

TÓPICOS EM BIOFÍSICA:

**Alometria dos ossos;
O modelo BS para a evolução das espécies;
O fluxo de ar no nariz humano.**

Guilherme José de Moraes Garcia

Janeiro de 2005

TÓPICOS EM BIOFÍSICA:

- Alometria dos ossos
- O modelo Bak-Sneppen para a evolução das espécies
- O fluxo de ar no nariz humano

Guilherme José de Moraes Garcia

Orientador: Ronald Dickman

Co-orientador: Jafferson Kamphorst Leal da Silva

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de doutor em Física.

Janeiro de 2005

Agradecimentos

Jesus Cristo, Te agradeço por criar um universo tão maravilhoso e por ter nos colocado aqui para aprendermos sobre o Senhor e sobre as obras das Tuas mãos. Obrigado por orientar e guiar a minha vida.

Mamãe, muito obrigado pelo amor que você tem me dado desde meu nascimento. Obrigado pelo carinho, pelo cuidado e por nosso lar me propiciar um ambiente de paz, onde posso me dedicar aos estudos. Obrigado por me ensinar o inglês, uma ferramenta essencial ao meu trabalho.

Papai, obrigado por me transmitir sua sede pelo conhecimento, seu amor pela ciência e sua curiosidade aguçada. Obrigado por me ensinar, através do seu exemplo, a ser trabalhador, a suar a camisa, a buscar sempre ser um ótimo profissional.

Ron, obrigado pelo privilégio de ser orientado por um cientista tão dedicado. Sua dedicação e sua determinação me ensinaram o papel essencial da garra e da raça no avanço científico. Sua inteligência e seu conhecimento me mostraram que devo atacar os problemas de forma criativa, mas ao mesmo tempo dominando as técnicas conhecidas. Obrigado também pela nossa amizade.

Jafferson, tem sido um grande prazer trabalhar junto com você. Obrigado por me ensinar que devemos sempre procurar investigar problemas relevantes e que a qualidade dos artigos vale mais do que a quantidade. Obrigado pela sua coragem em trabalhar em uma área desafiadora, completamente nova para você e para mim. Contigo aprendi a ser um pesquisador maduro, capaz de buscar os dados biológicos e de fazer uma ciência de qualidade. Agradeço também pela nossa amizade.

Vó Dalva, Cristina, Kaíque, Angela, Leonel, Fanny e Ricardo, obrigado pelo seu amor, pela sua amizade e por seu constante apoio nessa caminhada. Vocês todos são muito importantes na minha vida.

Dr. Dário, obrigado pelas aulas de anatomia, pelas aulas práticas no ambulatório de otorrino da Santa Casa, pelas nossas discussões e por seu esforço em conseguir as tomografias de pacientes para nosso estudo. Acredito que nosso empenho em aplicar a

ciência para melhoria da saúde humana dará muitos frutos.

Aos residentes da Santa Casa, muito obrigado pelas aulas e pela paciência em me ensinar um pouco da otorrinolaringologia.

Ao Dr. Uedson e ao Hospital Madre Teresa, agradeço imensamente a disponibilidade que vocês tiveram em me fornecer as imagens de tomografia computadorizada que serão a parte principal do meu pós-doc nos EUA. Aos pacientes anônimos que forneceram as tomografias para nosso estudo, meu muito obrigado. Deus os abençõe.

Shirley, Cristina e demais bibliotecárias, seu trabalho foi essencial para minha pesquisa. Sem o serviço de comut, não seria possível trabalhar em uma área interdisciplinar. Muito obrigado.

Giselle, obrigado pelos ótimos momentos que passamos juntos durante esses três anos e meio de doutorado. Obrigado também por me transmitir sua fé e amor a Deus.

Irmãos da Igreja Batista Central, obrigado pelo amor que vocês têm por mim. Sua amizade e suas orações têm contribuído muito para minha vida profissional, emocional e espiritual. Vocês são muito preciosos para mim.

Plascak, Zé Guilherme, Américo, Puli, Denis, Allbens, Alcides, Maria Eugênia, Luizdarcy, Colares, Maria Lúcia, Rodrigo, Mancebo, Tiago, Leo, Sidiney, Letícia, Adriana, João, Flávia, Lauro, Denis, obrigado pela amizade de todos vocês.

Sidiney e Letícia, obrigado pela correção de parte deste manuscrito.

Ao CNPq, à CAPES e à FAPEMIG, agradeço o apoio financeiro.

No início criou Deus os céus e a Terra.
Viu Deus tudo o que tinha feito,
e que era muito bom. (Gn 1:1,31a)

Índice

RESUMO

ABSTRACT

1	Introdução	1
2	Alometria dos ossos	4
2.1	Introdução	4
2.2	Teoria de resistência dos materiais	9
2.3	O modelo da similaridade elástica	9
2.4	Modelo	13
2.5	Resultados e Discussão	15
2.6	Conclusões	23
3	O modelo Bak-Sneppen para a evolução das espécies	25
3.1	Complexidade e SOC	25
3.2	A evolução é um fenômeno complexo	28
3.3	O modelo Bak-Sneppen	31
3.3.1	Método simulacional	34
3.4	Nossos objetivos	35
3.5	Variantes do modelo BS	36
3.6	Determinação do limiar	38
3.7	Modelos Bak-Sneppen anisotrópicos	39
3.7.1	Limiares dos modelos BSab	41
3.7.2	Expoentes críticos dos modelos anisotrópicos	41
3.7.3	Modelo BS cosseno	45
3.8	A dinâmica extrema	47
3.8.1	Análise de campo médio do modelo original	47

3.8.2	Modelo BS em um grafo completo	49
3.8.3	Variante Radical	50
3.8.4	Variante Centered Square	53
3.8.5	Variante peripheral square	56
3.8.6	Simulação numérica e expoentes críticos	57
3.9	A criticalidade auto-organizada no modelo BS	60
3.9.1	Relação entre os modelos com estados absorventes e os modelos com dinâmica extrema	60
3.9.2	Modelo Bak-Sneppen absorvente: propriedades estacionárias	65
3.9.3	Modelo Bak-Sneppen absorvente: espalhamento da atividade	66
3.9.4	Modelo CP3	70
3.9.5	Modelo CP extremo	72
3.9.6	Modelo ABS anisotrópico	72
3.9.7	Resumo dos expoentes e relações de escala	73
3.10	Conclusões	74
4	O fluxo de ar no nariz humano	78
4.1	Introdução	78
4.2	Anatomia do nariz	80
4.3	Patologias e tratamentos mais comuns	89
4.4	Revisão da literatura	92
4.5	Importância e objetivos do nosso estudo	101
4.6	Conclusões e perspectivas futuras	102
5	Conclusão	104
	REFERÊNCIAS	107
A	On The Scaling of Mammalian Long Bones	118
B	On singular probability densities generated by extremal dynamics	119
C	On the thresholds, probability densities, and critical exponents of Bak-Sneppen-like models	120
D	Asymmetric dynamics and critical behavior in the Bak-Sneppen model	121
E	Absorbing-state phase transitions with extremal dynamics	122

Lista de Figuras

2.1	Taxa metabólica B de mamíferos e aves em repouso em função da massa corporal. A relação $B \propto M^{3/4}$ é a lei alométrica mais conhecida. B está em watts e M em kg. Figura retirada de [2].	5
2.2	Variação do comprimento L e do diâmetro D do fêmur nos mamíferos. Tanto L quanto D obedecem aproximadamente a uma lei de potência em função da massa corporal M nas 6 ordens de magnitude de variação da massa. L e D estão em milímetros; M está em kg. Os dados foram retirados das refs. [15,19,20,33].	6
2.3	Esqueleto de um gato. Os ossos longos são: 5.Úmero, 6.Rádio; 7.Ulna; 11.Fêmur; 12.Fíbula; 13.Tíbia; 15.Metatarso. Figura retirada de [13].	6
2.4	Desenho original de Galileu Galilei em seu livro <i>Diálogos</i> , onde ele prevê que o diâmetro dos ossos deve crescer mais rápido do que o comprimento, a fim de suportar o peso, que cresce com o cubo do comprimento. Figura retirada de [2].	7
2.5	Altura de árvores norte-americanas versus diâmetro na base do tronco. A altura das árvores é limitada pela flambagem (<i>buckling</i>), já que nenhuma árvore está acima da linha cheia (limiar de flambagem). Figura retirada de [9].	13
2.6	(a) Descrevemos os ossos longos dos mamíferos como um cilindro submetido a uma força axial F_{ax} e a um momento fletor $\tau \propto F_t L$. Esse momento fletor aparece devido à ação de forças perpendiculares ao eixo do osso como ilustrado em (b) e em (c).	14
2.7	Um esquema simplificado das forças agindo na perna de um mamífero durante a locomoção. R é o braço de alavanca da força de reação do solo (F_{solo}), enquanto r é o braço de alavanca da força muscular ($F_{músculo}$). α_g e α_m são, respectivamente, os ângulos que F_{solo} e $F_{músculo}$ fazem com o eixo do músculo. Figura modificada de [24].	19

2.8	Variação da massa do esqueleto com a massa corporal nos mamíferos. Um ajuste para todos os mamíferos fornece a equação $M_{esqueleto} = 0.061M^{1.09}$, que parece indicar que $M_{esqueleto}$ cresce mais rápido que M . Contudo, ajustando uma lei de potência apenas para os dados com $M < 12$ kg, encontramos $M_{esqueleto} = 0.057M^{1.01 \pm 0.02}$. Os dados foram publicados por Prange e colaboradores [45].	21
2.9	Variação do comprimento L e do diâmetro D do fêmur nos mamíferos. Os dados são os mesmos da Fig. 2.2, mas aqui separamos os mamíferos em maiores e menores que $M = 50$ kg para ilustrar a ‘alometria diferencial’, ou seja, o expoente alométrico é um pouco diferente nos dois grupos. A diferença na inclinação é bem visível no caso do comprimento, mas é menor no caso do diâmetro.	23
3.1	Pilha de areia, o protótipo da criticalidade auto-organizada. Figura retirada de [6].	27
3.2	Terremotos. (a) Distribuição das magnitudes dos terremotos na região New Madrid no sudeste dos Estados Unidos no período de 1974-1983. Os pontos mostram o número de terremotos com magnitude maior que m . (b) Localização dos terremotos usados no gráfico. O tamanho dos pontos indica a magnitude dos terremotos. Figura retirada de [6].	27
3.3	Extinções observadas por Jack Sepkoski em famílias de animais marinhos nos últimos 600 milhões de anos. A curva mostra o percentual estimado de famílias que se extinguíram em intervalos de aproximadamente 4 milhões de anos. Figura retirada de [6].	29
3.4	Histograma das extinções da figura 3.3. O diagrama mostra o número de períodos de 4 milhões de anos onde a taxa de extinção estava dentro de um certo intervalo. As extinções em massa aparecem no pé da distribuição. Figura retirada de [6].	29
3.5	Equilíbrio pontuado na natureza. A circunferência torácica do radiolário <i>Pseudocubus vema</i> aumentou durante sua história evolucionária. Figura retirada de [6].	30
3.6	Distribuição das barreiras x_i no estado estacionário do modelo Bak-Sneppen. Rede com 1000 sítios e média sobre 10^7 configurações. Observe que $p(x)$ não é exatamente uma função degrau devido a efeitos de tamanho finito.	32
3.7	Equilíbrio pontuado no modelo Bak-Sneppen. A curva mostra o número de eventos de mutação para uma única espécie ao longo do tempo.	33
3.8	Densidade estacionária $p(x)$ para a versão unidimensional do modelo BS original, para redes de vários tamanhos.	38
3.9	Ajuste de lei de potência para $(x^* - x_L^*)$ vs. $1/L$ para o modelo BS original. A inclinação da linha reta é $\nu = 1.40$	39

3.10	Densidade de probabilidade estacionária para os modelo BSab com $n = 5$. Rede com $L = 2000$ sítios.	42
3.11	Limiar x^* vs. o coeficiente de anisotropia k_a . Fixamos a e mudamos b para variar k_a . Mais detalhes no texto.	43
3.12	Probabilidade (não normalizada) $P_J(r)$ no estado estacionário para várias variantes BSab.	43
3.13	Colapso das curvas $P_J(r)$ para variantes com $k_a = 1/6$ (veja a Eq. (3.13)).	44
3.14	Probabilidade (não-normalizada) $P_r(\tau)$ no estado estacionário para várias variantes BSab.	46
3.15	Linha sólida: densidade estacionária $p(x)$ para o modelo BS cosseno ($n = 5$) para uma rede com $L = 2000$ sítios. Linha tracejada: função $f(x) =$ $\cos(10\pi x)$ que é minimizada no modelo BS cosseno. ($f(x)$ foi deslocada verticalmente para facilitar a visualização.)	46
3.16	Distribuição $p(x)$ no estado estacionário do modelo original: resultado de campo médio para o modelo BS com temperatura finita (Eq. (3.7) com $n = 3$) para os valores de β indicados (β inf. significa $\beta \rightarrow \infty$).	48
3.17	Função distribuição $P(x)$ do modelo BS original em um grafo completo para os tamanhos de redes indicados.	50
3.18	Distribuição $p(x)$ no estado estacionário do modelo variante Radical. Re- sultado de campo médio para o modelo com temperatura finita para os valores de β indicados.	52
3.19	Distribuição $p(x)$ no estado estacionário do modelo variante Radical. Re- sultados simulacionais para as versões de primeiros vizinhos e vizinhos aleatórios comparados com a previsão de campo médio.	53
3.20	Função distribuição $P(x)$ do modelo variante Radical em um grafo completo para os tamanhos de redes indicados.	54
3.21	Variante centered square: resultado de campo médio para o modelo com temperatura finita para os valores de β indicados. Aproximação A refere-se a $g(x) = \text{constante}$, e B para $g(x) = ax + b$, ambas a temperatura nula, como explicado no texto.	55
3.22	Variante peripheral square: resultado de campo médio para o modelo com temperatura finita para os valores de β indicados.	57
3.23	Modelo original: resultados simulacionais para as versões primeiros vizinhos (PV) e vizinhos aleatórios (VA) comparados com a previsão de campo médio.	58
3.24	Variante centered square: resultados simulacionais para as versões PV e VA comparadas à previsão de campo médio.	59
3.25	Variante peripheral square: resultados simulacionais para as versões PV e VA comparadas à previsão de campo médio.	59

3.26	Distribuição $P_J(r)$ da distância r que separa sítios renovados em passos consecutivos. As curvas foram deslocadas verticalmente para facilitar a comparação.	60
3.27	Variação do parâmetro de ordem no estado estacionário $\bar{\rho}$ (símbolos cheios) com o tamanho L da rede no modelo ABS unidimensional no ponto crítico. Símbolos vazios: diferença entre $\bar{\rho}$ e o ajuste feito com a Eq. (3.58), deslocada verticalmente para facilitar a leitura.	65
3.28	Tempo médio de vida τ (símbolos cheios) versus o tamanho do sistema L no modelo ABS unidimensional no seu ponto crítico. Símbolos vazios: $\tau/L^{\nu_{ }}/L^{\nu_{\perp}}$ (deslocado verticalmente para facilitar a leitura).	66
3.29	Momento m para o modelo ABS versus o tamanho do sistema $L^{-0.25}$. Pontos: dados simulacionais; linha: melhor ajuste, $m = 1.0295 + 0.268L^{-0.25}$	67
3.30	Expoente local $\delta(t)$ versus $1/t$ no modelo ABS. Os valores de q são (de baixo para cima) 0.66700, 0.66701, 0.66702 e 0.66703. Inset: dados para $q = 0.66701$ plotados versus $1/t^{0.25}$	68
3.31	Probabilidade de sobrevivência $P_s(t)$ no modelo ABS em seu ponto crítico, $q = 0.66701$. A função praticamente constante representa a razão entre P_s e o ajuste fornecido pela Eq. (3.60).	69
3.32	Número médio de sítios ativos $n(t)$ no modelo ABS no seu ponto crítico $x^* = q_{c,E} = 0.66701$. A curva sólida representa a função ajustada descrita no texto. Inset: o mesmo gráfico para o modelo ABS <i>anisotrópico</i>	69
3.33	Espalhamento da atividade em uma realização típica do modelo CP3 em seu ponto crítico ($q = 0.63525$).	71
3.34	Espalhamento da atividade em uma realização típica do modelo ABS em seu ponto crítico ($q = 0.66701$).	71
3.35	Espalhamento da atividade em uma realização típica do modelo ABS anisotrópico em seu ponto crítico ($q = 0.72370$).	73
4.1	(a) Diagrama do septo do nariz, lado esquerdo, mostrando a cartilagem do septo, o vômer, a lâmina perpendicular do etmóide e a crista nasal da maxila. (b) Septo do nariz, lado direito. 1. septo principal do seio esfenoidal; 2. hipófise; 3. fossa média do crânio; 4. fossa anterior do crânio; 5. processo crista galli; 6. seio frontal; 7. lâmina perpendicular do etmóide; 8. cartilagem do septo; 9. vômer; 10. região coanal; 11. palato; 12. língua. Retirado de [124] e [125].	80
4.2	Corte coronal de um crânio humano. 14. cavidade nasal; 15. septo do nariz; 17. seio frontal; 18. crista galli; 19. teto da cavidade nasal; 20. corneto superior; 21. corneto médio; 22. corneto inferior; 23. abertura do seio maxilar; 27. Palato duro. Retirado de [126].	81

4.3	Abertura anterior óssea da cavidade nasal: 1. órbita; 2. frontal; 3. nasal; 4. processo frontal da maxila; 5. processo alveolar da maxila; 6. espinha nasal anterior; 7. sutura intermaxilas; 8. meato inferior; 9. corneto inferior; 10. meato médio; 11. corneto médio; 12. meato comum do nariz; 13. septo do nariz. Retirado de [125].	81
4.4	Abertura anterior óssea da cavidade nasal mostrando dois desvios de septo. (a) 1. frontal; 2. órbita; 3. fissura orbital superior; 4. lacrimal; 5. nasal; 6. processo frontal da maxila; 7. processo alveolar da maxila; 8. espinha nasal anterior; 9. corneto inferior; 10. corneto médio; 11. corneto médio bolhoso; 12. septo do nariz com desvio à esquerda. (b) 1. órbita; 2. lacrimal; 3. nasal; 4. processo frontal da maxila; 5. espinha nasal anterior; 6. processo alveolar da maxila; 7. meato inferior do nariz; 8. corneto inferior; 9. meato médio; 10. corneto médio; 11. meato comum do nariz; 12. septo do nariz, com desvio à direita. Retirado de [125].	82
4.5	Seções coronais da cavidade direita do nariz ilustrando sua geometria complexa. Note como a seção reta varia rapidamente. O número abaixo de cada seção indica a distância a partir das narinas em mm. Retirado de [127].	83
4.6	Base do crânio mostrando a parte posterior da cavidade nasal. 2. processo palatino da maxila; 6. lâmina horizontal do osso palatino; 50. vômer; 52. espinha nasal posterior; 58. corneto inferior; 59. corneto médio; 60. corneto superior. Retirado de [126].	83
4.7	Coanas ósseas: 1. lâmina medial do processo pterigóide; 2. lâmina vertical do palatino; 3. corpo do esfenóide; 4. asa do vômer; 5. lâmina vertical do vômer; 6. corneto superior bolhoso; 7. meato superior; 8. corneto médio; 9. meato médio; 10. corneto inferior; 11. meato inferior; 12. meato comum do nariz; 13. lâmina horizontal do palatino; 14. espinha nasal posterior; 15. palato. Retirado de [125].	84
4.8	Parede lateral direita da cavidade nasal: 1. palato; 2. narina; 3. límen do nariz; 4. meato inferior; 5. corneto inferior; 6. óstios acessórios do seio maxilar; 7. meato médio; 8. célula etmoidal anterior; 9. agger nasi; 10. corneto médio; 11. seio frontal; 12. célula etmoidal posterior; 13. corneto supreme (ausente na maioria da população); 14. corneto superior; 15. seio esfenoidal; 16. região coanal; 17. cavidade bucal; 18. língua. Retirado de [125].	85
4.9	Parede lateral esquerda da cavidade nasal: 1. seio frontal; 7. seio esfenoidal; 15. elevação da tuba; 16. abertura da tuba auditiva; 18. palato mole; 19. palato duro; 35. agger nasi; 39. meato inferior; 40. corneto inferior; 41. meato médio; 43. meato superior; 44. corneto superior; 45. recesso esfenotmoidal. Retirado de [126].	85

4.10	Parede lateral direita da cavidade nasal: 1. seio frontal; 2. célula etmoidal anterior; 3. agger nasi; 4. ádito do meato médio do nariz; 5. límen do nariz; 6. narina; 7. meato inferior; 8. corneto inferior; 9. meato médio; 10. óstio acessório do seio maxilar; 11. corneto médio; 12. meato superior; 13. corneto superior; 14. corneto supremo; 15. septo do nariz, rebatido; 16. seio esfenoidal; 17. região coanal; 18. abertura faríngea da tuba auditiva; 19. palato. Retirado de [125].	86
4.11	Cavidade nasal mostrando o perfil dos cornetos e a região olfatória (hachurada). Retirado de [131].	86
4.12	Parede lateral esquerda da cavidade nasal (parcialmente dissecada): 5. corneto inferior; 6. corneto superior; 8. seio esfenoidal; 9. arame na abertura do seio esfenoidal; 10. corneto supremo; 11. bolha etmoidal; 12. hiato semilunar; 13. arame na abertura do seio maxilar; 14. membrana mucosa revestindo o processo unciforme do osso etmoidal; 15. meato médio; 16. meato inferior; 17. arame na abertura do duto nasolacrimal; 22. base do corneto médio (dissecado). Retirado de [126].	87
4.13	Visão lateral do crânio: 1. seio frontal; 3. crista galli; 4.lâmina crivosa do osso etmóide e filamentos do nervo olfatório; 5.lâmina perpendicular do emóide; 6. vômer; 7. seio esfenoidal; 12. tonsil faríngeo (amídalas); 13. recesso faríngeo; 15. elevação da tuba; 16. abertura da tuba auditiva; 18. palato mole; 19. palato duro; 20. crista nasal do osso palatino; 21. crista nasal da maxila; 22. cartilagem do septo; 23. órgão vômeronasal. Retirado de [126].	87
4.14	Corte axial da cavidade do nariz e seios maxilares, ao nível do corneto inferior, visão inferior: 1. região palpebral; 2. seio maxilar; 3. corneto inferior; 4. duto nasolacrimal; 5. recesso lacrimal do seio maxilar; 6. canal infraorbital; 7. septo do nariz; 8. região coanal; 9. região pterigopalatina. Retirado de [125].	88
4.15	Tomografia computadorizada da cavidade nasal mostrando também o seio maxilar e o seio etmoidal. As setas indicam um corneto inferior bolhoso. (a) Corte axial. Observe o desvio de septo para a esquerda. (b) Corte coronal. Retirado de [132].	88
4.16	Corte axial da cabeça humana ao nível do seio etmoidal. 11. seio esfenoidal; 12. células do seio etmoidal; 13. duto nasolacrimal; 14. cavidade nasal; 15. septo nasal. Retirado de [126].	89
4.17	Queda pressão vs. vazão para três seções retas do nariz externo. Vazões positivas indicam expiração e vazões negativas inspiração. Retirado de [144].	95
4.18	Queda de pressão vs. vazão para três seções retas do nariz interno. Caso A: nariz normal; caso B: passagens aéreas superiores bloqueadas; caso C: hipertrofia do corneto inferior. Retirado de [144].	95

4.19	Distribuição da resistência nasal em 30 cavidades nasais de adultos saudáveis. A resistência é mostrada em segmentos de 2 cm.	96
4.20	Vista frontal do crânio de uma foca mostrando cornetos bastante complexos. Retirado de [150].	99

Lista de Tabelas

- 2.1 Teste da previsão que o comprimento L e o diâmetro D dos ossos longos obedecem à relação $L \propto D^\gamma$, com $\gamma = 2/3 = 0.67$. Os expoentes foram calculados por McMahon [17] a partir de dados para 118 animais de 87 espécies de ungulados. As massas dos animais não eram conhecidas. r é o coeficiente de correlação. 11
- 2.2 Expoentes alométricos l e d que descrevem a variação do comprimento e do diâmetro dos ossos em função da massa corporal segundo as leis de potência $L \propto M^l$ e $D \propto M^d$. Resultados obtidos por Alexander [18] usando 8 animais de 7 espécies com massas entre 3 e 130 kg. 11
- 2.3 Expoentes alométricos l e d que descrevem a variação do comprimento e do diâmetro dos ossos em função da massa corporal segundo as leis de potência $L \propto M^l$ e $D \propto M^d$. Resultados obtidos por Biewener [20] usando 32 espécies de mamíferos com massas entre 0.02 e 3750 kg. 11
- 2.4 Expoentes alométricos l e d para o comprimento e diâmetro, respectivamente, dos principais ossos longos dos mamíferos. ‘Média 1’ é a média para todos os 6 ossos, enquanto que ‘média 2’ é a média para o fêmur, a tíbia, o úmero e o rádio. Na parte de baixo da tabela, fornecemos os valores dos expoentes para ulnas e fíbulas não esbeltas ($L/D < 26$). Os dados foram retirados de [15]. Os expoentes são dados para dois métodos de regressão linear: regressão de mínimos quadrados (least square regression, lsr) e ‘reduced major axis’ (rma). r_l e r_d são os coeficientes de correlação. Maiores explicações são dadas no texto. 12
- 2.5 Expoentes alométricos l e d experimentais para ossos longos não-esbeltos ($L/D < 26$) usando os dados de Alexander et al. [19], Bertram e Biewener [20,33] e Christiansen [15]. Os mamíferos são considerados pequenos ou grandes em relação a $M = 50$ kg, como proposto por Christiansen [15]. ‘Média 2’ é a média definida na tabela 2.4. 12
- 3.1 Limiar (x_L^*) para sistemas com $L = 2000$ sítios para os modelos BSab com vários valores do coeficiente de anisotropia (k_a). Os valores de x_L^* são comparados com a previsão de campo médio $x_{CM}^* = 1/n$. Os números entre parênteses denotam as incertezas. 42

3.2	Expoentes críticos do modelo Bak-Sneppen absorvente (ABS) e do processo de contato (CP). Os expoentes do CP foram retirados das refs. [101, 112]. . .	74
3.3	Expoentes de espalhamento para os modelos CP3, CP_{EA} e o Bak-Sneppen anisotrópico absorvente (AABS) em uma dimensão.	74

RESUMO

Os seres vivos habitam um universo governado pelas leis da Física e, por isso, têm que obedecê-las. A Física determina a resistência de estruturas, as propriedades mecânicas dos materiais, os padrões macroscópicos em sistemas com muitos elementos interagentes, a dinâmica dos fluidos e as taxas de difusão e de condução do calor. Dessa forma, os físicos têm muito a contribuir no estudo de sistemas biológicos, investigando as restrições que as leis da Física impõe sobre os seres vivos. Esta tese de doutorado representa um esforço em aplicar a Física para estudar três problemas na Biologia, a saber, a alometria dos ossos, a evolução das espécies e o fluxo de ar no nariz humano.

A alometria dos ossos é o estudo da variação das dimensões dos ossos com o tamanho do animal. Investigações experimentais demonstraram que o comprimento L e o diâmetro D dos ossos longos dos mamíferos variam com a massa corporal M segundo as leis de potência $L \propto M^l$ e $D \propto M^d$. A melhor proposta teórica até o momento, a saber que as dimensões dos ossos são determinadas pela necessidade de evitar a instabilidade elástica conhecida como flambagem de Euler, não foi capaz de explicar os dados experimentais. Propomos aqui um modelo, baseado na exigência de que os ossos devem resistir às tensões de compressão e flexão a que estão expostos, que prevê expoentes l e d em acordo com os dados. Além disso, nosso modelo explica também que (i) os ossos longos não são esbeltos o suficiente para flambar; (ii) $86 \pm 6\%$ da tensão máxima em um osso longo é devido à componente de flexão; e (iii) os expoentes l e d têm uma pequena dependência na massa corporal devido ao seu acoplamento com a força de reação do solo durante a locomoção.

O registro fóssil indica que a vida na Terra, quando analisada na escala de milhões de anos, é um sistema fora do equilíbrio. Ao contrário do que Darwin acreditava, a evolução não é um processo contínuo e gradual, mas na verdade longos períodos de equilíbrio são interrompidos por curtos períodos de atividade evolutiva (Equilíbrio Pontuado). O caráter complexo do sistema é evidenciado pela ausência de um tamanho típico para eventos de extinção. Bak e Sneppen propuseram um modelo protótipo dessa ecologia fora do equilíbrio, sugerindo que a vida na Terra está em um estado criticamente auto-organizado, onde avalanches evolutivas de todos os tamanhos são observadas.

Investigamos a classe de universalidade do modelo Bak-Sneppen e identificamos a dinâmica extrema do modelo como sendo o mecanismo responsável pela auto-organização do sistema em um estado crítico. Nossa abordagem foi propor modificações do modelo a fim de investigar os efeitos da quebra de simetria na regra de renovação, as consequências da dinâmica extrema e a relação entre a dinâmica extrema e uma transição de fase para um estado absorvente. Os métodos usados foram simulação, teoria de campo médio e argumentos gerais. Nossas principais conclusões são: (i) a distribuição estacionária $p(x)$ é singular em um ou mais pontos; (ii) a distribuição $p(x)$ não é universal; (iii) o sítio

extremo pertence com probabilidade 1 à região proibida onde $p(x)=0$ no limite de uma rede infinita; (iv) os modelos são separados em duas classes de universalidade pela simetria da regra de renovação; (v) a dinâmica extrema aprisiona o modelo no ponto crítico de um modelo precursor (não-extremo) que exibe uma transição para um estado absorvente.

O nariz é a porta de entrada do sistema respiratório e tem a função de umidificar, filtrar e aquecer o ar ambiente antes que este prossiga em direção ao pulmão. Fizemos uma ampla revisão da literatura sobre a física do nariz humano e constatamos que ainda sabe-se pouco sobre a relação entre a geometria e a fisiologia nasais. Esse desconhecimento é evidenciado pela alta taxa de insucesso (20 a 30%) da cirurgia de correção do desvio de septo e pelo fato de que problemas da válvula nasal são freqüentemente agravados por procedimentos cirúrgicos. Apresentamos aqui essa revisão da literatura e indicamos a necessidade de se investigar os efeitos que cirurgias têm na fisiologia nasal. Este será meu projeto de pesquisa de pós-doc a partir março/2005.

ABSTRACT

Living beings inhabit a universe governed by physical laws and therefore they have to obey them. Physics determines the strength of structures, the mechanical properties of materials, the macroscopic patterns in systems with many interacting elements, fluid dynamics, diffusion rates, and heat conduction. Thus physicists play an important role in investigations of biological systems, as they can reveal the constraints imposed by physical laws in these systems. This thesis represents an effort to apply Physics to gain insight in three biological problems, namely bone allometry, biological evolution, and nasal airflow in humans.

Bone allometry is the study of how body size affects bone dimensions. Experimental papers have shown that mammalian long bone length L and diameter D are power law functions of body mass M , so that $L \propto M^l$ and $D \propto M^d$. The best theoretical model previously proposed suggested that bone proportions are scaled to avoid an elastic instability called Euler buckling, but it failed to explain the data. Here we propose a model, based on the requirement that bones must resist compressive and bending stresses, which predicts allometric exponents in agreement with the experiment. Moreover, our model also asserts that (i) mammalian long bones are not slender enough to buckle; (ii) $86 \pm 6\%$ of the maximum stress in these bones are due to the bending component; and (iii) the exponents l and d have a slight dependence on body mass due to their link with the locomotory ground reaction forces.

The fossil record indicates that life on Earth, when observed in a scale of millions of years, is a system out of equilibrium. Contrary to Dawin's belief, evolution is not gradual and continuous. Actually, long periods of equilibrium are interrupted by short periods of evolutionary activity (Punctuated Equilibrium). The complex nature of evolution is revealed by the lack of a typical size scale for extinction events. Bak and Sneppen proposed a prototype model for this out-of-equilibrium ecology, suggesting that life is in a self-organized critical state, where evolutionary avalanches of all sizes are present.

We investigate the Bak-Sneppen model universality class as well as the consequences of extremal dynamics, the mechanism that drives the BS model to the self-organized critical state. Our approach is to propose variants of the model in order to analyze the effects of symmetry breaking, the consequences of extremal dynamics and the connection between self-organized criticality and a phase transition to an absorbing state. Our methods were simulation, mean-field theory and general arguments. The main conclusions are: (i) the stationary distribution $p(x)$ is singular in at least one point; (ii) the distribution $p(x)$ is non-universal; (iii) the extremal site belongs with probability 1 to the prohibited region where $p(x) = 0$ in the infinite size limit; (iv) the symmetry of the dynamical rule split the model in two universality classes; (v) extremal dynamics effectively pins the

system in the critical point of a (non-extremal) precursor model which exhibits a phase transition to an absorbing state.

The nose is the entrance to the respiratory system. Its function is to humidify, filter and heat the inspired air in order to protect the fragile tissues of the lower respiratory tract. We made a large review of the literature on the nasal airflow in humans. We found that we still know little about the relationship between nasal geometry and function. This is clearly shown by the high failure rate (20 a 30%) of the septal surgery and by the fact that nasal valve problems are frequently aggravated by surgical procedures. Here we present this review of the literature and indicate the need to investigate the consequences surgeries have in the nasal airflow. This is my pos-doc project which I shall begin in March/2005.

Capítulo 1

Introdução

Quem não fica maravilhado com os documentários sobre o mundo natural produzidos pelo *Discovery Channel*? A vida na Terra é fascinante. Ficamos encantados com as estratégias de caça dos felinos, com a variedade de cores nos recifes de corais, com a luta pela sobrevivência na savana africana, com a precisão geométrica da teia de uma aranha. Entre tantas espécies, estamos nós aqui, a espécie humana, a única com a capacidade de compreender o mundo ao seu redor e de encontrar, através do raciocínio e do experimento, leis universais que regem o mundo físico.

O século XX foi marcado por grandes avanços na área da Física. Em particular, podemos citar a Relatividade Geral de Einstein, a descoberta de que o universo está se expandindo por Edwin Hubble, a Mecânica Quântica de Schrödinger, Bohr, Heisenberg e outros, o Grupo de Renormalização de Wilson, a Teoria do Caos de Lorentz, Feigenbaum e Mandelbrot, e o enorme desenvolvimento na área de Materiais, culminando com a atual onipresença dos computadores. Compartilho a visão de muitos de que o século XXI será marcado por grandes avanços na área Biomédica. Acredito também que os físicos têm uma contribuição importante a dar nesse campo de pesquisa.

Os seres vivos vivem em um universo físico e, portanto, estão sujeitos às leis da Física. Estas determinam taxas de difusão, taxas de transferência de calor, a dinâmica dos fluidos, a resistência de estruturas, a dinâmica da locomoção e propriedades emergentes em sistemas com muitas unidades interagentes. Esta tese de doutorado representa um esforço no sentido de aplicar o conhecimento físico para compreender os sistemas biológicos. Em particular, investigamos a origem do surgimento de leis de potência em dois problemas bastante diferentes: a alometria dos ossos e a evolução das espécies. Apresentamos também uma revisão sobre o fluxo de ar no nariz humano, projeto a que me dedicarei em meu pós-doc.

O ramo da alometria aparentemente surgiu em 1891 quando Snell [1, 2] utilizou uma lei de potência para expressar a relação entre duas variáveis biológicas. Ele estava

interessado em estudar a capacidade mental dos mamíferos e queria levar em conta que o cérebro representa uma fração cada vez menor da massa corporal à medida que o tamanho do animal aumenta. Com esse propósito ele desenvolveu uma equação para expressar a massa do cérebro $M_{\text{cérebro}}$ em função da massa corporal M , que com dados mais recentes escreve-se

$$M_{\text{cérebro}} = 0.01 \left(\frac{M}{M_r} \right)^{0.70},$$

onde $M_r = 1 \text{ kg}$ é uma massa de referência. M e $M_{\text{cérebro}}$ também estão em kg.

Durante o século XX, uma série de estudos foram publicados investigando o efeito do tamanho corporal em uma infinidade de parâmetros biológicos, tais como frequência cardíaca, volume de sangue, massa do esqueleto e tempo de incubação de ovos. Tornou-se evidente que a dependência de vários parâmetros com a massa corporal é bem descrita por uma lei de potência. O conhecimento acumulado foi resumido em quatro livros publicados no início da década de 1980 [2–5]. Em particular, veremos no capítulo 2 que o diâmetro e o comprimento dos ossos longos obedecem uma lei de potência em função da massa corporal. Veremos que a origem dessa lei de potência reside na teoria de resistência dos materiais e na necessidade dos ossos de resistir às forças que lhes são impostas.

O segundo problema que estudaremos é o surgimento de leis de potência na evolução das espécies, como revelado pelo registro fóssil. Neste caso, as leis de potência têm uma origem diferente, a saber, a dinâmica de interação entre um número muito grande de espécies. A abordagem neste caso é a criticalidade auto-organizada, conceito proposto por Per Bak e colaboradores no final da década de 1980 e início dos anos 1990 [6].

A idéia é simples. Sabemos que sistemas em equilíbrio exibem com frequência uma transição de fase, que pode ser de primeira ordem ou de segunda ordem¹. Em uma transição de segunda ordem, várias grandezas obedecem uma lei de potência. O modelo protótipo é o modelo de Ising, onde os parâmetros de controle são a temperatura T e o campo magnético h e o parâmetro de ordem é a magnetização m . Este sistema exibe uma transição de fase de segunda ordem de um estado ferromagnético para um estado paramagnético, no qual grandezas como a susceptibilidade magnética χ divergem como uma lei de potência.

Bak e colaboradores propuseram que a ubiquidade das leis de potência na natureza pode ser parcialmente explicada pela *criticalidade auto-organizada*. A idéia é que sistemas fora do equilíbrio podem auto-organizar-se em seus pontos críticos sem a necessidade de ‘sintonizar’ um parâmetro de controle como ocorre nos modelos em equilíbrio. Esse conceito foi aplicado com sucesso para explicar a distribuição em forma de lei de potência do tamanho de terremotos e do tamanho de engarrafamentos [6]. Em particular, Bak e Sneppen [7] propuseram um modelo, atualmente um protótipo da criticalidade auto-organizada, que explica qualitativamente o surgimento das leis de potência na evolução das espécies. Este será nosso assunto no capítulo 3.

¹Em uma transição de primeira ordem, o parâmetro de ordem salta de um valor para outro. Em uma de segunda ordem, o parâmetro de ordem varia continuamente.

Além de me interessar em Biofísica, também tenho interesse em aplicar a Física a problemas práticos. O Brasil é um país tecnologicamente atrasado e dependente das nações cientificamente mais avançadas. Acredito que nós físicos temos o potencial de reverter essa situação. Como tenho interesse nessa área, fiquei muito interessado quando o Dr. Dário Antunes, otorrinolaringologista da Santa Casa de Belo Horizonte, esteve no nosso departamento procurando alguém para investigar a física do nariz. Como esse projeto surgiu depois que eu já tinha mais de um ano de doutorado e já estava envolvido com outros projetos, tive tempo apenas para fazer uma longa revisão do fluxo de ar do nariz humano, de estudar a anatomia nasal, de visitar algumas vezes o ambulatório de otorrino na Santa Casa e de assistir algumas cirurgias. Apesar de ainda não ter obtido um resultado novo nesta área, sendo este meu projeto de pós-doutorado a ser iniciado em março/2005 na Carolina do Norte—EUA, eu e meu orientador julgamos interessante incluir aqui um capítulo com a revisão do fluxo de ar no nariz humano. Discutiremos este tópico no capítulo 4.

Em resumo, meu doutorado consistiu em aplicar a Física para estudar problemas biológicos, em particular problemas de escala na Biologia e o modelo Bak-Sneppen para a evolução das espécies. Este tempo também foi muito importante para me preparar para investigar o fluxo de ar no nariz humano durante meu pós-doc.

Fazendo uma análise retrospectiva desses 3,5 anos de doutorado, acredito que o saldo foi bastante positivo. Trabalhar em uma área interdisciplinar é desafiador, principalmente quando o assunto estudado é novo tanto para o orientador quanto para o aluno. Aprendi bastante com o fato de precisar começar do zero a cada vez que explorava uma nova área. Também aprendi muito com os *referees* das revistas da área biológica, que nos exigiram bastante conhecimento dos dados biológicos. Percebi ainda que não é trivial encontrar um colaborador científico² interdisciplinar, mas que quando encontra-se tal colaboração, como no nosso estudo sobre o fluxo nasal, essa parceria é extremamente positiva. Finalmente, acredito que as dificuldades enfrentadas foram muito importantes na minha formação como pesquisador e estou ansioso para seguir em frente.

Espero que o leitor se divirta e aprenda informações interessantes com essa leitura.

²Eu e o Jafferson não encontramos um biólogo que pudesse nos ajudar no estudo da alometria.

Capítulo 2

Alometria dos ossos

2.1 Introdução

Alometria é o ramo da Biologia que estuda como grandezas biológicas dependem da escala. Diversos estudos experimentais têm demonstrado que uma grande quantidade de variáveis são descritas por leis de potência da forma

$$Y = aX^b, \quad (2.1)$$

onde Y é o parâmetro estudado, X é uma variável considerada independente (geralmente a massa corporal), a é uma constante e b é o expoente alométrico [2–5]. A relação alométrica mais conhecida é a lei dos 3/4 que diz que a taxa metabólica de mamíferos e aves em repouso é proporcional a $M^{3/4}$, onde M é a massa corporal (Fig. 2.1). A fim de ilustrar a diversidade de grandezas descritas por relações alométricas na forma da Eq. (2.1), podemos citar que a frequência de passos à velocidade máxima dos mamíferos escala como $M^{-1/7}$ [8], que o tempo de incubação dos ovos de aves é proporcional a $M_{ovo}^{0.22}$ [2] e que o diâmetro do tronco das árvores cresce como $M^{3/8}$ [9].

Em 1997, West e colaboradores propuseram que a origem de várias relações alométricas está na rede de distribuição de nutrientes presente na maioria dos seres vivos [10, 11]. O modelo de West et al. supõe que i) essa rede é fractal e preenche todo o volume do organismo; ii) o último ramo tem propriedades independentes da escala; e iii) a energia para distribuir os nutrientes é mínima. Explorando as consequências dessas hipóteses, o modelo prevê com sucesso vários expoentes alométricos observados experimentalmente para grandezas morfológicas e fisiológicas de aves, mamíferos e plantas [10, 11].

A alometria dos ossos é um dos problemas de escala na Biologia que permanece sem explicação teórica [12]. Vários artigos experimentais foram publicados nas últimas

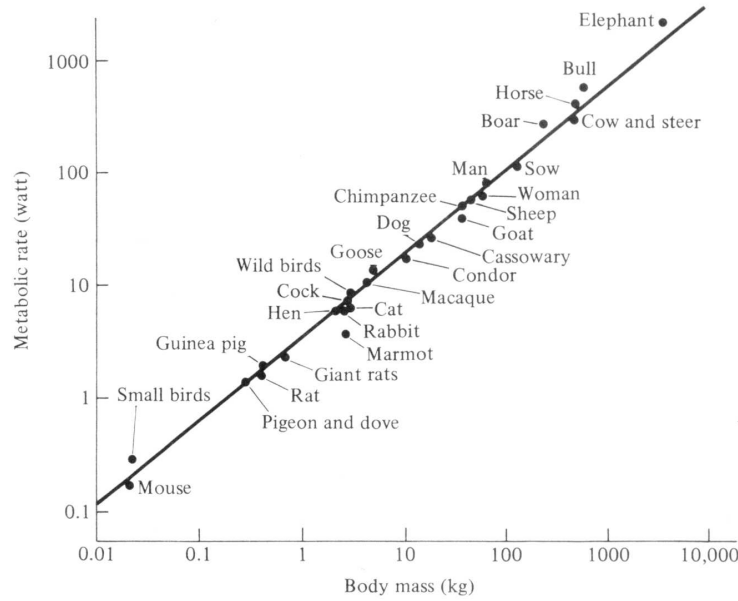


Figura 2.1: Taxa metabólica B de mamíferos e aves em repouso em função da massa corporal. A relação $B \propto M^{3/4}$ é a lei alométrica mais conhecida. B está em watts e M em kg. Figura retirada de [2].

décadas demonstrando que o comprimento L e o diâmetro D dos ossos longos variam com a massa M segundo uma lei de potência (Fig. 2.2). (Os ossos longos são os ossos cilíndricos dos membros, a saber o fêmur, a tíbia, a fíbula, o metatarso, o úmero, o rádio, a ulna e o metacarpo¹ como ilustrado na Fig. 2.3.)

O problema foi atacado pela primeira vez por Galileu Galilei no século XVII [2]. Galileu percebeu que o diâmetro dos ossos dos vertebrados deveria crescer mais rápido do que seu comprimento para que a tensão de compressão não aumentasse com a massa (Fig. 2.4). Consideremos dois animais geometricamente idênticos, exceto pelo fato de o maior deles ter todas as dimensões lineares duas vezes maior do que o outro. Neste caso, as áreas do animal maior são 2^2 vezes maiores que as do animal pequeno, enquanto sua massa é 2^3 vezes maior. Como a força estática imposta aos ossos é proporcional à massa, a área transversal dos ossos precisa ser 2^3 vezes maior que no animal pequeno, e não 2^2 vezes maior, a fim de manter a tensão de compressão independente da massa. (A julgar pelo desenho, entretanto, Galileu cometeu um erro de cálculo. O osso maior, que é 3 vezes mais longo que o menor, possui um diâmetro 9 vezes maior, o que é uma distorção do aumento necessário. Um aumento de 3 vezes na dimensão linear exigiria um aumento de $(3^3)^{1/2} = 5.2$ vezes no diâmetro.)

Os dados revelam que os ossos de fato não obedecem à similaridade geométrica, que seria o caso trivial em que $L \propto D \propto M^{1/3}$ [12, 14, 15]. A proposta de McMahon [9, 16], conhecida como *similaridade elástica*, de que a carga crítica de Euler (flambagem) determinaria a escala dos ossos assim como de outras grandezas morfológicas e fisiológicas, é a proposta mais interessante e foi testada em muitos trabalhos posteriores. Embora

¹O metatarso e o metacarpo nem sempre são tão longos quanto os demais ossos longos.

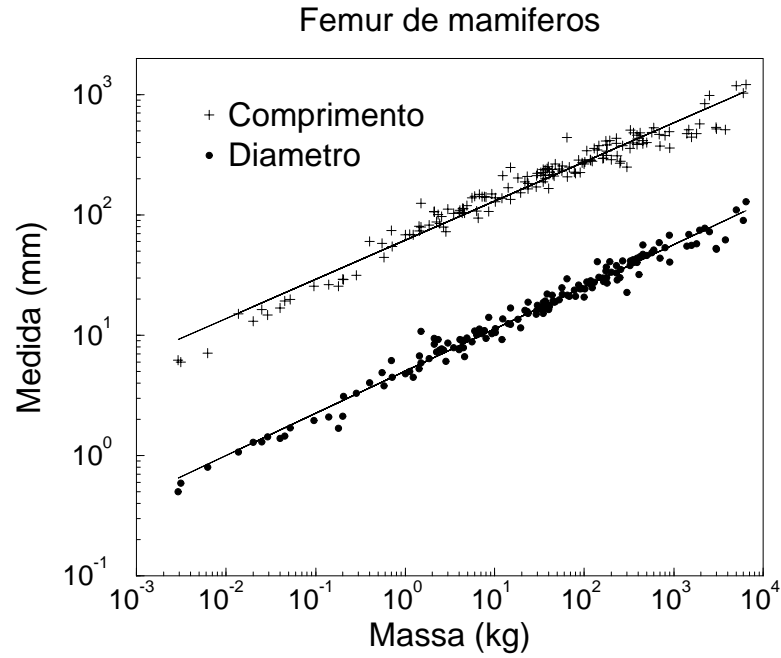


Figura 2.2: Variação do comprimento L e do diâmetro D do fêmur nos mamíferos. Tanto L quanto D obedecem aproximadamente a uma lei de potência em função da massa corporal M nas 6 ordens de magnitude de variação da massa. L e D estão em milímetros; M está em kg. Os dados foram retirados das refs. [15,19,20,33].

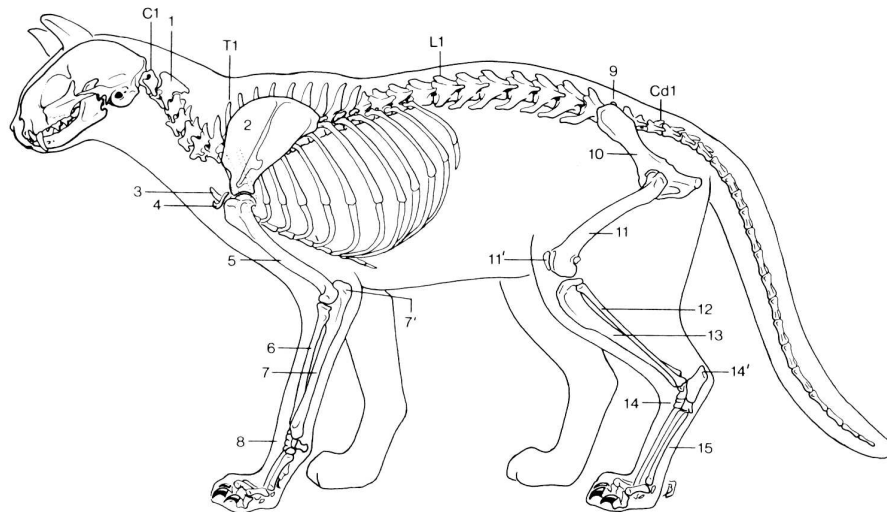


Figura 2.3: Esqueleto de um gato. Os ossos longos são: 5.Úmero, 6.Rádio; 7.Ulna; 11.Fêmur; 12.Fíbula; 13.Tíbia; 15.Metatarso. Figura retirada de [13].

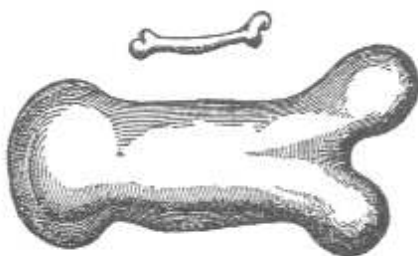


Figura 2.4: Desenho original de Galileu Galilei em seu livro *Diálogos*, onde ele prevê que o diâmetro dos ossos deve crescer mais rápido do que o comprimento, a fim de suportar o peso, que cresce com o cubo do comprimento. Figura retirada de [2].

certo suporte experimental tenha sido encontrado em ungulados² e antílopes [17, 18], os expoentes preditos não estão de acordo com dados experimentais que consideram intervalos de massa maiores [14, 15, 19–21]. Apesar da limitação desse modelo estar bem documentada [12, 14, 15, 19, 20, 22, 23], ainda não apareceu um modelo que explique os dados experimentais.

Os mamíferos adotam várias estratégias para evitar as consequências do tamanho grande. Biewener [24–26] demonstrou que os mamíferos grandes mantêm as tensões máximas nos ossos independentes da massa corporal através de i) uma mudança para uma postura mais ereta e ii) um aumento alométrico no braço de alavanca dos músculos que agem contra a gravidade. Esses artifícios diminuem os torques nas juntas em relação à magnitude das forças do solo, reduzindo assim as forças específicas (força/massa) agindo nos ossos. É notório também que os mamíferos grandes não têm a mesma agilidade dos menores, o que provavelmente está associado à redução nas forças impostas nos ossos durante a locomoção e à manutenção de fatores de segurança independentes da massa [14, 15, 26].

Entretanto, a flambagem é uma instabilidade mecânica que pode ocorrer mesmo quando as tensões em uma estrutura são mantidas sob controle. A flambagem de Euler acontece quando a força axial agindo em um pilar ultrapassa um certo limiar, conhecido como carga crítica. Neste trabalho demonstramos que os ossos longos dos mamíferos não são esbeltos o suficiente para serem suscetíveis à flambagem de Euler e que a alometria dos ossos longos é governada pela necessidade de resistir às tensões de compressão e de flexão. Propomos um modelo, baseado nessa necessidade de manter um fator de segurança para as tensões de escoamento, que prediz expoentes alométricos em acordo com o experimento e que ainda explica outros aspectos da alometria dos ossos, como por exemplo a alometria diferencial. Nosso trabalho, de forma análoga aos artigos de West e colaboradores [10, 11], mostra que as leis alométricas na Biologia podem ser compreendidas quando as restrições

²Ungulados são mamíferos com cascos, tal como zebras, cavalos e antílopes.

físicas e geométricas do sistema são consideradas.

Um leitor especializado notará que, embora o modelo da similaridade elástica (MSE) tenha sido inicialmente proposto em termos de colunas carregadas em suas extremidades e sujeitas à falhar por flambagem de Euler, as mesmas relações de escala podem ser derivadas para uma viga sujeita à flexão pura [16]. McMahon considerou um cilindro na horizontal, suportado por suas extremidades, e sujeito à flexão por uma força proporcional ao seu peso e demonstrou que, se colunas de diferentes tamanhos mantêm $L \propto D^{2/3}$, a razão deflexão no centro δ sobre comprimento L é mantida constante [16]. Nessa abordagem, o MSE afirma que as deflexões dos ossos longos são proporcionais a seus comprimentos em animais de diferentes tamanhos. Essa segunda derivação do modelo, entretanto, não é consistente com a observação experimental de que as tensões máximas nos ossos longos dos mamíferos são independentes da massa [24–26], já que o cilindro descrito acima estaria submetido a tensões proporcionais a $L^{1/2}$, se δ/L for mantido constante. Como Currey declara, “A idéia básica do McMahon foi que os organismos são projetados de tal forma que o que deve ser controlado são as deflexões da estrutura e não as tensões” [12]. Uma vez que essa derivação do MSE não está de acordo com o experimento, a hipótese que permanece a ser testada é a possibilidade da flambagem de Euler.

Currey investigou essa possibilidade [12]. Sua análise indicou que alguns ossos longos podem quebrar por flambagem se forem submetidos a uma compressão excessiva. Entretanto, Currey considerou apenas a compressão axial, não levando em conta que os ossos longos dos mamíferos estão submetidos a um alto grau de flexão [26–28]. Como mencionamos acima, nós mostraremos que, sob compressão mais flexão, os ossos longos dos mamíferos não são esbeltos o suficiente para serem vulneráveis à flambagem de Euler.

É importante observar que, além da flambagem de Euler, uma viga cilíndrica, como um osso longo, também pode falhar por flambagem local³. Esta é caracterizada pela deformação de uma pequena parte ao invés da deformação da estrutura completa, como acontece na flambagem de Euler. Ela ocorre quando a espessura da parede é tão pequena em relação ao diâmetro que a estrutura não suporta a parede o suficiente para evitar que ela dobre em uma direção fraca [12]. Currey e Alexander investigaram a possibilidade de que ossos de mamíferos e aves falhem devido à flambagem local [29]. Eles encontraram que a razão R/t do diâmetro do meio da parede (R) para a espessura (t) nos ossos dos mamíferos é na média 2.0, o que é muito inferior ao limiar ($R/t = 14$) acima do qual os ossos estariam ameaçados de falhar por flambagem local.

O restante deste capítulo organiza-se da seguinte forma. Na próxima seção, introduzimos as expressões matemáticas envolvidas na análise de tensões. O modelo da similaridade elástica é apresentado na seção 2.3 e as hipóteses do nosso modelo são apresentadas na seção 2.4. Na seção 2.5, exploramos as consequências das nossas hipóteses e comparamos nossas previsões com resultados experimentais. Finalmente, fazemos um sumário dos nossos resultados na última seção.

³Este é o tipo de ruptura observado quando esmagamos um copo plástico ou uma lata de refrigerante por compressão axial.

2.2 Teoria de resistência dos materiais

A fim de projetar uma estrutura, os engenheiros devem conhecer as propriedades mecânicas dos materiais a serem utilizados e as forças que serão impostas sobre o conjunto. Isso permite o cálculo das dimensões necessárias para resistir às tensões geradas. Analogamente, as tensões em um osso não podem exceder as tensões de escoamento do material, pois isso causaria deformações irreversíveis. De fato, vários pesquisadores demonstraram que as tensões máximas no osso vivo mantém um fator de segurança⁴ de aproximadamente 3 para as tensões de escoamento [24–26, 30, 31].

A tensão de compressão σ_c agindo em um pilar submetido à compressão pura é

$$\sigma_c = \frac{F_{ax}}{\mathcal{A}} \quad , \quad (2.2)$$

onde \mathcal{A} é a área da seção reta e F_{ax} é a força axial. Por outro lado, uma força transversal F_t produz uma tensão de flexão σ_f igual a

$$\sigma_f = \frac{F_t r y}{I} \quad , \quad (2.3)$$

onde r é o braço de alavanca da força, y é a distância do plano neutro da flexão até um ponto específico e I é o segundo momento de área. Para um cilindro oco de diâmetro interno $d_{int} = KD$, onde $0 < K < 1$, $\mathcal{A} = (1 - K^2)\pi D^2/4$ e $I = (1 - K^4)\pi D^4/64$ [32].

Outra falha mecânica que deve ser evitada é a instabilidade mecânica conhecida como flambagem. Esta ocorre quando a força axial aplicada a um pilar ultrapassa um certo limiar. Para uma viga biarticulada, este limiar é dado pela carga crítica de Euler [32]

$$F_{flambagem} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad , \quad (2.4)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material. Na seção 2.5, faremos alguns cálculos para determinar qual desses modos de falha é relevante para a alometria dos ossos longos dos mamíferos.

2.3 O modelo da similaridade elástica

Em 1973, Thomas McMahon propôs que a flambagem seria a chave para explicar a alometria das dimensões dos ossos e das árvores, assim como de outros parâmetros morfológicos e fisiológicos [9, 16]. Como vimos na seção anterior, existe uma carga máxima que uma coluna suporta sem flambar (Eq. (2.4)). McMahon considerou uma coluna

⁴O fator de segurança é a razão entre a tensão de escoamento do material e a tensão máxima permitida na estrutura.

cilíndrica ($I_{cilindro} = \pi D^4/64$) submetida a uma carga proporcional à sua massa, ou seja, $F_{flambagem} \propto M_{coluna}$. Usando essa hipótese na Eq. (2.4) e considerando o módulo de elasticidade E constante, temos que

$$F_{flambagem} \propto \left(\frac{D^4}{L^2} \right) \propto M_{coluna} . \quad (2.5)$$

Mudanças na geometria da coluna e na forma de aplicação da carga (se é uniformemente distribuída ou se é aplicada no centro de massa) alteram apenas a constante de proporcionalidade da equação acima [9]. Para prever os expoentes alométricos, McMahon precisou de uma hipótese adicional, a saber, que a massa da coluna é proporcional à massa corporal ($M_{coluna} \propto LD^2 \propto M$). Substituindo esta hipótese na Eq. (2.5), encontramos as previsões da similaridade elástica:

$$L \propto M^{1/4} , \quad (2.6)$$

$$D \propto M^{3/8} , \quad (2.7)$$

$$L \propto D^{2/3} . \quad (2.8)$$

McMahon testou a previsão de que $L \propto D^{2/3}$ em um grupo de árvores em que E/ρ é constante (ρ é a densidade) [9]. A figura 2.5 mostra que a variação da altura de árvores norte-americanas com o diâmetro na base do tronco suporta a hipótese, embora haja muita variação em torno da melhor reta. A figura também mostra que o critério de McMahon realmente impõe um tamanho máximo para árvores de um dado diâmetro, já que nenhuma árvore é maior que a altura máxima prevista. McMahon também testou a hipótese para ossos de mamíferos ungulados [17]. Os resultados, mostrados na tabela 2.1, estão em bom acordo com a previsão. Um estudo subsequente de Alexander com antílopes também encontrou expoentes alométricos compatíveis com a teoria (tabela 2.2) [18].

Entretanto, quando intervalos maiores de massa foram considerados, tornou-se claro que o modelo não explica a alometria dos ossos [14, 15, 19–22, 33, 34]. Biewener, por exemplo, analisou as dimensões dos ossos longos de 32 mamíferos com massas variando entre 0.020 e 3750 kg. Os expoentes alométricos encontrados estão na tabela 2.3 e refutam a teoria de McMahon, já que o expoente para o comprimento é significativamente maior que o previsto. Uma limitação do MSE é que ele prevê os mesmos expoentes para mamíferos grandes e pequenos, enquanto os dados indicam que as dimensões dos ossos não obedecem uma lei de potência pura [14, 15, 22, 51].

O melhor teste experimental do MSE foi feito por Christiansen [14, 15]. Além de coletar um conjunto de dados maior que todos os estudos anteriores, este autor aplicou testes estatísticos para verificar se os expoentes experimentais são significativamente diferentes dos previstos. Christiansen mediu o comprimento e o diâmetro dos ossos de 612 mamíferos de 189 espécies, sendo que as massas corporais eram conhecidas em 98 animais

Tabela 2.1: Teste da previsão que o comprimento L e o diâmetro D dos ossos longos obedecem à relação $L \propto D^\gamma$, com $\gamma = 2/3 = 0.67$. Os expoentes foram calculados por McMahon [17] a partir de dados para 118 animais de 87 espécies de ungulados. As massas dos animais não eram conhecidas. r é o coeficiente de correlação.

Ungulados		
Osso	Expoente γ	r
Úmero	0.65	0.93
Ulna	0.62	0.85
Fêmur	0.72	0.96
Tíbia	0.60	0.88
Metatarso	0.68	0.82
Média	0.65	—

Tabela 2.2: Expoentes alométricos l e d que descrevem a variação do comprimento e do diâmetro dos ossos em função da massa corporal segundo as leis de potência $L \propto M^l$ e $D \propto M^d$. Resultados obtidos por Alexander [18] usando 8 animais de 7 espécies com massas entre 3 e 130 kg.

Antílopes		
Osso	l	d
Úmero	0.26 ± 0.06	0.38 ± 0.03
Ulna	0.31 ± 0.06	—
Metacarpo	0.26 ± 0.13	0.36 ± 0.05
Fêmur	0.26 ± 0.04	0.33 ± 0.07
Tíbia	0.23 ± 0.04	0.31 ± 0.07
Metatarso	0.25 ± 0.08	0.34 ± 0.04
Média	0.26	0.34

Tabela 2.3: Expoentes alométricos l e d que descrevem a variação do comprimento e do diâmetro dos ossos em função da massa corporal segundo as leis de potência $L \propto M^l$ e $D \propto M^d$. Resultados obtidos por Biewener [20] usando 32 espécies de mamíferos com massas entre 0.02 e 3750 kg.

Mamíferos		
Osso	l	d
Úmero	0.31 ± 0.03	0.36 ± 0.02
Rádio	0.32 ± 0.03	0.37 ± 0.03
Fêmur	0.31 ± 0.03	0.34 ± 0.02
Tíbia	0.28 ± 0.03	0.34 ± 0.03
Média	0.31 ± 0.02	0.35 ± 0.02

Tabela 2.4: Expoentes alométricos l e d para o comprimento e diâmetro, respectivamente, dos principais ossos longos dos mamíferos. ‘Média 1’ é a média para todos os 6 ossos, enquanto que ‘média 2’ é a média para o fêmur, a tíbia, o úmero e o rádio. Na parte de baixo da tabela, fornecemos os valores dos expoentes para ulnas e fíbulas não esbeltas ($L/D < 26$). Os dados foram retirados de [15]. Os expoentes são dados para dois métodos de regressão linear: regressão de mínimos quadrados (least square regression, l_{sr}) e ‘reduced major axis’ (rma). r_l e r_d são os coeficientes de correlação. Maiores explicações são dadas no texto.

Todos os mamíferos - Christiansen						
Ossos	l_{lsr}/l_{rma}	d_{lsr}/d_{rma}	$2d$	$3d - l$	r_l	r_d
Fêmur	0.301/0.309	0.355/0.360	0.710/0.720	0.764/0.771	.976	.986
Tíbia	0.257/0.277	0.360/0.365	0.720/0.730	0.823/0.818	.929	.985
Fíbula	0.225/0.243	0.338/0.368	0.676/0.736	0.789/0.861	.926	.918
Úmero	0.300/0.311	0.382/0.386	0.764/0.772	0.846/0.847	.964	.989
Rádio	0.300/0.321	0.387/0.401	0.774/0.802	0.861/0.882	.933	.964
Ulna	0.302/0.318	0.355/0.458	0.710/0.916	0.763/1.056	.949	.776
Média 1	0.281/0.297	0.363/0.390	0.726/0.779	0.808/0.873	—	—
Média 2	0.290/0.305	0.371/0.378	0.742/0.756	0.824/0.830	—	—
Todos os mamíferos - Christiansen/não-esbeltos						
Fíbula	0.235/0.241	0.279/0.286	0.558/0.572	0.602/0.617	0.979	0.978
Ulna	0.288/0.298	0.376/0.383	0.752/0.766	0.840/0.851	0.966	0.980

Tabela 2.5: Expoentes alométricos l e d experimentais para ossos longos não-esbeltos ($L/D < 26$) usando os dados de Alexander et al. [19], Bertram e Biewener [20,33] e Christiansen [15]. Os mamíferos são considerados pequenos ou grandes em relação a $M = 50$ kg, como proposto por Christiansen [15]. ‘Média 2’ é a média definida na tabela 2.4.

Mamíferos pequenos - $M < 50$ kg						
	Alexander		Bertram e Biewener		Christiansen	
Ossos	l_{lsr}/l_{rma}	d_{lsr}/d_{rma}	l_{lsr}/l_{rma}	d_{lsr}/d_{rma}	l_{lsr}/l_{rma}	d_{lsr}/d_{rma}
Fêmur	0.398/0.404	0.369/0.371	0.372/0.384	0.380/0.392	0.327/0.342	0.344/0.362
Tíbia	0.344/0.350	0.379/0.383	0.362/0.376	0.388/0.403	0.343/0.364	0.373/0.387
Úmero	0.393/0.399	0.382/0.384	0.382/0.395	0.391/0.405	0.321/0.351	0.386/0.401
Rádio	—	—	0.397/0.419	0.394/0.414	0.364/0.407	0.453/0.481
Ulna	0.383/0.389	—	—	—	0.288/0.336	0.371/0.406
Média 2	0.378/0.384	0.377/0.379	0.378/0.394	0.388/0.404	0.339/0.366	0.389/0.408
Mamíferos grandes - $M > 50$ kg						
	Alexander		Bertram e Biewener		Christiansen	
Ossos	l_{lsr}/l_{rma}	d_{lsr}/d_{rma}	l_{lsr}/l_{rma}	d_{lsr}/d_{rma}	l_{lsr}/l_{rma}	d_{lsr}/d_{rma}
Fêmur	0.325/0.385	0.315/0.329	0.284/0.326	0.308/0.344	0.280/0.310	0.354/0.367
Tíbia	0.198/0.248	0.304/0.334	0.142/0.207	0.315/0.358	0.203/0.279	0.338/0.356
Úmero	0.323/0.371	0.365/0.381	0.286/0.327	0.320/0.358	0.288/0.323	0.359/0.370
Rádio	—	—	0.225/0.297	0.430/0.473	0.275/0.346	0.311/0.362
Ulna	0.282/0.319	—	—	—	0.255/0.290	0.405/0.431
Média 2	0.282/0.335	0.328/0.348	0.234/0.289	0.343/0.383	0.262/0.311	0.341/0.364

de 79 espécies. Os resultados estão na tabela 2.4. Ele concluiu que as dimensões dos ossos não são governadas pelo modelo da similaridade elástica ($L \propto M^{1/4}$ e $D \propto M^{3/8}$), nem tampouco pela similaridade geométrica ($L \propto D \propto M^{1/3}$). Christiansen também confirmou alegações anteriores de que os dados não podem ser ajustados por uma lei de potência pura (ver tabela 2.5).

A alometria dos ossos é, portanto, um problema de escala na Biologia sem explicação teórica [12]. Na próxima seção, vamos propor um modelo e, na seção 2.5, mostraremos que este fornece previsões compatíveis com os dados experimentais.

2.4 Modelo

Nosso argumento começa na direção proposta por McMahon [9, 16], a saber: (a) um osso longo pode ser descrito como um cilindro de comprimento L e diâmetro D ; (b) a alometria dos ossos longos é determinada pelas forças elásticas que o osso precisa resistir; (c) as propriedades mecânicas, tais como o módulo de elasticidade (E) e as tensões de escoamento por compressão e tração ($\sigma_{esc\ trac}$ e $\sigma_{esc\ comp}$) são independentes da massa corporal. Ao invés de considerar apenas a instabilidade elástica (flambagem), nosso modelo baseia-se nas seguintes hipóteses adicionais: (d) embora a distribuição de forças em um osso longo seja complexa, a resultante das forças é tal que há apenas dois modos relevantes para a alometria dos ossos: uma componente de tensão de compressão σ_c e uma componente de flexão σ_f , causadas, respectivamente, por uma força axial F_{ax} e uma

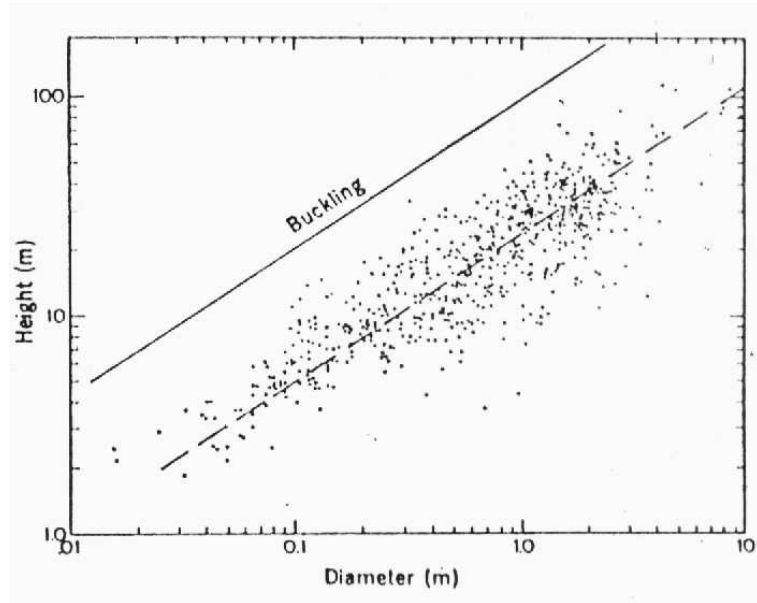


Figura 2.5: Altura de árvores norte-americanas versus diâmetro na base do tronco. A altura das árvores é limitada pela flambagem (*buckling*), já que nenhuma árvore está acima da linha cheia (limiar de flambagem). Figura retirada de [9].

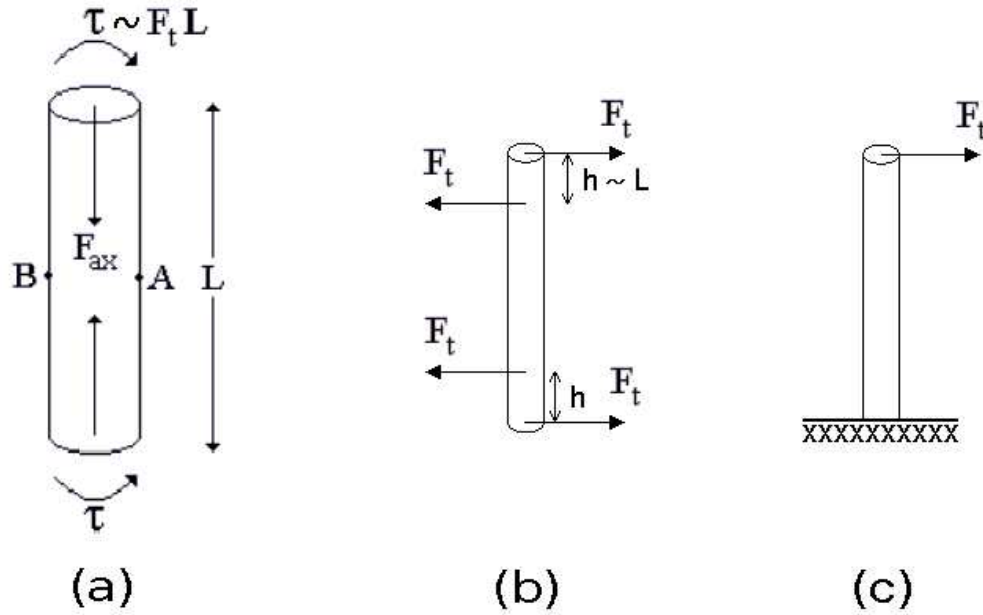


Figura 2.6: (a) Descrevemos os ossos longos dos mamíferos como um cilindro submetido a uma força axial F_{ax} e a um momento fletor $\tau \propto F_t L$. Esse momento fletor aparece devido à ação de forças perpendiculares ao eixo do osso como ilustrado em (b) e em (c).

força transversal F_t (veja a Fig. 2.6); (e) as tensões de compressão e de tração máximas no animal vivo, as quais ocorrem na porção central do osso durante saltos, acelerações, locomoção à velocidade máxima ou outras atividades vigorosas, devem manter um fator de segurança (F_s), independente da massa corporal, em relação às tensões de escoamento. A flambagem deve ser evitada pelo mesmo fator de segurança; (f) a razão $K = d_{int}/D$ também independe da massa.

Todas essas hipóteses são bastante intuitivas. A forma cilíndrica que assumimos para a geometria dos ossos longos é a mais simples possível, mas não deixa de ser realista. Esta hipótese provavelmente não afeta a previsão dos expoentes alométricos (universalidade), mas pode ter uma pequena influência no valor da razão crítica $(L/D)_{cr}$ que divide os regimes de falha por flambagem e por tensões de escoamento (ver seção 2.5). A hipótese de que a razão K do diâmetro interno para o externo é constante também é a mais simples possível, caso desejemos considerar que um osso longo é oco. A suposição de que a alometria dos ossos é determinada pelas forças elásticas que o osso deve resistir é natural, já que a função principal dos ossos longos é fornecer uma estrutura rígida para permitir o movimento. A hipótese de que as propriedades mecânicas dos ossos são independentes da massa, também é razoável, uma vez que acreditamos que os mamíferos são constituídos essencialmente dos mesmos materiais.

Embora McMahon tenha considerado apenas a compressão axial, é improvável que essa seja a forma principal de carregamento dos ossos longos, pois uma pequena componente de força transversal é suficiente para causar grandes tensões de flexão. Finalmente, se acreditamos que os mamíferos não carregam peso desnecessário, é natural supor que os ossos mantêm um fator de segurança pequeno para as tensões de escoamento e que esse fator de segurança é o mesmo para o escoamento por tração ou compressão e para evitar

a flambagem.

Todas nossas hipóteses são suportadas por dados experimentais. A suposição (c) está de acordo com medidas experimentais que sugerem que as propriedades físicas dos ossos são as mesmas para todos os mamíferos [26, 35]. A hipótese (d) é suportada por medidas *in vivo*, que mostram que, na maioria dos casos, flexão e compressão são os modos principais de carregamento dos ossos longos e que as tensões principais são praticamente paralelas ao eixo longitudinal do osso [26–28]. A suposição (e) é corroborada pela observação experimental de que as tensões de tração e compressão máximas no animal vivo são aproximadamente 1/3 do valor das respectivas tensões de escoamento e ocorrem na porção central do osso [24–26, 30, 31]. A hipótese (f) é confirmada em vários estudos experimentais. Currey e Alexander coletaram valores de K para vários mamíferos [29]. Analisando seus dados, encontramos que K não se correlaciona com a massa corporal e seu valor médio é 0.57 ± 0.08 . Além disso, se K é constante, esperamos encontrar $\mathcal{A} \propto D^2$ e $I \propto \mathcal{A}^2 \propto D^4$. De fato, usando os dados de Selker e Carter [36], encontramos que $\mathcal{A} \propto D^{1.98}$ e que $I \propto \mathcal{A}^{1.98}$. Biewener [35] também relata que $I \propto \mathcal{A}^{1.99}$.

2.5 Resultados e Discussão

Flambagem de Euler vs. tensões de escoamento: qual desses mecanismos de ruptura determina a alometria dos ossos longos dos mamíferos?

Consideremos um pilar cilíndrico carregado como na Fig. 2.6(a). O pilar pode falhar por dois mecanismos distintos: ele pode ser permanentemente deformado caso as tensões de escoamento sejam alcançadas e, se ele for esbelto o suficiente, flambará antes que o escoamento ocorra. A razão crítica $(L/D)_{cr}$ que separa esses regimes de falha pode ser estimada como se segue. Adotando a convenção de que tensões de tração são positivas e de compressão negativas, a tensão total no ponto A (Fig. 2.6(a)) é dada por $\sigma_A = -\sigma_c - \sigma_f$, onde σ_c é dado pela Eq. (2.2) e $\sigma_f \propto F_t LD/I$ como na Eq. (2.3). Similarmente, a tensão no ponto B é $\sigma_B = -\sigma_c + \sigma_f$. Vamos considerar aqui apenas os valores máximos das tensões envolvidas nos ossos longos, de forma que nossa hipótese (e) implica que, no carregamento máximo, $\sigma_A = \sigma_{esc\ comp}/F_s$ e $\sigma_B = \sigma_{esc\ trac}/F_s$. Definindo $c = \sigma_{esc\ trac}/\sigma_{esc\ comp}$, segue que (note que $\sigma_{esc\ comp}$ e c são negativos com essas definições)

$$\sigma_B = c \sigma_A , \quad (2.9)$$

$$\sigma_f = \frac{(1 - c)}{(1 + c)} \sigma_c \quad \text{e} \quad (2.10)$$

$$\sigma_A = -\frac{2\sigma_c}{(1 + c)} = -\frac{2\sigma_f}{(1 - c)} . \quad (2.11)$$

Usando o valor experimental $c = (128 \pm 11) \text{MPa} / (-180 \pm 13) \text{MPa} = -0.71 \pm 0.11$ [12], este resultado implica que a componente de flexão (σ_f) é responsável por aproximadamente $(1-c)/2 = 86 \pm 6\%$ da tensão máxima de compressão (σ_A) no osso. Para mostrar isso, note que $|\sigma_f/\sigma_A| = (1-c)/2 = 0.855 \pm 0.055$, enquanto que $|\sigma_c/\sigma_A| = (1+c)/2 = 0.145 \pm 0.055$. Essa previsão está de acordo com medidas *in vivo*, obtidos com placas medidoras de pressão, para a tíbia que mostram que σ_f representa 84.4% da tensão total em cães e 83.5% em cavalos durante a locomoção [27] e com valores para o búfalo (81%) e elefante (89%) obtidos a partir da análise de filmes de animais galopando [37].

A força axial máxima $F_{ax}^{(max)}$ é encontrada substituindo $\sigma_c = F_{ax}^{(max)}/\mathcal{A}$ na Eq. (2.11), o que fornece $F_{ax}^{(max)} = (1+c)|\sigma_A|\mathcal{A}/2$. Uma vez que $\sigma_A = \sigma_{esc \text{ comp}}/F_s$, a força axial máxima atuando sobre o osso é dada por

$$F_{ax}^{(max)} = \frac{1}{2}(1+c)\mathcal{A} \frac{|\sigma_{esc \text{ comp}}|}{F_s} . \quad (2.12)$$

Na hipótese (e), assumimos que a falha por flambagem é evitada pelo mesmo fator de segurança. Logo, a maior força axial aceitável é

$$F_{flambagem}^{(max)} = \frac{F_{flambagem}}{F_s} = \frac{\pi^2 EI}{F_s L^2} . \quad (2.13)$$

Definimos o parâmetro adimensional

$$f = \frac{F_{ax}^{(max)}}{F_{flambagem}^{(max)}} , \quad (2.14)$$

i.e., a razão da componente axial da força quando as tensões de escoamento são atingidas para a força axial que causa flambagem. Para $f < 1$, temos que $F_{ax}^{(max)} < F_{flambagem}^{(max)}$, de forma que as tensões de escoamento são alcançadas antes que a flambagem aconteça e o osso falha devido a deformações permanentes indesejadas. Por outro lado, se $f > 1$, o osso flamba antes de escoar. Portanto, $f = 1$ é a fronteira que separa os dois regimes de falha.

Vamos agora determinar se os ossos longos dos mamíferos estão no intervalo $f < 1$, onde tensões de escoamento são a preocupação principal, ou na região $f > 1$, para a qual a flambagem é a verdadeira ameaça. Substituindo as Eqs. (2.12) e (2.13) na Eq. (2.14), encontramos que

$$f = \frac{1}{2} \frac{(1+c)}{\pi^2 E} |\sigma_{esc \text{ comp}}| \left(\frac{\mathcal{A} L^2}{I} \right) . \quad (2.15)$$

Os valores experimentais dos parâmetros acima são $E = 22 \pm 5 \text{ GPa}$, $\sigma_{esc \text{ comp}} = -180 \pm 13 \text{ MPa}$, $c = -0.71 \pm 0.11$ [12]. Assim, encontramos que a flambagem de Euler é evitada contanto que $I/\mathcal{A}L^2 > 1.2 \times 10^{-4}$. Infelizmente os artigos experimentais geralmente se limitam a estudar o comprimento L e o diâmetro D dos ossos, e raramente fornecem a área da seção reta \mathcal{A} e o segundo momento de área I . Excepcionalmente, Selker e

Carter [36] listam \mathcal{A} , I e L para 40 ossos longos de 12 espécies de artiodáctilos. Nos seus dados, nenhum osso pertence ao regime de ruptura por flambagem e o valor mínimo de $I/\mathcal{A}L^2$ é 3.3×10^{-4} , que é 2.75 vezes maior que o valor da fronteira. Vale a pena notar que Biewener [35] também fornece medidas diretas de \mathcal{A} e I . Contudo, uma vez que L não é relatado neste artigo, a equação (2.15) não pôde ser usada para determinar se esses ossos são vulneráveis à flambagem de Euler.

Vimos na seção 2.2 que, para um cilindro oco de diâmetro interno $d_{int} = KD$, temos $\mathcal{A} = (1 - K^2)\pi D^2/4$ e $I = (1 - K^4)\pi D^4/64$. Substituindo esses valores na equação (2.15), encontramos que

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{cr} = \left(\frac{1}{8(1+c)} \frac{\pi^2 E}{|\sigma_{esc \ comp}|} (1 + K^2)\right)^{1/2} \quad (2.16)$$

é a razão ‘crítica’ L/D que corresponde a $f = 1$. Substituindo o resultado experimental $K = 0.57 \pm 0.08$ e as propriedades mecânicas dos ossos relacionadas no parágrafo anterior, encontramos

$$(L/D)_{cr} = 26 \pm 8 \quad (2.17)$$

Podemos agora compreender porque o modelo da similaridade elástica foi incapaz de explicar os dados experimentais. Analisamos uma grande quantidade de dados disponíveis na literatura [15, 19, 20, 33] e descobrimos que os ossos longos raramente tem $L/D > 26$. O fêmur, o úmero e a tíbia nunca são mais esbeltos que $L/D = 26$. Apenas 2 de um total de 117 raios são mais esbeltos que $(L/D)_{cr}$. Por outro lado, ulnas e fíbulas ultrapassam este limite com frequência (27 no total de 68 ulnas examinadas e 35 fíbulas no total de 47 excederam $L/D = 26$). Entretanto, isso não implica necessariamente que a flambagem de Euler determina as dimensões desses ossos; é mais provável que a esbelteza da ulna e da fíbula reflita simplesmente o papel secundário desses ossos no suporte do peso em várias espécies (ver refs. [14, 15]).

É importante notar que a incerteza no valor de $(L/D)_{cr}$ é apreciável como consequência da variação observada experimentalmente nas propriedades físicas (E , $\sigma_{esc \ trac}$ e $\sigma_{esc \ comp}$) e geométricas (K) dos ossos. Entretanto, as conclusões acima continuariam válidas mesmo se tomássemos a menor estimativa para $(L/D)_{cr}$, a saber, $(L/D)_{cr} = 18$.

Determinando os expoentes alométricos

A alometria dos ossos longos dos mamíferos é descrita, analogamente à Eq. (2.1), em termos dos expoentes alométricos d e l que relacionam o diâmetro e o comprimento à massa corporal através das leis de potência

$$D \propto M^d \quad \text{e} \quad L \propto M^l, \quad (2.18)$$

(M varia em um intervalo de 6 ordens de magnitude; $5 \times 10^{-3} < M < 5 \times 10^3$ kg). Vamos mostrar agora que a invariância por escala das propriedades mecânicas dos ossos, do fator

de segurança e da razão K gera a dependência tipo lei de potência das dimensões dos ossos em função da massa corporal (Eq. (2.18)). Como ilustrado na Fig. 2.6(a), descrevemos a força resultante agindo na metade de um osso por duas componentes, a saber, uma componente axial F_{ax} e uma transversal F_t . A princípio, não há motivo para assumir que no carregamento máximo, as componentes $F_{ax}^{(max)}$ e $F_t^{(max)}$ sejam proporcionais uma a outra. Por isso, consideramos que cada componente escala com seu próprio expoente alométrico, i.e., $F_{ax}^{(max)} \propto M^{a_x}$ e $F_t^{(max)} \propto M^{a_t}$. Abaixo, veremos que de forma geral $a_x \neq a_t$. Os expoentes a_x e a_t serão deduzidos dos dados experimentais para a escala da força muscular, da força de reação do solo e de medidas diretas das forças atuando em um osso longo.

Para $f < 1$, o osso falha quando as tensões máximas atingem as tensões de escoamento. Uma vez que as tensões de escoamento e os fatores de segurança são independentes da massa corporal (hipóteses (c) e (e)), a Eq. (2.12) implica que $F_{ax}^{(max)} \propto \mathcal{A}$. Substituindo $\mathcal{A} \propto D^2 \propto M^{2d}$, encontramos a relação de escala $2d = a_x$ (aqui usamos a hipótese (f)).

A equação (2.3) implica que a força transversal máxima atuando em um osso é $F_t^{(max)} \propto \sigma_f^{(max)} I/DL$. A partir da Eq. (2.11), temos que a tensão de flexão máxima $\sigma_f^{(max)}$ no osso é $\sigma_f^{(max)} = (1-c)|\sigma_{esc\ comp}|/2F_s$, que é independente da massa. Conseqüentemente $F_t^{(max)} \propto I/DL \propto M^{3d-l}$ e, sendo que $F_t^{(max)} \propto M^{a_t}$, temos nossa segunda relação de escala, que é $3d - l = a_t$. Portanto, os expoentes de escala para ossos não-esbeltos ($L/D < 26 \pm 8$) são

$$d = \frac{a_x}{2} \quad \text{e} \quad l = \frac{3a_x}{2} - a_t \quad . \quad (2.19)$$

A fim de estimar d e l , usaremos os valores experimentais de a_x e a_t . Embora McMahon tenha assumido que $F_{flambagem} = F_{ax} \propto M$ ($a_x = 1.0$) [9,16], o carregamento de um osso longo não é tão simples. O procedimento tradicional [37–39] para avaliar as forças atuando nos ossos a partir de dados de plataformas de força, consiste em igualar os momentos exercidos pela força muscular ($F_{músculo}$) e pela força de reação do solo (F_{solo}): $F_{músculo}r = F_{solo}R$, onde r e R são os braços de alavanca definidos na Fig. 2.7. As forças exercidas no osso podem ser descritas⁵, portanto, como $F_{ax} = F_{músculo} \cos \alpha_m + F_{solo} \cos \alpha_g$ e $F_t = -F_{músculo} \sin \alpha_m + F_{solo} \sin \alpha_g$, onde α_m e α_g são medidos com respeito ao eixo longitudinal do osso (ver Fig. 2.7). Uma vez que as forças musculares são praticamente paralelas ao eixo do osso ($\alpha_m \leq 10^\circ$) e $F_{músculo} \gg F_{solo} \cos \alpha_g$ (porque $\cos \alpha_g < 1$ e, em geral, $r < R$), assumimos que $F_{ax} \propto F_{músculo}$ e $F_t \propto F_{solo} \sin \alpha_g$.

A dependência de F_{ax} com a massa corporal é determinada de três formas diferentes. Primeiro, há evidências de que a tensão máxima de um músculo é aproximadamente independente da escala [40], o que implica que a força muscular é proporcional à área da seção reta do músculo, de tal forma que $F_{músculo} \propto A_{músculo} \propto M^a$. Nós coletamos e calculamos médias dos expoentes alométricos da área muscular de várias fontes. Os resultados foram: $a = 0.77$ para antílopes [18], $a = 0.83$ para insetívoros e roedores [23],

⁵Assumimos aqui que as acelerações dos membros podem ser desprezadas e que o peso das patas também pode ser desprezado.

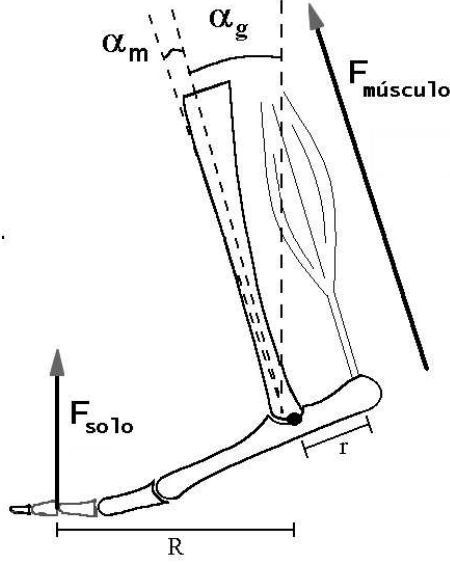


Figura 2.7: Um esquema simplificado das forças agindo na perna de um mamífero durante a locomoção. R é o braço de alavanca da força de reação do solo (F_{solo}), enquanto r é o braço de alavanca da força muscular ($F_{músculo}$). α_g e α_m são, respectivamente, os ângulos que F_{solo} e $F_{músculo}$ fazem com o eixo do músculo. Figura modificada de [24].

$a = 0.78$ para roedores [41] e $a = 0.80$ e 0.81 para os mamíferos como um todo [42, 43]. Note que mamíferos de tamanhos muito diferentes, como roedores e antílopes, têm um expoente muito parecido, com a área muscular crescendo aproximadamente como $M^{0.80}$. (Os expoentes citados acima são médias entre expoentes para diferentes músculos. Os expoentes para músculos específicos têm um intervalo maior de variação, a saber de 0.65 a 0.92). Em segundo lugar, medindo experimentalmente a ‘vantagem mecânica efetiva’ (effective mechanical advantage=EMA= $r/R \propto M^{0.26}$) e usando seu resultado anterior de que $F_{solo} \propto M$ em mamíferos pequenos, Biewener [24] deduziu que $F_{músculo} = F_{solo}R/r \propto M^{0.74}$ e predisse que a tensão máxima no músculo escala como $M^{-0.06}$, uma previsão que ainda precisa ser confirmada. (Note que este resultado é consistente com a escala da força e da área muscular mencionada acima). Em terceiro lugar, a única estimativa direta de a_x que conhecemos é de Rubin e Lanyon [27] e, apesar de ser baseada em um conjunto reduzido de espécies (apenas 5), fornece um valor ($a_x = 0.69$) consistente com a escala da força muscular descrita acima. Estes resultados permitem-nos prever que

$$d \approx 0.37, \quad (2.20)$$

já que $a_x \approx 0.74$. Essa previsão está em bom acordo com o experimento, como mostrado nas tabelas 2.4 e 2.5. Note que mesmo que escolhêssemos a estimativa mais alta ($a_x \approx 0.80$) ou a mais baixa ($a_x \approx 0.69$) para o expoente alométrico da força axial, o valor previsto para d , a saber $0.69 \leq 2d \leq 0.80$, ainda estaria dentro do intervalo experimental.

Os expoentes experimentais apresentados na tabela 2.4 foram retirados ou calculados

de Christiansen (1999) [15]. Escolhemos estes dados para testar nossas previsões por duas razões: i) eles representam a amostra mais extensa e ii) animais com modos de locomoção similares foram selecionados. (É preciso dizer que esses dados têm a inconveniência de não incluir animais com massa < 1 kg.) A concordância entre o valor previsto para d com o experimento reforça a evidência de que a alometria dos ossos é governada pela necessidade de resistir principalmente às tensões de compressão e flexão. É interessante notar que os coeficientes de correlação são muito maiores quando consideramos apenas ulnas e fíbulas não-esbeltas (tabela 2.4).

Em contraste com a hipótese de McMahon [9, 16] de que a massa de osso é proporcional à massa corporal ($D^2L \propto M$), Christiansen demonstrou recentemente que a massa de osso tem um expoente alométrico um pouco maior que 1 (na média, a massa de osso escala como $M^{1.06}$) [44]. De fato, a hipótese $D^2L \propto M$ em conjunto com nosso resultado $d \approx 0.37$ leva a uma previsão ruim para o expoente alométrico para o comprimento dos ossos ($l \approx 0.26$) em comparação com o valor experimental ($l \approx 0.30$) (ver tabela 2.4). Portanto, a escala positiva⁶ da massa dos ossos longos, apesar de fraca, não pode ser ignorada. Esse fato já havia sido apontado por Hokkanen [34].

Neste ponto vamos fazer uma digressão para comentar o trabalho pioneiro de Prange e colaboradores sobre a alometria da massa do esqueleto dos mamíferos ($M_{esqueleto}$) [45]. Desde que esse trabalho foi publicado, ele tem sido citado como evidência de que a massa do esqueleto dos mamíferos escala com uma alometria positiva, já que eles encontraram $M_{esqueleto} = 0.061M^{1.09}$ com $r = 0.992$. Seus dados, contudo, não são inteiramente conclusivos, pois dos 48 mamíferos usados no estudo, apenas o elefante tem um massa maior que 70 kg. Além disso, parece que o homem e o cachorro têm massas do esqueleto maiores do que o valor esperado para seu tamanho (ver Fig. 2.8). Fitando os dados para os 44 mamíferos com massa inferior a 12 kg pelo método dos mínimos quadrados, encontramos $M_{esqueleto} = 0.057M^{1.01 \pm 0.02}$, $r=0.993$. Em acordo com esse resultado, Bou e Casinos [46] relatam que $M_{esqueleto} = 0.042M^{1.01}$, $r=0.993$, em insetívoros e roedores. Portanto, os dados experimentais indicam que a massa do esqueleto é proporcional à massa corporal para mamíferos menores que 12 kg. É necessário coletar mais dados no intervalo de 67 kg (homem) a 6600 kg (elefante) para obter uma expressão mais confiável para o grupo completo dos mamíferos. Finalmente, notamos que a massa dos ossos escala com expoentes alométricos distintos para ossos distintos. Enquanto que as massas dos ossos longos escalam com uma alometria significativamente positiva [44, 46], as massas de outros ossos, tais como o crânio, escalam com uma alometria significativamente negativa [46].

Foi relativamente fácil estimar a_x . Em contraste, o expoente a_t é mais difícil de avaliar porque ele depende da escala da força de reação do solo (F_{solo}) e relatos experimentais para isso são escassos. Como afirmamos na seção 2.4, as tensões máximas podem ocorrer em várias atividades diferentes, tais como galopar à velocidade máxima, saltar e acelerar. Aqui avaliaremos o expoente a_t apenas durante a locomoção à velocidade máxima, pois não encontramos na literatura dados para a alometria da F_{solo} em saltos e acelerações.

⁶Se um parâmetro Y escala com uma alometria positiva, então $Y \propto M^b$ com $b > 1$. Analogamente, $b < 1$ descreve uma alometria negativa.

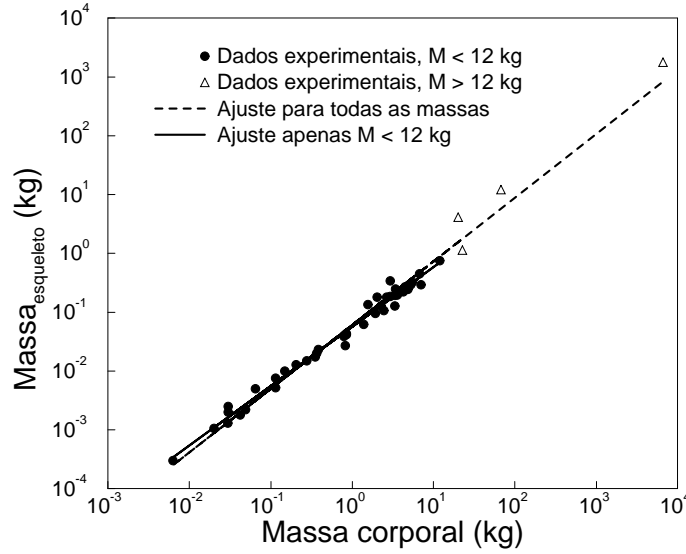


Figura 2.8: Variação da massa do esqueleto com a massa corporal nos mamíferos. Um ajuste para todos os mamíferos fornece a equação $M_{\text{esqueleto}} = 0.061M^{1.09}$, que parece indicar que $M_{\text{esqueleto}}$ cresce mais rápido que M . Contudo, ajustando uma lei de potência apenas para os dados com $M < 12$ kg, encontramos $M_{\text{esqueleto}} = 0.057M^{1.01 \pm 0.02}$. Os dados foram publicados por Prange e colaboradores [45].

Entretanto, isto não parece ser um problema, já que os picos das tensões por tração e compressão durante a locomoção mantém o mesmo fator de segurança em relação ao escoamento [24–26, 30, 31]. Isso significa que, apesar de o módulo das forças de reação do solo poder ser maior durante saltos e acelerações em comparação com a locomoção à velocidade máxima, o expoente alométrico a_t é provavelmente o mesmo para essas três atividades.

Forças de reação do solo intensas ocorrem durante a locomoção à velocidade máxima e escalam como M/β , onde β é o fator de carga (fração do passo durante a qual uma pata permanece em contato com o solo). Alexander e colaboradores relatam que em ungulados $\beta \propto M^{-0.11}$ ($r_\beta = 0.79$) para as patas dianteiras e $\beta \propto M^{-0.14}$ ($r_\beta = 0.78$) para as traseiras [48]. Quando analisamos dados alométricos, o método de regressão dos mínimos quadrados (*least square regression* ou *lsr*) não é o mais apropriado, pois ele assume que o erro está presente apenas na variável dependente. A regressão *reduced major axis* ou *rma* é melhor nesses casos porque ela leva em conta as incertezas de ambas as variáveis [14, 15, 47]. Fitando os dados do Alexander usando *rma*, obtemos os expoentes -0.14 e -0.18 , para as patas dianteiras e traseiras respectivamente. Uma vez que não há mudança de postura nos mamíferos grandes [24, 25], podemos assumir que o ângulo α_g é constante; logo $a_t \approx 0.84$ para este grupo de animais. Essa estimativa implica que $l = 3d - a_t \approx 0.27$ nos mamíferos grandes, o que está razoavelmente de acordo com os dados (veja a tabela 2.5). Por outro lado, mamíferos pequenos mudam de uma postura agachada para uma mais ereta [24, 25] e conseqüentemente o ângulo α_g diminui à medida que a massa corporal aumenta ($\alpha_g \propto M^{-0.073 \pm 0.038}$ em mamíferos pequenos na transição do trote para o galope [20]). Como já mencionamos, Biewener encontrou que $F_{\text{solo}} \propto M^{1.0}$

neste grupo à velocidade máxima. Logo, considerando que α_g escala à velocidade máxima com o mesmo expoente encontrado para a velocidade de transição do trote para o galope, prevemos que $a_t \approx 0.93$ em mamíferos pequenos. Este resultado, porém, não bate com os dados experimentais. O cálculo de a_t para os mamíferos pequenos requer mais estudo, como será discutido abaixo.

Selker e Carter encontraram que $a_t = 3d - l \approx 0.80$ usando seus dados para as dimensões dos ossos de artiodáctilos e os dados do Biewener para os mamíferos como um todo [36]. Em minha dissertação de mestrado [49, 50] percebemos que esse resultado é observado para a maior parte dos artigos experimentais. Sabendo que a força muscular escala como $M^{0.80}$, Selker e Carter e, posteriormente, nós concluímos que a componente transversal da força é proporcional à força muscular ($F_t \propto F_{músculo}$) [36, 49, 50]. Entretanto, essa conclusão contraria a análise amplamente usada para o carregamento dos ossos das pernas durante a locomoção [37–39], que nos levou à conclusão de que a componente transversal da força (F_t) é proporcional à força de reação do solo e não à força muscular. Além disso, se aceitássemos que $F_t \propto F_{músculo}$, concluiríamos que $a_x = a_t$ e, portanto, $l = d \approx 0.37$. Embora isso seja um resultado razoável para os mamíferos pequenos (veja a tabela 2.5), os mamíferos grandes não obedecem essa relação. Para explicar o valor do expoente l encontrado experimentalmente para os mamíferos pequenos, precisamos de dados mais precisos sobre a alometria da tensão muscular, sobre as propriedades mecânicas dos ossos e sobre o fator de carga para confirmar se eles são independentes da massa ou se exibem uma variação pequena mas relevante com o tamanho. Também é importante medir a_t experimentalmente, como Rubin e Lanyon [28] fizeram para a_x , assim como melhorar a estimativa experimental de a_x , atualmente baseada nos dados de apenas 5 espécies (ver discussão acima). Devemos reconhecer que tais experimentos são difíceis, já que os instrumentos usados para medir as tensões em ossos vivos só podem ser usados em ossos maiores que um determinado tamanho — ossos muito pequenos não podem ser estudados por essa abordagem. Contudo, os argumentos acima mostram que para descrever completamente a alometria dos ossos longos, é necessário determinar quais são as forças resultantes atuando nos ossos e como elas variam com a massa corporal. Finalmente, é ainda possível que o modelo proposto na Fig. 2.6(a) precise ser refinado, como por exemplo para considerar a curvatura dos ossos.

Finalmente, o modelo aqui proposto explica dois aspectos da alometria dos ossos que não foram explicados pelo modelo da similaridade elástica de McMahon [9, 16]. Primeiro, têm-se percebido que a alometria dos ossos não é descrita por uma única lei de potência para o intervalo completo de tamanhos de mamíferos (tabela 2.5 e figura 2.9) e que isso deve estar relacionado a uma mudança de postura observada nos mamíferos pequenos e a uma redução na agilidade dos mamíferos grandes [14, 15, 22, 24, 25, 51]. Nosso modelo confirma essa distinção entre mamíferos pequenos e grandes, já que os expoentes alométricos previstos dependem da força de reação do solo e do ângulo desta força com o eixo do osso, ambos os quais dependem da massa corporal. (Note que este acoplamento torna possível estudar as forças envolvidas na locomoção de animais extintos, tais como os dinossauros, através de dados da alometria dos ossos.) Em segundo lugar, Christiansen

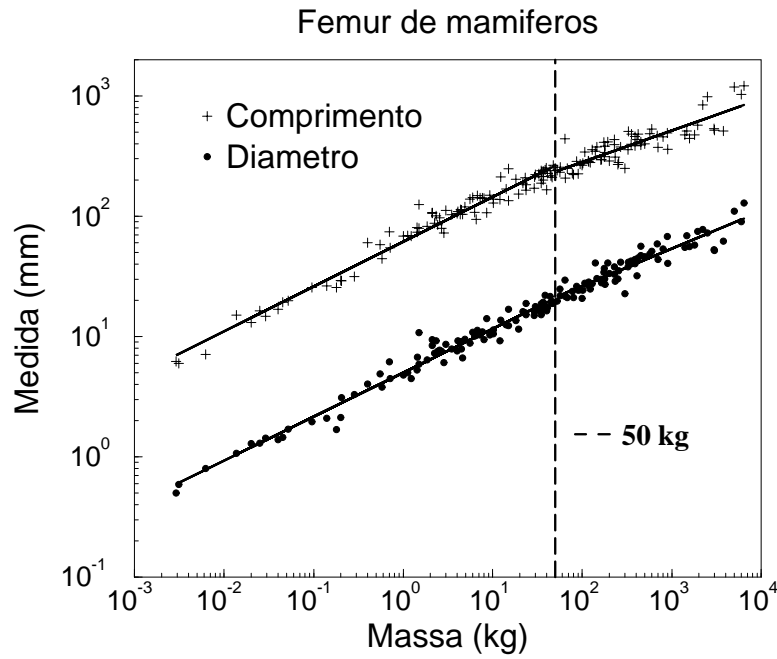


Figura 2.9: Variação do comprimento L e do diâmetro D do fêmur nos mamíferos. Os dados são os mesmos da Fig. 2.2, mas aqui separamos os mamíferos em maiores e menores que $M = 50$ kg para ilustrar a ‘alometria diferencial’, ou seja, o expoente alométrico é um pouco diferente nos dois grupos. A diferença na inclinação é bem visível no caso do comprimento, mas é menor no caso do diâmetro.

relata que os mamíferos grandes desenvolvem ossos longos progressivamente *mais curtos* como forma de reduzir as tensões de flexão, ao invés de ossos proporcionalmente *mais grossos* [15]. Em outras palavras, o expoente l torna-se cada vez menor com o aumento da massa, enquanto o expoente d tem praticamente o mesmo valor para mamíferos pequenos e grandes. Este fato segue diretamente da nossa análise. Mostramos que $F_{ax} \propto F_{músculo}$ e que a alometria da força muscular não distingue mamíferos pequenos de grandes. Assim, a Eq. (2.19) implica que d deve ter valores similares para todos os mamíferos e, portanto, uma alometria diferencial só pode aparecer em diferenças em l .

2.6 Conclusões

Medidas experimentais demonstraram que uma série de parâmetros morfológicos e fisiológicos variam com a massa corporal M segundo a lei de potência $Y = aM^b$, onde Y é o parâmetro de interesse, a é uma constante e b é o expoente alométrico [2–5]. Em particular, o comprimento L e o diâmetro D dos ossos longos dos mamíferos obedecem aproximadamente às leis de potência $L \propto M^l$ e $D \propto M^d$. Embora uma série de artigos experimentais tenham sido publicados sobre a alometria dos ossos [14, 15, 19–23, 33], nenhum modelo teórico foi capaz de explicar as observações. Em particular, os dados não estão em acordo nem com a similaridade geométrica ($L \propto D \propto M^{1/3}$), nem com a similaridade elástica ($L \propto M^{1/4}$ e $D \propto M^{3/8}$) [9, 12, 14–16].

Desenvolvemos um modelo, baseado na exigência de que os ossos devem resistir às tensões de compressão e de flexão a que estão submetidos, o qual está em acordo com

as observações experimentais. Além de prever expoentes alométricos em acordo com os dados, nosso modelo mostra que a similaridade elástica não foi observada experimentalmente porque os ossos longos dos mamíferos não são esbeltos o suficiente para sofrer flambagem de Euler. Além disso, o modelo acerta também ao prever que (i) a flexão é responsável por $86 \pm 6\%$ da tensão máxima nos ossos longos de mamíferos; e (ii) o expoente l tem uma pequena variação com a massa devido à escala diferencial da força de reação do solo durante a locomoção à velocidade máxima.

Os resultados descritos neste capítulo foram publicados em [52]. Este artigo está reproduzido no apêndice A.

Capítulo 3

O modelo Bak-Sneppen para a evolução das espécies

3.1 Complexidade e SOC

Nos últimos quatro séculos nosso conhecimento sobre o universo onde vivemos teve um desenvolvimento enorme. Em particular, os físicos descobriram que quatro forças fundamentais governam a interação entre as partículas, a saber a força gravitacional, a força eletromagnética e as forças nucleares fraca e forte. Apesar de conhecermos bem as interações fundamentais da matéria e de sermos capazes de sintetizar as leis básicas da Física em equações matemáticas que ocupam poucas páginas, ainda existe uma infinidade de fenômenos que não são bem compreendidos. O desafio para grande parte dos físicos nos dias atuais consiste em descrever os padrões macroscópicos que emergem em um sistema onde um número grande de elementos interage através de leis microscópicas conhecidas.

Um exemplo são os *sistemas complexos*, onde a dinâmica de interação entre os elementos auto-organiza o sistema em um estado em que há uma grande riqueza de padrões. Per Bak, em seu livro “*How nature works*” [6], define complexidade como *variabilidade*, argumentando que quando observamos um fenômeno complexo cada vez mais de perto ou cada vez mais de longe vemos a formação de padrões em todos os níveis. Esses sistemas possuem com frequência regras de interação entre seus elementos que são muito simples e bem definidas, mas que contudo produzem padrões macroscópicos complexos que não são facilmente deduzidos das leis microscópicas. A sociedade humana, por exemplo, é um sistema complexo, onde seis bilhões de seres humanos interagem trocando mercadorias, idéias e informações. Não é óbvio como a Economia, a História e a Sociologia surgem da Biologia humana, de tal forma que cada uma dessas disciplinas possui métodos de investigação próprios sem a necessidade de mencionar a Biologia adjacente.

Os sistemas complexos são vistos por Bak [6] como sistemas fora do equilíbrio

aprisionados em um estado ‘crítico’, onde pequenos distúrbios podem causar eventos, chamados *avalanches*, de todos os tamanhos. O caráter complexo da História, por exemplo, é evidenciado por sua sensibilidade a pequenos eventos (e.g., como seria o mundo hoje se os pais de Napoleão Bonaparte jamais tivessem se conhecido?). Já a criticalidade da Economia é demonstrada pelas variações erráticas e sem tamanho característico no preço de ações na bolsa de valores [6].

Em termos matemáticos, a criticalidade é evidenciada pelo freqüente surgimento de leis de potência em fenômenos naturais. (Leis de potência são retas em um gráfico log-log.) A consequência direta das leis de potência é a ausência de uma escala característica em um determinado problema, o que é uma observação comum no nosso universo. Por exemplo, não existe um tamanho ‘certo’ para montanhas, nuvens ou aglomerados de galáxias [6]. Elevações na superfície da Terra variam de pequenos morros a montanhas com quilômetros de altura; nuvens grandes são idênticas a nuvens pequenas aumentadas; e aglomerados de galáxias podem reunir desde duas até milhares de galáxias.

Bak propôs que a ubiquidade das leis de potência na natureza deve-se, em parte, à criticalidade auto-organizada (SOC, do inglês *self-organized criticality*). A idéia é que um sistema fora do equilíbrio atinge um estado estacionário onde *avalanches* de todos os tamanhos são observadas, ou seja, o sistema evolui para seu estado ‘crítico’ e ali fica aprisionado. Neste estado, é impossível fazer previsões, já que a dinâmica depende de contingências (pequenas alterações no estado do sistema podem gerar catástrofes).

O protótipo de criticalidade auto-organizada é o modelo de pilha de areia (Fig. 3.1). Considere uma criança na praia que brinca de fazer uma pilha de areia a partir de uma superfície inicialmente plana. À medida que os grãos de areia são depositados sobre a pilha, esta começa a desenvolver uma inclinação em relação ao plano horizontal. Essa inclinação cresce até que seja atingida uma inclinação crítica, quando a deposição de um único grão pode causar uma avalanche onde um número arbitrário de grãos pode estar envolvido. Neste estado o sistema está completamente fora do equilíbrio e o comportamento global não é nada óbvio se olharmos apenas para as propriedades de um grão de areia individualmente. A presença de *avalanches* de todos os tamanhos é a marca registrada da criticalidade auto-organizada.

O modelo de pilha de areia bidimensional possui uma interpretação muito interessante. Se associarmos o número de grãos em cada sítio com a força entre duas placas tectônicas, então a relaxação neste sítio está relacionada ao movimento das placas e à consequente diminuição da força entre elas. Dessa forma, uma avalanche em uma pilha de areia é um modelo reducionista de um terremoto. Essa analogia prediz a existência de terremotos de todos os tamanhos e, uma vez que a distribuição de tamanhos de *avalanches* nos modelos de pilha de areia é a uma lei de potência, a distribuição de tamanhos de terremotos também deve seguir uma lei de potência. Em acordo com essa previsão, Gutenberg e Richter [53] demonstraram que um gráfico da freqüência de um terremoto versus a energia liberada por ele obedece uma lei de potência (Fig. 3.2). Um terremoto de magnitude 4 é dez vezes mais comum que um de magnitude 5 e um de magnitude 6 é dez vezes mais comum que um de magnitude 7.

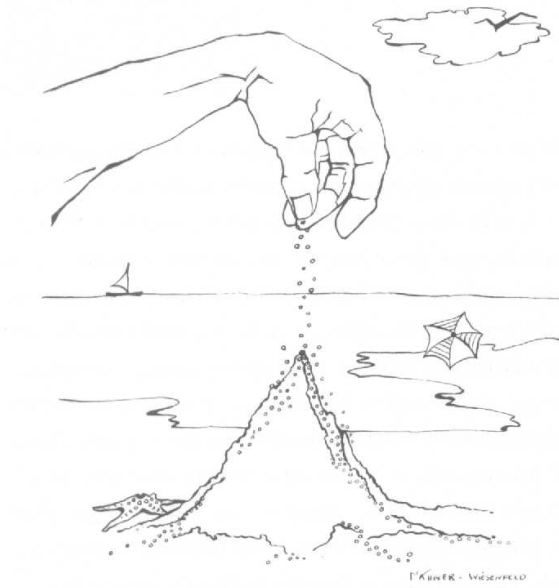


Figura 3.1: Pilha de areia, o protótipo da criticidade auto-organizada. Figura retirada de [6].

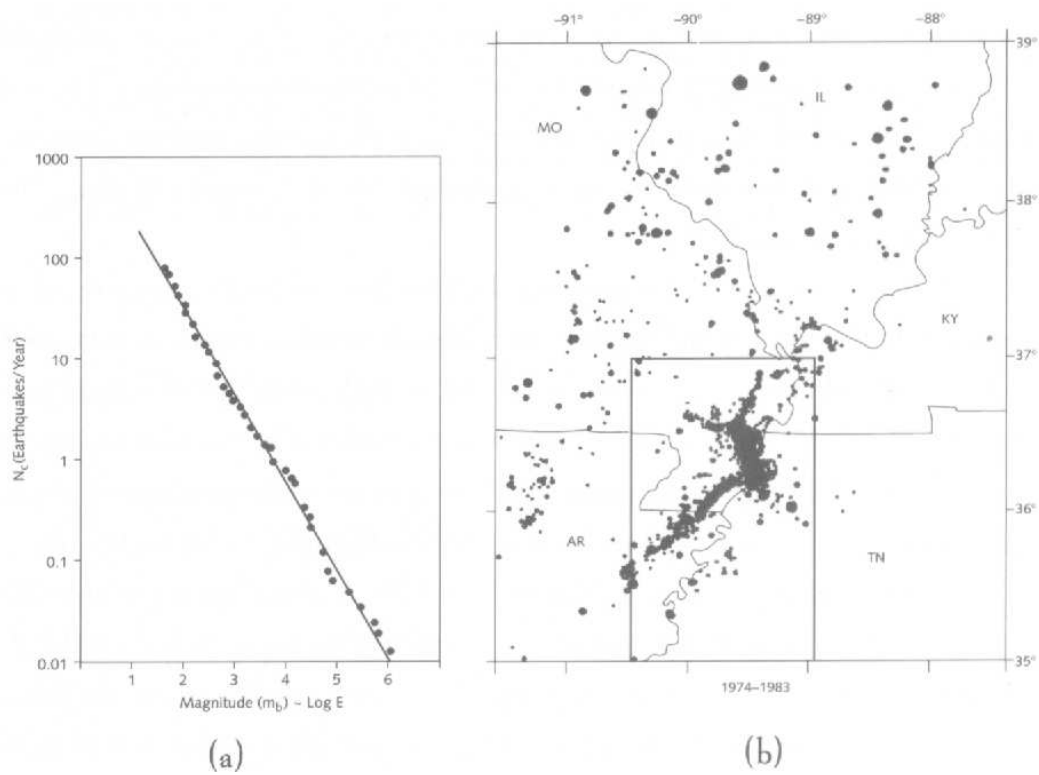


Figura 3.2: Terremotos. (a) Distribuição das magnitudes dos terremotos na região New Madrid no sudeste dos Estados Unidos no período de 1974-1983. Os pontos mostram o número de terremotos com magnitude maior que m . (b) Localização dos terremotos usados no gráfico. O tamanho dos pontos indica a magnitude dos terremotos. Figura retirada de [6].

Naturalmente nem todas as leis de potência observadas na natureza devem-se à SOC. Vimos no capítulo anterior que as dimensões dos ossos longos dos mamíferos obedecem a uma lei de potência em função da massa em consequência da relação entre as propriedades geométricas e mecânicas dos ossos e das forças que lhes são impostas. Analogamente, a distribuição de períodos secos e chuvosos também segue uma lei de potência [54, 55]. Neste caso, Dickman [56] forneceu evidências de que as leis de potência devem-se à dinâmica de advecção da umidade na atmosfera. Outro exemplo de lei de potência que surge por um mecanismo que não é SOC é a distribuição do número de citações de artigos científicos. A lei de potência, neste caso, surge devido à rede de citações de artigos estar em contínuo crescimento e também ao fato de que novos artigos citam preferencialmente aqueles que já são muito citados [57].

O trabalho de Bak e colaboradores sobre a criticalidade auto-organizada atraiu muito interesse e orientou grande parte da atividade na área da mecânica estatística nas últimas décadas. Hoje existem modelos evidenciando a existência de SOC nos seguintes problemas: fogo em floresta [58], crescimento de superfícies [59], tráfego de veículos [6], Economia [6] e evolução das espécies [6, 7]. De forma mais especulativa, Bak [6] argumenta que os conceitos de criticalidade auto-organizada também são relevantes para se compreender o funcionamento do cérebro. Na próxima seção veremos as evidências no registro fóssil de que a evolução das espécies é um sistema criticamente auto-organizado.

3.2 A evolução é um fenômeno complexo

O registro fóssil indica que, quando analisada na escala de milhões de anos, a vida na Terra é um sistema fora do equilíbrio, onde espécies estão continuamente aparecendo e desaparecendo. Jack Sepkoski passou dez anos em bibliotecas pesquisando os registros fósseis de milhares de espécies marinhas [60]. Dividindo a história geológica em 150 períodos consecutivos de 4 milhões de anos, ele estimou a fração de famílias que se extinguiram de um período para o outro (Fig. 3.3). Em alguns casos houveram poucas extinções, onde menos de 5% das espécies desapareceram, e em outros casos mais de 50% das espécies desapareceram.

David Raup [6] contou o número de períodos em que o total de extinções estava entre 10 e 20%, o número de períodos em que a variação estava entre 20 e 30% e assim por diante, e fez um histograma (Fig. 3.4). Ele demonstrou que as extinções em massa, ao invés de serem eventos isolados, fazem parte de uma distribuição contínua de eventos, onde extinções de todos os tamanhos são observadas.

Os dados indicam a existência de eventos de extinção de todos os tamanhos, similarmente à distribuição de tamanhos de terremotos em forma de lei de potência (Fig. 3.2). Embora extinções em massa sejam mais raras do que pequenas extinções, elas ocorrem com uma frequência bem definida. As maiores avalanches que já ocorreram foram a explosão Cambriana há 500 milhões de anos, quando um número enorme de novas espécies, famílias e filos surgiu em um curto espaço de tempo, e a extinção Permiana há 250 milhões de anos,

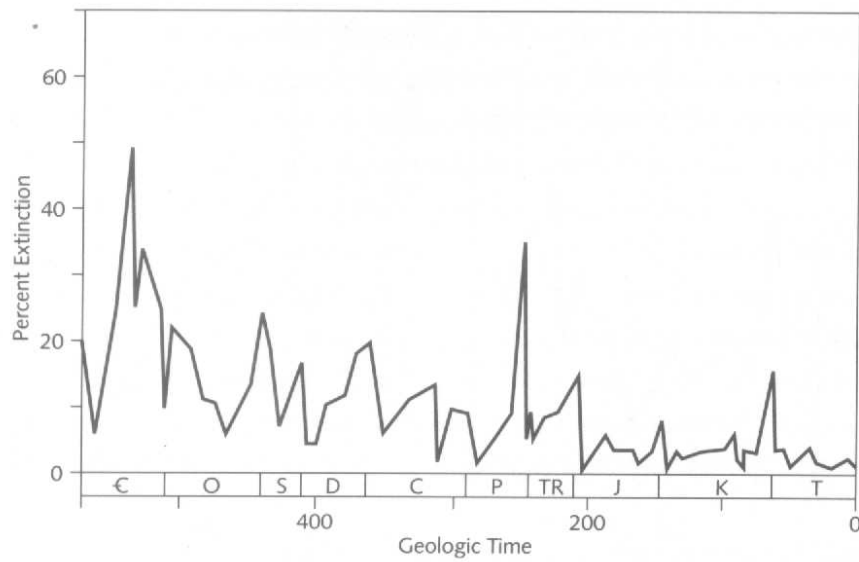


Figura 3.3: Extinções observadas por Jack Sepkoski em famílias de animais marinhos nos últimos 600 milhões de anos. A curva mostra o percentual estimado de famílias que se extinguíram em intervalos de aproximadamente 4 milhões de anos. Figura retirada de [6].

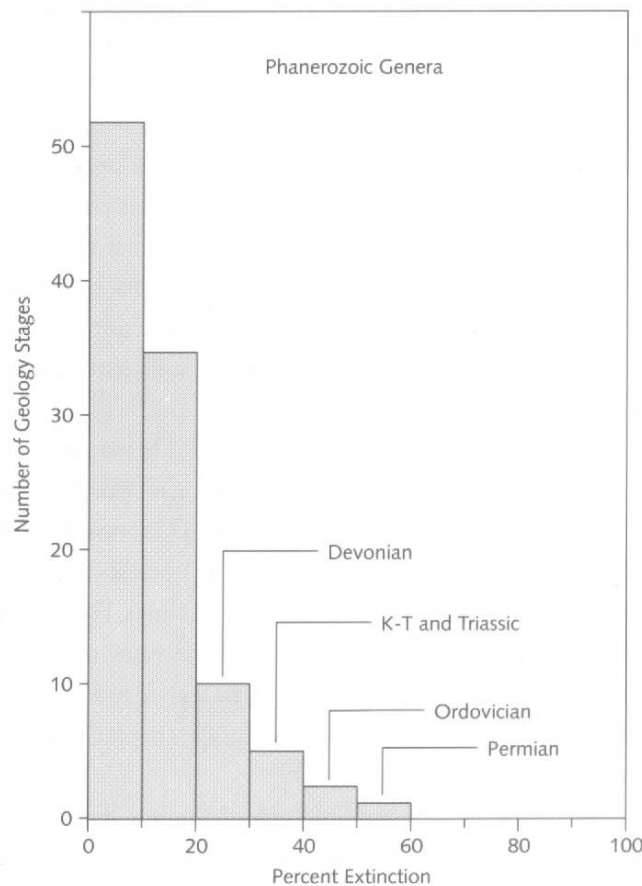


Figura 3.4: Histograma das extinções da figura 3.3. O diagrama mostra o número de períodos de 4 milhões de anos onde a taxa de extinção estava dentro de um certo intervalo. As extinções em massa aparecem no pé da distribuição. Figura retirada de [6].

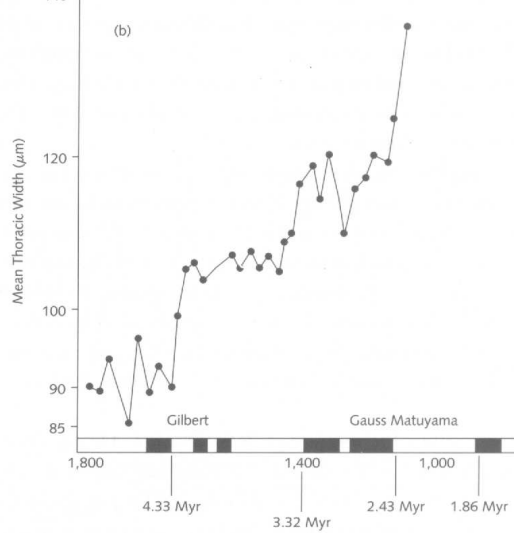


Figura 3.5: Equilíbrio pontuado na natureza. A circunferência torácica do radiolário *Pseudocubus vema* aumentou durante sua história evolucionária. Figura retirada de [6].

onde 96% de todas as espécies se extinguíram. A extinção dos dinossauros e de outras espécies há 60 milhões de anos também está entre as avalanches mais espetaculares.

O registro fóssil inspirou Stephen Jay Gould e Niles Eldridge a propor uma nova visão sobre a evolução biológica. Ao invés da evolução lenta, gradual e contínua defendida por Darwin, as espécies evoluem em tempos muito curtos entremeados por longos períodos de equilíbrio. Em outras palavras, os longos períodos de equilíbrio são interrompidos por períodos intermitentes de atividade evolutiva (Equilíbrio Pontuado). A evolução de uma única espécie segue o mesmo padrão. Por longos períodos, as propriedades físicas, como a altura de um cavalo ou o comprimento do pescoço de uma girafa, não sofrem muita alteração; esses períodos de quietude são interrompidos por períodos curtos (pontuações) onde os atributos da espécie mudam rapidamente. A Fig. 3.5 ilustra como a circunferência torácica do radiolário¹ *Pseudocubus vema* evoluiu durante os últimos 5 milhões de anos. Podemos reconhecer três períodos onde a circunferência torácica permaneceu praticamente constante entremeados por intervalos de rápida evolução.

Darwin era adepto do gradualismo e negava a possibilidade de extinções em massa. Em harmonia com essa visão, muitos paleontólogos acreditam que a teoria de Darwin não prevê grandes extinções e buscam a explicação para tais eventos em influências externas, tais como mudanças climáticas severas causadas por erupções vulcânicas ou por choques de meteoros com a Terra. Biólogos eminentes, tais como Eldridge, Sepkoski e Raup, defendem que apenas eventos cataclísmicos podem ser responsáveis pelas extinções em massa. O consenso de que apenas um evento catastrófico poderia ser o responsável pelas grandes extinções é tal que o debate se voltou para qual é a força externa responsável.

Entretanto, a distribuição contínua de extinções mostrada na Fig. 3.4 sugere que um único mecanismo pode ser responsável por todas as extinções, tanto as grandes quanto as pequenas. Se reconhecermos que a vida na Terra é um sistema complexo, fora do equilíbrio, onde bilhões de indivíduos competem por espaço e comida, é natural supor

¹Os radiolários são protozoários marinhos que possuem um esqueleto rígido (ou concha) de silicato.

que o equilíbrio pontuado observado pelos paleontólogos seja a expressão de um sistema criticamente auto-organizado.

Portanto, o registro fóssil levanta as seguintes questões: As extinções em massa podem ser causadas pela própria dinâmica de interação entre as espécies ou precisamos evocar eventos externos para explicar cada grande evento individualmente? Qual mecanismo seria responsável por uma auto-organização das espécies em um estado onde avalanches de todos os tamanhos são observadas? Em 1993, Bak e Sneppen propuseram um modelo para a evolução que sugere que a própria dinâmica de interação entre as espécies pode gerar o Equilíbrio Pontuado. O modelo prevê a existência de extinções em massa sem precisar apelar para fatores externos, apesar de não anular a possibilidade de que cataclismas tenham sido de fato responsáveis por algumas das grandes extinções. Dessa forma, o Equilíbrio Pontuado observado no registro fóssil parece ser uma consequência da vida na Terra estar em um estado criticamente auto-organizado. Na próxima seção vamos introduzir o modelo Bak-Sneppen e discutir alguns de seus principais resultados.

3.3 O modelo Bak-Sneppen

O modelo Bak-Sneppen [7] é um processo de Markov com tempo discreto em uma rede d -dimensional com L^d sítios e condições de contorno periódicas. Cada sítio possui uma variável real $x_i(t)$. Inicialmente, essas variáveis recebem valores aleatórios retirados independentemente de uma distribuição uniforme no intervalo $[0,1)$. No tempo $t = 1$, o sítio m que possui o menor valor entre todos os $x_i(0)$ é identificado e ele e seus $2d$ primeiros vizinhos recebem novos números aleatórios, novamente retirados independentemente do intervalo $[0,1)$. (No caso unidimensional que estudaremos aqui, essa dinâmica se resume a: $x_m(1) = \eta$, $x_{m+1}(1) = \eta'$, e $x_{m-1}(1) = \eta''$, onde η , η' , e η'' são independentes e uniformemente distribuídos em $[0,1)$; para $|j - m| > 1$, $x_j(1) = x_j(0)$.) No passo 2 o processo é repetido, com m agora representando o sítio com o mínimo global das variáveis $\{x_i(1)\}$, e assim por diante.

Na interpretação evolucionária do modelo BS, cada sítio representa um ‘nicho’ ocupado por uma única espécie e a variável x_i é uma medida da aptidão dessa espécie para sobreviver. Neste contexto, ‘aptidão’ significa uma propensão a evitar a extinção: se $x_j < x_i$ então a espécie j é mais sensível a mudanças climáticas e forças externas e vai se extinguir antes da espécie i . Dessa forma, x_i pode ser chamado de uma ‘barreira’ para a extinção. A substituição da menor barreira a cada passo de tempo representa (i) a extinção da espécie menos apta a sobreviver com a consequente colonização desse nicho por uma nova espécie ou (ii) uma mutação que altera a aptidão dessa espécie. A reposição das barreiras das espécies vizinhas pode ser interpretada como uma mudança imprevisível na aptidão quando o nicho vizinho é subitamente colonizado por uma nova espécie ou é ocupado por uma espécie mutante.

A ligação entre espécies vizinhas descreve a inter-dependência das espécies na cadeia alimentar e a competição por espaço e nutrientes. Por exemplo, no caso unidimensional,

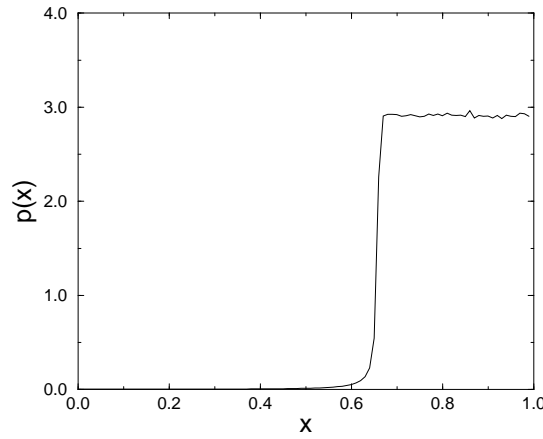


Figura 3.6: Distribuição das barreiras x_i no estado estacionário do modelo Bak-Sneppen. Rede com 1000 sítios e média sobre 10^7 configurações. Observe que $p(x)$ não é exatamente uma função degrau devido a efeitos de tamanho finito.

Bak [6] sugere que a espécie à esquerda é uma presa, enquanto a da direita é um predador. O ordenamento das espécies em uma rede regular é uma aproximação drástica, já que isso fixa o número total de espécies e também o número de espécies consideradas interdependentes (primeiros vizinhos). Contudo, o objetivo do modelo é demonstrar quais são os ingredientes essenciais para se obter uma ecologia que exibe equilíbrio pontuado e não modelar a evolução em riqueza de detalhes.

A seleção a cada passo de tempo do mínimo dos $\{x_i\}$ ('dinâmica extrema') representa um processo altamente não-local que aparentemente requer um agente externo que conheça completamente o estado do sistema a cada momento. Entretanto, podemos considerar o tempo médio de vida de uma espécie proporcional a $e^{\beta x_i}$, onde β é uma constante, de forma que não é necessário um agente externo para que a espécie com o x_i mínimo seja a primeira a se extinguir, contanto que β seja grande.

A simulação do modelo BS mostra que, após um tempo transiente, o sistema atinge um estado estatisticamente estacionário, no qual a densidade de probabilidade de x_i é nula para x menor que um certo limiar x^* e uniforme acima de x^* (Fig. 3.6). Em outras palavras, para um sistema infinito e no estado estacionário, a distribuição $p(x)$ é a função degrau

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < x^* \\ C, & x > x^* \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $C = 1/(1 - x^*)$ é obtido por normalização. Determinações precisas de x^* foram feitas por Grassberger [61] e Paczuski e colaboradores [62] que encontraram $x^* = 0.66702(8)$ e $x^* = 0.66702(3)$, respectivamente.

Esta densidade de probabilidade singular está associada com propriedades de escala remisscentes de um ponto crítico; a dimensão crítica superior é $d_c = 4$ [63]. O modelo

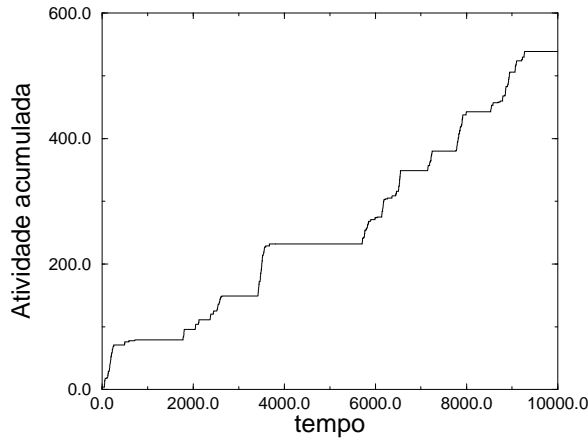


Figura 3.7: Equilíbrio pontuado no modelo Bak-Sneppen. A curva mostra o número de eventos de mutação para uma única espécie ao longo do tempo.

Bak-Sneppen parece não pertencer a nenhuma das classes de universalidade conhecidas para fenômenos críticos e pode-se dizer que ele define sua própria classe de universalidade. Na seção 3.9 veremos como essa classe de universalidade se relaciona com a classe DP (percolação dirigida).

Várias quantidades exibem um comportamento tipo lei de potência no modelo BS. Em particular, Bak e Sneppen [7] estudaram a probabilidade $P_J(r)$ de que a posição do sítio mínimo nos tempos t e $t + 1$ seja separada por uma distância r e a distribuição $P_A(S)$ dos tamanhos S de avalanches. (O tamanho de uma avalanche é definido como o tempo decorrido do momento em que o mínimo global fica menor que um certo x_0 até quando ele volta a ser maior que x_0 .) No limite assintótico, essas distribuições escalam como $P_J(r) \propto r^{-3.23 \pm 0.02}$ e $P_A(S) \propto S^{-1.07 \pm 0.01}$ [62].

A distribuição em forma de lei de potência para o tamanho das avalanches indica a existência de grupos de extinções, correlacionadas entre si, de todos os tamanhos. Este comportamento é similar ao observado por Raup no registro fóssil (seção 3.2). Se monitorarmos o número de eventos de mutação ao longo do tempo em um sítio específico, observamos períodos de equilíbrio interrompidos por intervalos de rápida evolução, como ilustrado na Fig. 3.7. (Observe a similaridade com a Fig. 3.5.) Concluimos, portanto, que o modelo Bak-Sneppen prevê uma ecologia fora do equilíbrio, onde extinções de todos os tamanhos ocorrem como consequência da dinâmica de interação entre as espécies. Portanto, o modelo demonstra que não existe contradição entre a teoria de Darwin (seleção do mais adaptado) e a teoria do Equilíbrio Pontuado.

Apesar de seu sucesso em prever uma ecologia onde extinções de todos os tamanhos são observadas, o modelo Bak-Sneppen não é uma descrição precisa da evolução [64]. Como vimos anteriormente, ele possui duas limitações importantes: 1) o número de espécies é fixo; e 2) o número de espécies vizinhas é constante. Portanto, não é uma surpresa que os expoentes críticos do modelo sejam diferentes dos valores observados

experimentalmente, como divulgado em [64].

Barbara Drossel [64] fez uma vasta revisão dos modelos propostos para a evolução das espécies. A respeito do modelo BS, ela afirma que seu mérito é demonstrar que um ecossistema composto por muitas espécies interagentes, cada uma possuindo uma aptidão para sobreviver (fitness), pode se auto-organizar em um estado crítico, onde mudanças evolutivas de todos os tamanhos podem acontecer. Drossel relata que o modelo serviu como inspiração para a criação de modelos mais realistas [64]. Em particular, o modelo foi adaptado com sucesso para explicar dados experimentais da evolução de populações bacterianas [65, 66].

3.3.1 Método simulacional

Gostaríamos de fazer umas observações sobre o algoritmo para simular o modelo BS. Uma vez que o sítio com a menor variável, x_m , deve ser identificado a cada passo de tempo, é importante criar uma estratégia eficaz de busca. Um algoritmo geral e eficiente usa uma árvore binária para identificar x_m . Uma abordagem [61] utiliza uma rede com 2^n sítios. No primeiro nível de seleção, cada sítio é comparado com um de seus vizinhos e o menor deles é selecionado. No nível seguinte o mínimo de cada novo par é selecionado, e assim por diante, de forma que no n -ésimo nível o mínimo global é identificado.

Um segundo esquema binário [67] é construído da seguinte maneira. O sítio 0 é posicionado no topo da árvore. O sítio 1 é colocado na linha abaixo, à esquerda de 0 se $x_1 < x_0$ e à direita se $x_1 > x_0$. Um sítio i é adicionado à árvore da seguinte forma: descemos a árvore comparando x_i com as variáveis x_1, \dots, x_{i-1} , virando à esquerda ou à direita dependendo se x_i é menor ou maior que x_j , até encontrarmos um sítio vazio. Construindo a árvore desse jeito, x_m vai ocupar a posição mais à esquerda na árvore. Nestes esquemas, manter a estrutura da árvore, depois que ela já foi construída a partir do conjunto inicial de variáveis x_i , requer um pequeno número de operações a cada passo de tempo e é muitas vezes mais eficiente que uma busca global pelo mínimo. No entanto, descobrimos que uma busca *restrita* exige ainda menos tempo computacional no estado estacionário.

Veremos na seção 3.8 que uma propriedade especial do modelo BS, que é partilhada por todos modelos com dinâmica extrema, é que o sítio mínimo pertence com probabilidade praticamente 1 ao intervalo $[0, x^*]$. Ao mesmo tempo, a densidade de sítios com valores nesse intervalo se aproxima de zero à medida que o número de sítios $L \rightarrow \infty$. Isto sugere mantermos uma lista de sítios com $x < x^*$ [68]. Então a busca por x_m pode ser restrita à lista, exceto nos raros casos em que esta estiver vazia. Se o tamanho do sistema for grande, de forma que o número típico de sítios com $x < x^*$ não é pequeno, se torna vantajoso introduzir uma *segunda lista* de sítios com $x < x^{**} < x^*$. Quando esta lista, relativamente pequena, não está vazia (como em geral acontece), a busca fica restrita a ela. Em estudos do modelo BS, obtivemos a maior eficiência usando $x^{**} = 0.54$, enquanto que o critério para a primeira lista foi $x^* < x < 0.65$, que é um pouco abaixo de x^* . (A necessidade ocasional de efetuar uma busca global, nos raros casos em que ambas as listas

são vazias, é mais do que compensada pelo tamanho reduzido das listas quando usamos esses valores.) Comparando com o método da árvore binária, nossa abordagem diminui em 3 vezes o tempo computacional para simular um sistema de 1000 sítios. (Entretanto, um algoritmo do tipo árvore binária é mais eficiente para se estudar transientes. Isso acontece porque inicialmente as listas não são pequenas quando partimos de um estado onde os valores dos x_i são escolhidos uniformemente em $[0,1)$.)

3.4 Nossos objetivos

Do ponto de vista da mecânica estatística, o modelo BS tem o mérito de introduzir um novo mecanismo para auto-organizar um sistema dinâmico em um estado crítico. Por esse motivo o modelo atraiu muita atenção, tendo sido estudado por várias abordagens, incluindo simulação [61, 63, 69], análises teóricas [70–72], análises probabilísticas (run time statistics) [73, 74], grupo de renormalização [75, 76], teoria de campo [77] e teoria de campo médio [78–81]. Algumas variações foram propostas, como o modelo BS anisotrópico [82, 83] e o modelo com dois mínimos [84].

Essa auto-organização em um estado crítico é importante devido a fenômenos complexos observados no mundo real freqüentemente exibirem distribuições em forma de lei de potência. A comunidade de físicos estatísticos tem se esforçado para explicar como essas leis de potência surgem na natureza, tendo sido bem sucedida nas últimas duas décadas em criar modelos que exibem criticalidade auto-organizada. Como exemplo citamos os modelos de pilha de areia [85–87], o modelo OFC para terremotos [88], o modelo de fogo em florestas [58] e o modelo de deposição balística para superfícies rugosas [59].

Nos fenômenos de equilíbrio, a invariância por escala, revelada pelas distribuições tipo lei de potência, só aparece para valores muito específicos dos parâmetros de controle do problema. Os modelos citados acima, por outro lado, são sistemas fora do equilíbrio que evoluem naturalmente para um atrator dinâmico localizado na criticalidade. Mas por que um sistema complexo fica aprisionado no seu estado crítico sem a necessidade de sintonizarmos um parâmetro de controle? Dickman e colaboradores mostraram que os modelos de pilha de areia são mantidos no ponto crítico por um “acionamento lento em um sistema que exibe uma transição de fase do tipo estado absorvente e com uma quantidade conservada” [79]. O modelo BS segue uma rota diferente para a criticalidade, chamada de dinâmica extrema. Devido à ubiquidade das leis de potência no mundo real, acreditamos que é pertinente buscarmos uma maior compreensão desse mecanismo que auto-organiza o modelo BS em seu estado crítico. Essa investigação será feita na seção 3.9.

Além de investigar a origem da criticalidade auto-organizada no modelo BS, queremos também caracterizar sua classe de universalidade, descrever os efeitos da quebra da simetria nas regras de atualização e descrever quais as principais consequências da dinâmica extrema. Com este objetivo, vamos propor modificações na dinâmica original e analisar como estas afetam o comportamento crítico e a densidade estacionária $p(x)$.

Discutiremos quais aspectos do modelo são universais e que modificações preservam a classe de universalidade. As ferramentas utilizadas serão simulação, teoria de campo médio e argumentos gerais.

O restante deste capítulo organiza-se da seguinte forma. Na próxima seção, definimos todas as variações do modelo a serem estudadas. Apresentamos um método novo para determinar o limiar do modelo na seção 3.6 e, na seção 3.7, estudamos o papel da simetria na regra de renovação. Na seção 3.8, examinaremos quais características são comuns a modelos com dinâmica extrema. Investigamos a criticalidade auto-organizada no modelo na seção 3.9. Finalmente, tecemos nossas conclusões na última seção. Os resultados descritos nas seções 3.5 a 3.10 foram publicados nos artigos [90–93]. Uma cópia desses artigos encontra-se nos apêndices B, C, D e E.

3.5 Variantes do modelo BS

Vamos definir nesta seção as variantes do modelo BS que serão estudadas ao longo deste capítulo. Essas variações preservam a dinâmica extrema, mas diferem no número e/ou na posição dos vizinhos que são renovados e, em outros casos, na forma como as barreiras evoluem. No **modelo BS com vizinhos aleatórios**, as definições são as mesmas do modelo original, com a exceção de que todos os sítios são considerados vizinhos. Assim, a cada passo de tempo, o sítio m e dois vizinhos escolhidos aleatoriamente são substituídos. Outra variante é o **modelo BS anisotrópico** [82, 83]. Neste caso, apenas o sítio m e seu primeiro vizinho à *direita* são renovados a cada passo de tempo.

No **modelo BS generalizado** ou variante **BSab**, substituímos com números aleatórios o sítio m que possui o mínimo dos $\{x_i\}$ mais a vizinhos à esquerda e b vizinhos à direita. Se $a = b = 1$ recuperamos o modelo original (BS11); se $a = 0$ e $b = 1$ temos o modelo BS anisotrópico (BS01); se $a \neq b$ obtemos variantes do modelo BS com dinâmicas assimétricas. Essas variações foram estudadas inicialmente em [82].

Definiremos agora quatro variantes que diferem do modelo original apenas na forma que as barreiras x_i evoluem.

- Na **variação radical**, o sítio M que possui o *máximo* dos $\{x_i\}$ é substituído por um número aleatório η e seus dois primeiros vizinhos recebem a *raiz quadrada* de suas próprias barreiras: $x_M(t+1) = \eta$ e $x_{M\pm 1}(t+1) = \sqrt{x_{M\pm 1}(t)}$.
- Na **variante centered square**, o sítio com o valor máximo é renovado com o *quadrado* de seu próprio valor, enquanto os dois vizinhos mais próximos recebem números aleatórios η e η' : $x_M(t+1) = [x_M(t)]^2$, $x_{M+1}(t+1) = \eta$ e $x_{M-1}(t+1) = \eta'$.
- Na **versão peripheral square**, um dos primeiros vizinhos de M é elevado ao quadrado, enquanto M e o outro vizinho são substituídos por números aleatórios: $x_{M'}(t+1) = [x_{M'}(t)]^2$, $x_M(t+1) = \eta$ e $x_{M''}(t+1) = \eta'$. (Aqui $M' = M + \sigma$ e $M'' = M - \sigma$, onde σ é uma variável aleatória que assume os valores $+1$ e -1 com probabilidades iguais.)

- Na **variante peripheral square assimétrica**, o sítio M e seus vizinhos são renovados de acordo com as regras: $x_{M-1}(t+1) = [x_{M-1}(t)]^2$, $x_M(t+1) = \eta$ e $x_{M+1}(t+1) = \eta'$.

Nas modificações acima, definimos por conveniência o sítio com a variável máxima como o mais vulnerável, de forma que x_i pequeno corresponde a uma alta aptidão. Na variação radical, a reposição da espécie menos adaptada provoca uma redução determinística na aptidão das vizinhas. Assim, há uma memória na dinâmica, o que parece ser uma característica interessante no contexto evolucionário. Na variação peripheral square, a extinção da espécie menos adaptada aumenta a aptidão de um vizinho e provoca um efeito imprevisível no outro. Já na variação centered-square, $x_M \rightarrow x_M^2$ implica que ou a espécie sofreu uma mutação que a tornou mais apta a sobreviver ou ela se extinguiu e foi substituída por outra mais apta.

Vamos estudar também um modelo Bak-Sneppen modificado que difere do original na forma que o sítio m é identificado. Nós o batizamos de **modelo BS cosseno**. No modelo original, x_m é o sítio que minimiza a função $f(x) = x$. No modelo BS cosseno, x_m minimiza $f(x) = \cos(2n\pi x)$ para algum inteiro n , de forma que f tem n mínimos no intervalo $[0,1]$. A fim de analisar o efeito da simetria na regra de renovação, definimos também um **modelo BS cosseno anisotrópico**, no qual temos a anisotropia espacial do modelo BS anisotrópico e o sítio extremo definido como no modelo BS cosseno.

No **modelo BS com estados absorventes**, definimos que os sítios com $x_i < q$ são considerados ativos, ao passo que os sítios com $x_i > q$ são inativos, sendo q um parâmetro de controle. A cada passo de tempo, selecionamos o x_i mínimo *entre os sítios ativos* e este juntamente com seus dois vizinhos mais próximos são renovados de acordo com as regras do modelo original. A dinâmica prossegue enquanto houver pelo menos um sítio ativo. Quando todas as barreiras forem maiores que q , a dinâmica pára, pois o sistema alcançou um *estado absorvente*. Portanto, variando q esperamos encontrar uma transição de uma fase inativa para uma ativa. Nesta formulação, o parâmetro de ordem ρ é definido como a fração de sítios ativos. Fazendo uma analogia com os modelos de spin, q faz o papel da temperatura, determinando a fase do sistema, enquanto que ρ faz o papel da magnetização.

As motivações para estudar essas modificações na dinâmica são várias. Primeiro, é importante examinar o efeito que a simetria da dinâmica tem nos expoentes críticos, no limiar e na distribuição $p(x)$. Segundo, o modelo BS é notável por exibir uma densidade de probabilidade singular e é de interesse examinar se esse comportamento singular é preservado para regras diferentes. Terceiro, uma vez que a forma precisa da dinâmica em um sistema específico, como na evolução, é geralmente desconhecida e provavelmente bastante diferente daquela do modelo original, é necessário testar a robustez dos resultados. É possível, inclusive, que alguns elementos das variantes estudadas aqui tornem esses modelos mais realistas do que o modelo original. Em particular, se um par de espécies (i e j) tem uma relação presa-predador, não devemos esperar que a extinção de i tenha o mesmo efeito em j que a extinção de j tem em i ; nesta situação uma interação

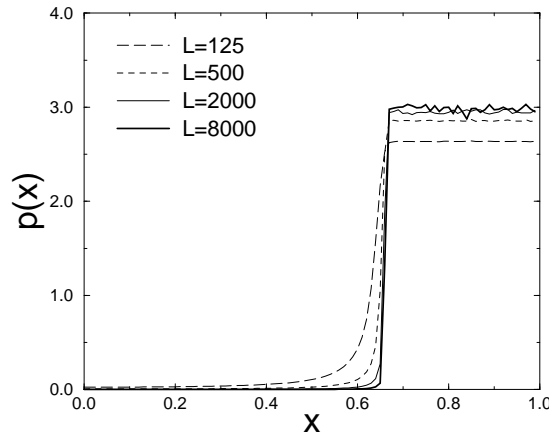


Figura 3.8: Densidade estacionária $p(x)$ para a versão unidimensional do modelo BS original, para redes de vários tamanhos.

assimétrica parece mais razoável. Finalmente, a motivação para estudar o modelo com estados absorventes é relacionar o modelo BS à percolação dirigida, determinar o conjunto completo de expoentes críticos e investigar a auto-organização do modelo BS em seu estado crítico.

3.6 Determinação do limiar

Nesta seção, vamos introduzir um método simples para determinar com precisão o limiar x^* do modelo Bak-Sneppen. Em um sistema finito, a distribuição $p(x)$ é contínua, ou seja, a função degrau é arredondada e não-singular (ver Fig. 3.8). Entretanto, é visível na figura que $p(x) = C_L$, constante, para x acima da região do limiar. Como $p(x)$ é uma função degrau (Eq. (3.1)) para um sistema com $L \rightarrow \infty$, a normalização implica que $C_\infty(1 - x^*) = 1$. Isso sugere que podemos definir um limiar em um sistema finito como $x_L^* = 1 - 1/C_L$. Assumindo que o modelo BS obedece à relação de escala de tamanho finito [94]

$$x_L^* - x^* = kL^{-1/\nu}, \quad (3.2)$$

onde k é uma constante e x^* é o limiar para uma rede infinita, temos um método para determinar o limiar de modelos do tipo BS.

Simulamos o modelo BS original, o modelo BS anisotrópico e o modelo com vizinhos aleatórios em redes de $L = 63, 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000$ e 8000 sítios (Fig. 3.8). Estimamos a densidade de probabilidade $p(x)$ com base em um histograma de frequência das barreiras, dividindo o intervalo $[0,1]$ em 100 subintervalos. Os histogramas são acumulados após N_p passos de tempo, necessários para o sistema relaxar para o estado estacionário. (Encontramos que no modelo original e no anisotrópico $N_p = 10^8$ é suficiente

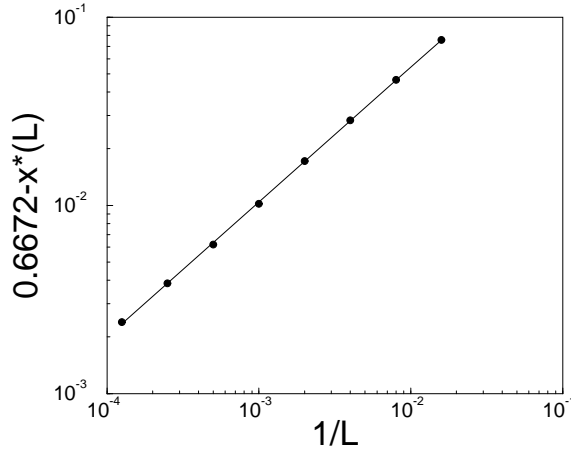


Figura 3.9: Ajuste de lei de potência para $(x^* - x_L)$ vs. $1/L$ para o modelo BS original. A inclinação da linha reta é $\nu = 1.40$.

para atingir o estado estacionário em todos tamanhos de rede estudados. Por outro lado, na versão com vizinhos aleatórios $N_p = 10^7$ é suficiente.) Coletamos o histograma a cada L passos em simulações de 10^9 passos no total.

A fim de testar o método proposto, nós o aplicamos ao modelo de vizinhos aleatórios, para o qual a teoria de campo médio fornece o resultado exato $x^* = 1/3$ (ver seção 3.7). Fitando nossos dados para x_L^* vs. L com a Eq. (3.2), encontramos $x^* = 0.33332(3)$ e $\nu = 1.00(1)$, que está de acordo com a teoria de campo médio e, portanto, valida nosso método. No caso do modelo original, encontramos $x^* = 0.6672(2)$ e $\nu = 1.40(1)$. (O ajuste de lei de potência é mostrado na Fig. 3.9.) Em acordo com nossos resultados, Grassberger relata que $x^* = 0.66702(8)$ [61] e Paczuski e colaboradores encontram $x^* = 0.66702(3)$ e $\nu = 1.36$ [62, 89]. Finalmente, para o modelo BS anisotrópico, obtemos $x^* = 0.7240(1)$ e $\nu = 1.58(1)$. Não encontramos na literatura estimativas de x^* e ν no modelo BS anisotrópico para comparação.

3.7 Modelos Bak-Sneppen anisotrópicos

A fim de investigar o efeito da simetria na distribuição $p(x)$ e nos expoentes críticos, vamos estudar os modelos BSab, definidos na seção 3.5, por teoria de campo médio e simulação. A teoria de campo média aqui descrita é uma extensão de estudos anteriores [79, 80]. Começamos introduzindo uma taxa de renovação de $\Gamma e^{-\beta x_i}$ no sítio i , onde Γ^{-1} é um tempo característico, irrelevante para as propriedades estacionárias, e que vamos igualar a um ($\Gamma = 1$). Com essa introdução, o modelo passa a ter uma ‘temperatura finita’ [79, 80, 91], no sentido de que todos os sítios têm uma probabilidade não nula de serem renovados a qualquer momento, em contraste com a dinâmica extrema do modelo original. A condição extrema é recuperada no limite de temperatura nula, $\beta \rightarrow \infty$.

A densidade de probabilidade $p(x, t)$ satisfaz:

$$\begin{aligned} \frac{dp(x, t)}{dt} = & -e^{-\beta x}p(x, t) - \sum_{j=1}^a \int_0^1 e^{-\beta y} p_j(x, y, t) dy - \sum_{j=1}^b \int_0^1 e^{-\beta y} p_j(x, y, t) dy \\ & + n \int_0^1 e^{-\beta y} p(y, t) dy \quad , \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $n = a + b + 1$ é o número de sítios renovados a cada passo de tempo, $p_j(x, y, t)$ é densidade de probabilidade conjunta para os sítios 0 e j e $p(y, t)$ é a densidade marginal de 1 sítio. (Assumimos invariância translacional e de reflexão, as quais devem ser mantidas quando a distribuição inicial tem tais propriedades.) Evocando a fatorização de campo médio $p_j(x, y, t) = p(x, t)p(y, t)$, encontramos

$$\frac{dp(x, t)}{dt} = -p(x, t)[e^{-\beta x} + (n-1)I(\beta)] + nI(\beta) \quad , \quad (3.4)$$

onde

$$I(\beta) \equiv \int_0^1 e^{-\beta y} p(y, t) dy \quad (3.5)$$

representa a taxa total de renovação. No estado estacionário temos que

$$p_{st}(x) = \frac{nI}{(n-1)I + e^{-\beta x}} \quad . \quad (3.6)$$

Multiplicando por $e^{-\beta x}$ e integrando sobre o intervalo coberto por x , achamos $I(\beta) = (e^{(n-1)\beta/n} - 1)/[(n-1)e^\beta(1 - e^{-\beta/n})]$ e portanto

$$p_{st}(x) = \frac{n}{(n-1)} \frac{1 - e^{-(n-1)\beta/n}}{1 - e^{-(n-1)\beta/n} + e^{-\beta x}(e^{\beta/n} - 1)} \quad . \quad (3.7)$$

No limite $\beta \rightarrow \infty$ esta solução torna-se a função degrau

$$p_{st}(x) = \frac{n}{(n-1)} \Theta(x - 1/n) \Theta(1 - x) \quad . \quad (3.8)$$

(Aqui $\Theta(x)$ é a função degrau, de forma que $\Theta(x) = 1$ para $x > 0$ e $\Theta(x) = 0$ para $x < 0$.) Assim, a teoria de campo médio prevê uma singularidade tipo função degrau para a densidade de probabilidade com o limiar em $x^* = 1/n$ para os modelos BSab. Este resultado é independente da simetria da dinâmica e concluimos que a aproximação de campo médio no nível de 1 sítio é insensível a diferenças na simetria.

Definimos o coeficiente de anisotropia

$$k_a = \frac{|a - b|}{n} \quad . \quad (3.9)$$

(Note que $k_a = 0$ para dinâmicas simétricas.) Com essa definição, o limiar de campo médio $x^* = 1/n$ pode ser escrito como

$$x^* = \frac{1}{(2a+1)}(1 - k_a) \quad \text{para } b > a . \quad (3.10)$$

Para a fixo, a teoria de campo médio prevê que o limiar x^* varia linearmente com o coeficiente de anisotropia k_a .

3.7.1 Limiares dos modelos BSab

Nós simulamos o modelo BSab para vários valores de a e b , correspondendo a k_a na faixa 0–0,857. Novamente, estimamos a densidade de probabilidade $p(x)$ com base em um histograma de frequência de barreiras, dividindo $[0,1]$ em 100 subintervalos. Depois que o sistema (um anel de $L = 2000$ sítios) alcança o estado estacionário², os histogramas são acumulados uma vez a cada L passos até que 10^8 passos sejam concluídos.

Os limiares x^* foram estimados como discutido na seção 3.6. Tipicamente $x_L^* - x_\infty^* \approx 0.006$ para $L = 2000$ e, portanto, o limiar $x_{L=2000}^*$ é suficientemente preciso para nosso objetivo, que é examinar o efeito da anisotropia no valor dos limiares.

A simulação confirma que a densidade de probabilidade é uma função degrau, em acordo com a teoria de campo médio (TCM). A figura 3.10 mostra $p(x)$ para todas as variantes com $n = 5$. Os valores dos limiares, listados na tabela 3.1, são sempre maiores que o predito pela TCM, $x^* = 1/n$. A TCM é exata para o caso de vizinhos aleatórios. A concordância com a previsão de campo médio é tanto melhor quanto maior for a anisotropia (com n constante) e quanto maior for n (com k_a fixo). A TCM prevê que $x^* = x^*(n)$, quando na verdade, para n fixo, o limiar *diminui* com o aumento de anisotropia. Em termos gerais, isso pode ser compreendido da seguinte forma. Com n fixo, quanto maior for $|a - b|$, maior será a distância entre os sítios renovados e o sítio mínimo. Isso faz a dinâmica se aproximar mais do caso de vizinhos aleatórios (campo médio), levando o limiar na direção do valor de TCM. O aumento de n com k_a fixo tem o mesmo efeito.

A figura 3.11 mostra que fixando a e variando b , o limiar diminui linearmente com k_a , como previsto pela TCM, exceto para $a = 0$. Os valores dos limiares, contudo, são bastante diferentes dos resultados de CM. Por exemplo, para $a = 1$, a TCM prevê $x^* = (1/3)(1 - k_a)$, enquanto que a simulação fornece $x^* = 0.664(3) - 0.668(7)k_a$.

3.7.2 Expoentes críticos dos modelos anisotrópicos

A fim de caracterizar a classe de universalidade associada aos modelos BSab, estudamos a probabilidade $P_J(r)$ de que mínimos em passos de tempo consecutivos sejam separados por uma distância r . No modelo original, temos que [62]

$$P_J(r) \sim r^{-\pi}, \quad \text{com } \pi = \pi_S = 3.23(2) . \quad (3.11)$$

²Tipicamente, o sistema leva $\approx 10^7$ passos para relaxar para o estado estacionário.

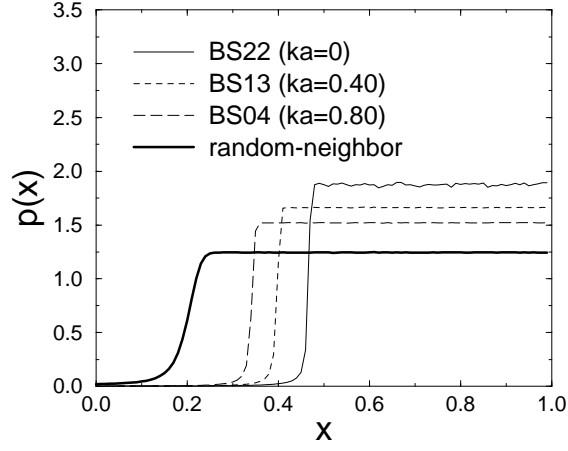


Figura 3.10: Densidade de probabilidade estacionária para os modelo BSab com $n = 5$. Rede com $L = 2000$ sítios.

Tabela 3.1: Limiar (x_L^*) para sistemas com $L = 2000$ sítios para os modelos BSab com vários valores do coeficiente de anisotropia (k_a). Os valores de x_L^* são comparados com a previsão de campo médio $x_{CM}^* = 1/n$. Os números entre parênteses denotam as incertezas.

MODELO	$x_{CM}^* = 1/n$	$x_{L=2000}^*$	k_a
BS01	0.500	0.717(2)	1/2
BS02	0.333	0.531(2)	2/3
BS03	0.250	0.417(2)	3/4
BS04	0.200	0.342(2)	4/5
BS05	0.167	0.290(2)	5/6
BS06	0.143	0.251(2)	6/7
BS11	0.333	0.661(9)	0
BS12	0.250	0.501(3)	1/4
BS13	0.200	0.398(2)	2/5
BS14	0.167	0.329(3)	1/2
BS15	0.143	0.280(2)	4/7
BS22	0.200	0.466(9)	0
BS23	0.167	0.381(3)	1/6
BS24	0.143	0.317(3)	2/7
BS25	0.125	0.271(2)	3/8
BS26	0.111	0.237(2)	4/9
BS27	0.100	0.210(2)	1/2
BS33	0.143	0.36(1)	0

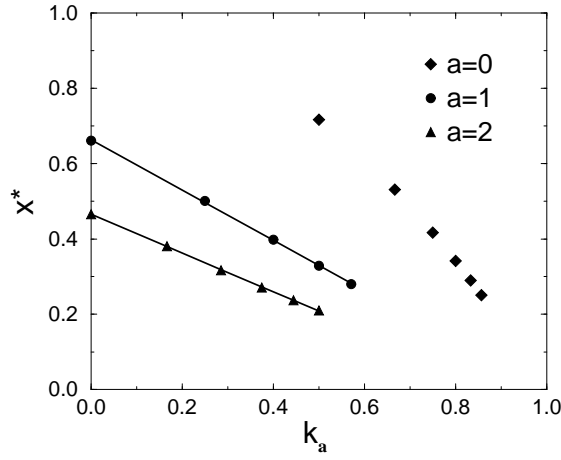


Figura 3.11: Limiar x^* vs. o coeficiente de anisotropia k_a . Fixamos a e mudamos b para variar k_a . Mais detalhes no texto.

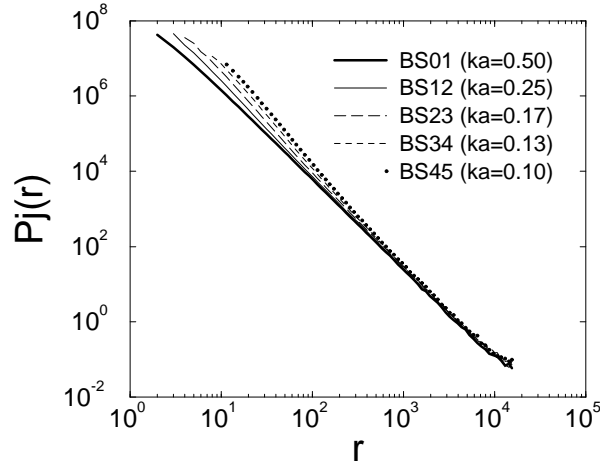


Figura 3.12: Probabilidade (não normalizada) $P_J(r)$ no estado estacionário para várias variantes BSab.

Por outro lado, no modelo BS anisotrópico (BS01), $\pi = \pi_A = 2.401(2)$ [83].

Através de simulações do modelo generalizado usando 7×10^8 passos de tempo em redes de 32000 sítios, encontramos que todas as variantes com dinâmica assimétrica pertencem à classe de universalidade do modelo BS anisotrópico. A figura 3.12 exhibe $P_J(r)$ para modelos com diversas anisotropias. As correções para a lei de potência são grandes para assimetrias pequenas e, por isso, o comportamento assintótico não é observado em redes pequenas nesses casos, já que valores grandes de r não são alcançados.

Descobrimos que os dados para $P_J(r)$ podem ser ajustados com uma expressão que representa uma transição entre a escala para modelos simétricos para r pequeno e a escala para modelos assimétricos para r grande,

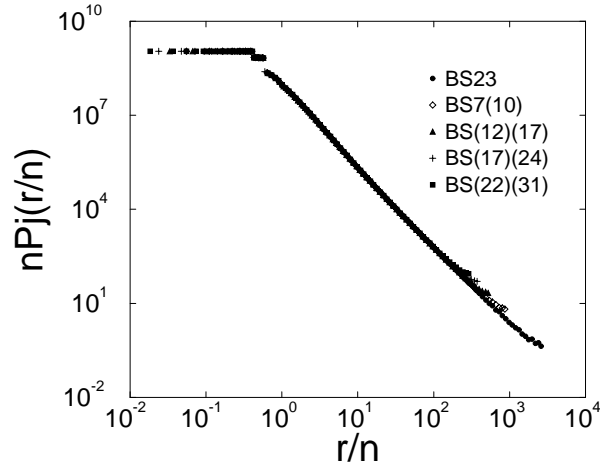


Figura 3.13: Colapso das curvas $P_J(r)$ para variantes com $k_a = 1/6$ (veja a Eq. (3.13)).

$$P_J(r) = A \left[r^{-\pi_A} + (L - r)^{-\pi_A} \right] + B \left[r^{-\pi_S} + (L - r)^{-\pi_S} \right] , \quad (3.12)$$

onde A e B são constantes e π_A e π_S são, respectivamente, os expoentes dos modelos anisotrópico e original citados acima. A estrutura ‘espelhada’ da Eq. (3.12) surge devido às condições periódicas de contorno, que implicam que $P_J(r) = P_J(L - r)$. A Eq. (3.12) fita os dados simulacionais para $r > 10^2$ para todos os modelos generalizados. Um vez que $\pi_S \approx \pi_A + 1$, a expressão $P_J(r) = Ar^{-\pi_A}(1 + B/r) + A(L - r)^{-\pi_A}(1 + B/(L - r))$ também se ajusta bem aos dados. Entretanto, estudos com modelos fracamente assimétricos (e.g., BS(20)(21), para o qual $k_a = 0.024$) indicam que a inclinação (em escala logarítmica) de $P_J(r)$ aproxima-se de π_S , ao invés de $\pi_A + 1$, antes que o comportamento assintótico seja atingido.

As funções $P_J(r)$ para as variantes com a mesma anisotropia podem ser colapsadas em uma curva mestra

$$P_{colapso}(k_a, r') = n P_J(r/n) , \quad (3.13)$$

onde $r' = r/n$. A Fig. 3.13 ilustra este colapso para cinco variantes com $k_a = 1/6$. Um argumento simples fornece uma compreensão intuitiva dessa função de escala. Suponha que o sítio m seja o sítio extremo no tempo t . Como sítios renovados recebem números aleatórios independentes, todos os sítios no conjunto $\mathcal{N}(t) \equiv \{m(t) - a, m(t) - a + 1, \dots, m(t) + b\}$ tem a mesma probabilidade de serem o extremo no tempo $t + 1$, o que implica (com $a \leq b$)

$$2P_J(0) = P_J(1) = P_J(2) = \dots = P_J(a) , \quad (3.14)$$

de forma que $P_J(r)$ exhibe um patamar para $r = 1, \dots, a$.

A probabilidade do evento $m(t + 1) \in \mathcal{N}(t)$, i.e., o sítio extremo pertencer ao grupo de barreiras substituídas no passo anterior, pode ser estimada da seguinte forma.

Assumimos, com probabilidade ≈ 1 , que todos os sítios fora de $\mathcal{N}(t)$ têm $x_i > x^*$. Então, a probabilidade que $m(t+1) \in \mathcal{N}(t)$ é $1 - (1 - x^*)^n$. Na aproximação de campo médio, temos assim que $P(1) = \frac{2}{n}[1 - (1 - x^*)^n] \approx \frac{2}{n}$, que é consistente com o pré-fator n na Eq. (3.13). (Observe que para o modelo BS original, $1 - (1 - x^*)^n \simeq 0.96$.)

Se $b > a$, então

$$P_J(a+1) \simeq P_J(a+2) \simeq \dots \simeq P_J(b) \simeq \frac{1}{2}P_J(1) \quad , \quad (3.15)$$

onde o símbolo ‘ \simeq ’ é usado porque há uma pequena probabilidade de uma das distâncias $r = a+1, \dots, b$ ser o extremo mesmo que $m(t+1) \notin \mathcal{N}(t)$. Isto explica o segundo platô visto na Fig. 3.13. Para k_a fixo, $a = [n(1 - k_a) - 1]/2$ e $b = [n(1 + k_a) - 1]/2$ são essencialmente proporcionais a n , de forma que a reescala do argumento na Eq. (3.13) colapsa os platôs. Para $r > b$ a probabilidade P_J aproxima-se rapidamente de uma lei de potência, que também é invariante após a reescala da Eq. (3.13). Embora os argumentos precedentes sejam apenas aproximados, eles fornecem uma base intuitiva para o colapso observado na Fig. 3.13.

O modelo ‘peripheral square assimétrico’ introduzido na seção 3.5 é uma versão assimétrica da variação peripheral square estudada na seção 3.8. Embora este modelo exiba uma densidade de probabilidade que não é uma função degrau (ver seção 3.8), a simulação indica que ele também pertence à classe de universalidade do modelo BS anisotrópico ($\pi = 2.37(5) \approx \pi_A$).

Outra quantidade que obedece uma lei de potência no modelo Bak-Sneppen é $P_r(\tau)$, a probabilidade que, no estado estacionário, o mínimo global no tempo t tenha sido o sítio extremo pela última vez no tempo $t - \tau$. (τ é o ‘tempo de retorno’.) Simulamos as variantes BSab em uma rede de 16000 sítios, usando 7×10^8 passos de tempo. Os resultados foram muito similares ao comportamento da probabilidade $P_J(r)$. Para anisotropias fracas, o comportamento assintótico é observado apenas para τ grande, como mostrado na Fig. 3.14. No limite $\tau \rightarrow \infty$, $P_r(\tau) \propto \tau^b$, onde $b = 1.40(1)$ para todas as variantes anisotrópicas e $b = 1.58(1)$ para todos os casos isotrópicos.

Em resumo, encontramos nesta seção evidências fortes da existência de duas classes de universalidade para modelos com dinâmica extrema separadas pela simetria na regra de renovação dos sítios. Vimos também que a distribuição $p(x)$ é uma função degrau nos modelos BSab, em acordo com a teoria de campo médio. A teoria de campo médio, contudo, não prevê que o limiar x^* varia com o coeficiente de anisotropia k_a .

3.7.3 Modelo BS cosseno

Como um representante de outra ampla classe de variantes do modelo Bak-Sneppen, estudamos aqui as versões isotrópica e anisotrópica do modelo BS cosseno propostas na seção 3.5. Simulamos estes modelos (com $n = 5$) em uma rede de $L = 2000$ sítios e encontramos a distribuição $p(x)$ mostrada na figura 3.15 para o caso isotrópico. (Na versão anisotrópica, uma distribuição similar é encontrada.) É natural atribuir o arredondamento

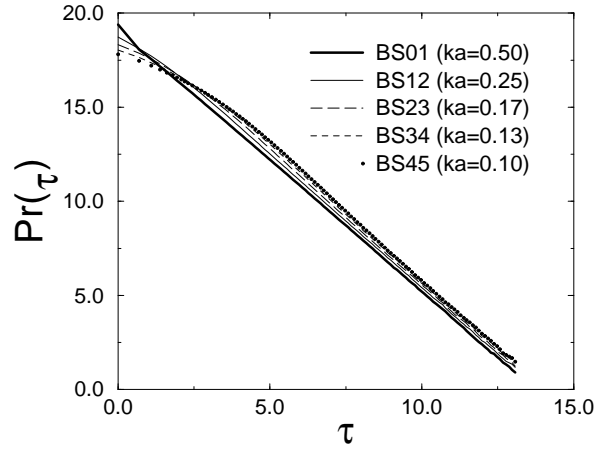


Figura 3.14: Probabilidade (não-normalizada) $P_r(\tau)$ no estado estacionário para várias variantes BSab.

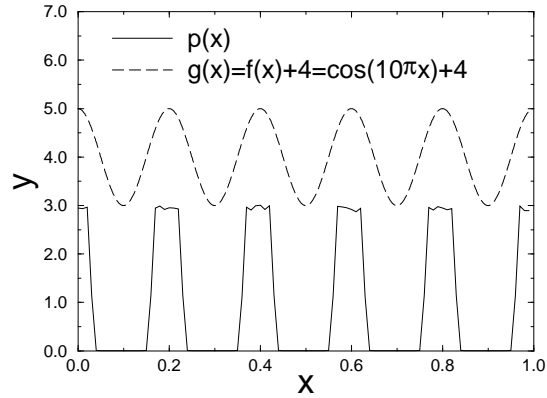


Figura 3.15: Linha sólida: densidade estacionária $p(x)$ para o modelo BS cosseno ($n = 5$) para uma rede com $L = 2000$ sítios. Linha tracejada: função $f(x) = \cos(10\pi x)$ que é minimizada no modelo BS cosseno. ($f(x)$ foi deslocada verticalmente para facilitar a visualização.)

das singularidades a um efeito de tamanho finito. Assim, encontramos evidência de que essas regras também geram densidades de probabilidade singulares. Investigamos a distribuição $P_J(r)$ e encontramos, usando 10^8 passos de tempo, $\pi = 3.2(1)$ para a dinâmica simétrica e $\pi = 2.38(3)$ para a dinâmica assimétrica. Estes resultados reforçam a evidência de que dinâmicas espacialmente isotrópicas geram os expoentes do modelo BS original, enquanto dinâmicas anisotrópicas reproduzem os expoentes do modelo BS anisotrópico. Na seção 3.8, investigaremos quais características são comuns aos modelos com dinâmica extrema.

3.8 A dinâmica extrema

A dinâmica extrema é o mecanismo que auto-organiza o modelo Bak-Sneppen em um estado crítico. Nesta seção, determinamos quais características são comuns a modelos com dinâmica extrema e investigamos como a densidade de probabilidade estacionária e os expoentes críticos são afetados por mudanças mais drásticas nas regras do modelo do que aquelas estudadas até aqui. Com esse objetivo, examinamos o modelo BS e algumas variações via teoria de campo médio e simulação. Encontramos que, em todas as variantes, $p(x)$ é singular em um ou mais pontos e que o sítio extremo x_m pertence a um intervalo ‘proibido’, onde $p(x) = 0$.

As variantes estudadas nesta seção têm uma função determinística $f(x)$ como parte da regra de renovação dos sítios, em contraste com a substituição das barreiras por números aleatórios nos modelos analisados anteriormente. (As definições dos modelos estão na seção 3.5.) Funções da forma $f(x) = x^\alpha$ parecem uma escolha natural, já que mapeiam o intervalo $[0,1]$ em si mesmo. Neste contexto, notamos que as variantes exibem o que pode ser chamado de ‘migração’, ou seja, o movimento das variáveis x_i em uma direção sistemática no intervalo $[0, 1)$. Por exemplo, na variação radical a migração ocorre da região mais populada (x pequeno) para a região excluída (x grande).

Nossa análise seguirá os seguintes passos. Inicialmente, aprofundar-nos-emos na análise de campo médio do modelo original. Em seguida, estudaremos o mesmo modelo em um grafo completo, como uma alternativa à solução de campo médio. Finalmente, analisaremos os modelos radical, central square e peripheral square. Como as seções a seguir envolvem muitos cálculos, o leitor que não estiver interessado nos detalhes dos cálculos pode escolher saltar para a seção 3.8.6.

3.8.1 Análise de campo médio do modelo original

A distribuição $p(x)$ para o modelo Bak-Sneppen original é o caso $n = 3$ da Eq. (3.7), ou seja,

$$p_{st}(x) = \frac{3}{2} \frac{1 - e^{-2\beta/3}}{1 - e^{-2\beta/3} + e^{-\beta x}(e^{\beta/3} - 1)} . \quad (3.16)$$

Esta solução está plotada na Fig. 3.16 para vários valores de β .

No limite $\beta \rightarrow \infty$ esta solução se torna a função degrau

$$p_{st}(x) = \frac{3}{2} \Theta(x - 1/3) \Theta(1 - x) . \quad (3.17)$$

É interessante observar que a menor relaxação da condição extrema destrói a singularidade, uma vez que $p(x)$ é uma curva contínua para $\beta < \infty$ [80]. A convergência para a função degrau é geralmente exponencial com β , longe da discontinuidade. As curvas para vários valores de β se cruzam próximo ao limiar $x = 1/3$. A derivada neste ponto diverge apenas linearmente com β : $(dp_{st}/dx)_{x=1/3} \simeq 3\beta/8$ para β grande.

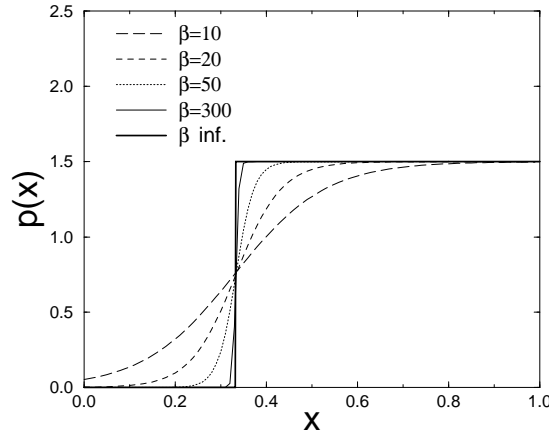


Figura 3.16: Distribuição $p(x)$ no estado estacionário do modelo original: resultado de campo médio para o modelo BS com temperatura finita (Eq. (3.7) com $n = 3$) para os valores de β indicados (β inf. significa $\beta \rightarrow \infty$).

Usando a Eq. (3.4), encontramos, no limite de β grande, que o tempo de relaxação para um distúrbio pequeno da solução estacionária cresce como $\sim e^{\beta/3}$. (Aqui ‘pequeno’ significa $I(\beta) \simeq e^{-\beta/3}/2$.)

A observação a seguir será muito útil na análise dos modelos modificados. Se assumirmos que, no limite $\beta \rightarrow \infty$, $p_{st}(x)$ é identicamente nulo para $x < x^*$, e que $p_{st} \geq C > 0$ em algum intervalo $[x^*, a]$ (em outras palavras, a distribuição sofre uma discontinuidade em x^*), então $I = \int_0^1 e^{-\beta y} p(y) dy \sim e^{-\beta x^*}$ e assim $e^{-\beta x}/I \sim e^{-\beta(x-x^*)} \rightarrow 0$ para $x > x^*$. Logo a Eq. (3.6) se reduz diretamente à função degrau, Eq. (3.17). Note, entretanto, que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{\beta x^*} I(\beta) = 1/2$ e não $3/2\beta$, como seria encontrado se ingenuamente inseríssemos a densidade limite, Eq.(3.8), na Eq.(3.5). Isso significa que a contribuição dominante para I vem do intervalo $[0, x^*]$, mesmo no limite $\beta \rightarrow \infty$, o que é percebido se escrevermos a Eq.(3.16), para β grande, como

$$p_{st}(x) \simeq \frac{3}{2} [\Theta(x - x^*) + \Theta(x^* - x) e^{\beta(x-x^*)}] . \quad (3.18)$$

No limite $\beta \rightarrow \infty$, os sítios com $x < x^*$ constituem um conjunto com probabilidade zero, mas o sítio m selecionado para extinção pertence a esse conjunto *com probabilidade um*. Esta é a propriedade singular do modelo Bak-Sneppen no limite de tamanho infinito, como será discutido na próxima subseção. (O limite de tamanho infinito está implícito na teoria de campo médio.)

Embora nos modelos modificados nós não sejamos capazes de encontrar uma solução analítica para β finito, é possível integrar a equação de campo médio numericamente. Devido ao fator $e^{\beta x}$, para β grande um passo de tempo muito pequeno seria necessário para evitar instabilidades numéricas nos métodos tradicionais de integração (e.g., Euler ou Runge-Kutta). Nós superamos esta dificuldade usando um método de integração parcial [95]. Para aplicar este método à equação de campo médio para o modelo original,

escrevemos a Eq. (3.4) na forma

$$\frac{dp(x, t)}{dt} = -f(t)p(x, t) + g(t) \quad , \quad (3.19)$$

onde $f(t) = e^{-\beta x} + 2I(t)$ e $g(t) = 3I(t)$. A solução formal é

$$p(x, t) = \exp\left[-\int_0^t du f(u)\right] \left\{ p(x, 0) + \int_0^t dt' \exp\left[\int_0^{t'} dt'' f(t'')\right] g(t') \right\} \quad . \quad (3.20)$$

Para um pequeno intervalo de tempo Δt , encontramos

$$\begin{aligned} p(x, \Delta t) &\simeq e^{-f(0)\Delta t} \left\{ p(x, 0) + g(0) \int_0^{\Delta t} dt' e^{f(0)t'} \right\} \\ &= e^{-f(0)\Delta t} p(x, 0) + \frac{g(0)}{f(0)} (1 - e^{-f(0)\Delta t}) \quad . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Esta relação pode ser iterada para encontrar a evolução de $p(x, t)$ a partir de uma dada distribuição inicial até atingir a densidade estacionária.

3.8.2 Modelo BS em um grafo completo

A teoria de campo médio é exata para o modelo de vizinhos aleatórios, o qual pode ser compreendido como o modelo BS em um grafo completo, i.e., um modelo em que todos os sítios são vizinhos. (Quando x_m é renovado, dois desses vizinhos são escolhidos aleatoriamente para serem renovados também.) Nesta subseção nós analisamos o modelo BS com dinâmica extrema em um grafo completo de L sítios. Uma análise similar foi desenvolvida em [96, 97].

Uma vez que os sítios recebem números aleatórios independentemente, os x_i são variáveis independentes e identicamente distribuídas retiradas da densidade $p(x, t)$. Definimos a *função distribuição* $P(x, t) = \int_0^x p(y, t) dy$. A probabilidade de que o próximo sítio a ser renovado, x_m , esteja entre zero e x é:

$$\text{Prob}[x_m \leq x] = 1 - [1 - P(x)]^L \quad , \quad (3.22)$$

i.e., um menos a probabilidade de que o mínimo seja maior que x . A probabilidade de que um vizinho escolhido aleatoriamente tenha $x_i \leq x$ é simplesmente $P(x)$ e a probabilidade de que um dos sítios renovados receba um número $\leq x$ é x . A cada passo, portanto, a mudança esperada no número de sítios com $x_i \leq x$ é $3x - 2P(x) - \text{Prob}[x_m \leq x]$, o que implica que

$$\frac{dP(x, t)}{dt} = -\left\{1 - [1 - P(x)]^L\right\} - 2P(x) + 3x \quad . \quad (3.23)$$

(Aqui definimos que uma unidade de tempo representa L renovações.)

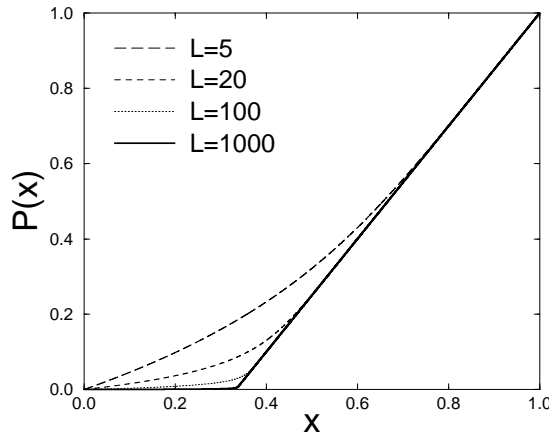


Figura 3.17: Função distribuição $P(x)$ do modelo BS original em um grafo completo para os tamanhos de redes indicados.

Fazendo $Q \equiv 1 - P$, temos que no estado estacionário,

$$Q^L + 2Q - 3(1 - x) = 0. \quad (3.24)$$

(Note que $Q(0) = 1$, $Q(1) = 0$, e $dQ/dx \leq 0$.) A solução numérica (Fig. 3.17) mostra que para L grande, $P_L(x)$ aproxima-se de uma função singular que é nula para $x < 1/3$, enquanto que para $x > 1/3$, $P(x) = 3(x - 1/3)/2$. Segue-se diretamente que para x fixo e $L \rightarrow \infty$,

$$P(x) \simeq \begin{cases} 1 - (1 - 3x)^{1/L}, & x < 1/3 \\ \frac{3x-1}{2} + \frac{1}{2}[\frac{3}{2}(1-x)]^L, & x > 1/3. \end{cases} \quad (3.25)$$

Para $x = 1/3$ temos que $\ln P \simeq -\ln L + \ln \ln(L/2)$ (mais termos de ordem menor em L) quando $L \rightarrow \infty$. De interesse é a convergência exponencial de P para sua forma limite para $x > 1/3$, comparada com a convergência algébrica para $x < 1/3$. Note também que $\text{Prob}[x_m \leq 1/3] \simeq 1 - 2/L$, de forma que o mínimo realmente pertence à região excluída com probabilidade um, quando $L \rightarrow \infty$.

3.8.3 Variante Radical

Na variante radical, a densidade de probabilidade $p(x) = p_X(x)$ satisfaz:

$$\begin{aligned} \frac{dp_X(x)}{dt} = & -e^{\beta x} p_X(x) - 2 \int_0^1 e^{\beta y} p_X(x, y) dy + \int_0^1 e^{\beta y} p_X(y) dy \\ & + 2p_{X^{1/2}}(x) \int_0^1 e^{\beta y} p_X(y) dy, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde $p_{X^{1/2}}(x) = 2xp_X(x^2)$ é a distribuição de $x^{1/2}$ avaliada no ponto x .³ Com a definição $I(\beta) \equiv \int_0^1 e^{\beta y} p(y) dy$ e a hipótese de campo médio $p(x, y) = p(x)p(y)$, a Eq. (3.26) se reduz a

$$\frac{dp(x)}{dt} = -e^{\beta x} p(x) + I(\beta)[-2p(x) + 1 + 4xp(x^2)] . \quad (3.27)$$

Dada a forma de função degrau para a densidade estacionária do modelo original, é razoável esperar que também neste caso, $p(x)$ terá uma discontinuidade para $\beta \rightarrow \infty$, sendo zero para $x > x^*$. Podemos desenvolver uma intuição sobre a natureza da densidade quando $\beta \rightarrow \infty$ pela observação de que, se $p(x) \leq C < \infty$ quando $x \rightarrow 1$, então $I \sim Ce^\beta/\beta$ para β grande, e portanto $e^{-\beta} I \rightarrow 0$ quando $\beta \rightarrow \infty$. Isso é de fato correto, ao menos que $p(x)$ tenha uma contribuição do tipo δ em $x = 1$, o que não é esperado porque são exatamente os maiores valores de x que são removidos pela dinâmica. Escreva a solução estacionária para a Eq. (3.27) como

$$p(x) = \frac{\bar{I}[1 + 4xp(x^2)]}{1 + 2\bar{I}} , \quad (3.28)$$

com $\bar{I} = e^{-\beta x} I$. Isto fornece $p(1) = 0$ no limite $\beta \rightarrow \infty$. Similarmente, supondo que $xp(x^2) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$, temos que $p(0) = 1/2$ neste limite. Um argumento análogo pode ser usado para mostrar que $dp/dx|_{x=1} = 0$ no limite $\beta \rightarrow \infty$.

A discussão acima sugere que no limite $\beta \rightarrow \infty$, $p_{st}(x)$ é *identicamente nula* em um intervalo finito $[x^*, 1]$. Assumindo que isso seja verdade, temos que $I \sim e^{\beta x^*}$ e no limite $\beta \rightarrow \infty$ a solução estacionária é dada pela *equação funcional*:

$$2p(x) - 4xp(x^2) = 1 , \quad (3.29)$$

para $0 \leq x < x^*$. Escrevendo isso como $p(x) = 1/2 + 2xp(x^2)$, podemos iterar para achar $p(x^2) = 1/2 + 2x^2p(x^4)$, $p(x^4) = 1/2 + 2x^4p(x^8)$, $p(x^8) = 1/2 + 2x^8p(x^{16})$, etc., o que sugere a solução

$$p_1(x) = \frac{1}{2} + x + 2x^3 + 4x^7 + 8x^{15} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i-1} x^{2^i-1} . \quad (3.30)$$

Substituindo essa ‘série lacunária’ na Eq.(3.29), verifica-se prontamente que $p_1(x)$ é uma solução. Similarmente, reescrevendo a Eq.(3.29) como $p(x^2) = -1/4x + p(x)/2x$, encontra-se que $p(x) = -1/4x^{1/2} + p(x^{1/2})/2x^{1/2}$, $p(x^{1/2}) = -1/4x^{1/4} + p(x^{1/4})/2x^{1/4}$, etc., levando a uma segunda solução:

$$p_2(x) = -\frac{1}{4x^{1/2}} - \frac{1}{8x^{3/4}} - \frac{1}{16x^{7/8}} - \frac{1}{32x^{15/16}} - \dots = -\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-(i+1)} x^{-(1-2^{-i})} . \quad (3.31)$$

³Para se encontrar essa relação para $p_{X^{1/2}}$, devemos notar que, sendo $y = y(x)$, $p_X(x)dx = p_Y(y)dy$, onde p_X é a densidade de probabilidade da variável x e p_Y é a densidade de probabilidade da variável y . Logo, temos que $p_X(x) = |dy/dx|p_Y(y)$. Usando $y = x^{1/2}$, encontramos que $p_{X^{1/2}}(x) = 2xp_X(x^2)$.

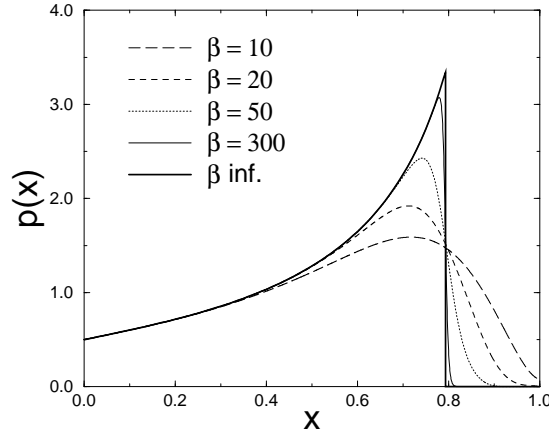


Figura 3.18: Distribuição $p(x)$ no estado estacionário do modelo variante Radical. Resultado de campo médio para o modelo com temperatura finita para os valores de β indicados.

Agora procuramos uma solução da forma $p(x) = Ap_1(x) + Bp_2(x)$; substituindo na Eq. (3.29), temos a condição $A + B = 1$. Essa combinação linear deve, porém, ser normalizável. As integrais relevantes são:

$$\int_0^{x^*} p_1(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^{*2^n} = \frac{1}{2} (x^* + x^{*2} + x^{*4} + x^{*8} + \dots) , \quad (3.32)$$

$$\int_0^{x^*} p_2(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x^{*2^{-n}} = -\frac{1}{2} (1 + x^{*1/2} + x^{*1/4} + x^{*1/8} + \dots) . \quad (3.33)$$

Uma vez que $0 < x^* < 1$, a primeira integral converge enquanto a segunda diverge, e então $p_2(x)$ não é normalizável, implicando que $B = 0$. Uma solução normalizada e positiva é $p(x) = p_1(x)$ para $x < x^* = 0.793189$ e $p(x) = 0$ para $x > x^*$. (x^* é determinado pela normalização.) Esta solução, para β infinito, está plotada na Fig. 3.18. Integração numérica da Eq. (3.27) pelo método descrito na seção 3.8.1 fornece resultados consistentes com essa solução, como também pode ser visto na figura. Finalmente, a simulação da versão com vizinhos aleatórios fornece uma distribuição estacionária consistente com essa expressão (veja a Fig. 3.19).

Vamos agora analisar o modelo radical em um grafo completo e mostrar que sua densidade de probabilidade (Eq. (3.30)) pode ser derivada por outro caminho. Defina a função $Q(x, t) = \int_x^1 p(y, t) dy$. Pelo mesmo argumento desenvolvido na última subseção, a probabilidade que x_m , o próximo sítios a ser renovado, esteja entre x e 1 é

$$\text{Prob}[x_m \geq x] = 1 - [1 - Q(x)]^L . \quad (3.34)$$

A probabilidade de que um vizinho escolhido aleatoriamente tenha $x_i \geq x$ é $Q(x)$, enquanto que a probabilidade de que um vizinho receba uma barreira $\geq x$ é $Q(x^2)$. A probabilidade que x_m receba um novo valor entre x e 1 é simplesmente $1 - x$. A variação esperada no número de sítios com $x_i \geq x$ é $(1 - x) + 2Q(x^2) - 2Q(x) - \{1 - [1 - Q(x)]^L\}$,

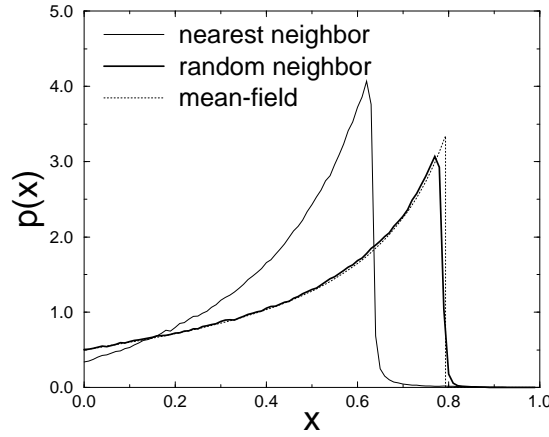


Figura 3.19: Distribuição $p(x)$ no estado estacionário do modelo variante Radical. Resultados simulacionais para as versões de primeiros vizinhos e vizinhos aleatórios comparados com a previsão de campo médio.

de forma que

$$\frac{dQ(x, t)}{dt} = (1 - x) + 2Q(x^2) - 2Q(x) - \{1 - [1 - Q(x)]^L\} \quad . \quad (3.35)$$

No estado estacionário, a definição $P \equiv 1 - Q$ leva a

$$x + 2P(x^2) - 2P(x) - P(x)^L = 0 \quad . \quad (3.36)$$

(Note que $P(0) = 0$ e $P(1) = 1$). Sendo $0 \leq P(x) < 1$ para $x < x^*$, temos que $\lim_{L \rightarrow \infty} P(x)^L = 0$ e a densidade de probabilidade em um sistema infinito obedece a equação funcional $x + 2P(x^2) - 2P(x) = 0$. Usando a abordagem iterativa, encontramos duas soluções, uma divergente (que é rejeitada) e a solução finita

$$P(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n} \quad , \quad (3.37)$$

i.e., a integral de $p_1(x)$, Eq. (3.30). Normalização então requer que $P = 1$ para $x \geq x^*$.

A solução numérica da equação (3.35) (veja a Fig. 3.20) mostra que, para L grande, $P_L(x)$ aproxima a função singular descrita acima. Para $x > x^{*1/2}$ fixo e $L \rightarrow \infty$, encontramos $P(x) \simeq x^{1/L}$.

3.8.4 Variante Centered Square

A densidade de probabilidade na versão de temperatura finita da variante centered square obedece:

$$\frac{dp_X(x)}{dt} = -e^{\beta x} p_X(x) - 2 \int_0^1 e^{\beta y} p_X(x, y) dy + 2 \int_0^1 e^{\beta y} p_X(y) dy + \frac{e^{\beta \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} p_X(\sqrt{x}) \quad , \quad (3.38)$$

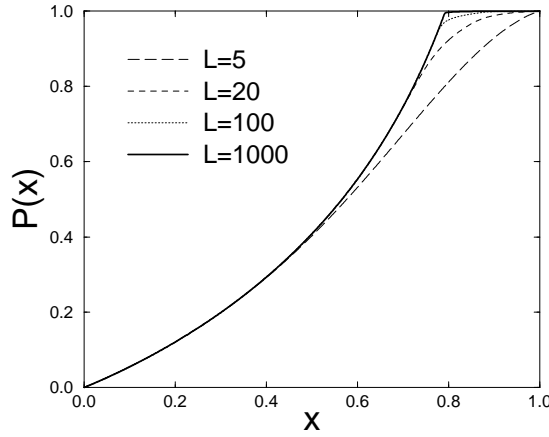


Figura 3.20: Função distribuição $P(x)$ do modelo variante Radical em um grafo completo para os tamanhos de redes indicados.

onde usamos que $p_{X^2}(x) = p_X(\sqrt{x})/2\sqrt{x}$, relação obtida pelo método explicado na seção 3.8.3 durante a dedução da Eq. (3.27). A fatorização de campo médio conduz a

$$\frac{dp(x)}{dt} = -e^{\beta x}p(x) - 2I(\beta)[p(x) - 1] + \frac{e^{\beta\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}p(\sqrt{x}) \quad , \quad (3.39)$$

com $I(\beta)$ como definido na última subseção. No estado estacionário, temos que

$$p(x) = \frac{2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}p(\sqrt{x})e^{\beta\sqrt{x}}/I}{2 + e^{\beta x}/I} \quad . \quad (3.40)$$

A hipótese de que no limite $\beta \rightarrow \infty$, a densidade estacionária $p(x) = 0$ para $x > x^*$ implica que $I(\beta) \sim e^{\beta x^*}$. Portanto

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{e^{\beta x}}{I} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x^* \\ \infty & \text{se } x > x^* \end{cases} \quad (3.41)$$

e

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{e^{\beta\sqrt{x}}}{I} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x^{*2} \\ \infty & \text{se } x > x^{*2} \end{cases} \quad . \quad (3.42)$$

Isso, combinado com a Eq. (3.40), implica que $p(x) = 1$ para $x \in [0, x^{*2}]$, e que

$$p(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{4\sqrt{x}} \frac{e^{\beta\sqrt{x}}}{I} p(\sqrt{x}) \right] \quad \text{para } x \in [x^{*2}, x^*] \quad (3.43)$$

O processo iterativo usado na seção precedente não é útil aqui, pois ele gera soluções patológicas, devido à razão $e^{\beta\sqrt{x}}/I$ ser divergente neste intervalo. Observe que, para $x \in [x^*, x^{*1/2}]$, se $p(x) = g(x^2)I/e^{\beta x}$ quando $\beta \rightarrow \infty$ com $g(x^2)$ finito, então $p(x) =$

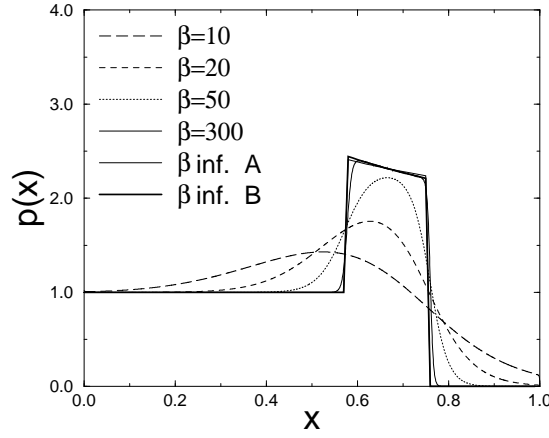


Figura 3.21: Variante centered square: resultado de campo médio para o modelo com temperatura finita para os valores de β indicados. Aproximação A refere-se a $g(x) = \text{constante}$, e B para $g(x) = ax + b$, ambas a temperatura nula, como explicado no texto.

$1 + g(x)/4\sqrt{x}$ para $x \in [x^{*2}, x^*]$. (Note que isso significa que $p(x) \rightarrow 0$ quando $\beta \rightarrow \infty$ para x no intervalo $[x^*, x^{*1/2}]$, consistente com a hipótese de que $p(x) \rightarrow 0$ for $x > x^*$.) A função $g(x)$ fica, porém, indeterminada. Tentando a solução mais simples, $g(x) = \text{constante}$, encontramos um resultado surpreendentemente razoável, como ilustrado na Fig. 3.21. Permitindo que $g(x) = ax + b$, com a e b constantes, encontramos uma ótima concordância com a integração numérica da Eq. (3.39) como também mostrado na Fig. 3.21. Infelizmente, não temos um argumento para justificar porque $g(x)$ deveria tomar essa forma.

O limiar x^* pode ser determinado de uma forma simples. Uma vez que a fração de barreiras no intervalo $[x^*, 1]$ é constante no estado estacionário, o número médio de barreiras removidas deste intervalo a cada passo de tempo deve ser igual ao número médio de inseridas. A probabilidade de que o máximo x_M esteja em $[x^*, 1]$ é 1, enquanto seus vizinhos aleatórios estão certamente abaixo de x^* . Cada vizinho renovado tem uma probabilidade $(1 - x^*)$ de receber uma barreira no intervalo $[x^*, 1]$, enquanto que o máximo permanece no intervalo $[x^*, 1]$ com probabilidade p_1 , a probabilidade que $x_M \in [x^{*1/2}, 1]$. Assim, temos

$$1 = 2(1 - x^*) + p_1 \quad . \quad (3.44)$$

Esse argumento pode ser repetido para os intervalos $[x^{*1/2}, 1]$, $[x^{*1/4}, 1]$, ..., levando a

$$p_1 = 2(1 - x^{*1/2}) + p_2 \quad , \quad (3.45)$$

$$p_2 = 2(1 - x^{*1/4}) + p_3 \quad \dots \quad (3.46)$$

onde p_n é a probabilidade que $x_M \in [x^{*1/2^n}, 1]$. Substituindo este resultado na equação (3.44), encontramos

$$1 = 2(1 - x^*) + 2(1 - x^{*1/2}) + 2(1 - x^{*1/4}) + 2(1 - x^{*1/8}) + \dots \quad , \quad (3.47)$$

o que fornece $x^* = 0.761072$. Finalmente, notamos que a normalização implica que $\int_{x^{*2}}^{x^*} g(x)/4\sqrt{x} dx = 1 - x^* = 0.238928$, impondo uma restrição na função $g(x)$.

3.8.5 Variante peripheral square

Vamos agora aplicar a análise de campo médio à variante peripheral square. Neste caso, a densidade de probabilidade satisfaz:

$$\begin{aligned} \frac{dp_X(x)}{dt} &= -e^{\beta x} p_X(x) - 2 \int_0^1 e^{\beta y} p_X(x, y) dy + 2 \int_0^1 e^{\beta y} p_X(y) dy \\ &+ p_{X^2}(x) \int_0^1 e^{\beta y} p_X(y) dy \quad , \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde $p_{X^2}(x) = p_X(x^{1/2})/2x^{1/2}$. Após a fatorização de campo médio, essa expressão se reduz a

$$\frac{dp(x)}{dt} = -e^{\beta x} p(x) + I(\beta)[-2p(x) + 2 + \frac{1}{2x^{1/2}}p(x^{1/2})] \quad , \quad (3.49)$$

com $I(\beta)$ definido como anteriormente. A hipótese que, para $\beta \rightarrow \infty$, a densidade estacionária $p(x) = 0$ para $x > x^*$ implica que $I(\beta) \sim e^{\beta x^*}$, levando à equação funcional:

$$p(x) - \frac{1}{4x^{1/2}}p(x^{1/2}) = 1 \quad (\beta \rightarrow \infty) \quad , \quad (3.50)$$

para $x < x^*$.

Como na variante centered-square, o método iterativo não funciona aqui, e procuramos uma abordagem diferente. Seja $p(x) = f(x)$ no intervalo $x^{*2} \leq x < x^*$, onde a função $f(x)$ e a constante x^* ainda devem ser determinadas. Usando a Eq. (3.50), encontramos que

$$p(x) = 1 + \frac{f(x^{1/2})}{4x^{1/2}} \quad \text{para } x^{*4} \leq x < x^{*2} \quad , \quad (3.51)$$

$$p(x) = 1 + \frac{1}{4x^{1/2}} + \frac{f(x^{1/4})}{4^2 x^{3/4}} \quad \text{para } x^{*8} \leq x < x^{*4} \quad , \quad (3.52)$$

$$p(x) = 1 + \frac{1}{4x^{1/2}} + \frac{1}{4^2 x^{3/4}} + \frac{f(x^{1/8})}{4^3 x^{7/8}} \quad \text{para } x^{*16} \leq x < x^{*8} \quad , \quad \text{etc.} \quad (3.53)$$

Assim encontramos uma família de soluções $p(x)$ para a Eq.(3.50), a qual é bastante geral porque $f(x)$ ainda está indeterminado.

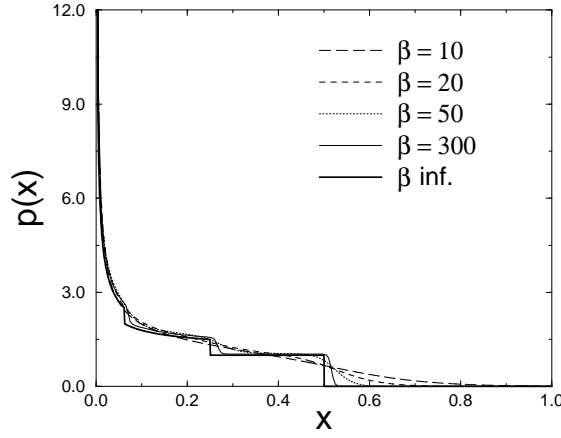


Figura 3.22: Variante peripheral square: resultado de campo médio para o modelo com temperatura finita para os valores de β indicados.

Vamos agora mostrar que $f(x) = 1$ no intervalo $[x^{*2}, x^*)$. Primeiro, notamos que no estado estacionário, a Eq. (3.49) implica

$$\left(\frac{e^{\beta x}}{I} + 2\right) p(x) = 2 + \frac{p(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}. \quad (3.54)$$

Em particular, para $x = 1$ temos

$$\left(\frac{e^{\beta}}{I} + \frac{3}{2}\right) p(1) = 2, \quad (3.55)$$

de forma que se $I \simeq Ae^{\beta x^*}$, então $p(1) \simeq 2Ae^{-\beta(1-x^*)}$. Percebe-se que $p(x) \simeq 2Ae^{-\beta(x-x^*)}$ satisfaz a Eq. (3.54) para $x^* < x \leq 1$. A mesma equação então leva a $p(x) = 1$ quando $\beta \rightarrow \infty$, para $x^{*2} < x < x^*$. Podemos então desenvolver a solução completa usando as Eqs. (3.51) a (3.53); normalização implica que $x^* = 1/2$. O resultado é a função $p(x)$ plotada na Fig. 3.25, que está em bom acordo com a densidade encontrada nas simulações para o modelo com vizinhos aleatórios. Esta solução é descontínua nos pontos x^* , x^{*2} , x^{*4} , ... e exibe uma divergência integrável em $x = 0$.

O valor de x^* pode ser confirmado através do raciocínio desenvolvido na última subseção para o modelo peripheral square, que neste caso implica que $1 = 2(1 - x^*)$ e portanto $x^* = 1/2$.

3.8.6 Simulação numérica e expoentes críticos

Vamos comparar as previsões da teoria de campo médio com os resultados simulacionais. Os histogramas para determinação de $p(x)$ foram acumulados após N_p passos de tempo, necessários para que o sistema (um anel de L sítios) relaxe para o estado estacionário. A fim de melhorar a estatística, fazemos médias sobre N_r realizações.

Os resultados simulacionais para o modelo BS original são mostrados na Fig. 3.23. Observamos uma concordância qualitativa entre as versões de primeiros vizinhos (PV)

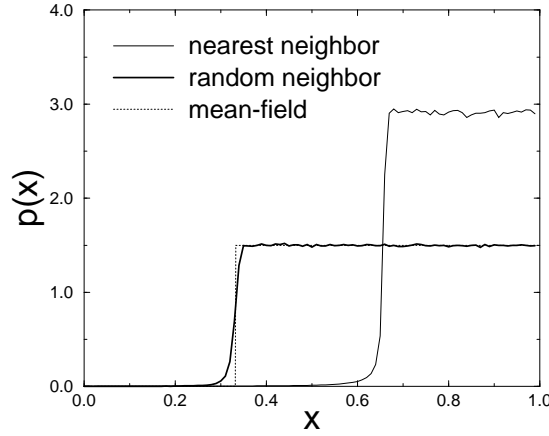


Figura 3.23: Modelo original: resultados simulacionais para as versões primeiros vizinhos (PV) e vizinhos aleatórios (VA) comparados com a previsão de campo médio.

e vizinhos aleatórios (VA). (Os parâmetros simulacionais foram: $L = 1000$, $N_p = 10^6$, $N_r = 10^3$ (PV); $L = 2000$, $N_p = 10^5$, $N_r = 10^3$ (VA).) Aqui e em todos os outros casos, os resultados simulacionais para o modelo com vizinhos aleatórios parecem convergir (como esperado) para a previsão de campo médio. À luz da discussão na seção 3.8.2, é razoável atribuir o arredondamento da função degrau a um efeito de tamanho finito.

A figura 3.19 exibe resultados similares para a versão radical. Notamos que as versões PV e VA têm densidades de probabilidade qualitativamente similares, diferindo principalmente no valor do limiar x^* . (Neste caso usamos $N_p = 10^6$ e $N_r = 10^3$ em sistemas com $L = 1000$ (PV) ou 2000 (VA) sítios.)

Os resultados da simulação dos modelos centered e peripheral square são mostrados nas figuras 3.24 e 3.25, respectivamente. Para o centered square, as densidades de probabilidade para PV e VA são bastante similares, diferindo principalmente no valor do limiar e na inclinação da porção central (Fig. 3.24). (Os parâmetros simulacionais foram $L = 2000$, $N_p = 10^7$, $N_r = 500$ (PV), $L = 10000$, $N_p = 10^6$, $N_r = 10^3$ (VA).) Por outro lado, para a variante peripheral square as densidades para primeiros vizinhos e vizinhos aleatórios são um pouco diferentes, uma vez que a última exibe uma série de degraus, enquanto apenas um degrau é evidente na primeira (ver Fig. 3.25). Estudos mais detalhados seriam necessários para determinar se isso representa uma diferença qualitativa entre as duas formulações ou se é apenas uma consequência do tamanho finito da rede e/ou da resolução numérica finita. (Note que para os modelos square usamos redes maiores, o que foi necessário para observar as singularidades com clareza. Os parâmetros simulacionais foram: $L = 1000$, $N_p = 10^6$, $N_r = 10^3$ (PV), $L = 50000$, $N_p = 10^7$, $N_r = 20$ (VA).)

A fim de determinar a classe de universalidade dessas variações, estudamos a distribuição $P_J(r)$. Sabemos que no modelo original, $P_J(r) \sim r^{-\pi}$, com $\pi = 3.23(2)$ [82]. (Os números entre parênteses denotam as incertezas.) Simulamos os modelos modificados usando 10^9 passos de tempo em redes de 2000 ou mais sítios e encontramos $\pi = 3.22(2)$

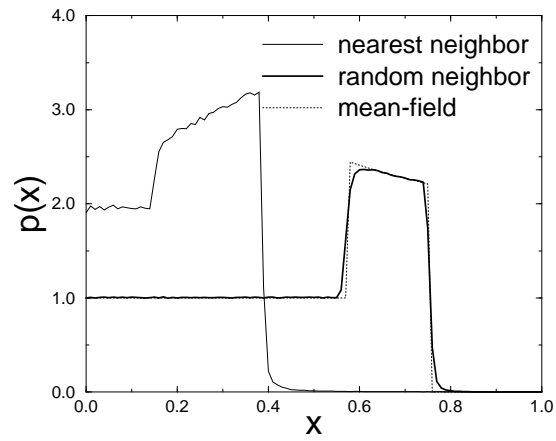


Figura 3.24: Variante centered square: resultados simulacionais para as versões PV e VA comparadas à previsão de campo médio.

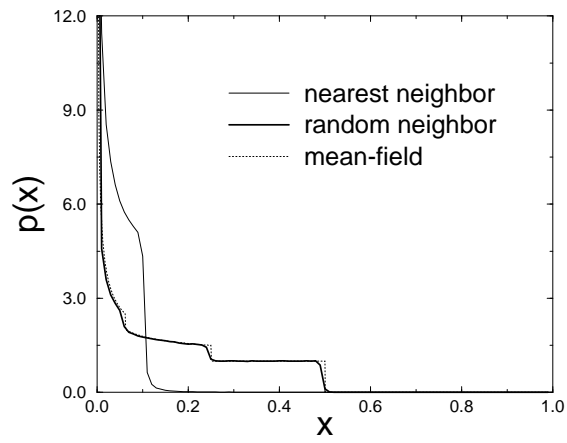


Figura 3.25: Variante peripheral square: resultados simulacionais para as versões PV e VA comparadas à previsão de campo médio.

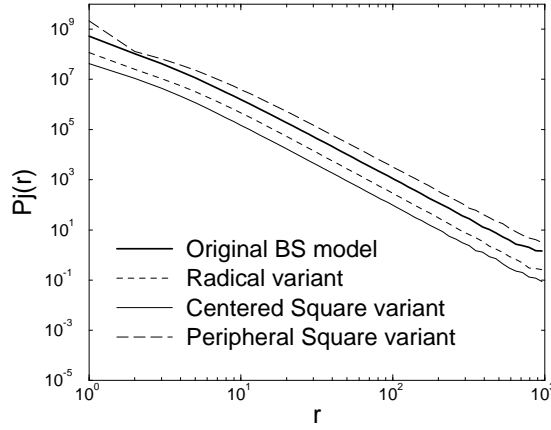


Figura 3.26: Distribuição $P_J(r)$ da distância r que separa sítios renovados em passos consecutivos. As curvas foram deslocadas verticalmente para facilitar a comparação.

para o modelo BS original; $\pi = 3.27(2)$ para a variante radical; $\pi = 3.25(2)$ e $3.24(2)$ para as variantes centered e peripheral square, respectivamente (ver Fig. 3.26). Encontramos, assim, forte evidência de que as variantes analisadas aqui pertencem à mesma classe de universalidade do modelo original.

3.9 A criticalidade auto-organizada no modelo BS

Nesta seção veremos como a dinâmica extrema auto-organiza o modelo BS em um estado crítico. Com esse objetivo, vamos estudar o modelo Bak-Sneppen com estados absorventes (ABS, do inglês absorbing Bak-Sneppen). Formularemos uma relação geral entre modelos com uma transição de fase para um estado absorvente e modelos com dinâmica extrema na seção 3.9.1. Em seguida, nas seções 3.9.2 e 3.9.3, apresentaremos os resultados simulacionais para o modelo ABS. O modelo CP3, que é a versão não-extrema do modelo BS, será investigado na seção 3.9.4. Uma versão extrema do processo de contato será estudada na seção 3.9.5. Finalmente, na seção 3.9.6, analisaremos o modelo ABS anisotrópico.

3.9.1 Relação entre os modelos com estados absorventes e os modelos com dinâmica extrema

Nesta subseção vamos examinar como um modelo estocástico com uma transição de fase para um estado absorvente pode ser alterado para exibir invariância por escala sob dinâmica extrema. Começamos definindo um esquema bastante geral para depois discutir exemplos específicos. Uma ampla classe de modelos exibindo uma transição de fase para um estado absorvente pode ser definida da seguinte forma [98–101]. Considere um processo estocástico \mathcal{S} definido em um grafo completo \mathcal{G} com L sítios. (\mathcal{G} consiste em um grupo de sítios com ligações entre certos pares de sítios. Exemplos típicos são um anel de L sítios

e um hipercubo d -dimensional com ligações entre os vizinhos mais próximos.) O estado $\sigma(i)$ do sítio i é 0 ou 1, o último valor descrevendo um sítio ativo e o primeiro um inativo. Para cada sítio i em \mathcal{G} definimos uma vizinhança $v(i) \subset \mathcal{G}$, ou, de forma mais geral, um conjunto de vizinhanças $v_1(i), v_2(i), \dots, v_n(i)$.

A dinâmica de \mathcal{S} acontece em passos de tempo discretizados. Cada passo envolve escolher um sítio ativo i (o *sítio central* neste passo), aleatoriamente, e mudar os estados dos sítios em $v(i)$ de acordo com uma certa regra f . Caso haja duas ou mais vizinhanças, uma delas, digamos $v_r(i)$, é escolhida aleatoriamente com probabilidade p_r e uma regra f_r é aplicada ao sítio ou sítios em v_r . Em geral f (ou f_r) é uma regra probabilística. A cada passo de tempo o número de sítios ativos pode mudar e, se em algum momento não houver mais sítios ativos ($\sigma(i) = 0, \forall i \in \mathcal{G}$), então o sistema caiu em um estado absorvente e não há mais evolução. Caso contrário a dinâmica procede para o próximo passo.

Usando σ_n para denominar o conjunto completo de variáveis $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(L)$ no passo n , a dinâmica gera a seqüência $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ a partir da configuração inicial σ_0 . Frequentemente é de interesse associar uma variável de tempo contínuo t com o processo. Isso é geralmente feito associando um incremento de tempo $\Delta t = 1/N_a$ com cada passo, onde N_a é o número de sítios ativos logo antes do passo ser realizado. Definimos o *parâmetro de ordem* como $\rho(t) = \text{Prob}[\sigma_t(i) = 1]$, i.e., a fração de sítios ativos no tempo t . (O espaço de eventos aqui é o conjunto de todas as possíveis realizações do processo até o tempo t , começando de uma certa condição inicial que pertença ao espaço de configurações.) Se o parâmetro de ordem estacionário, definido por $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \rho$, for nulo, dizemos que o processo está na *fase absorvente*; caso contrário ele está na *fase ativa*.

Um modelo simples que exhibe uma transição de fase para um estado absorvente é o *processo de contato* (CP, do inglês *contact process*) [102]. Aqui consideramos a versão unidimensional desse modelo. Existem três conjuntos $v_r(i)$, convenientemente denominados $v_0(i) = i$ e $v_{\pm}(i) = i \pm 1$. As probabilidades associadas são p_0 e $p_{\pm} = (1 - p_0)/2$. Em termos da parametrização usual [101, 102], $p_0 = 1/(1 + \lambda)$, onde $\lambda \geq 0$ representa a taxa de espalhamento da atividade. (Na interpretação “epidêmica” do CP, os sítios ativos representam organismos infectados, enquanto os inativos representam organismos suscetíveis à doença. λ é a taxa de infecção.) As regras de renovação são: $f_0 = 0$, $f_{\pm} = 1$. Em outras palavras, um sítio ativo tem uma probabilidade por unidade de tempo $1/(1 + \lambda)$ de se tornar inativo, enquanto um sítio inativo j se torna ativo com a taxa $\lambda n_a(j)/[2(1 + \lambda)]$, onde $n_a(j)$ é o número de vizinhos ativos do sítio j . Sabe-se que a versão unidimensional do processo de contato exhibe uma transição de fase contínua entre uma fase absorvente e uma ativa em $\lambda_c \simeq 3.29785$ [98, 100, 101]. Sabe-se também que o processo de contato pertence à classe de universalidade da percolação dirigida (DP) [101].

É conveniente associar o parâmetro de controle com a regra de renovação f ao invés de com as probabilidades p_r . Portanto, reformulamos o processo de contato da seguinte forma. Com os conjuntos $v_0(i)$ e $v_{\pm}(i)$ definidos acima, tomamos $p_0 = 1/2$ e $p_{\pm} = 1/4$ e

definimos $q = \lambda/(1 + \lambda)$. As funções de renovação são:

$$f_0 = \begin{cases} 1, & \text{c.p. } q \\ 0, & \text{c.p. } 1 - q \end{cases} \quad (3.56)$$

(‘c.p.’ significa “com probabilidade”) e

$$f_{\pm} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma(i \pm 1) = 1 \\ 1, & \text{c.p. } q \\ 0, & \text{c.p. } 1 - q \end{cases} \text{ se } \sigma(i \pm 1) = 0 \quad . \quad (3.57)$$

É fácil verificar que as taxas de transição satisfazem $w(0 \rightarrow 1)/w(1 \rightarrow 0) = n_a \lambda/2$, da mesma forma que na formulação original. O limiar crítico se torna $q_c \simeq 0.76733$.

O seguinte processo de contato com três sítios (CP3) exercerá um papel importante na nossa análise [103]. Para cada sítio definimos o conjunto $v(i) = \{i-1, i, i+1\}$ (o sítio central e seus dois vizinhos mais próximos). A função de renovação f assume os valores 1 e 0 com probabilidades q e $1 - q$ respectivamente, independentemente em cada um dos três sítios em $v(i)$. (Na ref. [103] este modelo é chamado ‘modelo 3’.) Simulações do CP3 mostram que ele exibe uma transição de fase contínua em $q = q_c \simeq 0.63523(3)$. Outros sistemas de partículas interagentes, tais como o processo de contato por pares [104] e o CP difusivo [105], também podem ser acomodados dentro do esquema descrito acima.

Vamos assumir de agora em diante que o processo \mathcal{S} é definido de tal forma que os parâmetros de controle (tais como q) estão associados com a regra de renovação f . Cada vez que um sítio é renovado, o valor de f pode ser determinado pela comparação de um número aleatório x com o parâmetro em questão. (Este é o procedimento usual adotado nas simulações.) No modelo CP3, por exemplo, fazemos $f = 1$ se $x < q$ e $f = 0$ se $x > q$, onde x é uniformemente distribuído no intervalo $[0,1]$. Vamos denominar o número aleatório associado com a última renovação do sítio i por x_i , de forma que $\sigma(i) = \Theta(q - x_i)$, onde Θ é a função degrau. (Os valores iniciais dos x_i são designados de acordo com os estados iniciais das variáveis $\sigma(i)$. Por exemplo, se todos os sítios forem inicialmente ativos, retiramos os x_i iniciais de uma distribuição uniforme em $[0, q]$.) Para o CP, a Eq. (3.56) requer que renovemos o sítio central i com um número escolhido uniformemente de $[0,1]$. De acordo com a Eq. (3.57), a mesma idéia se aplica para renovar um vizinho *inativo* ($i \pm 1$), mas quando renovamos um vizinho *ativo*, o número aleatório x é retirado do intervalo $[0, q]$, já que um vizinho ativo permanece ativo.

Em resumo, vimos como um sistema de partículas \mathcal{S} pode ser formulado usando um conjunto de variáveis aleatórias x_i de tal forma que um sítio i é ativo se x_i é menor que um certo parâmetro q . \mathcal{S} sofre uma transição de fase para um estado absorvente em $q = q_c$. Nós agora definimos dois processos relacionados, \mathcal{S}_{EA} e \mathcal{S}_E . O primeiro, um processo *extremo absorvente*, é obtido pela modificação de como o sítio central é selecionado. Ao invés de escolhê-lo aleatoriamente entre os sítios atualmente ativos, selecionamos o *sítio ativo com o menor x_i* . Como no processo original \mathcal{S} , se não houver sítios ativos (i.e., $x_j > q, \forall j \in \mathcal{G}$), o processo está numa configuração absorvente e a evolução termina. Portanto, \mathcal{S}_{EA} possui uma fase absorvente e, como o processo original \mathcal{S} exibe uma transição de

fase entre uma fase ativa e uma absorvente quando o parâmetro de controle q é variado, esperamos que \mathcal{S}_{EA} também tenha tal transição de fase em algum valor $q_{c,E}$. (A razão para essa expectativa é que a probabilidade relativa de gerar e destruir sítios ativos varia com q , da mesma forma que em \mathcal{S} .) A teoria de campo médio (ver ref. [93]) fornece $q_{c,E} = q_c$. Devido às diferentes correlações geradas pela dinâmica extrema, entretanto, o valor crítico $q_{c,E}$ de \mathcal{S}_{EA} é em geral diferente de q_c .

Definimos a versão *extrema* do processo \mathcal{S} relaxando a condição em \mathcal{S}_{EA} que o sítio extremo precisa ser ativo (i.e., ter $x_i < q$) para que a dinâmica prossiga. Se \mathcal{S} é o processo de contato original, então \mathcal{S}_E é um processo onde ou o sítio mínimo ou um de seus vizinhos mais próximos é renovado a cada passo de tempo. Se \mathcal{S} é o CP3, \mathcal{S}_E é o modelo Bak-Sneppen. Note que \mathcal{S}_E não tem um estado absorvente e, portanto, não tem uma transição de fase para tal estado. Suas propriedades estacionárias, no entanto, estão intimamente ligadas às propriedades do ponto crítico de \mathcal{S}_{EA} , como veremos a partir de agora.

Estamos particularmente interessados na densidade de probabilidade estacionária $p(x)$ sob a dinâmica extrema. Como vimos anteriormente, $p(x) = C\Theta(x - q_{c,E})\Theta(1 - x)$ no modelo Bak-Sneppen, no limite de tamanho infinito. Vimos também que $p(x)$ deve exibir uma singularidade do tipo função degrau em qualquer modelo com dinâmica extrema (seção 3.8). Esse aspecto já está presente no processo original com estados absorventes \mathcal{S} em seu ponto crítico, pois em $q = q_c$ a densidade estacionária de sítios ativos (aqueles com $x_j < q$) tende a zero à medida que o tamanho L do sistema vai para o infinito. A distribuição na região ‘permitida’ $x > q$ é uniforme, uma vez que os x_j são retirados de uma distribuição uniforme. Portanto, $p(x)$ salta de zero para um valor finito em $x = q_c$. No regime *supercrítico* ($q > q_c$), $p(x)$ é igual a uma constante p_1 para $x < q$ e assume o valor de uma constante diferente, p_2 , no intervalo $[q, 1]$. Novamente a densidade estacionária é descontínua em $x = q$.

O que vale para \mathcal{S} também é válido qualitativamente para \mathcal{S}_{EA} . O valor crítico $q_{c,E}$ pode, como discutido, ser diferente de q_c , mas como \mathcal{S}_{EA} exibe uma transição de fase para um estado absorvente, sua distribuição estacionária $p(x)$ também tem uma singularidade do tipo função degrau. Exatamente em $q = q_{c,E}$ com $L \rightarrow \infty$, o parâmetro de ordem $\rho = 0$ e o tempo de sobrevivência do processo tende a infinito. Isso significa que o processo pode sobreviver eternamente, com a escolha do sítio central *restrita ao conjunto com $x \leq q_{c,E}$* . A presença de sítios ativos no intervalo $q_{c,E} < x \leq q$ é portanto irrelevante, já que um sítio com $x \leq q_{c,E}$ está sempre disponível. Portanto para $q \geq q_{c,E}$, a distribuição $p(x)$ exibe uma singularidade do tipo função degrau em $q_{c,E}$. A dinâmica extrema efetivamente aprisiona a singularidade em $q = q_{c,E}$. A discussão acima sobre \mathcal{S}_{EA} é válida no limite $L \rightarrow \infty$; para L finito existe uma probabilidade não nula (para $q < 1$), de que todos os sítios tenham $x > q$ de forma que o sistema em algum momento ficará preso no estado absorvente. (Esperamos, entretanto, que o tempo médio de vida cresça exponencialmente com L , para $q > q_{c,E}$.)

Em resumo, se \mathcal{S} exibe uma transição de fase para um estado absorvente, então \mathcal{S}_{EA} também deve exibir tal transição, embora não necessariamente no mesmo valor de q . A distribuição $p(x)$ possui uma singularidade do tipo função degrau em ambos os

casos. Pouco acima do ponto crítico do processo original \mathcal{S} esperamos que $\rho \sim (q - q_c)^\beta$, onde β é o expoente crítico associado ao parâmetro de ordem. Abaixo da dimensão crítica ($d_c = 4$ para a classe DP [115,116]), $\beta < 1$. No regime supercrítico de \mathcal{S}_{EA} , por outro lado, $\rho = \int_0^q p(x)dx \propto (q - q_{c,E})$ já que $p(x)$ salta de zero para um valor finito em $x = q_{c,E}$. Então o expoente do parâmetro de ordem β é igual a 1 em \mathcal{S}_{EA} . Este é o primeiro exemplo de como a condição extrema altera o valor de um expoente crítico. Outro exemplo, discutido por Paczuski e colaboradores [106,107], é que o expoente do espalhamento η (a ser definido na seção 3.9.3) é nulo para qualquer modelo sob dinâmica extrema, enquanto que $\eta > 0$ para a percolação dirigida. Mais evidências de que a dinâmica extrema modifica os valores dos expoentes críticos será dada mais tarde.

No processo \mathcal{S}_E , o sítio central é sempre escolhido (no limite $L \rightarrow \infty$) do conjunto $\{i : x_i \leq q_{c,E}\}$, da mesma forma que \mathcal{S}_{EA} em seu ponto crítico. Como o parâmetro de ordem é nulo no último caso, podemos afirmar que a dinâmica extrema efetivamente sintoniza o parâmetro de ordem em zero. (ρ se aproxima de zero por valores positivos quando $L \rightarrow \infty$.) Como vimos, a existência de sítios com $q_{c,E} < x < q$ se torna irrelevante em \mathcal{S}_{EA} , no limite termodinâmico. Em outras palavras, \mathcal{S}_E é idêntico ao processo \mathcal{S}_{EA} neste limite. (Começando da mesma configuração inicial e usando o mesmo conjunto de números aleatórios, a mesma seqüência de sítios será renovada nos dois processos.)

Uma vez que a versão extrema do CP3 é o modelo Bak-Sneppen, vamos nos referir ao modelo CP3_{EA} como o modelo *Bak-Sneppen absorvente* (ABS). Nosso objetivo é, então, caracterizar o comportamento do modelo ABS, do modelo CP3 e das versões extrema e EA do processo de contato. O modelo ABS está intimamente relacionado às f -avalanches estudadas na ref. [106]. Uma f -avalanche (na nossa notação uma q -avalanche) inicia quando o sítio mínimo é menor que q , tendo sido maior que q no(s) último(s) passo(s), e continua até que o mínimo seja novamente maior que q . (À medida que q se aproxima de $q_{c,E}$ por baixo, a duração média das avalanches diverge.) A dinâmica do modelo BS continua independentemente de uma avalanche ter terminado ou não. Mas no modelo ABS $x_m > q$ representa um estado absorvente e a dinâmica termina. No modelo BS é comum analisar as propriedades das q -avalanches no estado estacionário. Vamos estudar as propriedades estacionárias do modelo ABS, atingidas depois que o sistema relaxa, após um transiente inicial. Vamos estudar também o tempo médio de vida do estado ativo como função do tamanho do sistema. Estes estudos serão feitos na seção 3.9.2. Outra abordagem para investigar as transições de fase para estados absorventes consiste em analisar o espalhamento da atividade a partir de um único sítio ativo. Este fenômeno de espalhamento no modelo BS foi estudado nas referências [106,108], onde foi denominado ‘BS branching process’, assim como na referência [61] sob o nome de modelo BS(\tilde{p}). Vamos refinar tais estudos na seção 3.9.3.

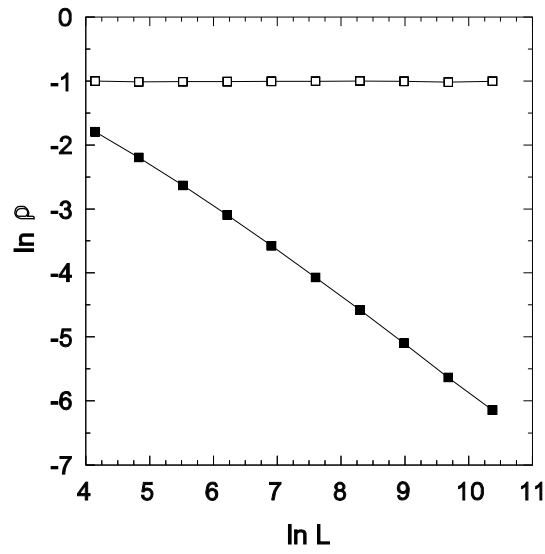


Figura 3.27: Variação do parâmetro de ordem no estado estacionário $\bar{\rho}$ (símbolos cheios) com o tamanho L da rede no modelo ABS unidimensional no ponto crítico. Símbolos vazios: diferença entre $\bar{\rho}$ e o ajuste feito com a Eq. (3.58), deslocada verticalmente para facilitar a leitura.

3.9.2 Modelo Bak-Sneppen absorvente: propriedades estacionárias

Conduzimos longos estudos computacionais do modelo ABS unidimensional. Partindo de um estado inicial onde os x_i estão distribuídos uniformemente no intervalo $[0,1]$, esperamos o sistema relaxar até que as propriedades médias flutuassem em torno de valores estacionários. As propriedades estacionárias são então obtidas de médias temporais sobre o conjunto de realizações sobreviventes. Cada passo corresponde a um intervalo de tempo $\Delta t = 1/N_a$, onde N_a é o número de sítios ativos logo antes da renovação ser realizada. Os resultados para o parâmetro de ordem estacionário (a densidade de sítios com $x_i < q$) confirmam que no regime supercrítico ($q > q_{c,E}$) o parâmetro de ordem cresce linearmente com $q - q_{c,E}$, como antecipado na subseção anterior.

Estudamos a escala de tamanho finito do parâmetro de ordem $\bar{\rho}$ e do tempo de vida τ no ponto crítico. (τ é obtido ajustando a exponencial $e^{-t/\tau}$ à probabilidade de sobrevivência $P_s(t)$.) Os comportamentos esperados para a escala de tamanho finito são: $\bar{\rho} \sim L^{-\beta/\nu_\perp}$ e $\tau \sim L^{\nu_\parallel/\nu_\perp}$. Realizamos simulações em $q = 0.66701$ e 0.66702 , sendo o último valor o preferido na literatura para o limiar do modelo BS unidimensional, enquanto o primeiro é sugerido pelos resultados que apresentaremos na próxima subseção. Estudamos sistemas de 1000, 2000, 4000, ..., 32000 sítios em simulações com tempos máximos de 2×10^7 a 3×10^8 .

Para $L = 4000 - 32000$, os resultados para o parâmetro de ordem seguem uma lei de potência com $\beta/\nu_\perp = 0.755(5)$. Os dados para sistemas menores, entretanto, exibem um desvio sistemático de uma lei de potência pura, levando-nos a procurar um termo de correção de escala; uma correção do tipo $\propto L^{-1/2}$ produz um bom ajuste. Ajustamos a

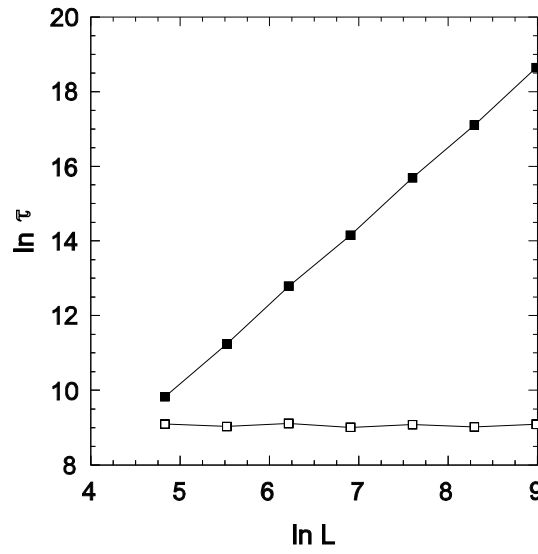


Figura 3.28: Tempo médio de vida τ (símbolos cheios) versus o tamanho do sistema L no modelo ABS unidimensional no seu ponto crítico. Símbolos vazios: $\tau/L^{\nu_{||}/\nu_{\perp}}$ (deslocado verticalmente para facilitar a leitura).

expressão

$$\ln \bar{\rho} = -\frac{\beta}{\nu_{\perp}} \ln L - \frac{b}{L^{1/2}} \quad (3.58)$$

aos dados para $L \geq 1000$, procurando os melhores valores para β/ν_{\perp} e b ; os valores encontrados são $\beta/\nu_{\perp} = 0.769(7)$ e $b = 3.69(20)$. Os dados da simulação e a diferença em relação ao ajuste obtido com a Eq. (3.58) são mostrados na figura 3.27, revelando a alta qualidade do ajuste. Os dados para o tempo de vida, usando sistemas de tamanhos 125, 250, ... 8000 fornecem $\nu_{||}/\nu_{\perp} = 2.12(1)$, aparentemente sem a necessidade de um termo de correção (veja a Fig. 3.28). Também determinamos o valor estacionário do momento $m = \bar{\rho}^2/\bar{\rho}^2$ no ponto crítico. As estimativas para m decrescem vagarosamente com L e, aparentemente, quando plotadas versus $L^{-0.25}$, aproximam-se de um valor limite ($L \rightarrow \infty$) igual a 1.030(5) (veja a Fig. 3.29). (Para o CP unidimensional, $m = 1.1737$ no ponto crítico.) Essencialmente os mesmos resultados são obtidos independentemente se $q_{c,E} = 0.66701$ ou 0.66702.

3.9.3 Modelo Bak-Sneppen absorvente: espalhamento da atividade

As propriedades de escala de uma transição de fase para um estado absorvente também são refletidas no espalhamento de uma atividade inicialmente restrita a uma região pequena [109]. Nas simulações de espalhamento do modelo ABS começamos de um sistema com um único sítio ativo $x_0 < q$ e todos os outros acima deste valor. (Isto é completamente equivalente ao ‘BS branching process’ estudado em [61, 106, 108].) Em $q = q_{c,E}$, o processo gera um padrão livre de escala que pode ser caracterizado por leis de potência para a probabilidade de sobrevivência $P_s(t)$, o número médio de sítios ativos $n(t)$ e a distância quadrática média $R^2(t) = [n(t)]^{-1} \langle \sum_j r_j^2(t) \rangle$. ($r_j(t)$ denomina a posição do j -ésimo sítio

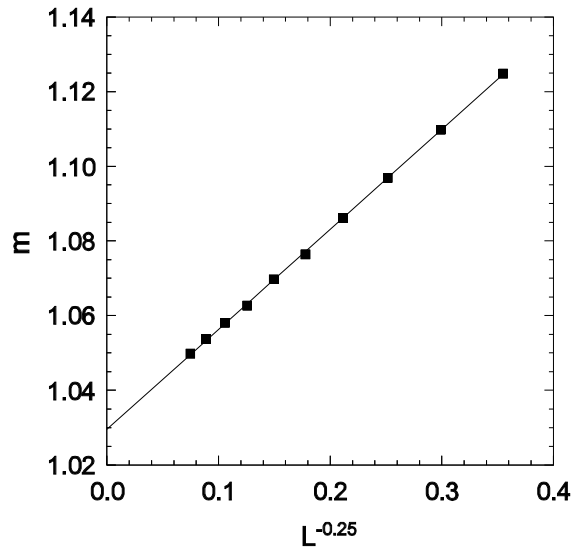


Figura 3.29: Momento m para o modelo ABS versus o tamanho do sistema $L^{-0.25}$. Pontos: dados simulacionais; linha: melhor ajuste, $m = 1.0295 + 0.268L^{-0.25}$.

ativo no tempo t . Note que $n(t)$ é a média sobre todas as realizações, incluindo aquelas que ficaram presas no estado absorvente antes ou após o tempo t .) As leis de escala são tipicamente escritas na forma

$$P_s \sim t^{-\delta}, \quad n \sim t^\eta, \quad R^2 \sim t^{z_{sp}}, \quad (3.59)$$

relações essas que foram verificadas com alta precisão em vários exemplos [99, 101]. (Usamos z_{sp} para denominar o expoente do espalhamento para evitar confusão com o expoente *dinâmico* z .) O aparecimento de leis de potência é geralmente usado para localizar o ponto crítico [101].

O expoente de espalhamento δ é relacionado ao expoente do tamanho das avalanches τ , definido (no modelo BS) através de $P_A(s) \sim s^{-\tau}$, onde $P_A(s)ds$ é a probabilidade de termos uma avalanche com duração entre s e $s + ds$. Portanto a probabilidade de sobrevivência $P_s(t) = \int_t^\infty P_A(s)ds$, o que implica $\tau = 1 + \delta$.

Realizamos simulações de espalhamento no modelo ABS em $q = 0.66699, 0.66700, 0.66701, 0.66702$ e 0.66703 . Cada realização foi seguida até um tempo máximo de aproximadamente 2.7×10^5 ; o número total de realizações variou entre 4×10^5 e 1.6×10^6 , dependendo do valor de q . Para localizar o ponto crítico, estudamos a inclinação local $\delta(t) = d \ln P / d \ln t$, plotada versus t^{-1} . (Numericamente, $\delta(t)$ é dado pela inclinação em uma regressão de mínimos quadrados para os dados no interval $[t_0, 20t_0]$, com média geométrica t . Variamos o parâmetro t_0 para encontrar $\delta(t)$ em diferentes tempos.) Para $q < q_c$, $\delta(t)$ tende a valores mais negativos para $t \rightarrow \infty$, enquanto que, para $q > q_c$, $\delta(t) \rightarrow 0$. Com base no expoente local (ver a Fig. 3.30) concluímos que $q_{c,E} = 0.66701(1)$. Este resultado é consistente com estimativas anteriores que localizaram o limiar em $0.66702(8)$ [61] e $0.66702(3)$ [106]. (As análises das inclinações locais $\eta(t)$ e $z_{sp}(t)$, definidas de maneira análoga a $\delta(t)$, não foram úteis para localizar o ponto crítico.)

Não foi possível obter bons ajustes para P_s , n e R^2 no ponto crítico usando leis de

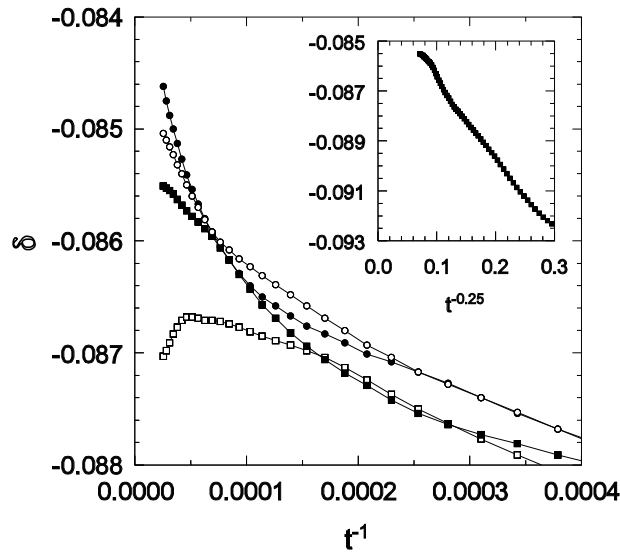


Figura 3.30: Expoente local $\delta(t)$ versus $1/t$ no modelo ABS. Os valores de q são (de baixo para cima) 0.66700, 0.66701, 0.66702 e 0.66703. Inset: dados para $q = 0.66701$ plotados versus $1/t^{0.25}$.

potência puras. Incluir uma correção sub-dominante nas relações da Eq. (3.59) aumenta tremendamente a qualidade do ajuste. Em particular, a probabilidade de sobrevivência pode ser ajustada com grande precisão usando

$$\ln P_s \simeq -\delta \ln t + \phi_P t^{-1/4} + C, \quad (3.60)$$

onde C é uma constante e os melhores valores dos parâmetros são $\delta = 0.084(1)$ e $\phi_P = 0.115$. O mesmo valor para δ é encontrado usando os dados para $q = 0.66702$. (A escolha de um termo de correção que decaia como $t^{-1/4}$ é motivado pelo fato dos expoentes locais $\delta(t)$ e $z_{sp}(t)$ serem essencialmente lineares quando plotados versus $t^{-1/4}$, como ilustrado na Fig. 3.30.) Na Fig. 3.31, plotamos P_s e a razão de P_s para a função ajuste, Eq. (3.60); vemos que a razão é praticamente constante para $t > 50$. O espalhamento médio $R^2(t)$ também pode ser ajustado usando uma lei de potência com um termo de correção. Encontramos

$$\ln R^2 \simeq z_{sp} \ln t - \phi_R t^{-1/4} + C', \quad (3.61)$$

onde $z_{sp} = 0.921(10)$ e $\phi_R = 1.703$.

Packzuski e colaboradores argumentam que $\eta = 0$ é um resultado muito geral para modelos com dinâmica extrema [106, 107]. Nossos dados para o modelo ABS confirmam essa conclusão: em um gráfico log-log, $n(t)$ claramente decai mais lentamente que uma lei de potência. Embora $\eta = 0$ seja compatível com $n(t)$ crescendo sem limite quando $t \rightarrow \infty$ (por exemplo, $\propto (\ln t)^\phi$, como sugerido na ref. [61]), nossos resultados suportam a conclusão de que $n(t)$ satura em um *valor finito* n_∞ para tempos longos. Especificamente, fomos incapazes de ajustar o comportamento para tempos longos usando expressões da forma $n \sim (\ln t)^\phi$. Na verdade, encontramos $d \ln n / d \ln t \propto t^{-\omega}$, sendo $\omega \simeq 0.149$, o que sugere que $n(t) \simeq n_\infty \exp[-ct^{-\omega}]$. De fato, um ajuste excelente é obtido usando $c = 1.92$ e $n_\infty = 14.574$, como podemos ver na Fig. 3.32. (A saturação de $n(t)$ não aparece na escala de tempo envolvida na simulação, mas no caso anisotrópico, mostrado no inset da Fig. 3.32, a saturação é evidente.)

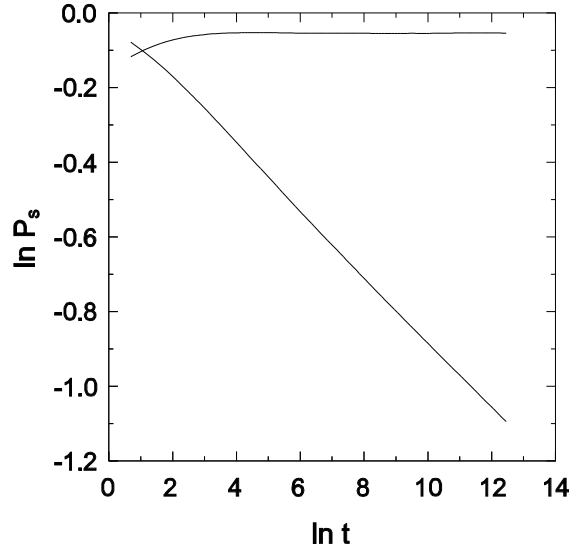


Figura 3.31: Probabilidade de sobrevivência $P_s(t)$ no modelo ABS em seu ponto crítico, $q = 0.66701$. A função praticamente constante representa a razão entre P_s e o ajuste fornecido pela Eq. (3.60).

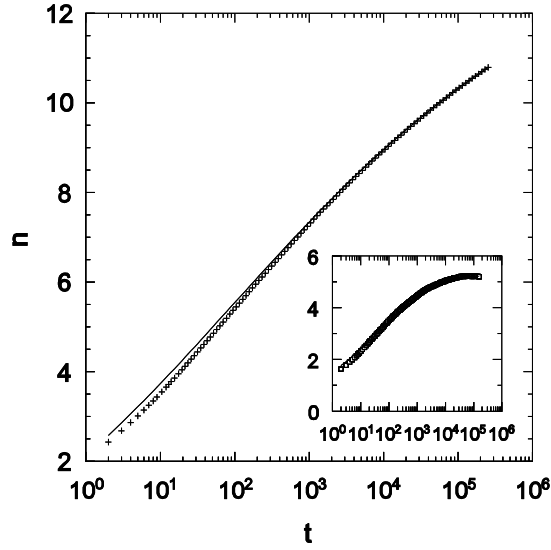


Figura 3.32: Número médio de sítios ativos $n(t)$ no modelo ABS no seu ponto crítico $x^* = q_{c,E} = 0.66701$. A curva sólida representa a função ajustada descrita no texto. Inset: o mesmo gráfico para o modelo ABS *anisotrópico*.

Na fase absorvente ($q < q_{c,E}$), a probabilidade de sobrevivência é nula no limite $t \rightarrow \infty$. Nossos dados obedecem $P_s \sim t^{-\delta} e^{-t/\tau}$, onde $\tau \sim |q - q_{c,E}|^{-\nu_{||}}$ com $\nu_{||} = 2.54(2)$. Por outro lado, para $q > q_{c,E}$, a probabilidade de sobrevivência tende a um valor finito quando $t \rightarrow \infty$. Obtemos $\lim_{t \rightarrow \infty} P_s \equiv P_\infty \sim (q - q_{c,E})^{\beta'}$, sendo $\beta' = 0.20(1)$. (Na classe de universalidade DP, temos $\beta' = \beta$ [109], mas isso não acontece necessariamente em outras classes de universalidade.)

No CP e nos outros modelos não-extremais, o espalhamento de atividade no regime supercrítico obedece um padrão simples: o tamanho R da região ativa cresce linearmente com o tempo, enquanto que o número de sítios ativos $n(t)$ cresce com t^d . Nossa observação de um espalhamento subdifusivo e da saturação de $n(t)$ nos levaram a investigar o espalhamento supercrítico no modelo ABS. Descobrimos que o espalhamento é *sublinear*. Por exemplo, usando $q = 0.7$ em um estudo com tempo máximo igual a $t \simeq 9 \times 10^6$ (para evitar transientes), obtemos $R^2 \sim t^\chi$ com $\chi = 1.20(4)$ e $n \sim t^\lambda$ com $\lambda = 0.61(2)$. (O expoente χ deveria ser o dobro de λ , uma vez que regiões ativas têm uma densidade de atividade finita no regime supercrítico.) Novamente, vemos que a dinâmica extrema limita o crescimento da atividade.

3.9.4 Modelo CP3

Realizamos simulações de espalhamento no modelo CP3 usando a abordagem descrita na seção anterior. Cada realização durou um tempo máximo de 6×10^4 . Usando o comportamento tipo lei de potência de $P_s(t)$ e $n(t)$ como critério para localizar o ponto crítico, encontramos $q_c = 0.63525(3)$. (Note que esse valor é aproximadamente 5% menor que o valor crítico do modelo extremo correspondente.) Analisando as inclinações locais, obtemos $\delta = 0.162(2)$, $\eta = 0.312(2)$ e $z_{sp} = 1.265(4)$. Esses valores são completamente consistentes com os conhecidos para a percolação dirigida (veja a tabela 3.2), confirmando que o modelo CP3 pertence à mesma classe de universalidade do processo de contato original.

Uma grande diferença entre os modelos extremos e não-extremos com um estado absorvente é que o espalhamento de atividade no ponto crítico é muito mais lento no primeiro caso. Isto obviamente é uma consequência do valor $\eta = 0$ para modelos com dinâmica extrema (enquanto, por exemplo, $\eta = 0.314$ para DP em uma dimensão) e do crescimento subdifusivo de R^2 no modelo ABS. Nas Figs. 3.33 e 3.34 comparamos evoluções típicas no modelo ABS e no seu análogo não absorvente, o CP3, em seus respectivos pontos críticos. É evidente que a atividade espalha muito mais lentamente no ABS do que no CP3. Outra diferença notável é que no ABS um sítio com x_i pouco menor que $q_{c,E}$ permanecerá ativo por um longo tempo, enquanto esse sítio não for o sítio mínimo ou o vizinho dele. Portanto tanto a taxa de adição quanto a de perda de sítios ativos são muito menores no ponto crítico do processo extremo do que no não-extremo.

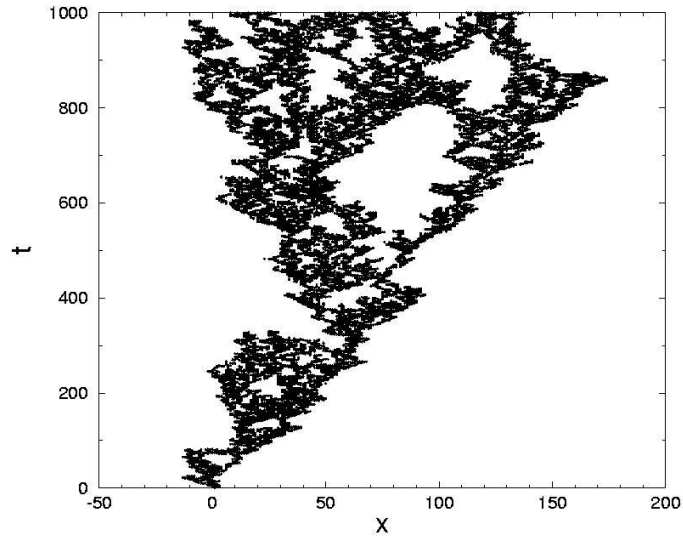


Figura 3.33: Espalhamento da atividade em uma realização típica do modelo CP3 em seu ponto crítico ($q = 0.63525$).

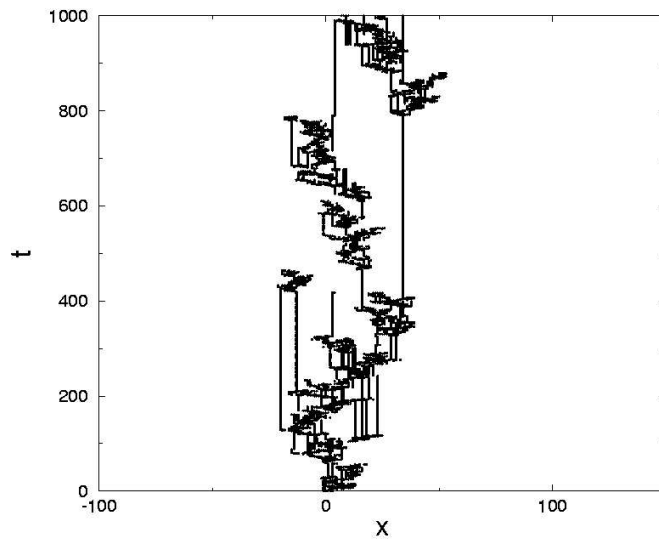


Figura 3.34: Espalhamento da atividade em uma realização típica do modelo ABS em seu ponto crítico ($q = 0.66701$).

3.9.5 Modelo CP extremo

À luz da discussão na seção 3.9.1, é interessante analisarmos o comportamento de outros modelos com estados absorventes sob dinâmica extrema. Inicialmente veremos os resultados simulacionais para o processo de contato extremo-absorvente (CP_{EA}). Realizamos simulações de espalhamento para determinar $q_{c,E}$ e os expoentes δ , η e z_{sp} , obtidos a partir da média sobre 5×10^5 realizações com um tempo máximo de 6×10^4 . Encontramos $q_{c,E} = 0.79415(5)$ para o CP_{EA} , que é maior do que o 0.76733 obtido para o processo original (não-extremo).

Assim como no modelo ABS, o decaimento da probabilidade de sobrevivência no ponto crítico obedece uma expressão da forma da Eq. (3.60), sendo os parâmetros para o melhor ajuste $\delta = 0.0855$ e $\phi_P = 0.226$. O expoente δ é essencialmente o mesmo encontrado para o modelo ABS, enquanto o termo de correção é aproximadamente duas vezes maior. No ponto crítico a derivada $d \ln n / d \ln t \sim t^{-0.1}$, o que mais uma vez indica um comportamento do tipo $n(t) \simeq n_\infty \exp[-ct^{-\omega}]$, sendo que encontramos $\omega = 0.1$. A distância quadrática média dos sítios ativos a partir da origem cresce de forma similar à encontrada no modelo ABS. Os dados para R^2 novamente se ajustam bem usando uma expressão da forma da Eq. (3.61), sendo $z_{sp} = 0.932$ e $\phi_{R^2} = 2.026$. Estes resultados sugerem fortemente que CP_{EA} pertence à mesma classe de universalidade do modelo ABS.

3.9.6 Modelo ABS anisotrópico

O comportamento crítico do modelo Bak-Sneppen muda quando a regra de renovação é assimétrica (ver seção 3.7), sendo que podemos identificar uma classe de universalidade do modelo BS anisotrópico. Nesta seção relatamos nossos resultados simulacionais para o modelo BS anisotrópico absorvente. Para obter esses resultados, simulamos esse modelo em estudos que envolveram 3×10^5 realizações com um tempo máximo de 1.6×10^5 .

Analisando a inclinação local $\delta(t) = d \ln P / d \ln t$, determinamos que o limiar desse modelo é $q_{c,E} = 0.72370(2)$. (A estimativa anterior mais precisa era 0.7240(1); ver seção 3.6 e a ref. [92].) Uma evolução típica do espalhamento no ponto crítico é ilustrada na Fig. 3.35. O expoente local $\delta(t)$ fornece a estimativa $\delta = 0.234(5)$. Para os modelos anisotrópicos definimos $R^2(t)$ como a média quadrática do raio de giração, ou seja, a distância é medida em relação ao centro de massa do conjunto de sítios ativos e não em relação a uma origem fixa. Isto é feito para eliminar a tendência da região ativa de se deslocar unilateralmente devido à natureza assimétrica da regra de renovação.

Para o modelo ABS anisotrópico, $R^2(t)$ pode mais uma vez ser fitado com uma expressão da forma da Eq. (3.61), sendo $z_{sp} = 1.425(10)$ e $\phi_R = 2.3(2)$. Os expoentes δ e z_{sp} são muito diferentes daqueles do modelo isotrópico. Apesar dessas diferenças, encontramos novamente $\eta = 0$ no modelo anisotrópico. Como antes, o número médio de sítios ativos satura para tempos longos, na verdade mais rapidamente do que no modelo isotrópico (ver Fig. 3.32, inset). Os dados se ajustam bem usando $n(t) = n_\infty[1 - e^{-ct^{1/4}}]$, onde $n_\infty = 5.206(3)$ e $c = 0.348$.

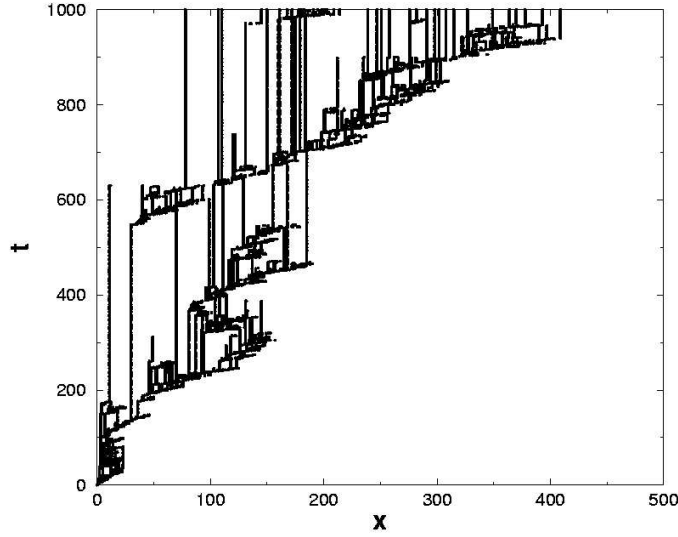


Figura 3.35: Espalhamento da atividade em uma realização típica do modelo ABS anisotrópico em seu ponto crítico ($q = 0.72370$).

O modelo não-extremo correspondente ao modelo ABS anisotrópico é um processo de contato de dois sítios, o CP2, que é exatamente igual ao CP3, mas com a renovação restrita ao sítio central e a seu vizinho da direita. Simulamos o modelo CP2 e encontramos que ele pertence à classe DP. (Aqui, definimos novamente R^2 como o raio de giração quadrático médio.) Estes resultados levam à interessante conclusão de que existe uma perturbação (renovação assimétrica) *irrelevante* para um modelo não-extremo, mas relevante para a versão extrema correspondente. (Notamos que, uma vez que ambos os sítios no CP2 são renovados através da mesma regra, o modelo não pertence à classe de universalidade denominada DP-anisotrópica, para a qual as ligações ao longo de eixos diferentes estão presentes com diferentes probabilidades [110].)

3.9.7 Resumo dos expoentes e relações de escala

Nossos resultados para os expoentes críticos do modelo BS e do CP extremo são comparados com os da percolação dirigida (em uma dimensão) nas tabelas 3.2 e 3.3. (Aqui assumimos os valores $\eta = 0$ e $\beta = 1$ como exatos para a classe de universalidade do modelo BS.) As diferenças entre os dois conjuntos de expoentes é evidente. Nossos resultados $\tau = 1 + \delta = 1.084(1)$ e $z = \nu_{\parallel}/\nu_{\perp} = 2.12(1)$ estão em acordo com estimativas anteriores [106] de 1.07(1) e 2.10(5), respectivamente. Nosso resultado é entretanto um pouco acima do relatado por Grassberger, a saber $\tau = 1.073(3)$ [61].

Algumas relações de escala existem entre os expoentes críticos [99, 101, 109]. Nos estudos de espalhamento, esperamos que $z_{sp} = 2\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}$; nossos dados são aproximadamente consistentes com isso, já que $2\nu_{\perp}/\nu_{\parallel} - z_{sp} = 0.022(14)$. A relação $\beta' = \delta\nu_{\parallel}$ também deve ser satisfeita: nossos dados fornecem $\beta' - \delta\nu_{\parallel} = -0.013(14)$. Finalmente consideramos a

Tabela 3.2: Expoentes críticos do modelo Bak-Sneppen absorvente (ABS) e do processo de contato (CP). Os expoentes do CP foram retirados das refs. [101, 112].

Exponent	ABS	CP
β	1	0.27649(4)
β'	0.20(1)	(= β)
ν_{\parallel}	2.54(2)	1.73383(3)
β/ν_{\perp}	0.77(1)	0.25208(5)
$\nu_{\parallel}/\nu_{\perp}$	2.12(1)	1.58071(11)
δ	0.084(1)	0.15947(3)
η	0	0.31368(4)
z_{sp}	0.921(10)	1.26523(3)

Tabela 3.3: Expoentes de espalhamento para os modelos CP3, CP_{EA} e o Bak-Sneppen anisotrópico absorvente (AABS) em uma dimensão.

Exponent	CP3	CP _{EA}	AABS
δ	0.162(2)	0.0855(20)	0.234(5)
η	0.312(2)	0	0
z_{sp}	1.265(4)	0.932(20)	1.425(10)

relação generalizada de hiper-escala [113]

$$2 \left(1 + \frac{\beta}{\beta'} \right) \delta + 2\eta = dz_{sp} , \quad (3.62)$$

em d dimensões. Usando nossos dados, encontramos uma diferença entre os dois lados dessa relação de 0.09(6). Nossos resultados exibem ainda outra inconsistência que pode refletir correções devido a efeitos de tamanho finito: o produto $(\beta/\nu_{\perp})^{-1}(\nu_{\parallel}/\nu_{\perp})\nu_{\parallel}^{-1}$, onde os primeiros dois fatores são determinados pela escala de tamanho finito no ponto crítico e o último fator é obtido do decaimento da probabilidade de sobrevivência no regime subcrítico, deveria ser igual a $\beta = 1$; nossos dados fornecem 1.08(3). Essas inconsistências sugerem que um ou mais de nossos expoentes estejam errados em aproximadamente 5%. Para refinar esses valores precisaríamos de simulações em sistemas ainda maiores, uma tarefa que deixamos para trabalhos futuros. (Os estudos aqui apresentados já foram bastante custosos computacionalmente, representando aproximadamente 6 meses de uso das nossas estações alpha.)

3.10 Conclusões

O registro fóssil indica que extinções de todos os tamanhos ocorreram durante a história evolutiva na Terra. Extinções em massa são pouco freqüentes, mas não devem ser consideradas como um fenômeno isolado, já que são simplesmente a extremidade de

uma distribuição contínua de eventos. Inspirados pelo registro fóssil, Gould e Eldridge propuseram que a evolução não é gradativa e contínua como Darwin sugerira, mas intermitente e rápida. Longos períodos de equilíbrio são interrompidos por curtos períodos de atividade evolucionária, dando origem à visão de um *Equilíbrio Pontuado*.

Bak [6] argumenta que a distribuição em forma de lei de potência para eventos evolucionários aponta para uma auto-organização da vida na Terra em um estado crítico, onde avalanches evolucionárias de todos os tamanhos podem acontecer. O modelo protótipo, que mostra quais são os ingredientes básicos para se obter uma ecologia exibindo equilíbrio pontuado, é o modelo Bak-Sneppen [7]. Embora este modelo seja muito reducionista, ele prevê uma ecologia fora do equilíbrio, onde extinções de todos os tamanhos estão presentes, em acordo com os dados experimentais.

Neste capítulo, investigamos em detalhe o modelo Bak-Sneppen para a evolução das espécies. Propusemos um novo método para estimar o limiar x^* com precisão, examinamos o efeito da simetria na distribuição $p(x)$ e nos expoentes críticos, investigamos as principais consequências da dinâmica extrema e vimos qual é a relação do modelo com modelos exibindo uma transição de fase para um estado absorvente. Nossa abordagem foi propor diversas variantes e observar quais características são robustas a modificações na dinâmica. Os métodos utilizados foram simulação, teoria de campo médio e argumentos gerais.

Em particular, verificamos a relação de escala de tamanho finito $x_L^* - x_\infty^* = kL^{-\nu}$ e a usamos para obter estimativas precisas do limiar e do expoente ν das versões original, anisotrópica e vizinhos aleatórios [90]. Também investigamos em detalhe o efeito da simetria no comportamento crítico e na densidade de probabilidade. Encontramos que todas dinâmicas que preservam a simetria do modelo original conservam os expoentes críticos, enquanto dinâmicas assimétricas levam aos expoentes do modelo BS anisotrópico [92]. Portanto, nosso trabalho reforça a evidência de que existem duas classes de universalidade separadas pela simetria [82].

Nos modelos BS generalizados (ou variante BSab), o grau de assimetria é quantificado pelo coeficiente de anisotropia k_a . A teoria de campo médio fornece previsões ruins para o limiar x^* , mas prevê corretamente que (i) a densidade de probabilidade é uma função degrau e (ii) que x^* varia linearmente com o número n de sítios substituídos, como encontramos nas simulações em redes unidimensionais. As simulações também nos conduzem a conclusões que vão além da teoria de campo médio: (i) o valor do limiar diminui à medida que a anisotropia cresce (para n constante); (ii) para assimetrias pequenas, observamos uma transição da escala simétrica para a assimétrica; (iii) para uma anisotropia fixa, há um colapso da probabilidade $P_J(r)$ de que mínimos consecutivos tenham uma separação r .

A fim de compreender as consequências da dinâmica extrema, propusemos variantes do modelo BS com modificações mais severas na dinâmica do que as estudadas anteriormente [91]. Embora regras de renovação diferentes levem a densidades de probabilidade completamente diferentes, estas são sempre singulares em um ou mais pontos. As singularidades, do tipo função degrau, surgem quando tomamos o limite $\beta \rightarrow \infty$ no modelo

com temperatura finita (em uma rede infinita) ou quando o tamanho do sistema $L \rightarrow \infty$, sob dinâmica extrema. Assim, o limite duplo de tamanho infinito e temperatura nula é necessário para que o modelo BS e suas variações gerem densidades de probabilidade singulares.

Um aspecto notável, comum ao modelo original e todas as variantes consideradas, é que no limite de tamanho infinito e sob dinâmica extrema um certo intervalo $D \subset [0, 1]$ tem probabilidade nula, mas contém o sítio extremo com probabilidade um. Se definirmos a densidade de sítios ativos, $\text{Prob}[x \in D]$, como o parâmetro de ordem ρ , então o modelo BS e suas variantes realizam o ‘limite SOC’ [79, 80] quando $\rho \rightarrow 0^+$.

Nossas conclusões a respeito da forma das densidades estacionárias são baseadas em análises de campo médio, que são exatas para as versões com vizinhos aleatórios, como verificado numericamente. Um ponto importante é que a teoria de campo médio captura a forma da densidade de probabilidade corretamente, como mostrado pelas simulações dos modelos modificados em redes unidimensionais.

Investigamos a relação entre a dinâmica extrema, exemplificada pelo modelo Bak-Sneppen, e modelos não-extremais exibindo uma transição de fase para um estado absorvente. Uma relação entre a dinâmica extrema e a percolação dirigida havia sido sugerida antes [106, 108]. Nós clareamos essa conexão ao mostrar que um modelo genérico com estados absorventes pode ser transformado em um extremo através de um modelo extremo-absorvente intermediário. O precursor não-extremo do modelo BS é um processo de contato de três sítios [103], CP3, o qual, analogamente ao processo de contato original, pertence à classe de universalidade DP. O modelo BS e a versão extrema do CP pertencem a uma mesma classe de universalidade que pode ser batizada de ‘extremal DP’ ou eDP. Os expoentes da classe eDP são comparados ao da classe DP na tabela 3.2.

Ficou claro que quando um modelo com estados absorventes é modificado para obedecer uma dinâmica extrema, seus expoentes críticos são alterados. Também ficou evidente que a dinâmica extrema reduz o espalhamento da atividade nos regimes crítico e supercrítico. Pode-se questionar se outros aspectos mais gerais do modelo original são preservados após a ‘extremalização’. Um candidato para tal propriedade conservada é a dimensão crítica d_c . Nos fenômenos críticos, várias classes de universalidade (que diferem no grupo de simetria do parâmetro de ordem ou na presença de quantidades conservadas) podem compartilhar a mesma d_c se a estrutura algébrica da sua descrição contínua (em particular, a potência do termo de menor ordem no parâmetro de ordem em um hamiltoniano efetivo de Landau-Ginzburg-Wilson) for a mesma. Por exemplo, $d_c = 4$ para todos os modelos na família n -vetor. Estender essa idéia para modelos com dinâmica extrema é questionável, já que não temos uma descrição contínua em mãos. (À primeira vista, a noção de dinâmica extrema em uma descrição usando uma densidade de atividade *contínua* parece problemática, já que há sempre um e apenas um sítio extremo.) Entretanto, parece plausível que se a teoria de campo para DP [114–116] fosse de alguma forma modificada para refletir a dinâmica extrema, a não-linearidade dominante não mudaria, de forma que d_c reteria seu valor de quatro. A dimensão crítica superior $d_c = 4$ no modelo BS foi estabelecida por Boettcher and Paczuski [63]. Nosso

argumento sugere que as versões extremais de outros modelos com estados absorventes devem manter a dimensão crítica do modelo não-extremo correspondente. Esperamos que essa previsão possa ser testada em trabalhos futuros.

Ao estudar a versão anisotrópica do modelo ABS e seu companheiro não-extremo, o modelo CP2, encontramos que a anisotropia é uma perturbação relevante para a classe eDP, mas é irrelevante para a classe não extrema correspondente. Suspeitamos que outras perturbações, tais como difusão, podem exibir um padrão similar de relevância.

Finalmente, o modelo Bak-Sneppen parece ser o protótipo de uma grande classe de universalidade, já que inúmeras variantes, além das apresentadas aqui, são possíveis. Esperamos que qualquer dinâmica que respeite a simetria do modelo original (ou seja, isotropia espacial) e que não introduza novas quantidades conservadas tenha os mesmos expoentes críticos do modelo original. Isto é interessante, pois o mesmo comportamento crítico pode perdurar mesmo com distribuições estacionárias muito diferentes. Além de seu interesse acadêmico, a questão de universalidade é importante para aplicações, uma vez que a forma precisa da dinâmica em um sistema específico (e.g., evolução) é geralmente desconhecida e, provavelmente, muito diferente da proposta no modelo original. Leis de potência e densidades estacionárias singulares aparecem somente no limite de dinâmica extrema, o que pode ser difícil de realizar em sistemas naturais espacialmente extensos [84]. Outras classes de dinâmica extrema são conhecidas [106], sendo um exemplo o modelo BS anisotrópico. Acreditamos que outras classes de universalidade de dinâmica extrema existam, como por exemplo uma classe extrema que conserva a paridade [111], embora exemplos de tal classe ainda não tenham sido estudados.

Os resultados descritos neste capítulo foram publicados nos artigos [90–93], os quais estão reproduzidos nos apêndices B, C, D e E.

Capítulo 4

O fluxo de ar no nariz humano

4.1 Introdução

O termo nariz inclui o nariz externo, visível na face, e a cavidade nasal, que se estende aproximadamente 10 cm para o interior do crânio. Internamente, o nariz consiste em fendas estreitas revestidas pela mucosa nasal, um tecido úmido que exerce três funções principais: umidificar, aquecer e filtrar o ar. Além disso, o nariz é também o sítio onde se localiza o tecido nervoso responsável pelo olfato.

Respiramos de 12 a 24 vezes por minuto, inalando por dia aproximadamente 10.000 litros de ar com temperatura e umidade variáveis e ainda contendo poeira e microorganismos. A fim de lidar com as diferentes demandas, as paredes do nariz possuem um tecido cavernoso que pode inchar ou retrair, dependendo da irrigação sanguínea, controlando assim a temperatura da mucosa nasal e a área da seção transversal da cavidade. Para evitar o acúmulo de partículas, o muco secretado pela mucosa é constantemente impelido em direção ao sistema digestivo por células ciliadas. Na pessoa sadia, essas funções são exercidas continuamente e inconscientemente. Entretanto, é grande o número de pessoas que sofrem de problemas respiratórios.

Muitos dos pacientes que chegam ao consultório de um otorrinolaringologista reclamam que não conseguem respirar pelo nariz. Alergias, pólipos, medicamentos, traumas e stress são alguns dos fatores que podem provocar uma obstrução nasal, impedindo assim um fluxo de ar adequado. Mais do que isso, sabe-se hoje que disfunções no ouvido e na garganta podem também ser geradas por um fluxo nasal inadequado. Torna-se importante, portanto, investigar o escoamento de ar no nariz humano, a fim de se caracterizar o que seria um nariz ‘normal’ e assim propor soluções, cirúrgicas ou não, para cada patologia.

Até hoje o desenvolvimento de tratamentos e cirurgias na otorrinolaringologia tem

sido bastante empírico, pois nosso conhecimento da fisiologia do nariz ainda é muito limitado [119,120]. Os efeitos que cirurgias comuns, como a correção de desvio de septo, têm no escoamento, na umidificação, no aquecimento e na filtragem do ar ainda são desconhecidos. É alarmante o fato de que a cirurgia de correção do desvio de septo falha em 20 a 30% dos casos e que disfunções nasais são frequentemente induzidas ou agravadas por procedimentos cirúrgicos [120].

O número de cirurgias nasais tem crescido anualmente, em parte devido à crescente poluição do ar nas grandes cidades. Em vista disso, é preocupante que os otorrinolaringologistas ainda não saibam dizer qual a função dos seios paranasais, quais os efeitos que as cirurgias provocam no escoamento de ar e nem mesmo definir o que é um nariz normal do ponto de vista hidrodinâmico [119,121]. Em particular, há um debate interessante sobre o desvio de septo. Enquanto alguns médicos consideram o desvio uma patologia e o corrigem cirurgicamente, outros acreditam que ele não altera significativamente a função nasal e raramente realizam tal operação.

A compreensão dos processos de transporte que ocorrem dentro do nariz certamente nos levará a diagnósticos e tratamentos mais precisos. Uma vez que dominarmos a biofísica do nariz, o desenvolvimento de novos tratamentos será pautado em conhecimentos objetivos, abolindo assim práticas cirúrgicas ineficazes e indicando os procedimentos adequados. Outro fruto esperado pela comunidade médica é a exploração do potencial que o nariz tem como caminho de ingestão de medicamentos [122,123].

Uma vez que, em geral, os médicos não dominam as ferramentas físicas e matemáticas necessárias para se atacar o problema, a presença de um pesquisador versado em tais técnicas é essencial em um estudo como esse. Da mesma forma, é o médico quem conhece profundamente a anatomia do nariz, as patologias relacionadas e os tratamentos conhecidos. Em sintonia com essas observações, este projeto está sendo conduzido em colaboração com o Dr. Dário Antunes, otorrinolaringologista da Santa Casa de Belo Horizonte.

O escoamento do ar no nariz humano têm sido analisado nas últimas décadas tanto experimental quanto computacionalmente, sendo que cada técnica possui suas vantagens e desvantagens. A abordagem computacional fornece os seguintes benefícios:

- Após o desenvolvimento da rotina computacional que soluciona as equações diferenciais envolvidas, torna-se fácil investigar o efeito que variações na geometria do nariz têm no campo de velocidades. Em um estudo experimental, tal trabalho demandaria mais tempo.
- O modelo computacional tem a vantagem de ter custos menores, pois não necessita equipamentos ou material, apenas de um computador.

Por outro lado, a abordagem experimental possui as seguintes vantagens:

- A medida experimental é mais precisa, pois a reconstrução de um modelo do nariz no computador envolve aproximações.

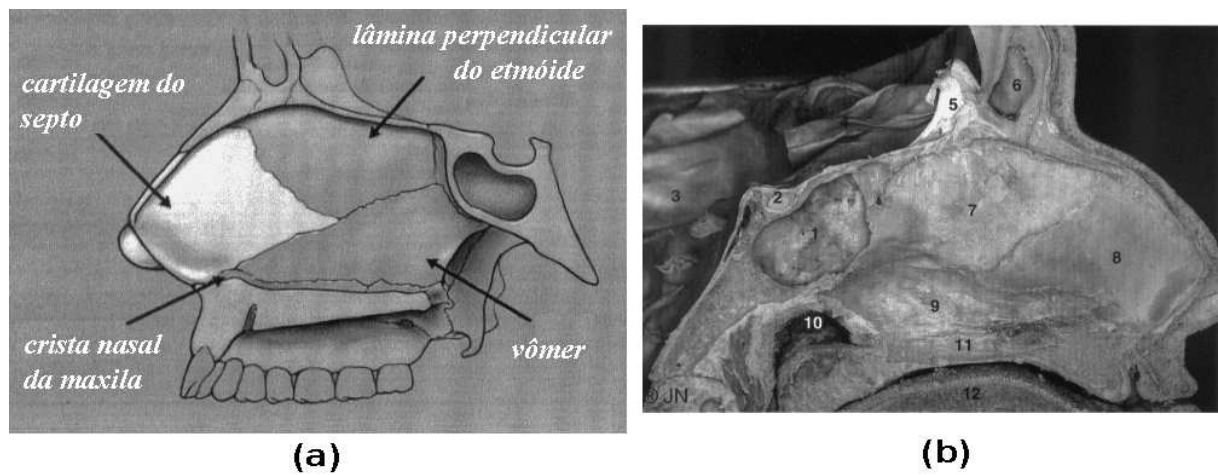


Figura 4.1: (a) Diagrama do septo do nariz, lado esquerdo, mostrando a cartilagem do septo, o vômer, a lâmina perpendicular do etmóide e a crista nasal da maxila. (b) Septo do nariz, lado direito. 1. septo principal do seio esfenoidal; 2. hipófise; 3. fossa média do crânio; 4. fossa anterior do crânio; 5. processo crista galli; 6. seio frontal; 7. lâmina perpendicular do etmóide; 8. cartilagem do septo; 9. vômer; 10. região coanal; 11. palato; 12. língua. Retirado de [124] e [125].

- Vazões altas podem ser investigadas sem maiores dificuldades, ao passo que a solução numérica da equação de Navier-Stokes torna-se bem mais complexa para escoamentos turbulentos.

Durante meu pós-doc, investigarei o problema por ambas abordagens. Portanto, meu objetivo será analisar o fluxo de ar em geometrias fisiologicamente corretas através da solução da equação de Navier-Stokes e da equação do calor e comparar as previsões com medidas experimentais.

O restante deste capítulo organiza-se da seguinte forma. Na seção 4.2, faremos uma breve revisão da anatomia do nariz, enquanto que, na seção 4.3, descrevemos as patologias mais comuns relacionadas ao presente estudo. Apresentaremos a revisão da literatura na seção 4.4 e, na seção 4.5, discutiremos a importância de se estudar o escoamento de ar no nariz humano e qual será nossa linha de pesquisa. Finalmente, nossas conclusões e perspectivas futuras serão discutidas na última seção.

4.2 Anatomia do nariz

O nariz é formado pelo nariz externo, que se projeta na face, e pelo nariz interno ou cavidade nasal. O septo do nariz divide a cavidade nasal em direita e esquerda, gerando assim duas passagens independentes que voltam a se unir nas coanas (Fig. 4.1). O ar que entra pelas narinas segue por passagens em forma de fenda (Fig. 4.2), atingindo as coanas e descendo pela nasofaringe.

O septo do nariz é formado basicamente pela cartilagem do septo e pelos ossos vômer e lâmina perpendicular do etmóide (Fig. 4.1). Clinicamente o septo plano é o ideal (Fig. 4.3), mas uma fatia considerável da população tem um desvio de septo em algum grau

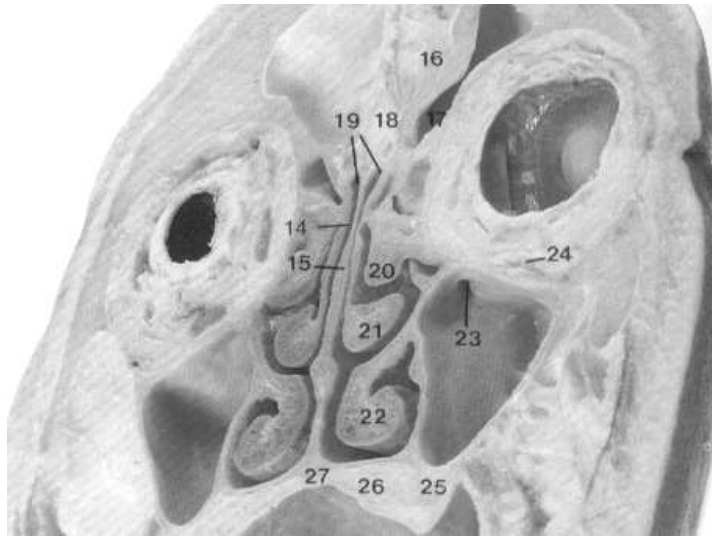


Figura 4.2: Corte coronal de um crânio humano. 14. cavidade nasal; 15. septo do nariz; 17. seio frontal; 18. crista galli; 19. teto da cavidade nasal; 20. corneto superior; 21. corneto médio; 22. corneto inferior; 23. abertura do seio maxilar; 27. Palato duro. Retirado de [126].



Figura 4.3: Abertura anterior óssea da cavidade nasal: 1. órbita; 2. frontal; 3. nasal; 4. proceso frontal da maxila; 5. processo alveolar da maxila; 6. espinha nasal anterior; 7. sutura intermaxilas; 8. meato inferior; 9. corneto inferior; 10. meato médio; 11. corneto médio; 12. meato comum do nariz; 13. septo do nariz. Retirado de [125].

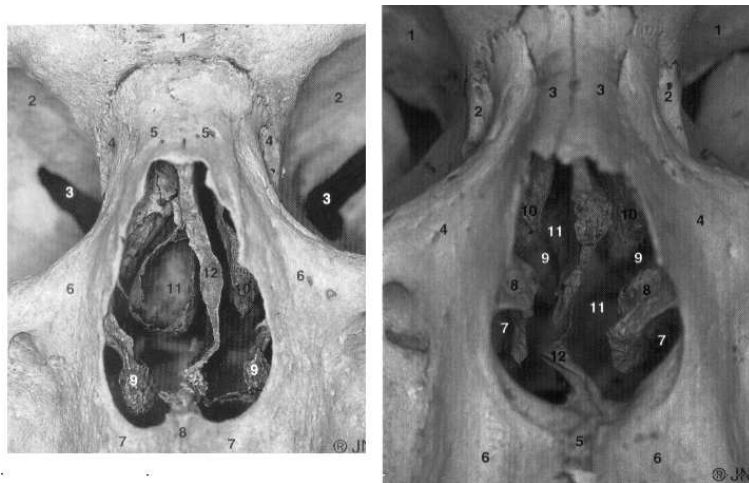


Figura 4.4: Abertura anterior óssea da cavidade nasal mostrando dois desvios de septo. (a) 1.frontal; 2.órbita; 3.fissura orbital superior; 4. lacrimal; 5. nasal; 6. processo frontal da maxila; 7. processo alveolar da maxila; 8. espinha nasal anterior; 9. corneto inferior; 10. corneto médio; 11. corneto médio bolhoso; 12. septo do nariz com desvio à esquerda. (b) 1. órbita; 2. lacrimal; 3. nasal; 4. processo frontal da maxila; 5. espinha nasal anterior; 6. processo alveolar da maxila; 7. meato inferior do nariz; 8. corneto inferior; 9. meato médio; 10. corneto médio; 11. meato comum do nariz; 12. septo do nariz, com desvio à direita. Retirado de [125].

(Fig. 4.4). Ainda não se sabe até que ponto um desvio de septo prejudica o funcionamento normal do nariz (ver seções 4.4 e 4.5).

A geometria do nariz é bastante complexa, uma vez que a seção transversal muda violentamente, como ilustrado na Fig. 4.5. Observe que, em sua porção intermediária, o nariz apresenta uma seção reta triangular, sendo o assoalho do nariz mais largo e o teto bastante estreito. As principais estruturas no interior da cavidade nasal são os cornetos inferior, médio e superior (Fig. 4.2-4.4, 4.6, 4.7). Os cornetos são ossos, que se projetam a partir da parede lateral da cavidade, revestidos por um tecido cavernoso que tem a capacidade de se inchar e retrair de acordo com a irrigação sanguínea (Fig. 4.8–4.10). O espaço por onde passa o ar abaixo de cada corneto é o meato do corneto relacionado.

As figuras 4.8, 4.9 e 4.10 ilustram a anatomia da parede lateral do nariz. Nas narinas, encontram-se pêlos responsáveis pela filtração de partículas grandes. A cabeça do corneto inferior surge aproximadamente 2 cm para o interior do nariz, vindo em seguida os cornetos médio e superior. As terminações nervosas responsáveis pelo olfato encontram-se apenas na parte superior da cavidade nasal (Fig. 4.11).

Cada lado da cavidade nasal, esquerdo ou direito, é conectado a quatro grandes cavidades, os seios frontal, maxilar, etmoidal e esfenoidal. Essas cavidades ou seios paranasais, assim como o nariz interno, são revestidas por mucosa, produzindo continuamente um muco que é drenado para o interior da cavidade nasal. Além dos seios paranasais, abrem-se também no nariz o duto nasolacrimal (Fig. 4.12) e a tuba auditiva (Fig. 4.9, 4.10 e 4.13). É por essa razão que infecções no nariz frequentemente são acompanhadas por sinusites e otites.

Os seios paranasais comunicam-se com a cavidade nasal por canais estreitos, de

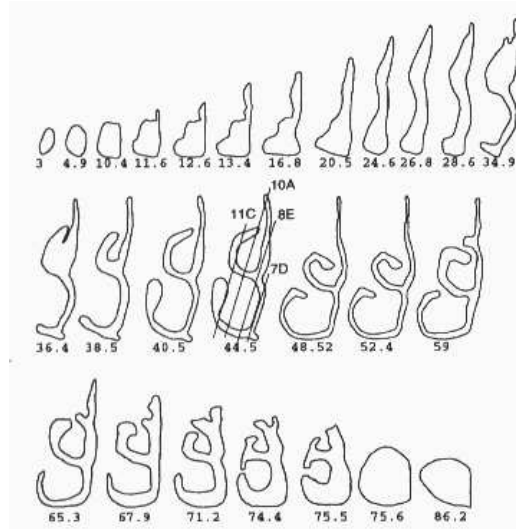


Figura 4.5: Seções coronais da cavidade direita do nariz ilustrando sua geometria complexa. Note como a seção reta varia rapidamente. O número abaixo de cada seção indica a distância a partir das narinas em mm. Retirado de [127].

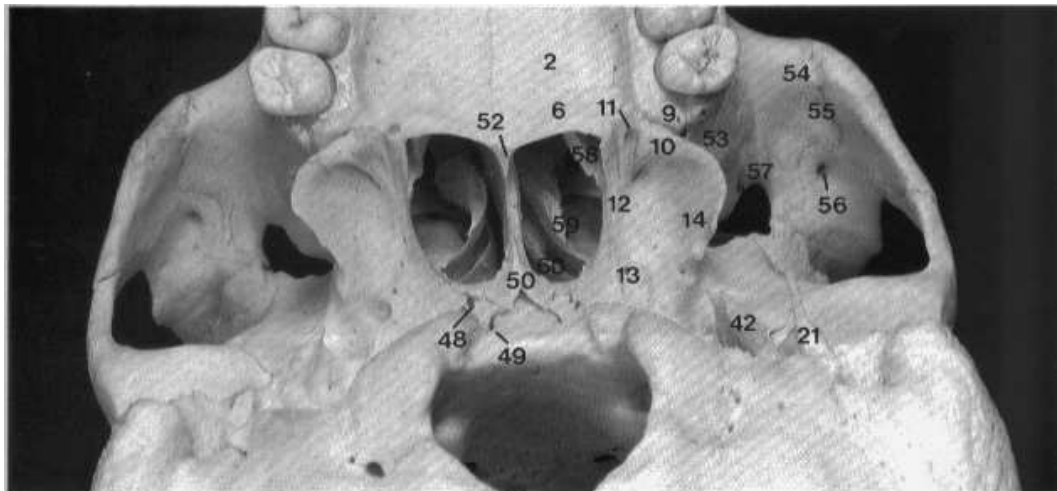


Figura 4.6: Base do crânio mostrando a parte posterior da cavidade nasal. 2. processo palatino da maxila; 6. lâmina horizontal do osso palatino; 50.vômer; 52. espinha nasal posterior; 58.corneto inferior; 59.corneto médio; 60.corneto superior. Retirado de [126].

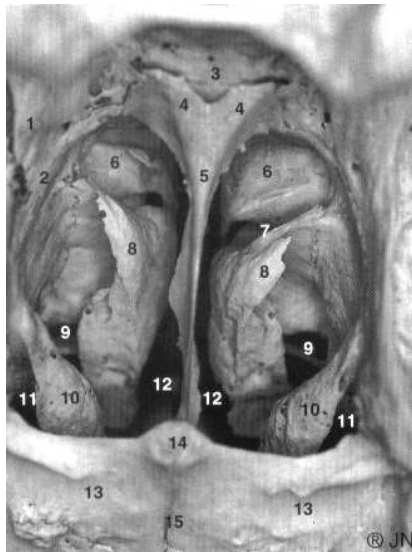


Figura 4.7: Coanas ósseas: 1. lâmina medial do processo pterigóide; 2. lâmina vertical do palatino; 3. corpo do esfenóide; 4. asa do vômer; 5. lâmina vertical do vômer; 6. corneto superior bolhoso; 7. meato superior; 8. corneto médio; 9. meato médio; 10. corneto inferior; 11. meato inferior; 12. meato comum do nariz; 13. lâmina horizontal do palatino; 14. espinha nasal posterior; 15. palato. Retirado de [125].

forma que, quando a membrana mucosa do nariz está edemaciada¹ devido a uma reação inflamatória de causa alérgica, traumática ou infecciosa, esses canais ficam facilmente obstruídos levando a uma sinusite.

Os seios frontais encontram-se acima da porção anterior da cavidade nasal (Fig. 4.9, 4.10 e 4.13). O óstio (abertura) do seio frontal situa-se no meato médio do nariz, em geral na parte superior do hiato semilunar (Fig. 4.12). O tamanho do seio frontal, assim como dos demais, varia muito de uma pessoa para outra. Além disso, freqüentemente cada um dos dois seios frontais é subdividido em duas ou mais células.

Os seios maxilares são os maiores entre os seios paranasais e também os que apresentam problemas com maior frequência. Esse fato deve-se à sua difícil drenagem, uma vez que (i) seu pavimento encontra-se de 0,5 a 1,0 cm abaixo do nível do assoalho da cavidade nasal [128] e (ii) seu óstio encontra-se acima do nível de seu pavimento. Eles ocupam a cavidade da maxila, nas laterais da cavidade nasal, ou seja, no interior de nossas bochechas (Fig. 4.14 e 4.15). O óstio do seio maxilar encontra-se também no hiato semilunar (Fig. 4.12) e, por este motivo, inflamações do seio maxilar estão freqüentemente associadas a inflamações do seio frontal.

O seio etmoidal é constituído por numerosas cavidades, as células do labirinto etmoidal (Fig. 4.16). Ele situa-se entre a órbita e a cavidade nasal. As células etmoidais anteriores drenam no meato médio, ao passo que as células posteriores drenam no meato superior.

¹Edema é o termo técnico para uma inchação, ou seja, para o acúmulo anormal de grandes quantidades de fluido no espaço intercelular.

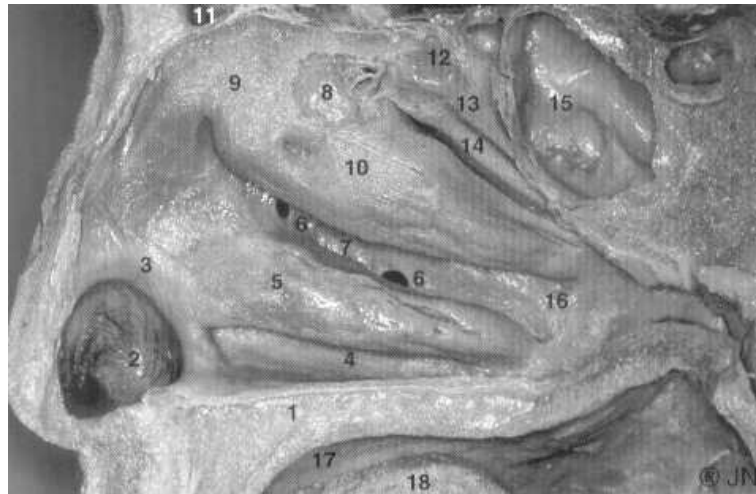


Figura 4.8: Parede lateral direita da cavidade nasal: 1. palato; 2. narina; 3. límen do nariz; 4. meato inferior; 5. corneto inferior; 6. óstios acessórios do seio maxilar; 7. meato médio; 8. célula etmoidal anterior; 9. agger nasi; 10. corneto médio; 11. seio frontal; 12. célula etmoidal posterior; 13. corneto supreme (ausente na maioria da população); 14. corneto superior; 15. seio esfenoidal; 16. região coanal; 17. cavidade bucal; 18. língua. Retirado de [125].

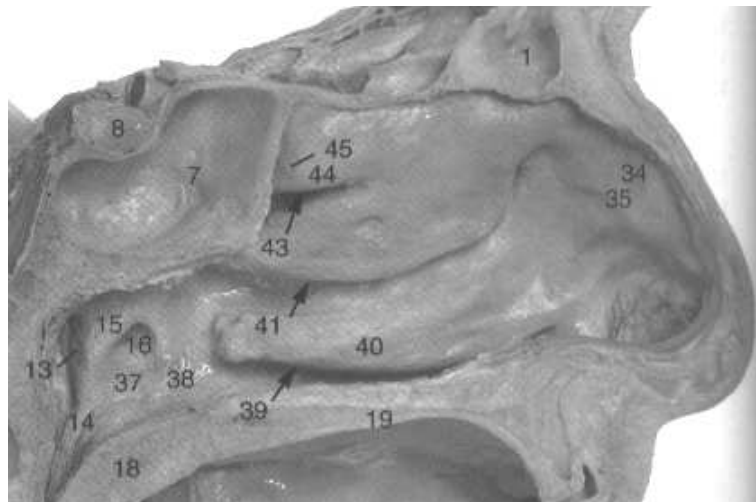


Figura 4.9: Parede lateral esquerda da cavidade nasal: 1. seio frontal; 7. seio esfenoidal; 15. elevação da tuba; 16. abertura da tuba auditiva; 18. palato mole; 19. palato duro; 35. agger nasi; 39. meato inferior; 40. corneto inferior; 41. meato médio; 43. meato superior; 44. corneto superior; 45. recesso esfenoetmoidal. Retirado de [126].

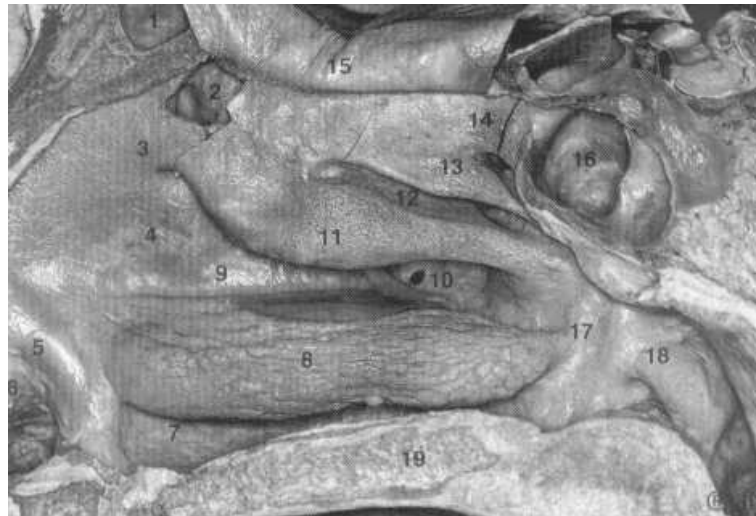


Figura 4.10: Parede lateral direita da cavidade nasal: 1. seio frontal; 2. célula etmoidal anterior; 3. agger nasi; 4. ádito do meato médio do nariz; 5. límen do nariz; 6. narina; 7. meato inferior; 8. corneto inferior; 9. meato médio; 10. óstio acessório do seio maxilar; 11. corneto médio; 12. meato superior; 13. corneto superior; 14. corneto supremo; 15. septo do nariz, rebatido; 16. seio esfenoidal; 17. região coanal; 18. abertura faríngea da tuba auditiva; 19. palato. Retirado de [125].

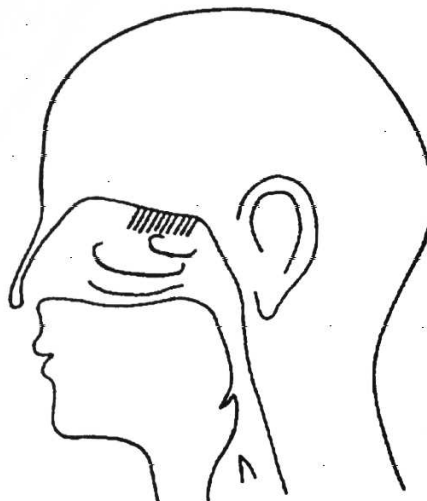


Figura 4.11: Cavidade nasal mostrando o perfil dos cornetos e a região olfatória (hachurada). Retirado de [131].

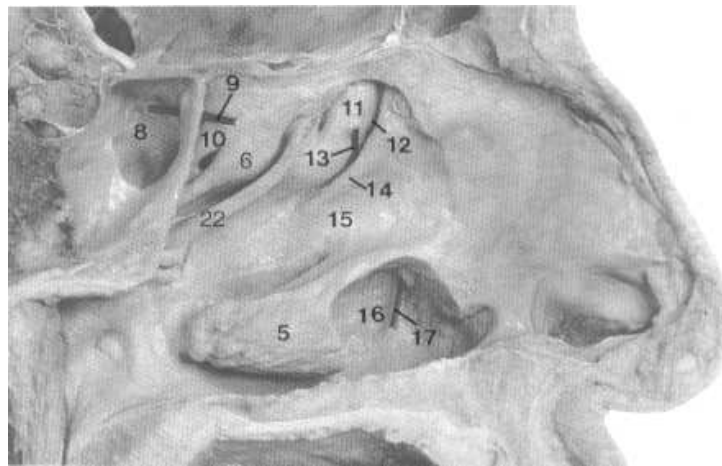


Figura 4.12: Parede lateral esquerda da cavidade nasal (parcialmente dissecada): 5. corneto inferior; 6. corneto superior; 8. seio esfenoidal; 9. arame na abertura do seio esfenoidal; 10. corneto supremo; 11. bolha etmoidal; 12. hiato semilunar; 13. arame na abertura do seio maxilar; 14. membrana mucosa revestindo o processo unciforme do osso etmoidal; 15. meato médio; 16. meato inferior; 17. arame na abertura do duto nasolacrimal; 22. base do corneto médio (dissecado). Retirado de [126].

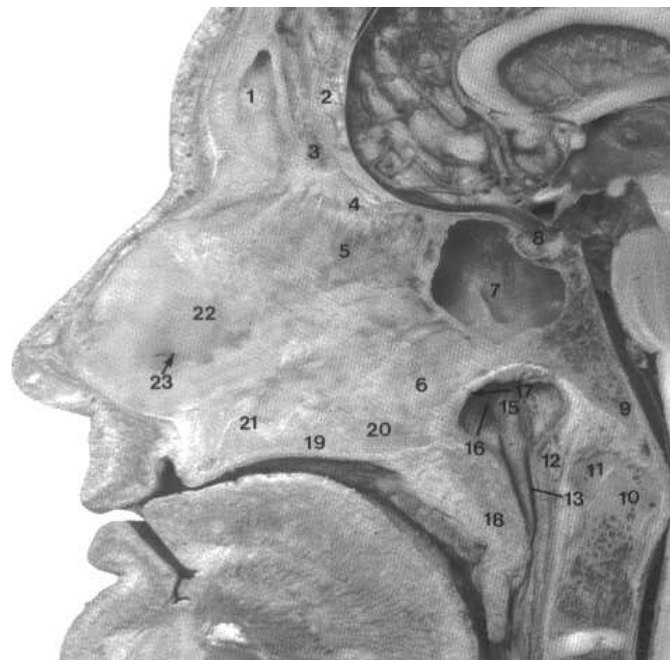


Figura 4.13: Visão lateral do crânio: 1. seio frontal; 3. crista galli; 4. lâmina crivosa do osso etmóide e filamentos do nervo olfatório; 5. lâmina perpendicular do etmóide; 6. vômer; 7. seio esfenoidal; 12. tonsil faríngeo (amídalas); 13. recesso faríngeo; 15. elevação da tuba; 16. abertura da tuba auditiva; 18. palato mole; 19. palato duro; 20. crista nasal do osso palatino; 21. crista nasal da maxila; 22. cartilagem do septo; 23. órgão vômeronasal. Retirado de [126].

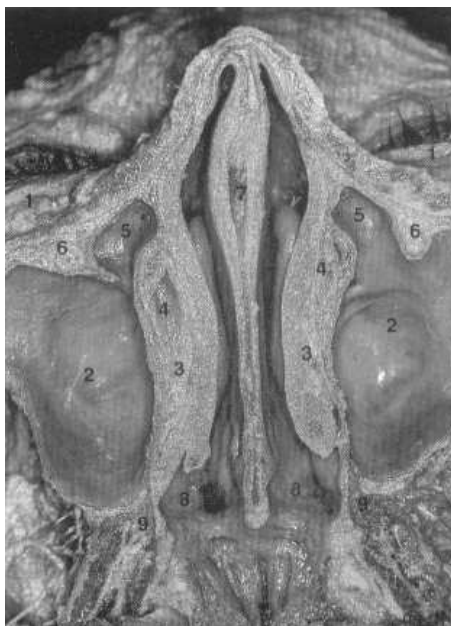


Figura 4.14: Corte axial da cavidade do nariz e seios maxilares, ao nível do corneto inferior, visão inferior: 1. região palpebral; 2. seio maxilar; 3. corneto inferior; 4. duto nasolacrimal; 5. recesso lacrimal do seio maxilar; 6. canal infraorbital; 7. septo do nariz; 8. região coanal; 9. região pterigopalatina. Retirado de [125].

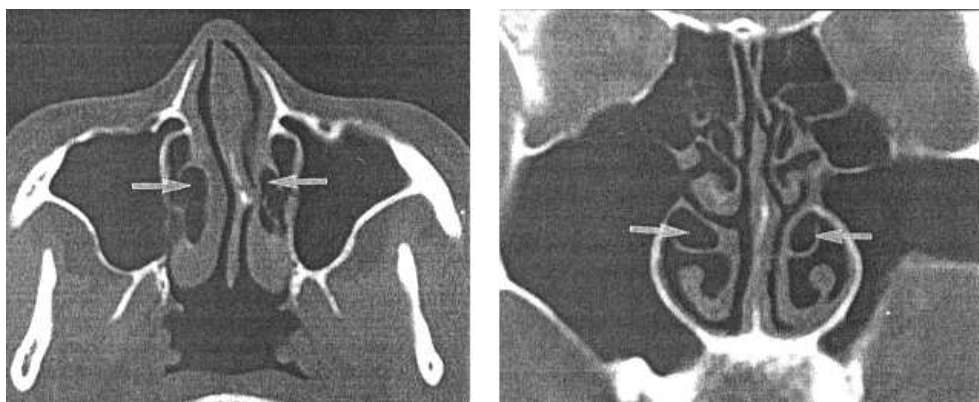


Figura 4.15: Tomografia computadorizada da cavidade nasal mostrando também o seio maxilar e o seio etmoidal. As setas indicam um corneto inferior bolhoso. (a) Corte axial. Observe o desvio de septo para a esquerda. (b) Corte coronal. Retirado de [132].



Figura 4.16: Corte axial da cabeça humana ao nível do seio etmoidal. 11. seio esfenoidal; 12. células do seio etmoidal; 13. duto nasolacrimal; 14. cavidade nasal; 15. septo nasal. Retirado de [126].

Os seios esfenoidais ocupam o corpo do osso esfenóide e drenam no recesso esfeno-etmoidal (Fig. 4.9, 4.12 e 4.13). Eles se inflamam com menos frequência que os seios frontal e maxilar.

Infecções dos seios paranasais podem se espalhar para regiões adjacentes. Por exemplo, infecções das células etmoidais ou dos seios frontais podem resultar em meningite ou complicações orbitárias. Também é comum que inflamações dos seios maxilares reflitam em dor de dente como consequência de essas regiões compartilharem o mesmo ramo do sistema nervoso [129].

A descrição da anatomia do nariz humano discutida nesta seção foi bastante resumida e orientada aos objetivos do nosso projeto. (Não discutimos nada do sistema nervoso, circulatório e linfático, por exemplo.) Ao leitor interessado em conhecer mais sobre a anatomia do nariz, sugiro a leitura do livro *Cavidade do Nariz e Seios Paranasais* de J. Navarro [125]. Outras fontes bibliográficas são [128, 129].

4.3 Patologias e tratamentos mais comuns

Nesta seção discutiremos brevemente as patologias mais comuns associadas a um fluxo nasal inadequado. Analisaremos os principais tratamentos e veremos quais são as consequências de uma respiração bucal.

As causas mais comuns de obstrução nasal são rinite, desvio de septo, hipertrofia de corneto, hipertrofia de adenóides, pólipos e câncer nasal e serão discutidos abaixo. É importante salientar que frequentemente os pacientes apresentam mais de um desses sintomas simultaneamente, sendo comum, por exemplo, um paciente com rinite, desvio de septo e hipertrofia do corneto.

Rinite: é uma inflamação da membrana mucosa do nariz que pode ser provocada por vários fatores. É apontada por alguns como a maior causa de obstrução nasal [124].

- Rinite alérgica: a rinite alérgica afeta entre 14 e 31% da população dos EUA [124]. Espirros, coriza e coceira são os sintomas mais comuns. O melhor tratamento é evitar contato com as substâncias que causam a alergia, caso estas possam ser identificadas. Muitos medicamentos estão disponíveis para o tratamento, como por exemplo os antihistamínicos e corticosteróides tópicos ou orais.
- Rinite hipertrófica: forma crônica de rinite com espessamento permanente da membrana mucosa.
- Rinite medicamentosa: muitas pessoas fazem uso excessivo de remédios para desobstruir o nariz, chegando a se sentirem dependentes deles nos piores casos. O uso prolongado desses medicamentos tópicos pode resultar em um efeito contrário, ou seja, inchaço da mucosa nasal e rinorréia. O paciente deve suspender o uso do medicamento e realizar o tratamento adequado, seja ele clínico ou cirúrgico [119,124].
- Rinite vasomotora: forma de rinite ocasionada por mudança no tônus dos vasos sanguíneos, assim como em sua permeabilidade. Sua causa é um desequilíbrio no sistema nervoso que controla a irrigação sanguínea do nariz, gerando bastante rinorréia. O tratamento conservador deve ser por medicação tópica específica.
- Rinite atrófica: rinite crônica caracterizada por uma cavidade nasal ampla e pela diminuição na espessura da membrana mucosa. Há formação de crostas nas paredes da cavidade nasal e liberação de cheiros desagradáveis. Nos casos mais graves, bactérias e fungos colonizam essas crostas levando a um odor fétido muito intenso. Essa patologia rara, denominada ozena, é extremamente difícil para o paciente, já que o cheiro desagradável afasta as pessoas. (Alguns pacientes cometem suicídio [119].) O tratamento consiste em lavagens frequentes com solução salina, mas isso só alivia os sintomas. Não há tratamento definitivo.
- Rinite pós-rinoplastia: a obstrução nasal é comum após uma cirurgia plástica no nariz. Pacientes com quadro de rinite vasomotora ou rinite alérgica antes da operação podem ter essa condição exacerbada, caso a rinoplastia reduza a área transversal do nariz. Em geral, essa condição exige tratamento clínico ou cirúrgico para reestabelecer a função nasal.

Desvio de septo: grande parte da população possui um desvio de septo. Em geral, isso não causa nenhum prejuízo para a pessoa, exceto em casos em que o desvio é muito grande. Nestes casos uma cirurgia para corrigir o desvio é indicada. Nos casos em que o desvio é pequeno, não se sabe ainda até que ponto ele atrapalha o fluxo de ar. É interessante notar que, no lado do nariz que ficou mais amplo devido ao desvio, os cornetos tendem a crescer, aparentemente para manter a forma de fenda da cavidade nasal (veja as Fig. 4.2 e 4.4).

Hipertrofia do corneto: é uma condição em que um ou mais dos cornetos inchou-se tanto que chegou a obstruir a passagem de ar. Esta é uma condição crônica e possui múltiplos tratamentos. Jackson e Koch [120] fizeram uma ampla revisão da literatura e propuseram o seguinte protocolo, em ordem crescente de agressividade. Primeiro, o uso de medicamentos; depois a redução a laser caso os medicamentos não tenham o efeito desejado; em seguida, a turbinectomia² parcial ou a extração submucosa; e, raramente, uma turbinectomia total caso nenhuma das outras tentativas funcione.

Hipertrofia de adenóides: o grupo de nódulos linfáticos localizados na parede posterior e no teto da nasofaringe pode, em uma reação alérgica, crescer excessivamente e obstruir a passagem de ar.

Pólipo nasal: Tecido gelatinoso que cresce geralmente do corneto médio ou do seio maxilar. A causa do crescimento ainda é desconhecida. Esses pólipos podem crescer tanto que chegam a bloquear completamente a passagem de ar. O tamanho dos pólipos costuma regredir com a ingestão de corticosteróides, mas eventualmente a remoção cirúrgica é necessária [124].

Câncer: pode obstruir as vias aéreas ao crescer na cavidade nasal ou, após crescer nos seios paranasais, invadir o nariz interno.

Patologia de ouvido devido à disfunção tubária: certas pessoas não conseguem igualar a pressão no ouvido médio com a pressão ambiente. A pressão maior no exterior pressiona o tímpano para dentro do ouvido. Este cede e, com o passar do tempo, leva à uma redução na acuidade auditiva.

Sinusite: inflamação nos seios paranasais com bastante produção de pus, o qual fica preso dentro do seio. Acredita-se que, quando o fluxo de ar no nariz não é apropriado, não há aeração dos seios nasais, dificultando a drenagem do muco e facilitando o aparecimento da sinusite.

O nariz é um órgão especializado em condicionar (aquecer, umidificar e filtrar) o ar respirado. Portanto, quando o nariz está obstruído e a pessoa é obrigada a respirar pela boca, é natural o aparecimento de certas patologias. Algumas consequências da respiração bucal são i) o ressecamento da mucosa da faringe, levando a ataques recorrentes de faringite e tonsilite [133]; ii) noites mal dormidas, de forma que o adulto não descansa bem, fica estressado e perde produtividade no trabalho³; iii) crianças com o desenvolvimento prejudicado (e.g., os ossos da face de crianças com respiração bucal crescem mais na vertical que na horizontal, gerando um rosto mais alongado e comprometendo a dentição [119]).

²Remoção cirúrgica do corneto hipertrófico. Pode ser total ou parcial.

³Acredita-se que um fluxo nasal inadequado esteja relacionado ao distúrbio do sono, que por sua vez está associado a algumas das doenças que mais matam no mundo como infartos, acidentes de trânsito e acidentes de trabalho [119].

4.4 Revisão da literatura

No final do século XIX, o avanço da medicina e da rinologia indicava a necessidade de se compreender melhor a função do nariz na respiração. Os fisiologistas da época compreendiam a importância do fluxo de ar no olfato, entretanto tornava-se essencial o desenvolvimento de métodos para se avaliar objetivamente a função respiratória do nariz. O desafio para o rinologista do século XIX continua atual e foi tão bem descrito por Kayser em 1895 que merece ser citado de forma extensa (traduzido da página 580 da ref. [134]):

“Apesar de na maior parte dos casos ser fácil diagnosticar uma obstrução completa do nariz em um exame, em muitos casos é difícil traduzir esse fato objetivo em uma avaliação de se o estreitamento das vias aéreas realmente prejudica a função respiratória do nariz. É, portanto, importante desenvolver um exame funcional do nariz, isto é, sermos capazes de determinar se um nariz particular (e.g., aquele de um paciente específico) é normal. Apenas a demonstração da insuficiência funcional do nariz pode oferecer maior precisão à intervenção médica e só assim poderemos demonstrar objetivamente qualquer efeito desta intervenção. Afinal, sabemos medir a acuidade visual do olho e a habilidade de escutar do ouvido.”

Kayser fez essa declaração em uma época em que o único método disponível para avaliar o fluxo nasal era usar um espelho para medir a mancha de condensação de cada narina durante a expiração. Entretanto, mais de um século depois, os otorrinolaringologistas ainda enfrentam o problema de avaliar objetivamente se o nariz de um dado paciente é ou não normal [134]. Por exemplo, os médicos ainda não são capazes de determinar até que ponto uma cirurgia de correção de desvio de septo melhora a função nasal.

O perfil de velocidades

O tamanho pequeno e a geometria complexa da cavidade nasal impediram um estudo detalhado e preciso do fluxo nasal durante muito tempo. Os primeiros estudos foram realizados utilizando moldes de cadáveres, gerando duas aproximações: 1) o septo real (não planar) era substituído por uma placa de plástico transparente e 2) a cavidade nasal do defunto é mais ampla que na pessoa viva devido ao encolhimento dos tecidos. Os resultados dessas observações foram pouco satisfatórios e, por vezes, forneceram resultados conflitantes.

Utilizando modelos baseados em cadáveres, Proetz (1951) pôde visualizar linhas de corrente no meato médio usando fumaça [135]. Stuver (1958) usou pó de alumínio suspenso em água e observou que, com o aumento da vazão, a porcentagem do fluido passando pela região olfatória aumentava, chegando até 20% [136]. Masing (1967) usou tinta dissolvida em água para visualizar as linhas de corrente em um escoamento permanente [137]. Ele demonstrou que o trajeto da tinta é determinado pelo ponto da narina pelo qual o fluido entra no nariz. O fluido que entra pela porção dorsal da narina segue pelo assoalho da cavidade nasal, enquanto que o fluido que entra pelo meio da narina alcança regiões mais altas.

Swift e Proctor (1977) realizaram as primeiras medidas quantitativas usando um tubo de Pitot introduzido pelo septo plano, mas a resolução de suas medidas era muito ruim devido às dimensões pequenas da cavidade nasal [138]. Eles também realizaram estudos de observação do escoamento dissolvendo tinta em um fluxo permanente de água. A corrente principal passava entre o meato médio e o septo, acima do meato inferior. Uma pequena fração do fluido era direcionado para a região olfatória, onde formava um redemoinho. A uma vazão de 125 ml/s o escoamento era laminar, mas ele se tornava turbulento para uma vazão de 208 ml/s.

Girardin et al. (1983) utilizaram anemometria óptica para mapear experimentalmente o campo de velocidades no interior de um molde plástico do nariz de um cadáver [139]. O septo original foi substituído por uma lâmina de acrílico devido ao funcionamento óptico do anemômetro. Ar com gotículas de água em suspensão era bombeado a uma vazão de 166 ml/s. As medidas demonstraram que o fluxo é maior no assoalho da cavidade e mais próximo do septo. Apesar dos números de Reynolds calculados corresponderem a um escoamento laminar, os autores concluíram que o fluxo é principalmente turbulento por encontrarem perfis de velocidade planos⁴.

Haigh e Cole (1983) mediram a resistência (queda de pressão/vazão) ao longo da cavidade nasal de 10 voluntários [140]. Eles demonstraram que os 3 cm iniciais do nariz são responsáveis por quase toda a resistência nasal, sendo que aproximadamente 1/3 de toda a queda de pressão ocorre no vestíbulo e os 2/3 restantes na abertura piriforme, próximo à extremidade anterior do corneto inferior. Por confinar praticamente toda a resistência nasal em um segmento tão curto, essa região é denominada válvula nasal.

Um nariz congestionado pela aplicação de histamina tem uma resistência ~ 2 vezes maior que um nariz normal, enquanto que um nariz descongestionado pela aplicação de xylometazolina tem uma resistência $\sim 1/3$ menor que um nariz normal. Para vazões grandes, Haight e Cole demonstraram que os músculos *dilatadores alares* exercem uma força periódica e sincronizada com o ciclo respiratório para evitar o colapso da válvula nasal.

Hornung e cooperadores (1987) investigaram o fluxo nasal monitorando a radiação emitida por átomos de xenônio 133 liberados no ar bombeado através de um molde da cavidade nasal de um cadáver. A vazão foi mantida constante, assumindo os valores de 42 ml/s, 117 ml/s e 333 ml/s. Os resultados mostraram que tanto a posição da narina em que o xenônio é liberado quanto a vazão têm uma influência significativa na distribuição de radioatividade no modelo. Em especial, aumentando a vazão, uma porcentagem maior da radiação é detectada na região olfatória. A discussão dos resultados falha por não correlacionar quantitativamente a radiação com o campo de velocidades.

Tarabichi e Fanous (1993) simularam um escoamento permanente na região da válvula nasal através do método de elementos finitos [142]. Eles adotaram um modelo bidimensional obtido a partir de radiografias do crânio de dois voluntários brancos saudáveis. Seus

⁴Em um tubo de seção reta circular, o perfil de velocidades é parabólico quando o escoamento é laminar. Entretanto, quando o fluxo é turbulento, a velocidade cresce rapidamente quando nos afastamos das paredes do recipiente, atingindo um patamar e formando um perfil praticamente plano.

resultados indicam que a vazão é maior no assoalho do nariz e que a remoção da borda inferior da abertura piriforme pode ser uma cirurgia eficaz no tratamento de pessoas com colapso da válvula nasal. Infelizmente, devido à análise bidimensional de um problema nitidamente tridimensional e em consequência da desconsideração da porção posterior da cavidade nasal, os resultados deste estudo não são precisos para o caso real.

Elad et al. (1993) simularam um escoamento laminar, incompressível e permanente em um modelo trapezoidal do nariz através do método de elementos finitos [143]. No modelo, os cornetos são retangulares, facilitando sua remoção para estudar sua influência. Os resultados computacionais indicam que a vazão é maior ao longo do assoalho do nariz e que a presença dos cornetos direciona mais ar para a região olfatória. Durante a expiração a distribuição de velocidades é similar aos perfis inspiratórios, embora um pouco mais uniforme.

Schreck e parceiros (1993) estudaram o escoamento em um modelo plástico, em escala 3:1, construído a partir de imagens de ressonância magnética (MRI) espaçadas de 4 mm [144]. A velocidade do fluido foi medida com um anemômetro, o fluxo através de um pneumotacógrafo e a pressão por um transdutor de pressão. Foram investigadas vazões permanentes de 50 a 1000 ml/s. Alguns resultados do estudo foram: i) turbulência fraca é observada para vazões maiores que 200 ml/s e turbulência completamente desenvolvida surge para vazões maiores que 500 ml/s; ii) a maior parte do fluxo passa pela porção central da cavidade nasal, enquanto que frações pequenas fluem pelos meatos e pela região olfatória; iii) a distribuição de velocidades não muda qualitativamente com o aumento da vazão; iv) a resistência do nariz interno representa apenas $\sim 50\%$ da resistência do nariz externo.

Schreck et al. demonstraram também que, em um nariz normal, o segmento mais resistivo fica no nariz externo. Para vazões maiores que ~ 250 ml/s, as contribuições para a queda de pressão são aproximadamente de 43% do total no nariz externo, 25% no nariz interno e 32% na nasofaringe. Devido à essa resistência não uniforme, o nariz é particularmente suscetível à diminuições na seção reta de sua porção anterior. A Fig. 4.17 foi retirada desse estudo e ilustra como uma pequena diminuição da seção reta da válvula nasal pode causar um aumento dramático na resistência nasal. Para uma vazão de 1000 ml/s, uma diminuição de $\sim 50\%$ na área da seção transversal gerou um aumento de quase 400 % na diferença de pressão necessária para manter tal vazão. Entretanto, em casos patológicos, a resistência do nariz interno pode superar a do nariz externo. A Fig. 4.18 mostra como uma pequena inchação do corneto inferior (neste caso a área da seção transversal passou de 2.71 cm² para 2.46 cm² em média) pode causar um aumento dramático na resistência nasal.

Hanh et al. (1993) construíram um modelo anatomicamente correto de uma cavidade nasal direita, de dimensões 20 vezes maiores que o nariz real, a partir de imagens de tomografia computadorizada espaçadas de 2 mm [131]. Fluxos permanentes de 180, 560 e 1100 ml/s por uma narina foram estudados através de um anemômetro com resolução espacial de 1 mm. Os resultados indicaram que i) a distribuição de velocidades não depende muito da vazão; ii) a presença de pêlos nas narinas afeta o escoamento apenas

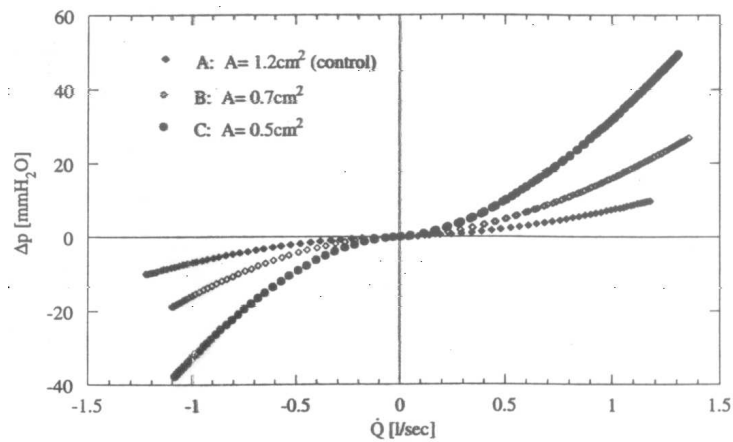


Figura 4.17: Queda pressão vs. vazão para três seções retas do nariz externo. Vazões positivas indicam expiração e vazões negativas inspiração. Retirado de [144].

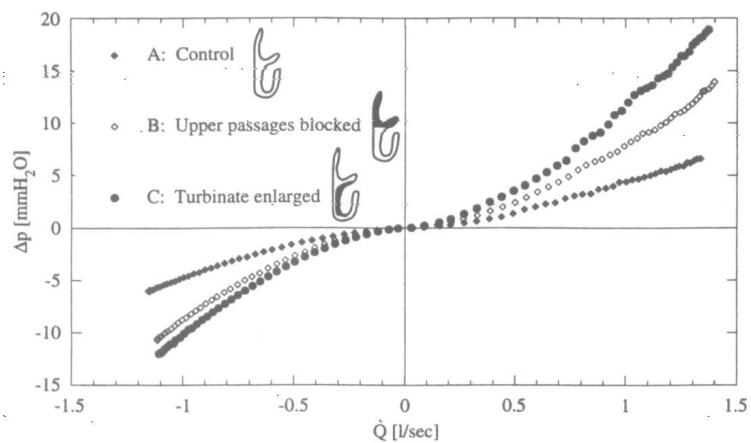


Figura 4.18: Queda de pressão vs. vazão para três seções retas do nariz interno. Caso A: nariz normal; caso B: passagens aéreas superiores bloqueadas; caso C: hipertrofia do corneto inferior. Retirado de [144].

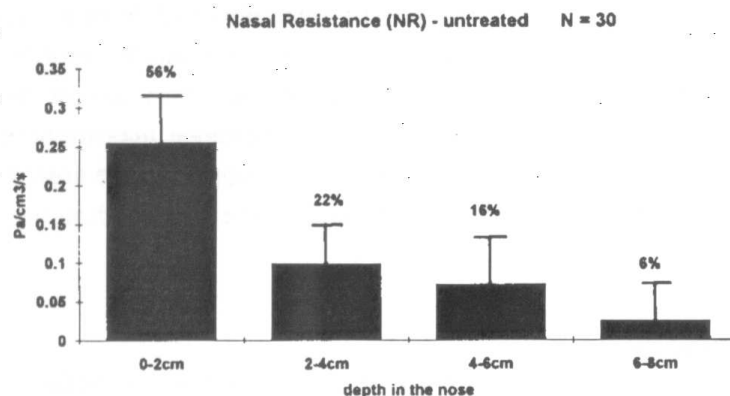


Figura 4.19: Distribuição da resistência nasal em 30 cavidades nasais de adultos saudáveis. A resistência é mostrada em segmentos de 2 cm.

na região do vestíbulo; iii) aproximadamente 50% do ar passa pela parte inferior dos meatos inferior e médio, sendo que apenas 14% do fluxo passa pela região olfatória; iv) o escoamento é laminar em praticamente toda a extensão do nariz na vazão mais baixa, mas é turbulento para as duas vazões maiores.

Keyhani e colaboradores (1995) investigaram numericamente o fluxo de ar em uma malha da cavidade nasal direita, construída a partir de tomografias de um adulto [121]. Eles estudaram o escoamento laminar para vazões correspondentes ao repouso e encontraram que aproximadamente 30% do fluido passa pelo meato inferior, enquanto apenas 10% passa pela região olfatória. O campo de velocidades mudou pouco quando a vazão variou de 125 ml/s a 200 ml/s. Durante a expiração os picos de velocidade foram menores que na inspiração, uma vez que o fluxo foi mais bem distribuído na região dos cornetos. O campo de velocidades encontrado foi comparado com aquele encontrado experimentalmente no modelo de Hahn et al., o qual foi construído a partir das mesmas tomografias. Os resultados numéricos concordaram com os experimentais, validando o modelo computacional e levando os pesquisadores à conclusão de que o escoamento é laminar para vazões de repouso.

Hirschberg e cooperadores (1995) mediram a queda de pressão no nariz de 23 humanos saudáveis [145]. A resistência total entre as narinas e a nasofaringe foi de 0.44 Pa/(cm³/s) em narizes não tratados e 0.26 Pa/(cm³/s) em narizes descongestionados com xylometazolina. Os resultados mostram claramente que o segmento mais resistivo do nariz encontra-se nos 4 cm anteriores (Fig. 4.19). Após o descongestionamento com xylometazolina, a resistência nasal concentrou-se ainda mais na porção anterior, de tal forma que 88% da resistência total localizava-se nos 2 cm iniciais do nariz.

Park et al. (1997) produziram uma réplica tridimensional do nariz (em escala 3:1) a partir de 9 fatias coronais⁵ de dados anatômicos [146]. Eles foram os primeiros a estudar o fluxo nasal por uma técnica que fornece cortes bidimensionais do perfil de velocidades, a saber, a velocimetria de imagens de partículas. Os perfis encontrados mostram uma

⁵Um plano coronal corta o corpo em uma parte da frente e uma parte de trás.

grande vazão na região olfatória. Este estudo foi o único a detectar velocidades altas nessa região, o que pode ser parcialmente explicado pela imprecisão da anatomia do modelo estudado [127].

Yu e colaboradores (1998) estudaram o escoamento permanente nas vias aéreas superiores para uma vazão de 250 ml/s, correspondendo a 125 ml/s em cada narina [147]. A morfologia foi baseada em um modelo didático para estudantes de medicina e incluía as cavidades nasal e oral, a laringe e as duas primeiras ramificações da traquéia. Eles investigaram a deposição de partículas com diâmetros entre 0,001 e 0,01 μm e concluíram que a respiração nasal é muito mais eficiente para filtrar tais partículas. A comparação de suas previsões numéricas com dados experimentais apresentou uma boa concordância. Sobre a distribuição de velocidades no modelo, os autores relatam que o perfil de velocidades é mais uniforme na expiração do que na inspiração.

Naftali et al. (1998) conduziram um estudo computacional 2D dos fenômenos de transporte em várias seções retas de um modelo do nariz [123]. No modelo, a cavidade nasal é trapezoidal similarmente ao modelo estudado por Elad et al. [143]. Dessa forma, o objetivo não era obter resultados quantitativos, mas analisar qualitativamente como o nariz aquece e umidifica o ar. Diversos valores para a temperatura e umidade do ambiente foram considerados, além de narizes normais e patológicos. Os resultados indicam que durante a respiração por um nariz normal, o ar praticamente atinge condições alveolares após passar pela cavidade nasal. Um nariz normal é capaz de realizar sua função até mesmo em ambientes extremos (e.g., quente/úmido, frio/seco, frio/úmido). A presença dos cornetos aumenta bastante a taxa local de aquecimento e umidificação. Contudo, uma irrigação sangüínea inadequada ou a presença de muco podem afetar a eficiência do processo.

Subramaniam et al. (1998) estudaram o escoamento em um modelo anatomicamente correto baseado em 36 imagens de MRI espaçadas de 3 mm [148]. Escoamentos permanentes de 250 e 433 ml/s passando por ambas narinas foram estudados numericamente através do método de elementos finitos. Os resultados mostraram uma proporção considerável de fluido passando entre o septo e os meatos inferior e médio, sendo que a vazão pela região olfatória foi pequena. A distribuição de velocidades variou pouco entre as duas vazões estudadas. A velocidade mais alta foi detectada na região da válvula nasal. Os autores sugerem que seu modelo pode ser usado para prever a distribuição de lesões em pacientes que respiraram gases tóxicos e para inferir as mudanças no escoamento causadas por intervenções médicas e patologias.

Simmen et al. (1999) foram os primeiros a investigar um escoamento dependente do tempo, imitando as variações de pressão que ocorrem durante a respiração [149]. Eles visualizaram o escoamento na cabeça de um cadáver utilizando um septo transparente, mas anatomicamente correto, e partículas de água aerosolizadas. Mesmo para vazões pequenas, observaram muita turbulência, definida como 'linhas de corrente irregulares e formação de redemoinhos durante a observação direta ou na análise em câmera lenta em vídeo'. A corrente principal foi observada no meato médio, em contraste com outros autores [127]. Simmen et al. também observaram que a região olfatória é mais aerada

durante o fim da inspiração e durante a expiração. Comparando o nariz normal com condições patológicas, eles relatam que i) a proporção do fluxo passando pelo meato médio aumenta quando a mucosa e os cornetos estão hipertróficos; ii) após uma turbinectomia a quantidade de fluido passando pelo assoalho do nariz cresce muito.

Kelly e colaboradores (2000) investigaram experimentalmente o escoamento de ar em um modelo baseado em 26 tomografias usando a velocimetria de imagem de partículas [127]. Projeções bidimensionais do campo de velocidade foram obtidas em uma série de planos paralelos para um fluxo permanente de 125 ml/s. Os resultados indicam que o escoamento é laminar e que as regiões de maior módulo da velocidade são a válvula nasal e o assoalho da cavidade. Vazões pequenas foram observadas nos meatos e na região olfatória. Segundo os autores, a vazão pequena na região olfatória pode ser benéfica no sentido de protegê-la da ação de poluentes.

A partir dos estudos citados acima, podemos afirmar que:

1. A questão se o escoamento a vazões de repouso é laminar ou turbulento ainda é controversa, sendo que parte do debate é alimentado por confusão de terminologia. Vários estudos concordam que o escoamento a vazões baixas (125 a 200 ml/s passando por uma narina) é laminar na maior parte da cavidade nasal, tornando-se turbulento para vazões maiores que 200 ml/s [121, 123, 127, 131, 138, 143, 144, 147, 148]. Entretanto, outros autores relatam a presença de turbulência já para vazões pequenas [137, 139, 141, 149]. Simmen et al. argumenta que um escoamento turbulento seria vantajoso, uma vez que, aumentando o contato do ar com a mucosa nasal, a umidificação, a filtração e o aquecimento do ar seriam otimizados [149].
2. Também é objeto de debate a trajetória da corrente principal dentro do nariz. Enquanto alguns dizem que a maior parte do fluido passa pelo assoalho [127, 139, 142, 143], outros relatam que a vazão é maior entre o meato médio e o septo [135, 138, 144, 148, 149]. É possível que essa distribuição de velocidades varie significativamente de uma pessoa para outra, o que explicaria a discrepância entre os diferentes artigos citados.
3. Excetuando-se o trabalho de Park e colaboradores [146], há o consenso de que o volume de fluido que passa pela região olfatória é pequeno, totalizando aproximadamente 10-15% [121, 131, 136, 138, 143, 144, 148].
4. A distribuição de velocidades varia pouco com o aumento da vazão [121, 131, 141, 144, 148].
5. Os perfis de velocidades expiratórios são similares aos inspiratórios, mas são mais uniformes [121, 143, 147].
6. O segmento mais resistivo do nariz, comumente chamado de válvula nasal, corresponde aos primeiros 3 cm da cavidade [140, 144, 145]. Em particular, a região onde surge o corneto inferior é bastante resistiva.

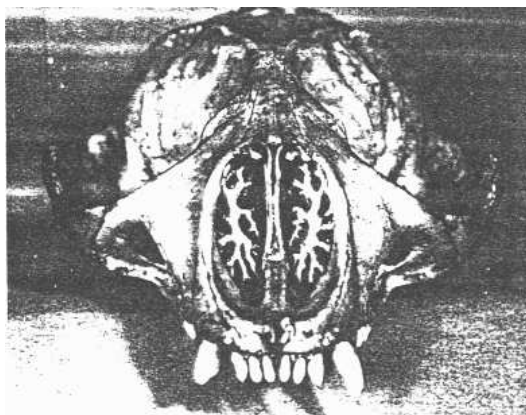


Figura 4.20: Vista frontal do crânio de uma foca mostrando cornetos bastante complexos. Retirado de [150].

A seguir, apresento um apanhado de informações coletadas da literatura, as quais podem ser valiosas durante a investigação do fluxo de ar no nariz humano.

Outras informações relevantes

Desde o final do século XIX, sabe-se que a resistência nasal oscila espontaneamente durante o dia [134]. Em aproximadamente 80% das pessoas, essas oscilações são periódicas e recíprocas, sendo chamadas de ciclo nasal. No ciclo nasal clássico, quando os cornetos de um lado atingem seu tamanho máximo, os do outro lado têm seu tamanho mínimo. A duração do ciclo varia de 0,5 a 3,0h [134]. A razão da existência dessas variações espontâneas na resistência nasal é desconhecida [122]. Existem evidências de que essas oscilações ocorrem até mesmo em pacientes laringectomizados (ausência de fluxo nasal) e não há indícios de que o fluxo de ar influencie o ciclo nasal [134].

Um grande número de fatores afeta o tamanho dos cornetos. Esforço físico induz sua retração, ao passo que poeira, fumaça e álcool geralmente aumentam a resistência nasal [122]. Além disso, pressão em um lado do corpo induz o congestionamento da narina do mesmo lado, de tal forma que quando deitamos de lado respiramos pela narina mais alta em relação ao solo.

Scott (1954) comparou a anatomia do nariz de várias espécies de mamíferos e descobriu uma grande diversidade na forma e na complexidade dos cornetos [150]. Ele propôs que algumas espécies têm cornetos complexos, com uma grande área superficial, visando o controle da temperatura corporal. Como exemplo, podemos citar o caso da foca (Fig. 4.20). Sua pele é espessa para evitar a perda de calor nas águas geladas. Contudo, se a foca está fora d'água tomando sol, ela precisa perder calor de alguma forma. Neste caso, a foca pode controlar sua temperatura corporal controlando a irrigação sangüínea dos intrincados cornetos. Em comparação com os demais mamíferos, os cornetos humanos são simples e a área superficial da membrana mucosa é relativamente pequena.

Estudos com voluntários indicam que o nariz humano tem uma grande capacidade de umidificar e aquecer o ar inspirado [151–153]. Webb (1951), medindo a temperatura do

ar ao longo do nariz enquanto a pessoa respirava em um ambiente gélido ($-25,5 \pm 5.5^{\circ}\text{C}$), descobriu que a temperatura do ar já atingia $25,4 \pm 3.4^{\circ}\text{C}$ ao chegar às coanas. Cole (1954) comparou a respiração nasal com a bucal e concluiu que o nariz aquece o ar com maior eficiência que a boca. Apesar de o ar chegar à faringe relativamente quente e úmido, parte do condicionamento do ar acontece na faringe, na traquéia e nos brônquios.

Em condições normais, a temperatura da mucosa nasal é de $\sim 33^{\circ}\text{C}$ e o aparelho respiratório superior transfere para o ar ~ 430 g de vapor d'água por dia [153]. Sendo a temperatura da mucosa nasal inferior à corporal, de $1/3$ a $1/2$ do calor e da água fornecidos durante a inspiração são recuperados na expiração [152]. Cole (1954) relata que a respiração nasal é vantajosa, pois permite maior recuperação de calor e umidade [152].

Gray (1967) analisou a correlação entre um desvio de septo e patologias do nariz e do ouvido [133]. Ele argumentou que um desvio de septo é o único fator que pode provocar patologias unilaterais. Em harmonia com essa hipótese, seus 42 pacientes com sinusite unilateral, os 31 com pólipos nasais unilaterais e a grande maioria daqueles com patologias de ouvido unilaterais tinham desvio de septo.

Segundo Gray, o desvio de septo altera o escoamento de tal forma que prejudica a drenagem dos seios paranasais e induz o crescimento de pólipos. O mecanismo proposto por ele é simples. Com o desvio de septo, o ar flui mais rápido do que deveria em determinadas regiões. Velocidades maiores significam pressões menores em uma região específica, o que induz o acúmulo de fluido e inchaço do tecido. Ainda não há na literatura uma avaliação crítica dessa proposta.

McNicoll e Scanlan (1979) relatam que um desvio de septo pode estar ligado ao mal funcionamento da tuba auditiva [155]. Cento e quarenta e um candidatos a mergulhadores e a tripulantes de submarinos e aeronaves da marinha britânica eram incapazes de equilibrar a pressão do ouvido médio após um aumento de pressão de 3 metros de água. Os candidatos foram examinados e um desvio de septo foi encontrado em todos eles. Nenhum tinha história de rinite alérgica, sinusite ou obstrução nasal. Eles foram submetidos à cirurgia de correção do desvio de septo e, após 3 semanas de recuperação, 95% tornaram-se capazes de equilibrar a pressão do ouvido médio em um ambiente pressurizado. Um estudo in vivo em 25 desses recrutas, usando scintigrafia com xenônio 133, demonstrou a presença de turbulência no espaço pós-nasal antes da operação. Após a cirurgia o escoamento tornou-se laminar.

Hadfield, Macbeth e cooperadores (1968, 1971, 1982) realizaram uma vasta pesquisa e demonstraram que a incidência de câncer nasal é muito maior entre trabalhadores da indústria de móveis da Inglaterra do que no resto da população [156]. A incidência da doença é de 0,7 em cada 1000 trabalhadores que mantêm contato com pó de madeira, em comparação com os 0,0006 casos em cada 1000 ingleses. Os autores registram que os carpinteiros têm um acúmulo de poeira no septo e, particularmente, na borda anterior do corneto médio, que é um ponto estagnado do escoamento. Essa é a região de onde, acredita-se, o tumor se origina. A análise das células da cabeça do corneto médio indicaram o surgimento de um tecido estranho (metaplasia escamosa).

Há evidências de que o desenvolvimento de câncer de pulmão também esteja associado a altas taxas de deposição de partículas. Balásházy e colaboradores (2003) utilizaram um modelo computacional para determinar a distribuição de partículas absorvidas nas gerações 3 e 4 dos brônquios [157]. Eles demonstraram que as células localizadas no dorso das bifurcações recebem doses centenas de vezes maiores que a média. Esse resultado explica porque tumores pulmonares originam-se preferencialmente nos dorsos da árvore bronquial. Os autores defendem que apenas modelos computacionais da dinâmica dos fluidos são compatíveis com a incidência clínica desse tipo de câncer, uma vez que modelos baseados em uma absorção uniforme não prevêm concentrações de partículas altas o suficiente para justificar o crescimento de um tecido canceroso.

A fim de testar a hipótese de que regiões de maior absorção de partículas estão correlacionadas à posição de lesões provocadas pela inspiração de gases tóxicos, Kepler et al. (1998) determinaram numericamente o fluxo de ar e as regiões de maior absorção em um modelo anatomicamente correto da cavidade nasal de um macaco reso [158]. A comparação dos dados simulacionais, que utilizou o método de elementos finitos para vazões permanentes, com resultados experimentais obtidos com cobaias confirmaram a hipótese.

4.5 Importância e objetivos do nosso estudo

Como vimos na seção anterior, ainda temos muito o que aprender sobre o funcionamento do nariz. Infelizmente, a fisiologia do nariz e os efeitos que uma cirurgia têm no escoamento de ar não são tão bem compreendidos quanto os pacientes gostariam. Basta dizer que disfunções da válvula nasal são freqüentemente induzidas ou agravadas por procedimentos cirúrgicos e que a cirurgia de correção do desvio de septo falha em 20 a 30% dos casos [120].

Várias perguntas importantes ainda estão sem resposta. Qual é a função dos seios paranasais? Durante o repouso o escoamento é laminar ou turbulento? Qual é o efeito de uma turbinectomia em termos do escoamento, do aquecimento e da filtragem do ar? Em que caso um desvio de septo é uma patologia? O que é um nariz normal? Qual é a função do ciclo nasal? O conhecimento detalhado do escoamento (em particular, das posições dos pontos estagnados) pode ser aplicado para melhorar o diagnóstico e a prevenção do câncer nasal?

Otorrinolaringologistas realizam diariamente cirurgias nasais sem saber exatamente os efeitos que tais intervenções têm no funcionamento do nariz [119, 121]. O número dessas operações tem crescido a cada ano, parcialmente em consequência do aumento da poluição nos grandes centros urbanos. A cirurgia de correção do desvio de septo é uma intervenção muito comum e sua eficácia vem sendo debatida [160]. Enquanto alguns médicos encaram um septo desviado como uma patologia, outros não vêem tal paciente como um caso cirúrgico. A consequência é que alguns médicos realizam várias cirurgias dessa toda semana, ao passo que outros buscam tratamentos clínicos, raramente operando pacientes com tal condição [119].

Outra cirurgia comum e que tem sido ponto de controvérsia é a turbinectomia, procedimento cirúrgico usado no tratamento de pacientes com hipertrofia do corneto [120]. Existe uma grande divergência dos médicos a respeito de quão agressiva deve ser essa cirurgia. Alguns defendem que os resultados são muito melhores com a remoção total do corneto inferior. Outros acreditam que a turbinectomia total pode causar uma rinite atrófica em alguns casos, o que pioraria a situação do paciente, sendo assim completamente contra tal procedimento [120]. A fim de solucionar essa questão, mais estudos sobre a função dos cornetos são necessários. Há um consenso geral de que os cornetos ajudam a aquecer, filtrar e umidificar o ar respirado, o que está de acordo com o estudo bidimensional do modelo trapezoidal do nariz realizado por Naftali e colaboradores [123]. Um estudo 3D de um modelo anatomicamente correto seria de grande valia na determinação da função dos cornetos e para esclarecer se uma turbinectomia total pode de fato causar uma rinite atrófica.

É surpreendente que a função dos seios paranasais ainda não tenha sido determinada. Esses seios são cavidades amplas (seção 4.2) e que, devido a uma drenagem inadequada, freqüentemente se enchem de muco, levando à sinusite. Os canais que os conectam à cavidade nasal são estreitos e, por isso, até hoje os seios foram desconsiderados nos estudos do fluxo nasal, já que supostamente não influem significativamente no escoamento dentro do nariz interno. Infelizmente ainda não se sabe se o ar entra e sai dessas cavidades a cada ciclo respiratório e como isso afeta a drenagem do muco.

Outra questão que permanece aberta é a discriminação da porção da cavidade nasal em que a vazão é maior. Artigos diferentes apontam regiões distintas [127]. Não se sabe se esses resultados conflitantes devem-se a variações morfológicas da população ou à precisão dos métodos experimentais e numéricos.

Vimos na seção 4.4 que um fluxo nasal inadequado pode gerar patologias de ouvido e de garganta. Além dessas conseqüências diretas, problemas respiratórios podem causar ansiedade, depressão e comportamento anti-social por impedir pessoas de participar de esportes e outras atividades que demandem esforço físico [159].

Uma compreensão completa do fluxo de ar no nariz humano e dos processos de transporte envolvidos certamente levará a diagnósticos e tratamentos mais precisos para pacientes com problemas respiratórios. Além disso, o nariz tem um grande potencial como caminho de ingestão de medicamentos [122, 123], o qual será melhor explorado quando compreendermos melhor os processos de transporte que ocorrem em seu interior.

4.6 Conclusões e perspectivas futuras

Como vimos na seção anterior, ainda temos muito o que aprender sobre o funcionamento do nariz. Os otorrinolaringologistas desconhecem os efeitos que cirurgias comuns, como a correção do desvio de septo e a remoção do corneto inferior, têm no escoamento de ar em termos da distribuição de velocidades, da diferença de pressão necessária para respirar e da filtragem, da umidificação e do aquecimento do ar. Basta dizer que disfunções da

válvula nasal são freqüentemente induzidas ou agravadas por procedimentos cirúrgicos e que a cirurgia de correção do desvio de septo falha em 20 a 30% dos casos [120].

Tenho convicção de que uma compreensão completa do fluxo de ar no nariz humano e dos processos de transporte envolvidos levará a diagnósticos e tratamentos mais precisos para pacientes com problemas respiratórios. Além disso, o nariz tem um grande potencial como caminho de ingestão de medicamentos [122, 123] que será melhor explorado quando compreendermos melhor os processos de transporte que ocorrem em seu interior.

Dessa forma, meu objetivo daqui em diante é investigar o fluxo de ar no nariz humano, tanto em pessoas normais, a fim de definir o que seria um nariz normal, quanto em casos patológicos. Analisando o escoamento no nariz de um paciente antes e após uma cirurgia, poderemos compreender os efeitos da cirurgia no fluxo nasal e, conseqüentemente, melhorar o diagnóstico e o tratamento de patologias nasais.

Especificamente, os temas a serem investigados durante meu pós-doutorado serão (1) o fluxo de ar no nariz de pessoas sadias e (2) os efeitos de cirurgias comuns (desvio de septo; turbinectomia; rinite atrófica) no escoamento. Os resultados dos modelos computacionais serão comparados com medidas experimentais a fim de validar os cálculos.

Em resumo, estudamos a anatomia do nariz e dos seios paranasais e fizemos uma revisão dos artigos publicados sobre o fluxo de ar no nariz humano. Vimos que a geometria nasal é bastante complexa, o que dificulta tanto os estudos experimentais quanto os computacionais. Após essa revisão bibliográfica, ficou claro que ainda há muito trabalho a ser feito a fim de compreendermos a fisiologia nasal. A revisão bibliográfica descrita neste capítulo está resumida em um artigo que submetemos à Revista Brasileira de Otorrinolaringologia [161]. Uma cópia deste artigo está disponível no apêndice F.

Submeti o projeto “O fluxo de ar no nariz humano” ao CNPq solicitando uma bolsa de pós-doutorado para realizar essa pesquisa no CIIT - Centers for Health Research localizado na Carolina do Norte - EUA sob a orientação da Dra. Julia Kimbell. O projeto foi aprovado e minha viagem está programada para o início de março de 2005.

Capítulo 5

Conclusão

A vida surgiu na Terra há aproximadamente 3,7 bilhões de anos e o que era inicialmente uma forma primitiva de vida evoluiu para estruturas cada vez mais complexas. Alguns crêem que a vida surgiu espontaneamente, sem a necessidade de um agente externo para orientar o curso da evolução. Outros, entre os quais me encontro, acreditam que Deus controlou todo o processo de evolução até chegarmos aos dias atuais. Independentemente da fé de cada um, investigar o mundo biológico significa estudar a origem do ser humano, conhecer a nossa História. Por esse motivo, acho a Biologia um assunto fascinante.

O universo biológico oferece uma grande diversidade de problemas para nós físicos. Os seres vivos habitam um universo governado pelas leis da Física e, por isso, têm que obedecê-las. A Física determina a resistência de estruturas, as taxas de difusão, a condução de calor, a dinâmica dos fluidos e as propriedades estatísticas de sistemas com muitas partículas. Nesta tese de doutorado investigamos três problemas diferentes em biofísica, a saber, a alometria dos ossos, o modelo Bak-Sneppen para a evolução das espécies e o fluxo de ar no nariz humano. Um resumo dos principais resultados encontrados segue abaixo. Indicamos também nossas atividades atuais em cada área, assim como os resultados que gostaríamos de obter em estudos futuros.

A alometria dos ossos é o estudo da variação das dimensões dos ossos com o tamanho do animal. Assim como várias outras variáveis biológicas, o comprimento L e o diâmetro D dos ossos variam com a massa M aproximadamente como leis de potência, a saber, $L = k_l M^l$ e $D = k_d M^d$, onde k_l e k_d são constantes e l e d são os expoentes alométricos. Durante as últimas três décadas diversos estudos experimentais foram feitos, contudo nenhum modelo teórico foi capaz de explicar as observações. Em particular, os dados não se ajustam nem à similaridade geométrica ($L \propto D \propto M^{1/3}$), nem à similaridade elástica ($L \propto M^{1/4}$ e $D \propto M^{3/8}$), sendo que a última previsão sai da proposta de McMahon de que a flambagem determinaria a alometria dos ossos [9, 14–16].

Propusemos um modelo, baseado na exigência de que os ossos devem resistir às forças

de compressão e flexão que lhes são impostas, que fornece previsões em acordo com os dados experimentais. Utilizando a teoria de resistência dos materiais, descobrimos que a similaridade elástica não foi observada experimentalmente porque os ossos longos não são esbeltos o suficiente para sofrer flambagem. Previmos que $d \approx 0.37$, enquanto que o expoente l é diferente para mamíferos grandes e pequenos, em acordo com o experimento. Atualmente estamos analisando a alometria dos ossos das aves, onde os expoentes l e d para o úmero, a ulna e o rádio são diferentes dos encontrados nos mamíferos porque as forças impostas às asas são diferentes das impostas às patas. Esperamos aplicar nosso modelo também à alometria dos ossos de répteis, embora tenhamos encontrado apenas um artigo experimental para esse grupo de animais.

Investigamos também o modelo Bak-Sneppen para a evolução das espécies. O registro fóssil indica que a evolução não é um processo lento e gradual como imaginado por Darwin, mas que, na verdade, longos períodos de equilíbrio são entremeados por curtos períodos de atividade evolutiva (Equilíbrio Pontuado). O número de espécies envolvidas em cada evento varia como uma lei de potência: existem muitos eventos com um número pequeno de espécies envolvidas e poucos eventos com um número grande de espécies envolvidas (extinções em massa). Os biólogos procuram uma explicação para as extinções em massa em forças externas, tais como uma erupção vulcânica ou a queda de um meteoro. Entretanto, Bak e Sneppen [7] demonstraram que a própria dinâmica de interação entre as espécies pode levar o sistema para um estado criticamente auto-organizado, onde eventos evolutivos de todos os tamanhos podem acontecer.

Nosso objetivo ao estudar o modelo BS foi caracterizar a sua classe de universalidade. Vimos que a *dinâmica extrema* é a responsável pela criticalidade auto-organizada no modelo, uma vez que as propriedades de escala desaparecem quando introduzimos uma taxa finita de renovação para cada sítio. Propondo variações das regras originais, estudamos o efeito da quebra de simetria, a universalidade da distribuição $p(x)$ e a ligação com modelos que exibem uma transição de fase para um estado absorvente. Os métodos utilizados foram simulação, teoria de campo médio e argumentos gerais.

Nossas principais conclusões com respeito à classe de universalidade do modelo BS são: (i) a distribuição estacionária de barreiras $p(x)$ é singular em um ou mais pontos; (ii) a distribuição $p(x)$ não é universal e sua forma pode ser qualitativamente compreendida por teoria de campo médio; (iii) o sítio extremo x_m pertence com probabilidade 1 à região proibida onde $p(x) = 0$ no limite de uma rede infinita; (iv) modelos com dinâmica extrema são separados em duas classes de universalidade pela simetria da regra de renovação: modelos simétricos preservam os expoentes do modelo original e modelos com dinâmica assimétrica reproduzem os expoentes do modelo BS anisotrópico; (v) as propriedades de escala da dinâmica extrema estão intimamente ligadas a uma transição de fase para um estado absorvente. No caso do modelo BS, identificamos o modelo CP3 como o modelo não-extremo precursor do modelo BS. Vimos como um modelo da classe DP pode ser transformado para exibir dinâmica extrema, de tal forma que suas propriedades de escala mudam radicalmente. Dessa forma, o modelo BS é o protótipo de uma grande classe de universalidade que batizamos de *extremal Directed Percolation* ou eDP.

Algumas questões permanecem em aberto no estudo do modelo BS. Em primeiro lugar, ainda não existe uma solução exata do modelo, a qual enriqueceria muito nosso conhecimento sobre sua classe de universalidade. Em segundo lugar, o modelo é uma grande simplificação do fenômeno real, em especial por fixar o número de espécies na ecologia e o número de espécies consideradas inter-relacionadas. Busca-se hoje um modelo que seja mais fiel à realidade e que preserve o equilíbrio pontuado do modelo BS. (Para uma revisão dos modelos já propostos para a evolução das espécies, incluindo modificações do modelo BS, veja a ref. [64].) Finalmente, Stefan Boettcher sugeriu que investigássemos a relação entre a dinâmica extrema e a transição de fase para um estado absorvente no modelo BS com M-traits [117, 118], o qual possui solução analítica no limite $M \rightarrow \infty$, embora não pertença à mesma classe de universalidade do modelo original.

Estudamos também a anatomia do nariz humano e fizemos uma revisão da literatura sobre a física nasal. O nariz consiste em fendas estreitas que têm a função de aquecer, filtrar e umidificar o ar inspirado. Ainda se sabe pouco sobre como a geometria nasal afeta o fluxo e a fisiologia do nariz. Essa falta de conhecimento é evidenciada pela alta taxa de insucesso (20 a 30%) da cirurgia de correção do desvio de septo, assim como pelo fato de intervenções cirúrgicas freqüentemente induzirem ou agravarem disfunções da válvula nasal [120]. Enviei um projeto para o CNPq solicitando uma bolsa de pós-doc para investigar os efeitos que cirurgias comuns (correção do desvio de septo, turbinectomia e tratamento da rinite atrófica) têm no escoamento. Meu projeto foi aprovado e minha viagem está programada para o início de março de 2005.

Os resultados descritos nesta tese foram publicados nos artigos [52, 90–93, 161], os quais estão disponíveis nos apêndices a seguir.

Referências

- [1] Snell O. (1891) Das Gewicht des Gehirnes und des Hirnmantels der Säugethiere in Beziehung zu deren geistigen Fähigkeiten. Sitzungsberichte der Gesellschaft für Morphologie und Physiologie in München **7**, 90-94.
- [2] Schmidt-Nielsen K. (1984) *Scaling: Why is animal size so important?*. Cambridge University Press.
- [3] Peters R.H. (1983) *The ecological implications of body size*. Cambridge University Press.
- [4] Calder III W.A. (1984) *Size, function and life history*. Harvard University Press.
- [5] McMahon T.A., Bonner J.T. (1983) *On size and life*. Scientific American Library.
- [6] Bak P. (1997) *How nature works: the science of self-organized criticality*. Oxford University Press.
- [7] Bak P., Sneppen K. (1993) Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. Phys. Rev. Lett. **71**, 4083-4086.
- [8] Garcia G.J.M, Kokshenev V.B., da Silva J.K.L. (2005) On the scaling of mammalian and avian terrestrial locomotion at maximum sustained speed and top speed. Submetido ao Journal of Theoretical Biology.
- [9] McMahon T.A. (1973) Size and shape in biology. Science **179**, 1201-1204.
- [10] West G.B., Brown J.H., Enquist B.J. (1997) A general model for the origin of allometric scaling laws in biology. Science **276**, 122-126.
- [11] West G.B., Brown J.H., Enquist B.J. (1999) A general model for the structure and allometry of plant vascular systems. Nature **400**, 664-667.
- [12] Currey J.D. (2002) *Bones: structures and mechanics*. Princeton University Press.
- [13] Dyce K.M., Sack W.O. and Wensing C.J.G. (1996) *Textbook of veterinary anatomy*. W.B. Saunders company.
- [14] Christiansen P. (1999) Scaling mammalian long bones: small and large mammals compared. J. Zool. **247**, 333-348.

- [15] Christiansen P. (1999) Scaling of the limb long bones to body mass in terrestrial mammals. *J. Morphol.* **239**, 167-190.
- [16] McMahon, T.A. (1975) Using body size to understand the structural design of animals: quadrupedal locomotion. *J. Appl. Physiol.* **39**, 619-627.
- [17] McMahon T.A. (1975). Allometry and Biomechanics: limb bones in adult ungulates. *Am. Nat.* **109**, 547-563.
- [18] Alexander R.M. (1977) Allometry of the limbs of antelopes (Bovidae). *J. Zool.* **183**, 125-146.
- [19] Alexander R.M., Jayes A.S., Maloiy G.M.O., Wathuta E.M. (1979) Allometry of the limb bones of mammals from shrews (Sorex) to elephant (Loxodonta). *J. Zool.* **189**, 305-314.
- [20] Biewener, A.A. (1983) Allometry of quadrupedal locomotion: the scaling of duty factor, bone curvature and limb orientation to body size. *J. Exp. Biol.* **105**, 147-171.
- [21] Polk J.D., Demes B., Jungers W.L., Biknevicius A.R., Heinrich R.E., Runestad J.A. (2000) A comparison of primate, carnivoran and rodent limb bone cross-sectional properties: are primates really unique? *J. Hum. Evol.* **39**, 297-325.
- [22] Economos A.C. (1983) Elastic and/or Geometric Similarity in Mammalian Design? *J. Theor. Biol.* **103**, 167-172.
- [23] Castiella M.J., Casinos A. (1990) Allometry of leg muscles in insectivores and rodents. *Ann. Sci. Nat. Zool.* **11**, 165-178.
- [24] Biewener, A.A. (1989) Scaling body support in mammals - limb posture and muscle mechanics. *Science* **245**, 45-48.
- [25] Biewener A.A. (1990) Biomechanics of mammalian terrestrial locomotion. *Science* **250**, 1097-1103.
- [26] Biewener A.A. (1991) Musculoskeletal design in relation to body size. *J. Biomech.* **24**, 19-29.
- [27] Rubin C.T., Lanyon L.E. (1982) Limb mechanics as a function of speed and gait: a study of functional strains in the radius and tibia of horse and dog. *J. Exp. Biol.* **101**, 187-211.
- [28] Rubin C.T., Lanyon L.E. (1984) Dynamic Strain Similarity in Vertebrates; an Alternative to Allometric Limb Bone Scaling. *J. Theor. Biol.* **107**, 321-327.
- [29] Currey J.D., Alexander R.M. (1985) The thickness of the walls of tubular bones. *J. Zool.* **206**, 453-468.

- [30] Lanyon L.E., Magee P.T., Baggott D.G. (1979) Relationship of function stress and strain to the processes of bone remodeling - Experimental-study on the sheep radius. *J. Biomech.* **12**, 593-600.
- [31] Biewener A.A., Taylor C.R. (1986) Bone strain - A determinant of gait and speed. *J. Exp. Biol.* **123**, 383-400.
- [32] Gere J.M., Timoshenko S.P. (1997) *Mechanics of Materials*. 4th ed., PWS Pub Co.
- [33] Bertram J.E.A., Biewener A.A. (1992) Allometry and curvature in the long bones of quadrupedal mammals. *J. Zool.* **226**, 455-467.
- [34] Hokkanen J.E.I. (1986) Notes Concerning Elastic Similarity. *J. Theor. Biol.* **120**, 499-501.
- [35] Biewener A.A. (1982) Bone strength in small mammals and bipedal birds - do safety factors change with body size? *J. Exp. Biol.* **98**, 289-301.
- [36] Selker F., Carter D.R. (1989) Scaling of the Long Bone Fracture Strength with Animal Mass. *J. Biomech.* **22**, 1175-1183.
- [37] Alexander R.M., Maloiy G.M.O., Hunter B., Jayes A.S., Nturibi J. (1979) Mechanical stresses in fast locomotion of buffalo (*syncerus-caffer*) and elephant (*loxodonta-africana*). *J. Zool.* **189**, 135-144.
- [38] Alexander R.M. (1974) Mechanics of jumping by a dog *canis-familiaris*. *J. Zool.* **173**, 549-573.
- [39] Biewener A.A. (1983) Locomotory stresses in the limb bones of 2 small mammals - the ground-squirrel and chipmunk. *J. Exp. Biol.* **103**, 131-154.
- [40] Schmidt-Nielsen K. (1990) *Animal Physiology: Adaptation and Environment*. 4th ed., Cambridge University Press.
- [41] Druzinsky R.E. (1993) The time allometry of mammalian chewing movements: chewing frequency scales with body mass in mammals. *J. Theor. Biol.* **160**, 427-440.
- [42] Alexander R.M., Jayes A.S., Maloiy G.M.O., Wathuta E.M. (1981) Allometry of the leg muscles of mammals. *J. Zool.* **194**, 539-552.
- [43] Pollock C.M., Shadwick R.E. (1994) Allometry of muscle, tendon and elastic energy storage capacity in mammals. *Am. J. Physiol.* **266**, R1022-R1031.
- [44] Christiansen P. (2002) Mass allometry of the appendicular skeleton in terrestrial mammals. *J. Morphol.* **251**, 195-209.
- [45] Prange H.D., Anderson J.F., Rahn H. (1979) Scaling of skeletal mass to body mass in birds and mammals. *Am. Nat.* **113**, 103-122.

- [46] Bou J., Casinos A. (1985) Scaling of bone mass to body-mass in insectivores and rodents. *Forts. Zool.* **30**, 61-64.
- [47] Sokal R.R., Rohlf F.J. (1981) *Biometry*. San Francisco: W.H. Freeman & Co.
- [48] Alexander R.M., Langman V.A., Jayes A.S. (1977) Fast locomotion of some african ungulates. *J. Zool.* **183**, 291-300.
- [49] Garcia G.J.M. (2001) *Leis de escala na biologia*. Dissertação de mestrado. Departamento de Física, UFMG.
- [50] Kokshenev V.B., Silva J.K.L., Garcia G.J.M. (2003) Long-bone allometry of terrestrial mammals and the geometric-shape and elastic-force constraints of bone evolution. *J. Theor. Biol.* **224**, 551-556.
- [51] Bertram J.E.A., Biewener A.A. (1990) Differential scaling of the long bones in the terrestrial Carnivora and other mammals. *J. Morphol.* **204**, 157-169.
- [52] Garcia G.J.M., da Silva J.K.L. (2004) On The Scaling of Mammalian Long Bones. *J. Exp. Biol.* **207**, 1577-1584.
- [53] Gutenberg B., Richter C.F. (1994) *Bull. Seismol. Soc. Am.* **34**, 185.
- [54] Peters O., Hertlein C., Christensen K. (2002) A complexity view of rainfall. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 018701.
- [55] Peters O., Christensen K. (2002) Rain: Relaxations in the sky. *Phys. Rev. E.* **66**, 036120.
- [56] Dickman R. (2003) Rain, power laws, and advection. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 108701.
- [57] Barabási A.-L., Albert R. (1999) Emergence of scaling in random networks. *Science* **286**, 509-511.
- [58] Bak P., Chen K., Tang C. (1990) A forest-fire model and some thoughts on turbulence. *Phys. Lett. A* **147**, 297-300.
- [59] Barabási A.-L., Stanley H.E. (1995) *Fractal concepts in surface growth*. Cambridge University Press.
- [60] Sepkoski J.J. (1993) Ten years in the library: new data confirm paleontological patterns. *Paleobiology* **19**, 43-51.
- [61] Grassberger P. (1995) The Bak-Sneppen model for punctuated evolution. *Phys. Lett. A* **200**, 277-282.
- [62] Paczuski M., Maslov S., Bak P. (1996) Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models. *Phys. Rev. E* **53**, 414-443.

- [63] Boettcher S., Paczuski M. (2000) $d(c)=4$ is the upper critical dimension for the Bak-Sneppen model. Phys. Rev. Lett. **84**, 2267-2270 .
- [64] Drossel B. (2001) Biological evolution and statistical physics. Adv. Phys. **50**, 209-295; e-print: cond-mat/0101409.
- [65] Donangelo R., Fort H. (2002) Model for mutation in bacterial populations. Phys. Rev. Lett. **89**, 038101.
- [66] Bose I., Chaudhuri I. (2001) Bacterial evolution and the Bak-Sneppen model. Int. J. Mod. Phys. C **12**, 675-683.
- [67] Oliveira P.M.C., comunicação pessoal e preprint a ser publicado no Brazilian Journal Physics.
- [68] A idéia de se usar uma única lista de sítios com $x_i < 0.668$ (i.e., abaixo de um valor um pouco acima do limiar) já foi sugerida na ref. [67].
- [69] Rios P.D., Marsili M., Vendruscolo M. (1998) High-dimensional Bak-Sneppen model. Phys. Rev. Lett. **80**, 5746-5749.
- [70] Meester R., Znamenski D. (2002) Non-triviality of a discrete Bak-Sneppen evolution model. J. Stat. Phys. **109**, 987-1004.
- [71] Li W., Cai X. (2000) Analytic results for scaling function and moments for a different type of avalanche in the Bak-Sneppen evolution model. Phys. Rev. E **62**, 7743-7747.
- [72] Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F., Pogorelov Y.G. (2000) Bak-Sneppen model near zero dimension. Phys. Rev. E **62**, 295-298.
- [73] Caldarelli G., Felici M., Gabrielli A., Pietronero L. (2002) Probabilistic approach to the Bak-Sneppen model. Phys. Rev. E **65**, 046101.
- [74] Felici M., Caldarelli G., Gabrielli A., Pietronero L. (2001) Perturbative approach to the Bak-Sneppen model. Phys. Rev. Lett. **86**, 1896-1899.
- [75] Marsili M. (1994) Renormalization group approach to the self-organization of a simple model of biological evolution. Europhys. Lett. **28**, 385-390.
- [76] Mikeska B. (1997) Monte Carlo renormalization-group approach to the Bak-Sneppen model. Phys. Rev. E **55**, 3708-3711.
- [77] Paczuski M., Maslov S., Bak P. (1994) Field theory for a model of self-organized criticality. Europhys. Lett. **27**, 97.
- [78] Flyvbjerg H., Sneppen K., Bak P. (1993) Mean-field theory for a simple-model of evolution. Phys. Rev. Lett. **71**, 4087-4090.

- [79] Dickman R., Muñoz M.A., Vespignani A., Zapperi S. (2000) Paths to self-organized criticality. *Braz. J. Phys.* **30**, 27-41.
- [80] Head D. (2000) Temperature scaling, glassiness and stationarity in the Bak-Sneppen model. *Eur. Phys. J. B* **17**, 289-294.
- [81] Pismak Y.M. (1997) Solution of the master equation for the Bak-Sneppen model of biological evolution in a finite ecosystem. *Phys. Rev. E*. **56**, R1326-R1329 .
- [82] Head D.A., Rodgers G.J. (1998) The anisotropic Bak-Sneppen model. *J. Phys. A* **31**, 3977-3988.
- [83] Maslov S., Rios P.D.L., Marsili M., Zhang Y.-C. (1998) Critical exponents of the anisotropic Bak-Sneppen model. *Phys. Rev. E* **58**, 7141-7145.
- [84] Datta A.S., Christensen K., Jensen H.J. (2000) On the physical relevance of extremal dynamics. *Eurphys. Lett.* **50**, 162-168.
- [85] Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. (1987) Self-organized criticality - an explanation of $1/f$ noise. *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381-384.
- [86] Mana S.S. (1990) Large-scale simulation of avalanche cluster distribution in sand pile model. *J. Stat. Phys.* **59**, 509-521.
- [87] Mana S.S. (1991) 2-state model of self-organized criticality. *J. Phys. A* **24**, L363-L369.
- [88] Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K. (1992) Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1244-1247.
- [89] Paczuski M., Maslov S., Bak P. (1994) Field-theory for a model of self-organized criticality. *Europhys. Lett.* **27**, 97-102. *ibid.* **28**, 295-296.
- [90] Garcia G.J.M., Dickman R. (2004) On the thresholds, probability densities, and critical exponents of Bak-Sneppen-like models. *Physica A* **342**, 164-170.
- [91] Garcia G.J.M., Dickman R. (2004) On singular probability densities generated by extrema dynamics. *Physica A* **332**, 318-336.
- [92] Garcia G.J.M., Dickman R. (2004) Asymmetric dynamics and critical behavior in the Bak-Sneppen model. *Physica A* **342**, 516-528.
- [93] Dickman R., Garcia G.J.M. (2005) Absorbing-state phase transitions with extremal dynamics. *Aceito na Physical Review E*.
- [94] Plischke M., Bergerson B. (1994) *Equilibrium Statistical Physics*. World Scientific, 2nd ed..

- [95] Dickman R. (2002) Numerical analysis of the master equation. Phys. Rev. E **65**, 047701.
- [96] de Boer J., Derrida B., Flyvbjerg H., Jackson A.D., Wettig T. (1994) Simple-model of self-organized biological evolution. Phys. Rev. Lett. **73**, 906-909.
- [97] de Boer J., Jackson A.D., Wettig T. (1995) Criticality in simple-models of evolution. Phys. Rev. E **51**, 1059-1074.
- [98] Liggett T.M. (1985) *Interacting Particle Systems*. Springer-Verlag.
- [99] Hinrichsen H. (2000) Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. Adv. Phys. **49**, 815-958.
- [100] Konno N. (1994) *Phase Transitions of Interacting Particle Systems*. World Scientific.
- [101] Marro J., Dickman R. (1999) *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*. Cambridge University Press.
- [102] Harris T.E. (1974) Contact interactions on a lattice. Ann. Probab. **2**, 969-988.
- [103] Jovanović B., Buldyrev S.V., Havlin S., Stanley H.E. (1994) Punctuated equilibrium and history-dependent percolation. Phys. Rev. E **50**, R2403-R2406.
- [104] Jensen I. (1993) Critical behavior of the pair contact process. Phys. Rev. Lett. **70**, 1465-1468.
- [105] Jensen I., Dickman R. (1993) Time-dependent perturbation-theory for diffusive nonequilibrium lattice models. J. Phys. A **26**, L151-L157.
- [106] Paczuski M., Maslov S., Bak P. (1996) Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models. Phys. Rev. E **53**, 414-443.
- [107] Paczuski M., Bak P., Maslov S. (1995) Laws for stationary states in systems with extremal dynamics. Phys. Rev. Lett. **74**, 4253-4256.
- [108] Paczuski M., Maslov S., Bak P. (1994) Field-theory for a model of self-organized criticality. Europhys. Lett. **27**, 97-102.
- [109] Grassberger P., de la Torre A. (1979) Reggeon field-theory (schlogl 1st model) on a lattice - Monte-Carlo calculations of critical behavior. Ann. Phys. (N.Y.) **122**, 373-396.
- [110] da Silva J.K.L., Droz M. (1985) Real-space renormalization-group for anisotropic directed bond percolation in arbitrary dimensions. J. Phys. C **18**, 745-752.
- [111] Grassberger P., Krause F., von der Twer T. (1984) A new type of kinetic critical phenomenon. J. Phys. A **17**, L105-L109; Grassberger P. (1989) Some further results on a kinetic critical phenomenon. *ibid.* **22**, L1103-L1107; Takayasu H., Tretyakov

- A. Yu. (1992) Extinction, survival, and dynamic phase-transition of branching annihilating random-walk. Phys. Rev. Lett. **68**, 3060-3063; Jensen I. (1994) Critical exponents for branching annihilating random-walks with an even number of offspring. Phys. Rev. E **50**, 3623-3633.
- [112] Jensen I. (1996) Low-density series expansions for directed percolation on square and triangular lattices. J. Phys. A **29**, 7013-7040.
- [113] Mendes J.F.F., Dickman R., Henkel M., Marques M.C. (1994) Generalized scaling for models with multiple absorbing states. J. Phys. A **27**, 3019-3028.
- [114] Cardy J.L., Sugar R.L. (1980) Directed percolation and reggeon field-theory. J. Phys. A **13**, L423-427.
- [115] Janssen H.K. (1981) On the non-equilibrium phase-transition in reaction-diffusion systems with an absorbing stationary state. Z. Phys. B **42**, 151-154.
- [116] Grassberger P. (1982) On phase-transitions in Schlogl 2nd model. Z. Phys. B **47**, 365-374.
- [117] Boettcher S., Paczuski M. (1996) Ultrametricity and memory in a solvable model of self-organized criticality. Physical Review E **54**, 1082-1095.
- [118] Boettcher S., Paczuski M. (1996) Exact results for spatiotemporal correlations in a self-organized critical model of punctuated equilibrium. Physical Review Letters **76**, 348-351.
- [119] Comunicação pessoal com o Dr. Dário Antunes, otorrinolaringologista da Santa Casa de Belo Horizonte.
- [120] Jackson L.E., Koch R.J. (1999) Controversies in the management of inferior turbinate hypertrophy: a comprehensive review. Plast. Reconstr. Surg. **103**, 300-312.
- [121] Keyhani K., Scherer P.W., Mozell M.M. (1995) Numerical simulation of airflow in the human nasal cavity. J. Biomech. Eng. **117**, 429-441.
- [122] Jones N. (2001) The nose and paranasal sinuses physiology and anatomy. Adv. Drug. Deliver. Rev. **51**, 5-19.
- [123] Naftali S., Schroter R.C., Shiner R.J., Elad D. (1998) Transport phenomena in the human nasal cavity: A computational model. Ann. Biomed. Eng. **26**, 831-839.
- [124] Howard B.K., Rohrich R.J. (2002) Understanding the nasal airway: Principles and practice. Plast. Reconstr. Surg. **109**, 1128-1144.
- [125] Navarro J. (1997) *Cavidade do nariz e seios paranasais*. Bauru: All Dent.

- [126] McMinn R.M.H., Hutchings R.T., Logan B.M. (1994) *Color Atlas of Head and Neck Anatomy*. Mosby-Wolfe.
- [127] Kelly J.T., Prasad A.K., Wexler A.S. (2000) Detailed flow patterns in the nasal cavity. *J. Appl. Physiol.* **89**, 323-337.
- [128] Gardner E., Gray D.J., ORahilly R. (1971) *Anatomia, estudo regional do corpo humano*. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan S.A..
- [129] Langman J., Woerdeman M.W. (1978) *Atlas of medical anatomy*. W.B. Saunders Company.
- [130] Tortora G.J., Tallitsch R.B. (1996) *Laboratory exercises in anatomy & physiology with cat dissections*.
- [131] Hahn I., Scherer P.W., Mozell M.M. (1993) Velocity profiles measured for air-flow through a large-scale model of the human nasal cavity. *J. Appl. Physiol.* **75**, 2273-2287.
- [132] Aydin Ö., Üstündağ E., Çiftçi E., Keskin G.I. (2001) Pneumatization of the inferior turbinate. *Auris Nasus Larynx* **28**, 361-363.
- [133] Gray L. (1967) Deviated nasal septum. III - Its influence on the physiology and disease of the nose and ear. Part I. *J. Laryngol. Otol.* **81**, 953-986.
- [134] Eccles R. (2000) Nasal airflow in health and disease. *Acta Oto-laryngol.* **120**, 580-595.
- [135] Proetz A.W. (1951) Air currents in the upper respiratory tract and their clinical importance. *Ann. Otol. Rhinol. Laryngol.* **60**; Proetz A.W. (1953) *Applied Physiology of the nose*, 2nd ed., Annals Publishing Co., St. Louis.
- [136] Stuiver M. (1958) Biophysics of the sense of smell. Tese de doutorado, Universidade Rijks, Groningem, Países Baixos.
- [137] Masing H. (1967) Investigations about the course of flow in the nose model. *Arch. Klin. Exp. Ohr. Nas. Kehlkopf.* **189**, 371-381.
- [138] Swift D.L., Proctor D.F. (1977) Access of air to the respiratory tract. *Respiratory defense mechanisms*, edited by Brain J.D., Proctor D.F., Reid L.M., Marcel Dekker Inc., New York, pp. 63-91.
- [139] Girardin M., Bilgen E., Arbour P. (1983) Experimental study of velocity fields in a human nasal fossa by laser anemometry. *Ann. Otol. Rhinol. Laryngol.* **92**, 231-236.
- [140] Haight J.S.J., Cole P. (1983) The site and function of the nasal valve. *Laryngoscope* **93**, 49-55.

- [141] Hornung D.E., Leopold D.A., Youngentob S.L., Sheehe P.R., Gagne G.M., Thomas F.D., Mozell M.M. (1987) Airflow patterns in a human nasal model. *Arch. Otolaryngol.* **113**, 169-172.
- [142] Tarabichi M., Fanous N. (1993) Finite Element Analysis of Airflow in the Nasal Valve. *Arch. Otolaryngol.* **119**, 638-642.
- [143] Elad D., Liebenthal R., Wenig B.L., Einav S. (1993) Analysis of air-flow patterns in the human nose. *Med. Biol. Eng. Comput.* **31**, 585-592.
- [144] Schreck S., Sullivan K.J., Ho C.M., Chang H.K. (1993) Correlations between flow resistance and geometry in a model of the human nose. *J. Appl. Physiol.* **75**, 1767-1775.
- [145] Hirschberg A., Roithmann R., Parikh S., Miljeteig S.H., Cole P. (1995) The airflow resistance profile of healthy nasal cavities. *Rhinology* **33**, 10-13.
- [146] Park K.I., Brucker C., Limberg W. (1997) Experimental studies of velocity fields in a model of human nasal cavity by DPIV. *Laser Anemometry Advances and Applications: Proceedings of the 7th International Conference*, edited by Ruck B., Leder A., Dopheide D., University of Karlsruhe, Karlsruhe, Germany.
- [147] Yu G., Zhang Z., Lessmann R. (1998) Fluid flow and particle diffusion in the human upper respiratory system. *Aerosol Sci. Tech.* **28**, 146-158.
- [148] Subramaniam R.P., Richardson R.B., Morgan K.T., Kimbell J.S., Guilmette R.A. (1998) Computational fluid dynamics simulations of inspiratory airflow in the human nose and nasopharynx. *Inhal. Toxicol.* **10**, 91-120.
- [149] Simmen D., Scherrer J.L., Heinz B. (1999) A dynamic and direct visualization model for the study of nasal airflow. *Arch. Otolaryngol.* **125**, 1015-1021.
- [150] Scott J.H. (1954) Heat regulating function of the nasal mucous membrane. *J. Laryngol. Otol.* **68A**, 308-317.
- [151] Webb P. (1951) Air temperatures in respiratory tracts of resting subjects in cold. *J. Appl. Physiol.* **4**, 378-382.
- [152] Cole P. (1954) Recordings of respiratory air temperature. *J. Laryngol. Otol.* **68A**, 295-307.
- [153] Drettner B., Falck B., Simon H. (1977) Measurements of air-conditioning capacity of nose during normal and pathological conditions and pharmacological influence. *Acta Oto-Laryngol.* **84**, 266-277.
- [154] Drettner B., Kumlien J. (1981) Experimental studies of the human nasal air-conditioning capacity. *Acta Oto-Laryngol.* **91**, 605-609.

- [155] Mcnicoll W.D., Scanlan S.G. (1979) Submucous resection - Treatment of choice in the nose-ear distress syndrome. *J. Laryngol. Otol.* **93**, 357-367
- [156] Acheson E.D., Cowdell R.H., Hadfield E., Macbeth R.G. (1968) Nasal cancer in woodworkers in furniture industry. *Brit. Med. J.* **2** (5605), 587-& ; Hadfield E.H., Macbeth R.G. (1971) Adenocarcinoma of ethmoids in furniture workers. *Ann. Oto. Rhinol. Laryn.* **80**, 699-& ; Black A., Evans J.C., Hadfield E.H., Macbeth R.G., Morgan A., Walsh M. (1974) Impairment of nasal mucociliary clearance in woodworkers in furniture industry. *Brit. J. Ind. Med.* **31**, 10-17 ; Acheson E.D., Winter P.D., Hadfield E., Macbeth R.G. (1982) Is nasal adenocarcinoma in the buckinghamshire furniture industry declining? *Nature* **299**, 263-265.
- [157] Balashazy I., Hofmann W., Heistracher T. (2003) Local particle deposition patterns may play a key role in the development of lung cancer. *J. Appl. Physiol.* **94**, 1719-1725.
- [158] Kepler G.M., Richardson R.B., Morgan K.T., Kimbell J.S. (1998) Computer simulation of inspiratory nasal airflow and inhaled gas uptake in a rhesus monkey. *Toxicol. Appl. Pharm.* **150**, 1-11.
- [159] <http://www.revisionrhinoplasty.net/breathingproblems.htm>
- [160] Roblin D.G., Eccles R. (2002) What, if any, is the value of septal surgery? *Clin. Otolaryngol.* **27**, 77-80.
- [161] Garcia G.J.M., Dickman R., Vieira M.N., Martins D.A. (2005) O fluxo de ar no nariz humano: o que sabemos e perspectivas futuras. Artigo submetido à Revista Brasileira de Otorrinolaringologia.

Apêndice A

On The Scaling of Mammalian Long Bones

Apêndice B

On singular probability densities generated by extremal dynamics

Apêndice C

On the thresholds, probability densities, and critical exponents of Bak-Sneppen-like models

Apêndice D

Asymmetric dynamics and critical behavior in the Bak-Sneppen model

Apêndice E

Absorbing-state phase transitions with extremal dynamics

Apêndice F

O fluxo de ar no nariz humano: o que sabemos e perspectivas futuras