

**Ondas de Matéria e Propagação Paraxial da Luz**

Irismar Gonçalves da Paz

Agosto de 2006

# Ondas de Matéria e Propagação Paraxial da Luz

Irismar Gonçalves da Paz

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Maria Carolina Nemes

Co-orientador: Prof. Dr. José Geraldo Peixoto de Faria

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Física.

Agosto de 2006

*Aos meus pais Almir e Hortelina e à Rosana  
Vasconcelos, pelo apoio.*

# Agradecimentos

Dedico meus sinceros agradecimentos :

À professora Dra. Maria Carolina Nemes, pela orientação, amizade, incentivo e principalmente pela sua incansável boa vontade pra ensinar Física.

Ao professor Dr. José Geraldo, pela co-orientação e pela disponibilidade para discutir Física.

Ao professor Dr. Sebastião de Pádua, pela colaboração com a realização do experimento.

Ao professor Dr. José Pimentel de Lima, pelo início de minha carreira como Físico.

À toda minha família, pai, mãe, irmãs, sobrinho(a)s, tio(a)s, pelo apoio e incentivo.

À minha namorada Rosana Vasconcelos, pelo carinho, compreensão, apoio e incentivo.

Aos meus amigos de república, André, Maurisan , Jonathan e ao restante dos piauienses na UFMG, Alexandre, Héliques e Jonas, pela boa convivência.

Aos alunos do laboratório de Óptica Quântica da UFMG, pela ajuda com o manuseio dos instrumentos experimentais.

Aos alunos da Pós-Graduação em Física da UFMG, pela boa amizade.

À **FAPEMIG**, pelo apoio financeiro.

A Deus, pela proteção.

---

# Resumo

Características quânticas intrínsecas podem ser observadas em experimentos simples como, por exemplo, na difração de pacotes gaussianos. A evolução livre desses estados contém um tempo intrínseco característico do estado inicial,  $\tau_0 = \frac{m\sigma_0^2}{\hbar}$  que está fundamentalmente relacionado com características de “velocidade” de alargamento do pacote. Usando a saturação do determinante da matriz de covariância de Schrödinger para evoluções quadráticas, mostramos que a partir da análise de experimentos de fenda única que determinam as incertezas em posição e momento,  $\Delta x$  e  $\Delta p$ , é possível obter correlações não locais tais como  $\sigma_{xp} = \langle xp + px \rangle / 2$ . Este objeto está diretamente relacionado com o tempo característico  $\tau_0$ .

Observando ainda a perfeita analogia entre a equação de Schrödinger e a equação resultante da aproximação paraxial à equação de Helmholtz para a luz clássica, mostramos que, para feixes gaussianos, o comprimento de Rayleigh tem exatamente o papel de  $\tau_0$  na evolução da partícula livre e também está relacionado com a medida de correlação entre posição e momento do pacote gaussiano e sua transformada de Fourier.

A medida dessas correlações entre  $x$  e  $p$  no caso da luz foi por nós inferida a partir de uma experiência simples em nossos laboratórios de Óptica Quântica. No caso de partículas, mostramos que é possível determinar experimentalmente o valor dessas correlações a partir da difração de macromoléculas em uma fenda.

# Abstract

Intrinsic quantum characteristics can be observed in simple experiments like for example, the diffraction of Gaussian packets. The free evolution of these states have an intrinsic characteristic time of the initial state  $\tau_0 = \frac{m\sigma_0^2}{\hbar}$  that is fundamentally related with the characteristic “velocity” of the packet’s spreading. Using the saturation of the Schrödinger covariant matrix determinant for quadratic evolution we show that from the analysis of single slit experiments that determine the uncertainties of position and momentum,  $\Delta x$  and  $\Delta p$ , it is possible to obtain non-local correlations like  $\sigma_{xp} = \langle xp + px \rangle$ . This object is directly related with the characteristic time  $\tau_0$ .

Observing the perfect analogy between the Schrödinger equation and the resulting equation of the paraxial approximation of the Helmholtz equation for classical light, we show that for Gaussian beams, the Rayleigh length has exactly the role of  $\tau_0$  in the free particle evolution and is also related to the correlation measurement of position and momentum of the Gaussian packet and its Fourier transform.

The degree of correlations between  $x$  and  $p$  in the case of light was inferred by from a simple experiment in our Quantum Optics laboratory. In the case of particles, we showed that it is possible to determine experimentally the value of these correlations from the diffraction of molecules through a slit.

---

---

# CONTEÚDO

---

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2 Ferramentas</b>	<b>9</b>
2.1 Aproximação Paraxial e a Equação de Schrödinger . . . . .	9
2.2 Determinante de Schrödinger . . . . .	13
2.3 Princípio de Incerteza para a Luz . . . . .	16
<b>3 Analogia entre Onda de Matéria e Onda Clássica</b>	<b>20</b>
3.1 Determinação da Função de Green Para a Onda Eletromagnética	21
3.2 Determinação da Função de Green Bi-Dimensional Para a Partícula Livre . . . . .	23
3.3 Propagação Livre de um Feixe de Luz Gaussiano Monocromático	26
3.3.1 Largura e Processo de Alargamento do Feixe . . . . .	28

---

3.3.2	Raio de Curvatura do Feixe . . . . .	30
3.3.3	Fase do Feixe . . . . .	31
3.4	Propagação de um Pacote Gaussiano de Partícula Livre em 2-D	35
<b>4</b>	<b>O Experimento</b>	<b>40</b>
4.1	Determinando $\sigma_{xp}$ para a Luz . . . . .	40
4.2	Determinando $\sigma_{xp}$ para um Pacote Gaussiano de Partícula Livre ao se Propagar Através de uma Fenda Unidimensional .	51
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>61</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>64</b>

---

# LISTA DE FIGURAS

---

2.1	a) A magnitude como uma função da distância $z$ ; b) as frentes de ondas e as normais às frentes de onda de uma onda paraxial. . . . .	10
3.1	raio do feixe $w(z)$ tem seu valor mínimo $w_0$ na cintura $z = 0$ , atinge $\sqrt{2}w_0$ em $z = \pm z_0$ e aumenta linearmente com $z$ para $z$ grande . . . . .	28
3.2	Ilustração do significado geométrico de alguns dos parâmetros que caracterizam um feixe gaussiano monocromático . . . . .	30
3.3	O raio de curvatura $R(z)$ das frentes de ondas de um feixe gaussiano. A linha tracejada é o raio de curvatura de uma onda esférica . . . . .	31
3.4	Frentes de ondas de um feixe gaussiano . . . . .	32
3.5	$\zeta(z)$ é o atraso de fase do feixe gaussiano relativo a uma onda plana uniforme em pontos no eixo do feixe . . . . .	33
3.6	Frentes de onda de:(a) uma onda plana uniforme; (b) uma onda esférica; (c) um feixe gaussiano . . . . .	34
4.1	Intensidade $I$ em função da distância $\rho$ em diferentes distâncias axiais: (a) $z = 0$ ; (b) $z = z_0$ ; (c) $z = 2z_0$ . . . . .	40
4.2	Esboço do arranjo experimental utilizado na realização do experimento. . . . .	42
4.3	Curva experimental para a largura do feixe em função de $z$ . O ajuste eq.(4.4) fornece $w_0 = (50,0 \pm 0,50)\mu m$ e $z_c = (52,3 \pm 0,05)cm$ . . . . .	42

4.4	A curva acima mostra o perfil da intensidade do laser em $\bar{z} = 445mm$ . A curva abaixo é a transformada de Fourier obtida com a lente. Ajuste gaussiano eq.(4.2) fornece para essas curvas as larguras $w = (0,63918 \pm 0,003)mm$ e $w = (0,1068 \pm 0,001)mm$ , respectivamente . . . . .	44
4.5	A curva acima mostra o perfil da intensidade do laser em $\bar{z} = 552mm$ . A curva abaixo é a transformada de Fourier obtida com a lente. Ajuste gaussiano eq.(4.2) fornece para essas curvas as larguras $w = (0,65227 \pm 0,003)mm$ e $w = (0,1094 \pm 0,001)mm$ , respectivamente . . . . .	45
4.6	A curva acima mostra o perfil da intensidade do laser em $\bar{z} = 690mm$ . A curva abaixo é a transformada de Fourier obtida com a lente. Ajuste gaussiano eq.(4.2) fornece para essas curvas as larguras $w = (0,66292 \pm 0,003)mm$ e $w = (0,10415 \pm 0,001)mm$ , respectivamente. . . . .	46
4.7	A curva acima mostra o perfil da intensidade do laser em $\bar{z} = 879mm$ . A curva abaixo é a transformada de Fourier obtida com a lente. Ajuste gaussiano eq.(4.2) fornece para essas curvas as larguras $w = (0,67466 \pm 0,005)mm$ e $w = (0,10372 \pm 0,002)mm$ , respectivamente. . . . .	47
4.8	A curva acima mostra o perfil da intensidade do laser em $\bar{z} = 1000mm$ . A curva abaixo é a transformada de Fourier obtida com a lente. Ajuste gaussiano eq.(4.2) fornece para essas curvas as larguras $w = (0,69344 \pm 0,005)mm$ e $w = (0,1023 \pm 0,001)mm$ , respectivamente. . . . .	48
4.9	Resultado experimental para a medida da correlação posição-momento, em função de $\bar{z}$ , para o feixe gaussiano produzido pelo laser especificado.	49
4.10	Perfil do feixe gaussiano ao longo da direção de propagação $z$ . . . . .	51
4.11	Varição da incerteza na posição $\Delta x$ em função da largura da fenda $b$ . . . . .	57
4.12	Apenas o regime quântico da curva acima . . . . .	57
4.13	Varição da incerteza no momento $\Delta p$ em função da largura da fenda $b$ . . . . .	58
4.14	Apenas o regime quântico da curva acima . . . . .	58
4.15	Produto das incerteza, $\Delta x^2 \Delta p^2$ e correlação posição-momento, $\sigma_{xp}^2/4$ , em função da largura da fenda. . . . .	59

- 
- 4.16 Variação da incerteza na posição  $\Delta x$  em função da largura da fenda  $b$  para o limite de fendas muito grande. . . . . 60
- 4.17 Curva teórica para a variação da incerteza no momento em função da variação da incerteza na posição para um pacote gaussiano de moléculas de  $C_{70}$  se propagando livremente através de uma fenda . . . . . 60

# Introdução

---

Questões fundamentais relacionadas a alguns fenômenos quânticos contra-intuitivos podem atualmente ser testados experimentalmente. Entre estes, a natureza ondulatória de partículas. Por um lado, o princípio de correspondência de Bohr estabelece que o comportamento clássico deve ser observado para grandes números quânticos. Dado o impressionante progresso tecnológico nas últimas décadas pode-se agora testar a natureza ondulatória de cerca de  $10^7$  átomos no fenômeno de condensação de Bose-Einstein [1]

A investigação presente é devida a um “experimento gendanken”(Feynman) o qual contém todos os ingredientes básicos que tornam os resultados da teoria quântica tão contra-intuitivos. Os experimentos de multi-fendas de Zeilinger [2] mostram que fenômenos de interferência estão presentes em macromoléculas, os fulerenos, os quais contêm 60 átomos de carbono.

A maioria dos trabalhos na literatura referem-se a muitos experimentos que tentam mostrar que, a descrição em termos de ondas clássicas no limite de Fraunhofer quantitativamente adequado têm sido tentativas para mostrar que a equação de Schrodinger dadas as aproximações apropriadas pode ser colocada na forma de ondas de Fraunhofer.

Nosso escopo é completamente diferente e nós focamos a questão: já que a diferença básica do comportamento das ondas quânticas e das ondas Maxwellianas no vácuo é a sua relação de dispersão, podemos verificar experimentalmente tais diferenças? E ainda, há um limite para as ondas luminosas sob o qual elas irão exibir efeitos dispersivos?

Uma das diferenças fundamentais é que numa experiência de difração

envolvendo múltiplas fendas a frente de onda (de Maxwell, no vácuo) atinge todas as fendas com a **mesma** fase. No caso de partículas, devido à relação de dispersão, a fase em cada fenda será função da **posição** dessa fenda. Isto gera padrões de interferência que podem ser dramaticamente diferentes daqueles gerados pelas ondas clássicas referidas. Essas diferenças são controladas por um parâmetro que caracteriza o “envelhecimento” do pacote, no sentido da quantificação do seu alargamento comparado com a dispersão  $\Delta x$  inicial. Esse parâmetro tem unidade de tempo e é expresso em termos do pacote inicial como  $\tau_0 = \frac{m\sigma_0^2}{\hbar}$ , onde  $\sigma_0$  é a largura do pacote inicial e  $m$  é a massa da partícula. Outra característica marcante da evolução livre de ondas de matéria é a saturação da matriz de covariância de Schrödinger dada por

$$\sigma_{xx}\sigma_{pp} - \sigma_{xp}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (1.1)$$

onde  $\sigma_{xx} = \Delta x^2$ ,  $\sigma_{pp} = \Delta p^2$  e  $\sigma_{xp} = \frac{\langle xp+px \rangle}{2}$ . Observamos então que uma medida de  $\Delta x$  e  $\Delta p$  pode nos dizer, indiretamente e quantitativamente, o valor das correlações não locais  $\frac{1}{2} \langle xp+px \rangle$ . Estas correlações estão indiretamente relacionadas com o parâmetro  $\tau_0$ . Recentemente, um experimento[3] foi realizado para verificar o princípio de incerteza e  $\Delta x$  e  $\Delta p$  foram obtidos para a difração de macromoléculas em uma fenda com abertura variável. Modelamos o experimento supondo uma abertura gaussiana e obtivemos um resultado analítico para a intensidade observada na tela. Mostramos que, apesar do “obstáculo”, o determinante de Schrödinger continua saturado em  $\frac{\hbar^2}{4}$ . Por isso, mostramos que é possível obter desse experimento os termos cruzados  $\sigma_{xp}$ .

Estas características acima mencionadas são típicas da Mecânica Quântica. No entanto, existe uma aproximação bastante utilizada da equação de Helmholtz, a aproximação paraxial, que tem uma analogia completa com a equação de Schrödinger. Aqui também existe um comprimento característico relacionado à largura do envelope de onda,  $z_0$ , denominado comprimento de Rayleigh, que determina a escala a partir da qual a curvatura das frentes de onda se modifica. Não surpreendentemente mas curiosamente, é possível montar um esquema absolutamente análogo para a cinemática e dinâmica dessa equação com as da Mecânica Quântica. Por isso, neste caso, existe uma matriz de covariância análoga à de Schrödinger que também satura (em  $\frac{1}{4}$ ). Realizamos em nossos laboratórios de Óptica Quântica uma experiên-

cia para determinar as correlações  $\sigma_{xp}$  associadas à incerteza proveniente do pacote inicial e sua transformada de Fourier.

Esta dissertação está dividida como segue: no **capítulo 2**, estudamos as ferramentas necessárias ao desenvolvimento deste trabalho. Mostramos que existe uma completa analogia entre a equação de Schrödinger bidimensional para a partícula livre e a equação paraxial de Helmholtz. Devido a essa analogia desenvolvemos para a onda de luz um formalismo matemático completamente análogo ao usado em mecânica quântica. Determinamos a relação de incerteza generalizada de Schrödinger para ondas de matéria e mostramos que existe uma relação de incerteza equivalente para a luz. No **capítulo 3**, mostramos que a propagação de um pacote gaussiano de partículas livres apresenta resultados completamente análogos aos da propagação paraxial de feixes de luz gaussianos. No **capítulo 4**, mostramos resultados experimentais para a medida da correlação posição-momento para um feixe de luz gaussiano. Mostramos também, resultados teóricos para a propagação de pacotes gaussianos através de uma fenda gaussiana e comparamos com os resultados experimentais obtidos por Zeilinger [3].

---

# Ferramentas

---

Neste capítulo estudamos as ferramentas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Na seção 2.1 mostramos a aproximação necessária para obtermos a equação paraxial de Helmholtz, mostramos que essa equação é completamente análoga à equação de Schrödinger bidimensional para a partícula livre e, devido a essa analogia, desenvolvemos para a luz um formalismo matemático completamente análogo ao usado em Mecânica Quântica; na seção 2.2 demonstramos o princípio de incerteza de Schrödinger para partículas; na seção 2.3 obtivemos para a luz, o equivalente do princípio de incerteza generalizado de Schrödinger para uma função de onda  $u(x)$ .

## 2.1 Aproximação Paraxial e a Equação de Schrödinger

Começaremos essa seção enfatizando o que sejam **ondas paraxiais** e em seguida mostraremos as aproximações necessárias para obtermos a equação paraxial de Helmholtz, com a qual trabalharemos no capítulo 3.

Uma onda é dita paraxial se as normais às suas frentes de ondas são raios paraxiais, ou seja, raios que fazem um pequeno ângulo com o eixo de propagação. Uma maneira de construir uma onda paraxial seria considerar um “trem” de ondas, e modificar ou “modular” o envelope complexo  $A$  da onda plana  $A \exp(ikz)$ , fazendo-o variar lentamente como uma função da posição  $\mathbf{r}$ ,

$$E(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(ikz). \quad (2.1)$$

A variação de  $A(\mathbf{r})$  com a posição deve ser lenta dentro da distância de um

comprimento de onda  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ , de maneira que a onda mantenha aproximadamente sua natureza planar.

A função de onda

$$u(\mathbf{r}, t) = |A(\mathbf{r})| \cos [2\pi\nu t - kz + \arg \{A(\mathbf{r})\}] \quad (2.2)$$

de uma onda paraxial é esboçada na fig.(2.1a) como uma função de  $z$  em  $t = 0$  e  $x = y = 0$ . Essa é uma função senoidal de  $z$  com amplitude  $|A(0, 0, z)|$  e fase  $\arg \{A(0, 0, z)\}$  que varia lentamente com  $z$ . Uma vez que a mudança na fase  $\arg \{A(x, y, z)\}$  é pequena dentro da distância de um comprimento de onda, as frentes de ondas planas,  $kz = 2\pi q$  ( $q$  inteiro), do trem de ondas inclinam apenas levemente, de maneira que suas normais são raios paraxiais fig.(2.1b).

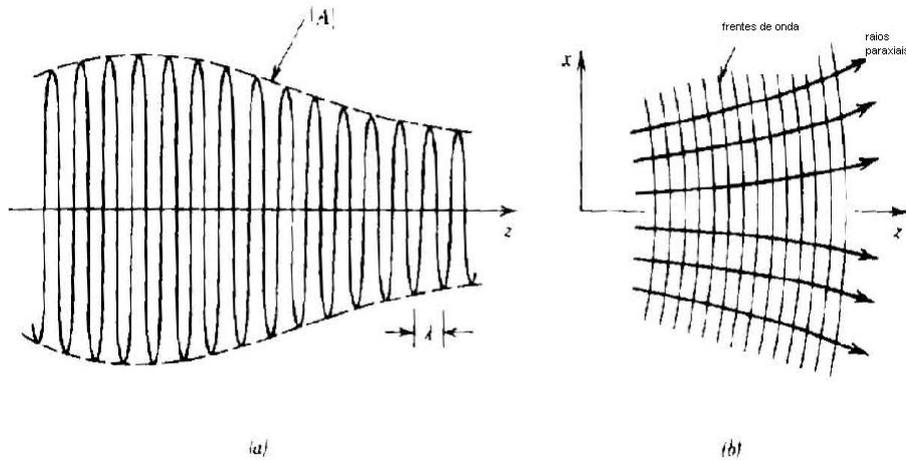


Figura 2.1: a) A magnitude como uma função da distância  $z$ ; b) as frentes de ondas e as normais às frentes de onda de uma onda paraxial.

A hipótese acima sobre o envelope complexo  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , nos permite fazer algumas aproximações que nos levam à equação paraxial de Helmholtz. Consideremos a seguir a aproximação paraxial para a onda de luz dada pela eq.(2.1). Para que a onda paraxial dada pela eq.(2.1) satisfaça a equação de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) E(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.3)$$

o envelope  $A(\mathbf{r})$  deve satisfazer uma outra equação diferencial parcial obtida

substituindo-se eq.(2.1) em eq.(2.3), ou seja,

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + i2k \frac{\partial}{\partial z} \right) A(x, y, z) \right] e^{ikz} = 0. \quad (2.4)$$

A suposição de que  $A(\mathbf{r})$  varia lentamente com  $z$ , como mostrado na fig.(2.1), significa que dentro da distância  $\Delta z = \lambda$ , a variação  $\Delta A$  é muito menor que o próprio  $A$ , isto é,  $\Delta A \ll A$ . Uma vez que  $\Delta A = \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right) \Delta z = \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right) \lambda$ , segue que  $\frac{\partial A}{\partial z} \ll \frac{A}{\lambda} = \frac{Ak}{2\pi}$ , e portanto

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA. \quad (2.5)$$

A derivada  $\frac{\partial A}{\partial z}$  também varia lentamente dentro da distância  $\lambda$ ,

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \ll 2k \frac{\partial A}{\partial z}, \quad (2.6)$$

e podemos portanto desprezar  $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$  na eq.(2.4). Assim obtemos a equação paraxial de Helmholtz

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i2k \frac{\partial}{\partial z} \right) A(x, y, z) = 0. \quad (2.7)$$

O envelope  $A(\mathbf{r})$  de um feixe gaussiano é uma solução exata da equação paraxial de Helmholtz (2.7), mas sua correspondente amplitude complexa  $E(\mathbf{r})$  é apenas uma solução aproximada da equação de Helmholtz (2.3). A aproximação é satisfatória se a condição (2.6) é satisfeita [4].

Note que, conforme discutido na introdução, essa equação tem exatamente a mesma forma da equação de Schrödinger bidimensional para a partícula livre

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i2 \frac{m}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(x, y, t) = 0 \quad (2.8)$$

com  $\frac{z}{v_z}$  fazendo o papel de um tempo fictício  $t$ . Onde  $v_z$  é a velocidade do pacote de ondas ao longo da direção clássica  $z$ .

Uma completa analogia entre essas equações torna-se mais clara ao es-

crevermos a eq.(2.7) em termos do comprimento de onda  $\lambda_L = \frac{2\pi}{k}$ , isto é,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i4\pi \frac{1}{\lambda_L} \frac{\partial}{\partial z} \right) A(x, y, z) = 0. \quad (2.9)$$

Onde o índice  $L$  foi usado para representar o comprimento de onda da luz. Na hipótese de velocidade constante podemos definir  $z = v_z t$ , e usar o comprimento de onda de de Broglie  $\lambda = \frac{h}{mv_z}$  para escrever a eq.(2.8) como

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i4\pi \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(x, y, t = z/v_z) = 0. \quad (2.10)$$

Então, na hipótese de velocidade constante, a evolução espacial das frentes de fase ao longo do eixo  $z$  podem ser analisadas em termos dinâmicos de partículas movendo-se no plano  $xy$  (Wilkins, 1996)[5]. Essa hipótese é adequada em experimentos realizados recentemente [3].

Devido à completa analogia entre as duas equações podemos, dentro do limite de validade da equação paraxial, desenvolver para essas ondas um formalismo matemático idêntico ao usado na Mecânica Quântica, estando subentendido sempre um espaço de Hilbert para o qual os polinômios de Hermite-Gauss são uma base ortonormal e completa.

É vantajoso definir uma relação de operadores num espaço abstrato e assim podermos usar a notação de Dirac que simplifica a realização de operações matemáticas. Um vetor base desse espaço é representado pelo ket  $|x, y\rangle$ . Nesse espaço, a função  $A(x, y, z)$  é representada pelo ket  $|A(z)\rangle$  e seu produto interno com o vetor da base  $|x, y\rangle$  fornece  $A(x, y, z)$ , ou seja,  $\langle x, y|A(z)\rangle = A(x, y, z)$ . Os operadores diferenciais  $(-i\frac{\partial}{\partial x})$  e  $(-i\frac{\partial}{\partial y})$  atuando nesse espaço, são representados no espaço abstrato de kets pelos operadores  $P_x$  e  $P_y$  [6]. Devemos lembrar que, assim como é na Mecânica Quântica, os auto-estados dos operadores diferenciais não precisam pertencer a um espaço de Hilbert.

O espaço abstrato mencionado anteriormente é munido das seguintes relações de comutação e completeza

$$[X, P_x] \equiv XP_x - P_x X = i \quad (2.11)$$

$$[Y, P_y] = i \quad (2.12)$$

$$[X, Y] = [X, P_y] = [Y, P_x] = 0 \quad (2.13)$$

onde

$$X|x\rangle = x|x\rangle \quad (2.14)$$

$$Y|y\rangle = y|y\rangle \quad (2.15)$$

$$P_x|p_x\rangle = p_x|p_x\rangle \quad (2.16)$$

$$P_y|p_y\rangle = p_y|p_y\rangle \quad (2.17)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy |x, y\rangle \langle x, y| = 1 \quad (2.18)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x dp_y |p_x, p_y\rangle \langle p_x, p_y| = 1 \quad (2.19)$$

$$\langle x, y | p_x, p_y \rangle = \frac{1}{2\pi} e^{ixp_x} e^{iy p_y}. \quad (2.20)$$

## 2.2 Determinante de Schrödinger

Sejam  $A$  e  $B$  dois observáveis, não necessariamente comutantes, os desvios quadráticos médios desses observáveis no estado  $|\psi\rangle$  são dados por

$$\sigma_A^{(\psi)^2} = \langle \psi | A^2 | \psi \rangle - \langle \psi | A | \psi \rangle^2 \quad (2.21)$$

e

$$\sigma_B^{(\psi)^2} = \langle \psi | B^2 | \psi \rangle - \langle \psi | B | \psi \rangle^2. \quad (2.22)$$

Uma forma útil de expressar os desvios quadráticos médios  $\sigma_A^{(\psi)}$  e  $\sigma_B^{(\psi)}$ , consiste em introduzir os operadores “deslocados” [7,8]

$$A_{(\psi)} \equiv A - \langle \psi | A | \psi \rangle I \quad (2.23)$$

e

$$B_{(\psi)} \equiv B - \langle \psi | B | \psi \rangle I \quad (2.24)$$

onde  $I$  é o operador identidade. Em termos desses operadores deslocados os desvios quadráticos médios tornam-se

$$\sigma_A^{(\psi)^2} = \langle \psi | A_{(\psi)}^2 | \psi \rangle \quad (2.25)$$

e

$$\sigma_B^{(\psi)^2} = \langle \psi | B_{(\psi)}^2 | \psi \rangle. \quad (2.26)$$

O produto  $\sigma_A^{(\psi)^2} \sigma_B^{(\psi)^2}$ , escrito em termos dos operadores deslocados fornece

$$\sigma_A^{(\psi)^2} \sigma_B^{(\psi)^2} = \langle \psi | A_{(\psi)}^2 | \psi \rangle \langle \psi | B_{(\psi)}^2 | \psi \rangle. \quad (2.27)$$

A desigualdade de Schwartz [9] nos permite escrever a eq.(2.27) da seguinte forma

$$\sigma_A^{(\psi)^2} \sigma_B^{(\psi)^2} \geq |\langle \psi | A_{(\psi)} B_{(\psi)} | \psi \rangle|^2. \quad (2.28)$$

O valor esperado do produto  $A_{(\psi)} B_{(\psi)}$  é em geral complexo se esses operadores não comutam. Daí segue que

$$|\langle \psi | A_{(\psi)} B_{(\psi)} | \psi \rangle|^2 = (\text{Re} \langle \psi | A_{(\psi)} B_{(\psi)} | \psi \rangle)^2 + (\text{Im} \langle \psi | A_{(\psi)} B_{(\psi)} | \psi \rangle)^2. \quad (2.29)$$

Usando a hermiticidade de  $A$  e  $B$  podemos expressar o segundo termo de eq.(2.29) em termos do comutador desses dois operadores. De fato

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \psi | A_{(\psi)} B_{(\psi)} | \psi \rangle &= \frac{1}{2i} (\langle \psi | A_{(\psi)} B_{(\psi)} | \psi \rangle - \langle \psi | A_{(\psi)} B_{(\psi)} | \psi \rangle^*) \\ &= \frac{1}{2i} (\langle \psi | A_{(\psi)} B_{(\psi)} | \psi \rangle - \langle \psi | B_{(\psi)} A_{(\psi)} | \psi \rangle) \\ &= \frac{\langle \psi | [A_{(\psi)}, B_{(\psi)}] | \psi \rangle}{2i} \\ &= \frac{\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle}{2i}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Agora, substituindo a eq.(2.30) na eq.(2.29) e esta na eq.(2.28), obtemos a seguinte desigualdade

$$\sigma_A^{(\psi)^2} \sigma_B^{(\psi)^2} \geq (\text{Re} \langle \psi | A_{(\psi)} B_{(\psi)} | \psi \rangle)^2 + \left( \frac{\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle}{2i} \right)^2. \quad (2.31)$$

Uma discussão completa a respeito da contribuição da parte real foi feita por Schrödinger em uma comunicação pouco conhecida à Academia de Ciências da Prússia, datada de 1930 [8]. Nessa comunicação, Schrödinger conserva

a contribuição da parte real, sendo, portanto, levado à desigualdade

$$\sigma_A^{(\psi)^2} \sigma_B^{(\psi)^2} \geq \left( \frac{\langle \psi | AB + BA | \psi \rangle}{2} - \langle \psi | A | \psi \rangle \langle \psi | B | \psi \rangle \right)^2 + \left| \frac{\langle \psi | AB - BA | \psi \rangle}{2} \right|^2, \quad (2.32)$$

que interpreta como estabelecendo uma relação entre *três* quantidades, a saber:

1. o produto dos quadrados dos desvios quadráticos médios;
2. o módulo quadrado da metade do valor médio do comutador e
3. “ uma quantidade que pode ser definida como o quadrado do desvio médio do produto, com a condição de que a não-comutatividade seja levada em conta, isto é, o desvio médio do produto deve ser definido como a média aritmética de  $\langle \psi | A_{(\psi)} B_{(\psi)} | \psi \rangle$  e  $\langle \psi | B_{(\psi)} A_{(\psi)} | \psi \rangle$  que são expressões ‘mistas’ completamente análogas a  $\sigma_A^{(\psi)^2}$  e  $\sigma_B^{(\psi)^2}$ ”.

Esta terceira quantidade é equivalente à covariância definida por [8]

$$\text{cov}(A, B) \equiv \sigma_{AB}^{(\psi)} \equiv \left\langle \frac{(A - \langle A_{(\psi)} \rangle)(B - \langle B_{(\psi)} \rangle) + (B - \langle B_{(\psi)} \rangle)(A - \langle A_{(\psi)} \rangle)}{2} \right\rangle \quad (2.33)$$

e recebe hoje o nome de *covariância* de  $A$  e  $B$  em  $|\psi\rangle$ . Definindo a matriz de covariância por

$$\Pi(A, B) = \begin{pmatrix} \sigma_A^{(\psi)^2} & \sigma_{AB}^{(\psi)} \\ \sigma_{BA}^{(\psi)} & \sigma_B^{(\psi)^2} \end{pmatrix}$$

obtemos para o determinante de Schrödinger a seguinte expressão canônica

$$\det(\Pi(A, B)) \geq \frac{1}{4} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|^2. \quad (2.34)$$

Para os observáveis  $X$  e  $P$ , que satisfazem a relação de comutação  $[X, P] = i\hbar$ , o determinante de Schrödinger é dado por

$$\det(\Pi(X, P)) \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (2.35)$$

onde observamos que esta relação de incerteza fornece a condição mínima para a incerteza de Heisenberg quando o termo correspondente à covariância  $\sigma_{xp}^{(\psi)}$  for nulo.

## 2.3 Princípio de Incerteza para a Luz

Considere a expansão em ondas planas da função de onda  $u(x, t)$  [10,11]

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(k) e^{-i[kx - \omega(k)t]}. \quad (2.36)$$

As amplitudes  $A(k)$  são determinadas por uma transformada de Fourier de  $u(x, 0)$  ( $t = 0$  por simplicidade)

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx u(x, 0) e^{ikx}. \quad (2.37)$$

$|u(x, t)|^2$  dá a distribuição do pacote de ondas no espaço no instante  $t$ .  $|A(k)|^2$  determina como as componentes de onda plana de determinado comprimento de onda (ou  $k$ ) contribuem para formar o pacote. Deste modo,

$$\langle x \rangle = \int |u(x, 0)|^2 x dx \quad (2.38)$$

e

$$\langle k \rangle = \int |A(k)|^2 k dk \quad (2.39)$$

correspondem, respectivamente, à posição e ao número de onda médio em  $t = 0$ . Vamos supor, por simplicidade, que

$$\int dx |u(x, 0)|^2 = 1 \quad (2.40)$$

isso implica em

$$\int dk |A(k)|^2 = 1. \quad (2.41)$$

Agora notemos que, partindo do resultado eq.(2.39)

$$\langle k \rangle = \int |A(k)|^2 k dk \quad (2.42)$$

podemos mostrar, após algumas manipulações, que

$$\langle k \rangle = i \int dx u^*(x, 0) \frac{\partial}{\partial x} u(x, 0). \quad (2.43)$$

Temos, também

$$\langle k^2 \rangle = \int dk k^2 |A(k)|^2, \quad (2.44)$$

que após algumas manipulações algébricas fica

$$\langle k^2 \rangle = - \int dx u^*(x, 0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, 0). \quad (2.45)$$

As variâncias  $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$  e  $\Delta k = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}$  determinam as larguras das distribuições  $u(x, 0)$  e  $A(k)$ , respectivamente. Façamos  $\Delta x = x - \langle x \rangle$  e  $\Delta k = k - \langle k \rangle$ . Temos

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (2.46)$$

$$\langle \Delta k^2 \rangle = \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 \quad (2.47)$$

Obtemos então

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \int dx |u(x, 0)|^2 \left( x - \int dx x |u(x, 0)|^2 \right)^2 \quad (2.48)$$

$$\langle \Delta k^2 \rangle = \int dk |A(k)|^2 \left( k - \int dk k |A(k)|^2 \right)^2 \quad (2.49)$$

mas

$$k - \int dk k |A(k)|^2 = k - i \int dx u^*(x, 0) \frac{\partial}{\partial x} u(x, 0) \quad (2.50)$$

então

$$\langle \Delta k^2 \rangle = - \int dx u^*(x, 0) \left[ \frac{\partial}{\partial x} - \int dx u^*(x, 0) \frac{\partial}{\partial x} u(x, 0) \right]^2 u(x, 0). \quad (2.51)$$

Logo

$$\begin{aligned} \langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta k^2 \rangle &= \int dx u^*(x, 0) (x - \langle x \rangle)^2 u(x, 0) \times \\ &\quad \times \int dx u^*(x, 0) \left( i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right)^2 u(x, 0). \end{aligned} \quad (2.52)$$

A desigualdade de Schwartz produz

$$\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta k^2 \rangle \geq \left| \int dx u^*(x, 0) (x - \langle x \rangle) \left( i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right) u(x, 0) \right|^2. \quad (2.53)$$

Podemos escrever  $(x - \langle x \rangle) (i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle)$  como

$$(x - \langle x \rangle) \left( i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right) = \frac{1}{2} \left[ x - \langle x \rangle, i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right] + \frac{1}{2} \left\{ x - \langle x \rangle, i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right\}. \quad (2.54)$$

Então

$$\begin{aligned} \langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta k^2 \rangle &\geq \frac{1}{4} \left| \int dx u^*(x) \left[ x - \langle x \rangle, i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right] u(x) + \right. \\ &\quad \left. + \int dx u^*(x) \left\{ x - \langle x \rangle, i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right\} u(x) \right|^2. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Como  $i \frac{\partial}{\partial x}$  é hermitiano, a integral

$$\int dx u^*(x) \left[ x - \langle x \rangle, i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right] u(x) \quad (2.56)$$

é imaginária e a integral

$$\int dx u^*(x) \left\{ x - \langle x \rangle, i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right\} u(x) \quad (2.57)$$

é real. Daí,

$$\begin{aligned} \langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta k^2 \rangle &\geq \frac{1}{4} \left| \int dx u^*(x) \left[ x - \langle x \rangle, i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right] u(x) \right|^2 + \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( \int dx u^*(x) \left\{ x - \langle x \rangle, i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right\} u(x) \right)^2. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Note que

$$\left[ x - \langle x \rangle, i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right] = \left[ x, i \frac{\partial}{\partial x} \right] = -i. \quad (2.59)$$

Por outro lado,

$$\left\{ x - \langle x \rangle, i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right\} = i \left( x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} x \right) - 2x \langle k \rangle - 2i \langle x \rangle \frac{\partial}{\partial x} + 2 \langle x \rangle \langle k \rangle. \quad (2.60)$$

Então

$$\int dx u^*(x) \left\{ x - \langle x \rangle, i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right\} u(x) = i \int dx u^*(x) \left( x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} x \right) u(x) - 2 \langle x \rangle \langle k \rangle. \quad (2.61)$$

Portanto

$$\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta k^2 \rangle - \frac{1}{4} \left( i \int dx u^*(x) \left( x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} x \right) u(x) - 2 \langle x \rangle \langle k \rangle \right)^2 \geq \frac{1}{4} \quad (2.62)$$

ou ainda,

$$\sigma_{xx} \sigma_{kk} - \sigma_{xk}^2 \geq \frac{1}{4} \quad (2.63)$$

onde

$$\sigma_{xx} = \langle \Delta x^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle, \quad (2.64)$$

$$\sigma_{kk} = \langle \Delta k^2 \rangle = \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle \quad (2.65)$$

e

$$\sigma_{xk} = \frac{i}{2} \int dx u^*(x) \left( x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} x \right) u(x) - \langle x \rangle \langle k \rangle. \quad (2.66)$$

A eq.(2.63) é o equivalente do princípio de incerteza generalizada para uma função de onda  $u(x)$ .

---

## Analogia entre Onda de Matéria e Onda Clássica

---

Louis de Broglie (1923)[12] sugeriu que as partículas da matéria se propagam como ondas, com um comprimento de onda dado por

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (3.1)$$

onde  $h$  é a constante de Plank e  $p$  é o momento da partícula. Essa idéia notável motivou a equação de Schrödinger, que descreve a propagação de tais ondas. As hipóteses de de Broglie implicam na existência de um tipo de óptica totalmente novo, isto é, óptica de onda de matéria, na qual ondas de elétrons, de neutrons, de átomos e até mesmo ondas de moléculas podem ser manipuladas coerentemente [13].

Como vimos, a equação paraxial de Helmholtz tem exatamente a mesma forma da equação de Schrödinger dependente do tempo com  $\frac{z}{v_z}$  fazendo o papel de um tempo fictício  $t$ . Isso permite uma analogia imediata entre os parâmetros característicos da evolução dada pela eq.(2.9) tais como o comprimento de Rayleigh e fase de Gouy com os parâmetros característicos da onda livre de Schrödinger, o tempo característico de evolução de correlação entre  $x$  e  $p$  e uma fase geométrica (usualmente desprezada). Um outro resultado importante, que completa essa analogia é a existência de uma relação de incerteza generalizada, equivalente à de Schrödinger, para a luz paraxial da mesma forma que existe para partículas.

A seguir, na seção 3.1 determinamos a função de Green para a onda

eletromagnética; na seção 3.2 determinamos a função de Green para a partícula livre em duas dimensões (2-D) e comparamos o resultado com o determinado para a onda eletromagnética; na seção 3.3 propagamos um feixe gaussiano monocromático no espaço livre, interpretando com detalhes as propriedades do feixe propagado, também mostramos que o feixe propagado satura o equivalente do princípio de incerteza generalizado determinado na eq.(2.63), em qualquer  $z$ ; na seção 3.4 propagamos um pacote gaussiano de partículas livres em (2-D), mostramos analogias um a um existentes entre as propriedades do feixe de luz e do pacote de ondas de partícula livre propagados, também mostramos que o pacote de ondas propagado satura a relação de incerteza generalizada de Schrödinger em qualquer tempo.

### 3.1 Determinação da Função de Green Para a Onda Eletromagnética

No espaço das funções contendo  $A(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{r}, t | A \rangle$ , tratado na seção 2.1, vamos definir o operador deslocamento longitudinal  $H_l$  (semelhante ao que fazemos em Mecânica Quântica quando definimos o hamiltoniano  $H$  como gerador de deslocamento temporal [17]) como

$$H_l = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = P_x^2 + P_y^2. \quad (3.2)$$

Com essa definição, a equação paraxial de Helmholtz (2.7) pode ser escrita como

$$H_l |A(z)\rangle = i2k \frac{\partial}{\partial z} |A(z)\rangle. \quad (3.3)$$

O operador  $H_l$  satisfaz a condição  $\frac{dH_l}{dz} = 0$ , assim podemos definir o operador evolução longitudinal  $U_l(z, z_j)$  como

$$U_l(z, z_j) = e^{-i \frac{(z-z_j)}{2k} H_l} \quad (3.4)$$

e escrever

$$|A(z)\rangle = U_l(z, z_j) |A(z_j)\rangle \quad (3.5)$$

onde podemos observar que  $U_l^\dagger U_l = 1$ . Essa forma do operador evolução vale para ambas as direções de propagação. A propagação na direção  $z$  negativa

origina o sinal menos que pode ser compensado trocando-se  $k$  por  $-k$ .

Com  $U_l$  definido pela eq.(3.4) podemos mostrar que

$$A(x, y, z) = \int G_L(x, y, z; x_j, y_j, z_j) A(x_j, y_j, z_j) dx_j dy_j \quad (3.6)$$

Onde  $G_L(x, y, z; x_j, y_j, z_j)$  definido por

$$G_L(x, y, z; x_j, y_j, z_j) \equiv \langle x, y | U_l(z, z_j) | x_j, y_j \rangle \quad (3.7)$$

é a função de Green para a onda eletromagnética em meios isotrópicos. O índice  $L$  foi usado para representar a função de Green para a onda eletromagnética. Fazendo  $z_j = 0$  e substituindo eq.(3.4) em (3.7) encontramos para  $G_L(x, y, z; x_j, y_j, 0)$  o seguinte resultado

$$G_L(x, y, z; x_j, y_j, 0) = \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int \int e^{i[(x-x_j)p_x + (y-y_j)p_y]} e^{-iz(p_x^2 + p_y^2)/2k} dp_x dp_y. \quad (3.8)$$

Na obtenção da eq.(3.8) utilizamos as relações dadas por eq.(2.19) e (2.20). A eq.(3.8) é o produto de duas transformadas de Fourier unidimensionais de funções gaussianas, cuja solução é dada por [14]

$$\int e^{-\beta^2 \xi^2} e^{-ix\xi} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-x^2/4\beta^2}. \quad (3.9)$$

Isso nos permite obter para  $G_L(x, y, z; x_j, y_j, 0)$  o resultado

$$G_L(x, y, z; x_j, y_j, 0) = -i \frac{k}{2\pi z} \exp \left\{ i \frac{k}{2z} [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] \right\}. \quad (3.10)$$

Esse propagador é idêntico ao kernel da integral de difração de Fresnel-Kirchhoff na aproximação paraxial [6,15].

Em termos do comprimento de onda  $\lambda_L$  a função de Green (3.10) toma a forma

$$G_L(x, y, z; x_j, y_j, 0) = -\frac{i}{\lambda_L z} \exp \left\{ \frac{i\pi}{\lambda_L z} [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] \right\}. \quad (3.11)$$

$G_L(x, y, z; x_j, y_j, 0)$  escrito dessa forma nos permite fazer uma completa analogia com o propagador para partícula livre determinado na próxima seção.

## 3.2 Determinação da Função de Green Bi-Dimensional Para a Partícula Livre

Na representação de Schrödinger a evolução temporal do estado é dada pela equação de Schrödinger

$$H | \psi \rangle = i\hbar \frac{d}{dt} | \psi \rangle. \quad (3.12)$$

Existem determinados casos importantes nos quais  $\frac{dH}{dt} = 0$ , e assim podemos escrever a evolução temporal do estado como

$$| \psi \rangle_t = U(t) | \psi \rangle_{t_0=0}, \quad (3.13)$$

com

$$U(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}. \quad (3.14)$$

Onde fizemos  $t_0 = 0$  por simplicidade.

Na representação de posição, para o caso 2-D, a equação de Schrödinger, eq.(3.12), é dada por

$$\int \int \langle x, y | H | x_j, y_j \rangle \psi(x_j, y_j, t) dx_j dy_j = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y, t), \quad (3.15)$$

onde  $\psi(x, y, t) = \langle x, y | \psi(t) \rangle$ . Na obtenção de eq.(3.15) inserimos a relação de completudeza

$$\int \int |x_j, y_j\rangle \langle x_j, y_j| dx_j dy_j = 1. \quad (3.16)$$

Agora, inserindo os resultados dados pelas eqs.(3.13) e (3.14) em eq.(3.15) chegamos na seguinte expressão para a função de onda [7,16]

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= \int \int \langle x, y | U(t) | x_j, y_j \rangle \psi(x_j, y_j, 0) dy \\ &= \int \int G_{pl}(x, y, t; x_j, y_j, 0) \psi(x_j, y_j, 0) dx_j dy_j \end{aligned} \quad (3.17)$$

com

$$G_{pl}(x, y, t; x_j, y_j, 0) \equiv \langle x, y | U(t) | x_j, y_j \rangle. \quad (3.18)$$

Onde o índice  $pl$  foi usado para representar a função de Green para a partícula livre.

Mostramos dessa maneira que o valor da função de onda (na descrição de Schrödinger) de uma partícula livre no ponto  $(x, y)$  e no tempo  $t$ ,  $\psi(x, y, t)$ , pode ser expresso em termos dos valores da função de onda em pontos diferentes do espaço-tempo,  $\psi(x_j, y_j, 0)$ , conforme está proposto no exercício (3.13) do livro mecânica quântica de Toledo Piza (2003) [7]. Aqui o operador evolução temporal eq.(3.14) foi substituído pela função de Green eq.(3.18).

Agora vamos obter  $G_{pl}(x, y, t; x_j, y_j, 0)$  para o caso particular da partícula livre. O hamiltoniano da partícula livre em 2-D é dado por

$$H = \frac{P^2}{2m} = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2), \quad (3.19)$$

onde  $P$  é o operador momento linear. Dessa maneira  $U(t)$  torna-se

$$U(t) = e^{-\frac{it}{2m\hbar}(P_x^2 + P_y^2)}. \quad (3.20)$$

A expressão para  $G_{pl}(x, y, t; x_j, y_j, 0)$  é obtida da definição eq.(3.18)

$$G_{pl}(x, y, t; x_j, y_j, 0) = \langle x, y | U(t) | x_j, y_j \rangle = \langle x, y | e^{-\frac{it}{2m\hbar}(P_x^2 + P_y^2)} | x_j, y_j \rangle. \quad (3.21)$$

O operador  $U(t)$  para a partícula livre opera na base dos momentos, isto é, na base  $|p_x, p_y\rangle = |p_x\rangle \otimes |p_y\rangle$ , que satisfaz a relação de completeza

$$\int \int |p_x, p_y\rangle \langle p_x, p_y| dp_x dp_y = 1. \quad (3.22)$$

Isso nos permite resolver a eq.(3.22) inserindo completezas em momentos, o

que resulta na seguinte expressão para  $G_{pl}(x, y, t; x_j, y_j, 0)$

$$\begin{aligned} G_{pl}(x, y, t; x_j, y_j, 0) &= \int \int \int \int dp_x dp_y dp'_x dp'_y \langle x, y | p_x, p_y \rangle \\ &\times \langle p_x, p_y | e^{-\frac{it}{2m\hbar}(P_x^2 + P_y^2)} | p'_x, p'_y \rangle \langle p'_x, p'_y | x_j, y_j \rangle \\ &= \int \int \int \int dp_x dp_y dp'_x dp'_y \langle x, y | p_x, p_y \rangle \\ &\times \langle p_x, p_y | p'_x, p'_y \rangle e^{-\frac{it}{2m\hbar}(p_x^2 + p_y^2)} \langle p'_x, p'_y | x_j, y_j \rangle. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Com [9,17]

$$\langle x, y | p_x, p_y \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i\frac{p_x}{\hbar}x} e^{i\frac{p_y}{\hbar}y}, \quad (3.24)$$

$$\langle p_x, p_y | p'_x, p'_y \rangle = \delta(p_x - p'_x) \delta(p_y - p'_y) \quad (3.25)$$

e a propriedade de filtro da função Delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p - p') f(p) dp = f(p') \quad (3.26)$$

obtemos para  $G_{pl}(x, y, t; x_j, y_j, 0)$  a expressão

$$\begin{aligned} G_{pl}(x, y, t; x_j, y_j, 0) &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int \int dp_x dp_y e^{-\frac{it}{2m\hbar}(p_x^2 + p_y^2)} e^{\frac{i}{\hbar}[p_x(x-x_j) + p_y(y-y_j)]} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int dp_x e^{-\frac{it}{2m\hbar}p_x^2} e^{\frac{i}{\hbar}p_x(x-x_j)} \times \\ &\times \int dp_y e^{-\frac{it}{2m\hbar}p_y^2} e^{\frac{i}{\hbar}p_y(y-y_j)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

A eq.(3.27) nos diz que podemos resolver a integral em cada componente separadamente. Para a componente  $p_x$  por exemplo, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right) \int dp_x e^{-\frac{it}{2m\hbar}p_x^2} e^{\frac{i}{\hbar}p_x(x-x_j)} &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right) \int dp e^{-(ap^2 + 2bp)} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde  $a = \frac{it}{2m\hbar}$  e  $b = -\frac{i}{\hbar}(x - y)$ . A validade do resultado eq.(3.28) exige que  $Im[a] > 0$ , o que implica nas seguintes condições:

1.  $t > 0$  (a dinâmica quântica é preditiva, não retroativa) e
2.  $\hbar$  deve se posicionar na metade superior do 'plano  $\hbar$  complexo', de maneira que

$$\frac{i}{\hbar} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{i}{\hbar + i\epsilon} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\epsilon}{\hbar^2 + \epsilon^2} + i \frac{\hbar}{\hbar^2 + \epsilon^2} \right) \quad (3.29)$$

garantindo a convergência da integral (3.28)[16,18]. A integral na componente  $p_y$  também fornece o resultado eq.(3.28) e assim finalmente obtemos

$$G_{pl}(x, y, t; x_j, y_j, 0) = \frac{m}{2\pi i \hbar t} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar t} [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] \right\}. \quad (3.30)$$

Esse objeto é a representação de Schrödinger do operador de evolução (também eventualmente chamado **propagador de Schrödinger** para a partícula livre), e consiste na realidade de um “elemento de matriz” desse operador, tomado com os autovalores impróprios do operador de posição, que pode ser interpretado como a amplitude da probabilidade de que uma partícula livre localizada na posição  $(x_j, y_j)$  em  $t = 0$  seja encontrada na posição  $(x, y)$  no tempo  $t$ .

Em termos do comprimento de onda de de Broglie e na hipótese de velocidade constante a função de Green (3.30) pode ser escrita como

$$G_{pl}(x, y, t = z/v_z; x_j, y_j, 0) = -\frac{i}{\lambda z} \exp \left\{ \frac{i\pi}{\lambda z} [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] \right\}. \quad (3.31)$$

Esse propagador (ou função de Green) é completamente análogo ao propagador determinado na eq.(3.11) para a onda eletromagnética.

### 3.3 Propagação Livre de um Feixe de Luz Gaussiano Monocromático

Usamos o propagador determinado na equação (3.10) para obtermos o campo numa dada posição  $z \geq 0$  do espaço a partir da propagação de um campo gaussiano em  $z = 0$ . Feixes gaussianos são muito importantes pois são produzidos pela maioria dos lasers comumente usados [14,19]. Em  $z = 0$

vamos considerar um feixe gaussiano gerado pela distribuição de campo

$$E(x, y, 0) = N e^{-(x^2+y^2)/w_0^2} \quad (3.32)$$

onde  $N$  é uma constante de normalização. Podemos observar que, ao nos afastarmos de uma distância  $\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = w_0$  do eixo  $z$ , eixo de simetria do feixe, a amplitude do campo diminui  $\frac{1}{e}$  da amplitude máxima. O campo na região  $z \geq 0$  é dado por

$$E(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_L(x - x_j, y - y_j, z) E(x_j, y_j, 0) dx_j dy_j. \quad (3.33)$$

Após algumas manipulações algébricas [4,14] obtemos

$$E(x, y, z) = N \left(\frac{w_0}{w(z)}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right) \exp\left\{i \left[ k \left( z + \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right) - i\zeta(z) \right]\right\}. \quad (3.34)$$

onde

$$w(z) = w_0 \left[ 1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.35)$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right], \quad (3.36)$$

$$\zeta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (3.37)$$

e

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_L}. \quad (3.38)$$

As equações (3.35), (3.36) e (3.37) determinam as propriedades do feixe gaussiano e serão analisadas detalhadamente nas subseções a seguir. O parâmetro  $z_0$  definido pela eq.(3.38) é uma distância característica do feixe ao longo da sua direção de propagação que estabelece uma escala para a variação dos outros parâmetros definidos pelas eqs.(3.35), (3.36) e (3.37). Esse parâmetro é conhecido como **comprimento de Rayleigh**.

### 3.3.1 Largura e Processo de Alargamento do Feixe

A quantidade  $w(z)$  dada pela eq.(3.35)

$$w(z) = w_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.39)$$

é chamada de largura ou raio do feixe. Vemos que tal quantidade assume o valor mínimo  $w_0$  no plano  $z = 0$ , e é chamada cintura do feixe ( $w_0$  é o raio da cintura do feixe); atinge o valor  $\sqrt{2}w_0$  no plano  $z = z_0$ , e continua aumentando monotonicamente com  $z$  fig.(3.1) (fig.3.1.3 Photonics) [4].

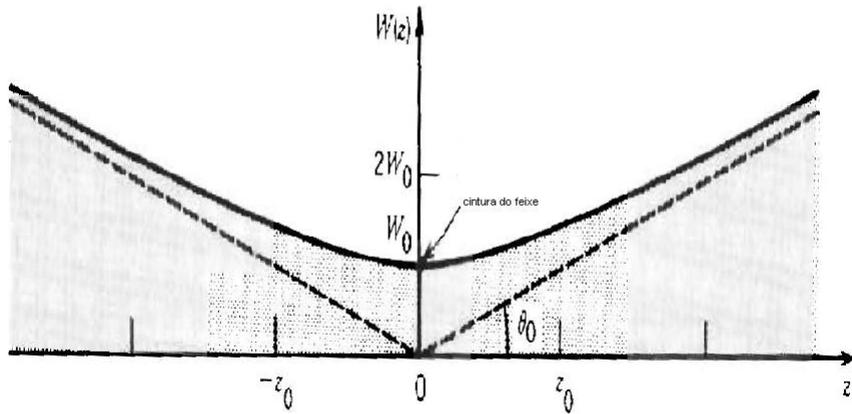


Figura 3.1: raio do feixe  $w(z)$  tem seu valor mínimo  $w_0$  na cintura  $z = 0$ , atinge  $\sqrt{2}w_0$  em  $z = \pm z_0$  e aumenta linearmente com  $z$  para  $z$  grande .

Para estudarmos o processo de alargamento espacial do feixe trabalhamos com a fase do feixe propagado

$$\varphi(\rho, z) = k \left( z + \frac{\rho^2}{2R(z)} \right) - \zeta(z), \quad (3.40)$$

onde

$$\rho^2 = x^2 + y^2. \quad (3.41)$$

Tomando o gradiente transverso da eq.(3.40) obtemos

$$\nabla_T \varphi(\rho, z) = k \frac{w_0}{z_0} \frac{z}{\sqrt{z^2 + z_0^2}} \left( \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta \right), \quad (3.42)$$

onde

$$\nabla_T = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.43)$$

e

$$x = w(z) \cos \theta \quad (3.44)$$

$$y = w(z) \sin \theta. \quad (3.45)$$

O módulo da eq.(3.42) é

$$|\nabla_T \varphi(\rho, z)| = k \frac{w_0}{z_0} \frac{z}{\sqrt{z^2 + z_0^2}}. \quad (3.46)$$

A eq.(3.46) representa a taxa na qual o feixe se alarga à medida que se propaga na direção  $z$  pois  $|\nabla_T \varphi(\rho, z)| = \frac{dw(z)}{dz}$ . O fato de  $\nabla_T$  ser um gradiente transverso nos leva a concluir que o alargamento do feixe ocorre porque a fase  $\varphi$  depende das direções transversas à direção de propagação. Analisando os limites  $z \gg z_0$  e  $z \ll z_0$  na eq.(3.46) obtemos, respectivamente

$$|\nabla_T \varphi| = k \frac{w_0}{z_0}, \quad z \gg z_0, \quad (3.47)$$

e

$$|\nabla_T \varphi| = k \frac{w_0 z}{z_0^2}, \quad z \ll z_0. \quad (3.48)$$

As eqs.(3.47) e (3.48) mostram que a taxa de alargamento do feixe distante da região focal ( $z \gg z_0$ ) é constante, e que a taxa de alargamento próximo da região focal ( $z \ll z_0$ ) aumenta linearmente com  $z$ .

Longe do centro do feixe, quando ( $z \gg z_0$ ), o raio do feixe aumenta aproximadamente de forma linear com  $z$

$$w(z) \simeq \frac{w_0}{z_0} z = \theta_0 z, \quad (3.49)$$

onde definimos um cone com o semi-ângulo  $\theta_0$  dado por

$$\theta_0 = \frac{w_0}{z_0} \quad (3.50)$$

mostrado na fig.(3.1). Cerca de 86% da potência do feixe está confinada dentro desse cone. Usando as eqs.(3.38) e (3.50) podemos definir a divergência angular do feixe como

$$\theta_0 = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_L}{2w_0}. \quad (3.51)$$

A divergência do feixe é diretamente proporcional ao comprimento de onda  $\lambda_L$  e inversamente proporcional ao diâmetro da cintura do feixe  $2w_0$ . Se a cintura é comprimida, o feixe diverge. Para obter um feixe altamente direcional, portanto, um curto comprimento de onda e uma cintura de feixe larga devem ser usados [4].

### 3.3.2 Raio de Curvatura do Feixe

O raio de curvatura das frentes de onda do feixe gaussiano é dado pela eq.(3.36)

$$\begin{aligned} R(z) &= z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \\ &= z \left[ 1 + d(z)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde  $d(z) = \frac{z_0}{z}$  representa uma distância atrás do plano da fonte em  $z = 0$  (isto é, no semi-espaço  $z \leq 0$ ) conforme fig.(3.2)(fig.5.20 Mandel) [14].

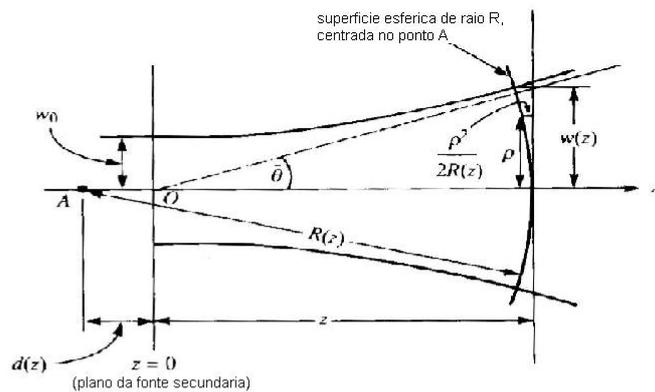


Figura 3.2: Ilustração do significado geométrico de alguns dos parâmetros que caracterizam um feixe gaussiano monocromático

Como mostrado na fig.(3.3) (fig.3.1.6 Photonics)[4], o raio de curvatura é infinito em  $z = 0$ , correspondendo a frentes de ondas planas. Ele diminui para o valor mínimo  $2z_0$  em  $z = z_0$ , correspondendo a frentes de onda de curvatura máxima fig.(3.4)[fig.(3.1.7 Photonics) [4].

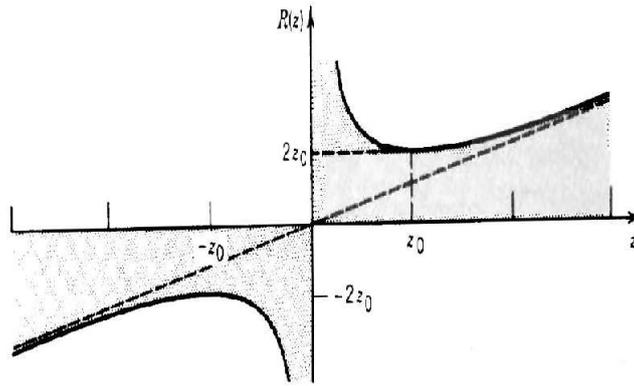


Figura 3.3: O raio de curvatura  $R(z)$  das frentes de ondas de um feixe gaussiano. A linha tracejada é o raio de curvatura de uma onda esférica .

O valor mínimo  $z = \pm z_0$  mostrado na fig.(3.4) é obtido das equações

$$\frac{dR(z)}{dz} = 0 \tag{3.53}$$

e

$$\frac{d^2R(z)}{dz^2} > 0. \tag{3.54}$$

Após passar pelo mínimo, o raio de curvatura aumenta com  $z$  até atingir o valor  $R(z) \simeq z$  para  $z \gg z_0$  caracterizando as frentes de onda como aproximadamente esféricas.

Adotamos a convenção de que uma frente de onda divergente tem um raio de curvatura positivo, enquanto que uma frente de onda convergente tem um raio de curvatura negativo [4].

### 3.3.3 Fase do Feixe

A fase do feixe gaussiano eq.(3.34) é dada por eq.(3.40). O primeiro termo em (3.40) é responsável pela curvatura das frentes de onda. Ele representa

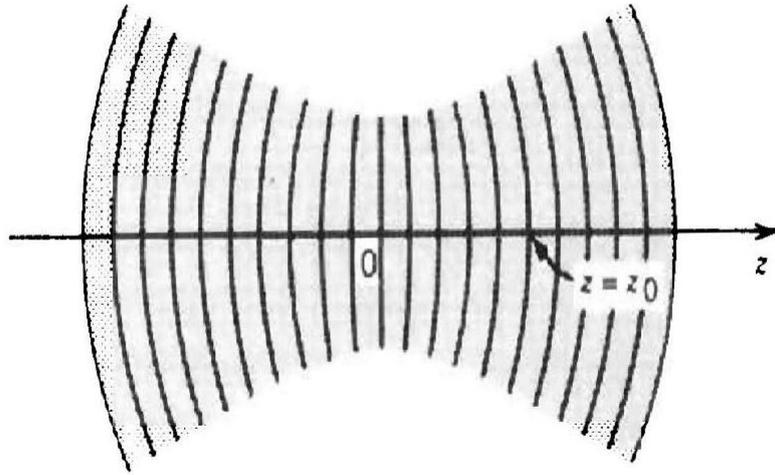


Figura 3.4: Frentes de ondas de um feixe gaussiano .

o desvio da fase em pontos fora do eixo  $z$  (eixo de propagação), num dado plano transversal a  $z$ , em relação ao ponto no eixo (ponto axial).

No eixo do feixe ( $\rho = 0$ ) a fase torna-se

$$\varphi(0, z) = kz - \zeta(z). \quad (3.55)$$

O primeiro termo de (3.55),  $kz$ , é a fase de uma onda plana. O segundo termo representa o atraso de fase  $\zeta(z)$  dado por (3.37), o qual, troca de  $-\frac{\pi}{2}$  em  $z = -\infty$  para  $+\frac{\pi}{2}$  em  $z = +\infty$ , como ilustrado na fig.(3.5) [fig.(3.1.5 Photonics)] [4]. Esse atraso de fase corresponde a um atraso da frente de onda em comparação com uma onda plana ou uma onda esférica conforme está ilustrado na fig.(3.6)[fig.(3.1.8 Photonics)] [4]. O atraso total acumulado quando a onda viaja de  $z = -\infty$  para  $z = +\infty$  é de  $\pi$ . Esse comportamento de  $\zeta(z)$  representa uma anomalia da fase do campo próximo ao foco. Essa anomalia de fase foi primeiro observada por Gouy, sendo por isso, conhecida como **fase de Gouy** [20,21].

A fase de Gouy é, então, um deslocamento de fase que uma onda de luz sofre ao se propagar de  $-\infty$  a  $+\infty$  passando pelo seu foco. Na realidade esse efeito não existe apenas para a onda luminosa. Gouy argumentou que ele

existe para qualquer onda, incluindo as ondas acústicas, desde que satisfaçam o princípio de Huygens [21]. A focalização provoca um confinamento espacial transversal e, por conta do princípio de incerteza, haverá uma expansão no momento transversal e conseqüentemente um deslocamento no valor esperado da constante de propagação,  $k_z$ , originando o deslocamento de fase de Gouy [22].

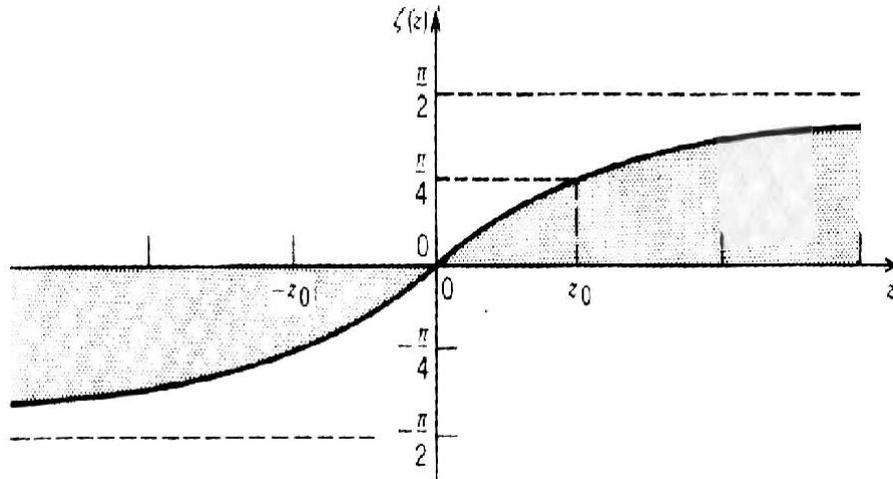


Figura 3.5:  $\zeta(z)$  é o atraso de fase do feixe gaussiano relativo a uma onda plana uniforme em pontos no eixo do feixe .

Para o feixe gaussiano de luz paraxial eq.(3.34), em uma dimensão, obtemos os seguintes resultados para a correlação e medidas de dispersão em posição e momento

$$\sigma_{xx} = \Delta x^2 = \frac{z_0}{2k} \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right] = \frac{w^2(z)}{4} \quad (3.56)$$

$$\sigma_{k_x k_x} = \Delta k_x^2 = \frac{k}{2z_0} \quad (3.57)$$

$$\sigma_{xk_x} = \left\langle \frac{xk_x + k_x x}{2} \right\rangle = \frac{z}{2z_0}. \quad (3.58)$$

O equivalente da relação de incerteza generalizada eq.(2.63) fornece

$$\sigma_{xx} \sigma_{k_x k_x} - \sigma_{xk_x}^2 = \frac{1}{4} \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 - \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right] = \frac{1}{4}, \quad (3.59)$$

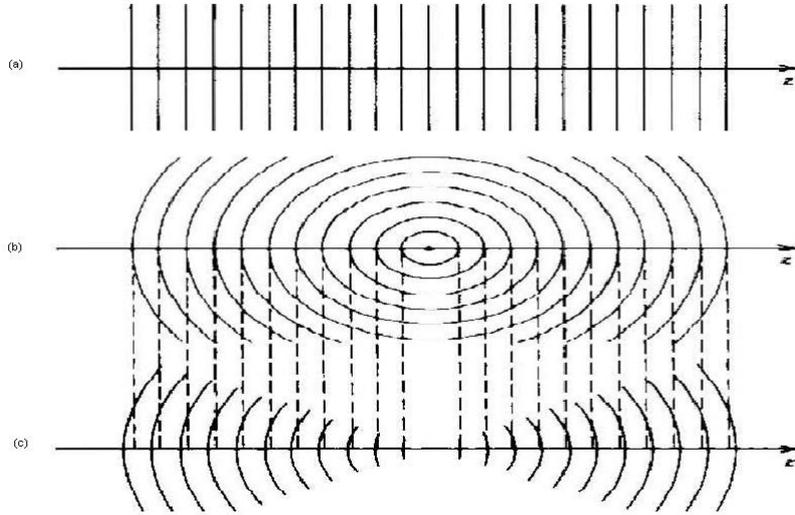


Figura 3.6: Frentes de onda de:(a) uma onda plana uniforme; (b) uma onda esférica; (c) um feixe gaussiano .

mostrando que o feixe gaussiano de luz paraxial satura o equivalente da relação de incerteza generalizada em qualquer posição  $z$ . A eq.(3.56) nos informa que a dispersão na posição transversa  $x$  aumenta à medida que o feixe se propaga. Por outro lado, a dispersão em momento transverso  $k_x$  é uma constante, eq.(3.57).

A eq.(3.59) nos fornece uma maneira de medir experimentalmete a correlação  $\sigma_{xk_x}$  pois  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{k_x k_x}$  podem ser medidos no laboratório. Assim, medindo-se  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{k_x k_x}$  encontramos a correlação  $\sigma_{xk_x}$  experimentalmente através da equação

$$\sigma_{xk_x} = \left( \sigma_{xx}^{exp} \cdot \sigma_{k_x k_x}^{exp} - \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.60)$$

onde  $\sigma_{xx}^{exp}$  e  $\sigma_{k_x k_x}^{exp}$  são os valores de  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{k_x k_x}$  medidos no laboratório. A comparação do resultado teórico eq.(3.58) com o resultado experimental obtido através da eq.(3.60) nos permite extrair o valor de  $z_0$ .

### 3.4 Propagação de um Pacote Gaussiano de Partícula Livre em 2-D

Tomando a função de onda dada pela eq.(3.17), isto é,

$$\psi(x, y, t) = \int \int dx_j dy_j G_{pl}(x, y, t; x_j, y_j, 0) \psi(x_j, y_j, 0) \quad (3.61)$$

e substituindo  $G_{pl}(x, y, t; x_j, y_j, 0)$  pela eq.(3.27) obtemos para  $\psi(x, y, t)$  o resultado

$$\psi(x, y, t) = \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^2 \int \int \int \int dx_j dy_j dp_x dp_y e^{-\frac{it}{2m\hbar}(p_x^2 + p_y^2)} e^{\frac{i}{\hbar}[p_x(x-x_j) + p_y(y-y_j)]} \psi(x_j, y_j, 0). \quad (3.62)$$

A integração sobre  $dx_j$  e  $dy_j$  em (3.62) corresponde a aplicar uma transformação de Fourier à condição inicial, o que efetivamente a reduz à representação em que o hamiltoniano é diagonal. Desse modo a solução desejada é obtida calculando

$$\psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \int dp_x dp_y e^{-\frac{it}{2m\hbar}(p_x^2 + p_y^2)} e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y)} \bar{\psi}(p_x, p_y, 0), \quad (3.63)$$

sendo  $\bar{\psi}(p_x, p_y, 0)$  a transformada de Fourier da condição inicial. A eq.(3.63) é uma das maneiras de obtermos a função de onda no tempo para a partícula livre, uma vez que a condição inicial seja dada. De modo alternativo, podemos obter a função de onda no tempo substituindo na eq.(3.61) o propagador determinado (independentemente da condição inicial) na eq.(3.30). Este método tem a vantagem de que sua primeira etapa pode ser implementada de uma vez por todas, independentemente da condição inicial, sendo esta introduzida posteriormente, através da integração sobre  $dx_j$  e  $dy_j$  em eq.(3.61). Este será o método utilizado nessa seção para obtermos a função de onda no tempo para a partícula livre no espaço ( $2 - D$ ).

Tomando como exemplo, uma condição inicial que consiste de um estado descrito pela função de onda gaussiana normalizada (usualmente chamada “pacote de ondas gaussiano”)

$$\psi(x_j, y_j, 0) = \left[ \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{\pi}} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_j^2 + y_j^2}{2\sigma_0^2}}, \quad (3.64)$$

que é um exemplo muito importante porque envolve cálculos relativamente simples, mas que é bastante útil para ilustrar várias propriedades da dinâmica quântica de uma partícula livre. Também por simplicidade consideramos o pacote centrado em  $x = y = 0$  e com momento inicial nulo. A transformada de Fourier, que corresponde à função de onda no espaço de momento  $\langle p_x, p_y | \psi(t=0) \rangle$  do estado tomado como condição inicial é

$$\bar{\psi}(k_x, k_y, 0) = \left[ \frac{\sigma_0}{\sqrt{\pi}} \right] e^{-\sigma_0^2(k_x^2 + k_y^2)/2} \quad (3.65)$$

que mostra que a distribuição de probabilidade desse estado no espaço de momento é também gaussiana com largura  $1/(2\sigma_0)$  em termos dos vetores de onda  $\vec{k} = (k_x, k_y)$ , com  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ . O princípio de incerteza de Heisenberg fornece o seguinte resultado para esse estado

$$\Delta x \Delta p_x = \Delta x \hbar \Delta k_x = \sigma_0 \hbar \frac{1}{2\sigma_0} = \frac{\hbar}{2}, \quad (3.66)$$

onde  $\Delta x = \sigma_0$ ,  $\Delta k_x = \frac{1}{2\sigma_0}$  e  $\Delta p_x = \hbar \Delta k_x$ . O princípio de incerteza se aplica separadamente a cada componente e fornece para a componente  $y$  o mesmo resultado, ou seja, eq.(3.66). Portanto o resultado dado por (3.66) nos informa que o estado inicial é um estado de incerteza mínima.

De agora em diante, vamos utilizar o método do propagador para obter a função de onda no tempo a partir da condição inicial (3.64) e observar quais analogias existem entre esse resultado e o resultado obtido para a luz na seção 3.3. A função de onda no tempo é dada por

$$\psi(x, y, t) = \int \int dx_j dy_j G_{pl}(x, y, t; x_j, y_j, 0) \psi(x_j, y_j, 0). \quad (3.67)$$

Substituindo-se a condição inicial eq.(3.64) e o propagador eq.(3.30) na eq.(3.67) obtemos

$$\psi(x, y, t) = \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar t} \right] \left[ \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{\pi}} \right] \int \int dx_j dy_j e^{\frac{im}{2\hbar t} [(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2]} e^{-\frac{(x_j^2 + y_j^2)}{2\sigma_0^2}}. \quad (3.68)$$

Essa equação pode ser resolvida completando-se quadrados, transformando-a numa integral de uma função gaussiana, o que nos permite obter o seguinte

resultado

$$\psi(x, y, t) = \left[ \frac{1}{B(t)\sqrt{\pi}} \right] \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2B^2(t)}\right) \exp\left\{i \left[ \frac{m(x^2 + y^2)}{2\hbar R(t)} - \mu(t) \right]\right\} \quad (3.69)$$

Abaixo mostramos a analogia formal entre esta solução e a da propagação paraxial, veja eqs.(3.70), (3.71), (3.72) e (3.73)

$$B(t) = \sigma_0 \left[ 1 + \left( \frac{t}{\tau_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \longrightarrow w(z) = w_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.70)$$

$$R(t) = t \left[ 1 + \left( \frac{\tau_0}{t} \right)^2 \right] \longrightarrow R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right], \quad (3.71)$$

$$\mu(t) = \arctan\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \longrightarrow \zeta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (3.72)$$

e

$$\tau_0 = \frac{m\sigma_0^2}{\hbar} \longrightarrow z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_L}. \quad (3.73)$$

As eqs. (3.70), (3.71), (3.72) e (3.73) mostram que a propagação da matéria apresenta um comportamento ondulatório análogo ao da propagação paraxial da luz. Aqui, a escala que as quantidades (3.70), (3.71) e (3.72) variam, para o caso da onda de matéria, é representada por  $\tau_0$  e é conhecida como tempo de envelhecimento do pacote de ondas. Observamos pela eq.(3.73) que escala de tempo  $\tau_0$ , assim como  $z_0$ , depende de características intrínsecas do pacote inicial de velocidades.

Para construir uma analogia com a expansão do envelope gaussiano obtido na seção anterior estudamos o processo de alargamento espacial do pacote gaussiano através do campo de velocidades determinado pelo gradiente da fase de  $\psi(x, y, t)$

$$\frac{S}{\hbar} = \frac{m(x^2 + y^2)}{2\hbar R(t)} - \mu(t). \quad (3.74)$$

O campo de velocidades associado à distribuição de probabilidade  $|\psi(x, y, t)|^2$

é, nesse caso, dado por

$$\vec{v}(x, y, t) \equiv \frac{\nabla S}{m} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{R(t)} = \frac{t}{t^2 + \tau_0^2} \vec{r}, \quad (3.75)$$

onde  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$  e  $R(t)$  é dado pela eq.(3.71). A eq.(3.75) mostra, então, que a componente intrínseca de velocidade aumenta com a distância  $r$  (distância ao centro do pacote, com o pacote centrado em  $x = y = 0$ ).

Para estimarmos os efeitos do crescimento de  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  com  $\vec{r}$ , calculamos  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  para distâncias ao centro do pacote da ordem de seu tamanho no tempo  $t$ ,  $\vec{r} = B(t)\hat{r}$ , sendo  $\hat{r}$  o vetor unitário na direção  $\vec{r}$ . Nessa suposição obtemos o resultado

$$\vec{v}(B(t)\hat{r}, t) = \frac{B(t)t}{t^2 + \tau_0^2} \hat{r} = \frac{\sigma_0}{\tau_0} \frac{t}{\sqrt{t^2 + \tau_0^2}} \hat{r}, \quad (3.76)$$

que reproduz a taxa de variação da largura do pacote com o tempo,  $dB(t)/dt$ .

Analisando os limites  $t \gg \tau_0$  e  $t \ll \tau_0$  na eq.(3.76) obtemos, respectivamente

$$\vec{v}(B(t)r, t) = \frac{\sigma_0}{\tau_0}, \quad t \gg \tau_0 \quad (3.77)$$

e

$$\vec{v}(B(t)r, t) = \frac{\sigma_0 t}{\tau_0^2}, \quad t \ll \tau_0, \quad (3.78)$$

mostrando que o pacote tem taxas de alargamento diferentes medidas na escala  $\tau_0$ . Esse resultado é completamente análogo ao encontrado na seção 3.3, vide eqs.(3.47) e (3.48), para o alargamento do feixe eletromagnético medido na escala  $z_0$ .

O princípio de incerteza para o pacote propagado eq.(3.69) será calculado usando o método do determinante da matriz de covariância determinado em (2.35). Considerando, por simplicidade, o caso de um pacote gaussiano

unidimensional, a covariância de  $p$  e  $x$  é dada por

$$\begin{aligned}\sigma_{xp}^{(\psi)}(t) &= \frac{1}{2} \langle \psi(t) | (xp + px) | \psi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \psi(t) | (2xp + i\hbar) | \psi(t) \rangle \\ &= \frac{i\hbar}{2} + \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \frac{d}{dx} x \psi(x,t) dx = \frac{\hbar t}{2\tau_0}.\end{aligned}\quad (3.79)$$

Na obtenção de (3.79) usamos a relação de comutação  $[x, p] = i\hbar$ . A expressão para  $\psi(x, t)$  a ser usada para o cálculo da integral é facilmente deduzida de eq.(3.69) reduzindo a uma única dimensão, o que leva ao resultado

$$\psi(x, t) = \left[ \frac{1}{B(t)\sqrt{\pi}} \right] \exp \left[ -\frac{x^2}{2B^2(t)} \right] \exp \left\{ i \left[ \frac{mx^2}{2\hbar R(t)} - \frac{\mu(t)}{2} \right] \right\}.\quad (3.80)$$

As dispersões  $\sigma_{xx}^{(\psi)}(t)$  e  $\sigma_{pp}^{(\psi)}(t)$  calculadas com essa mesma função de onda dão

$$\sigma_{xx}^{(\psi)}(t) = \frac{B^2(t)}{2}\quad (3.81)$$

e

$$\sigma_{pp}^{(\psi)} = \frac{\hbar^2}{2\sigma_0^2},\quad (3.82)$$

de modo que o determinante da matriz de covariância é

$$\begin{vmatrix} \frac{B^2(t)}{2} & \frac{\hbar t}{2\tau_0} \\ \frac{\hbar t}{2\tau_0} & \frac{\hbar^2}{2\sigma_0^2} \end{vmatrix} = \frac{\hbar^2}{4} \left[ \frac{B(t)^2}{\sigma_0^2} - \left( \frac{t}{\tau_0} \right)^2 \right] = \frac{\hbar^2}{4} \left[ 1 + \left( \frac{t}{\tau_0} \right)^2 - \left( \frac{t}{\tau_0} \right)^2 \right] = \frac{\hbar^2}{4},\quad (3.83)$$

mostrando que o pacote gaussiano satura a relação de incerteza de Schrödinger em qualquer tempo. Isso permite ainda a vinculação do pacote, mesmo em  $t \neq 0$ , a um tipo generalizado de estado de incerteza mínima, e pode ser interpretado como indicativo de que o crescimento com  $t$  do produto das incertezas (segundo Heisenberg) é na realidade um reflexo do processo de correlação posição-momento que se instala através da dinâmica quântica.

# O Experimento

## 4.1 Determinando $\sigma_{xp}$ para a Luz

A intensidade para o feixe gaussiano da eq.(3.34), ou seja,  $I(x, y, z) = |E(x, y, z)|^2$ , é dada por

$$I(x, y, z) = |E(x, y, z)|^2 = \left[ \frac{Nw_0}{w(z)} \right]^2 \exp \left[ -\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2(z)} \right]. \quad (4.1)$$

Percebemos que para cada valor de  $z$  a intensidade é uma função gaussiana da distância radial (ou transversa)  $\rho^2 = x^2 + y^2$ . A largura  $w(z)$  da distribuição gaussiana aumenta com a distância axial  $z$ , conforme discutimos na seção 3. Uma ilustração do aumento de  $w(z)$  com  $z$  é mostrado na fig.(4.1)[fig.(3.1-1) Photonics][4] para curvas da intensidade em função de  $\rho$  em diferentes valores de  $z$ .

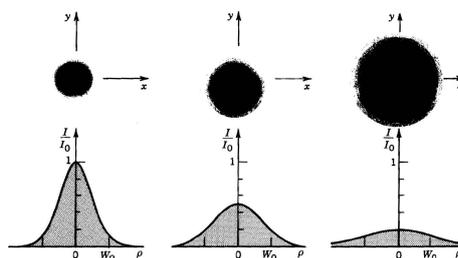


Figura 4.1: Intensidade  $I$  em função da distância  $\rho$  em diferentes distâncias axiais: (a)  $z = 0$ ; (b)  $z = z_0$ ; (c)  $z = 2z_0$

Realizamos, no laboratório de Óptica Quântica da UFMG, o experimento

que nos permitiu observar o efeito de alargamento do feixe com a direção de propagação  $z$  e que a dispersão no momento transverso ao longo de  $z$  é uma constante, conforme prevê a eq.(3.57). Utilizamos, no experimento, um laser de He-Ne, que produz um feixe de luz gaussiano, de comprimento de onda  $632nm$ , um detector de potência pontual, uma fenda de  $100\mu m$ , um deslocador  $xy$ , uma lente divergente  $L_1 = -100mm$  e uma lente convergente  $L_2 = 200mm$ .

Posicionamos a fenda ao longo da coordenada  $y$  obtendo, assim, uma intensidade dependente apenas da coordenada  $x$ , ou seja,

$$I(x, y) = \left[ \frac{Nw_0}{w(z)} \right]^2 C \exp \left[ -\frac{2(x - x_0)^2}{w^2(z)} \right] \quad (4.2)$$

onde  $C$  é uma constante dada por

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp \left[ -\frac{2y^2}{w^2(z)} \right] \quad (4.3)$$

a integração de  $-\infty$  a  $+\infty$  significa que a largura da fenda é bem menor que a do feixe.

Para obtermos a curva da intensidade em função de  $x$  para um dado valor de  $z$ , calibrávamos as coordenadas  $x$  e  $y$  até termos uma intensidade máxima no detector, depois deslocávamos a coordenada  $x$  de um valor mínimo de intensidade até observarmos um novo valor de intensidade mínima, mantendo fixa a maximização da coordenada  $y$ , ou seja, transformando a dependência em  $y$  da intensidade na constante  $C$  ao longo do deslocamento da coordenada  $x$ . Na fig.(4.2) mostramos um esboço do arranjo experimental utilizado na realização do experimento.

Caracterizamos o feixe de luz gaussiano determinando a largura  $w$  em função da distância de propagação  $z$  mostrada na fig.(4.3). Aqui, as medidas foram realizadas tomando-se como ponto de referência a lente  $L_2$ . A equação utilizada para o ajuste é a (3.35), com  $z$  substituído por  $z - z_c$ , pois em (3.35) a cintura é definida como estando em  $z = 0$  e no experimento ela está em  $z = z_c$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left[ \frac{\lambda(z - z_c)}{\pi w_0^2} \right]^2}. \quad (4.4)$$

Inferimos para a largura e posição da cintura do feixe, respectivamente, os valores  $w_0 = (50,0 \pm 0,50)\mu m$  e  $z_c = (52,3 \pm 0,05)cm$ .

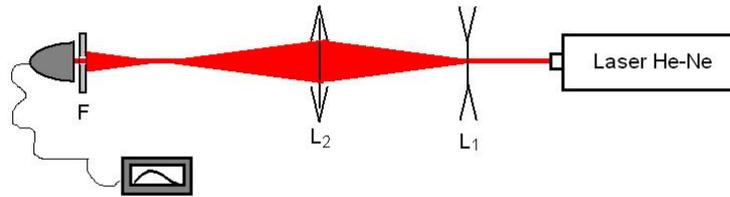


Figura 4.2: Esboço do arranjo experimental utilizado na realização do experimento.

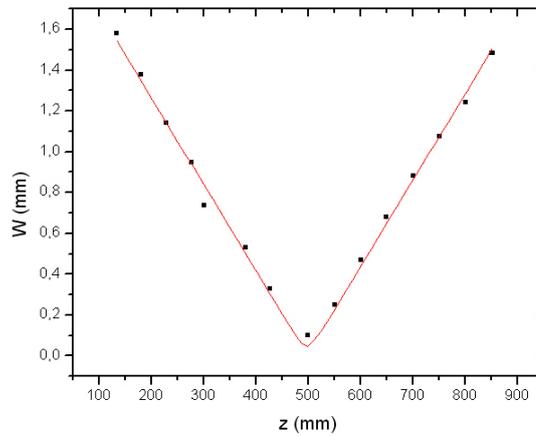


Figura 4.3: Curva experimental para a largura do feixe em função de  $z$ . O ajuste eq.(4.4) fornece  $w_0 = (50,0 \pm 0,50)\mu m$  e  $z_c = (52,3 \pm 0,05)cm$ .

A seguir retiramos a lente divergente  $L_1$  do arranjo experimental fig.(4.2). Tomamos como ponto de referência a frente do laser e determinamos as curvas de intensidade, e de sua transformada de Fourier, em função de  $x$ . Para obtermos a transformada de Fourier experimental posicionávamos uma lente de distância focal  $f = 30cm \pm 1cm$  a uma distância  $f$  do detector [23,24] e repetíamos o procedimento anterior fazendo o deslocamento na coordenada

$x$ . A dispersão no momento transverso é dada por [23]

$$\Delta k_x = \frac{k}{f} \Delta x_{lente} \quad (4.5)$$

onde  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $f$  é a distância focal da lente e  $\Delta x_{lente}$  é a dispersão na posição transversa  $x$  obtida com a lente.

As larguras obtidas para as gaussianas quando colocamos a lente são comparáveis à largura da fenda. Nesse caso, a constante  $C$  não é bem satisfeita. Para encontrarmos o valor real da largura da curva experimental devemos tomar uma função que seja mais larga que a largura da fenda e sobrepor à curva experimental. Tal procedimento não foi realizado aqui, mas os resultados já mostram que a transformada de Fourier ao longo do perfil do feixe é aproximadamente uma constante. A seguir mostramos os resultados experimentais obtidos para cinco valores de  $\bar{z} = z - d$ , onde  $\bar{z}$  é uma distância tomada a partir de um ponto de referência na frente do laser e  $d$  é a distância da cintura do feixe até esse ponto de referência.

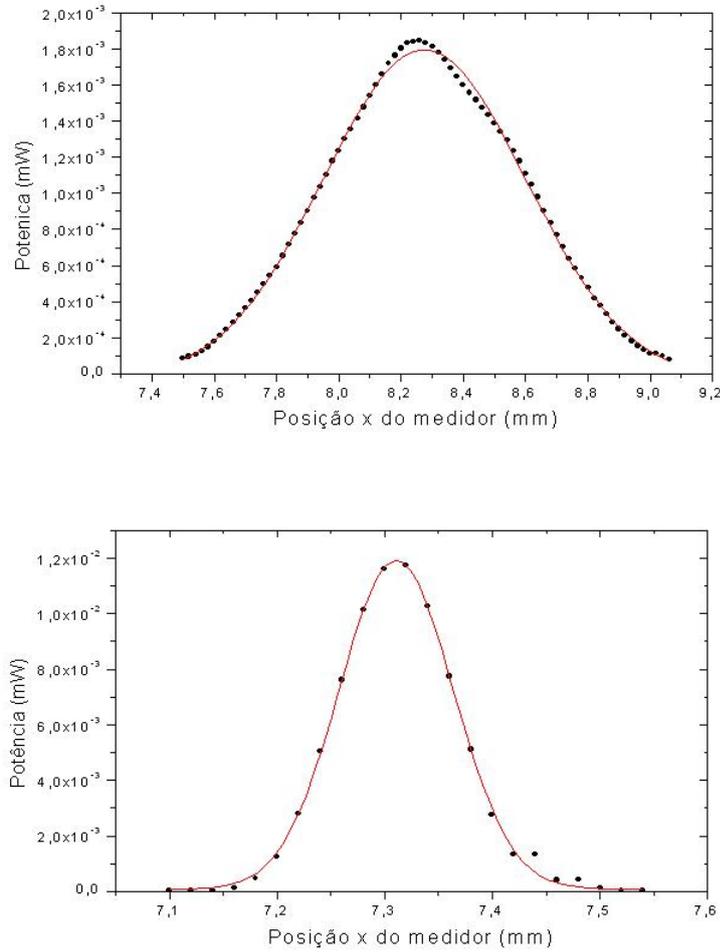


Figura 4.4: A curva acima mostra o perfil da intensidade do laser em  $\bar{z} = 445mm$ . A curva abaixo é a transformada de Fourier obtida com a lente. Ajuste gaussiano eq.(4.2) fornece para essas curvas as larguras  $w = (0,63918 \pm 0,003)mm$  e  $w = (0,1068 \pm 0,001)mm$ , respectivamente

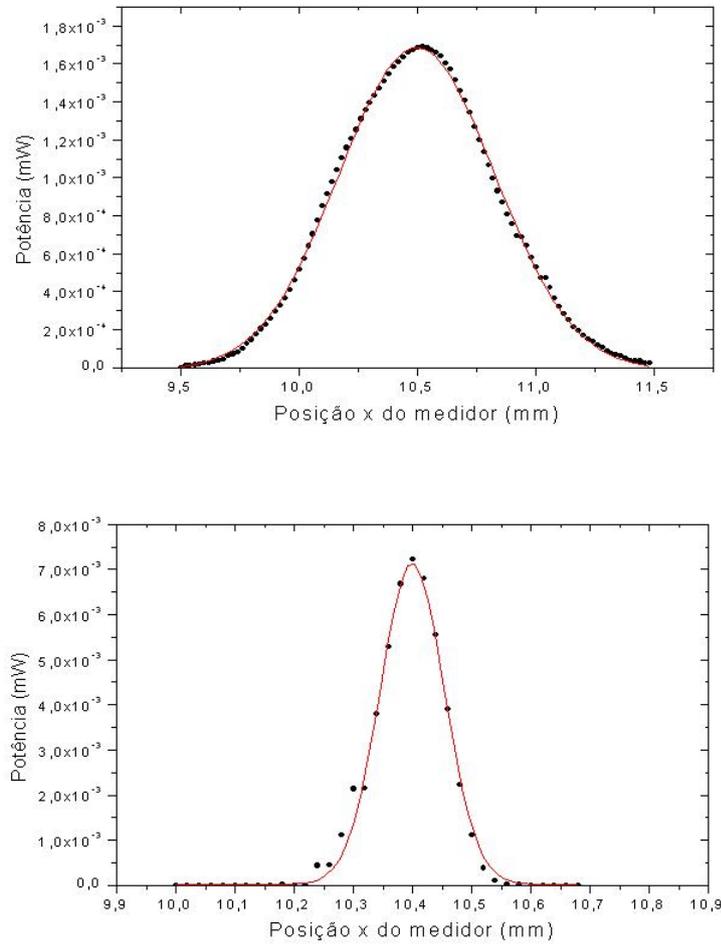


Figura 4.5: A curva acima mostra o perfil da intensidade do laser em  $\bar{z} = 552\text{mm}$ . A curva abaixo é a transformada de Fourier obtida com a lente. Ajuste gaussiano eq.(4.2) fornece para essas curvas as larguras  $w = (0,65227 \pm 0,003)\text{mm}$  e  $w = (0,1094 \pm 0,001)\text{mm}$ , respectivamente .

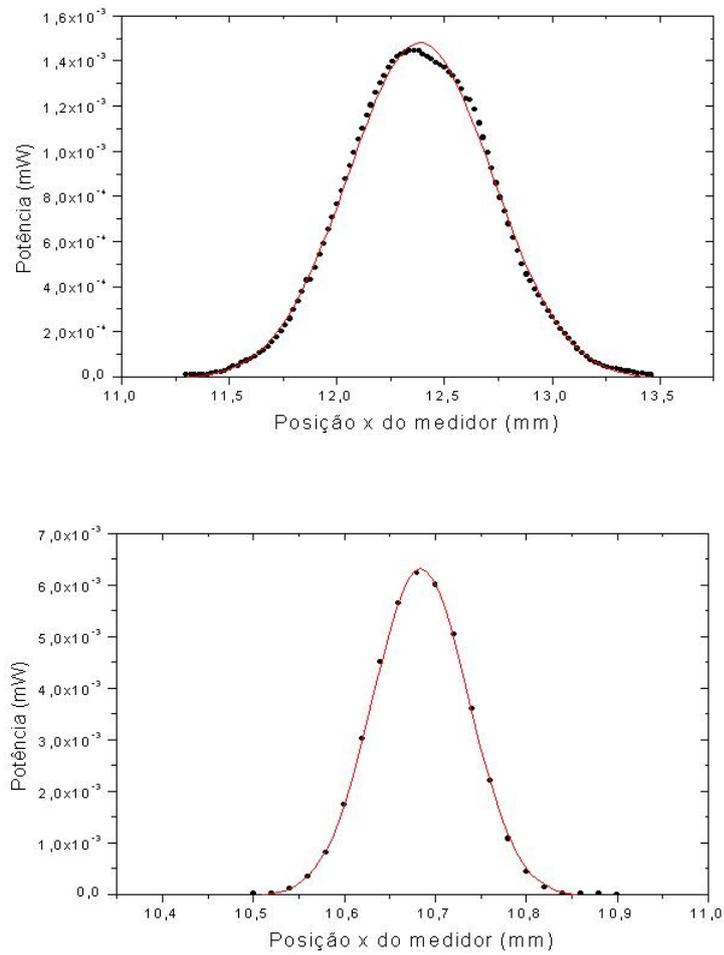


Figura 4.6: A curva acima mostra o perfil da intensidade do laser em  $\bar{z} = 690mm$ . A curva abaixo é a transformada de Fourier obtida com a lente. Ajuste gaussiano eq.(4.2) fornece para essas curvas as larguras  $w = (0,66292 \pm 0,003)mm$  e  $w = (0,10415 \pm 0,001)mm$ , respectivamente.

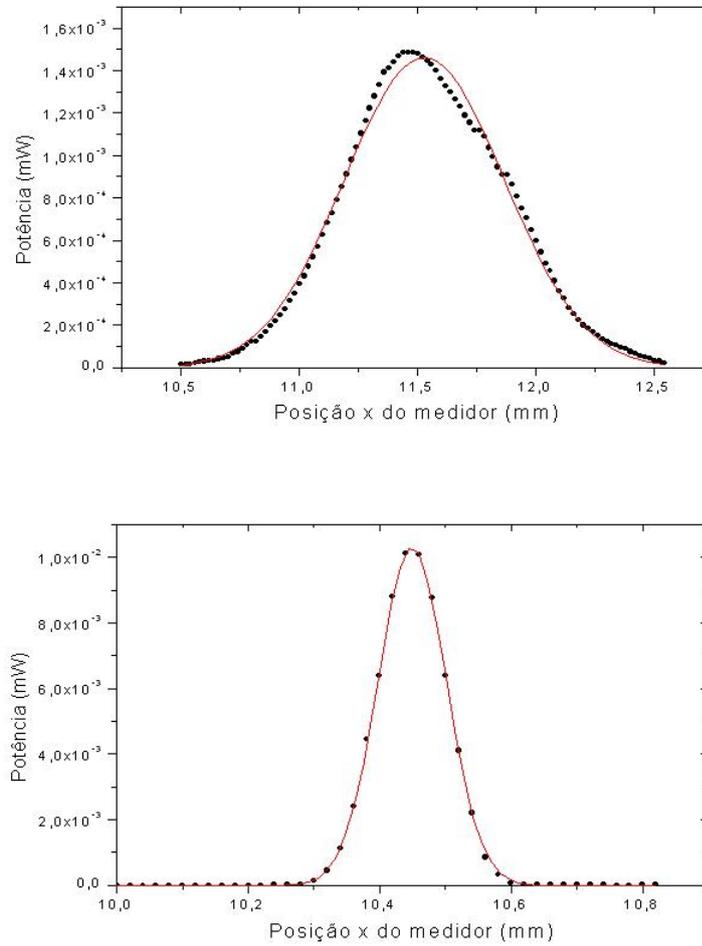


Figura 4.7: A curva acima mostra o perfil da intensidade do laser em  $\bar{z} = 879mm$ . A curva abaixo é a transformada de Fourier obtida com a lente. Ajuste gaussiano eq.(4.2) fornece para essas curvas as larguras  $w = (0,67466 \pm 0,005)mm$  e  $w = (0,10372 \pm 0,002)mm$ , respectivamente.

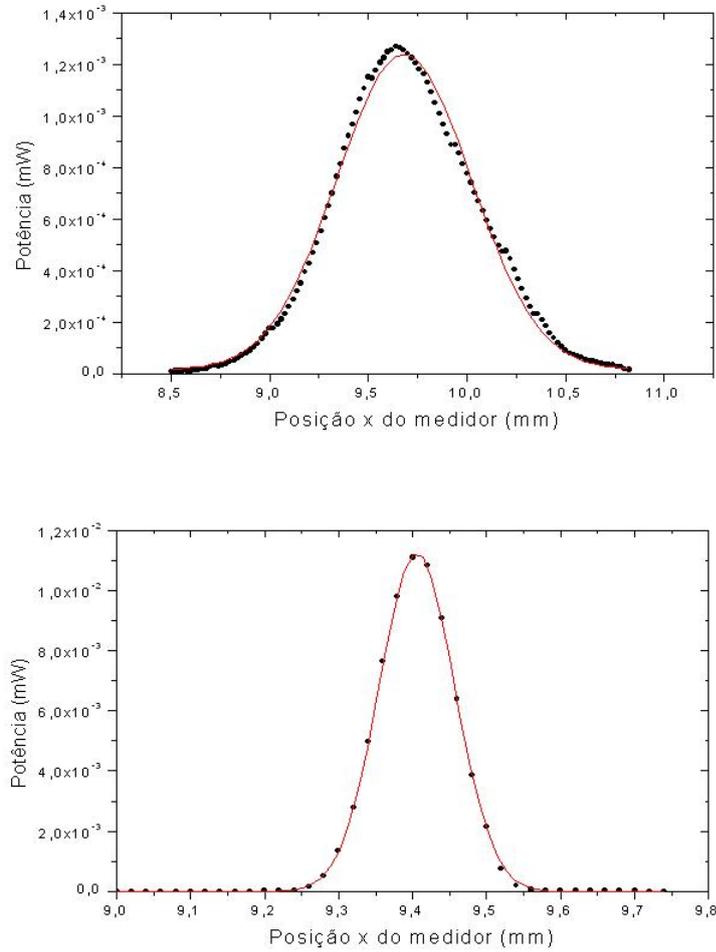


Figura 4.8: A curva acima mostra o perfil da intensidade do laser em  $\bar{z} = 1000mm$ . A curva abaixo é a transformada de Fourier obtida com a lente. Ajuste gaussiano eq.(4.2) fornece para essas curvas as larguras  $w = (0,69344 \pm 0,005)mm$  e  $w = (0,1023 \pm 0,001)mm$ , respectivamente.

A partir dos dados experimentais para  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{k_x k_x}$  e da eq.(3.60), com  $\sigma_{k_x k_x}$  trocado por  $\langle \sigma_{k_x k_x}^{exp.} \rangle$ , obtivemos a seguinte curva para a correlação posição-momento. Onde  $\langle \sigma_{k_x k_x}^{exp.} \rangle$  é uma média dos  $\sigma_{k_x k_x}^{exp.}$ .

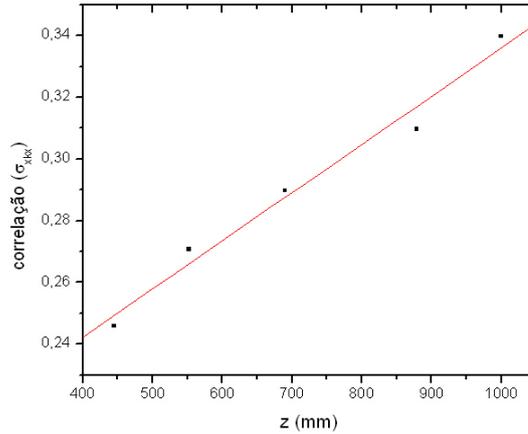


Figura 4.9: Resultado experimental para a medida da correlação posição-momento, em função de  $\bar{z}$ , para o feixe gaussiano produzido pelo laser especificado.

Essa curva é dada pela expressão

$$\sigma_{xk_x}^{exp.} = 0,10276 + 1,77432 \times 10^{-4} \bar{z} \quad (4.6)$$

onde  $\bar{z} = z - d$  é uma distância a partir de um ponto de referência na frente do laser. Quando  $z = 0$ ,  $\bar{z} = -d$  é a posição da cintura do feixe. O valor de  $d$  é obtido fazendo-se  $\sigma_{xk_x}^{exp.} = 0$  na cintura, o que nos permite obter  $d = 57,9cm$ . Agora, em função da variável  $z$  a correlação experimental tem expressão

$$\sigma_{xk_x}^{exp.} = 1,77432 \times 10^{-4} z, \quad (4.7)$$

que comparada com o resultado teórico eq.(3.58) fornece para a largura da cintura do feixe (ou comprimento de Reileigh, pois ambos estão relacionados pela eq.(3.38)) o valor  $w_0 \cong 753\mu m$ .

Devemos lembrar que os valores obtidos para as larguras das curvas correspondentes à transformada de Fourier necessitam de uma correção pois são valores da ordem da largura da fenda utilizada no experimento e isso certa-

mente alterará os valores encontrados para  $d$  e  $w_0$ . No entanto, pelo menos qualitativamente, mostramos uma maneira de extrair o valor de  $z_0$  a partir do conhecimento da correlação posição-momento.

## 4.2 Determinando $\sigma_{xp}$ para um Pacote Gaussiano de Partícula Livre ao se Propagar Através de uma Fenda Unidimensional

Nessa seção, propagamos um pacote gaussiano de partícula livre através de uma fenda modelada por uma função gaussiana. Mostramos que  $\Delta p$  não depende do tempo de vôo da fenda ao anteparo e que a dependência com o tempo do produto das incertezas é cancelada pela correlação posição-momento que se instala através da dinâmica quântica. Mostramos que para o limite de fenda de largura infinita a largura do pacote de ondas no anteparo é a largura obtida para a propagação livre.

Consideramos novamente o caso simples da propagação de uma condição inicial gaussiana. Aqui, fizemos uma modificação no meio colocando uma fenda gaussiana de largura  $b$  no caminho de propagação da partícula livre. Apenas nos preocupamos em calcular o princípio de incerteza para o pacote propagado. As possíveis modificações sofridas pelas propriedades do pacote propagado, como exemplo, fase de Gouy  $\mu(t)$ , não foram analisadas aqui.

Antes e depois da fenda, as partículas evoluem livremente no plano  $x - y$  conforme pode ser visto na fig.(4.10).

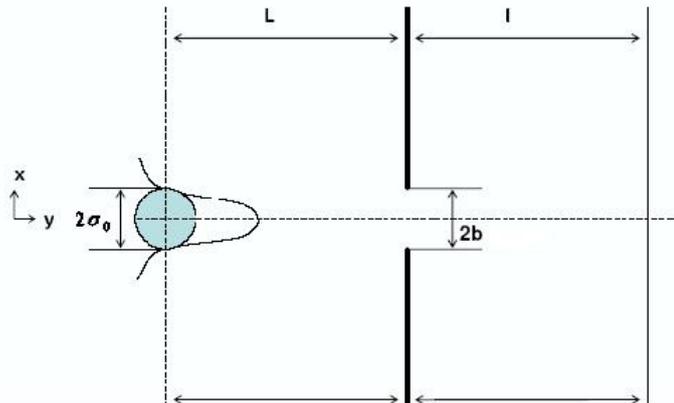


Figura 4.10: Perfil do feixe gaussiano ao longo da direção de propagação  $z$

A função de onda após a fenda é dada por

$$\Psi(x, t + \tau) = \int dx_j \int d\bar{x} G_{pl}(x, \tau + t, \bar{x}, t) F(\bar{x}) G_{pl}(\bar{x}, t, x_j, 0) \Psi(x_j, 0) \quad (4.8)$$

onde  $\Psi(x_j, 0)$  é o pacote gaussiano, eq.(3.64), em uma dimensão,  $G_{pl}(\bar{x}, T; x_j, 0)$  é a função de Green que propaga o pacote inicial da fonte até a fenda,  $G_{pl}(x, T + \tau; \bar{x}, T)$  é a Green que propaga o pacote da fenda ao anteparo e  $F(\bar{x})$  dado por

$$F(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{b\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\bar{x}^2}{2b^2}}, \quad (4.9)$$

representa uma fenda gaussiana de largura  $b$ .

A solução para  $\Psi(x, t + \tau)$ , eq.(4.8), pode ser obtida pelo método de completar quadrados, resultando, após algumas manipulações algébricas, em

$$\Psi(x, t + \tau) = N \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{\frac{t}{\tau\sigma_0^2 B^2} + \frac{im}{\hbar\tau} \beta}{\beta - i \left( \frac{m}{\hbar\tau} + \frac{\hbar t}{m\sigma_0^2 B^2} \right)} x^2 \right], \quad (4.10)$$

onde

$$\beta(t) = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{B(t)^2}, \quad (4.11)$$

$$B(t) = \sigma_0 \sqrt{1 + \left( \frac{t}{\tau_0} \right)^2} \quad (4.12)$$

e  $N$  é uma constante de normalização. “Provavelmente os matemáticos façam objeções a esta maneira de obter o resultado (4.10); no entanto, o resultado é correto ”[18].

A solução (4.10) pode ser colocada na forma geral [25]

$$\Psi(x, t + \tau) = \left( \frac{u}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{(u + iv) x^2}{2} \right], \quad (4.13)$$

onde

$$u = \frac{\left(\frac{m}{\hbar\tau}\right)^2 \beta}{\beta^2 + \left(\frac{m}{\hbar\tau} + \frac{\hbar t}{m\sigma_0^2 B^2}\right)^2} \quad (4.14)$$

e

$$v = -\frac{\frac{m\beta^2}{\hbar\tau} + \frac{t}{\tau\sigma_0^2 B^2} \left(\frac{m}{\hbar\tau} + \frac{\hbar t}{m\sigma_0^2 B^2}\right)}{\beta^2 + \left(\frac{m}{\hbar\tau} + \frac{\hbar t}{m\sigma_0^2 B^2}\right)^2}. \quad (4.15)$$

Aqui, a largura do pacote de ondas que chega no anteparo é dada por

$$\alpha^2(t, \tau) = \frac{1}{u} = \frac{1}{\beta} + \left(\frac{\hbar\tau}{m}\right)^2 \beta + \left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 \left(\frac{2t\tau}{\beta\sigma_0^2 B^2} + \frac{t^2\tau^2}{\beta\tau_0^2 B^4}\right), \quad (4.16)$$

que no limite de fenda de largura infinita,  $b \rightarrow \infty$ , se reduz para a forma simples

$$\begin{aligned} \alpha^2(t, \tau) &= \sigma_0^2 \left[ 1 + \left(\frac{t + \tau}{\tau_0}\right)^2 \right] \\ &= \sigma_0^2 \left[ 1 + \left(\frac{T}{\tau_0}\right)^2 \right] \\ &= B^2(T), \end{aligned} \quad (4.17)$$

com  $T = t + \tau$ . Como esperado, este é o resultado obtido na eq.(3.70) para a propagação livre durante um tempo  $T = t + \tau$ .

Para a função de onda dada pela eq.(4.13) obtemos os seguintes resultados para a dispersão e correlação posição-momento

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \Delta x^2 = \frac{1}{2u} \\ &= \frac{\beta^2 + \left(\frac{m}{\hbar\tau} + \frac{\hbar t}{m\sigma_0^2 B^2}\right)^2}{2\left(\frac{m}{\hbar\tau}\right)^2 \beta}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{pp} &= \Delta p^2 = \hbar^2 \left( \frac{u}{2} + \frac{v^2}{2u} \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \left( \beta(t) + \frac{t^2}{\beta(t)B(t)^2\tau_0^2} \right),\end{aligned}\quad (4.19)$$

e

$$\begin{aligned}\sigma_{xp} &= \left\langle \frac{xp + px}{2} \right\rangle = \frac{\hbar v}{2u} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{m^2\beta^2\sigma_0^4 B^4 \tau + m^2\sigma_0^2 B^2 t + \hbar^2 t^2 \tau}{m^3\sigma_0^4 B^4 \beta} \right).\end{aligned}\quad (4.20)$$

A eq.(4.19) mostra que  $\Delta p$  é independente de  $\tau$ , o tempo de vôo da fenda ao anteparo, o que é esperado pois o pacote evolui livremente após passar pela fenda. Em seguida assumimos que o tempo de vôo do colimador à fenda e da fenda ao anteparo é o mesmo. Nessa condição, o produto dos elementos diagonais e não diagonais da matriz de covariância, respectivamente, é

$$\begin{aligned}\sigma_{pp}\sigma_{xx} &= \left( \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \frac{\tau^2}{\tau_b^2} + \frac{\tau_b^2}{\tau^2} \right) \\ &+ \frac{\sigma_0^2}{2b^2} \left( 1 - 4 \frac{\tau_b^4}{\tau^4} \right) + \mathcal{O}(\sigma_0^4)\end{aligned}\quad (4.21)$$

e

$$\begin{aligned}\sigma_{xp}\sigma_{px} &= \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{\tau^2}{\tau_b^2} + \frac{\tau_b^2}{\tau^2} \right) \\ &+ \frac{\sigma_0^2}{2b^2} \left( 1 - 4 \frac{\tau_b^4}{\tau^4} \right) + \mathcal{O}(\sigma_0^4).\end{aligned}\quad (4.22)$$

onde  $\tau_b = mb^2/\hbar$ .

O princípio de incerteza generalizado de Schrödinger calculado nesse estado fornece

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xp} \\ \sigma_{px} & \sigma_{pp} \end{vmatrix} = (\sigma_{xx}\sigma_{pp} - \sigma_{xp}\sigma_{px}) = \frac{\hbar^2}{4} \quad (4.23)$$

Pelas eqs.(4.21),(4.22) e (4.23) vemos, claramente, o crescimento com o tempo do produto das incertezas sendo cancelado pela correlação posição-momento que se instala através da dinâmica quântica. Este resultado é muito interessante pois mostra que o pacote gaussiano satura a relação de incerteza de Schrödinger em qualquer tempo nos permitindo medir as correlações  $(x-p)$  não-locais a partir de uma medida das dispersões em  $x$  e  $p$  [26].

Consideramos, por exeplo, um feixe de moléculas de fulereno ( $C_{70}$ ) emergindo de uma fonte em temperatura  $900K$  com uma velocidade média de  $220m/s$ , que é bastante grande, nos permitindo tratar o movimento na direção  $z$  como clássico. Nessa hipótese, os efeitos quânticos serão observados apenas em uma dimensão, ou seja, dimensão  $x$  [26].

Adotamos para  $L, l$ , e  $\sigma_0$  da fig.(4.10), os valores [3],  $L = 1,13m$ ,  $l = 1,33m$  e  $\sigma_0 = 17\mu m$ , e plotamos as curvas  $\Delta x$  e  $\Delta p$  dadas, respectivamente, pelas eqs.(4.18) e (4.19), em função da largura da fenda  $b$ . Para melhor observarmos os efeitos quânticos plotamos, abaixo de cada uma das curvas  $\Delta x$  e  $\Delta p$ , os correspondentes regimes quânticos, ver figs.(4.11), (4.12), (4.13) e (4.14). Na fig.(4.15) plotamos novamente a curva  $\Delta x$  em função da largura da fenda e observamos o que acontece com a incerteza na posição no limite em que a largura das fendas é muito grande. Na fig.(4.16) plotamos as curvas  $\sigma_{xx}\sigma_{pp}$  e  $\sigma_{xp}^2$  em função da largura da fenda.

A curva da fig.(4.12) mostra que, no regime quântico, a incerteza na posição (ou largura do pacote, pois ambas são diretamente proporcionais), medida após o feixe passar pela fenda, diminui com o aumento da largura da fenda. Isso acontece por conta do efeito de difração, o que é puramente quântico. À medida que a fenda aumenta, atingimos um regime clássico pois o efeito de difração deixa de existir. Esse resultado é equivalente ao da transição óptica ondulatória para óptica geométrica. A curva da fig.(4.14) mostra que a incerteza no momento também diminui à medida que a largura da fenda aumenta. Isso nos permite perceber que o produto  $\Delta x\Delta p$ , que deve obedecer

$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ , dará um valor mínimo no limiar do regime clássico. A fig.(4.15) mostra que a curva correspondente ao produto das incertezas tem crescimento exatamente igual ao da curva correspondente às correlações, sugerindo que a diferença entre elas seja apenas uma constante. Essa diferença constante como vimos anteriormente é o valor do determinante de Schrödinger  $\hbar^2/4$ . A curva da fig.(4.16) mostra o limite de uma fenda muito grande no qual a incerteza na posição satura pois atingimos um regime puramente clássico.

Substituímos a eq.(4.18) na eq.(4.19) e obtivemos uma equação que relaciona a incerteza no momento com a incerteza na posição, ou seja,

$$\Delta p = \hbar \left( \frac{1}{4\Delta x^2} + \gamma \Delta x^2 \right)^{1/2} \quad (4.24)$$

onde  $\gamma = 2,40 \times 10^{24} (1/m^4)$ . Na fig.(4.17) plotamos a curva  $\Delta p$  em função de  $\Delta x$  para o pacote de moléculas de fulereno ( $C_{70}$ ) nas condições especificadas anteriormente. A curva teórica mostra boa concordância qualitativa com o resultado experimental encontrado por Zeilinger et al [3].

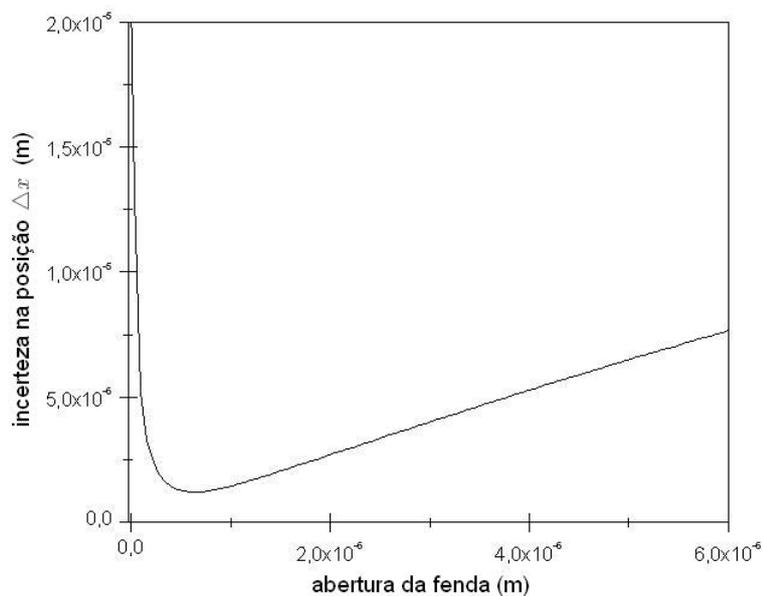


Figura 4.11: Variação da incerteza na posição  $\Delta x$  em função da largura da fenda  $b$

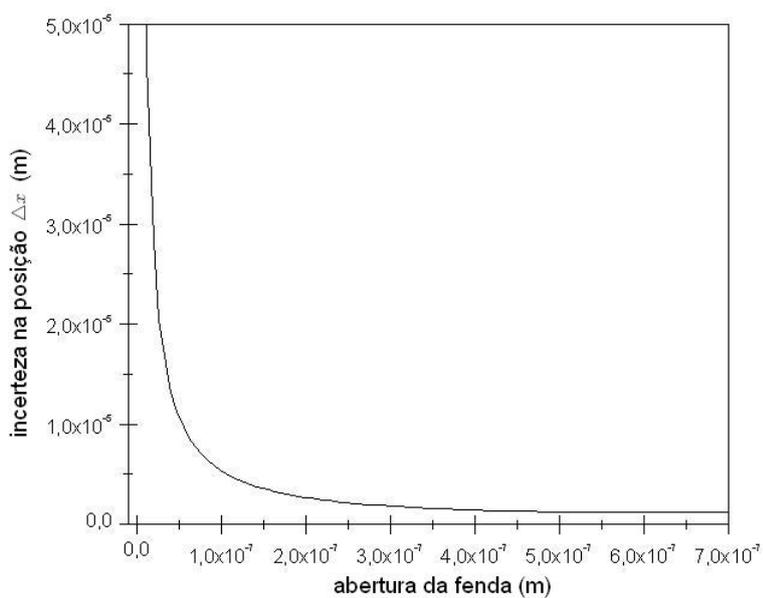


Figura 4.12: Apenas o regime quântico da curva acima

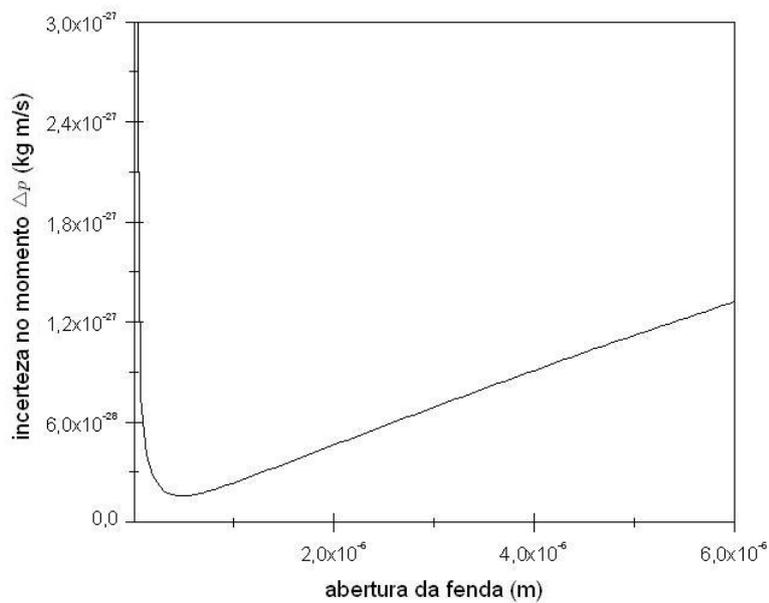


Figura 4.13: Variação da incerteza no momento  $\Delta p$  em função da largura da fenda  $b$

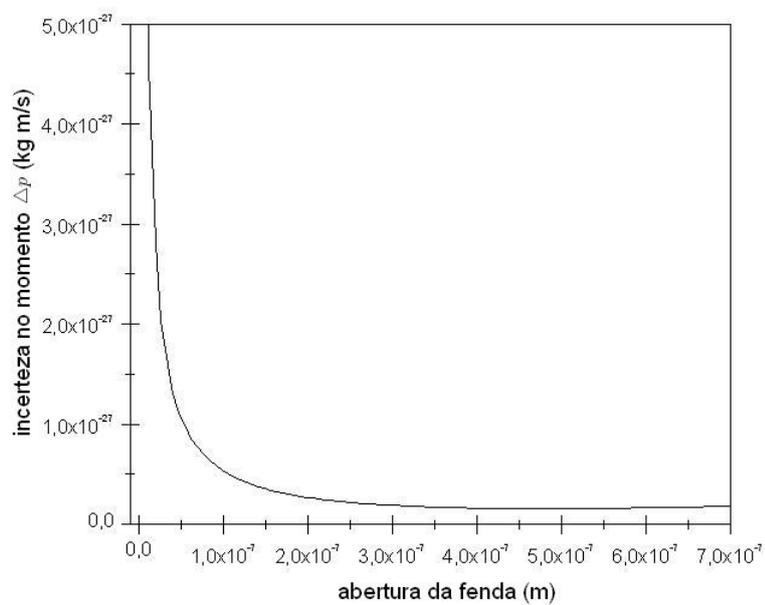


Figura 4.14: Apenas o regime quântico da curva acima

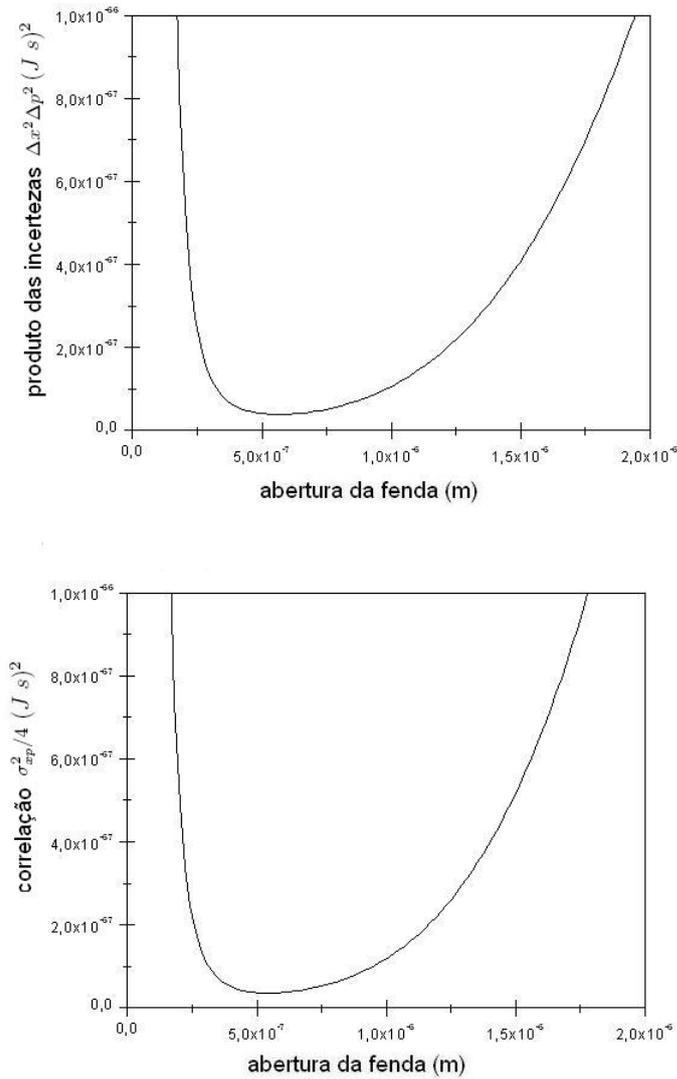


Figura 4.15: Produto das incertezas,  $\Delta x^2 \Delta p^2$  e correlação posição-momento,  $\sigma_{xp}^2/4$ , em função da largura da fenda.

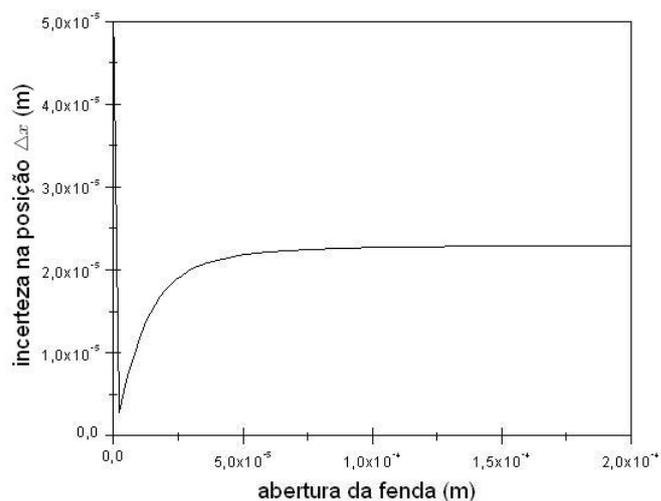


Figura 4.16: Variação da incerteza na posição  $\Delta x$  em função da largura da fenda  $b$  para o limite de fendas muito grande.

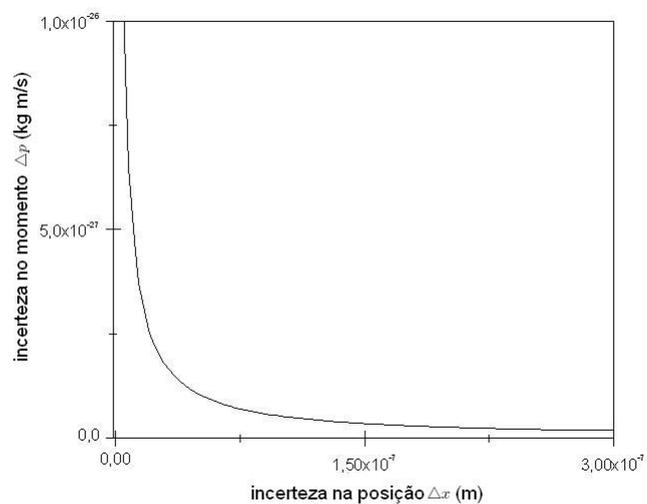


Figura 4.17: Curva teórica para a variação da incerteza no momento em função da variação da incerteza na posição para um pacote gaussiano de moléculas de  $C_{70}$  se propagando livremente através de uma fenda

---

## Conclusões

---

Neste trabalho concluímos que a propagação de pacotes gaussianos de partículas livres na hipótese de velocidade constante apresenta comportamento completamente análogo ao da propagação da luz na aproximação paraxial. Encontramos que a propagação de ambas, matéria e luz, é descrita por equações de movimento completamente análogas e apresenta os mesmos processos de alargamento.

Vimos que, na propagação de ambas, existem escalas características (tempo de envelhecimento  $\tau_0$ , no caso da matéria, e comprimento de Rayleigh  $z_0$ , no caso da luz) das quais dependem outras propriedades do feixe propagado, como, processo de alargamento, raio de curvatura das frentes de onda e fase de Gouy. Encontramos que a luz ao se propagar paraxialmente apresenta correlações posição-momento semelhante àquelas que aparecem em mecânica quântica. Outra característica importante observada é o da propagação de um feixe de luz gaussiano saturar uma equação que é equivalente ao determinante de Schrödinger da mecânica quântica.

Vimos que podemos determinar experimentalmente o valor das correlações posição-momento ao longo da direção de propagação de feixes gaussianos de luz e, através do resultado experimental podemos extrair o valor do comprimento de Rayleigh,  $z_0$ .

Vimos que a propagação de pacotes gaussianos de partículas livres através de uma fenda modelada por uma função gaussiana apresenta resultados qualitativamente concordantes com o experimento realizado por Zeilinger [3]. Vimos que a matéria apresenta um termo de fase, muitas vezes negligenciado, que é completamente análogo à conhecida fase de Gouy da propagação paraxial da luz.

## Perspectivas

Propor um experimento para determinar as correlações posição-momento ao longo do tempo para pacotes gaussianos de partículas livres e, através do resultado experimental extrair o valor do tempo de “envelhecimento”,  $\tau_0$ .

Propor um experimento para determinar a fase de Gouy para partículas a partir da focalização de feixes atômicos.

---

---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] S. N. Bose, Z. Phys. **26** (1924) 178.
- [2] Nairz, O., Arndt, M., and Zeilinger, A., Am. J. Phys. **71** (2003) 319.
- [3] Nairz, O., Arndt, M., and Zeilinger, A., Phys. Rev. A **65** (2002) 032109.
- [4] B. E. A. Saleh and M. Teich. *Fundamentals of Photonics*. John Wiley Sons, New York, 1991.
- [5] M. Wilkens. *de Broglie Optics, Atomic, Molecular, and Optical Physics Handbook*, 1996.
- [6] Stoler, D., J. Opt. Soc. Am. **71** (1981) 334
- [7] Toledo Piza, A. F. R. *Mecânica Quântica*. Edusp, São Paulo, 2003.
- [8] Angelow, A. and Batoni, M. C., Los Alamos e-print server, [xxx.lanl.gov/quant-ph/9903100](http://xxx.lanl.gov/quant-ph/9903100).
- [9] Cohen-Tanoudji, C., Diu, B. and Laloë, F. *Mécanique Quantique*. Hermann, 1973.
- [10] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, 1999.
- [11] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, New Jersey, 3rd edition, 1999.
- [12] de Broglie, L. Waves and quanta. Nature **112** (1923) 540.
- [13] Pritchard, D.E., Schmiedmayer, J., Cronin, A.D., *Interferometria atômica* (2005).

- 
- [14] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge, New York, 1995.
- [15] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Macmillan, new York, 2nd edition, 1964.
- [16] N. Weeler. *Quantum Mechanics*. Wiley, New York, 2000.
- [17] Ballentine, L. E. *Quantum Mechanics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1998.
- [18] Feynman, R. P. and Hibbs, G. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Mac-Graw-Hill, New York, 1965.
- [19] Svelto, O. *Principles of Lasers*. Springer, 4nd edition,
- [20] Gouy, M., Sur une propriélé nouvelle des ondes lumineuses. C. R. Acad. Sci. Paris, 110:1251, 1890.
- [21] Gouy, M., Sur la propagation anomale des ondes. C. R. Acad. Sci. Paris, 111:33, 1890.
- [22] Feng, S., and Winful, H. G., Opt. Lett. **26** (2001) 485
- [23] Howell, J.C., Ryan, S.Bennink., Bentley, S.J. and Boyd, R.W., PRL. **92** (2004) 210403-1
- [24] Joseph W. Goodman. *Introductions to Fourier Optics*. McGraw-Hill, Singapura, 2nd edition, 1996.
- [25] I. Bialynicki-Birula, Acta Phys. Pol. **B29**, 3569 (1998); *id.*, *Frontier Tests of QED and Physics of the Vacuum*, eds. E. Zavattini, D. Bakalov, and C. Rizzo, (Heron Press, Sofia, 1998).
- [26] Glionna, G., Blin, A.H., Nemes, M.C., Sampaio, M. and Toledo Piza, A.F.R., Los Alamos e-print server, xxx.lang.gov/quant-ph/ 0512076.

