, n_2, \dots, n_l - 1, \dots\rangle, \quad (51)$$

$$a_l^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_l, \dots\rangle = \sqrt{n_l + 1} |n_1, n_2, \dots, n_l + 1, \dots\rangle. \quad (52)$$

Assim, podemos escrever um vetor de estado como superposição dos autovetores de H_k da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_l} \dots c_{n_1, n_2, \dots, n_l, \dots} |n_1, n_2, \dots, n_l, \dots\rangle \quad (53)$$

2.3 Tratamento Quântico da Interação entre Matéria e Radiação

Podemos escrever o Hamiltoniano que modela o sistema composto por um campo eletromagnético \vec{E} e um átomo de um elétron, usando a aproximação de dipólo para descrever a interação entre eles, como:

$$H = H_a + H_c + e\vec{r} \cdot \vec{E}, \quad (54)$$

onde H_a e H_c representam a energia do átomo e do campo, respectivamente, e o termo $e\vec{r} \cdot \vec{E}$ é responsável pela interação entre campo e átomo. O vetor \vec{r} marca a posição do elétron e e é a carga do elétron. O campo \vec{E} é uniforme sobre todo o átomo.

Usando a quantização do campo eletromagnético (equações (17) e (31)) e considerando que o átomo está na origem do sistema de coordenadas:

$$H_c = \sum_k \hbar\nu_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right), \quad (55)$$

$$\vec{E} = \sum_k \hat{\epsilon}_k \varepsilon_k \left(a_k + a_k^\dagger \right), \quad (56)$$

onde ν_k é a frequência do modo k , $\hat{\epsilon}_k$ é um vetor unitário responsável pela polarização do campo e $\varepsilon_k = (\hbar\nu_k/2\epsilon_0 V)^{1/2}$.

Os vetores $\{|i\rangle\}$ formam uma base no subespaço do átomo, e são autovetores de H_a com o autovalor E_i . Assim podemos escrever:

$$H_a = \sum_i E_i |i\rangle\langle i| \quad (57)$$

$$e\vec{r} = e \sum_i |i\rangle\langle i| \vec{r} \sum_j |j\rangle\langle j|, \quad (58)$$

Deslocando o ponto zero de energia, definido o operador de transição atômica

$$\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|, \quad (59)$$

e o elemento de matriz

$$\xi_{ij} = e\langle i|\vec{r}\cdot\hat{\epsilon}_k|j\rangle, \quad (60)$$

podemos escrever H como:

$$H = \sum_i E_i \sigma_{ii} + \sum_k \hbar \nu_k a_k^\dagger a_k + \hbar \sum_{i,j} \sum_k G_k^{ij} \sigma_{ij} (a_k + a_k^\dagger), \quad (61)$$

onde

$$G_k^{ij} = -\frac{\xi_{ij}}{\epsilon_k \hbar}. \quad (62)$$

As interações entre átomo e campo que serão tratadas no capítulo 4 são casos simples, são interações entre átomos de dois níveis com um modo de campo. Para tratar desses sistemas específicos, podemos simplificar a forma do hamiltoniano.

Para um campo linearmente polarizado (ξ_{ij} real) e um átomo de níveis $|g\rangle$ (estado de menor energia) e $|e\rangle$ (estado de maior energia), podemos escrever:

$$G_k = G_k^{ge} = G_k^{eg}. \quad (63)$$

Definindo as matrizes:

$$\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (64)$$

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g|, \quad (65)$$

$$\sigma_- = |g\rangle\langle e|, \quad (66)$$

que satisfazem a algebra de spin 1/2 das matrizes de Pauli, ou seja

$$[\sigma_-, \sigma_+] = -\sigma_z, \quad (67)$$

$$[\sigma_-, \sigma_z] = 2\sigma_-, \quad (68)$$

Assim, na base dos autovetores de σ_z , as matrizes tem a forma:

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Os vetores $|g\rangle$ e $|e\rangle$ são autovetores de σ_z ,

$$\sigma_z|e\rangle = |e\rangle, \quad (70)$$

$$\sigma_z|g\rangle = -|g\rangle. \quad (71)$$

A aplicação da matriz σ_+ no estado $|g\rangle$ o transforma em $|e\rangle$ e a aplicação da matriz σ_- no estado $|e\rangle$ o transforma em $|g\rangle$.

Usando estas definições e deslocando o nível mínimo de energia, podemos escrever o hamiltoniano que modela a interação entre um átomo de dois níveis e um campo com vários modos como:

$$H = \sum_k \hbar\nu_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\hbar\nu\sigma_z + \hbar \sum_k G_k (\sigma_+ + \sigma_-) (a_k + a_k^\dagger). \quad (72)$$

Também podemos escrever:

$$H = H_0 + H_I, \quad (73)$$

$$H_0 = \sum_k \hbar\nu_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\hbar\nu\sigma_z, \quad (74)$$

$$H_I = \hbar \sum_k G_k (\sigma_+ + \sigma_-) (a_k + a_k^\dagger). \quad (75)$$

Na representação de interação:

$$\tilde{H}_I = e^{iH_0 t/\hbar} H_I e^{-iH_0 t/\hbar}, \quad (76)$$

usando

$$e^{xA} B e^{-xA} = B + x[A, B] + \frac{x^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots, \quad (77)$$

obtemos:

$$\tilde{H}_I = \hbar \sum_k G_k \left(\sigma_+ a_k e^{i(\omega-\nu_k)t} + \sigma_- a_k^\dagger e^{-i(\omega-\nu_k)t} + \sigma_+ a_k^\dagger e^{i(\omega+\nu_k)t} + \sigma_- a_k e^{-i(\omega+\nu_k)t} \right). \quad (78)$$

As exponenciais que acompanham os termos $\sigma_+ a_k^\dagger$ e $\sigma_- a_k$ ($e^{\pm i(\omega+\nu_k)t}$) em \tilde{H}_I variam mais rapidamente no tempo do que as exponenciais que acompanham os termos $\sigma_- a_k^\dagger$ e $\sigma_+ a_k$ ($e^{\pm i(\omega-\nu_k)t}$), portanto, o efeito médio no tempo dos termos $\sigma_+ a_k^\dagger$ e $\sigma_- a_k$ pode ser desprezado. Esta é a aproximação de ondas girantes (rotating wave approximation - RWA), um procedimento largamente utilizado. Assim, na representação de Schrödinger o hamiltoniano terá a forma:

$$H = \sum_k \hbar \nu_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z + \hbar \sum_k G_k \left(\sigma_+ a_k + \sigma_- a_k^\dagger \right). \quad (79)$$

Este é o modelo de Jaynes-Cummings (MJC), que nos permite escrever uma forma simples para a complicada interação entre radiação e matéria. Simplificaremos ainda mais o hamiltoniano, considerando apenas um modo do campo:

$$H = \hbar \nu a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z + \hbar G \left(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger \right), \quad (80)$$

onde agora:

$$H_0 = \hbar \nu a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z, \quad (81)$$

$$H_I = \hbar G \left(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger \right). \quad (82)$$

Na figura de interação:

$$\tilde{H}_I = e^{iH_0 t/\hbar} H_I e^{-iH_0 t/\hbar}, \quad (83)$$

usando

$$e^{xA} B e^{-xA} = B + x[A, B] + \frac{x^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots, \quad (84)$$

podemos escrever:

$$\tilde{H}_I = \hbar G \left(\sigma_+ a e^{i\Delta t} + \sigma_- a^\dagger e^{-i\Delta t} \right), \quad (85)$$

onde $\Delta = \omega - \nu$.

A evolução temporal do sistema na figura de interação tem a forma:

$$i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} = \tilde{H}_I |\psi(t)\rangle_I. \quad (86)$$

Podemos escrever o vetor $|\psi(t)\rangle_I$ como uma combinação linear de elementos da base formada pelos autovetores de H_0 : $|e\rangle \otimes |n\rangle = |e, n\rangle$ e $|g\rangle \otimes |n\rangle = |g, n\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle_I = \sum_n (c_{e,n}(t) |e, n\rangle + c_{g,n}(t) |g, n\rangle). \quad (87)$$

Aplicando o operador \tilde{H}_I nos autovetores de H_0 ,

$$\tilde{H}_I|e, n\rangle = \hbar G\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}|g, n+1\rangle, \quad (88)$$

$$\tilde{H}_I|g, n\rangle = \hbar G\sqrt{n}e^{i\Delta t}|e, n-1\rangle, \quad (89)$$

percebemos que \tilde{H}_I só provoca transições entre os estados $|e, n\rangle$ e $|g, n+1\rangle$ ou entre os estados $|g, n\rangle$ e $|e, n-1\rangle$. Assim podemos trabalhar no subespaço bidimensional definido pela base $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$, e escrever equações diferenciais envolvendo os coeficientes $c_{e,n}$ e $c_{g,n+1}$, projetando a equação (86) em $\langle e, n|$ e $\langle g, n+1|$:

$$\dot{c}_{e,n}(t) = -iG\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}c_{g,n+1}(t), \quad (90)$$

$$\dot{c}_{g,n+1}(t) = -iG\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}c_{e,n}(t). \quad (91)$$

A solução geral para as equações diferenciais acima é:

$$c_{e,n}(t) = \left\{ c_{e,n}(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - \frac{2iG\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{g,n+1}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{\frac{i\Delta t}{2}},$$

$$c_{g,n+1}(t) = \left\{ c_{g,n+1}(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + \frac{i\delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - \frac{2iG\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{e,n}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{\frac{-i\Delta t}{2}},$$

onde Ω_n é a frequência de Rabi

$$\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4G(n+1)}.$$

Portanto, se conhecermos a expansão de um estado $|\psi(0)\rangle$ na base dos autovetores de H_0 , podemos conhecer a evolução temporal deste vetor através das expressões de $c_{g,n+1}(t)$ e $c_{e,n}(t)$. É interessante destacar que o estado $|g, 0\rangle$ é um autovetor de H ($H = H_0 + H_I$), e portanto é um estado estacionário deste sistema.

3 Dedução da Equação Mestra a partir da Extensão do Modelo de Caldeira-Legget

O modelo Caldeira-Legget nos permite estudar a interação entre um modo de oscilador harmônico com o ambiente. A partir da extensão do modelo Caldeira-Legget, apresentada em [18], podemos escrever o hamiltoniano usado para modelar a interação de dois modos (M_a e M_b) de campo eletromagnético, construídos em cavidades supercondutoras, com o ambiente ².

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (92)$$

onde:

$$\begin{aligned} H_0 &= H_S + H_R, \\ H_S &= \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b, \\ H_R &= \hbar \sum_k \omega_k c_k^\dagger c_k, \\ H_{int} &= \hbar \sum_k \left(\alpha_k c_k^\dagger a + \alpha_k^* c_k a^\dagger \right) + \hbar \sum_k \left(\beta_k c_k^\dagger b + \beta_k^* c_k b^\dagger \right). \end{aligned} \quad (93)$$

Os operadores a (b) e a^\dagger (b^\dagger) são operadores de aniquilação e criação do modo M_a (M_b), c_k^\dagger e c_k também são operadores de criação e aniquilação, relacionados ao conjunto de osciladores harmônicos que modelam os modos deslocalizados do ambiente (como modos de campo eletromagnético do universo e fonons da rede cristalina das cavidades [29]), α_k e β_k são os coeficientes de acoplamento entre os modos do sistema e o ambiente.

Os osciladores harmônicos que modelam o ambiente estão linearmente acoplados ao sistema, como em [30]. O efeito líquido dessa interação pode ser relacionado a processos que envolvem a aniquilação de um fóton num modo do sistema e a criação de um fóton num modo do ambiente e vice-versa.

Este acoplamento linear entre modos do sistema e modos do ambiente não é deduzido a partir de primeiros princípios, mas como exemplo da eficiência do modelo na comparação com dados experimentais, podemos citar a descrição apresentada em [31] do experimento relatado em [32]. Outros exemplos do uso deste tipo de acoplamento neste contexto podem ser encontrados em [16, 17, 33].

A dinâmica de um sistema quântico aberto pode ser modelada matematicamente através de uma equação mestra. Usualmente, para deduzir uma

²Referências importantes para a realização deste capítulo foram [18, 27, 28].

equação mestra, partimos da suposição de que o universo pode ser dividido em dois subsistemas: S (subsistema de interesse) e R (o resto do universo), este geralmente descrito como um reservatório térmico (ambiente). Considerando que o sistema global $S + R$ evolui unitariamente, ou seja, que o operador de estado do sistema global ρ_{SR} obedece a equação de Liouville-von Neumann, podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}\rho_{SR}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_{SR}(t)]. \quad (94)$$

Na representação de interação

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{SR}(t) &= e^{iH_0t/\hbar}\rho_{SR}(t)e^{-iH_0t/\hbar}, \\ \tilde{H}_{int}(t) &= e^{iH_0t/\hbar}H_{int}e^{-iH_0t/\hbar}, \end{aligned} \quad (95)$$

e a evolução temporal tem a forma

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{SR}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_{int}(t), \tilde{\rho}_{SR}(t)], \quad (96)$$

podendo ser escrita como:

$$\tilde{\rho}_{SR}(t) = \tilde{\rho}_{SR}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}_{SR}(t')]. \quad (97)$$

Iterando a equação acima obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{SR}(t) &= \tilde{\rho}_{SR}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}_{SR}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' [\tilde{H}_{int}(t'), [\tilde{H}_{int}(t''), \tilde{\rho}_{SR}(0)]] \\ &\quad + O^3(\tilde{H}_{int}). \end{aligned}$$

Nesse ponto faremos a primeira restrição na dedução da equação mestra. Consideraremos que o acoplamento do sistema S com o ambiente R é fraco. Em nosso problema específico, essa aproximação se justifica através do alto fator de qualidade das cavidades. Portanto, podemos desprezar os termos de $O^3(\tilde{H}_{int})$.

Por definição:

$$\tilde{\rho}_S(t) = Tr_R(\tilde{\rho}_{SR}(t)), \quad (98)$$

onde Tr_R é o traço no subespaço do ambiente. Assim:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(0) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' Tr_R \left[\tilde{H}_{int}(t'), \tilde{\rho}_{SR}(0) \right] \\ &- \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' Tr_R \left[\tilde{H}_{int}(t'), \left[\tilde{H}_{int}(t''), \tilde{\rho}_{SR}(0) \right] \right].\end{aligned}\quad (99)$$

Com o objetivo de simplificar a notação, podemos definir:

$$C_j(t) = \sum_k e^{-i\omega_k t} \alpha_{jk}^* c_k, \quad (100)$$

$$A_j(t) = e^{-i\omega_j t} a_j, \quad (101)$$

sendo que $j = 1, 2$ e

$$a_1 = a, \quad \alpha_{1k} = \alpha_k, \quad \omega_1 = \omega_a, \quad (102)$$

$$a_2 = b, \quad \alpha_{2k} = \beta_k, \quad \omega_2 = \omega_b. \quad (103)$$

Assim:

$$\tilde{H}_{int}(t) = \hbar \sum_{j=1}^2 \left(C_j^\dagger(t) A_j(t) + C_j(t) A_j^\dagger(t) \right). \quad (104)$$

Voltando à equação de evolução temporal:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(0) &= -i \int_0^t dt' Tr_R \sum_{j=1}^2 \left[C_j^\dagger(t') A_j(t') + C_j(t') A_j^\dagger(t'), \tilde{\rho}_{SR}(0) \right] \\ &- \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' Tr_R \sum_{j=1}^2 \left[C_j^\dagger(t') A_j(t') + C_j(t') A_j^\dagger(t'), \left[C_j^\dagger(t'') A_j(t'') + C_j(t'') A_j^\dagger(t''), \tilde{\rho}_{SR}(0) \right] \right].\end{aligned}\quad (105)$$

A partir desse ponto vamos nos restringir a trabalhar com sistemas que possuem a seguinte particularidade: em $t = 0$, $\rho_S(0)$ e $\rho_R(0)$ são não correlacionados. Portanto, podemos escrever:

$$\rho_{SR}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R(0), \quad (106)$$

onde $\rho_R(0)$ é o operador de estado do reservatório no tempo zero.

Vamos também considerar que $\rho_R(0)$ está no estado de equilíbrio térmico. Portanto sabemos, através de mecânica quântica estatística, que o operador de estado reduzido do reservatório tem a forma:

$$\rho_R(0) = \frac{1}{Z} \prod_k \exp(-\beta \hbar \omega_k c_k^\dagger c_k) = \prod_k \left(\frac{1}{1 + \bar{n}_k} \right) \left(\frac{\bar{n}_k}{1 + \bar{n}_k} \right)^{c_k^\dagger c_k}, \quad (107)$$

$$Z = \prod_k \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta \hbar \omega_k n),$$

onde $\beta = (k_B T)^{-1}$, k_B é a constante de Boltzmann, T a temperatura do reservatório, Z a função de partição e \bar{n}_k o número médio de fótons do k -ésimo modo do reservatório, dado pela distribuição de Planck:

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1},$$

$$1 + \bar{n}_k = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega_k n}.$$

Desenvolvendo os comutadores da equação (105), e tomando o traço Tr_R , encontraremos termos do tipo: $Tr_R(\rho_R(0)E)$, onde E é um operador qualquer que atua apenas no subespaço do reservatório. Este traço em R é o valor médio do operador E , $Tr_R(\rho_R(0)E) = \langle E \rangle$. A forma de ρ_R nos permite calcular esse valor médio usando uma base de estados de Fock. Abaixo estão calculados todos os termos desse tipo, que aparecem no desenvolvimento da equação (105):

$$\begin{aligned} Tr_R(\rho_R(0)C_j(t)) &= 0, \\ Tr_R(\rho_R(0)C_j^\dagger(t)) &= 0, \\ Tr_R(\rho_R(0)C_j(t)C_l(t')) &= 0, \\ Tr_R(\rho_R(0)C_j^\dagger(t)C_l^\dagger(t')) &= 0, \\ Tr_R(\rho_R(0)C_j^\dagger(t')C_l(t'')) &= \sum_k \alpha_{jk} \alpha_{lk}^* \bar{n}_k e^{i\omega_k(t'-t'')}, \\ Tr_R(\rho_R(0)C_j(t')C_l^\dagger(t'')) &= \sum_k \alpha_{jk}^* \alpha_{lk} (\bar{n}_k + 1) e^{-i\omega_k(t'-t'')}, \\ Tr_R(\rho_R(0)C_l^\dagger(t'')C_j(t')) &= \sum_k \alpha_{lk} \alpha_{jk}^* \bar{n}_k e^{i\omega_k(t''-t')}, \\ Tr_R(\rho_R(0)C_l(t'')C_j^\dagger(t')) &= \sum_k \alpha_{lk}^* \alpha_{jk} (\bar{n}_k + 1) e^{-i\omega_k(t''-t')}, \end{aligned}$$

onde l é um índice como j , que assume valores $l = 1, 2$.

Assim desenvolvendo a equação (105), usando a propriedade cíclica do traço e substituindo os valores médios calculados acima podemos escrever:

$$\tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(0) = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \left\{ \sum_{j,l=1}^2 \begin{aligned} & - \sum_k \alpha_{jk}^* \alpha_{lk} (\bar{n}_k + 1) e^{-i\omega_k(t'-t'')} e^{-i(\omega_l t'' - \omega_j t')} a_j^\dagger a_l \tilde{\rho}_S(0) \\ & - \sum_k \alpha_{jk} \alpha_{lk}^* \bar{n}_k e^{i\omega_k(t'-t'')} e^{i(\omega_l t'' - \omega_j t')} a_j a_l^\dagger \tilde{\rho}_S(0) \\ & + \sum_k \alpha_{lk} \alpha_{jk}^* \bar{n}_k e^{i\omega_k(t''-t')} e^{-i(\omega_l t'' - \omega_j t')} a_j^\dagger \tilde{\rho}_S(0) a_l \\ & + \sum_k \alpha_{lk}^* \alpha_{jk} (\bar{n}_k + 1) e^{-i\omega_k(t''-t')} e^{i(\omega_l t'' - \omega_j t')} a_j \tilde{\rho}_S(0) a_l^\dagger \\ & + \sum_k \alpha_{jk}^* \alpha_{lk} (\bar{n}_k + 1) e^{-i\omega_k(t'-t'')} e^{-i(\omega_l t'' - \omega_j t')} a_l \tilde{\rho}_S(0) a_j^\dagger \\ & + \sum_k \alpha_{jk} \alpha_{lk}^* \bar{n}_k e^{i\omega_k(t'-t'')} e^{i(\omega_l t'' - \omega_j t')} a_l^\dagger \tilde{\rho}_S(0) a_j \\ & - \sum_k \alpha_{lk} \alpha_{jk}^* \bar{n}_k e^{i\omega_k(t''-t')} e^{-i(\omega_l t'' - \omega_j t')} \tilde{\rho}_S(0) a_l a_j^\dagger \\ & - \sum_k \alpha_{lk}^* \alpha_{jk} (\bar{n}_k + 1) e^{-i\omega_k(t''-t')} e^{i(\omega_l t'' - \omega_j t')} \tilde{\rho}_S(0) a_l^\dagger a_j \end{aligned} \right\}. \quad (108)$$

Definindo:

$$\gamma_{jl}(\tau) = e^{-i\omega_l \tau} \sum_k \alpha_{jk} \alpha_{lk}^* \bar{n}_k e^{i\omega_k \tau}, \quad (109)$$

$$\Gamma_{jl}(\tau) = e^{-i\omega_l \tau} \sum_k \alpha_{jk} \alpha_{lk}^* (\bar{n}_k + 1) e^{i\omega_k \tau}, \quad (110)$$

onde $\tau = t' - t''$, através de uma substituição de variáveis faremos com que τ seja a variável de integração no lugar de t'' em (108), sabendo que $dt'' = d\tau$.

Neste ponto faremos uma particularização e trataremos apenas de sistemas com temperatura nula ($\bar{n}_k = 0$), assim:

$$\gamma_{jl}(\tau) = 0, \quad (111)$$

$$\Gamma_{jl}(\tau) = e^{-i\omega_l \tau} \sum_k \alpha_{jk} \alpha_{lk}^* e^{i\omega_k \tau}. \quad (112)$$

A função $\Gamma_{jl}(\tau)$ é uma soma de números complexos. O aumento de τ faz com que a soma diminua, já que dessa forma ela será uma soma de números complexos com fases aleatórias. Portanto podemos definir um limite superior para τ , de forma que dentro desse limite os valores de $\Gamma_{jl}(\tau)$ ainda são consideráveis. Se τ_c é esse limite, podemos, para $\tau_c \ll t$, mudar os

limites de integração (de $t' \rightarrow \tau_c$) sem alterações significativas no resultado da integral. Assim:

$$\tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(0) = \sum_{j,l=1}^2 \left\{ \left[Z_{jl} \left(a_j \tilde{\rho}_S(0) a_l^\dagger - \tilde{\rho}_S(0) a_l^\dagger a_j \right) \right] \left(\int_0^t dt' e^{i(\omega_l - \omega_j)t'} \right) \right\} + h.c., \quad (113)$$

sendo

$$Z_{jl} = \int_0^{\tau_c} d\tau \Gamma_{jl}(\tau), \quad (114)$$

$$= \sum_k \alpha_{jk} \alpha_{lk}^* \int_0^{\tau_c} d\tau e^{i(\omega_k - \omega_l)\tau}. \quad (115)$$

A integral $\int_0^{\tau_c} d\tau e^{i(\omega_k - \omega_l)\tau}$ da expressão acima funciona como um filtro de frequências. Ela seleciona quais constantes de acoplamento (α_k e β_k) contribuem efetivamente na constituição do coeficiente Z_{jl} . A seleção é feita da seguinte forma, a integral apresenta valores insignificantes quando ω_k é muito diferente de ω_l (frequência dos modos M_a ou M_b), assim, apenas constantes de acoplamento correspondentes a modos do ambiente com frequências ω_k próximas a ω_l terão peso significativo na soma que constrói o coeficiente Z_{jl} .

Diferenciando os dois lados da equação (113) temos:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = \sum_{j,l=1}^2 \left\{ Z_{jl} \left(a_j \tilde{\rho}_S(0) a_l^\dagger - \tilde{\rho}_S(0) a_l^\dagger a_j \right) e^{i(\omega_l - \omega_j)t} \right\} + h.c. \quad (116)$$

Escrevendo $\tilde{\rho}_S(0)$ em função de $\tilde{\rho}_S(t)$, através da equação (113), desprezando os termos de $O^2(Z_{jl})$, já que eles correspondem a termos de $O^4(\tilde{H}_{int})$, e voltando para representação de Schrödinger:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = \sum_{j,l=1}^2 \left\{ \left(Z_{jl} a_j \tilde{\rho}_S(t) a_l^\dagger - Z_{jl} \tilde{\rho}_S(t) a_l^\dagger a_j \right) + h.c. \right\} - \frac{i}{\hbar} [H_s, \rho_S(t)]. \quad (117)$$

Separando o coeficiente Z_{jl} em parte real e imaginária:

$$Z_{jl} = K_{jl} + i\Delta_{jl}, \quad (118)$$

e lembrando que através das definições (102), (103) e (115) temos:

$$Z_{11} = Z_{aa}, \quad K_{11} = K_{aa}, \quad \Delta_{11} = \Delta_{aa}, \quad (119)$$

$$Z_{22} = Z_{bb}, \quad K_{22} = K_{bb}, \quad \Delta_{22} = \Delta_{bb}, \quad (120)$$

$$Z_{12} = Z_{ab}, \quad K_{12} = K_{ab}, \quad \Delta_{12} = \Delta_{ab}, \quad (121)$$

$$Z_{21} = Z_{ba}, \quad K_{21} = K_{ba}, \quad \Delta_{21} = \Delta_{ba}, \quad (122)$$

podemos finalmente escrever a equação mestra:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}\rho_S(t), \quad (123)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & K_{aa} (2a \bullet a^\dagger - \bullet a^\dagger a - a^\dagger a \bullet) + i (\Delta_{aa} - \omega_a) [a^\dagger a, \bullet] + \\ & K_{bb} (2b \bullet b^\dagger - \bullet b^\dagger b - b^\dagger b \bullet) + i (\Delta_{bb} - \omega_b) [b^\dagger b, \bullet] + \\ & K_{ab} (a \bullet b^\dagger + b \bullet a^\dagger - \bullet b^\dagger a - a^\dagger b \bullet) + \\ & K_{ba} (b \bullet a^\dagger + a \bullet b^\dagger - \bullet a^\dagger b - b^\dagger a \bullet) + \\ & i \left(\frac{\Delta_{ab} - \Delta_{ba}}{2} \right) (a \bullet b^\dagger - b \bullet a^\dagger - \bullet b^\dagger a + a^\dagger b \bullet) + \\ & i \left(\frac{\Delta_{ba} - \Delta_{ab}}{2} \right) (b \bullet a^\dagger - a \bullet b^\dagger - \bullet a^\dagger b + b^\dagger a \bullet) + \\ & i \left(\frac{\Delta_{ab} + \Delta_{ba}}{2} \right) [a^\dagger b + b^\dagger a, \bullet]. \end{aligned} \quad (124)$$

O Liouvilliano é um superoperador (operador que age em operadores). Está sendo usada a notação convencional de superoperadores, onde o ponto (\bullet) indica o lugar a ser ocupado pelo operador no qual o superoperador atua.

Discutindo os coeficientes K_{jl} e Δ_{jl}

Os coeficientes K_{aa} e K_{bb} são as constantes de dissipação das cavidades que abrigam os modos M_a e M_b respectivamente. Δ_{aa} e Δ_{bb} estão relacionados à evolução unitária do sistema e a mudanças na frequência de oscilação dos campos nas cavidades. Os coeficientes K_{aa} e Δ_{aa} dependem apenas das constantes de acoplamento ao ambiente do modo M_a $\{\alpha_k\}$, e os coeficientes K_{bb} e Δ_{bb} dependem apenas das constantes de acoplamento ao ambiente do modo M_b $\{\beta_k\}$. Como pode ser visto nas expressões abaixo:

$$K_{aa} + i\Delta_{aa} = \sum_k \alpha_k \alpha_k^* \int_0^{\tau_c} d\tau e^{i(\omega_k - \omega_a)\tau}, \quad (125)$$

$$K_{bb} + i\Delta_{bb} = \sum_k \beta_k \beta_k^* \int_0^{\tau_c} d\tau e^{i(\omega_k - \omega_b)\tau}. \quad (126)$$

Os coeficientes K_{ab} , K_{ba} , Δ_{ab} e Δ_{ba} dependem das constantes de acoplamento ao ambiente dos modos $M_a\{\alpha_k\}$ e $M_b\{\beta_k\}$:

$$K_{ab} + i\Delta_{ab} = \sum_k \alpha_k \beta_k^* \int_0^{\tau_c} d\tau e^{i(\omega_k - \omega_b)\tau}, \quad (127)$$

$$K_{ba} + i\Delta_{ba} = \sum_k \beta_k \alpha_k^* \int_0^{\tau_c} d\tau e^{i(\omega_k - \omega_a)\tau}. \quad (128)$$

Esses coeficientes podem ser relacionados a um canal de comunicação entre as cavidades mediado pelo ambiente, cumprindo papéis unitários e não unitários.

Sabemos que nem todos os modos do ambiente tem interação significativa com os modos M_a ou M_b (ω_k suficientemente próximo de ω_a ou de ω_b). Definindo esse número como N_0 , devemos ter α_k e β_k da ordem de $\frac{1}{\sqrt{N_0}}$ (para que os coeficientes presentes no Liouvilliano sejam independentes de N_0 , já que $N_0 \rightarrow \infty$ no limite termodinâmico). Se as fases de α_k e β_k^* não forem correlacionadas, as somas em (127) e (128) que envolvem os termos $\alpha_k \beta_k^*$ e $\beta_k \alpha_k^*$ serão somas de números complexos com módulos pequenos e fases aleatória, que tenderão a ser muito pequenos. Neste caso o módulo de $K_{ab} + i\Delta_{ab}$ e de $K_{ba} + i\Delta_{ba}$ tende a ser muito menor do que o módulo de $K_{aa} + i\Delta_{aa}$ e de $K_{bb} + i\Delta_{bb}$.

Uma vez definidos os modos do sistema (M_a e M_b), o ambiente, que possui inúmeros graus de liberdade, seleciona quais constantes (α_k e β_k) terão peso significativo na interação sistema-ambiente através da integral $\int_0^{\tau_c} e^{i(\omega_k - \omega_j)\tau} d\tau$. Portanto, é esta interação entre sistema e ambiente que define os valores dos coeficientes de dissipação cruzada (K_{jl} e Δ_{jl}). Devido ao grande número de graus de liberdade do ambiente, é muito difícil manipular esta interação. Por isso é difícil o controle sobre os valores dos coeficientes K_{jl} e Δ_{jl} . Em seções seguintes, serão apresentados gráficos com estimativas de valores para os coeficientes de dissipação cruzada. Estas estimativas são feitas apenas para compreender o comportamento desses coeficientes.

Para um reservatório infinito, onde os intervalos entre dois modos adjacentes atingem o limite contínuo, podemos definir $D(\omega)$ de forma que $D(\omega)d\omega$

é o número de modos com frequência entre ω e $\omega + d\omega$. Assim podemos substituir: $\sum_k \rightarrow \int_0^\infty d\omega D(\omega)$, $\alpha_k \rightarrow \alpha(\omega)$ e $\beta_k \rightarrow \beta(\omega)$, supondo que $D(\omega)\alpha_j(\omega)\alpha_l^*(\omega)$ sejam funções suficientemente suaves de ω . As equações (125), (126), (127) e (128) tornam-se:

$$K_{aa} + i\Delta_{aa} = \int_0^\infty \left[D(\omega)\alpha(\omega)\alpha^*(\omega) \int_0^{\tau_c} (e^{i(\omega-\omega_a)\tau} d\tau) \right] d\omega, \quad (129)$$

$$K_{bb} + i\Delta_{bb} = \int_0^\infty \left[D(\omega)\beta(\omega)\beta^*(\omega) \int_0^{\tau_c} (e^{i(\omega-\omega_b)\tau} d\tau) \right] d\omega, \quad (130)$$

$$K_{ab} + i\Delta_{ab} = \int_0^\infty \left[D(\omega)\alpha(\omega)\beta^*(\omega) \int_0^{\tau_c} (e^{i(\omega-\omega_b)\tau} d\tau) \right] d\omega, \quad (131)$$

$$K_{ba} + i\Delta_{ba} = \int_0^\infty \left[D(\omega)\beta(\omega)\alpha^*(\omega) \int_0^{\tau_c} (e^{i(\omega-\omega_a)\tau} d\tau) \right] d\omega. \quad (132)$$

A integral do tipo $\int_0^{\tau_c} (e^{i(\omega-\omega_l)\tau} d\tau)$ está presente em todas as expressões do arranjo de equações mostrado acima. O resultado do desenvolvimento desta integral é uma função complexa de ω :

$$\int_0^{\tau_c} (e^{i(\omega-\omega_l)\tau} d\tau) = \frac{1}{i(\omega-\omega_l)} (e^{i(\omega-\omega_l)\tau_c} - 1), \quad (133)$$

$$= \frac{\sin [(\omega-\omega_l)\tau_c]}{(\omega-\omega_l)} - i \left(\frac{\cos [(\omega-\omega_l)\tau_c] - 1}{(\omega-\omega_l)} \right). \quad (134)$$

Definindo:

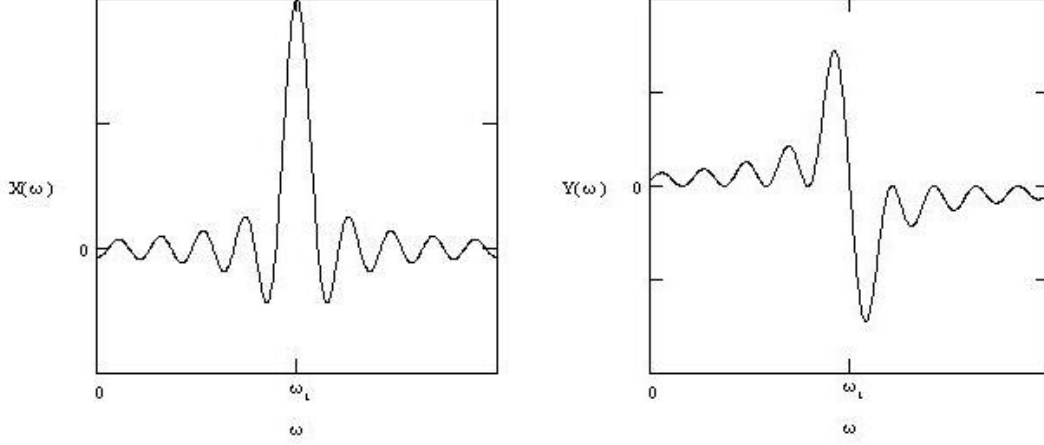
$$X_l(\omega) = \frac{\sin [(\omega-\omega_l)\tau_c]}{(\omega-\omega_l)}, \quad (135)$$

$$Y_l(\omega) = \frac{\cos [(\omega-\omega_l)\tau_c] - 1}{(\omega-\omega_l)}, \quad (136)$$

podemos escrever os coeficientes Z_{jl} da seguinte forma:

$$Z_{jl} = K_{jl} + i\Delta_{jl} = \int_0^\infty D(\omega)\alpha_j(\omega)\alpha_l^*(\omega)X_l(\omega)d\omega - i \int_0^\infty D(\omega)\alpha_j(\omega)\alpha_l^*(\omega)Y_l(\omega)d\omega. \quad (137)$$

Podemos observar o comportamento gráfico das funções $X_l(\omega)$ e $Y_l(\omega)$:



Gráficos das funções $X_l(\omega)$ e $Y_l(\omega)$ definidas em (135) e (136).

Fica claro através da análise dos gráficos que se integrarmos as funções $X_l(\omega)$ e $Y_l(\omega)$ de zero a infinito, o valor de $\int_0^\infty X_l(\omega)d\omega$ é muito maior do que o valor de $\int_0^\infty Y_l(\omega)d\omega$. Considerando que o fator $D(\omega)\alpha_j(\omega)\alpha_l^*(\omega)$, que aparece na equação (137), não provoca grandes alterações nesta tendência, podemos admitir que o segundo termo do lado direito da equação (137) é muito pequeno quando comparado ao primeiro termo, e por isso podemos desprezá-lo. Assim:

$$Z_{jl} = K_{jl} + i\Delta_{jl} = \int_0^\infty D(\omega)\alpha_j(\omega)\alpha_l^*(\omega)X_l(\omega)d\omega. \quad (138)$$

Notemos que o valor da parte imaginária de Z_{jl} (Δ_{jl}) tem origem na multiplicação $\alpha_j(\omega)\alpha_l^*(\omega)$, já que as funções $X_l(\omega)$ e $D(\omega)$ são, por definição, funções reais. Assim, de acordo com essa aproximação, os valores de Δ_{aa} e Δ_{bb} são nulos.

$$Z_{aa} = K_{aa} = \int_0^\infty D(\omega)\alpha(\omega)\alpha^*(\omega)X_a(\omega)d\omega, \quad (139)$$

$$Z_{bb} = K_{bb} = \int_0^\infty D(\omega)\beta(\omega)\beta^*(\omega)X_b(\omega)d\omega. \quad (140)$$

Para sistemas em que as cavidades que abrigam os modos M_a e M_b são idênticas ($\omega_a = \omega_b = \omega_0$, $X_a(\omega) = X_b(\omega) = X_0(\omega)$ e $K_{aa} = K_{bb}$), podemos considerar que:

$$Z_{aa} = Z_{bb}, \quad (141)$$

$$Z_{ab} = \int_0^\infty D(\omega)\alpha(\omega)\beta^*(\omega)X_0(\omega)d\omega = Z_{ba}^*, \quad (142)$$

portanto:

$$K_{ab} = K_{ba}, \quad (143)$$

$$\Delta_{ab} = -\Delta_{ba}. \quad (144)$$

Para sistemas que obedecem essas condições podemos deduzir uma desigualdade, envolvendo $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, $D(\omega)$ e $X_0(\omega)$ que impõe limite na relação entre os valores absolutos dos coeficientes Z_{aa} , Z_{bb} , Z_{ab} e Z_{ba} . Para deduzir essa desigualdade podemos definir o produto interno:

$$(\alpha(\omega), \beta(\omega)) = \int_0^\infty \alpha^*(\omega)\beta(\omega)J(\omega)d\omega, \quad (145)$$

pois essa operação, envolvendo as funções complexas $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ e a função real $J(\omega) = D(\omega)X_0(\omega)$, respeita as regras associadas ao produto interno, e portanto também respeita a desigualdade de Schwarz:

$$|(\alpha(\omega), \beta(\omega))|^2 \leq (\alpha(\omega), \alpha(\omega))(\beta(\omega), \beta(\omega)), \quad (146)$$

que pode ser escrita como:

$$(\alpha(\omega), \beta(\omega))(\beta(\omega), \alpha(\omega)) \leq (\alpha(\omega), \alpha(\omega))(\beta(\omega), \beta(\omega)), \quad (147)$$

portanto:

$$\int_0^\infty \alpha^*(\omega)\beta(\omega)J(\omega)d\omega \int_0^\infty \alpha(\omega)\beta^*(\omega)J(\omega)d\omega \leq \int_0^\infty \alpha^*(\omega)\alpha(\omega)J(\omega)d\omega \int_0^\infty \beta^*(\omega)\beta(\omega)J(\omega)d\omega,$$

o que corresponde a desigualdade:

$$Z_{ba}Z_{ab} \leq Z_{aa}Z_{bb}. \quad (148)$$

Os coeficientes de dissipação cruzada de sistemas que obedecem essas condições serão estudados, com mais detalhes, no capítulo seguinte.

O estudo detalhado dos coeficientes de dissipação cruzada corresponde à investigação da natureza da relação entre sistemas de dois modos e o ambiente. Ainda não existem experimentos sensíveis aos coeficientes de dissipação cruzada em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades. No capítulo

seguinte, está apresentada uma proposta de experimento, que utiliza ferramentas usualmente tratadas na literatura experimental, para a detecção dos coeficientes de dissipação cruzada. Dados experimentais que detectassem a relevância destes coeficientes contribuiriam na investigação da eficiência do modelo de Caldeira e Legget, que é largamente utilizado. A importância da realização de um experimento com esse objetivo ultrapassa a fronteira dos fundamentos de Mecânica Quântica, pois, os coeficientes de dissipação cruzada são essenciais no controle da dissipação e coerência de sistemas de dois modos, que tem aplicação direta na área de Informação Quântica.

Fatoração do Liouvilliano

Nesta seção mostraremos que a técnica de diferenciação de parâmetros pode ser usada na equação mestra (123), e assim é possível obter uma forma geral para o desenvolvimento da evolução temporal de sistemas submetidos a interações descritas pelo Liouvilliano \mathcal{L} .

Para superoperadores que formam uma algebra fechada sob comutação, ou seja, superoperadores que possuem comutadores $[\mathbf{O}_i, \mathbf{O}_j]$ que podem ser escritos como uma combinação linear de elementos de $\{\mathbf{O}_i\}$, podemos escrever:

$$e^{(\gamma_1 \mathbf{O}_1 + \gamma_2 \mathbf{O}_2 + \dots + \gamma_n \mathbf{O}_n)t} = e^{\varsigma_1(t) \mathbf{O}_1} e^{\varsigma_2(t) \mathbf{O}_2} \dots e^{\varsigma_n(t) \mathbf{O}_n}, \quad (149)$$

onde γ_i são coeficientes conhecidos, ς_i são os coeficientes a serem determinados e t é um parâmetro. O objetivo da técnica de diferenciação de parâmetros é explicitar relações entre os coeficientes conhecidos e desconhecidos.

Diferenciando os dois lados da equação (149):

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{O}_i \right) \exp \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{O}_i t \right) &= \dot{\varsigma}_1(t) \mathbf{O}_1 \prod_{i=1}^n e^{\varsigma_i(t) \mathbf{O}_i} \\ &+ \dot{\varsigma}_2(t) e^{\varsigma_1(t) \mathbf{O}_1} \mathbf{O}_2 \prod_{i=2}^n e^{\varsigma_i(t) \mathbf{O}_i} \\ &+ \dots \\ &+ \dot{\varsigma}_n(t) \prod_{i=1}^{n-1} e^{\varsigma_i(t) \mathbf{O}_i} \mathbf{O}_n e^{\varsigma_n(t) \mathbf{O}_n}. \end{aligned} \quad (150)$$

Podemos usar a transformação de similaridade

$$e^{x \mathbf{O}_j} \mathbf{O}_i e^{-x \mathbf{O}_j} = e^{x[\mathbf{O}_j, \bullet]} \mathbf{O}_i, \quad (151)$$

para escrever cada termo do lado direito da equação (150) como um produto $f_j \prod_{i=1}^n e^{\varsigma_i(t)\mathbf{O}_i}$ onde $f_j \equiv f_j(\varsigma_1(t), \varsigma_2(t), \dots, \varsigma_{j-1}(t), \{\mathbf{O}_i\})$. Como exemplo faremos esse passo para o segundo termo da equação (150).

$$\begin{aligned} e^{\varsigma_1(t)\mathbf{O}_1}\mathbf{O}_2 &= e^{\varsigma_1(t)\mathbf{O}_1}\mathbf{O}_2 e^{-\varsigma_1(t)\mathbf{O}_1} e^{\varsigma_1(t)\mathbf{O}_1} \\ &= e^{\varsigma(t)[\mathbf{O}_1, \bullet]}\mathbf{O}_2 e^{\varsigma_1(t)\mathbf{O}_1} \\ &\equiv f_2(\varsigma_1(t), \{\mathbf{O}_i\}) e^{\varsigma_1(t)\mathbf{O}_1}. \end{aligned} \quad (152)$$

Realizando operações similares para todos os outros termos e definindo:

$$f_3 \equiv f_3(\varsigma_1(t), \varsigma_2(t), \{\mathbf{O}_i\}), \dots, f_n \equiv f_n(\varsigma_1(t), \varsigma_2(t), \dots, \varsigma_{n-1}(t), \{\mathbf{O}_i\}), \quad (153)$$

podemos finalmente escrever:

$$\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{O}_i \right) \exp \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{O}_i t \right) = (\dot{\varsigma}_1 \mathbf{O}_1 + \dot{\varsigma}_2 f_2 + \dots \dot{\varsigma}_n f_n) \prod_{i=1}^n e^{\varsigma_i(t)\mathbf{O}_i}, \quad (154)$$

lembrando que:

$$\exp \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{O}_i t \right) = \prod_{i=1}^n e^{\varsigma_i(t)\mathbf{O}_i}, \quad (155)$$

podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{O}_i = \dot{\varsigma}_1 \mathbf{O}_1 + \dot{\varsigma}_2 f_2 + \dots \dot{\varsigma}_n f_n. \quad (156)$$

Comparando os coeficientes de cada \mathbf{O}_i , usando a independência linear, obtemos um sistema de equações diferenciais acopladas para os ς_i .

O superoperador \mathcal{L} dado em (124) é uma combinação linear de superoperadores que compõem um conjunto fechado sob comutação, assim podemos aplicar a técnica de diferenciação de parâmetros e descobrir quais coeficientes tornam possível a expressão:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= e^{\mathcal{L}t} \rho_S(0) \\ &= e^{h_1(t)a \bullet a^\dagger} e^{h_2(t)b \bullet b^\dagger} e^{z_1(t)a \bullet b^\dagger} e^{z(t)b \bullet a^\dagger} e^{n_l(t) \bullet a^\dagger b} e^{n(t)b^\dagger a \bullet} \\ &\quad e^{m_2(t)b^\dagger b \bullet} e^{p_2(t) \bullet b^\dagger b} e^{m_1(t)a^\dagger a \bullet} e^{p_1(t) \bullet a^\dagger a} e^{q(t)a^\dagger b \bullet} e^{q_l(t) \bullet b^\dagger a} \rho_S(0). \end{aligned} \quad (157)$$

Usando o método descrito acima, encontramos o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas [28]:

$$\begin{aligned}
i(\Delta_{aa} - \omega_a) - K_{aa} &= \dot{m}_1(t) - n(t) \dot{q}(t) e^{m_1(t) - m_2(t)}, \\
i(\Delta_{bb} - \omega_b) - K_{bb} &= \dot{m}_2(t) + n(t) \dot{q}(t) e^{m_1(t) - m_2(t)}, \\
i\Delta_{ab} - K_{ab} &= \dot{q}(t) e^{m_1(t) - m_2(t)}, \\
i\Delta_{ba} - K_{ba} &= \dot{n}(t) + n(t) (\dot{m}_1(t) - \dot{m}_2(t)) - n(t)^2 \dot{q}(t) e^{m_1(t) - m_2(t)}, \\
i(\omega_a - \Delta_{aa}) - K_{aa} &= \dot{p}_1(t) - n_l(t) \dot{q}_l(t) e^{p_1(t) - p_2(t)}, \\
i(\omega_b - \Delta_{bb}) - K_{bb} &= \dot{p}_2(t) + n_l(t) \dot{q}_l(t) e^{p_1(t) - p_2(t)}, \\
-i\Delta_{ab} - K_{ab} &= \dot{q}_l(t) e^{p_1(t) - p_2(t)}, \\
-i\Delta_{ba} - K_{ba} &= \dot{n}_l(t) + n_l(t) (\dot{p}_1(t) - \dot{p}_2(t)) - n_l(t)^2 \dot{q}_l(t) e^{p_1(t) - p_2(t)}, \\
2K_{aa} &= z(t) (i\Delta_{ba} - K_{ba}) \\
&\quad - z_l(t) (i\Delta_{ba} + K_{ba}) + h_1(t) (-2K_{aa}) + \dot{h}_1(t), \\
2K_{bb} &= z_l(t) (i\Delta_{ab} - K_{ab}) \\
&\quad - z(t) (i\Delta_{ab} + K_{ab}) + h_2(t) (-2K_{bb}) + \dot{h}_2(t), \\
i(\Delta_{ba} - \Delta_{ab}) + K_{ba} + K_{ab} &= z(t) (i(\omega_a - \Delta_{aa} - \omega_b + \Delta_{bb}) - K_{aa} - K_{bb}) \\
&\quad - h_2(t) (i\Delta_{ba} + K_{ba}) + h_1(t) (i\Delta_{ab} - K_{ab}) + \dot{z}(t), \\
i(\Delta_{ab} - \Delta_{ba}) + K_{ab} + K_{ba} &= z_l(t) (i(\omega_b - \Delta_{bb} - \omega_a + \Delta_{aa}) - K_{bb} - K_{aa}) \\
&\quad - h_1(t) (i\Delta_{ab} + K_{ab}) + h_2(t) (i\Delta_{ba} - K_{ba}) + \dot{z}_l(t).
\end{aligned}$$

A solução é:

$$\begin{aligned}
n(t) &= \frac{Q_2(t)}{M_1(t)}, & q(t) &= \frac{Q_1(t)}{M_1(t)}, \\
e^{m_1(t)} &= M_1(t), & e^{m_2(t)} &= e^{-2Rt} e^{-m_1(t)}, \\
h_1(t) &= (|M_2(t)|^2 + |Q_2(t)|^2) e^{4k_m t} - 1, \\
h_2(t) &= (|M_1(t)|^2 + |Q_1(t)|^2) e^{4k_m t} - 1, \\
z(t) &= -(Q_1(t) M_2^*(t) + Q_2^*(t) M_1(t)) e^{4k_m t}, \\
z_l(t) &= z^*(t), \\
n_l(t) &= (n(t))^*, & q_l(t) &= (q(t))^*, \\
p_2(t) &= (m_2(t))^*, & p_1(t) &= (m_1(t))^*,
\end{aligned} \tag{158}$$

onde:

$$\begin{aligned}
M_1(t) &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{c}{r}\right) e^{\lambda-t} + \left(1 + \frac{c}{r}\right) e^{\lambda+t} \right], \\
M_2(t) &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{c}{r}\right) e^{\lambda-t} + \left(1 - \frac{c}{r}\right) e^{\lambda+t} \right], \\
Q_1(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{K_{ab} - i\Delta_{ab}}{r} \right) (e^{\lambda-t} - e^{\lambda+t}), \\
Q_2(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{K_{ba} - i\Delta_{ba}}{r} \right) (e^{\lambda-t} - e^{\lambda+t}), \tag{159}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lambda_- &= -R - r, & \lambda_+ &= -R + r, \\
c &= \frac{K_{bb} - K_{aa}}{2} + i \frac{(\omega_b - \Delta_{bb}) - (\omega_a - \Delta_{aa})}{2}, \\
r &= \sqrt{c^2 + (K_{ab} - i\Delta_{ab})(K_{ba} - i\Delta_{ba})}, \\
R &= \frac{K_{aa} + K_{bb}}{2} + i \frac{(\omega_a - \Delta_{aa}) + (\omega_b - \Delta_{bb})}{2}. \tag{160}
\end{aligned}$$

A dedução da equação mestra e a fatoração do Liouvilliano são as ferramentas suficientes para conhecermos a evolução temporal do operador de estado $\rho_S(t)$ dado um $\rho_S(0)$. No apêndice mostramos com detalhes a evolução temporal do operador de estado

$$\rho(0) = (A_1|0, 1\rangle + A_2|1, 0\rangle) (h.c), \tag{161}$$

que será utilizada no próximo capítulo.

4 Proposta Experimental

Neste capítulo está apresentada uma proposta experimental para observar a influência dos coeficientes de dissipação cruzada, presentes no Liouvilliano que modela a interação do ambiente com dois modos de campo eletromagnético.

Nesse experimento devem ser utilizadas duas cavidades de microondas supercondutoras idênticas A e B, portanto temos os coeficientes de dissipação das cavidades $K_{aa} = K_{bb} = K$, assim como as frequências de ressonância $\omega_a = \omega_b = \omega$ dos modos de campos eletromagnéticos M_a e M_b presentes nelas. Assim, podemos utilizar as aproximações discutidas no capítulo anterior:

$$\Delta_{aa} = \Delta_{bb} = 0, \quad (162)$$

$$K_{ab} = K_{ba}, \quad (163)$$

$$\Delta_{ab} = -\Delta_{ba}. \quad (164)$$

Também serão necessários átomos de 2 níveis (com frequência de ressonância ν) que serão utilizados na criação e medição dos estados dos campos eletromagnéticos armazenados nas cavidades A e B.

A influência dos coeficientes K_{ab} e Δ_{ab} na dissipação dos estados de superposição criados nas cavidades (estados do tipo $|\psi(\theta, \phi)\rangle = \cos\theta|01\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|10\rangle$) será explicitada por curvas que mostram uma dependência da perda de coerência como função do estado inicial, ou seja, um diferente decaimento para cada $|\psi(\theta, \phi)\rangle$.

A montagem experimental está mostrada na figura abaixo.

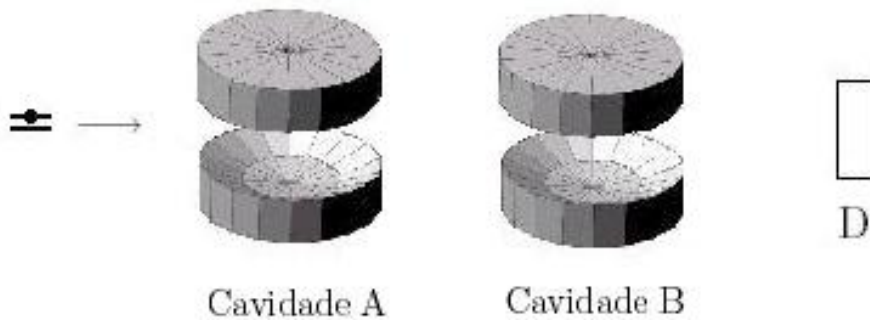


Figura 1: Montagem experimental que utiliza duas cavidades idênticas e um detector

Um átomo de dois níveis é lançado. Ele interage com o modo M_a na cavidade A, atravessa o espaço entre as cavidades, interage com o modo M_b na cavidade B e finalmente é detectado em D, pelo detector, que informa o estado atômico. Todas as interações entre átomo e campo serão tratadas como não dissipativas, já que elas acontecem durante um intervalo de tempo muito pequeno comparado ao tempo de decaimento nas cavidades, portanto as interações entre átomo e campo podem ser tratadas pelo modelo de Jaynes-Cummings (o conhecido sucesso teórico nas descrições envolvendo experimentos em cavidades de microondas em [34] e [35] reforçam a validade desta aproximação). As interações entre átomo e ambiente não serão considerada aqui, pois em experimentos desse tipo são utilizados átomos de Rydberg que possuem estados com tempo de vida de 30 ms, ou seja, apenas para tempos próximos a este as interações entre átomo e ambiente serão significativas, mas os tempos nesse tipo de experimento são muito menores.

Os Hamiltonianos que governam a dinâmica do estado em cada momento da travessia do átomo pela montagem experimental são:

- Durante a interação do átomo com o modo M_a na cavidade A:

$$H_1 = \frac{\hbar\omega\sigma_z}{2} + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega b^\dagger b + \hbar G (a|e\rangle\langle g| + a^\dagger|g\rangle\langle e|). \quad (165)$$

- Durante o intervalo entre as cavidades:

$$H_2 = \frac{\hbar\nu\sigma_z}{2} + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega b^\dagger b. \quad (166)$$

- Durante a interação do átomo com o modo M_b na cavidade B:

$$H_3 = \frac{\hbar\omega\sigma_z}{2} + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\omega b^\dagger b + \hbar G (b|e\rangle\langle g| + b^\dagger|g\rangle\langle e|). \quad (167)$$

Podemos notar que a transição atômica é ressonante com as cavidades em H_1 e H_3 (onde o termo de interação entre átomo e campo está presente), mas não é ressonante em H_2 (onde o termo de interação entre átomo e campo não está presente). Isso se deve às alterações na frequência de ressonância do átomo, que são feitas através do efeito Stark. Se no experimento forem utilizados átomos e campos que obedecem a condição: $|\omega - \nu| \gg G$, poderemos considerar como dispersiva a interação entre átomo e campo nos momentos em que a frequência de transição atômica for diferente da frequência de ressonância das cavidades.

Antes de interagir com o modo M_a ou depois de interagir com o modo M_b , o sistema átomo-campo estará submetido ao Hamiltoniano H_2 , mas tanto na criação quanto na detecção dos estados, nos momentos em que o átomo atravessa essas regiões, o sistema pode ser representado por um auto-estado de H_2 , sendo assim a evolução temporal nessas regiões gera apenas uma fase global, o que não acontece na região entre as cavidades, como será discutido com mais detalhes abaixo.

O esquema experimental descrito aqui será utilizado na criação e detecção dos estados.

4.1 Preparação do estado

O átomo de dois níveis deve ser lançado no estado excitado $|e\rangle$ e as duas cavidades devem estar no estado de vácuo, portanto o estado inicial do sistema é:

$$|\psi(0)_p\rangle = |e\rangle \otimes |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B = |e, 0, 0\rangle. \quad (168)$$

Após interagir com o modo M_a pelo tempo t_1 o estado do sistema será:

$$|\psi_p(t_1)\rangle = \cos \frac{\Omega_0 t_1}{2} |e, 0, 0\rangle - i \sin \frac{\Omega_0 t_1}{2} |g, 1, 0\rangle. \quad (169)$$

Durante a travessia do átomo pelo espaço entre as cavidades, será acumulada uma fase relativa gerada pela evolução temporal do estado $|\psi(t_1)\rangle$ dada pelo hamiltoniano H_2 , que atua durante o intervalo de tempo t_2 . Assim, o estado do sistema imediatamente antes de interagir com o modo M_b será:

$$|\psi_p(t_2)\rangle = e^{\frac{-i\nu t_2}{2}} \cos \theta |e, 0, 0\rangle - i e^{\frac{i\nu t_2}{2}} e^{-i\omega t_2} \sin \theta |g, 1, 0\rangle. \quad (170)$$

A menos de uma fase global:

$$|\psi_p(t_2)\rangle = \cos \theta |e, 0, 0\rangle - i e^{i\phi} \sin \theta |g, 1, 0\rangle, \quad (171)$$

onde

$$\theta = \frac{\Omega_0 t_1}{2}, \quad (172)$$

$$\phi = (\nu - \omega)t_2. \quad (173)$$

Ajustando o tempo de interação com o modo M_b para

$$t_3 = \frac{\pi}{\Omega_0}, \quad (174)$$

obtemos o estado final, a menos de uma fase global:

$$|\psi_p(t_3)\rangle = \cos\theta|g, 0, 1\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|g, 1, 0\rangle. \quad (175)$$

Quando o estado atômico g é medido pelo detector, o estado do campo nas cavidades é descrito por:

$$|\psi(\theta, \phi)\rangle = \cos\theta|0, 1\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1, 0\rangle. \quad (176)$$

4.2 Detecção dos estados

A detecção dos estados nas cavidades é feita através da passagem de um segundo átomo de dois níveis, similar ao primeiro, mas com estado inicial $|g\rangle$.

O estado $|\psi(\theta, \phi)\rangle$ criado nas cavidades está sujeito à interação com o ambiente, assim ele perde coerência e energia. Se desconsiderarmos a atuação do ambiente, podemos ajustar os tempos de interação com o modo M_a (t'_1), com o modo M_b (t'_3) e o tempo em que o átomo atravessa o espaço entre as duas cavidades (t'_2) para que o segundo átomo seja sempre detectado em D no estado $|e\rangle$.

Imediatamente antes de interagir com o modo M_a , o sistema átomo campo pode ser representado pelo vetor de estado:

$$|\psi_d(0)\rangle = \cos\theta|g, 1, 0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|g, 0, 1\rangle. \quad (177)$$

Logo após a interação do átomo com o modo M_a pelo tempo $t'_1 = \frac{3\pi}{\Omega_0}$, o estado do sistema evolui para:

$$|\psi_d(t'_1)\rangle = \cos\theta|g, 1, 0\rangle + ie^{i\phi}\sin\theta|e, 0, 0\rangle. \quad (178)$$

Se o tempo em que o segundo átomo atravessa o espaço livre entre as duas cavidades for igual ao tempo gasto pelo primeiro, ou seja, se $t'_2 = t_2$, o estado do sistema antes da interação do segundo átomo com o modo M_b é, a menos de uma fase global:

$$|\psi_d(t'_2)\rangle = \cos\theta|g, 1, 0\rangle + i\sin\theta|e, 0, 0\rangle. \quad (179)$$

Ajustando agora o tempo de interação com o modo M_b para $t'_3 = \frac{2\theta-\pi}{\Omega_0}$, o estado final será, a menos de uma fase global:

$$|\psi_d(t'_3)\rangle = |e, 0, 0\rangle. \quad (180)$$

Assim, o estado atômico a ser medido em D será sempre $|e\rangle$, portanto a probabilidade condicional de medir o estado atômico do segundo átomo em $|e\rangle$ após o primeiro ter sido detectado em $|g\rangle$ será:

$$P_{ge} = 1. \quad (181)$$

Se a interação entre o estado $|\psi(\theta, \phi)\rangle$ criado nas cavidades e o ambiente não puder ser desconsiderada a, probabilidade condicional com valor 1 ($P_{ge} = 1$) não será esperada.

Consideraremos que a dissipação devido ao ambiente atua apenas durante o intervalo de tempo entre a detecção do primeiro átomo e início da interação com o segundo. Como já foi dito, durante a passagem do átomo pelas cavidades os efeitos da interação com o ambiente são desprezíveis. Sendo assim a interação do sistema de interesse com o ambiente ocorre durante um período de tempo bem controlado.

Como foi mostrado em seções anteriores, o liouvilliano que modela essa interação depende dos coeficientes K_{ab} , K_{ba} , Δ_{ab} e Δ_{ba} .

Para um tempo (t_c) fixo de interação com o ambiente, a evolução temporal livre de $|\psi(\theta, \phi)\rangle$ gera o operador de estado:

$$\rho(t_c) = \eta^* \eta |g, 1, 0\rangle \langle g, 1, 0| + \mu^* \mu |g, 0, 1\rangle \langle g, 0, 1| + \chi |g, 0, 0\rangle \langle g, 0, 0| + (\eta \mu^* |g, 1, 0\rangle \langle g, 0, 1| + H.C.), \quad (182)$$

sendo:

$$\eta = e^{i\phi} M \sin \theta + Q_1 \cos \theta, \quad (183)$$

$$\mu = M \cos \theta + e^{i\phi} Q_2 \sin \theta, \quad (184)$$

$$\chi = |\cos \theta|^2 + |e^{i\phi} \sin \theta|^2 - |M e^{i\phi} \sin \theta + Q_1 \cos \theta|^2 - |M \cos \theta + Q_2 e^{i\phi} \sin \theta|^2, \quad (185)$$

$$M = M_1 = M_2 = \frac{1}{2}(e^{\lambda_- t_c} + e^{\lambda_+ t_c}), \quad (186)$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} \frac{K_{ab} - i\Delta_{ab}}{|K_{ab} - i\Delta_{ab}|} (e^{\lambda_- t_c} - e^{\lambda_+ t_c}), \quad (187)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \frac{K_{ab} + i\Delta_{ab}}{|K_{ab} + i\Delta_{ab}|} (e^{\lambda_- t_c} - e^{\lambda_+ t_c}), \quad (188)$$

$$\lambda_- = -K - i\omega_a - r, \quad (189)$$

$$\lambda_+ = -K - i\omega_a + r, \quad (190)$$

$$r = |K_{ab} + i\Delta_{ab}|, \quad (191)$$

e lembrando que nas equações acima $K_{ab} = K_{ba}$, $\Delta_{ab} = -\Delta_{ba}$ e $K_{aa} = K_{bb} = K$.

Após o tempo t_c , o segundo átomo começa a interagir com o estado $\rho(t_c)$ pelos tempos t'_1 , t'_2 e t'_3 calculados anteriormente. Sendo assim, o estado do sistema após a passagem do segundo átomo pode ser calculado através de evoluções temporais unitárias:

$$\rho(t_f) = e^{-\frac{iH_3 t'_3}{\hbar}} e^{-\frac{iH_2 t'_2}{\hbar}} e^{-\frac{iH_1 t'_1}{\hbar}} (|g\rangle\langle g| \otimes \rho(t_c)) e^{\frac{iH_1 t'_1}{\hbar}} e^{\frac{iH_2 t'_2}{\hbar}} e^{\frac{iH_3 t'_3}{\hbar}}. \quad (192)$$

A probabilidade condicional P_{ge} será:

$$P_{ge} = Tr_a[|e\rangle\langle e| Tr_c(\rho(t_f))], \quad (193)$$

onde Tr_a e Tr_c representam, respectivamente, traço parcial no subespaço do átomo e do campo.

Assim:

$$P_{ge}(t_c) = \left| \frac{1}{2} (e^{(-K+r)t_c} + e^{(-K-r)t_c}) + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} (e^{(-K-r)t_c} - e^{(-K+r)t_c}) (K_{ab} \cos \phi - \Delta_{ab} \sin \phi) \right|^2. \quad (194)$$

A probabilidade condicional $P_{ge}(t_c)$, calculada acima, é sensível aos coeficientes K_{ab} e Δ_{ab} , que desempenham um importante papel na modelagem do acoplamento entre campo e ambiente. A probabilidade ainda é função das variáveis θ e ϕ , que nos dão grande liberdade para avaliar especificamente cada um dos coeficientes. Uma forma direta de avaliá-los seria através de curvas a serem obtidas a partir de dados experimentais. Através dessas curvas podemos também identificar quais estados do tipo $|\psi(\theta, \phi)\rangle$ são mais resistentes à dissipação quando estão submetidos a certas condições específicas do ambiente.

4.3 Avaliando a influência dos coeficientes K_{ab} e Δ_{ab}

Os coeficientes K_{ab} e Δ_{ab} são responsáveis pela diferença na intensidade do acoplamento entre estados do tipo $|\psi(\theta, \phi)\rangle$ e ambiente. Se esses coeficientes forem nulos, as curvas de decaimento dos estados do tipo $|\psi(\theta, \phi)\rangle$, submetidos às mesmas interações com o ambiente, serão idênticas. Isso será refletido na probabilidade $P_{ge}(t_c)$ e esta não dependerá de θ e ϕ . Se forem construídas

curvas de $P_{ge}(t_c) \times \theta$ ou $P_{ge}(t_c) \times \phi$, através de dados experimentais, e essas curvas mostrarem oscilações nos valores de $P_{ge}(t_c)$, poderemos usar a expressão (194) para conhecer os valores dos coeficientes K_{ab} e Δ_{ab} .

Ajustando ϕ podemos observar mais diretamente a influência de cada coeficiente (K_{ab} ou Δ_{ab}) nos valores de $P_{ge}(t_c)$. Se $\phi = 2\pi n$ (onde $n = 1, 2, 3, \dots$) na expressão (194)

$$P_{ge}(t_c) = \left| \frac{1}{2}(e^{(-K+r)t_c} + e^{(-K-r)t_c}) + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r}(e^{(-K-r)t_c} - e^{(-K+r)t_c})K_{ab} \right|^2, \quad (195)$$

fica claro que o valor de K_{ab} tem maior peso do que Δ_{ab} . Para analisar a relação entre $P_{ge}(t_c)$ e K_{ab} , nesse caso particular, está apresentada em G1 uma seqüência de gráficos com K_{ab} variando de 0 a K e $\Delta_{ab} = 0$. Podemos observar que quando condições para o subespaço livre de decoerência forem obedecidas, ou seja, quando $K_{ab} = K, \Delta_{ab} = 0, \theta = \frac{3\pi}{4} + n\pi, \phi = 2\pi n$, a probabilidade condicional $P_{ge}(t_c)$ será igual a um (a curva tem amplitude máxima).

Na seqüência de gráficos G2 com variação de valores negativos de K_{ab} , o comportamento da amplitude das curvas é muito semelhante ao observado em G1. Há apenas uma diferença de fase, relacionada à inversão de papéis dos estados $|\psi(\frac{\pi}{4} + n\pi, 2\pi n)\rangle$, que para $K_{ab} > 0$ é o estado menos resistente à ação do ambiente e o mais resistente para $K_{ab} < 0$, e $|\psi(\frac{3\pi}{4} + n\pi, 2\pi n)\rangle$, que para $K_{ab} > 0$ é o estado mais resistente à ação do ambiente e o menos resistente para $K_{ab} < 0$. As condições para subespaço livre de decoerência em G2 são: $K_{ab} = K, \Delta_{ab} = 0, \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi, \phi = 2\pi n$.

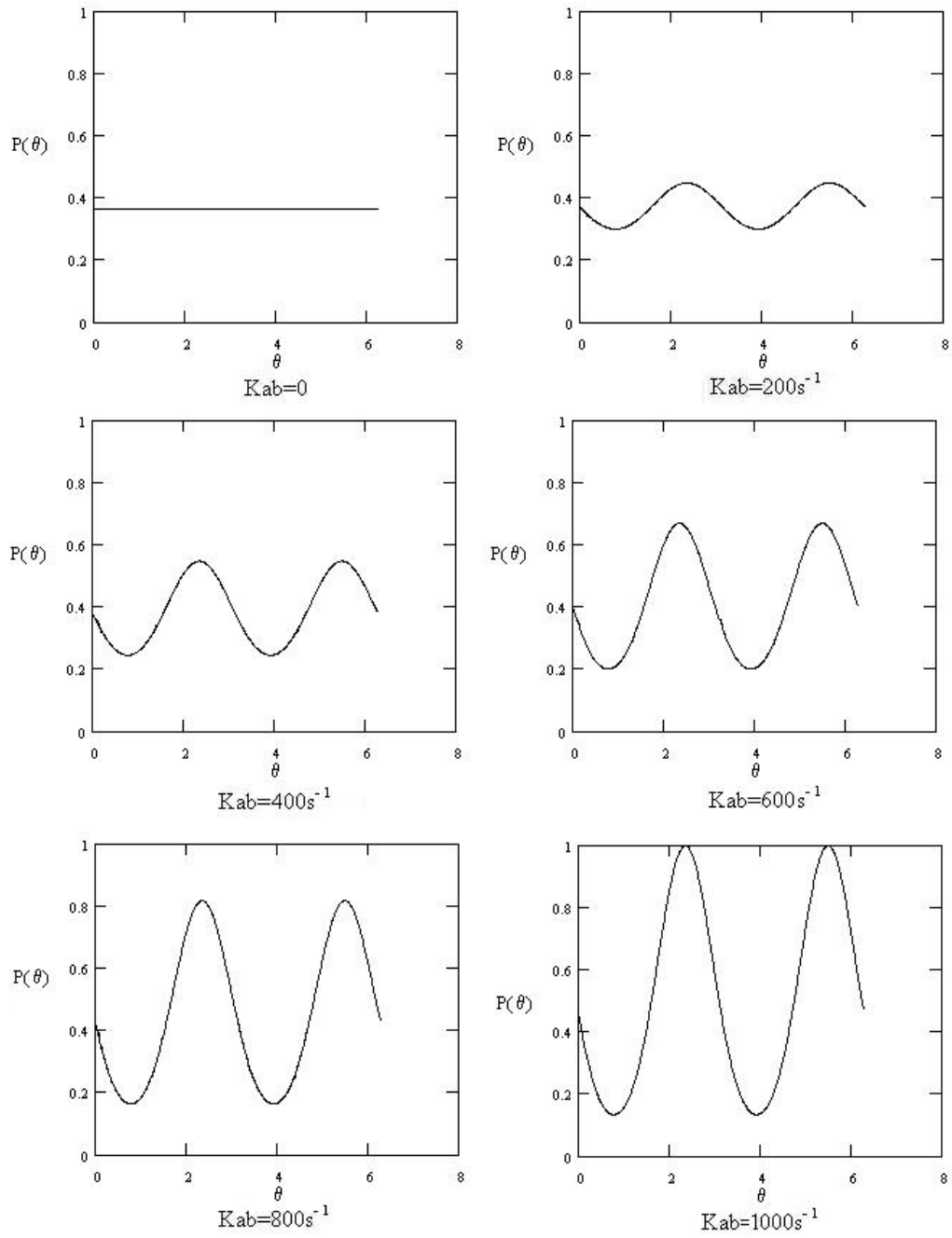
Para analisar exclusivamente a influência de Δ_{ab} , consideramos $\phi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ na expressão (194). Assim:

$$P_{ge}(t_c) = \left| \frac{1}{2}(e^{(-K+r)t_c} + e^{(-K-r)t_c}) - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r}(e^{(-K-r)t_c} - e^{(-K+r)t_c})\Delta_{ab} \right|^2, \quad (196)$$

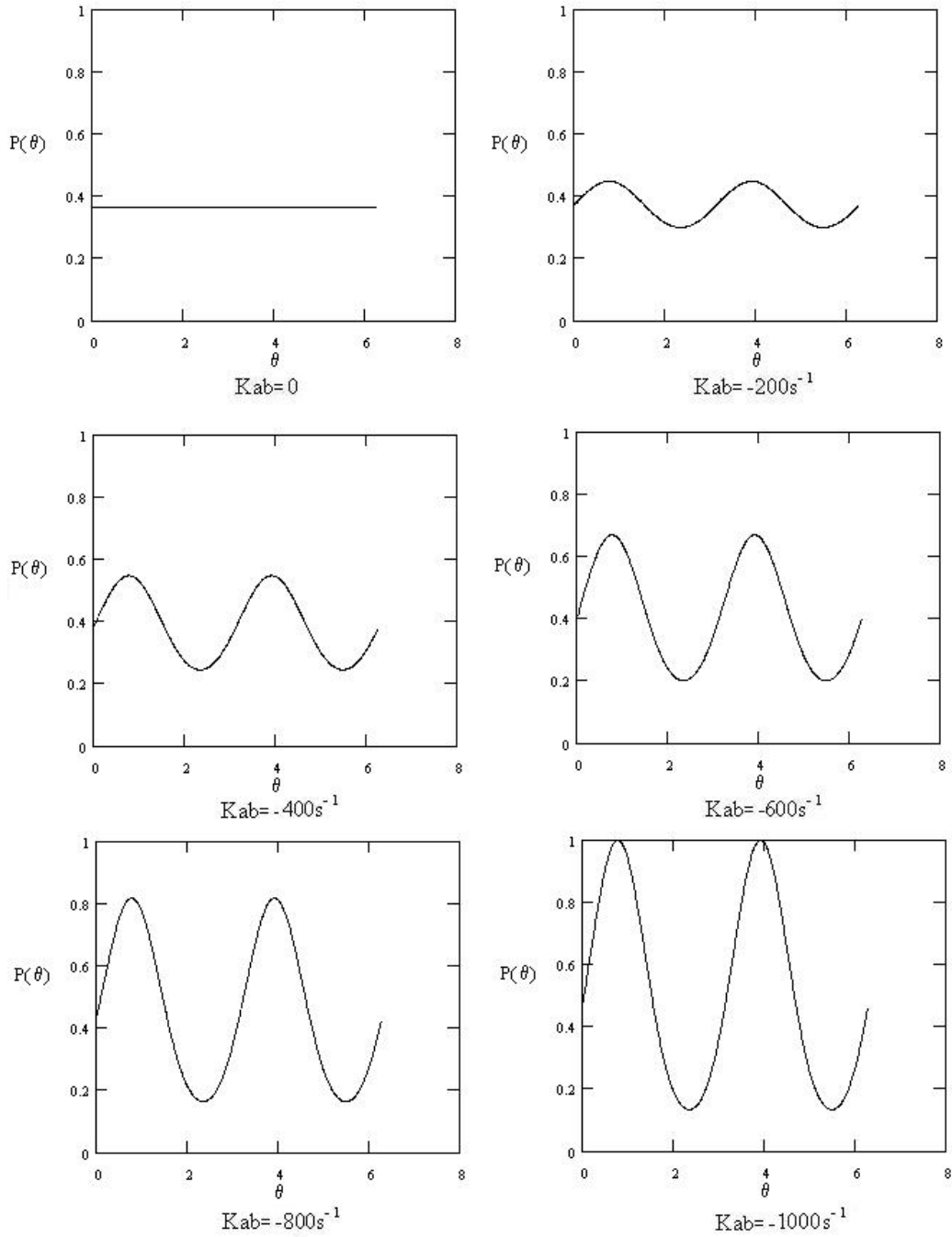
fica claro que o valor de Δ_{ab} tem maior peso do que K_{ab} nesta expressão.

Na seqüência de gráficos G3 destacamos o comportamento da amplitude das curvas devido à variação nos valores de Δ_{ab} . É interessante notar que as condições $\Delta_{ab} = K, K_{ab} = 0, \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi, \phi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ geram um subespaço livre de decoerência.

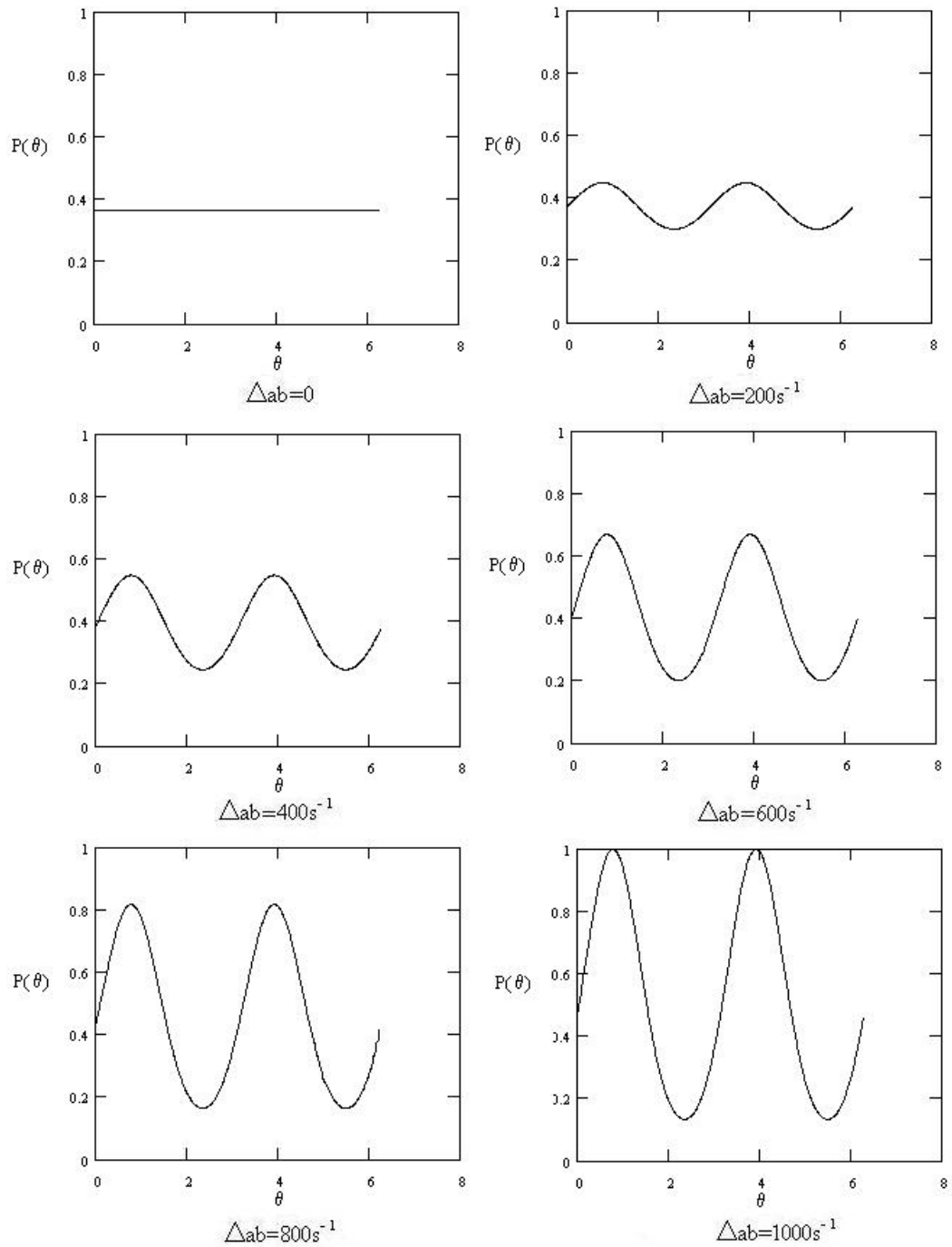
O comportamento das curvas com variação nos valores de Δ_{ab} negativos é o mesmo observado em K_{ab} negativo.



G1: Para valores de $K = 1,0 \times 10^3 s^{-1}$, $\Delta_{ab} = 0$,
 $t_c = 5,0 \times 10^{-4} s$, $\phi = 2\pi n$



G2: Para valores de $K = 1,0 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$, $\Delta_{ab} = 0$,
 $t_c = 5,0 \times 10^{-4} \text{ s}$, $\phi = 2\pi n$



G3: Para valores de $K = 1,0 \times 10^3 s^{-1}$, $K_{ab} = 0$,
 $t_c = 5,0 \times 10^{-4} s$, $\phi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Analisando as seqüências de gráficos G1, G2 e G3 podemos concluir que existe o seguinte padrão entre elas, a amplitude das curvas está relacionada exclusivamente a relação entre os valores de K e de $r = |K_{ab} + i\Delta_{ab}|$. Portanto, quando r é muito menor do que K a amplitude da curva será muito pequena, ou seja, a intensidade do acoplamento entre campo e ambiente para estados do tipo $|\psi(\theta, \phi)\rangle$ será aproximadamente independente de θ e de ϕ . Quando $r = K$ temos um subespaço livre de decoerência, e a variação da intensidade do acoplamento entre campo e ambiente para estados do tipo $|\psi(\theta, \phi)\rangle$ será máxima.

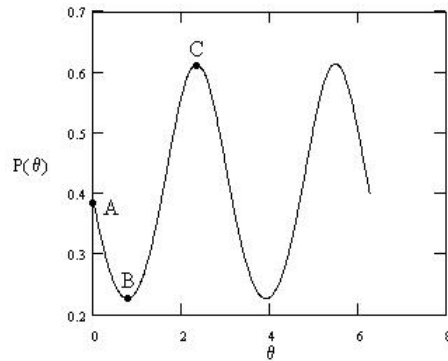
4.4 Identificando estados resistentes

Como foi mostrado anteriormente, a intensidade da interação entre campo e ambiente de estados do tipo $|\psi(\theta, \phi)\rangle$ depende de θ e ϕ . Através do procedimento experimental proposto anteriormente, podemos controlar essas variáveis com grande liberdade. Sendo assim é possível acompanhar e comparar o decaimento de diversos estados de campo nas cavidades.

Sabemos que estados do tipo $|\psi(\theta, n\pi)\rangle = \cos\theta|0, 1\rangle \pm \sin\theta|1, 0\rangle$ apresentam uma interação com o ambiente mais sensível a K_{ab} e estados do tipo $|\psi(\theta, \frac{\pi}{2} + n\pi)\rangle = \cos\theta|0, 1\rangle \pm i\sin\theta|1, 0\rangle$ (+ para n par, - para n ímpar) apresentam uma interação mais sensível a Δ_{ab} , e que sob certas condições alguns desses estados ficam completamente protegidos da ação do ambiente (condições para subespaço livre de decoerência). Mas mesmo que essas condições não sejam alcançadas, podemos identificar estados mais resistentes à ação do ambiente. Nesta seção serão feitas estimativas, de acordo com as restrições impostas pela teoria (discutida no capítulo 3) para valores de K_{ab} e Δ_{ab} . As condições específicas do ambiente que tornam essas estimativas possíveis não serão discutidas aqui.

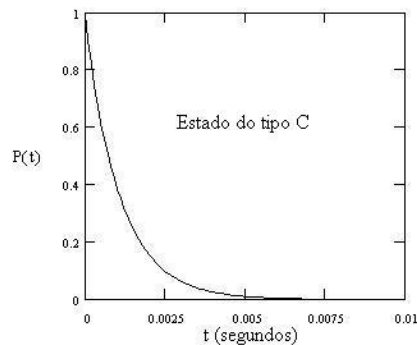
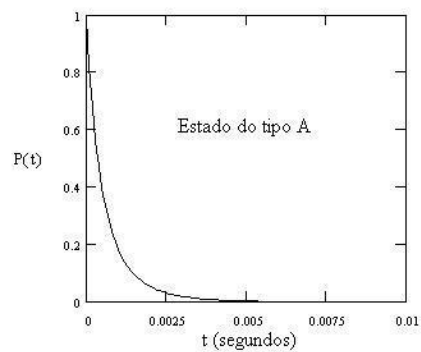
Na seqüência de gráficos G1 observamos o comportamento de estados com $\phi = 2\pi n$. Analisando um gráfico semelhante, podemos destacar três tipos de estados:

- Estados do tipo A: $|0, 1\rangle$ ou $|1, 0\rangle$
- Estados do tipo B: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 1\rangle + |1, 0\rangle)$
- Estados do tipo C: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 1\rangle - |1, 0\rangle)$



G4: Para valores de $K = 1,0 \times 10^3 s^{-1}$, $K_{ab} = 0,7 \times 10^3 s^{-1}$,
 $\Delta_{ab} = 0$, $t_c = 5,0 \times 10^{-4} s$, $\phi = 2\pi n$

Podemos perceber que os estados do tipo B são menos resistentes à ação do ambiente, os estados do tipo A têm uma resistência média, e os estados do tipo C são os mais resistentes. Esse comportamento é confirmado pela forma das curvas $P_{ge}(t) \times t$ de cada estado.

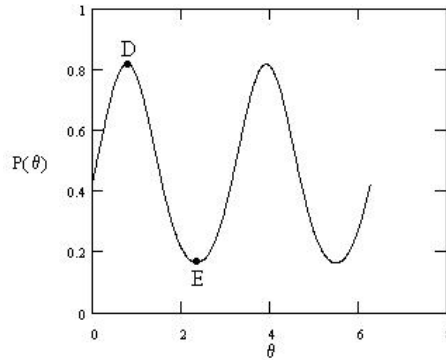


G5: Para valores de $K = 1,0 \times 10^3 s^{-1}$, $K_{ab} = 0,7 \times 10^3 s^{-1}$,
 $\Delta_{ab} = 0$, $\phi = 2\pi n$

Os estados B e C apresentam um comportamento mais sensível a K_{ab} . Podemos usar o grau de liberdade em ϕ para comparar outros tipos de estados, como estados mais sensíveis a Δ_{ab} .

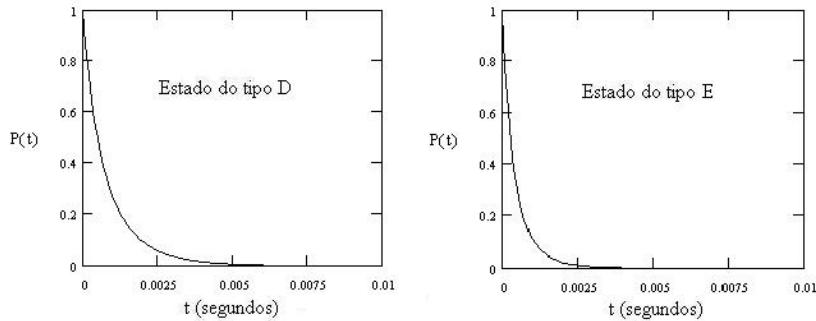
Na sequência de gráficos G3 observamos o comportamento de estados com $\phi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Analisando um desses gráficos podemos destacar mais 2 tipos de estados:

- Estados do tipo D: $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle + i|1, 0\rangle)$
- Estados do tipo E: $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle - i|1, 0\rangle)$



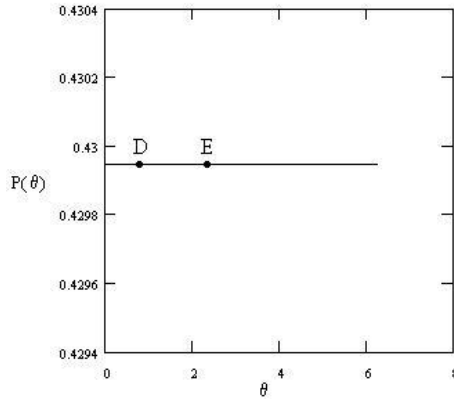
G6: Para valores de $K = 1,0 \times 10^3 s^{-1}$, $K_{ab} = 0$, $\Delta_{ab} = 0,8 \times 10^3 s^{-1}$, $t_c = 5,0 \times 10^{-4} s$, $\phi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

O valor do coeficiente Δ_{ab} ajuda na preservação de estados do tipo D, que portanto são mais resistente à ação do ambiente do que estados do tipo E, o que é confirmado pelas curvas de decaimento.

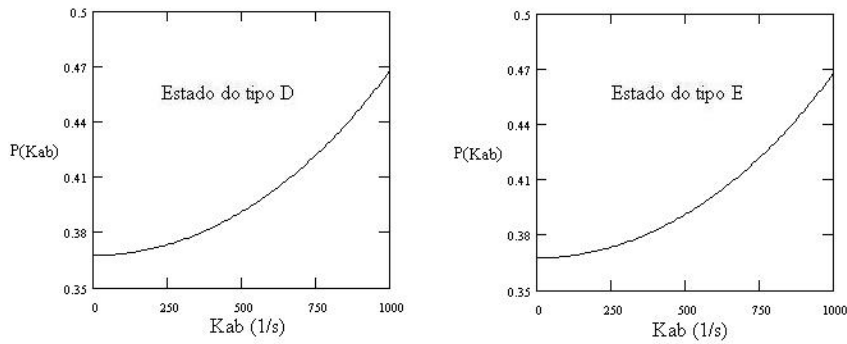


G7: Para valores de $K = 1,0 \times 10^3 s^{-1}$, $K_{ab} = 0$, $\Delta_{ab} = 0,8 \times 10^3 s^{-1}$, $\phi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Os coeficientes K_{ab} contribuem igualmente na preservação de estados do tipo D e E, a diferença na intensidade do acoplamento com o ambiente desses estados é provocada exclusivamente por Δ_{ab} . Os gráficos abaixo comprovam esse fato.



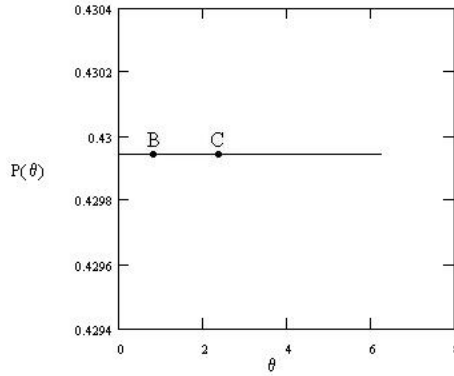
G8: Para valores de $K = 1,0 \times 10^3 s^{-1}$, $K_{ab} = 0,8 \times 10^3 s^{-1}$, $\Delta_{ab} = 0$, $t_c = 5,0 \times 10^{-4} s$, $\phi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$



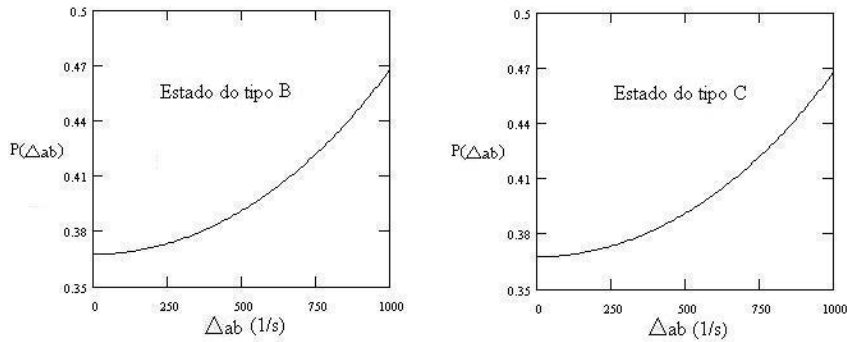
G9: Para valores de $K = 1,0 \times 10^3 s^{-1}$, $\Delta_{ab} = 0$, $t_c = 5,0 \times 10^{-4} s$

Quando $\Delta_{ab} = 0$, a intensidade do acoplamento de estados do tipo D e E com o ambiente é a mesma. Também podemos observar que as curvas, com valores de K_{ab} variável, para estados do tipo D e E são idênticas, ou seja, cada valor desse coeficiente contribuiu igualmente para os dois estados.

O mesmo pode ser dito para Δ_{ab} e os estados do tipo B e C.



G10: Para valores de $K = 1,0 \times 10^3 s^{-1}$, $\Delta_{ab} = 0,8 \times 10^3 s^{-1}$,
 $K_{ab} = 0$, $t_c = 5,0 \times 10^{-4} s$, $\phi = 2\pi n$



G11: Para valores de $K = 1,0 \times 10^3 s^{-1}$, $K_{ab} = 0$,
 $t_c = 5,0 \times 10^{-4} s$

Os estados do tipo A recebem contribuições iguais de Δ_{ab} e K_{ab} para a proteção contra a ação do ambiente.

4.5 Explicitando os Estados Resistentes e os Subespaços Livres de Decoerência

Nos restringimos, até este ponto, a análises gráficas do comportamento dos estados resistentes. Vamos agora apresentar argumentos que tornam mais clara a presença destes estados no modelo.

Inicialmente vamos escrever os coeficientes de dissipação cruzada da seguinte forma:

$$re^{i\gamma} = K_{ab} + i\Delta_{ab}. \quad (197)$$

Em seguida vamos definir os operadores \mathbf{A} e \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a - e^{-i\gamma}b), \quad (198)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\gamma}a + b), \quad (199)$$

que respeitam as regras de comutação dos operadores bosônicos, portanto:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] &= [\mathbf{B}, \mathbf{B}^\dagger] = 1, \\ [\mathbf{A}, \mathbf{B}] &= [\mathbf{A}, \mathbf{B}^\dagger] = 0 = [\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{B}] = [\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{B}^\dagger], \\ [\mathbf{B}, \mathbf{A}] &= [\mathbf{B}, \mathbf{A}^\dagger] = 0 = [\mathbf{B}^\dagger, \mathbf{A}] = [\mathbf{B}^\dagger, \mathbf{A}^\dagger]. \end{aligned}$$

O operador $\mathbf{A}^\dagger(\mathbf{A})$ é o operador de criação (aniquilação) do modo M_A , e o operador $\mathbf{B}^\dagger(\mathbf{B})$ é o operador de criação (aniquilação) do modo M_B .

Escrevendo os operadores a e b em função de \mathbf{A} e \mathbf{B} , usando a relação (197) e substituindo na expressão do Liouvilliano, obtemos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B, \quad (200)$$

$$\mathcal{L}_A = (K - r)(2\mathbf{A} \bullet \mathbf{A}^\dagger - \bullet \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} - \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \bullet) + i\omega[\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}, \bullet], \quad (201)$$

$$\mathcal{L}_B = (K + r)(2\mathbf{B} \bullet \mathbf{B}^\dagger - \bullet \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B} - \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B} \bullet) + i\omega[\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}, \bullet]. \quad (202)$$

Os termos escritos em forma de comutadores em \mathcal{L}_A e \mathcal{L}_B estão associados à evolução unitária, enquanto os outros termos estão associados ao decaimento. A constante de decaimento relacionada a \mathcal{L}_A ($K - r$) é menor do que a constante de decaimento relacionada a \mathcal{L}_B ($K + r$). Portanto, estados que apresentam excitações apenas no modo M_A serão mais resistentes à ação do ambiente.

Um operador de estado do sistema pode ser escrito na base formada pelo produto tensorial entre : os autovetores do operador $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ ($\{|n_A\rangle\}_{n \in \mathbf{N}}$) e os autovetores do operador $\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}$ ($\{|n_B\rangle\}_{n \in \mathbf{N}}$).

A relação entre a representação do estado de vácuo do sistema na base usual (formada pelo produto tensorial entre os autovetores de $a^\dagger a$ e $b^\dagger b$) e a representação do estado de vácuo na base $\{|n_A\rangle \otimes |n_B\rangle\}$ é dada pela igualdade:

$$|0, 0\rangle \langle 0, 0| = |0_A\rangle \langle 0_A| \otimes |0_B\rangle \langle 0_B|. \quad (203)$$

Assim, os estados resistentes à ação do ambiente têm a forma:

$$\rho_S = \sum_{j,m} c_{j,m} (\mathbf{A}^\dagger)^j |0,0\rangle \langle 0,0| \mathbf{A}^m + h.c., \quad (204)$$

são relacionados a excitações apenas no modo M_A

Quando $K = r$, o coeficiente do termo responsável pela dissipação em \mathcal{L}_A é nulo, portanto esta condição gera um subespaço livre de decoerência. Estados formados por excitações apenas no modo M_A não perdem energia para os modos do ambiente e nem se entrelaçam com eles. Podemos observar esse efeito escrevendo a evolução temporal do operador de estado (204):

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= e^{\mathcal{L}t} \left[\sum_{j,m} c_{j,m} (\mathbf{A}^\dagger)^j |0,0\rangle \langle 0,0| \mathbf{A}^m + h.c. \right], \\ &= \left(e^{\mathcal{L}_A t} \sum_{j,m} c_{j,m} (\mathbf{A}^\dagger)^j |0_A\rangle \langle 0_A| \mathbf{A}^m \right) \otimes |0_B\rangle \langle 0_B| + h.c., \end{aligned} \quad (205)$$

onde usamos:

$$[\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B] = 0, \quad (206)$$

$$e^{\mathcal{L}_B t} |0_B\rangle \langle 0_B| = |0_B\rangle \langle 0_B|. \quad (207)$$

Isto é, em (205) o modo M_A tem evolução unitária.

Mesmo em ambientes que não respeitam as condições necessárias para o subespaço livre de decoerência, é possível, conhecendo as constantes de dissipação cruzada, encontrar através de (204) quais são os estados mais resistentes à ação do ambiente.

Como exemplo, podemos destacar o ambiente tratado no gráfico G4 (onde $\Delta_{ab} = 0$ e $K_{ab} > 0$). Sabemos, pela relação (197) que:

$$K_{ab} = r \cos \gamma,$$

$$\Delta_{ab} = r \sin \gamma.$$

Assim, $\Delta_{ab} = 0$ quando $\gamma = 2\pi n$ (pois $r \neq 0$). Um dos estados resistentes neste ambiente é:

$$\rho_S = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,1\rangle - |1,0\rangle) (\langle 0,1| - \langle 1,0|), \quad (208)$$

formado por uma excitação no modo M_A . Este é um estado do tipo C, confirmando a análise gráfica feita anteriormente.

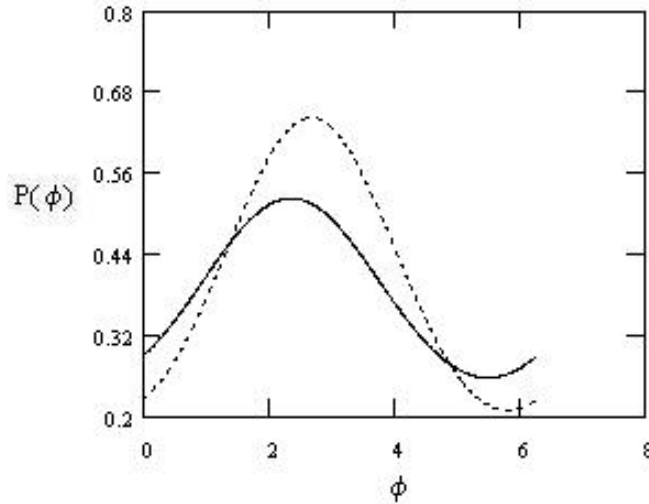
Podemos fazer a mesma análise para os estados do tipo D, destacados no gráfico G6.

Escrever os coeficientes de dissipação cruzada através da relação (197), também pode ser útil na identificação de condições experimentais que geram gráficos com maior visibilidade. Esta identificação fica clara se substituirmos (197) em (194) e obtemos:

$$P_{ge}(t_c) = \frac{e^{2Kt_c}}{4} |(e^{-rt_c} + e^{rt_c}) + \sin 2\theta \cos(\gamma + \phi)(e^{-rt_c} - e^{rt_c})|^2, \quad (209)$$

Na expressão (209), o produto $\sin 2\theta \cos(\gamma + \phi)$ é responsável pela oscilação da probabilidade condicional. O valor de θ que provoca a oscilação de maior visibilidade é $\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$. O valor de ϕ que provoca a oscilação de maior visibilidade depende de γ , que está relacionado ao ambiente.

A montagem experimental proposta neste capítulo nos dá liberdade para escolher entre a obtenção de dados experimentais que permitam a construção de gráficos $P_{ge} \times \theta$ com ϕ fixo ou $P_{ge} \times \phi$ com θ fixo. Sabemos que o gráfico $P_{ge} \times \phi$ com $\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$ será o de maior visibilidade para qualquer ambiente. Portanto, este é o gráfico que mostra a influência dos coeficientes de dissipação cruzada com mais eficiência.



G12: Para valores de $K = 1,0 \times 10^3 s^{-1}$, $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $t_c = 5,0 \times 10^{-4} s$. Os valores $\Delta_{ab} = 0,25 \times 10^3 s^{-1}$, $K_{ab} = 0,25 \times 10^3 s^{-1}$ correspondem à linha inteira do gráfico. Os valores $\Delta_{ab} = 0,5 \times 10^3 s^{-1}$, $K_{ab} = 0,25 \times 10^3 s^{-1}$ correspondem a linha pontilhada do gráfico

5 Conclusão

O modelo de Caldeira e Legget tem sido muito bem sucedido em diversas áreas da Física, particularmente em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades. Nele o sistema de interesse é modelado por um oscilador harmônico e o ambiente por um conjunto de osciladores harmônicos acoplados linearmente ao sistema de interesse. Um modo de campo eletromagnético tem descrição análoga à do oscilador harmônico, portanto, descrever seu decaimento com o uso do modelo Caldeira-Legget tem sido usual.

Em [18], está apresentada uma extensão do modelo de Caldeira e Legget para a descrição do comportamento de dois osciladores acoplados entre si e com o ambiente. Ao longo da dedução da equação mestra em [18], a partir do hamiltoniano proposto na extensão do modelo de Caldeira e Legget, são definidos os coeficientes K_{ij} e Δ_{ij} (i e j correspondendo a a e b), que dependem diretamente das constantes de acoplamento α_k e β_k dos modos de interesse com cada modo do ambiente. Os coeficientes K_{ij} e Δ_{ij} estão relacionados ao comportamento macroscópico do sistema, enquanto as constantes de acoplamento α_k e β_k estão relacionadas ao comportamento microscópico do sistema.

Os coeficientes K_{aa} e Δ_{aa} (K_{bb} e Δ_{bb}) dependem apenas de somatórios envolvendo as constantes $|\alpha_k|^2$ ($|\beta_k|^2$), portanto estão exclusivamente relacionados ao decaimento dos modos M_a (M_b). Mas os coeficientes de dissipação cruzada, K_{ab} e Δ_{ab} (K_{ba} e Δ_{ba}) dependem de somatórios envolvendo $\alpha_k\beta_k^*$ ($\beta_k\alpha_k^*$), portanto é necessária uma correlação entre as constantes de acoplamento para que os coeficientes de dissipação cruzada tenham valores significativos. Tais correlações podem aparecer quando os modos M_a e M_b sentem microscopicamente a presença do ambiente aproximadamente da mesma forma. Assim, fatores como diferença de polarização e separação espacial devem influenciar nos valores dos coeficientes de dissipação cruzada.

Existem condições, envolvendo os coeficientes de dissipação cruzada, que geram subespaços livres de decoerência. Portanto, para tais condições existem estados que não se entrelaçam com os modos do ambiente e também não perdem energia para eles. As condições para subespaço livre de decoerência não podem ser alcançadas facilmente. Entretanto, a presença dos coeficientes de dissipação cruzada no modelo permite que alguns estados sejam mais resistentes à ação do ambiente do que outros.

Para modos em cavidades idênticas ($K_{aa} = K_{bb}$, $K_{ab} = K_{ba}$, $\Delta_{ab} = -\Delta_{ba}$), os coeficientes de dissipação cruzada podem ser escritos na forma:

$$re^{i\gamma} = K_{ab} + i\Delta_{ab}. \quad (210)$$

O valor de $r = \sqrt{K_{ab}^2 + \Delta_{ab}^2} = |Z_{ab}|$ está relacionado com a intensidade de preservação dos estados resistentes. Quanto mais próximo de K_{aa} estiver o módulo $|Z_{ab}| = r$ maior será a intensidade de preservação do estado.

O valor de γ está relacionado com a fase dos coeficientes de dissipação cruzada, e determina quais estados serão os mais resistentes.

Constatamos neste trabalho a relevância teórica desses coeficientes na preservação de alguns estados em relação a outros. Sendo assim, em uma busca a estados mais resistentes, devemos estar sempre atentos às características do ambiente a que esses estados estarão acoplados.

Em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades, até onde sabemos não existem experimentos descritos na literatura que possibilitem uma investigação a respeito dos coeficientes de dissipação cruzada. Neste trabalho está descrita a proposta de um experimento, factível através da presente tecnologia, capaz de explicitar a relevância destes coeficientes em sistemas compostos de dois modos de microondas em cavidades supercondutoras de alto fator de qualidade.

O experimento proposto tem como objetivo principal a obtenção de dados que tornem possível a diferenciação entre o comportamento de decaimento dos estados puros criados nas cavidades. Esta diferenciação pode ser feita através de curvas que mostrem que a perda de energia e coerência dos modos de interesse dependem do estado puro inicial. Um átomo de Rydberg é enviado no estado $|e\rangle$ e cria um estado emaranhado nos modos de interesse $|\psi\rangle = \cos\theta|0,1\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1,0\rangle$. Após algum tempo, um segundo átomo é enviado, no estado $|g\rangle$ para interagir com os campos, e dar informações sobre o decaimento dos mesmos. Se os coeficientes de dissipação cruzada forem significativos, podemos construir gráficos oscilantes relacionados à probabilidade de encontrarmos, este segundo átomo no estado $|e\rangle$. A montagem experimental proporciona grande liberdade para a criação de diferentes estados iniciais emaranhados.

Este experimento seria um teste para o modelo Caldeira-Legget estendido. Os coeficientes K_{aa} e K_{bb} se mostraram úteis para descrever um decaimento observado experimentalmente em [31], já os coeficientes de dissipação cruzada são relacionados a processos mais sutis, que podem surgir neste tipo de modelo, ainda não observados experimentalmente. Assim, a realização do experimento proposto no capítulo 4 seria um passo importante na investigação dos mecanismos que provocam a perda de energia e coerência dos estados quânticos em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades. Uma vez que a decoerência tem sido um grande entrave para a construção de computadores quânticos, esta investigação é importante no contexto de Informação Quântica. Por outro lado, conhecer as sutilezas da ação do ambiente também é no estudo dos fundamentos de Mecânica Quântica.

A Apêndice

Neste apêndice, partindo de um Liouvilliano fatorado, será descrita com detalhes a evolução temporal do operador de estado usado em nossa proposta experimental:

$$\rho_S(0) = (A_1|0, 1\rangle + A_2|1, 0\rangle) (h.c), \quad (211)$$

onde $|A_1|^2 + |A_2|^2 = 1$.

Como foi enfatizado no capítulo 3, a evolução temporal é descrita pela equação:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= e^{\mathcal{L}t} \rho_S(0) \\ &= e^{h_1(t)a \bullet a^\dagger} e^{h_2(t)b \bullet b^\dagger} e^{z_1(t)a \bullet b^\dagger} e^{z_2(t)b \bullet a^\dagger} e^{n_1(t) \bullet a^\dagger b} e^{n_2(t)b^\dagger a \bullet} \\ &\quad e^{m_2(t)b^\dagger b \bullet} e^{p_2(t) \bullet b^\dagger b} e^{m_1(t)a^\dagger a \bullet} e^{p_1(t) \bullet a^\dagger a} e^{q(t)a^\dagger b \bullet} e^{q_1(t) \bullet b^\dagger a} \rho_S(0). \end{aligned}$$

A aplicação do operador $e^{\mathcal{L}t}$ será feita por partes.

Definindo

$$\rho_q = e^{q(t)a^\dagger b \bullet} e^{q_1(t) \bullet b^\dagger a} \rho_S(0), \quad (212)$$

e expandindo as exponenciais:

$$\rho_q = \sum_k \frac{(qa^\dagger b \bullet)^k}{k!} \sum_j \frac{(q_1 \bullet b^\dagger a)^j}{j!} \rho_S(0).$$

A partir deste ponto, estaremos omitindo o argumento das funções presentes na forma fatorada do Liouvilliano.

Algumas relações envolvendo a notação convencional de superoperadores serão úteis no desenvolvimento da evolução temporal. Estas relações serão mostradas através de operadores genéricos. A primeira é:

$$(R \bullet)^k A = R^k A = (R^k \bullet) A, \quad (213)$$

$$(\bullet R)^k A = AR^k = (\bullet R^k) A. \quad (214)$$

Assim:

$$\rho_q = \sum_{k,j} \frac{q^k q_1^j}{k! j!} [(a^\dagger b)^k \bullet] [\bullet (b^\dagger a)^j] \rho_S(0).$$

Usando outra relação:

$$(R\bullet)(\bullet S)A = (R\bullet)AS = RAS = (R\bullet S)A, \quad (215)$$

podemos escrever:

$$\rho_q = \sum_{k,j} \frac{q^k q_l^j}{k!j!} (a^\dagger b)^k \rho_S(0) (b^\dagger a)^j,$$

apenas os termos da somatória com $k = j = 0$, com $k = 0$ $j = 1$, com $k = 1$ $j = 0$ e com $k = j = 1$ são diferentes de zero.

$$\begin{aligned} \rho_q &= |A_1|^2 |0, 1\rangle \langle 0, 1| + |A_2 + qA_1|^2 |1, 0\rangle \langle 1, 0| + (A_1 A_2^* + q|A_1|^2) |0, 1\rangle \langle 1, 0| \\ &+ (q|A_1|^2 + A_2 A_1^*) |1, 0\rangle \langle 0, 1|, \end{aligned}$$

lembrando que $q = q_l^*$.

Definindo:

$$\rho_p = e^{m_2 b^\dagger b} e^{p_2 \bullet b^\dagger b} e^{m_1 a^\dagger a} e^{p_1 \bullet a^\dagger a} \rho_q. \quad (216)$$

Usando a relação:

$$(S\bullet)(\bullet P)(A\bullet)(\bullet B)R = (S\bullet)(\bullet P)ARB = (S\bullet)ARBP = SARBP = (SA\bullet BP)R, \quad (217)$$

e expandindo as exponenciais, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \rho_p &= \sum_{i,j} \frac{m_2^i p_2^j}{i! j!} |A_1|^2 |0, 1\rangle \langle 0, 1| + \sum_{k,l} \frac{m_1^k p_1^l}{k! l!} |A_2 + qA_1|^2 |1, 0\rangle \langle 1, 0| \\ &+ \sum_{i,l} \frac{m_2^i p_1^l}{i! l!} (A_1 A_2^* + q|A_1|^2) |0, 1\rangle \langle 1, 0| + \sum_{k,j} \frac{p_2^j m_1^k}{j! k!} (q|A_1|^2 + A_2 A_1^*) |1, 0\rangle \langle 0, 1|. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \rho_p &= |e^{m_2}|^2 |A_1|^2 |0, 1\rangle \langle 0, 1| + |e^{m_1}|^2 |A_2 + qA_1|^2 |1, 0\rangle \langle 1, 0| \\ &+ e^{m_2} e^{p_1} (A_1 A_2^* + q|A_1|^2) |0, 1\rangle \langle 1, 0| + e^{p_2} e^{m_1} (q|A_1|^2 + A_2 A_1^*) |1, 0\rangle \langle 0, 1|, \end{aligned}$$

lembrando que $m_1 = p_1^*$ e $m_2 = p_2^*$.

Definindo:

$$\rho_n = e^{n_l \bullet a^\dagger b} e^{nb^\dagger a \bullet} \rho_p, \quad (218)$$

expandindo as exponenciais e usando a relação:

$$(\bullet R)(S \bullet)A = (\bullet R)SA = SAR = (S \bullet R)A, \quad (219)$$

podemos escrever:

$$\rho_n = \sum_{i,j} \frac{n_l^j}{j!} \frac{n^i}{i!} (b^\dagger a)^i \rho_p (a^\dagger b)^j.$$

Como $n = n_l^*$ e apenas os termos com $i = j = 0$, com $i = 0, j = 1$, com $i = 1, j = 0$ e com $i = j = 1$ da somatória são diferentes de zero:

$$\begin{aligned} \rho_n &= |e^{m_1}|^2 |A_2 + qA_1|^2 |1, 0\rangle \langle 1, 0| + [e^{m_1} e^{p_2} (q|A_1|^2 + A_2 A_1^*) + n_l |e^{m_1}|^2 |A_2 + qA_1|^2] |1, 0\rangle \langle 0, 1| \\ &+ [e^{m_2} e^{p_1} (q|A_1|^2 + A_1 A_2^*) + n |e^{m_1}|^2 |A_2 + qA_1|^2] |0, 1\rangle \langle 1, 0| + [|n|^2 |e^{m_1}|^2 |A_2 + qA_1|^2 \\ &+ n^* e^{m_2} e^{p_1} (q_l |A_1|^2 + A_1 A_2^*) + n e^{m_1} e^{p_2} (q|A_1|^2 + A_2 A_1^*) + |e^{m_2}|^2 |A_1|^2] |0, 1\rangle \langle 0, 1|. \end{aligned}$$

Para escrever ρ_n de uma forma mais compacta vamos usar as relações (158), (159) e (160) do capítulo 3:

$$M_1 = e^{m_1}, \quad M_2 = e^{m_2} + nq e^{m_1}, \quad (220)$$

$$Q_1 = q e^{m_1}, \quad Q_2 = n e^{m_1}, \quad (221)$$

assim:

$$\begin{aligned} \rho_n &= |A_2 M_1 + A_1 Q_1|^2 |1, 0\rangle \langle 1, 0| + (A_2 M_1 + A_1 Q_1)(A_1^* M_2^* + A_2^* Q_2^*) |1, 0\rangle \langle 0, 1| \\ &+ (A_2^* M_1^* + A_1^* Q_1^*)(A_1 M_2 + A_2 Q_2) |0, 1\rangle \langle 1, 0| + |A_1 M_2 + A_2 Q_2|^2 |0, 1\rangle \langle 0, 1|. \end{aligned}$$

Definindo:

$$\rho_z = e^{z_l a \bullet b^\dagger} e^{z b \bullet a^\dagger} \rho_n, \quad (222)$$

expandindo as exponenciais e usando a relação:

$$(A \bullet B)(C \bullet D)R = (A \bullet B)CRD = ACRDB = (AC \bullet DB)R, \quad (223)$$

podemos escrever:

$$\rho_z = \sum_{i,j} \frac{z_l^j}{j!} \frac{z^i}{i!} b^i a^j \rho_n (b^\dagger)^j (a^\dagger)^i,$$

como $z = z_l^*$ e apenas os termos com $i = j = 0$, com $i = 0$ $j = 1$ e com $i = 1$ $j = 0$ da somatória são diferentes de zero:

$$\begin{aligned} \rho_z &= |A_2 M_1 + A_1 Q_1|^2 |1, 0\rangle \langle 1, 0| + (A_2 M_1 + A_1 Q_1)(A_1^* M_2^* + A_2^* Q_2^*) |1, 0\rangle \langle 0, 1| \\ &+ (A_2^* M_1^* + A_1^* Q_1^*)(A_1 M_2 + A_2 Q_2) |0, 1\rangle \langle 1, 0| + |A_1 M_2 + A_2 Q_2|^2 |0, 1\rangle \langle 0, 1| \\ &+ [z(A_2^* M_1^* + A_1^* Q_1^*)(A_1 M_2 + A_2 Q_2) + z_l(A_2 M_1 + A_1 Q_1)(A_1^* M_2^* + A_2^* Q_2^*)] |0, 0\rangle \langle 0, 0|. \end{aligned}$$

Finalmente chegamos ao ultimo passo da evolução temporal escrevendo:

$$\rho_S(t) = e^{h_1 a \bullet a^\dagger} e^{h_2 b \bullet b^\dagger} \rho_z. \quad (224)$$

Expandindo as exponenciais:

$$\rho_S(t) = \sum_{i,j} \frac{h_1^i}{i!} \frac{h_2^j}{j!} a^i b^j \rho_z (b^\dagger)^j (a^\dagger)^i,$$

apenas os termos com $i = j = 0$, com $i = 0$ $j = 1$ e com $i = 1$ $j = 0$ da somatória são diferentes de zero, assim:

$$\rho_S(t) = \rho_z + (h_1 |A_2 M_1 + A_1 Q_1|^2 + h_2 |A_1 M_2 + A_2 Q_2|^2) |0, 0\rangle \langle 0, 0|,$$

No capítulo 3, utilizando a técnica de diferenciação de parâmetros, encontramos os coeficientes que tornam possível a fatoração do Liouvilliano. Agora vamos reescrever quatro deles usando as definições (220) e (221):

$$h_1 = \frac{|M_2|^2 + |Q_2|^2}{|M_1 M_2 - Q_1 Q_2|^2} - 1, \quad (225)$$

$$h_2 = \frac{|M_1|^2 + |Q_1|^2}{|M_1 M_2 - Q_1 Q_2|^2} - 1, \quad (226)$$

$$z = z_l = \frac{Q_1 M_2^* + Q_2^* M_1}{|M_1 M_2 - Q_1 Q_2|^2}, \quad (227)$$

portanto, o operador de estado no tempo t tem a forma:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= |A_2 M_1 + A_1 Q_1|^2 |1, 0\rangle \langle 1, 0| + (A_2 M_1 + A_1 Q_1)(A_1^* M_2^* + A_2^* Q_2^*) |1, 0\rangle \langle 0, 1| \\ &+ (A_2^* M_1^* + A_1^* Q_1^*)(A_1 M_2 + A_2 Q_2) |0, 1\rangle \langle 1, 0| + |A_1 M_2 + A_2 Q_2|^2 |0, 1\rangle \langle 0, 1| \\ &+ (|A_1|^2 + |A_2|^2 - |A_2 M_1 + A_1 Q_1|^2 - |A_1 M_2 + A_2 Q_2|^2) |0, 0\rangle \langle 0, 0|. \end{aligned}$$

Referências

- [1] Osvaldo Pessoa Jr., *Conceitos de Física Quântica* (Editora Livraria da Física, SP, 2003).
- [2] N. Bohr, Atti del Congresso Internazionale dei Fisici Como, 11-20 Settembre 1927 (Zachelli, Bologna, 1928) Vol. 2 p. 565;
- [3] M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, NY, 1966).
- [4] R. Omnès, *The Interpretation of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994).
- [5] F. J. Belinfante, *A Survey of Hidden-Variables Theories* (Pergamon Press, Oxford, 1973).
- [6] Asher Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993).
- [7] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?”, *Phys. Rev* **47**, 777 (1935).
- [8] Leslie E. Ballentine, *Quantum Mechanics: A Modern Development* (World Scientific, NJ, 1998).
- [9] V. Vedral, M.B. Plenio, M.A. Rippin, P.L. Knight, “Quantifying Entanglement”, *Physical Review Letters* **78**, No.12, 2275 (1997).
- [10] V. Vedral, M.B. Plenio, “Entanglement Measures and Purification Procedures”, *Physical Review A* **57**, No.3, 1619 (1998).
- [11] Wojciech H. Zurek, ”Decoherence and the Transition from Quantum to Classical”, *Physics Today*, **44**, No.10, 36 (1991).
- [12] Wojciech H. Zurek, “Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?” *Physical Review D***24**, No.6, 1516 (1981).
- [13] L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, “Mesoscopic quantum coherences in cavity QED: Preparation and decoherence monitoring schemes”, *Physical Review A*. **53**, 1295 (1996).
- [14] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche, “Observing the Progressive Decoherence of the ‘Meter’ in a Quantum Measurement”, *Physical Review Letters* **77**, 4887 (1996).
- [15] Juan Pablo Paz, Salman Habib, and Wojciech H. Zurek, *Environment-Induced Decoherence and the Transition from Quantum to Classical* (Lectures given by both authors at the 72nd Les Houches Summer School on “Coherent Matter Waves ”, 1999), quant-ph/0010011.
- [16] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications* (Wiley, New York, 1992)

- [17] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997)
- [18] A. R. Bosco de Magalhães, *Estudo do Controle da Decoerência e da Dissipação em Cavidades de Microondas Acopladas*, Tese de Doutorado, UFMG (Belo Horizonte, 2004).
- [19] L. Davidovich, A. Maali, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, “Quantum Switches and Nonlocal Microwave Fields”, *Physical Review Letters* **71**, 2360 (1993).
- [20] L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, “Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields”, *Physical Review A* **50**, R895 (1994).
- [21] R. Rossi Jr., A.R. Bosco de Magalhães and M.C Nemes, *Two cavity modes in a dissipative environment: cross decay rates and robust state*, quant-ph/0410200, submetido a *Physical Review A*.
- [22] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Prentice Hall, New Jersey, 1999).
- [23] Josif Frenkel, *Princípios de eletrodinâmica clássica* (Edusp, SP, 1996)
- [24] Edwin Goldin, *Waves and Photons: An Introduction to Quantum Optics* (John Wiley Sons, NY, 1982)
- [25] J. G. Peixoto de Faria, Aspectos do Entrelaçamento em Sistemas Quânticos Abertos, Tese de Doutorado, UFMG (Belo Horizonte, 2001).
- [26] Leonardo Luiz Portes dos Santos, A dinâmica átomo-campo na aproximação dispersiva do modelo de Jaynes-Cummings, Dissertação (mestrado), UFMG (Belo Horizonte, 1999).
- [27] A.R. Bosco de Magalhães, S.G. Mocarzel, M. O. Terra Cunha, and M. C. Nemes, ”Decay rate and Decoherence control in couple dissipative cavities”, *Physica A* **341**, 234-250 (2004).
- [28] S.G. Mocarzel, *Decoerência e Dissipação de Sistemas Quânticos: Técnicas e Aplicações*, Tese de Doutorado, USP (São Paulo, 2000).
- [29] N. V. Prokof’ev and P. C. E. Stamp, “Theory of the Spin Bath”, cond-mat/0001080.
- [30] A. O. Caldeira and A. J. Legget, “Quantum Tunnelling in a Dissipative System”, *Annals of Physics* **149**, 374 (1983).
- [31] A.R. Bosco de Magalhães and M. C. Nemes, ”Searching for decoherence-free subspaces in cavity quantum electrodynamics”, *Physical Review A* **70**, 053825 (2004).
- [32] A. Rauschenbeutel, P. Bertet, S. Osnaghi, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, “Controlled entanglement of two field modes in a cavity quantum electrodynamics experiment”, *Physical Review A* **64**, 050301(R) (2001).

[33] W.H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York, 1973).

[34] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond and S. Haroche, “Seeing a single photon without destroying it”, *Nature* **400**, 239(1999).

[35] X. Maître, E. Hagley, G. Nogues, C. Wunderlich, P. Goy, M. Brune, J. M. Raimond and S. Haroche, “Quantum memory with a single photon in a cavity”, *Physical Review Letters* **79**, 769(1997).