

**Anomalias Gravitacionais em duas dimensões
via regularização implícita**

Leonardo Antônio Mendes de Souza

Agosto de 2005

Anomalias Gravitacionais em duas dimensões via regularização implícita

Leonardo Antônio Mendes de Souza

Orientadora: Profa. Maria Carolina Nemes

Co-orientador: Prof. Marcos Donizeti Sampaio

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE
FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito
parcial para a obtenção do grau de mestre em
Física.

Agosto de 2005

*Aos meus pais José de Souza e Maria da Paz,
às minhas irmãs e aos meus sobrinhos, que são a
razão da minha vida.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à minha família, a quem dedico as coisas boas que eu faço, pois eles me deram os melhores momentos da minha vida. Pai, mãe, Cláudia, Aline e sobrinhos obrigado mesmo.

Agradeço à Carolina e ao Marcos por me ensinarem tanto, profissionalmente e pessoalmente, desde que eu cheguei aqui.

À todos os colegas da UFMG. Em especial à Cacá, a única que me aguentava todos os dias (te adoro menina!), às gurias (Flávia, Adriana e Sabrina), que sempre me deram apoio e tomaram algumas cervejas comigo, ao Denis e ao Talarico, colegas de almoço que tanto escutaram minhas idéias sérias, Maurício, Gabriela, Antônio (que nos deu dicas importantes com relação à subtração dos infinitos), Juliana (Te devo uma camisa!), Eloy, Édson, João, Pablo, Clarissa, Júlia, Carlos e demais colegas.

Ao pessoal da República aqui de BH, Fernandão, Anderson e Thales. Me aguentar é difícil e vocês conseguem. Valeu por tudo.

Ao meus amigos de João Monlevade, que me arrumaram um NES para minha felicidade aqui em BH.

Aos meus amigos(as) de Viçosa, em especial o pessoal da física - Beth (valeu as marretas), Kekinho, Cabeça, Rafael (tirando o domingo, a semana que você veio foi doida demais!), Édiaflávia, Paulão, Estrangeiro, Jackson, Natália, Pablito (esse é o cara!), Érica, Alessandro da economia e o resto do pessoal.

And last, but not least, aos amigos da República Diagonal, mesmo os que não moram mais lá - Ktá, MYC, Dedé, Teteus, Chamex, Burrones, Jeônidas, Pablito (de novo?), Flash (meu fiiílho). Os 4 anos mais bem vividos da minha vida.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À minha família e aos amigos(as) que estão longe, nós podemos estar distantes mas as lembranças sempre nos deixarão próximos.

Resumo

Neste trabalho estudamos as anomalias gravitacionais (anomalia de Einstein e anomalia de Weyl) em duas dimensões através do método de regularização implícita (RI). Uma breve revisão das ferramentas matemáticas mínimas para tratarmos o problema é feita. Com isto em mãos, utilizamos o método de RI para calcular a amplitude relativa ao problema, e consequentemente as identidades de Ward. Mostramos que nossos resultados independem de ponto de subtração das integrais divergentes e que dois parâmetros dependentes de regularização permanecem até o final dos cálculos. O valor numérico destes parâmetros são estipulados através de argumentos sobre a própria simetria. Por fim apresentamos o resultado final das anomalias de Einstein e de Weyl.

Abstract

In this work we study the gravitational anomalies (Einstein anomaly and Weyl anomaly) in two dimensions through the method of implicit regularization (RI). We present a brief review on the minimal mathematical tools to treat the problem. After that, we use the method of RI to calculate the amplitude relative to the problem, and consequently the Ward identities. We show that our results do not depend on the subtraction point of the divergent integrals and that two regularization dependent parameters remain in the end of the calculations. The numeric values of these parameters are stipulated through symmetry arguments. Finally we show the final results about the Einstein and Weyl anomalies.

CONTEÚDO

| | |
|--|------------|
| Agradecimentos | ii |
| Resumo | iii |
| Abstract | iv |
| 1 Introdução | 4 |
| 2 Introdução à Relatividade Geral e à Teoria Quântica de Campos | 7 |
| 2.1 Relatividade Geral | 7 |
| 2.1.1 Relatividade Restrita | 8 |
| 2.1.2 Geometria Riemanniana | 12 |
| 2.1.3 Espaço Tangente | 19 |
| 2.1.4 Princípio da Ação | 22 |
| 2.2 Teoria Quântica de Campos | 26 |
| 2.2.1 Integrais de Caminho | 27 |
| 2.2.2 Método de Regularização Implícita | 34 |
| 3 O Problema | 40 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.1 | Introdução | 40 |
| 3.2 | A Lagrangeana | 41 |
| 3.3 | As identidades de Ward | 42 |
| 3.4 | A Amplitude | 45 |
| 4 | Cálculos das Integrais | 47 |
| 4.1 | Introdução | 47 |
| 4.2 | Cálculo de I_μ | 47 |
| 4.3 | Cálculo de $I_{\mu\nu}$ | 49 |
| 4.4 | Cálculo de $I_{\mu\nu\rho}$ | 50 |
| 4.5 | Cálculo de $I_{\mu\nu\rho\sigma}$ | 51 |
| 4.6 | Cálculo de I_{k^2} , $I_{k^2 k_\nu}$ e $I_{k^2 k_\nu k_\mu}$ | 53 |
| 5 | Resultados e discussão | 55 |
| 5.1 | Introdução | 55 |
| 5.2 | Fatores de forma T_1 a T_8 | 55 |
| 5.3 | Identidades de Ward | 56 |
| 5.4 | Análise dos resultados | 58 |
| 6 | Conclusões | 61 |
| A | Variações do campo e Invariâncias | 63 |
| A.1 | Invariância de Lorentz | 63 |
| A.2 | Invariância de Einstein | 64 |
| A.3 | Invariância de Weyl | 65 |
| B | Relações de consistência | 66 |

| | |
|----------|---|
| CONTEÚDO | 3 |
|----------|---|

| | |
|--|----|
| C Tabela das integrais em x utilizadas | 67 |
|--|----|

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Visualização do plano tangente a um ponto de uma esfera. . . | 20 |
| 2.2 | Representação diagramática da equação (2.79). | 32 |
| 2.3 | Representação diagramática da equação (2.80). | 33 |
| 3.1 | Diagrama de Feynman correspondente a este trabalho. | 40 |

Introdução

“Não entre em pânico!”

O guia do mochileiro das galáxias

Simetrias e suas correspondentes leis de conservação têm tido um papel importante na construção das interações fundamentais da natureza. Em linhas gerais, a simetria de uma lei da natureza significa que podemos efetuar uma transformação que é traduzida por uma mudança nas variáveis e/ou nas coordenadas espaço-temporais tal que as equações de movimento nessas novas variáveis não mudam sua forma, i.e. são covariantes.

Essas transformações de simetria podem ser genericamente classificadas como geométricas (se elas operam sobre as coordenadas espaço-temporais, por exemplo as transformações de Lorentz) ou internas (quando não afetam as coordenadas espaço temporais, por exemplo as transformações de calibre).

A descrição matemática das simetrias e sua implementação em teorias físicas é feita dentro da Teoria de Grupos. Em física, os Grupos de Lie, que descrevem transformações contínuas e finitas são de fundamental importância na construção do chamado Modelo Padrão das partículas elementares, onde a forma das interações é fortemente restrita por simetrias geométricas (covariância relativística) e pelas simetrias de calibre que essencialmente fixam todas as interações fundamentais (eletro-fracas, forte e gravitacional).

É importante contudo contextualizar uma dada teoria que foi construída com base em princípios de simetria, dentro do seu limite de validade. Isto é, temos que levar em conta que, como a teoria unificada da física não está pronta ainda e como muitas vezes é mais interessante trabalharmos com

modelos efetivos, é natural nos perguntarmos em que escala estamos assumindo tal simetria (macroscópica/microscópica, alta/baixa temperatura, etc.). Podemos ainda nos perguntar se a simetria se dá a nível clássico ou quântico ou ainda se ela é exata, aproximada ou quebrada.

No caso específico de quebra de simetria, essa pode ser basicamente de 3 tipos: quebra explícita, quebra espontânea ou quebra quântica de simetria (ou anômala) assunto que será tratado nessa dissertação. Embora a presença de simetrias numa teoria física implique na ausência de estruturas complicadas e irrelevantes, sua quebra é necessária para descrevermos a variedade de configurações ou soluções desta teoria. De fato, os fenômenos físicos reais raramente traduzem o grau de regularidade presente na teoria física que o descreve. Por exemplo, embora a lei de Newton da gravitação possua simetria esférica, as órbitas dos corpos celestes em geral são cônicas (elipses, hipérbolas, parábolas ou círculos). Neste caso a quebra da simetria esférica é conseguida através de condições iniciais diferentes.

Particularmente, a teoria quântica de campos (TQC) é simétrica sob transformações de Lorentz e, portanto, é bem comportada num espaço-tempo plano. Podemos citar também a eletrodinâmica quântica (QED) como um exemplo de teoria de calibre; na QED, usando argumentos de simetria de calibre, obtemos a conservação da carga elétrica e esta teoria é livre de anomalias de gauge. De fato, esta característica é crucial na prova da renormalizabilidade da teoria e conseqüentemente do seu poder de predição enquanto teoria física. Porém, a TQC e a relatividade geral (RG) (a teoria de gravitação relativística) não seguem os mesmos tipos de transformações e nós ainda não possuímos uma teoria que unifique as duas. A primeira aproximação a ser feita é usar um campo quantizado em um “fundo” gravitacional (espaço-curvo). O caso particular de modelos bi-dimensionais de férmions acoplados à gravitação tem sido extensivamente usado como modelo “brinquedo” para o entendimento de anomalias gravitacionais e de calibre [2]; eles também são importantes devido ao fato de que, se existem anomalias em 2 dimensões, elas também estão presentes em $4k + 2$ dimensões ($k = 1, 2, 3 \dots$) como mostrado por Gaumé e Witten na referência [1].

A gravitação vista como teoria de gauge também sofre de anomalias. No caso quântico a lei de conservação clássica do tensor energia-momento pode ser quebrada (anomalia de Einstein), ou pode existir uma parte anti-simétrica

do tensor energia-momento (anomalia de Lorentz) ou ainda o traço deste tensor pode não ser nulo (anomalia de Weyl) ([1], [9]). O estudo das anomalias gravitacionais começou com o trabalho de Alvarez-Gaumé e Witten em 1983 [1]. Vários métodos foram empregados para o estudo das anomalias, tanto tratamentos perturbativos [3]-[4] quanto não-perturbativos [2].

Em abordagens perturbativas, é usual tratar as anomalias de modo que o próprio método de regularização escolha onde a anomalia deve ser quebrada. Por exemplo, quando estudamos o modelo de Schwinger quirral (que iremos discutir brevemente neste trabalho) através do método de regularização dimensional, este escolhe *a priori* que a anomalia esteja na parte axial do tensor de polarização. Esta não é uma linha que gostaríamos de seguir, mas sim que a própria física implicasse onde a simetria fosse quebrada ou não. Esta idéia foi proposta por Jackiw [11], e nosso método de regularização implícita é a arena ideal para a implementá-la matematicamente. Ou seja, estamos usando um método de regularização que deixa as leis de conservação intactas até o término dos cálculos e, somente no final escolhemos os valores para os parâmetros arbitrários que surgem em todos os métodos de regularização.

Iremos organizar nosso trabalho da seguinte maneira: no capítulo 2 iremos apresentar as ferramentas mínimas necessárias relativas à relatividade geral e à teoria quântica de campos; no capítulo 3 vamos apresentar o problema a ser estudado. Com isso, iremos calcular as integrais relativas ao trabalho, utilizando a nosso método de regularização, no capítulo 4. No capítulo 5, iremos apresentar os resultados e discutí-los. Finalmente, no capítulo 6, vamos apresentar as nossas conclusões.

Introdução à Relatividade Geral e à Teoria Quântica de Campos

*“We have some rules to follow
That and these
These and those
No one Knows”*

Queens of the Stone Age

Neste trabalho iremos lidar com férmions acoplados a um campo gravitacional clássico (Einsteiniano). Neste capítulo vamos apresentar as ferramentas mínimas necessárias para estudar um campo fermiônico quântico minimamente acoplado à gravitação clássica.

2.1 Relatividade Geral

A relatividade geral, teoria da gravitação formulada por Einstein em 1915, é, hoje, a melhor teoria capaz de descrever essa interação e vem sendo comprovada por experiências e fazendo novas previsões. Além disso, ela é, na opinião de muitos, a teoria mais bela de toda a física, onde a interação é descrita pela curvatura do espaço-tempo, contrariamente à maior parte das teorias para os quais a cinemática e a dinâmica são completamente independentes; a relatividade geral não as distingue, o que torna, por exemplo, o problema de sua quantização tão complicado. O princípio básico da RG é o *princípio de equivalência*, que se baseia na igualdade entre massa inercial e

gravitacional. Em outras palavras, podemos dizer: *a cada ponto do espaço-tempo em um campo gravitacional arbitrário é sempre possível escolher um sistema localmente inercial, tal que, nesta pequena região, as leis da física são governadas pela relatividade restrita.* O segundo princípio da RG é o princípio de covariância geral, que nos diz que uma lei física deve ser escrita da mesma “forma” em qualquer sistema de coordenadas. A implementação matemática desse princípio implica no uso de *tensores* para escrevermos as equações. O espaço-tempo na RG é caracterizado por uma geometria especial, a *geometria Riemanniana*[8]. Para estudarmos os férmions em um espaço-tempo curvo, teremos que estudar o espaço tangente (TF, *tangent frame*) a este, e como o TF se relaciona ao espaço-tempo. Para derivarmos as equações de movimento encontraremos a ação clássica e a partir dela as simetrias a serem estudadas.

Antes de falarmos sobre a relatividade geral, iremos estudar a relatividade restrita e os motivos que levaram Einstein a formular a relatividade geral.

2.1.1 Relatividade Restrita

2.1.1.1 Transformações de Lorentz

A física, no final do século XIX / começo do século XX, sofria de algumas inconsistências (catástrofe do ultravioleta, existência/inexistência do “éter”, etc.). O éter luminífero foi proposto devido ao fato de a luz possuir caráter ondulatório, e, segundo a mecânica Newtoniana. Uma onda com uma velocidade finita necessita de um meio para se locomover, daí propuseram o éter, pois a luz para vir do Sol para a Terra teria que atravessar o vácuo, fato inconcebível na época. Porém, os experimentos discordavam totalmente do conceito do éter. Então, havia duas alternativas: ou Newton estava correto e a teoria de Maxwell estava errada, ou Maxwell estava certo e Newton errado. Einstein, em 1905, decidiu seguir a teoria de Maxwell. Para isso ele teve que reestruturar totalmente o espaço-tempo newtoniano (que é absoluto e tempo e espaço são independentes), pois este é incompatível com as equações de Maxwell.

A diferença entre o espaço-tempo Newtoniano e o Maxwelliano está na definição de distância. Para Newton, tempo e espaço são independentes,

portanto temos duas “distâncias”:

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 && \text{(distância espacial)} \\ dt &= dt && \text{(distância temporal)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Já na relatividade restrita temos somente uma distância (pois espaço e tempo estão interligados em um *continuum*):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad \text{(distância espaço-temporal)} \quad (2.2)$$

onde c é a velocidade da luz.

É importante notar que a distância é um escalar, portanto possui o mesmo valor não importa o sistema de coordenadas utilizado, ou seja, deve ser invariante sobre uma transformação de coordenadas, e isso impõe o tipo de transformação relativo à mecânica Newtoniana (transformações de Galileu) e relativo à relatividade restrita (transformações de Lorentz). Se um referencial inercial se move com velocidade constante em relação a outro (com velocidade na direção x) e exigimos que a distância seja invariante ($dl'^2 = dl^2$ e $dt' = dt$ para Newton e $ds'^2 = ds^2$ na relatividade) temos:

Transformações de Galileu - espaço e tempo Newtoniano

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Transformações de Lorentz - espaço-tempo Relativístico

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (2.4)$$

As transformações de Lorentz (TL) impõem restrições às leis físicas. Elas nos dizem que, quando tratamos de partículas livres e de luz, não há distinção entre referenciais inerciais, ou seja, as partículas livres obedecem as mesmas leis em todo sistema inercial. Esse princípio de simetria (simetria de Lorentz) pode ser escrito da seguinte forma: *Todas as leis da física são invariantes sob transformações de Lorentz*. A partir desse princípio e do princípio de constância da velocidade da luz, Einstein assumiu que a mecânica Newtoniana estava errada e, conseqüentemente, a teoria eletromagnética de Maxwell estava correta.

2.1.1.2 Tensores de Lorentz

Podemos escrever o elemento de distância como:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.5)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Vamos definir o seguinte 4-vetor:

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z \quad (2.7)$$

e o vetor covariante relativo à esse:

$$x_0 \equiv ct, \quad x_1 \equiv -x, \quad x_2 \equiv -y, \quad x_3 \equiv -z. \quad (2.8)$$

As quantidades x^μ e x_μ são chamadas, respectivamente, componentes contravariante e covariante do 4-vetor posição. Então, em termos de x^μ , temos:

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu.$$

A partir de x^μ as transformações de Lorentz podem ser escritas da

seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 x'^0 &= \frac{x^0 - vx^1}{\sqrt{1-v^2}} \\
 x'^1 &= \frac{x^1 - vx^0}{\sqrt{1-v^2}} \\
 x'^2 &= x^2 \\
 x'^3 &= x^3.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Nestas equações estamos usando unidades onde $c = 1$. Podemos expressar (2.9) da seguinte forma:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{2.10}$$

onde temos:

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-v^2} & -v/\sqrt{1-v^2} & 0 & 0 \\ -v/\sqrt{1-v^2} & 1/\sqrt{1-v^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

A TL acima possui essa forma pois a velocidade relativa entre os sistemas é somente no eixo x . Em geral as transformações de Lorentz possuem 6 parâmetros: 3 componentes para as velocidades relativas e 3 para as rotações dos eixos.

Agora, vamos introduzir a definição de tensores. Tensores são *entidades matemáticas que possuem um tipo de transformação bem definida*. Podemos classificar os tensores como (no caso desta seção, *tensores de Lorentz*):

- escalar (tensor de ordem 0): $\Phi'(x') = \Phi(x)$ (então, um escalar será sempre invariante)
- vetor contravariante (tensor de ordem 1): $V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(x)$
- vetor covariante: $V'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\nu V_\nu(x)$
- tensor misto: $T'^{\mu\nu}_\sigma(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda_\sigma^\gamma T^{\alpha\beta}_\gamma(x)$

e assim por diante.

Em particular, a lei de transformação para o vetor posição é:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad (2.12)$$

$$x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu} \Rightarrow x^{\nu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x'^{\mu}. \quad (2.13)$$

Derivando as duas últimas equações temos:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad (2.14)$$

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}. \quad (2.15)$$

Esta forma de representar as TL serão úteis, pois as transformações de coordenadas gerais serão do mesmo tipo, porém no espaço-tempo curvo.

O operador gradiente é definido como:

$$\partial_{\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right). \quad (2.16)$$

Usando a regra da cadeia temos, a partir da representação da TL:

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}. \quad (2.17)$$

2.1.2 Geometria Riemanniana

A partir das TL descritas na seção anterior, Einstein deduziu a mecânica e a cinemática relativísticas, ou seja, reformulou a mecânica Newtoniana quase por completo. O problema era a força gravitacional. A interação da gravitação de Newton se propaga com velocidade infinita; se o Sol desaparecesse de repente, nós, na Terra, sentiríamos esse efeito instantaneamente. Porém, a relatividade não permitia que isso acontecesse, a interação deveria se propagar no máximo à velocidade da luz. Einstein estava ciente disso e passou alguns anos tentando unir a relatividade restrita com a gravitação. O grande passo dado por ele foi pensar o seguinte: uma pessoa em um elevador, parado na Terra, não consegue diferenciar seu movimento de uma pessoa em um foguete acelerado para cima (com aceleração igual à da gravidade terrestre) no espaço livre (ou uma pessoa em queda livre na terra não

consegue diferenciar seu movimento de uma pessoa solta no espaço livre). Ou seja, é equivalente a Terra atrair o elevador ou o elevador atrair a Terra. Porém, devido ao formato da Terra, pessoas em lugares diferentes deveriam estar acelerando em direções diferentes, mas mantendo a mesma distância entre elas. Então, Einstein percebeu que essa equivalência estaria correta se o espaço-tempo fosse curvo. Os objetos se moveriam em linha reta no espaço-tempo curvo, porém suas trajetórias pareceriam curvas devido a essa curvatura.

Utilizando o princípio de equivalência descrito acima, Einstein (com a ajuda de Marcel Grossman) desenvolveu a teoria da Relatividade Geral, a teoria da gravitação que respeitava a invariância da velocidade da luz. Para isso, eles estudaram a teoria de espaços curvos e a dinâmica nesses espaços, que vamos discutir brevemente agora.

2.1.2.1 Transformações de coordenadas gerais e Tensores

Na seção anterior trabalhamos com coordenada cartesianas, pois no espaço plano a métrica $\eta^{\mu\nu}$ e as TL assumem sua forma mais simples. Porém, em um espaço curvo nem sempre é conveniente trabalharmos com coordenadas cartesianas. Portanto, iremos trabalhar com *coordenadas gerais* para descrever pontos nesse espaço. Essas coordenadas podem ser escolhidas de acordo com qualquer regra, *desde que seja bem definida*. Usaremos $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ para essas coordenadas. Uma mudança infinitesimal nas coordenadas gerais nos dá:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.18)$$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu. \quad (2.19)$$

Que são exatamente da mesma forma das TL descritas na seção anterior, porém as derivadas acima não são necessariamente constantes (como para TL). A lei de transformação descrita nas equações(2.18-2.19) são chamadas *transformações de coordenadas gerais* (TCG).

Assim, chegamos à definição mais geral de tensores. Eles são os objetos matemáticos que se transformam de acordo com TCG. Podemos classificar os tensores como:

- escalar (tensor de ordem 0): $\Phi'(x') = \Phi(x)$ (então, um escalar será sempre invariante)
- vetor contravariante (tensor de ordem 1): $V'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu}(x)$
- vetor covariante: $V'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} V_{\nu}(x)$
- tensor misto: $T'^{\mu\nu}_{\sigma}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\sigma}} T^{\alpha\beta}_{\gamma}(x)$

e assim por diante.

2.1.2.2 Métrica

Se não há campo gravitacional, escrevemos um elemento infinitesimal de espaço-tempo por:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (2.20)$$

Caso haja um campo gravitacional, a equação acima somente descreverá esse elemento para uma pequena região. Na vizinhança dessa região, o sistema será acelerado (pelo campo gravitacional) e o elemento infinitesimal de espaço-tempo será dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.21)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço Riemanniano e descreve o campo gravitacional. Por exemplo, temos que em coordenadas esféricas: $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$, o que implica em um tensor métrico da seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

O tensor acima é a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas, ou seja, não é uma métrica de um espaço curvo. Um exemplo de métrica com curvatura é a métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2). \quad (2.23)$$

O tensor métrico possui algumas propriedades bastante úteis, como:

- é um tensor simétrico, ou seja: $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$
- possui um tensor inverso, também simétrico: $g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta_{\mu}^{\sigma}$
- $g_{\mu\nu}$ é usado para subir e descer índices de tensores: $g_{\mu\nu}A^{\nu} = A_{\mu}$, $g_{\mu\epsilon}g_{\sigma\delta}A^{\delta\epsilon} = g_{\mu\epsilon}A_{\sigma}^{\epsilon} = A_{\mu\sigma}$, e assim por diante.

2.1.2.3 Derivada Covariante

Uma quantidade útil em relatividade geral é o símbolo de Christoffel, definido por:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \quad (2.24)$$

onde a vírgula representa derivação em relação à variável relativa ao símbolo que a segue ($\phi_{,\mu} = \partial_{\mu}\phi$). Mas o símbolo de Christoffel não é um tensor sob transformações gerais de coordenadas. A transformação correspondente ao símbolo de Christoffel é:

$$\Gamma'_{\alpha\beta}{}^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\beta}} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} - \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\nu}} \quad (2.25)$$

que segue da transformação gerais de coordenadas do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Note que a diferença entre (2.24) e a lei de transformação de um tensor é o segundo termo da direita. O símbolo de Christoffel é a conexão afim do espaço Riemanniano, se $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = 0$ temos que o espaço é plano. Para a descrição do espaço tangente, usaremos outro tipo de conexão (no caso, a conexão de spin, w_{bc}^a).

Uma das razões para usar objetos como o símbolo de Christoffel é que eles podem ser utilizados para construir tensores por diferenciação de outros tensores. Diferenciando um tensor transformado em relação a uma coordenada também transformada, obtemos:

$$\frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + A^{\alpha} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}}, \quad (2.26)$$

pois a transformação para o operador diferencial é (usando a regra da cadeia):

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}.$$

Se escrevermos:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha \quad (2.27)$$

isto é um tensor de ordem 2, caso A^μ seja um tensor. Apesar de $A_{,\beta}^\mu$ e $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ não serem tensores, a combinação deles (2.26) é um tensor. O tensor construído a partir de (2.26) é chamado de *derivada covariante* e pode ser indicada (no caso de uma derivação covariante em relação à coordenada x^μ) por ponto-e-vírgula ($;\mu$), por D_μ ou pelo símbolo ∇_μ :

$$A^\nu_{;\mu} = \nabla_\mu A^\nu = D_\mu A^\nu = A^\nu_{,\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu A^\alpha. \quad (2.28)$$

Uma propriedade importante das derivadas covariantes é que, em geral, elas não comutam, ou seja, $A_{\beta;\mu;\nu} \neq A_{\beta;\nu;\mu}$.

2.1.2.4 Coordenadas Geodésicas

Como dito antes, é sempre possível encontrar coordenadas tal que, em um dado ponto, a métrica é a do espaço plano (ou métrica de Minkowski). Seja a métrica de um sistema de coordenadas igual a $g_{\mu\nu}(x)$. É conveniente, como veremos a seguir, introduzir um novo sistema de coordenadas por uma transformação linear $x'^\mu = b^\mu_\nu x^\nu$ onde b^μ_ν são constantes. Os valores dessas constantes podem ser escolhidos para obtermos $g'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ em um ponto. Como temos:

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} \quad (2.29)$$

a métrica no novo sistema de coordenadas será igual a $\eta^{\mu\nu}$ em um ponto se

$$\eta^{\mu\nu} = b^\mu_\alpha b^\nu_\beta g^{\alpha\beta}. \quad (2.30)$$

Este é um sistema de 10 equações para 16 constantes desconhecidas b^μ_ν , ou seja, sempre existe uma solução. A nova métrica só é igual a $\eta^{\mu\nu}$ no ponto em questão, uma transformação geral vem de (2.28). Se $g^{\mu\nu}$ é constante em todo o espaço, então ele pode sempre ser transformado em $\eta^{\mu\nu}$ em qualquer ponto. Mas sempre podemos fazer uma transformação de coordenadas, qualquer que seja a forma de $g^{\mu\nu}$, tal que $g'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ em um ponto do espaço.

As coordenadas x'^μ que, em um dado ponto P, fazem com que o símbolo de Christoffel e as primeiras derivadas da métrica sejam iguais a zero (ou seja, que a métrica seja localmente plana) são chamadas *coordenadas geodésicas*.

O nome é devido ao fato que as equações de movimento de uma partícula colocada no ponto P permanece em repouso ou com velocidade constante vistos a partir das coordenadas geodésicas. Isso significa que o sistema de coordenadas está instantaneamente em queda livre com a mesma aceleração da partícula. É importante notar que as coordenadas são geodésicas somente por um instante, pois as derivadas da métrica são iguais a zero somente em um ponto P do espaço-tempo.

2.1.2.5 Transporte Paralelo

Podemos entender melhor o significado da derivada covariante se introduzirmos o conceito de transporte paralelo de um vetor. O transporte paralelo é definido como sendo o transporte de um vetor sobre uma geodésica, paralelamente a ele mesmo, por uma pequena distância. Podemos escrever o transporte paralelo como sendo:

$$\delta a^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\beta\nu} a^\nu \delta x^\beta$$

onde estamos transportando o vetor a^ν por uma distância δx^β . Se $\delta a^\alpha \neq 0$, temos que o espaço é curvo, pois durante o transporte do vetor, houve uma alteração do mesmo.

Então, qual a conexão do transporte paralelo com as derivadas covariantes? Se tentarmos definir da maneira usual uma derivada de um tensor teremos:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A^\alpha(x + dx) - A^\alpha(x)}{dx^\beta}$$

Porém, o numerador não é um tensor. A diferença de dois tensores calculada no mesmo ponto é um tensor, mas a diferença calculada em pontos diferentes não. Para termos um tensor no numerador, é necessário transportar paralelamente antes de fazermos a subtração:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A^\alpha(x + dx) - A^\alpha(x) - \delta A^\alpha}{dx^\beta} = \frac{A^\alpha(x + dx) - A^\alpha(x)}{dx^\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A^\nu \frac{\delta x^\mu}{dx^\beta}. \quad (2.31)$$

A expressão acima é a definição de derivada covariante. Então, a derivada covariante (transporte paralelo) nos indica se o espaço é curvo ou não. Se não há mudança no tensor transportado paralelamente e, conseqüentemente, a derivada covariante é a derivada convencional, o espaço é plano. Senão temos que o espaço é curvo.

2.1.2.6 Tensor de Curvatura de Riemann

Como dissemos antes, as derivadas covariantes não comutam, ou seja $A_{\beta;\mu;\nu} \neq A_{\beta;\nu;\mu}$. Vamos expandir a derivada segunda covariante $A_{\beta;\mu;\nu}$, usando a definição de ∇_μ :

$$A_{\beta;\mu;\nu} = A_{\beta;\mu,\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^\sigma A_{\sigma;\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_{\beta;\sigma} \quad (2.32)$$

e como A_β é um vetor, temos:

$$A_{\beta;\mu;\nu} = [A_{\beta,\mu,\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha A_{\alpha,\mu} - \Gamma_{\beta\nu}^\sigma A_{\sigma,\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma (A_{\beta,\sigma} - \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha A_\alpha)] - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha A_\alpha + \Gamma_{\beta\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha A_\alpha. \quad (2.33)$$

A expressão para $A_{\beta;\nu;\mu}$ é a mesma trocando μ por ν . A diferença fica então:

$$A_{\beta;\mu;\nu} - A_{\beta;\nu;\mu} = (-\Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha) A_\alpha + (\Gamma_{\beta\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha) A_\alpha. \quad (2.34)$$

Podemos reescrever essa equação como:

$$A_{\beta;\mu;\nu} - A_{\beta;\nu;\mu} = R_{\beta\mu\nu}^\alpha A_\alpha \quad (2.35)$$

onde

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = -\Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha. \quad (2.36)$$

O lado esquerdo de (2.35) é um tensor de 4ª ordem. Ele é chamado *tensor de curvatura de Riemann* (TR). Podemos descer o índice α do TR para obtermos um tensor puramente covariante, $R_{\alpha\beta\mu\nu}$. O TR é o único tensor que pode ser construído com combinações lineares das segundas derivadas da métrica. Por contração do primeiro e do último índice de $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ obtemos:

$$R_{\beta\mu} \equiv R_{\beta\mu\alpha}^\alpha \quad (2.37)$$

que é chamado *tensor de Ricci*, que é simétrico ($R_{\beta\mu} = R_{\mu\beta}$). Fazendo mais uma contração obtemos um escalar:

$$R \equiv R^\beta_\beta \quad (2.38)$$

que é chamado *escalar de curvatura*.

O tensor de Riemann satisfaz algumas identidades algébricas (que reduz o número de componentes independentes do TR de 256 para 20), e também algumas identidades diferenciais:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu;\sigma} + R^\alpha_{\beta\nu\sigma;\mu} + R^\alpha_{\beta\sigma\mu;\nu} = 0 \quad (2.39)$$

$$(R^\mu_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^\mu_{\nu}R)_{;\mu} = 0 \quad (2.40)$$

que são chamadas *identidades de Bianchi*.

Qual a relação entre $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ e a curvatura? Em um espaço plano temos que ter, obrigatoriamente, $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0$ (e conseqüentemente $\Gamma^\alpha_{\beta\nu} = 0$), devido ao fato de um vetor transportado paralelamente não poder depender do caminho seguido. Ou seja, qualquer dependência de caminho em um transporte de vetores é uma indicação de curvatura. Utilizando uma analogia com o eletromagnetismo, temos que $g_{\mu\nu}$ faz um papel tipo o do vetor potencial A_μ , e o tensor de curvatura ($R^\alpha_{\beta\mu\nu}$) faz um papel análogo ao de \mathbf{E} e \mathbf{B} na eletrodinâmica.

Em suma: *Existe um campo gravitacional presente se, e somente se, $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ possui componentes diferentes de zero.*

Observação: Podemos ter $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \neq 0$ e $R^\alpha_{\mu\nu\beta} = 0$, como por exemplo no caso de escrevermos a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas.

2.1.3 Espaço Tangente

Neste trabalho iremos estudar campos fermiônicos em um espaço curvo. Os espinores, no entanto, não se transformam de acordo com transformações de coordenadas gerais (grupo de difeomorfismo), como é necessário em RG. Os espinores obedecem ao grupo de Lorentz, não ao grupo de difeomorfismo. Para resolvermos essa dificuldade, utilizamos o formalismo das *tetradas* (ou *vierbein* para 4-D e *vielbein* em 2-D), que, através do princípio de equivalência, relaciona o espaço tangente (TF) a um ponto do espaço-tempo [9]. Os vielbeins, são os vetores base do espaço tangente, conseqüentemente eles mudam de ponto a ponto. Essa mudança é feita através de uma conexão afim, no caso a conexão de spin. Podemos fazer analogia de um plano tangente a

uma esfera através da figura ¹ (2.1).

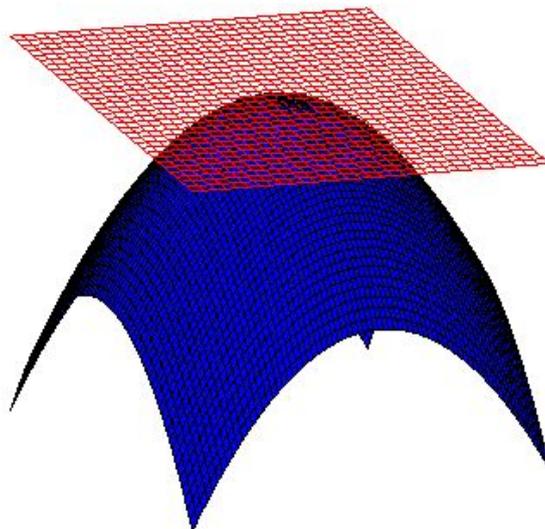


Figura 2.1: Visualização do plano tangente a um ponto de uma esfera.

2.1.3.1 Vielbein

Devido ao princípio de equivalência nós podemos sempre achar um conjunto de coordenadas $\xi_{x_0}^a$ (onde $a = 1, \dots, m = \dim M$ e M é o número de dimensões do espaço-tempo) que é localmente inercial em x_0 . Então a métrica (2.28) é dada por:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} e^a_{\mu}(x) e^b_{\nu}(x) \quad (2.41)$$

onde

$$e^a_{\mu}(x) = \partial_{\mu} \xi_{x_0}^a(x). \quad (2.42)$$

¹No plano, em vermelho, é onde iremos trabalhar com os férmions. Fica fácil visualizar que a cada ponto da esfera existe um plano tangente diferente.

Em um outro ponto diferente de x_0 temos que escolher outro conjunto de coordenadas, a menos que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. A quantidade $e^a{}_\mu$ é chamada **vielbein** (no caso 2-D). Iremos usar índices gregos para o sistema de coordenadas original, e índices latinos para o novo sistema de coordenadas (localmente inercial).

Definimos a inversa do vielbein por:

$$E_a{}^\mu(x) = \eta_{ab} g^{\mu\nu}(x) e^b{}_\nu(x). \quad (2.43)$$

O vielbein e sua inversa satisfazem às seguintes equações:

- $e^a{}_\mu E_b{}^\mu = \delta^a_b$
- $E_a{}^\mu e^a{}_\nu = \delta^\mu_\nu$
- $\eta_{ab} = g_{\mu\nu}(x) E_a{}^\mu(x) E_b{}^\nu(x)$

Definimos também o determinante do vielbein:

$$e = |\det e^a{}_\mu| = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} = \sqrt{|g|}. \quad (2.44)$$

Podemos também relacionar qualquer campo tensorial do sistema de coordenadas com o espaço tangente através dos vielbeins:

- $V^a = e^a{}_\mu(x) V^\mu(x)$
- $V_b = V_\mu(x) E_b{}^\mu$
- e assim sucessivamente.

Ou seja, usamos os vielbeins e suas inversas para relacionar um tensor de um sistema de coordenadas com um referencial tangente e vice-versa.

2.1.3.2 Conexão de spin e Curvatura

Podemos também, assim como fizemos com o símbolo de Christoffel (que é a conexão para o espaço Riemanniano), definir a conexão afim referente ao espaço tangente. Chamada de *conexão de spin*:

$$\omega^a{}_b = \omega^a{}_{b\mu} dx^\mu. \quad (2.45)$$

A derivada covariante para o espaço-tangente é definida de forma análoga ao que foi feito para o espaço de coordenadas, ou seja:

$$\nabla_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega^a_{b\mu} V^b. \quad (2.46)$$

A curvatura é também dada pelo fato de as derivadas covariantes não comutarem e podemos mudá-la para o sistema de coordenadas com a ajuda dos vielbeins:

$$E_a^\alpha R^a_{bcd} e^b_\beta e^c_\mu e^d_\nu = R^\alpha_{\beta\mu\nu}. \quad (2.47)$$

Ou seja, através da conexão de spin podemos relacionar cada espaço tangente (existe um para cada ponto do espaço de coordenadas) ao espaço de coordenadas.

2.1.4 Princípio da Ação

Para derivarmos as equações de movimento de um sistema físico nós utilizamos o princípio de mínima ação, que significa que a ação se mantém estacionária com relação a pequenas variações do campo. Vamos primeiramente fazer uma abordagem sem incluir espinores, depois iremos encontrar a ação a ser abordada neste trabalho.

2.1.4.1 Ação de Einstein-Hilbert

A teoria da relatividade geral descreve a dinâmica da geometria, daí o termo *geometrodinâmica* dado por Wheeler. A ação correspondente é dada por:

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^m x \sqrt{|g|} R \quad (2.48)$$

onde fazemos $c = 1$ e $\kappa = 8\pi G$, G é a constante gravitacional, R é o escalar de curvatura e o fator $1/2\kappa$ é escolhido para reproduzir a teoria no limite Newtoniano (ou seja, limite de campo gravitacional fraco).

Variando a métrica arbitrariamente, com a variação se anulando nos contornos de integração, ou seja

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g_{\mu\nu}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x), \quad \delta g_{\mu\nu}(x) \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \text{contorno}, \quad (2.49)$$

aplicamos o princípio de mínima ação (utilizando as fórmulas de variações

dos campos contidas no apêndice A), $\delta S_{EH} = 0$, para obtermos as equações de movimento. Elas são:

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^m x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.50)$$

e, assim, temos a equação de Einstein (sem matéria):

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0. \quad (2.51)$$

O tensor $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$ é usualmente chamado *tensor de Einstein*.

2.1.4.2 Tensor Energia-Momento

Agora, iremos incluir matéria considerando a ação:

$$S_M = \int d^m x \sqrt{|g|} L_M, \quad (2.52)$$

onde L_M é a densidade de Lagrangeana de matéria.

A mudança na densidade de matéria sob uma variação $\delta g_{\mu\nu}$ define o *tensor energia-momento* $T^{\mu\nu}$ do sistema:

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int d^m x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}; \quad \frac{\delta(\sqrt{|g|} L_M)}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}. \quad (2.53)$$

As seguintes propriedades valem:

- $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, que segue da simetria de $\delta g_{\mu\nu}$
- $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, o tensor energia-momento é conservado covariantemente, o que segue das identidades de Bianchi (2.39) e da relação entre $T^{\mu\nu}$ e $G^{\mu\nu}$.

Agora, consideremos uma ação composta de um campo gravitacional e um campo de matéria. Deste modo:

$$S = S_{EH} + S_M \quad (2.54)$$

de modo que o princípio de mínima ação fica:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^m x \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu} + \kappa T^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.55)$$

Fazendo $\delta S = 0$ temos a equação de Einstein com matéria:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu}. \quad (2.56)$$

O que (2.55) nos diz? Que a matéria/energia diz *como* a geometria do espaço-tempo deve se alterar, e o espaço-tempo por sua vez diz *como* a matéria/energia deve se mover nele. Nesta equação está visível a característica altamente não-linear das equações da relatividade geral (característica que está explícita no fato de $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ ser não-linear em $g_{\mu\nu}$).

2.1.4.3 Ação Fermiônica

Quando trabalhamos com férmions temos que expressar a ação em termos dos vielbeins. A variação dos vielbeins se dá por:

$$e^a{}_\mu(x) \rightarrow e^a{}_\mu(x) + \delta e^a{}_\mu(x), \quad \delta e^a{}_\mu(x) \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow \text{contorno}, \quad (2.57)$$

e o tensor energia-momento do sistema fermiônico é definido por:

$$\delta S_M = \int d^m x e T_a^\mu \delta e^a{}_\mu; \quad \frac{\delta S_M}{\delta e^a{}_\mu} = e T_a^\mu. \quad (2.58)$$

O tensor T_a^μ representa um tensor contravariante coordenado e um vetor covariante de Lorentz (devido aos índices latinos e gregos, respectivamente). Ele é relacionado a $T^{\mu\nu}$ por:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_a^\mu E^{a\nu} + T_a^\nu E^{a\mu}). \quad (2.59)$$

A ação deve respeitar dois princípios:

- Ela deve ser covariante, ou seja, todos os campos devem ser tratados como escalares, exceto pela tetrada;
- A ação deve ser invariante sob Transformações de Lorentz.

Para construir uma ação invariante de Lorentz, precisamos de uma derivada covariante de um espinor que também seja. Podemos conseguir isto através das tetradas:

$$D_a \psi = E_a^\mu D_\mu \psi. \quad (2.60)$$

Onde $D_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu$ e ω_μ é a conexão de spin (D_μ é a derivada covariante no espaço tangente).

No formalismo espinorial a métrica é constante, η_{ab} , e também as matrizes de Dirac γ^a . Quando referimos o espaço tangente ao sistema coordenado, obtemos matrizes de Dirac dependentes em x :

$$\gamma^\mu(x) = E_a^\mu(x) \gamma^a. \quad (2.61)$$

A ação fermiônica (para férmions não-massivos com uma dada quiralidade $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$) é, finalmente, dada por:

$$S_\psi = \int d^m x \, e \, L_\psi = \int d^m x \, \frac{1}{2} \, e \, \bar{\psi} \, i \, (\gamma^\mu D_\mu - \overleftarrow{D}_\mu \gamma^\mu) P_\pm \psi. \quad (2.62)$$

2.1.4.4 Invariâncias

Nós queremos estudar as simetrias clássicas da *ação fermiônica* (2.61). Através das transformações infinitesimais (ou variações) dadas no Apêndice A, encontramos as seguintes invariâncias (com relação a cada variação mencionada):

1. $\delta_\alpha^L S_\psi = 0 \Leftrightarrow T^{ab} = T^{ba}$, ou seja, *o tensor energia-momento é simétrico* (invariância de Lorentz);
2. $\delta_\epsilon^c S_\psi = 0$ e $\delta_\alpha^L S_\psi = 0 \Rightarrow \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, ou seja, *o tensor energia-momento é conservado covariantemente* (invariância de Einstein);
3. $\delta_\sigma^W S_\psi = 0 \Leftrightarrow T^\mu{}_\mu = 0$, ou seja, *o tensor energia-momento possui traço nulo* (invariância de Weyl).

As relações acima são devidas a transformações infinitesimais de rotações, transformações infinitesimais de coordenadas e transformações infinitesimais de escala respectivamente (ver Apêndice A).

Sumário

Agora de posse da ação e das invariâncias a serem estudadas, podemos discutir um pouco sobre como essas ferramentas irão nos ajudar neste trabalho. Antes um breve resumo: primeiro, estudamos as transformações de Lorentz e a relatividade restrita; depois revisamos brevemente o formalismo utilizado na RG, inclusive como a curvatura do espaço-tempo entra nesta teoria. Terminado o estudo da geometria Riemanniana, estudamos o formalismo das *tetradas* (que seguem as TL), e as ações relativas ao espaço tangente. Ou seja, iremos estudar férmions acoplados a um campo gravitacional (espinores em um espaço curvo). Porém, os férmions não “sabem” como se transformar em um espaço curvo (ou seja, segue as TL), e sua dinâmica é dada pela ação fermiônica relativa ao problema.

O acoplamento entre os férmions e o campo gravitacional se dará através do *vielbein* e, conseqüentemente, da conexão de spin.

As leis de conservação citadas acima são demonstradas pela variação da ação, mas essas leis são clássicas (apesar de conter o espinor) e, neste limite (clássico) sempre valem. Nosso objetivo é estudá-las quando usamos um campo fermiônico quantizado, e um pouco do formalismo utilizado para estudar os férmions quantizados será descrito na próxima seção.

2.2 Teoria Quântica de Campos

*“Let me bring you love from the field:
poppies red and roses filled with summer rain.”*

Jethro Tull

A eletrodinâmica quântica (QED) é, hoje, a teoria física que melhor descreve dados experimentais. A finalidade das teorias quânticas de campos é descrever como se dá a interação da matéria com o campo atuante (força eletromagnética, força forte e força fraca) e, em consequência, com outras partículas.

A primeira teoria (não-quântica) de campos foi o eletromagnetismo de Maxwell, onde, pela primeira vez, a física teve que recorrer à um campo

com propriedades físicas (momento, energia, etc.). Logo depois Einstein, percebendo que a teoria da gravitação Newtoniana era incompatível com a sua relatividade especial, propôs o que, hoje, é a melhor teoria da gravitação - a relatividade geral. Em 1900, Plank “quantizou”o campo eletromagnético em uma cavidade para solucionar o problema da catástrofe do ultra-violeta, e alguns anos depois Einstein utilizou a idéia de Planck de quantização do campo eletromagnético para explicar o efeito fotoelétrico. Mais tarde, em 1926 Dirac publicou sua famosa equação, e com isso, surgiu o nascimento da TQC, pois, seus “campos”espinoriais não respondiam aos mesmo princípios da mecânica quântica tradicional (conservação do número de partículas, soluções com energia “negativa”para férmions livres, etc.). A partir daí o desenvolvimento foi crescente, culminando na eletrodinâmica quântica, que descreve a interação da matéria com os fótons. Nessa breve introdução que iremos fazer neste capítulo, falaremos do formalismo de integrais de caminho da TQC [10].

2.2.1 Integrais de Caminho

2.2.1.1 Propagadores

Na formulação usual de mecânica quântica, trabalhamos com as quantidades x e p como operadores que obedecem a relações de comutação (Heisenberg). Na abordagem de integrais de caminho, utilizamos a noção de **propagadores** $K(q_f t_f; q_i t_i)$. Para entendermos a noção de propagadores, vamos utilizar o exemplo de processos de espalhamento. Imaginemos um pacote de ondas que é representado por $\psi(q_i, t_i)$ em um instante inicial. O que acontece a este pacote quando ele se aproxima do centro de espalhamento? Como será este pacote num momento posterior? Para responder a essas perguntas, utilizamos o princípio de Huygens. Se uma função de onda $\psi(x_i, t_i)$ é conhecida em um tempo t_i , então sua forma em um tempo posterior t_f pode ser deduzida olhando para cada ponto espacial x em um dado tempo t como uma fonte de ondas esféricas criada em x . Então, o princípio de Huygens, em termos matemáticos, pode ser expresso por:

$$\psi(q_f, t_f) = \int dq_i K(q_f, t_f; q_i, t_i) \psi(q_i, t_i). \quad (2.63)$$

A quantidade $K(q_f t_f; q_i t_i)$ é a *função de Green* ou *propagador* do pacote

de onda citado. Essa equação descreve o efeito da onda $\psi(x_i, t_i)$, que estava num ponto x_i em um tempo t_i (onde $t_i < t_f$), na onda $\psi(x_f, t_f)$, que está no ponto x_f num tempo *posterior* t_f . Dividindo o intervalo de tempo em dois encontramos:

$$\psi(q_f, t_f) = \int \int K(q_f t_f; qt) K(qt; q_i t_i) \psi(q_i, t_i) dq_i dq. \quad (2.64)$$

E segue que

$$K(q_f t_f; q_i t_i) = \int K(q_f t_f; qt) K(qt; q_i t_i) dq, \quad (2.65)$$

então a transição de (q_i, t_i) para (q_f, t_f) pode ser visto como uma transição de (q_i, t_i) por todos os pontos intermediários seguidos por uma transição de (q, t) para (q_f, t_f) . Pode-se mostrar que o propagador é a quantidade $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$ (mais comum em mecânica quântica). Seja

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi_t \rangle_S$$

onde o estado $|\psi_t\rangle_S$ é relacionado ao estado na abordagem de Heisenber por:

$$|\psi_t\rangle_S = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi\rangle_H.$$

Definindo o estado:

$$|qt\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |q\rangle \quad (2.66)$$

Nós teremos, então:

$$\psi(q, t) = \langle qt | \psi \rangle_H. \quad (2.67)$$

A completeza de estados nos diz que:

$$\langle q_f t_f | \psi \rangle = \int \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \langle q_i t_i | \psi \rangle dq_i$$

que, utilizando (2.66), nos dá:

$$\psi(q_f, t_f) = \int \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \psi(q_i, t_i) dq_i.$$

Comparando esta última equação com (2.62) vemos que:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = K(q_f t_f; q_i t_i). \quad (2.68)$$

Concluimos que *o propagador K resume a mecânica quântica do sistema*, pois ele nos dá a amplitude de probabilidade de uma transição entre estados (justamente o objetivo principal da teoria).

2.2.1.2 Propagadores e integrais de caminho

Vamos agora expressar o propagador como uma integral de caminho. Para isso, separemos o intervalo de tempo entre t_i e t_f em $(n + 1)$ pedaços iguais τ . A equação (2.64) se torna:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \dots \int dq_1 dq_2 \dots dq_n \langle q_f t_f | q_n t_n \rangle \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \dots \langle q_1 t_1 | q_i t_i \rangle. \quad (2.69)$$

Calculando o propagador sobre um segmento na integral de caminho, a partir de (2.65):

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-\frac{iH\tau}{\hbar}} | q_j \rangle \\ &= \left\langle q_{j+1} \left| 1 - \frac{i}{\hbar} H\tau + \mathcal{O}(\tau^2) \right| q_j \right\rangle \\ &= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j)} - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.70)$$

No caso especial onde

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

a última parte da equação (2.69) fica:

$$\left\langle q_{j+1} \left| \frac{p^2}{2m} \right| q_j \right\rangle = \int dp' dp \langle q_{j+1} | p' \rangle \left\langle p' \left| \frac{p^2}{2m} \right| p \right\rangle \langle p | q_j \rangle,$$

e usando o fato que $\langle q_{j+1} | p' \rangle = (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{ip'q_{j+1}}{\hbar}}$ temos

$$\left\langle q_{j+1} \left| \frac{p^2}{2m} \right| q_j \right\rangle = \int \frac{dp}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j)} \frac{p^2}{2m}, \quad (2.71)$$

onde é importante notar que na parte esquerda p^2 é um operador e na parte direita é um número.

De modo análogo temos,

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1}|V(q)|q_j\rangle &= V\left(\frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\langle q_{j+1}|q_j\rangle \\ &= V\left(\frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\delta(q_{j+1}-q_j) \\ &= \int \frac{dp}{h} e^{\frac{i}{h}p(q_{j+1}-q_j)} V(\bar{q}_j).\end{aligned}\quad (2.72)$$

Combinando as duas últimas equações na equação (2.69) temos:

$$\langle q_{j+1}t_{j+1}|q_jt_j\rangle = \frac{1}{h} \int dp_j e^{\frac{i}{h}[p_j(q_{j+1}-q_j)-\tau H(p_j,\bar{q}_j)]}.\quad (2.73)$$

Este é o propagador para um seguimento de um possível caminho. O propagador completo é obtido substituindo este resultado na equação (2.64), ou seja:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^n dq_j \prod_{j=0}^n \frac{dp_j}{h} \exp \left[\frac{i}{h} \sum_{j=0}^n [p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p_j, \bar{q}_j)] \right]\quad (2.74)$$

com $q_0 = q_i$ e $q_{n+1} = q_f$. Normalmente escreve-se o resultado acima da seguinte forma:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{h} \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[\int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{q} - H(p, q)] \right] \right\},\quad (2.75)$$

pois no limite contínuo, q se torna uma função de t e a integral se torna uma integral funcional (uma integral sobre todas as funções). A equação (2.74) é a integral de caminho para a amplitude. É importante notar novamente que q e p são funções dentro da integral, não operadores.

Uma outra forma de expressar a equação (2.74), quando o Hamiltoniano é da forma $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, é:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \exp \left\{ \frac{i}{h} \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \right\}\quad (2.76)$$

(basta fazermos a integral em p , que é uma integral gaussiana e levarmos em conta o limite contínuo). Onde N é uma constante de normalização. Na equação (2.75) o integrando da exponencial é a ação clássica $S = \int L dt$. Portanto, *o propagador é a integral sobre todas as trajetórias da ação clássica correspondente ao movimento da partícula.*

2.2.1.3 Representação Momento e Regras de Feynman

Podemos também fazer uma transformada de Fourier do propagador (em suas dependências em q e t) para obtermos uma representação de momento e energia de K_0 . Fazendo isso obtemos:

$$k_0(p_1 E_1; p_0 E_0) = (2\pi\hbar)^4 \delta(p_0 - p_1) \delta(E_0 - E_1) \frac{i\hbar}{E_1 - \frac{p_1^2}{2m} + i\epsilon} \quad (2.77)$$

onde ϵ é muito pequeno e positivo e é usado para garantir a convergência da transformação da função θ (função degrau).

Num processo típico em TQC, partículas são criadas e destruídas constantemente e nós queremos estudar as amplitudes de transição da ação do campo no vácuo, basicamente. Por exemplo, a amplitude para propagação de uma partícula de y para x é $\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$, onde ϕ é o operador do campo em questão (ou seja, $\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \langle x t_x | y t_y \rangle$ na notação anterior). Devido à causalidade (termos contendo a função degrau nos propagadores), devemos tomar cuidado com a ordem com que aplicamos o operador do campo no vácuo (se fizermos $\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$ teremos que usar a função de Green “retardada”, se fizermos $\langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle$ teremos que usar a função de Green “adiantada”). Para escrevermos a causalidade de um modo simples definimos *o operador de ordenamento temporal - T*:

$$\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \equiv \theta(t_x - t_y) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \theta(t_y - t_x) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle. \quad (2.78)$$

Esta definição de T é muito importante pois podemos representar a função correlação de n pontos ou *função de Green de n pontos* por:

$$\langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle, \quad (2.79)$$

e essa amplitude (a função de n pontos) pode ser escrita por uma soma de produtos de diagramas de Feynman (devido ao teorema de Wick). Até este

ponto não há aproximação. Quando colocamos uma interação na teoria é que utilizamos métodos perturbativos.

Por exemplo, vamos considerar o caso de 4 campos escalares. A amplitude $\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle$ é:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle &= \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle\langle 0|\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle + \\ &+ \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_3)|0\rangle\langle 0|\phi(x_2)\phi(x_4)|0\rangle + \\ &+ \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_4)|0\rangle\langle 0|\phi(x_2)\phi(x_3)|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Esta expressão pode ser entendida como a seguinte soma de diagramas:

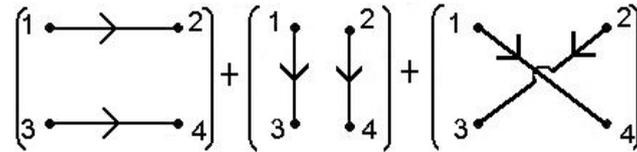


Figura 2.2: Representação diagramática da equação (2.79).

A figura (2.2) pode ser entendida da seguinte forma: para cada uma, partículas são criadas em dois pontos do espaço-tempo, se propagam até outro ponto, então se aniquilam. Neste caso usamos apenas campos livres; quando temos interação obtemos termos mais complexos e mais interessantes fisicamente.

Por exemplo, analisemos a função de 2-pontos da teoria $\lambda\phi^4$ até primeira ordem em λ . A Lagrangeana dessa teoria é:

$$L = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4,$$

que corresponde à equação de Klein-Gordon com interação. Neste caso, teremos:

$$\begin{aligned} &\langle 0|T\phi(x)\phi(y)(-i) \int dt \int d^3z \frac{\lambda}{4!}\phi^4|0\rangle = \\ &= 3 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle \int d^4z \langle 0|\phi(z)\phi(z)|0\rangle \langle 0|\phi(z)\phi(z)|0\rangle + \end{aligned}$$

$$+12 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z \langle 0 | \phi(x) \phi(z) | 0 \rangle \langle 0 | \phi(y) \phi(z) | 0 \rangle \langle 0 | \phi(z) \phi(z) | 0 \rangle \quad (2.81)$$

devido ao teorema de Wick, que reduz o número de possíveis jeitos de arranjar os termos ϕ . Podemos representar cada termo da equação acima por um diagrama de Feynman, cada propagador será uma linha cheia, e cada ponto (x, y e z) um vértice. Porém, notemos que há uma distinção entre os pontos x, y e z . O vértice correspondente ao ponto z é chamado de vértice interno. Cada vértice interno está associado com um fator $(-i\lambda) \int d^4z$ (nesta teoria). Então, a equação (2.80) é representada pelos seguintes diagramas:

Figura 2.3: Representação diagramática da equação (2.80).

Podemos resumir numa série de regras, chamadas *regras de Feynman* que, para a teoria $\lambda\phi^4$ é:

1. para cada linha cheia escrevemos um propagador;
2. para cada vértice escrevemos um termo $(-i\lambda) \int d^4z$;
3. para cada ponto externo escrevemos um fator 1.

Estas regras estão escritas para a representação de coordenadas. É mais comum (e mais útil) escrevê-las na representação momento:

1. para cada linha cheia escrevemos um propagador na representação momento $\left(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)$;
2. para cada vértice escrevemos um termo $-i\lambda$;
3. para cada ponto externo escrevemos um fator $e^{-ip \cdot x}$;
4. impomos conservação de momento em cada vértice;

5. integramos sobre os momentos indeterminados: $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$.

O primeiro item representa a propagação da partícula criada/destruída nos pontos externos. O item número 2 representa o termo de interação.

A generalização para uma função de n pontos é simples:

$$\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)|0\rangle = (\text{soma de todos os diagramas}).$$

Em geral, as regras de Feynman são obtidas variando a integral de Ação da teoria com relação aos campos no espaço de momentos, para se obter os termos dos vértices e os propagadores.

2.2.2 Método de Regularização Implícita

A idéia do método é tratar as integrais divergentes supondo que exista um regularizador que nos permite fazer manipulações ao nível do integrando [5]-[7]. As integrais divergentes são deixadas como integrais e, *em especial*, o que difere este método de outros é que ao impormos uma regularização *ab initio*, por exemplo na regularização dimensional ou Pauli-Villars, arbitriedades geradas no cálculo, como diferença entre integrais divergentes, terão automaticamente um valor. No presente esquema deixamos para o final do cálculo a eliminação ou interpretação dessas quantidades, lançando mão de aspectos físicos do problema, isto é, renormalizabilidade, simetrias ou anomalias conhecidas.

As integrais sobre *loops* internos (como da figura (2.3)) nos dão resultados divergentes. Mas, quando trabalhamos com teorias com interação, fazemos uso de uma série perturbativa, então temos que ter certeza que a série faça algum sentido físico. Na TQC, as quantidades de interesse físico (massa, carga, constantes de acoplamento, etc.), em cada ordem de expansão, podem ser *renormalizadas*. Neste trabalho, porém, a teoria é não-renormalizável. Mas a amplitude a 1-loop pode ser trabalhada.

Por exemplo a seguinte integral, que aparece normalmente em cálculos de TQC:

$$I = \lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \quad (2.82)$$

é quadraticamente divergente (possui no numerador k 's em potência 4, e no

denominador em potência 2) no ultra-violeta, além de poder ser divergente no infra-vermelho (quando $k \rightarrow 0$).

A regularização é um método para isolar as divergências nas integrais de Feynman. Existem muitas técnicas de regularização (cut-off, Pauli-Villars, Regularização Dimensional, t'Hooft, etc.), cada qual com sua qualidade ou defeito. Neste trabalho vamos utilizar o método de Regularização Implícita (RI). A principal característica desse método é que ele separa totalmente as integrais divergentes dos termos finitos, além de não alterar a dimensão do espaço-tempo durante os cálculos. As integrais divergentes são deixadas na forma de integrais e diferenças entre integrais divergentes de mesma ordem são parametrizadas através de relações de consistência, que serão tabeladas no apêndice C.

Basicamente a RI consiste em manipular algebricamente a amplitude, através da seguinte identidade:

$$\frac{1}{[(k + k_i)^2 - m^2]} = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^j}{(k^2 - m^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^{N+1}}{(k^2 - m^2)^{N+1} [(k + k_i)^2 - m^2]}, \quad (2.83)$$

onde i varia de 1 até o número de momentos externos do diagrama e N é tal que o último termo de (2.82) seja finito sobre integração em k (integração incluindo todos os outros termos da amplitude).

Como exemplo, vamos calcular explicitamente a seguinte integral (que aparece nos cálculos do nosso trabalho):

$$I_{\mu\nu} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)[(k + p)^2 - m^2]} \quad (2.84)$$

que é superficialmente logaritmicamente divergente. Teremos, utilizando a identidade (2.82):

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)} \cdot \left[\frac{1}{(k^2 - m^2)} - \frac{(p^2 + 2p \cdot k)}{(k^2 - m^2)[(k + p)^2 - m^2]} \right] \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - p^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2 [(k + p)^2 - m^2]} - \\ &\quad - 2p^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\alpha k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2 [(k + p)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

As duas últimas integrais de (2.84) são finitas e podemos calculá-las utilizando técnicas apropriadas. No caso, utilizamos a parametrização de Feynman, que será explicada a seguir. A primeira integral é divergente, e será identificada em uma relação de consistência. As integrais divergentes ficam rotuladas (esta no caso seria $\Theta_{\mu\nu}$) e, após terminado o cálculo das integrais finitas, analisamos a atuação das relações de consistência - RC - (e consequentemente dos infinitos) na teoria. As RC são definidas no Apêndice B.

Outra relação importante entre integrais logaritmicamente divergentes para a RI é a relação entre $I_{log}(\mu^2)$ e $I_{log}(\lambda^2)$, onde λ é a escala do grupo de renormalização. Pode-se facilmente deduzir a seguinte identidade:

$$I_{log}(\mu^2) = I_{log}(\lambda^2) - b \ln\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right), \quad (2.86)$$

onde $b = \frac{i}{4\pi}$ para 2 dimensões. As integrais quadraticamente divergentes podem sempre ser tomada iguais a zero em teorias não massivas [7].

A parametrização de Feynman é um “truque” muito utilizado para resolver as integrais finitas acima. Ela consiste da seguinte identidade:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2}.$$

Derivando com relação a b dos dois lados n vezes obtemos:

$$\frac{1}{ab^n} = n \int_0^1 \frac{dx(1-x)^{n-1}}{[ax + b(1-x)]^{n+1}}. \quad (2.87)$$

No caso das integrais finitas da equação (2.84) temos:

$$a = [(k+p)^2 - m^2],$$

$$b = (k^2 - m^2)$$

e $n = 2$. Com isso, podemos obter integrais somente em k que possuem a seguinte solução:

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_p}}{(k^2 + H^2)^\alpha} = \frac{i}{4\pi} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{p}{2} - 1)}{\Gamma(\alpha)} (H^2)^{\alpha-1-p/2} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}, \quad (2.88)$$

onde:

$$T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p} = (2)^{-p/2} g_{\{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\dots\mu_{p-1}\mu_p\}}. \quad (2.89)$$

Nesta expressão $g_{\{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\dots\mu_{p-1}\mu_p\}}$ é a soma de todas as permutações possíveis dos índices envolvidos e, para o caso que estudamos, p é sempre par. Se p pudesse assumir valores ímpares, a fórmula seria um pouco diferente. E também temos que: $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$.

2.2.2.1 Regularização implícita e o modelo de Schwinger quiral

Como exemplo de como a RI trata as anomalias, vamos discutir o caso da anomalia quiral no modelo de Schwinger. Este é um modelo que descreve a eletrodinâmica quântica de férmions sem massa em duas dimensões. No modelo de Schwinger (aqui estamos tratando este modelo brevemente, na referência [5] ele é tratado com mais detalhes) o fóton (sem massa) adquire massa (igual a e^2/m , e é a constante de acoplamento) em cálculos a *1-loop*. No caso sem quiralidade, o tensor de polarização do vácuo é:

$$\Pi_S^{\mu\nu}(p) = \Pi_\infty^{\mu\nu} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{g^{\mu\nu}}{2} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) \quad (2.90)$$

onde

$$\Pi_\infty^{\mu\nu} \equiv 2i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(-k^2 g^{\mu\nu} + 2k^\mu k^\nu)}{(k^2 - \mu^2)^2} \quad (2.91)$$

e μ^2 é um *cut-off* infravermelho.

Agora, consideremos a seguinte diferença de integrais (que é uma das RC citadas anteriormente):

$$\Delta_{\mu\nu}^0 \equiv \int^\Lambda \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2} - 2 \int^\Lambda \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2}. \quad (2.92)$$

Particularmente, se fizermos $\Delta_{\mu\nu}^0$ igual a 0 na expressão de $\Pi_\infty^{\mu\nu}$, nós obtemos o valor correto para o tensor de polarização do vácuo, além de restaurar a invariância de calibre da teoria (se assim desejarmos). Assim, a RC faz o papel de uma parte indeterminada da ação, e o valor particular $\Delta_{\mu\nu}^0 = 0$ explica a massa que o fóton adquire. Esse tipo de abordagem, em que o método de regularização não deve impor restrições prévias à teoria, foi proposto por Jackiw [11] e implementado na abordagem da RI.

Vamos fazer uma análise do modelo de Schwinger quiral. O tensor de

polarização relativo a ele fica :

$$\Pi_{\mathcal{X}}^{\mu\nu} = \Pi_S^{\mu\nu} + g_{\alpha\beta}(\varepsilon^{\nu\alpha}\Pi_S^{\mu\beta} + \varepsilon^{\mu\alpha}\Pi_S^{\beta\nu}) + \varepsilon^{\mu\alpha}\varepsilon^{\nu\beta}\Pi_{S\ \alpha\beta}, \quad (2.93)$$

onde $\Pi_S^{\mu\nu}$ é o mesmo encontrado na discussão anterior. Nesse modelo ocorre uma anomalia: ele não pode ser invariante de calibre. Essa anomalia vem da não conservação da corrente quiral:

$$p_\nu \Pi_5^{\mu\nu} = -\frac{1}{\pi} \tilde{p}^\mu \quad (2.94)$$

onde $\Pi_5^{\mu\nu} = \varepsilon^{\nu\kappa}(\bar{\Pi}_\kappa^\mu)_S$. Escrevendo para a RC (devido a invariância de Lorentz) $\Delta_{\mu\nu}^0 = \frac{\lambda}{2\pi} g_{\mu\nu}$, teremos para a parte infinita do tensor de polarização:

$$\Pi_\infty^{\mu\nu} = \left(\frac{\lambda + 1}{2\pi} \right) g^{\mu\nu} \quad (2.95)$$

onde o valor $\lambda = 0$ assegura invariância de calibre no modelo de Schwinger.

Podemos escrever a lei de conservação (2.93) como:

$$p_\nu \Pi_5^{\mu\nu} = -\frac{\lambda + 2}{2\pi} \tilde{p}^\mu. \quad (2.96)$$

Se quisermos preservar essa lei de conservação, que diz respeito à identidade de Ward em sua parte *axial*, temos que fazer $\lambda = -2$. Mas isso transfere a anomalia para a parte *vetorial*, e obtemos

$$p_\mu \Pi_S^{\mu\nu} \Big|_{\lambda=-2} = -\frac{1}{\pi} \tilde{p}^\nu. \quad (2.97)$$

Temos também que a imposição de invariância de calibre para o modelo de Schwinger quiral não fixa o valor de λ , pois a lei de conservação não zera para nenhum valor de λ :

$$p_\mu \Pi_{\mathcal{X}}^{\mu\nu} = \frac{1}{\pi} ((\lambda + 1)p^\nu - \tilde{p}^\mu). \quad (2.98)$$

Ou seja, neste caso, se satisfizermos a identidade de Ward em sua parte axial, violamos a sua parte vetorial e vice-versa, além de podermos violar em

ambas. Então, o método da RI está de acordo com as idéias de Jackiw em que não seria o método de regularização que impõe onde a anomalia deve existir, mas sim a própria física do problema.

O Problema

“And I’m still Alive!”

Pearl Jam

3.1 Introdução

Neste capítulo iremos introduzir o problema a ser estudado neste trabalho. Primeiro, apresentaremos a Lagrangeana e sua versão linearizada, após feito isso, iremos apresentar as identidades de Ward (e suas respectivas identidades canônicas, ou *naive*), depois iremos achar a amplitude e os fatores de forma a serem calculados através da RI. Seguiremos de perto o artigo de Bertlmann e Kohlprath [3]. Nosso problema é, então, calcular a amplitude relativa ao diagrama de Feynman de 1-loop abaixo.

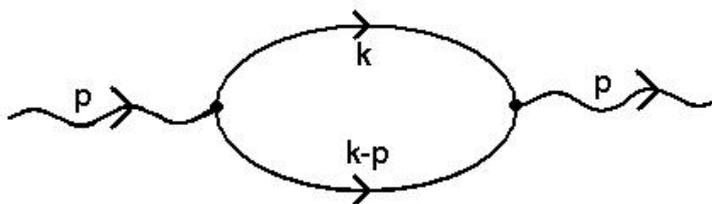


Figura 3.1: Diagrama de Feynman correspondente a este trabalho.

3.2 A Lagrangeana

A Lagrangeana que iremos estudar corresponde à ação da equação (2.61). Então, temos:

$$L = ieE^{a\mu}\bar{\psi}\gamma_a\frac{1\overleftrightarrow{\partial}_\mu\pm\gamma_5}{2}\psi, \quad (3.1)$$

onde $e^a{}_\mu$ é o vielbein e $E_a{}^\mu$ é sua inversa, $e = |\det e^a{}_\mu|$ é seu determinante. $D_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu$ é a derivada covariante com a conexão de spin, como explicado no capítulo anterior. Usamos as seguintes convenções:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^1 = i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

No caso das anomalias de Einstein e de Weyl é suficiente usar o campo gravitacional linearizado:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\kappa^2), \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\kappa^2)$$

$$e^a{}_\mu = \eta^a{}_\mu + \frac{1}{2}\kappa h^a{}_\mu + \mathcal{O}(\kappa^2), \quad E^{a\mu} = \eta^{a\mu} - \frac{1}{2}\kappa h^{a\mu} + \mathcal{O}(\kappa^2).$$

Em 2-D a conexão de spin não contribui para a amplitude ([1], [3]). Então, a Lagrangeana de interação linearizada é:

$$L_I^{lin} = -\frac{i}{4} \left(h^{a\mu}\bar{\psi}\gamma_a\frac{1\pm\gamma_5}{2}\overleftrightarrow{\partial}_\mu^\psi\psi + h^\mu{}_\nu\bar{\psi}\gamma^a\frac{1\pm\gamma_5}{2}\overleftrightarrow{\partial}_a^\psi\psi \right). \quad (3.2)$$

Nesta expressão, o fator ∂_a^ψ atua somente no espinor. Desta expressão temos:

$$L_I^{lin} = -\frac{1}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}.$$

3.3 As identidades de Ward

Desta última expressão tiramos as seguintes regras de Feynman para os vértices do diagrama:

$$-\frac{i}{4}(\gamma_\mu(k_1 - k_2)_\nu + \gamma_\nu(k_1 - k_2)_\mu)\frac{1 \pm \gamma_5}{2}$$

e o tensor energia-momento:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(T_a^\mu E^{a\nu} + T_a^\nu E^{a\mu}) \\ &= \frac{i}{4}\left(\bar{\psi}E^{a\nu}\gamma_a\frac{1 \pm \gamma_5}{2}\overleftrightarrow{D}^\mu\psi + \bar{\psi}E^{a\mu}\gamma_a\frac{1 \pm \gamma_5}{2}\overleftrightarrow{D}^\nu\psi\right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

A amplitude total é dada pela função de 2-pontos:

$$T_{\mu\nu\sigma\rho}(p) = i \int d^2x e^{ipx} \langle 0 | T [T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(0)] | 0 \rangle. \quad (3.4)$$

Devido à covariância de Lorentz e a estrutura geral da amplitude podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$T_{\mu\nu\sigma\rho} = T_{\mu\nu\sigma\rho}^V + T_{\mu\nu\sigma\rho}^A \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\sigma\rho}^V &= p_\mu p_\nu p_\sigma p_\rho T_1(p^2) + (p_\mu p_\nu g_{\rho\sigma} + p_\rho p_\sigma g_{\mu\nu}) T_2(p^2) + \\ &+ (p_\mu p_\rho g_{\sigma\nu} + p_\mu p_\sigma g_{\rho\nu} + p_\rho p_\nu g_{\mu\sigma} + p_\nu p_\sigma g_{\mu\rho}) T_3(p^2) + \\ &+ g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} T_4(p^2) + (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}) T_5(p^2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu\rho\sigma}^A(p) &= (\varepsilon_{\mu\tau}p^\tau p_\nu p_\rho p_\sigma + \varepsilon_{\nu\tau}p^\tau p_\mu p_\rho p_\sigma + \varepsilon_{\rho\tau}p^\tau p_\nu p_\nu p_\sigma + \varepsilon_{\sigma\tau}p^\tau p_\mu p_\nu p_\rho)T_6(p^2) + \\
&+ (\varepsilon_{\mu\tau}p^\tau p_\nu g_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\nu\tau}p^\tau p_\mu g_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\rho\tau}p^\tau p_\sigma g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\sigma\tau}p^\tau p_\rho g_{\mu\nu})T_7(p^2) + \\
&+ \left[\varepsilon_{\mu\tau}p^\tau (p_\rho g_{\nu\sigma} + p_\sigma g_{\nu\rho}) + \varepsilon_{\nu\tau}p^\tau (p_\rho g_{\mu\sigma} + p_\sigma g_{\mu\rho}) + \right. \\
&\left. + \varepsilon_{\rho\tau}p^\tau (p_\mu g_{\nu\sigma} + p_\nu g_{\mu\sigma}) + \varepsilon_{\sigma\tau}p^\tau (p_\mu g_{\nu\rho} + p_\nu g_{\mu\rho}) \right] T_8(p^2). \quad (3.7)
\end{aligned}$$

O termo $T_{\mu\nu\rho\sigma}^V$ vem da parte vetorial de (3.3) e a parte $T_{\mu\nu\rho\sigma}^A$, que é pseudo-tensorial, vem da parte axial de $T^{\mu\nu}$. As funções $T_1(p^2), T_2(p^2), \dots, T_8(p^2)$ são os fatores de forma a serem calculados através da regularização implícita.

Como dito no capítulo anterior, $T^{\mu\nu}$ satisfaz, classicamente, às seguintes (naives) identidades de Ward (IW):

1. $T_{\mu\nu\rho\sigma}(p) = T_{\nu\mu\rho\sigma}(p)$
2. $p^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}(p) = 0$
3. $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\rho\sigma}(p) = 0$

que correspondem, respectivamente à invariância de Lorentz, Einstein e Weyl. Podemos sempre fazer o tensor energia-momento simétrico [1]. Então o item número 1 é satisfeito automaticamente. Porém, as outras duas identidades de Ward não necessariamente precisam ser satisfeitas, o que dá origem às anomalias de Einstein e Weyl.

A invariância de Einstein pode ser expressa em termos dos fatores de forma:

$$\begin{aligned}
p^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^V(p) &= p_\nu p_\rho p_\sigma (p^2 T_1 + T_2 + 2T_3) + p_\nu g_{\rho\sigma} (p^2 T_2 + T_4) + \\
&+ (p_\rho g_{\nu\sigma} + p_\sigma g_{\nu\rho}) (p^2 T_3 + T_5) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma}^A(p) &= \varepsilon_{\nu\tau}p^\tau [p_\rho p_\sigma (p^2 T_6 + 2T_8) + g_{\rho\sigma} p^2 T_7] + \\
&+ \varepsilon_{\rho\tau}p^\tau [p_\nu p_\sigma (p^2 T_6 + T_8 + T_7) + g_{\nu\sigma} p^2 T_8] + \\
&+ \varepsilon_{\sigma\tau}p^\tau [p_\nu p_\rho (p^2 T_6 + T_8 + T_7) + g_{\nu\rho} p^2 T_8]. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

A invariância de Weyl fica da seguinte forma:

$$g^{\mu\nu}T_{\mu\nu\rho\sigma}^V(p) = p_\rho p_\sigma(p^2T_1 + 2T_2 + 4T_3) + g_{\rho\sigma}(p^2T_2 + 2T_4 + 2T_5) \quad (3.10)$$

$$g^{\mu\nu}T_{\mu\nu\rho\sigma}^A(p) = (\varepsilon_{\rho\tau}p^\tau p_\sigma + \varepsilon_{\sigma\tau}p^\tau p_\rho)(p^2T_6 + 2T_7 + 4T_8). \quad (3.11)$$

Escritas dessa forma, podemos escrever as identidades de Ward (IW) da seguinte maneira:

- Para a parte vetorial da invariância de Einstein:

$$\begin{aligned} p^2T_1 + T_2 + 2T_3 &= 0 \\ p^2T_2 + T_4 &= 0 \\ p^2T_3 + T_5 &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

- Para a parte vetorial da invariância de Weyl:

$$\begin{aligned} p^2T_1 + 2T_2 + 4T_3 &= 0 \\ p^2T_2 + 2T_4 + 2T_5 &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

- Para a parte axial da invariância de Einstein:

$$\begin{aligned} 3p^2T_6 + 2T_7 + 4T_8 &= 0 \\ p^2T_7 + 2p^2T_8 &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

- Finalmente a parte axial da invariância de Weyl:

$$p^2T_6 + 2T_7 + 4T_8 = 0 \quad (3.15)$$

3.4 A Amplitude

Calculando a amplitude (colocando as regras de Feynman e os propagadores na equação (3.4)) obtemos:

$$T_{\mu\nu\rho\sigma}(p) = -\frac{i}{16} Tr \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left\{ [\gamma_\mu(p+2k)_\nu + \gamma_\nu(p+2k)_\mu] \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} [\gamma_\rho(p+2k)_\sigma + \gamma_\sigma(p+2k)_\rho] \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right\} \quad (3.16)$$

Fazendo o traço nas matrizes γ acima, podemos escrever a parte vetorial da equação (3.16) da seguinte forma:

$$T_{\mu\nu\rho\sigma}^V = T_{\mu\nu\rho\sigma}^{ni} + T_{\nu\mu\rho\sigma}^{ni} + T_{\mu\nu\sigma\rho}^{ni} + T_{\nu\mu\sigma\rho}^{ni}. \quad (3.17)$$

A parte axial da amplitude total está conectada à parte vetorial através da relação (válida em duas dimensões):

$$\gamma_\mu \gamma_5 = -\varepsilon_{\mu\nu} \gamma_\nu.$$

Temos:

$$T_{\mu\nu\rho\sigma}^A = \mp \left\{ \frac{1}{2} (\varepsilon_\mu^\tau T_{\tau\nu\rho\sigma}^{ni} + \varepsilon_\rho^\tau T_{\mu\nu\tau\sigma}^{ni}) + \frac{1}{2} (\varepsilon_\nu^\tau T_{\tau\mu\rho\sigma}^{ni} + \varepsilon_\sigma^\tau T_{\nu\mu\tau\sigma}^{ni}) + \frac{1}{2} (\varepsilon_\mu^\tau T_{\tau\nu\sigma\rho}^{ni} + \varepsilon_\sigma^\tau T_{\mu\nu\tau\rho}^{ni}) + \frac{1}{2} (\varepsilon_\nu^\tau T_{\tau\mu\sigma\rho}^{ni} + \varepsilon_\sigma^\tau T_{\nu\mu\tau\rho}^{ni}) \right\}. \quad (3.18)$$

O fator $T_{\mu\nu\rho\sigma}^{ni}$ é:

$$T_{\mu\nu\rho\sigma}^{ni} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{q_\nu q_\sigma r_\mu k_\rho + q_\nu q_\sigma r_\rho k_\mu - r \cdot k q_\nu q_\sigma g_{\rho\mu}}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \quad (3.19)$$

onde

$$q = p + 2k \quad e \quad r = p + k.$$

Então, precisamos “apenas” calcular a amplitude $T_{\mu\nu\rho\sigma}^{ni}$ – pois sabendo $T_{\mu\nu\rho\sigma}^{ni}$ sabemos a amplitude total (3.16) através das relações acima (3.17 - 3.18) – e inserir os resultados obtidos nas IW.

Expandindo o numerador de (3.19) observamos que será necessário o cálculo das seguintes integrais:

$$I_{\mu} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_{\mu}}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \quad (3.20)$$

$$I_{\mu\nu} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \quad (3.21)$$

$$I_{\mu\nu\rho} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_{\mu}k_{\nu}k_{\rho}}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \quad (3.22)$$

$$I_{\mu\nu\rho\sigma} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_{\mu}k_{\nu}k_{\rho}k_{\sigma}}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \quad (3.23)$$

$$I_{k^2} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \quad (3.24)$$

$$I_{k^2\nu} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k^2k_{\nu}}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \quad (3.25)$$

$$I_{k^2\mu\nu} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k^2k_{\mu}k_{\nu}}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \quad (3.26)$$

Somente a primeira integral é convergente, as outras 3 são infinitas, portanto, têm que ser regularizadas. O cálculo destas integrais e análise dos resultados obtidos será o objetivo do próximo capítulo.

Cálculos das Integrais

“Working from seven to eleven every night...”

Led Zeppelin

4.1 Introdução

A teoria de campos nos dá resultados infinitos e estes precisam ser regularizados/renormalizados. Neste capítulo vamos calcular as integrais do capítulo anterior (3.20 - 3.23) utilizando a RI. Os passos intermediários que são feitos até que se encontre o fator finito não serão feitos explicitamente, pois são demasiado longos e enfadonhos.

4.2 Cálculo de I_μ

Temos a seguinte integral:

$$I_\mu = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]}.$$

Ela é finita (temos 3 k's no numerador e 4 no denominador). Utilizando a parametrização de Feynman (2.2.2) temos:

$$I_\mu = \int \int_0^1 \frac{dx k_\mu}{([(k+p)^2 - m^2]x + [k^2 - m^2](1-x))^2}$$

Manipulando o denominador (que será igual em todas as integrais), te-

remos sempre:

$$[(k+p)^2 - m^2]x + [k^2 - m^2](1-x) = (px+k)^2 + (p^2x(1-x) - m^2).$$

De agora em diante, chamaremos o fator $p^2x(1-x) - m^2$ de H^2 . Ou seja:

$$H^2 \equiv p^2x(1-x) - m^2. \quad (4.1)$$

A integral I_μ ficará então:

$$I_\mu = \int_k \int_0^1 \frac{dx \ k_\mu}{((px+k)^2 + H^2)^2}.$$

Neste ponto, fazemos uma mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} px + k &= k' \\ \Rightarrow k &= k' - px \\ \Rightarrow I_\mu &= \int_{k'} \int_0^1 \frac{dx \ (k' - px)_\mu}{((k')^2 + H^2)^2} \end{aligned}$$

e agora podemos chamar k' de k sem problemas. Portanto:

$$I_\mu = \int_k \int_0^1 \frac{dx \ (k - px)_\mu}{((k)^2 + H^2)^2}. \quad (4.2)$$

Como esta integral é em todo o espaço de momentos k' s, quando tivermos números ímpares de k' s no numerador a integral vale zero. Para as demais integrais em k utilizamos a fórmula (2.87). Então, o resultado dessa integral é:

$$I_\mu = -p_\mu b \int_0^1 \frac{x \ dx}{H^2}, \quad (4.3)$$

onde definimos:

$$b \equiv \frac{i}{4\pi}$$

Por conveniência deixamos as integrais em x inalteradas, para depois calcularmos todas que serão necessárias.

O cálculo das demais integrais finitas será feito da mesma maneira como foi feito para esta integral, porém com muito mais termos, ou seja, após

regularizadas elas serão parametrizadas, as integrais em k serão feitas com a ajuda da equação (2.87) e as integrais em x estão tabeladas no apêndice C. Então, para as próximas integrais, apenas iremos regularizá-las.

4.3 Cálculo de $I_{\mu\nu}$

Calcularemos agora a integral:

$$I_{\mu\nu} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]}$$

que é logaritmicamente divergente.

Utilizando a seguinte identidade:

$$\frac{1}{[(p+k)^2 - m^2]} = \frac{1}{[k^2 - m^2]} - \frac{p^2 + 2p \cdot k}{[k^2 - m^2][(p+k)^2 - m^2]} \quad (4.4)$$

teremos

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2]} \cdot \left[\frac{1}{[k^2 - m^2]} - \frac{p^2 + 2p \cdot k}{[k^2 - m^2][(p+k)^2 - m^2]} \right] \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2]^2} - p^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2]^2 [(p+k)^2 - m^2]} - \\ &\quad - 2p^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha}{[k^2 - m^2]^2 [(p+k)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nesta última equação aparece nossa primeira integral logaritmicamente divergente, que definiremos:

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2]^2}. \quad (4.6)$$

Assim nossa integral $I_{\mu\nu}$ fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu} &= \Theta_{\mu\nu} - p^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2]^2 [(p+k)^2 - m^2]} - \\ &\quad - 2p^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha}{[k^2 - m^2]^2 [(p+k)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

O termo $\Theta_{\mu\nu}$ irá entrar em uma relação de consistência, como descrito no capítulo 2 (equação (2.91)).

4.4 Cálculo de $I_{\mu\nu\rho}$

Calculando a integral $I_{\mu\nu\rho}$ temos:

$$I_{\mu\nu\rho} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu k_\rho}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]}$$

que é linearmente divergente. Temos:

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu\rho} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu k_\rho}{[k^2 - m^2]} \cdot \left[\frac{1}{[k^2 - m^2]} - \frac{p^2 + 2p \cdot k}{[k^2 - m^2][(p+k)^2 - m^2]} \right] \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu k_\rho}{[k^2 - m^2]^2} - p^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu k_\rho}{[k^2 - m^2]^2 [(p+k)^2 - m^2]} \\ &\quad - 2p^\alpha \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\alpha}{[k^2 - m^2]^2 [(p+k)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A primeira integral na equação anterior é igual a 0, pois é ímpar em relação a k no numerador e par no denominador. A última integral ainda é infinita, portanto tem que ser regularizada. Assim:

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu\rho} &= -p^2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho}{[k^2 - m^2]^2 [(p+k)^2 - m^2]} - 2p^\alpha \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\alpha}{[k^2 - m^2]^3} + \\ &\quad + 2p^2 p^\alpha \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\alpha}{[k^2 - m^2]^3 [(p+k)^2 - m^2]} + \\ &\quad + 4p^\alpha p^\beta \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\alpha k_\beta}{[k^2 - m^2]^3 [(p+k)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

De agora em diante chamaremos: $\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \equiv \int_k$.

Agora, definimos a nossa segunda integral logaritmicamente divergente:

$$\Theta_{\mu\nu\rho\alpha} \equiv \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\alpha}{[k^2 - m^2]^3}. \quad (4.10)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\rho} &= -2p^\alpha \Theta_{\mu\nu\rho\alpha} - p^2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho}{[k^2 - m^2]^2 [(p+k)^2 - m^2]} + \\
&+ 2p^2 p^\alpha \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\alpha}{[k^2 - m^2]^3 [(p+k)^2 - m^2]} + \\
&+ 4p^\alpha p^\beta \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\alpha k_\beta}{[k^2 - m^2]^3 [(p+k)^2 - m^2]}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

4.5 Cálculo de $I_{\mu\nu\rho\sigma}$

Finalmente, vamos regularizar a integral $I_{\mu\nu\rho\sigma}$. Temos:

$$I_{\mu\nu\rho\sigma} = \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m^2]}.$$

Regularizando esta integral:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\rho\sigma} &= \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{[k^2 - m^2]} \cdot \left[\frac{1}{[k^2 - m^2]} - \frac{p^2 + 2p \cdot k}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m^2]} \right] \\
&= \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{[k^2 - m^2]^2} - p^2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{[k^2 - m^2]^2 [(k+p)^2 - m^2]} \\
&\quad - 2p^\alpha \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha}{[k^2 - m^2]^2 [(k+p)^2 - m^2]}, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Agora vamos definir a integral quadraticamente divergente:

$$\Theta_{\mu\nu\rho\sigma}^2 \equiv \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{[k^2 - m^2]^2}.$$

As outras duas integrais são contínuas divergentes, então:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\rho\sigma} &= \Theta_{\mu\nu\rho\sigma}^2 - \\
&\quad - p^2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{[k^2 - m^2]^2} \cdot \left[\frac{1}{[k^2 - m^2]} - \frac{p^2 + 2p \cdot k}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m^2]} \right] - \\
&\quad - 2p^\alpha \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha}{[k^2 - m^2]^2} \cdot \left[\frac{1}{[k^2 - m^2]} - \frac{p^2 + 2p \cdot k}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m^2]} \right].
\end{aligned} \tag{4.13}$$

↓

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\rho\sigma} &= \Theta_{\mu\nu\rho\sigma}^2 - p^2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{[k^2 - m^2]^3} + p^4 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{[k^2 - m^2]^3 [(k+p)^2 - m^2]} + \\
&\quad + 2p^2 p^\alpha \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha}{[k^2 - m^2]^3 [(k+p)^2 - m^2]} + \\
&\quad + 2p^\alpha p^2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha}{[k^2 - m^2]^3 [(k+p)^2 - m^2]} + \\
&\quad + 4p^\alpha p^\beta \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha k_\beta}{[k^2 - m^2]^3 [(k+p)^2 - m^2]}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

A última integral ainda precisa ser regularizada. Definindo a integral logaritmicamente divergente:

$$\Theta_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{[k^2 - m^2]^3}$$

Utilizando a identidade (4.4) teremos:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\rho\sigma} &= \Theta_{\mu\nu\rho\sigma}^2 - p^2 \Theta_{\mu\nu\rho\sigma} + p^4 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{[k^2 - m^2]^3 [(k+p)^2 - m^2]} + \\
&\quad + 4p^\alpha p^2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha}{[k^2 - m^2]^3 [(k+p)^2 - m^2]} + \\
&\quad + 4p^\alpha p^\beta \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha k_\beta}{[k^2 - m^2]^3} \cdot \left[\frac{1}{[k^2 - m^2]} - \frac{p^2 + 2p \cdot k}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m^2]} \right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

↓

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\rho\sigma} &= \Theta_{\mu\nu\rho\sigma}^2 - p^2\Theta_{\mu\nu\rho\sigma} + p^4 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{[k^2 - m^2]^3 [(k+p)^2 - m^2]} + \\
&+ 4p^\alpha p^2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha}{[k^2 - m^2]^3 [(k+p)^2 - m^2]} + \\
&+ 4p^\alpha p^\beta \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha k_\beta}{[k^2 - m^2]^4} - 4p^\alpha p^\beta p^2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha k_\beta}{[k^2 - m^2]^4 [(k+p)^2 - m^2]} - \\
&- 8k^\alpha k^\beta k^\delta \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha k_\beta k_\delta}{[k^2 - m^2]^4 [(k+p)^2 - m^2]}. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Aqui definimos mais uma integral logaritmicamente divergente:

$$\Theta_{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} \equiv \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha k_\beta}{[k^2 - m^2]^4}.$$

Assim, nosso último resultado (com as integrais finitas ainda por fazer):

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\rho\sigma} &= \Theta_{\mu\nu\rho\sigma}^2 - p^2\Theta_{\mu\nu\rho\sigma} + 4p^\alpha p^\beta \Theta_{\mu\nu\rho\sigma\alpha\beta} \\
&+ p^4 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{[k^2 - m^2]^3 [(k+p)^2 - m^2]} + \\
&+ 4p^\alpha p^2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha}{[k^2 - m^2]^3 [(k+p)^2 - m^2]} - \\
&- 4p^\alpha p^\beta p^2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha k_\beta}{[k^2 - m^2]^4 [(k+p)^2 - m^2]} - \\
&- 8k^\alpha k^\beta k^\delta \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma k_\alpha k_\beta k_\delta}{[k^2 - m^2]^4 [(k+p)^2 - m^2]}. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

4.6 Cálculo de I_{k^2} , $I_{k^2 k_\nu}$ e $I_{k^2 k_\nu k_\mu}$

Agora iremos calcular as integrais com o termo k^2 no numerador. Temos:

$$I_{k^2} = \int_k \frac{k^2}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]}.$$

Para calcularmos essas integrais, somamos e subtraímos no numerador o

fator m^2 , então teremos:

$$I_{k^2} = \int_k \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2]}$$

que é divergente. Aplicando a RI:

$$\begin{aligned} I_{k^2} &= \int_k \frac{1}{[k^2 - m^2]} - p^2 \int_k \frac{1}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m^2]} \\ &\quad - 2p^\alpha \int_k \frac{k_\alpha}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m^2]} \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde definimos

$$I_{log} \equiv \int_k \frac{1}{[k^2 - m^2]}. \quad (4.19)$$

As duas últimas integrais na equação (4.18) são finitas e são calculadas como dito anteriormente.

As integrais $I_{k^2 k_\nu}$ e $I_{k^2 k_\mu k_\nu}$ são calculadas de forma análoga a essa e já teremos as suas respectivas partes finitas, pois serão idênticas às das integrais anteriores.

Resultados e discussão

*“If ignorance is bliss
Then knock the smile off my face”*

Rage against the machine

5.1 Introdução

Depois de calculadas as integrais citadas no capítulo anterior (e com a ajuda da tabela do apêndice C), obtivemos os fatores de forma T_1 a T_8 e, a partir deles, vamos analisar as identidades de Ward (IW). Neste capítulo vamos apresentar os resultados obtidos e discutí-los.

5.2 Fatores de forma T_1 a T_8

Com as integrais devidamente regularizadas, e tendo feito o cálculo das integrais nos momentos internos e nos parâmetros de Feynman, podemos encontrar os fatores de forma T_1, T_2, \dots, T_8 . Devido à invariância de Lorentz, e à forma dos fatores T_6, T_7 e T_8 , temos:

$$T_1 = \mp 4T_6 \quad (5.1)$$

$$T_2 = \mp 4T_7 = -\frac{1}{p^2}T_4 \quad (5.2)$$

$$T_3 = \mp 4T_8 = -\frac{1}{p^2}T_5. \quad (5.3)$$

Então, precisamos das expressões de T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5 . Calculando as integrais, isto é, calculando seus termos finitos e coletando os termos infinitos teremos (utilizando as RC do apêndice B) :

$$T_1 = \frac{1}{24\pi p^2} \quad (5.4)$$

$$T_2 = -\frac{1}{18\pi} - \frac{1}{48\pi} \ln\left(-\frac{\lambda^2}{p^2}\right) - \frac{i}{16} \left[\frac{4}{3} I_{\log}(\lambda^2) - 4\alpha_1 + 8\alpha_2 - \frac{16}{3}\alpha_3 \right] \quad (5.5)$$

$$T_3 = \frac{1}{144\pi} + \frac{1}{96\pi} \ln\left(-\frac{\lambda^2}{p^2}\right) - \frac{i}{16} \left[-\frac{2}{3} I_{\log}(\lambda^2) - 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - \frac{16}{3}\alpha_3 \right] \quad (5.6)$$

$$T_4 = \frac{p^2}{18\pi} + \frac{p^2}{48\pi} \ln\left(-\frac{\lambda^2}{p^2}\right) - i \frac{p^2}{16} \left[-\frac{4}{3} I_{\log}(\lambda^2) + 4\alpha_2 - \frac{8}{3}\alpha_3 \right] \quad (5.7)$$

$$T_5 = -\frac{p^2}{144\pi} - \frac{p^2}{96\pi} \ln\left(-\frac{\lambda^2}{p^2}\right) - i \frac{p^2}{16} \left[\frac{2}{3} I_{\log}(\lambda^2) - 4\alpha_1 + 6\alpha_2 - \frac{8}{3}\alpha_3 \right] \quad (5.8)$$

$$T_6 = \pm \left(-\frac{1}{96\pi p^2} \right) \quad (5.9)$$

$$T_7 = \pm \left(\frac{1}{72\pi} + \frac{1}{192\pi} \ln\left(-\frac{\lambda^2}{p^2}\right) + \frac{i}{64} \left[\frac{4}{3} I_{\log}(\lambda^2) - 4\alpha_1 + 8\alpha_2 - \frac{16}{3}\alpha_3 \right] \right) \quad (5.10)$$

$$T_8 = \pm \left(-\frac{1}{576\pi} - \frac{1}{384\pi} \ln\left(-\frac{\lambda^2}{p^2}\right) + \frac{i}{64} \left[-\frac{2}{3} I_{\log}(\lambda^2) - 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - \frac{16}{3}\alpha_3 \right] \right). \quad (5.11)$$

Onde α_1 , α_2 e α_3 são definidas no apêndice B.

Os fatores de forma não possuem divergência no infravermelho, pois a parametrização das integrais com a escala λ (que é arbitrária) nos garante a convergência quando $m \rightarrow 0$. Esta parametrização é feita a partir da identidade (2.85). De posse destes resultados podemos calcular as identidades de Ward e analisar seus termos anômalos.

5.3 Identidades de Ward

Nosso próximo passo é coletar esses fatores de forma nas identidades de Ward (3.12 - 3.15). Fazendo isso, obtemos:

*Invariância de Einstein***Parte Vetorial**

$$\begin{aligned}
p^2 T_1 + T_2 + 2T_3 &= 0 \\
\frac{1}{16} \left[-14\alpha_1 + 28\alpha_2 - 16\alpha_3 \right] &= 0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
p^2 T_2 + T_4 &= 0 \\
\frac{p^2}{16} \left[-4\alpha_1 + 12\alpha_2 - 8\alpha_3 \right] &= 0
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
p^2 T_3 + T_5 &= 0 \\
\frac{p^2}{16} \left[-9\alpha_1 + 16\alpha_2 - 8\alpha_3 \right] &= 0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Parte Axial

$$\begin{aligned}
3p^2 T_6 + 2T_7 + 4T_8 &= 0 \\
\mp \left(-\frac{1}{96\pi} + \frac{1}{64} \left[-28\alpha_1 + 56\alpha_2 - 32\alpha_3 \right] \right) &= 0
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
T_7 + 2T_8 &= 0 \\
\mp \left(\frac{1}{96\pi} + \frac{1}{64} \left[-14\alpha_1 + 28\alpha_2 - 16\alpha_3 \right] \right) &= 0
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Podemos observar que todas as divergências se cancelam automaticamente (i.e., os termos I_{log}), sem precisarmos fazer um procedimento de subtração nos fatores de forma. Este é um importante resultado, pois, como a

teoria é não-renormalizável seria inconveniente fazermos uma subtração de infinitos *a priori*.

Invariância de Weyl

Parte Vetorial

$$\begin{aligned}
 p^2 T_1 + 2T_2 + 4T_3 &= 0 \\
 \frac{1}{24\pi} + \frac{1}{16} \left[-28\alpha_1 + 56\alpha_2 - 32\alpha_3 \right] &= 0 \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p^2 T_2 + 2T_4 + 2T_5 &= 0 \\
 -\frac{p^2}{24\pi} + \frac{p^2}{16} \left[-12\alpha_1 + 28\alpha_2 - 16\alpha_3 \right] &= 0 \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

Parte Axial

$$\begin{aligned}
 p^2 T_6 + 2T_7 + 4T_8 &= 0 \\
 \mp \left(-\frac{1}{96\pi} + \frac{1}{64} \left[-28\alpha_1 + 56\alpha_2 - 32\alpha_3 \right] \right) &= 0 \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

Quando juntamos os resultados para a invariância de Weyl também percebemos que o resultado final independe de subtração dos infinitos nos fatores de forma.

5.4 Análise dos resultados

A partir dos dados da seção anterior, podemos ver que as anomalias (a quebra de alguma lei de conservação clássica) consistem na análise simultânea

das 8 equações acima. Dentre estas equações, notamos que 2 delas são múltiplas uma da outra - equação (5.17) e equação (5.19). Assim, temos liberdade para “excluir” um dos parâmetros α . Mesmo assim, em nosso método, ainda nos restam dois parâmetros dependentes de regularização, resultado também obtido na referencia [2], onde este problema foi tratado a partir da técnica de Fujikawa, que é não-perturbativa.

Uma outra observação é que seria conveniente que a anomalia esteja presente em uma “parte” da identidade de Ward (vetorial *ou* axial), ou na IW por inteiro (vetorial *e* axial) ou que não haja anomalia (identidade de Ward satisfeita). **Seguindo este raciocínio**, e observando as equações acima, podemos ver que na IW relativa à invariância de Einstein, *sempre* haverá anomalia em sua parte axial. Então, chegamos à conclusão que os dois parâmetros restantes (digamos, α_1 e α_2) devem ser iguais a zero, pois somente assim teremos anomalia apenas em sua parte axial (de outra maneira, poderíamos ter somente uma das equações relativas à parte axial satisfeita e a outra quebrada). Este resultado obriga a IW relativa à invariância de Weyl ser quebrada por inteiro.

Assim, chegamos aos mesmos resultados obtidos na literatura para as anomalias de Einstein e Weyl:

Anomalia de Einstein

$$p^\mu T_{\mu\nu\rho\sigma} = \mp \frac{1}{4} p^2 T_1 \varepsilon_{\nu\tau} p^\tau (p_\rho p_\sigma - g_{\rho\sigma} p^2) \quad (5.20)$$

Anomalia de Weyl

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu\rho\sigma} = -p^2 T_1 \left[(p_\rho p_\sigma - p^2 g_{\rho\sigma}) \mp \frac{1}{4} (\varepsilon_{\rho\tau} p^\tau p_\sigma + \varepsilon_{\sigma\tau} p^\tau p_\rho) \right] \quad (5.21)$$

Estes resultados são os mesmo obtidos utilizando a regularização dimen-

sional, porém, esta já assume por construção que todos os α 's são iguais a zero. No nosso cálculo, este valor é obtido como conclusão. Além disso, temos outras escolhas possíveis de como quebrar as IW, porém não seria conveniente, muito menos elegante, quebrar a IW em pontos diferentes.

Conclusões

Neste trabalho estudamos o problema de férmions sem massa acoplados a um campo gravitacional, as relativas leis de conservação clássica (invariância de Einstein e de Weyl) e a ocorrência de quebras quânticas de simetria (anomalias). Através do método de regularização implícita encontramos, como na referência [3], os fatores de forma da amplitude e as identidades de Ward (IW) relevantes. Os fatores de forma encontrados não possuem divergência no infravermelho como esperado, esta característica é bem descrita dentro da RI. Neste ponto do trabalho obtivemos um resultado importante pois nas IW todas as integrais divergentes se cancelam, sobrando apenas parâmetros arbitrários α 's advindos de diferenças de integrais divergentes; isto é interessante já que a teoria é não-renormalizável. Assim, não precisamos, como em [3], de fazer um procedimento de subtração “natural” nas integrais.

Outro resultado encontrado é que as IW dependem, em seu resultado final, de dois parâmetros arbitrários *dependentes de regularização*, resultado também encontrado em [2] utilizando o método de Fujikawa, que é não-perturbativo. Quando os cálculos são feitos utilizando outro método de regularização, estes parâmetros são fixados *a priori*. Seguindo o raciocínio de Jackiw [11] e de Smailagic [2], em que a física deve fixar onde a anomalia deve ou não surgir e que temos que observar as identidades de Ward por inteiro, chegamos à conclusão que os dois parâmetros devem ser nulos para garantir este raciocínio. Para isso também levamos em conta o fato de que, caso haja uma anomalia, ela deve estar presente somente em uma “parte” da identidade de Ward (axial ou vetorial) ou nela inteira. Este resultado é o mesmo encontrado na literatura (ver [3]), porém chegamos a ele por conclusão, e não por construção.

Sendo um trabalho de mestrado é importante ressaltar que vários temas foram abordados. Um pouco do formalismo de relatividade geral, a representação de integrais de caminho da teoria quântica de campos, o método de regularização implícita e também os cálculos relativos ao problema, que foram longos, porém não tão complexos. Portanto além de termos obtido resultados originais e relevantes, a nível de aprendizado este foi um trabalho excelente.

Variações do campo e Invariâncias

Para chegarmos às três leis de conservação que iremos estudar, vamos analisar a seguinte ação fermiônica

$$S_\psi = \int d^m x \frac{1}{2} e \bar{\psi} i (\gamma^\mu D_\mu - \overleftarrow{D}_\mu \gamma^\mu) \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi \quad (\text{A.1})$$

sob transformações infinitesimais de Lorentz, Einstein e Weyl.

A.1 Invariância de Lorentz

A ação fermiônica é invariante sob transformações de Lorentz locais infinitesimais, que são:

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^L e^a{}_\mu &= -\alpha^a{}_b e^b{}_\mu \\ \delta_\alpha^L E_a{}^\mu &= E_b{}^\mu \alpha^b{}_a \\ \delta_\alpha^L e &= 0 \\ \delta_\alpha^L \omega^a{}_{b\mu} &= D_\mu \alpha^a{}_b \\ \delta_\alpha^L \psi &= -\frac{1}{2} \alpha_{ab} \sigma^{ab} \psi \\ \delta_\alpha^L \bar{\psi} &= \frac{1}{2} \alpha_{ab} \bar{\psi} \sigma^{ab} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde α_{ab} é a matriz de rotação (anti-simétrica), $\sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b]$ e D_μ é a derivada covariante.

A variação da ação (A.1) sob transformações de Lorentz nos dá:

$$\delta_\alpha^L S_\psi = \int d^m x e T_a^\mu \delta_\alpha^L e^a{}_\mu = - \int d^m x e T_a^\mu \alpha^a{}_b e^b{}_\mu \quad (\text{A.3})$$

então temos que: *o tensor energia-momento é simétrico*, pois:

$$\delta_\alpha^L S_\psi = \int d^m x e \alpha_{ab} T^{ab} \quad (\text{A.4})$$

como a matrix de rotação é anti-simétrica, para a variação da ação ser zero, T^{ab} tem que ser simétrico,

$$\delta_\alpha^L = 0 \Leftrightarrow T^{ab} = T^{ba}. \quad (\text{A.5})$$

A.2 Invariância de Einstein

A ação fermiônica é invariante também sob transformações infinitesimais de Einstein:

$$\begin{aligned} \delta_\xi^c e^a{}_\mu &= \xi^\nu \partial_\nu e^a{}_\mu + e^a{}_\nu \partial_\mu \xi^\nu \\ \delta_\xi^c E_a{}^\mu &= \xi^\nu \partial_\nu E_a{}^\mu - \partial_\nu \xi^\mu E_a{}^\nu \\ \delta_\xi^c e &= \xi^\nu \partial_\nu e + e \partial_\nu \xi^\nu \\ \delta_\xi^c \omega^a{}_{b\mu} &= \xi^\nu \partial_\nu \omega^a{}_{b\mu} + \omega^a{}_{b\nu} \partial_\mu \xi^\nu \\ \delta_\xi^c \psi &= \xi^\nu \partial_\nu \psi \\ \delta_\xi^c \bar{\psi} &= \xi^\nu \partial_\nu \bar{\psi} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde ξ^ν é uma mudança nas coordenadas ($x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha(x)$).

Assim, variação da ação (A.1) fica:

$$\begin{aligned} \delta_\xi^c S_\psi &= \int d^m x e T_a^\mu \delta_\xi^c e^a{}_\mu \\ &= \int d^m x (e^a{}_\nu \nabla_\mu \xi^\nu + \xi^\nu \nabla_\nu e^a{}_\mu) e T_a^\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Integrando por partes o primeiro termo e manipulando o segundo para expressá-

lo em função da conexão de spin, temos:

$$\delta_\xi^c = - \int d^m x e \xi^\nu (\nabla_\mu T^\mu_\nu - \omega_{ab\nu} T^{ab}). \quad (\text{A.8})$$

O segundo termo se anula, pois o tensor energia-momento é simétrico enquanto a conexão de spin é anti-simétrica. Então, *o tensor energia-momento é covariantemente conservado*, já que:

$$\delta_\xi^c S_\psi = 0 \quad \text{e} \quad \delta_\alpha^L = 0 \Rightarrow \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Note que precisamos de invariância de Einstein e Lorentz para chegar a esse resultado.

A.3 Invariância de Weyl

As transformações de Weyl são devidas à um reescalonamento dos campos (são chamadas transformações conformais). As transformações de Weyl infinitesimais são:

$$\begin{aligned} \delta_\sigma^W e^a_\mu &= \sigma e^a_\mu \\ \delta_\sigma^W E_a^\mu &= -\sigma E_a^\mu \\ \delta_\sigma^W e &= m\sigma e \\ \delta_\sigma^W \omega^a_{b\mu} &= \partial_\nu \sigma (e^a_\mu E_b^\nu - e_{b\mu} E^{a\nu}) \\ \delta_\sigma^W \psi &= -r\sigma\psi \\ \delta_\sigma^W \bar{\psi} &= -r\sigma\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde σ é a reescala do campo, m é a dimensão do espaço e $r = \frac{m-1}{2}$.

Para a variação da ação sob transformações de Weyl temos:

$$\delta_\sigma^W S_\psi = \int d^m x e T^\mu_a \delta_\sigma^W e^a_\mu = \int d^m x e \sigma T^\mu_\mu. \quad (\text{A.11})$$

Então temos que *o tensor energia-momento possui traço nulo*. Esse fato vem diretamente de:

$$\delta_\sigma^W S_\psi = 0 \Leftrightarrow T^\mu_\mu = 0. \quad (\text{A.12})$$

Relações de consistência

O método de Regularização implícita faz uso de diferenças de integrais divergentes de mesma ordem. Através de tabelas de integrais temos as seguintes relações de consistência (todas as integrais são em 2-D, ou seja, $\int_k \equiv \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}$):

$$\Delta_{\mu\nu}^0 \equiv \int_k \frac{g_{\mu\nu}}{[k^2 - m^2]} - 2 \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2]^2}, \quad (\text{B.1})$$

$$\Delta_{\mu\nu\sigma\rho}^0 \equiv \int_k \frac{(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu})}{[k^2 - m^2]} - 8 \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\sigma k_\rho}{[k^2 - m^2]^3}, \text{ e} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta\mu\nu\sigma\rho}^0 \equiv & \int_k \left\{ \left[g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} + g_{\alpha\beta}g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} + g_{\alpha\beta}g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu} + \right. \right. \\ & + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g_{\sigma\rho} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\sigma}g_{\nu\rho} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\rho}g_{\sigma\nu} + \\ & + g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}g_{\sigma\rho} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\sigma}g_{\mu\rho} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\rho}g_{\mu\sigma} + \\ & + g_{\alpha\sigma}g_{\mu\beta}g_{\nu\rho} + g_{\alpha\sigma}g_{\mu\rho}g_{\beta\nu} + g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}g_{\mu\nu} + \\ & \left. + g_{\alpha\rho}g_{\mu\beta}g_{\nu\sigma} + g_{\alpha\rho}g_{\beta\nu}g_{\sigma\mu} + g_{\alpha\rho}g_{\mu\nu}g_{\sigma\beta} \right] \cdot \frac{1}{[k^2 - m^2]^4} \Big\} - \\ & - 48 \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - m^2]}. \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

Estas são as 3 relações de consistência utilizadas neste trabalho.

Tabela das integrais em x utilizadas

Para referência futura, listamos as integrais em x utilizadas no trabalho, **fazendo o limite** $m \rightarrow 0$ são:

$$\int_0^1 dx \frac{1}{(p^2 x(1-x) - m^2)} = -2 \frac{\ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right)}{p^2} \quad (\text{C.1})$$

$$\int_0^1 dx \frac{x}{(p^2 x(1-x) - m^2)} = -\ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right) \quad (\text{C.2})$$

$$\int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{(p^2 x(1-x) - m^2)} = \frac{1}{p^2} \quad (\text{C.3})$$

$$\int_0^1 dx \frac{1-x}{(p^2 x(1-x) - m^2)} = -\frac{\ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right)}{p^2} \quad (\text{C.4})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)x^3}{(p^2 x(1-x) - m^2)^2} = -\frac{\ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right) + 2}{p^4} \quad (\text{C.5})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)x^2}{(p^2 x(1-x) - m^2)^2} = -\frac{\ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right) + 1}{p^4} \quad (\text{C.6})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^2}{(p^2x(1-x) - m^2)} = -\frac{\ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right) + 1}{p^2} \quad (\text{C.7})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^2x^2}{(p^2x(1-x) - m^2)^2} = \frac{1}{p^4} \quad (\text{C.8})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^2x^4}{(p^2x(1-x) - m^2)^3} = -\frac{2\ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right) + 5}{2p^6} \quad (\text{C.9})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^2x}{(p^2x(1-x) - m^2)} = \frac{1}{2p^2} \quad (\text{C.10})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^2x^3}{(p^2x(1-x) - m^2)^2} = \frac{1}{2p^4} \quad (\text{C.11})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^2x^5}{(p^2x(1-x) - m^2)^3} = -\frac{\ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right) + 3}{p^6} \quad (\text{C.12})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^3x^5}{(p^2x(1-x) - m^2)^4} = -\frac{6\ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right) + 17}{6p^8} \quad (\text{C.13})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^3x^3}{(p^2x(1-x) - m^2)^3} = \frac{1}{p^6} \quad (\text{C.14})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^3x}{(p^2x(1-x) - m^2)^2} = -\frac{\ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right) + 2}{p^4} \quad (\text{C.15})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^3x^6}{(p^2x(1-x) - m^2)^4} = -\frac{3\ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right) + 10}{3p^8} \quad (\text{C.16})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^3x^4}{(p^2x(1-x) - m^2)^3} = \frac{1}{2p^6} \quad (\text{C.17})$$

$$(\text{C.18})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^3 x^2}{(p^2 x(1-x) - m^2)^2} = \frac{1}{2p^4} \quad (\text{C.19})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^3}{(p^2 x(1-x) - m^2)} = -\frac{2 \ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right) + 3}{2p^2} \quad (\text{C.20})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^3 x}{(p^2 x(1-x) - m^2)} = \frac{1}{3p^2} \quad (\text{C.21})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^3 x^7}{(p^2 x(1-x) - m^2)^4} = -\frac{3 \ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right) + 11}{3p^8} \quad (\text{C.22})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^3 x^3}{(p^2 x(1-x) - m^2)^2} = \frac{1}{6p^4} \quad (\text{C.23})$$

$$\int_0^1 dx \frac{(1-x)^3 x^5}{(p^2 x(1-x) - m^2)^3} = \frac{1}{3p^6}. \quad (\text{C.24})$$

As integrais acima assumem os valores dados *somente no limite* $m \rightarrow 0$. Ainda no limite $m \rightarrow 0$, porém conservando todos os termos temos por exemplo, para a primeira integral (C.1):

$$\int_0^1 dx \frac{1}{(p^2 x(1-x) - m^2)} = -2 \frac{\ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right)}{p^2} m^2 - 4 \frac{\ln\left(-\frac{m^2}{p^2}\right) + 1}{p^4} m^2 + \mathcal{O}(m^4), \quad (\text{C.25})$$

mas os termos de segunda ordem em m e acima são nulos para $m = 0$, então as integrais possuem os valores mencionados na tabela acima.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Alvarez-Gaumé, L., Witten, E., *Gravitational Anomalies*, Nuclear Physics B **234**, 269 (1983).
- [2] Smailagic, A., Spallucci, E. *Gravitational an Schwinger model anomalies: how far can the analogy go?*. hep-th/9204070 v2
- [3] Bertlmann, R. A., Kohlprath, E., *Two-dimensional gravitational anomalies, Schwinger terms and dispersion relations*, hep-th/0011067 v1.
- [4] Leutwyler, H., Mallik, S. *Gravitational Anomalies*, Z. Phys. C, **33**, 205 (1986).
- Tomiya, M. *The Schwinger Terms and the Gravitational Anomalies*, Phys. Letters B, **167**, 411 (1986).
- Langouche, F. *Gravitational an Lorentz Anomalies in Two-dimensions*, Phys. Letters B, **148**, 93 (1984).
- Leutwyler, H. *Gravitational Anomalies: a soluble two-dimensional model*, Phys. Letters B, **153**, 65 (1985).
- [5] Nemes, M. C., Sampaio, M. D., Baêta Scarpelli, A. P. *Consistency Relations for an implicit n-dimensional Regularization Scheme*, hep-th/0010285.
- [6] Scarpelli, A. P. B., Sampaio, M., Nemes, M. C., Hiller, B. *Chiral anomaly and CPT invariance in an implicit momentum space regularization framework*, hep-th/0102108 v2.
- Battistel, O. A., Mota, A. L., Nemes, M. C. , Mod. Phys. Letters A, **13**, 1597 (1998).

- Scarpelli, A. P. B., Sampaio, M., Nemes, M. C. *Chiral anomaly in a γ^5 friendly momentum space regularization scheme*, Phys. Letters D, **65**, (2002).
- Brizola, A., Sampaio, M., Nemes, M. C., Gobira, S. *Implicit regularization technique: calculation of the two loop ϕ_4^4 theory β -function*, Mod. Phys. Letters A, **14**, 1509 (1985).
- Batistel, O. A., Nemes, M. C. *Consistency in regularizations of the gauged NJL model at one loop level*, hep-th/98111554.
- [7] Pontes, C. R. *Tese de Mestrado do departamento de física da UFMG*.
- [8] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, 1972.
- Landau, L., Lifchitz, E. *Teoria do Campo*.
- Ohanian, H. C. *Gravitation and Spacetime*, 1976.
- [9] Bertlmann, R. A. *Anomalies in Quantum Field Theory*, 1996.
- [10] Ryder, L. *Quantum Field Theory*.
- Peskin, L., Lifchitz, E. *Introduction to Quantum Field Theory*.
- Ohanian, H. C. *Gravitation and Spacetime*, 1976.
- [11] Jackiw, R. *John Bell's Observation on the Chiral Anomaly and Some properties of its Descendants*. hep-th/0011274 v1