

Interferometria Quântica com Cavidades

Caio Olindo de Miranda e Silva Júnior

Orientador: Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua

Co-orientador: Prof. Aldo Delgado

Dissertação apresentada à **Universidade Federal de Minas Gerais**, como requisito parcial para a obtenção do grau de **Doutor em Ciências**.

BELO HORIZONTE, MG, BRASIL

MAIO DE 2006

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Para Cacá e Naninha | iii |
| Agradecimentos | iv |
| Resumo | v |
| Abstract | vi |
| Descrições e Definições | 1 |
| 0.1 Estados emaranhados | 1 |
| 0.2 Luminescência paramétrica | 2 |
| 0.3 O interferômetro de Hong, Ou e Mandel | 8 |
| 0.4 A cavidade de Fabry-Perot | 15 |
| Introdução | 19 |
| 1 Regime da Cavidade Menor que a Coerência do Fóton Gêmeo | 21 |
| 1.1 Introdução | 21 |
| 1.2 Cálculo clássico da forma de um pacote de ondas transmitido por uma cavidade de Fabry-Perot | 24 |
| 1.3 Cálculo quântico da intensidade média | 25 |
| 1.4 Um experimento idealizado | 26 |
| 1.5 O experimento real | 28 |
| 1.6 Estudo dos fótons <i>idler</i> refletidos pela cavidade | 38 |
| 2 Regime da Cavidade Maior que a Coerência do Fóton Gêmeo | 43 |
| 2.1 Introdução | 43 |
| 2.2 Aparato experimental | 44 |
| 2.3 Resultados analíticos | 46 |
| 2.4 Resultados teóricos com uma cavidade | 51 |
| 2.5 Resultados teóricos com duas cavidades | 59 |
| 2.6 Interferências usando laser pulsado | 65 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.7 | Aplicação: porta lógica C-not | 67 |
| 3 | Análise Probabilística Completa dos Estados de Bell | 69 |
| 3.1 | Introdução | 69 |
| 3.2 | Calculando o número de coincidências | 70 |
| 3.3 | Número de coincidências para alguns estados particulares | 75 |
| | Conclusões | 79 |
| A | Artigos publicados | 81 |
| B | Artigo submetido 1 | 97 |
| B.1 | Introduction | 1 |
| B.2 | Classical calculation of the shape of a transmitted wave packet trough a Fabry-Perot cavity. | 3 |
| B.3 | Quantum calculation of the average intensity | 4 |
| B.4 | An Idealized Experiment | 5 |
| B.5 | The Real Experiment | 7 |
| C | Artigo submetido 2 | 18 |
| C.1 | Introduction | 19 |
| C.2 | Calculating the Number of Coincidences | 20 |
| C.3 | Number of coincidences for some particular states | 23 |
| C.4 | Conclusions | 26 |
| C.5 | Acknowledgment | 27 |
| | Referências Bibliográficas | 30 |

Para Cacá e Naninha

Agradecimentos

Agradeço

ao meu orientador, Prof. Sebastião de Pádua, pela dedicada orientação e interesse em minha formação acadêmica;

ao Prof. Carlos Monken, por ter realizado, em sua tese de doutorado, cálculos que serviram como ponto de partida para alguns cálculos realizados nesta dissertação;

ao professor Aldo Delgado, pelas valiosas idéias e discussões, e por ter me ajudado nos cálculos mais difíceis;

aos meus colegas de laboratório, Ivan, Marco, Olavo, Léo e Gustavo, pela amizade, companheirismo, e por terem me ajudado a manipular a máquina chamada “computador”;

ao CNPq, pelo apoio financeiro e a todos aqueles que contribuíram de alguma forma, direta ou indireta, para a realização deste trabalho;

aos meus pais, irmão e esposa, pelo amor e paciência;

e a Deus, pela luz que nos ilumina.

Resumo

Usando a conversão paramétrica descendente espontânea do tipo I, detecção em coincidência e o interferômetro de Hong-Ou-Mandel modificado com uma cavidade de Fabry-Perot em um dos braços, nós mapeamos a distribuição temporal do fóton, um dos que foram gerados pela conversão paramétrica, que passa através da cavidade e medimos também o deslocamento do pico de sua distribuição temporal depois da cavidade, no regime onde a largura da cavidade é menor que o comprimento longitudinal de coerência do fóton. Nós estudamos o regime oposto, isto é, onde a largura da cavidade é maior que o comprimento longitudinal de coerência do fóton, e encontramos efeitos de coalescência e anti-coalescência. O padrão das coincidências, neste regime, é formado, em geral, por picos e vales que nascem de uma plataforma de valor constante. O valor desta plataforma depende apenas dos coeficientes de transmissão t e de reflexão r dos semi-espelhos formadores da cavidade e é proporcional ao número de fótons que atravessam a cavidade.

Complicamos um pouca mais, ainda no regime onde o comprimento longitudinal de coerência do fóton é menor que L , a largura da cavidade, nós colocamos duas cavidades, uma em cada braço do interferômetro e estudamos o padrão de coincidências para este caso. O padrão de coincidências é essencialmente o mesmo do caso anterior de uma só cavidade. Uma das principais diferenças é que desta vez o valor da plataforma depende também de L e não representa mais a quantidade de fótons que atravessam as cavidades. Podemos simular uma porta lógica C-not usando este aparato.

Finalmente, usando a conversão paramétrica do tipo II, nós estudamos o caso de duas cavidades cujos coeficientes de transmissão dependem também da polarização dos fótons que as atravessam. Com este aparato é possível discriminar sem ambiguidades os quatro estados de Bell: ψ_+ , ψ_- , ϕ_+ e ϕ_- .

Abstract

Using type I parametric down conversion, coincidence detection and the Hong-Ou-Mandel interferometer modified with the introduction of a Fabry-Perot cavity in one of its arms, we map the temporal distribution of the photon (one of those generated by the parametric down conversion), that pass through the cavity and we also measure the displacement of the peak of its temporal distribution after the cavity, in the photon longitudinal coherence length greater than the cavity length regime. We study the opposite regime, that is, where the cavity length is greater than the photon coherence length, and we found coalescence and anti-coalescence effects. The coincidence pattern, in this regime, is formed, in general, by peaks and dips which born from a constant value platform. The platform value depends only on the mirrors (that form the cavity) transmission and reflection coefficients, and it is proportional to the number of photons that cross the cavity.

We complicated a little more, still in the cavity length greater than the photons coherence length regime, putting two cavities (each one in each of the interferometer arm), and we study the coincidence pattern for this case. The coincidence pattern is essentially the same of that found for the one cavity case. One of the main differences is that at this time the platform value depends also on the cavities lengths, and do not represents the number of the photons that cross the cavities anymore. We can simulate a C-NOT gate using this apparatus.

Finally, using type II parametric down conversion, we study the case of two cavities which the transmission coefficients are polarization dependents. With this apparatus it is possible to distinguish conclusively the four Bell states: ψ_+ , ψ_- , ϕ_+ and ϕ_- .

Descrições e Definições

0.1 Estados emaranhados

Sejam ε_1 e ε_2 dois espaços vetoriais de dimensões N_1 e N_2 respectivamente. Por definição, o espaço ε é chamado produto tensorial de ε_1 por ε_2 , $\varepsilon = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$, se existe, associado a cada par de vetores $|\varphi\rangle_1$, pertencente a ε_1 e $|\chi\rangle_2$, pertencente a ε_2 , um vetor de ε , denotado por:

$$|\varphi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2 \quad ,$$

satisfazendo às seguintes condições:

(i) linearidade na multiplicação por números complexos:

$$\begin{aligned} [\lambda |\varphi\rangle_1] \otimes |\chi\rangle_2 &= \lambda [|\varphi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2] \\ |\varphi\rangle_1 \otimes [\beta |\chi\rangle_2] &= \beta [|\varphi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2] \quad , \end{aligned} \tag{1}$$

(ii) distributividade na adição vetorial:

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle_1 \otimes [|\chi_1\rangle_2 + |\chi_2\rangle_2] &= |\varphi\rangle_1 \otimes |\chi_1\rangle_2 + |\varphi\rangle_1 \otimes |\chi_2\rangle_2 \\ [|\varphi_1\rangle_1 + |\varphi_2\rangle_1] \otimes |\chi\rangle_2 &= |\varphi_1\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2 + |\varphi_2\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2 \quad , \end{aligned} \tag{2}$$

(iii) quando uma base é escolhida em cada um dos espaços ε_1 e ε_2 , $\{|u_i\rangle_1\}$ para ε_1 e $\{|v_j\rangle_2\}$ para ε_2 , o conjunto de vetores $|u_i\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2$ forma uma base para ε . Se N_1 e N_2 são finitos, a dimensão de ε é consequentemente $N_1 N_2$.

Consideremos o estado produto $|\varphi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2$ com $|\varphi\rangle_1$ e $|\chi\rangle_2$ podendo ser expressos nas bases $\{|u_i\rangle_1\}$ e $\{|v_j\rangle_2\}$:

$$|\varphi\rangle_1 = \sum_i a_i |u_i\rangle_1 \quad (3)$$

$$|\chi\rangle_2 = \sum_j b_j |v_j\rangle_2 \quad . \quad (4)$$

Usando as propriedades (1) e (2) a expansão do vetor $|\varphi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2$ na base $\{|u_i\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2\}$ será:

$$|\varphi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2 = \sum_{i,j} a_i b_j |u_i\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2 \quad . \quad (5)$$

Portanto, as componentes de um estado produto são o produto das componentes dos estados formadores.

Desde que, por hipótese, $\{|u_i\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2\}$ constitui uma base em ε , o estado mais geral de ε pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |u_i\rangle_1 \otimes |v_j\rangle_2 \quad . \quad (6)$$

Dados $N_1 \times N_2$ números complexos c_{ij} , nem sempre é possível colocá-los em forma de produtos, $a_i b_j$, de N_1 números a_i por N_2 números b_j , ou seja, existem vetores em ε que não podem ser expressos como o produto de um único vetor de ε_1 por outro de ε_2 . O estado representado por tais vetores é chamado estado emaranhado.

0.2 Luminescência paramétrica

A propagação da luz em um meio dielétrico é descrita pelas equações de Maxwell e pelas equações de movimento associadas ao modelo de interação entre o campo e o meio. Se a resposta ao campo é linear, duas ondas distintas propagam independentemente pelo meio. Vale então o princípio de superposição, compatível com a linearidade das equações de movimento. Se a intensidade do campo é tal que a resposta do meio é não-linear, passa a haver interação entre ondas e o princípio de superposição deve ser abandonado. Uma das manifestações da não linearidade do meio é a troca de energia entre modos do campo eletromagnético, dando origem a fenômenos como a geração de harmônicos e a conversão paramétrica da luz.

A conversão paramétrica descendente é um processo no qual um fóton de energia $\hbar\omega_o$ penetra em um cristal não-linear e, lá dentro, espontaneamente dá origem a dois outros fótons de energias menores $\hbar\omega_1$ e $\hbar\omega_2$ que emergem do cristal pela face oposta. Os fótons criados são chamados historicamente “*idler*” e “*signal*”. Devido à natureza do processo de produção, eles são fortemente correlacionados no tempo. A primeira observação experimental da simultaneidade na geração dos fótons gêmeos foi feita por Burnham e Weinberg em 1970, com uma resolução de aproximadamente 10 ns. Em 1985, Friberg, Hong e Mandel mostraram que a diferença de tempo é inferior a 200 ps (resolução do equipamento de detecção) e independente do tempo de coerência do laser (fótons de energia $\hbar\omega_o$). Em 1987, Hong, Ou e Mandel, utilizando uma técnica de interferência de quarta ordem (que será discutida na próxima seção), mostraram que a flutuação temporal na simultaneidade está limitada pelo tempo de coerência dos feixes convertidos, que no caso era de 100 fs. Há também uma forte correlação em energia; a soma das energias dos fótons idler e signal é essencialmente uma constante (dentro da dispersão extremamente fina da energia do laser). E ainda temos a correlação em momentum; dada a direção de propagação de um dos fótons gêmeos, a direção de seu par fica aproximadamente determinada. Todas essas correlações, temporal, nos momenta e na energia, fazem da conversão paramétrica um fenômeno de enorme interesse prático e teórico.

De certo modo, a conversão paramétrica descendente é o inverso da geração de segundo harmônico.

Não faremos aqui nenhuma descrição matemática detalhada do fenômeno; ao contrário, daremos apenas uma noção simplificada do processo, suficiente para justificar o estado de dois fótons $|\Psi\rangle$ que usaremos em nosso estudo sobre a interação entre o fóton e a cavidade.

Primeiramente, vamos focar nossa atenção no que acontece antes e depois do cristal (no vácuo). Analisemos o processo de conversão paramétrica no plano xz .

Um fóton de frequência ω_b incidente sobre o cristal é destruído; em seu lugar, dois fótons de frequências ω_i e ω_s são criados e emergem do cristal, de acordo com o desenho da Fig. 1.

Suponhamos que a energia do fóton incidente seja transferida aos dois fótons emergentes,

$$\hbar\omega_b = \hbar\omega_i + \hbar\omega_s \implies \omega_b = \omega_i + \omega_s \quad . \quad (7)$$

O momentum do fóton incidente é:

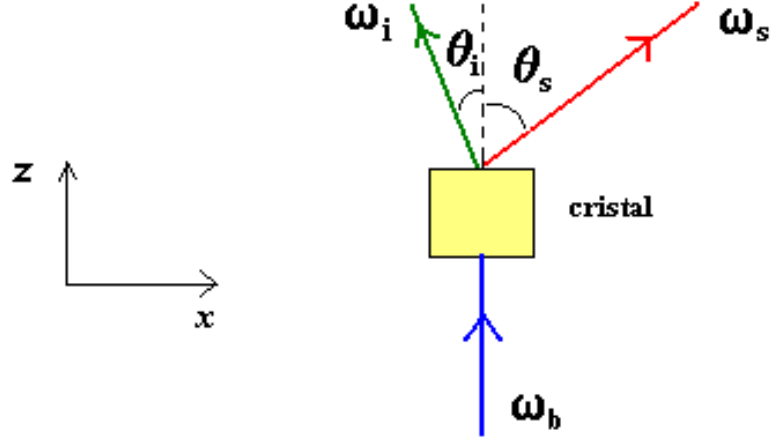


Figura 1: Conversão paramétrica vista por fora do cristal.

$$\vec{P}_b = \hbar \vec{K}_b = \frac{\hbar}{c} \omega_b \hat{z} \quad .$$

Os momenta dos fótons criados são:

$$\begin{aligned} \vec{P}_i &= \hbar \vec{K}_i = \frac{\hbar}{c} \omega_i (\cos \theta_i \hat{z} - \text{sen} \theta_i \hat{x}) \quad e \\ \vec{P}_s &= \hbar \vec{K}_s = \frac{\hbar}{c} \omega_s (\cos \theta_s \hat{z} + \text{sen} \theta_s \hat{x}) \quad . \end{aligned}$$

Onde \vec{K}_b , \vec{K}_i e \vec{K}_s são os vetores de onda no vácuo.

Desse modo, a diferença

$$\begin{aligned} \Delta \vec{P} &= \vec{P}_b - \vec{P}_i - \vec{P}_s = \\ &= \frac{\hbar}{c} (\omega_b - \omega_i \cos \theta_i - \omega_s \cos \theta_s) \hat{z} + \frac{\hbar}{c} (\omega_i \text{sen} \theta_i - \omega_s \text{sen} \theta_s) \hat{x} \end{aligned}$$

é a quantidade de movimento transferida para o cristal.

Vemos que a presença do cristal é essencial para que um processo desse tipo possa acontecer, pois como cada fóton criado se encaminha para direções diferentes entre si

e diferentes da direção do fóton original, é preciso um objeto muito massivo capaz de absorver o excesso de momentum sem alterar o balanço de energia entre os fótons.

Existem dois tipos de conversão paramétrica descendente:

Tipo I: os dois fótons gerados são ordinariamente polarizados, enquanto o fóton do feixe de bombeamento é extraordinariamente polarizado.

Tipo II: o fóton gerador é extraordinariamente polarizado e, dos dois fótons gerados, um é ordinário e o outro extraordinário.

O tipo I é ilustrado na Fig. 2 abaixo:

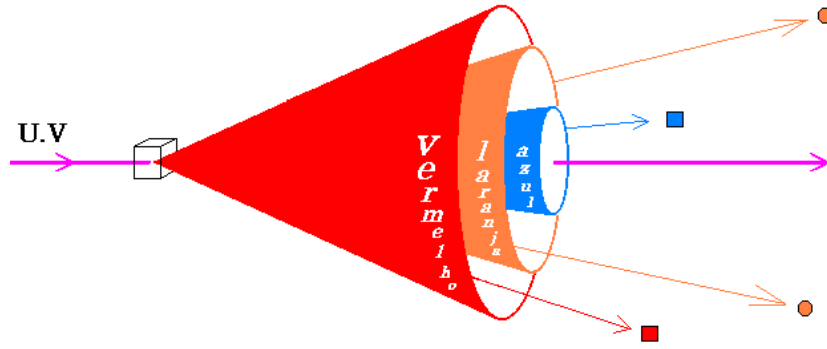


Figura 2: Conversão paramétrica descendente do Tipo I. As bolinhas representam um par degenerado de fótons gêmeos, os quadradinhos representam um par correlacionado, porém não degenerado.

Agora vamos examinar um pouco do que acontece dentro do cristal. Um hamiltoniano simplificado para a conversão descendente é o seguinte:

$$\hat{H} = \chi^{(2)} \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_b + c.h. \quad ,$$

onde $\chi^{(2)}$ é a susceptibilidade de segunda ordem do meio não-linear, $\hat{a}_{s(i)}^\dagger$ denota o operador criação do fóton signal(idler) e \hat{a}_b é o operador aniquilação do fóton de bombeamento.

Supondo que os fótons de bombeamento não interagem uns com os outros, podemos escrever o estado de entrada como:

$$|\Psi\rangle_{in} = \int d^3 k_b \Phi(\vec{k}_b) |\vec{k}_b\rangle \quad , \quad (8)$$

onde $\Phi(\vec{k}_b)$ descreve um bombeio *quasi*-monocromático e muito bem direcionado.

Depois de interagir com o meio não-linear, o estado é:

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle_{out} = & \alpha |\Psi\rangle_{in} + \int d^3 k_b \Phi(\vec{k}_b) \int d^3 k_s \int d^3 k_i \tilde{\chi}^{(2)}(\omega_b, \omega_s, \omega_i) \times \\
& \times \delta(\omega_b - \omega_s - \omega_i - \Delta\omega) \prod_{m=1}^3 \text{sinc} c [(k_b^i - k_s^i - k_i^i)_m L_m/2] \left| \vec{k}_s, \vec{k}_i \right\rangle. \quad (9)
\end{aligned}$$

O primeiro termo representa os fótons não convertidos e o segundo termo descreve os fótons signal e idler com frequências centradas em ω_s e ω_i . A função $\tilde{\chi}^{(2)}$ está relacionada com a susceptibilidade de segunda ordem, mas tem dimensões diferentes, e admite-se que seja uma função que varie lentamente com as frequências. A função delta descreve a conservação da energia; a incerteza $\Delta\omega$ é essencialmente o recíproco do tempo de interação (efetivamente infinito para um feixe de bombeamento monocromático). A função $\text{sinc}(x) \equiv \frac{\text{sen}x}{x}$ demonstra a necessidade do sincronismo de fases; os vetores de onda \vec{k}_b, \vec{k}_s , e \vec{k}_i , que são os vetores de onda dentro do cristal, devem satisfazer à conservação de momentum (dentro de um erro da ordem de $1/L_m$, onde L_m é a dimensão iluminada do cristal na m-ésima direção), para que tenhamos uma conversão eficiente.

A equação (9) contém todas as fortes correlações em energia e momentum; entretanto, para os nossos fins, podemos adotar uma expressão bem menos carregada para o estado $|\Psi\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \int d\omega_s A(\omega_s) |\omega_s\rangle_s |\omega_b - \omega_s\rangle_i, \quad (10)$$

onde $A(\omega_s)$ é a amplitude complexa de probabilidade de se ter um fóton signal com frequência ω_s (no estado de Fock $n=1$, $|\omega_s\rangle_s$) e um fóton idler com frequência ω_i (no estado de Fock $n=1$, $|\omega_b - \omega_s\rangle_i$).

Ao irmos de (9) para (10), retiramos o termo (sem interesse) responsável pelos fótons não convertidos, consideramos o feixe de bombeamento, de fato, monocromático e restringimos as direções de saída (isso é feito na prática usando-se íris bem fechadas). Na realidade, estamos interessados no caso degenerado, isto é, no caso em que $\omega_s = \omega_i = \omega_b/2$; nesse caso, os ângulos de saída são iguais, $\theta_s = \theta_i$, e a expressão (10) finalmente se torna:

$$|\Psi\rangle = \int_0^{\omega_b} d\omega \phi(\omega) |\omega\rangle_s |\omega_b - \omega\rangle_i, \quad (11)$$

onde $\phi(\omega)$ é uma função peso centrada em $\omega_b/2$. Na prática, a largura (dispersão espectral) da distribuição $\phi(\omega)$ é determinada pelos filtros de interferência colocados na frente dos detectores.

A expressão (11), que representa um legítimo estado emaranhado, no sentido da seção anterior, é, portanto, a mais simples possível capaz de descrever os aspectos de coerência longitudinal da luz convertida.

Para encerrar esta seção, vamos relacionar as direções com as cores, ou seja, vamos encontrar uma maneira prática de saber o ângulo de saída do cristal para cada fóton gerado, dada sua frequência. Com isto teremos também uma idéia de como se dá o acoplamento (intermediado pelo cristal) entre os modos do campo eletromagnético.

A conservação do momentum dos fótons dentro do cristal é uma consequência da solução (9) do hamiltoniano de interação. Para $L_m \rightarrow \infty$, temos:

$$\vec{k}'_b = \vec{k}'_s + \vec{k}'_i \quad (12)$$

O desenho da Fig. 3 mostra os vetores de onda dentro do cristal.

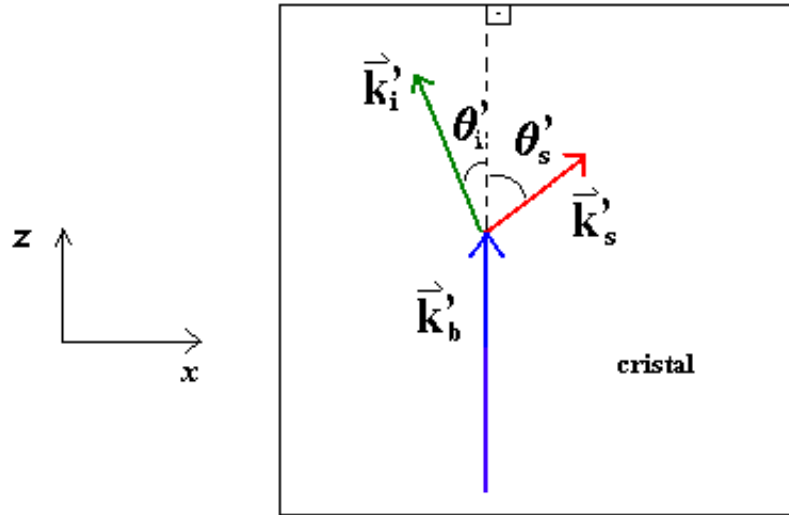


Figura 3: Conversão paramétrica vista por dentro do cristal.

Abrindo (12) em componentes:

$$\begin{aligned}
k_s^i \cos \theta_s^i + k_i^i \cos \theta_i^i &= k_b^i \\
k_s^i \text{sen} \theta_s^i &= k_i^i \text{sen} \theta_i^i \quad .
\end{aligned} \tag{13}$$

Para a conversão do tipo I, temos:

$$\begin{aligned}
k_s^i &= \frac{\omega_s}{c} n_o(\omega_s) \\
k_i^i &= \frac{\omega_i}{c} n_o(\omega_i) \\
k_b^i &= \frac{\omega_b}{c} n_e(\omega_b, \theta_b) \quad ,
\end{aligned} \tag{14}$$

onde n_o e n_e são os índices de refração (dependentes da frequência, e no caso do feixe de bombeamento, dependente também do seu ângulo de incidência com o eixo óptico do cristal birrefringente, (θ_b)). Substituindo (14) em (13), ficamos com:

$$\begin{aligned}
\omega_s n_o(\omega_s) \cos \theta_s^i + \omega_i n_o(\omega_i) \cos \theta_i^i &= \omega_b n_e(\omega_b, \theta_b) \\
\omega_s n_o(\omega_s) \text{sen} \theta_s^i &= \omega_i n_o(\omega_i) \text{sen} \theta_i^i \quad .
\end{aligned} \tag{15}$$

Então, dados ω_b (a frequência do laser), e θ_b , se escolhermos um determinado ω_s , por (1) temos ω_i , e se conhecemos n_o e n_e em função de ω ($n_o(\omega)$ e $n_e(\omega)$ são funções dependentes do tipo de cristal), as equações (15) viram um sistema de duas equações com duas incógnitas, θ_s^i e θ_i^i . Podemos então calcular θ_s^i e θ_i^i . Em seguida, aplicamos a lei de Snell e achamos os ângulos de saída do cristal, θ_s e θ_i .

0.3 O interferômetro de Hong, Ou e Mandel

A maneira usual de se determinar a duração de um pulso luminoso muito curto era superpor dois pulsos similares e medir o *overlap* com um dispositivo que tivesse uma resposta não-linear. Pode-se, por exemplo, fazer uso do processo de geração de harmônicos em um meio não-linear. Tal técnica, entretanto, exige pulsos luminosos muito intensos, o que a torna praticamente inútil quando se trata de luz oriunda de fonte muito fraca, como no caso da luz gerada pela conversão paramétrica descendente. E se quiséssemos medir diretamente a diferença de tempo entre os fótons gêmeos gerados pela conversão

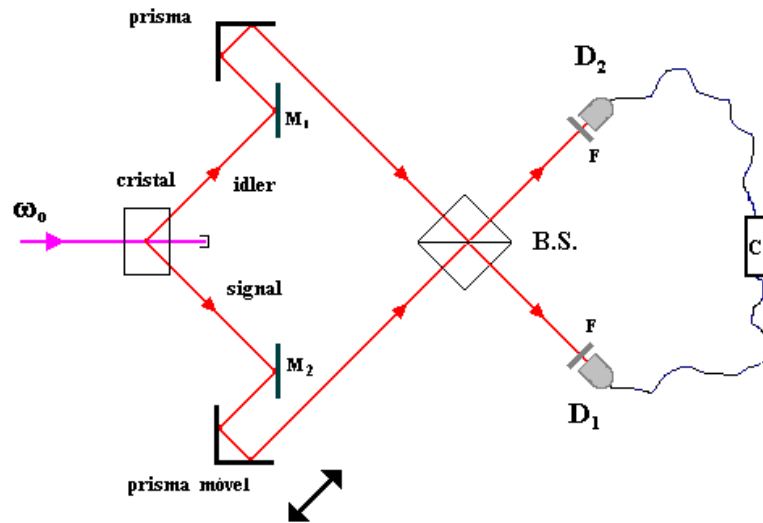


Figura 4: Montagem para o interferômetro de Hong-Ou-Mandel.

paramétrica, estaríamos limitados, pela resolução dos fotodetectores, a um intervalo da ordem de 100 ps ou maior.

Vamos, agora, descrever sucintamente uma técnica desenvolvida em 1987 por Hong, Ou e Mandel, baseada na interferência entre amplitudes de probabilidade de dois fótons, capaz de medir intervalos de tempo da ordem de fs. A técnica consiste basicamente em fazer com que os fótons, que viajam em braços distintos do interferômetro, incidam (um de cada lado) em um divisor de feixes 50%-50% (veja Fig. 4). Detectores (D_1 e D_2) são colocados em cada uma das duas saídas do divisor, registrando a taxa de “coincidências” com que os fótons são detectados num \underline{e} no outro detector simultaneamente. Vale a pena ressaltar que “simultaneamente”, aqui, significa dentro do intervalo de tempo subentendido pela resolução do equipamento eletrônico que registra as coincidências, que em geral é muito maior que o tempo de coerência dos próprios fótons. Quando a indistinguibilidade dos fótons é completa no divisor de feixes, isto é, os dois fótons têm a mesma frequência, o mesmo comprimento de coerência, a mesma polarização, o mesmo modo transversal e chegam juntos (simultaneamente, agora no sentido exato da palavra) no divisor de feixes, eles saem juntos do divisor pela mesma porta de saída, atingindo apenas um dos detectores. Portanto, nesta situação, o número de coincidências é zero. Quando, porém, atrasamos um dos fótons mais que o seu comprimento de coerência, aumentando o comprimento de um dos braços do interferômetro, o efeito deixa de acontecer, os fótons

não mais interferem (não chegam juntos, não têm necessariamente que sair pelo mesmo lado), e, desse modo, recuperamos a taxa de coincidências.

O esquema do experimento é mostrado na Fig. 4.

Para fazermos uma análise do fenômeno, vamos começar estabelecendo as propriedades de um divisor de feixe sem perdas. A Fig. 5 mostra o esquema de um divisor de feixes. Os operadores \hat{a}_1 , \hat{a}_2 , \hat{b}_1 e \hat{b}_2 são aqueles que atuam sobre os modos de propagação conectados pelo divisor. Os modos com índice “1” propagam da esquerda para a direita, os com índice “2” propagam da direita para a esquerda, os modos “a” são os de entrada no divisor, e os “b” são os de saída.

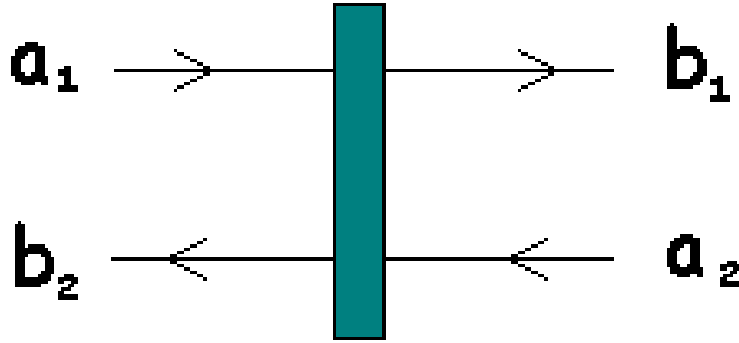


Figura 5: Divisor de feixes.

Os operadores \hat{b}_1 e \hat{b}_2 relacionam-se com os operadores \hat{a}_1 e \hat{a}_2 da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} , \quad (16)$$

onde $S_{ij} = |S_{ij}| e^{i\theta_{ij}}$ e θ_{ij} são deslocamentos de fase nos processos de reflexão/transmissão.

As relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= [\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{ij} , \\ [\hat{a}, \hat{a}] &= [\hat{b}, \hat{b}] = [\hat{a}, \hat{b}] = 0 , \end{aligned}$$

levam às seguintes relações entre os elementos da matriz \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 &= 1 \quad , \\ |S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 &= 1 \quad , \\ S_{11}S_{21}^* + S_{12}S_{22}^* &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{17}$$

A última expressão pode ser decomposta em:

$$|S_{11}| |S_{21}| = |S_{12}| |S_{22}| \tag{18}$$

e

$$\theta_{11} - \theta_{12} = \theta_{21} - \theta_{22} \pm \pi \quad . \tag{19}$$

Se o divisor de feixe for simétrico, $\theta_{11} = \theta_{22}$, $\theta_{21} = \theta_{12}$ e $\theta_{11} - \theta_{12} = \theta_{22} - \theta_{21} = \pm\pi/2$.

As relações (17) também podem ser obtidas através de considerações sobre conservação de energia.

De volta ao experimento de Hong, Ou e Mandel, escolhemos um divisor de feixe simétrico, identificamos $S_{11} = S_{22} = \sqrt{T}$ como o coeficiente de transmissão e $S_{12} = S_{21} = i\sqrt{R}$ como o coeficiente de reflexão. T é a transmitância e R é a reflectância, $R + T = 1$ (divisor sem perdas). A presença do número imaginário i no coeficiente de reflexão garante que a condição (19) seja satisfeita.

Vamos indexar por “i” e “s” os modos de chegada no divisor, e por “1” e “2” os de saída (os que se encaminham para os detectores D_1 e D_2 , respectivamente). Considerando primeiramente a luz gerada como monocromática, temos o seguinte estado de Fock de dois fótons resultante da conversão paramétrica degenerada ($\omega_i = \omega_s$) na entrada do divisor de feixe: $|\Psi\rangle_{in} = |1\rangle_i |1\rangle_s$. Pode-se mostrar, por argumentos gerais, que o estado na saída do divisor é:

$$|\Psi\rangle_{out} = (R - T) |1\rangle_1 |1\rangle_2 + i(2RT)^{1/2} |2\rangle_1 |0\rangle_2 + i(2RT)^{1/2} |0\rangle_1 |2\rangle_2 \quad . \tag{20}$$

Podemos ver que se $R = T = \frac{1}{2}$ (divisor 50%-50%), o primeiro termo zera, em virtude da interferência destrutiva entre as correspondentes amplitudes de probabilidade de dois fótons. Nenhuma coincidência pode então ser registrada pelos detectores D_1 e D_2 .

Na prática os fótons não são monocromáticos, então vamos representar seu estado conjunto pela superposição:

$$|\Psi\rangle = \int_0^{\omega_o} d\omega \phi(\omega) |\omega\rangle_s |\omega_o - \omega\rangle_i, \quad (21)$$

onde $\phi(\omega)$ é a função peso centrada em $\omega_o/2$, e ω_o é a frequência do feixe de bombeamento.

Lembramos que as direções de propagação são bem definidas por *pinholes*, enquanto as dispersões em frequência, largamente definidas pelos filtros F continuam substanciais.

A probabilidade de detectar os fótons em ambos os detectores D₁ e D₂ nos tempos t e $t + \tau$, respectivamente, é dada por:

$$P_{12}(\tau) = K \left\langle \hat{E}_1^{(-)}(t) \hat{E}_2^{(-)}(t + \tau) \hat{E}_2^{(+)}(t + \tau) \hat{E}_1^{(+)}(t) \right\rangle \quad (22)$$

onde $\hat{E}_1^{(+)}$ e $\hat{E}_2^{(+)}$ são os operadores campo elétrico nos detectores D₁ e D₂ e K é uma constante que caracteriza a eficiência dos detectores. $\hat{E}_1^{(+)}(t)$ e $\hat{E}_2^{(+)}(t)$ relacionam-se com os campos $\hat{E}_i^{(+)}(t)$ e $\hat{E}_s^{(+)}(t)$ nos espelhos M₁ e M₂ por:

$$\begin{aligned} \hat{E}_1^{(+)}(t) &= \sqrt{T} \hat{E}_i^{(+)}(t - \tau_1) + i\sqrt{R} \hat{E}_s^{(+)}(t - \tau_1 + \delta_t) \\ &e \\ \hat{E}_2^{(+)}(t) &= \sqrt{T} \hat{E}_s^{(+)}(t - \tau_1 + \delta_t) + i\sqrt{R} \hat{E}_i^{(+)}(t - \tau_1) \end{aligned}, \quad (23)$$

onde τ_1 é o tempo de propagação de um dos espelhos até um dos detectores, e $\pm c\delta_t$ representa um pequeno deslocamento do prisma móvel para frente ou para trás, M₁ e M₂ estão à mesma distância do cristal. Por sua vez, $\hat{E}_i^{(+)}(t)$ e $\hat{E}_s^{(+)}(t)$ podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \hat{E}_i^{(+)}(t) &= \int d\omega e^{-i\omega t} \hat{a}_i(\omega) \\ &e \\ \hat{E}_s^{(+)}(t) &= \int d\omega e^{-i\omega t} \hat{a}_s(\omega) \end{aligned}. \quad (24)$$

Substituindo as equações (21) e (23) em (22) e levando-se em conta (24), encontramos:

$$P_{12}(\tau) = K |G(0)|^2 \{T^2 |g(\tau)|^2 + R^2 |g(2\delta_t - \tau)|^2 - RT [g^*(\tau)g(2\delta_t - \tau) + c.c.]\} , \quad (25)$$

onde $G(\tau)$ é a transformada de Fourier da função $\phi(\omega_o/2 + \omega)$,

$$G(\tau) = \int \phi(\omega_o/2 + \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega , \quad (26)$$

e $g(\tau) \equiv \frac{G(\tau)}{G(0)}$. Supondo que $\phi(\omega_o/2 + \omega)$ seja real e simétrica em ω , então $G(\tau)$ e $g(\tau)$ são ambas reais e simétricas em τ .

Na prática, uma medida de coincidências corresponde a uma integração de $P_{12}(\tau)$ em relação a τ num intervalo igual ao da resolução temporal da eletrônica de detecção, que em geral é de alguns nanosegundos. Como esse tempo é muito maior que o tempo de correlação de $g(\tau)$, podemos integrar em τ de $-\infty$ a $+\infty$. Feito isso, encontramos a expressão para o número de coincidências:

$$N_c = C \left[R^2 + T^2 - 2RT \frac{\int g(\tau)g(\tau - 2\delta_t)d\tau}{\int g^2(\tau)d\tau} \right] , \quad (27)$$

onde C é uma outra constante. Segue-se desta equação que $N_c = C(R-T)^2$ quando $\delta_t = 0$, que zera para $R = T = 1/2$, e que $N_c = C(R^2 + T^2)$ quando δ_t excede apreciavelmente o tempo de correlação de $g(\tau)$.

No caso especial de $\phi(\omega_o/2 + \omega)$ ser uma Gaussiana com dispersão $\Delta\omega$, $\phi(\omega_o/2 + \omega) = e^{-\omega^2/2\Delta\omega^2}$, $g(\tau)$ também terá uma forma Gaussiana,

$$g(\tau) = e^{-\Delta\omega^2\tau^2/2} , \quad (28)$$

e a equação (27) fica :

$$N_c = C(R^2 + T^2) \left[1 - \frac{2RT}{R^2 + T^2} e^{-(\Delta\omega\delta_t)^2} \right] . \quad (29)$$

Com $R = T = 1/2$

$$N_c = \frac{C}{2} \left[1 - e^{-(\Delta\omega\delta_t)^2} \right] \quad (30)$$

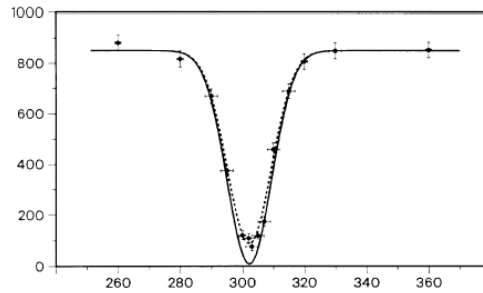


Figura 6: Resultados experimentais dos autores Hong, Ou e Mandel. Na linha horizontal está a posição do prisma móvel, levando-se em conta que para cada deslocamento do prisma, a diferença entre os caminhos ópticos vale o dobro deste deslocamento; e na vertical estão as contagens em coincidência.

O gráfico da Fig.6 mostra os resultados experimentais dos autores bem como a curva teórica baseada na equação (30). Foi usado um filtro de interferência com $\Delta\omega \approx 5 \times 10^{12} Hz$, que leva a um tempo de coerência de $\approx 100 fs$ para os fótons. A largura da região de interferência (o vale) no gráfico das coincidências reflete exatamente esse tempo, como era esperado teoricamente.

A interferência acontece devido à indistinguibilidade entre os dois processos que levam ao evento da detecção em coincidência (transmissão/transmissão e reflexão/reflexão). Quando é assim, devemos somar as amplitudes de probabilidade dos dois processos e depois tomar o módulo ao quadrado da soma, como é ilustrado na Fig. 7.

Qualitativamente, esse tipo de interferência também é previsto pela teoria ondulatória clássica, porém a visibilidade não pode passar de 0.5. O fato de o fundo do vale no gráfico atingir o valor zero, o que indica que todos os pares de fótons saem pelo mesmo lado do divisor de feixes, só pode ser explicado quanticamente. A diferença fundamental é que uma onda pode estar em diversos lugares ao mesmo tempo, enquanto que um *click* num detector exclui a presença do fóton em qualquer outro ponto do espaço.

No fundo, tudo isso está sujeito a uma interpretação muito simples: fótons são Bósons,

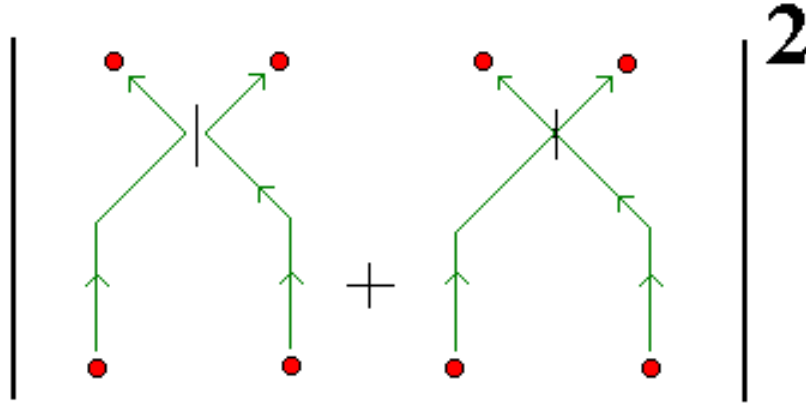


Figura 7: Diagrama mostrando a origem da interferência.

e como tais, ao se encontrarem no divisor de feixes devem seguir pelo mesmo caminho para garantir a simetria do estado total.

Se quisermos encarar o efeito como uma espécie de “interação” entre os fótons, devemos lembrar que a largura do vale (região de interferência) é igual ao comprimento de coerência dos fótons, e não o dobro, ou seja, a “interação” conhece o critério de Rayleigh.

0.4 A cavidade de Fabry-Perot

Considere a cavidade formada por dois semi-espelhos planos, paralelos, de espessura infinitesimal e sem perdas, não necessariamente simétricos, separados por uma distância L , conhecida como cavidade de Fabry-Pérot (F-P). Veja o desenho da Fig. 8.

Para estabelecermos as propriedades ópticas da cavidade F-P, vamos seguir o mesmo tratamento quântico adotado por Carlos Monken em sua tese de doutorado.

Seguindo o formalismo da seção anterior, os semi-espelhos são divisores de feixes caracterizados pelas matrizes \mathbf{S} e \mathbf{S}' (16). De acordo com a Fig. 8, os campos elétricos dentro e fora da cavidade devem satisfazer às seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \hat{E}_1^{(+)}(L/2 + dz) &= S'_{11}\hat{E}_1^{(+)}(L/2 - dz) + S'_{12}\hat{E}_2^{(+)}(L/2 + dz) \quad ; \\ \hat{E}_2^{(+)}(-L/2 - dz) &= S_{21}\hat{E}_1^{(+)}(-L/2 - dz) + S_{22}\hat{E}_2^{(+)}(-L/2 + dz) \quad . \end{aligned} \quad (31)$$

Temos também a conexão entre os campos no interior da cavidade:

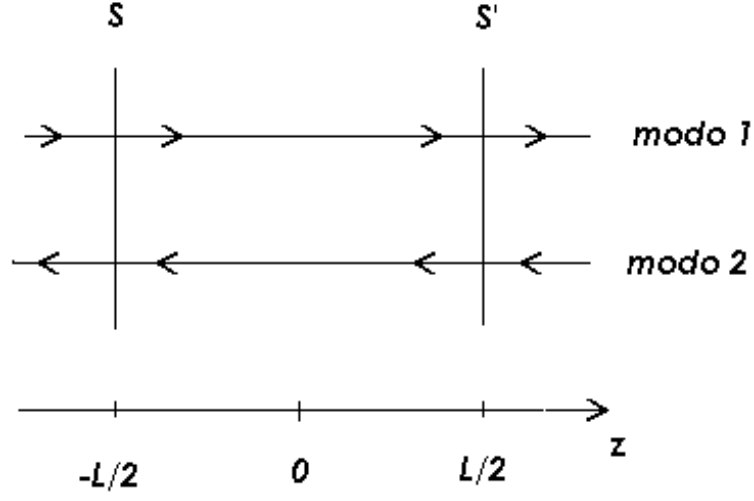


Figura 8: Esquema da cavidade de Fabry-Perot.

$$\begin{aligned}\hat{E}_1^{(+)}(L/2 - dz) &= \hat{E}_1^{(+)}(-L/2 + dz) e^{i\Delta} \quad , \\ \hat{E}_2^{(+)}(-L/2 + dz) &= \hat{E}_2^{(+)}(L/2 - dz) e^{i\Delta} \quad ,\end{aligned}$$

onde $\Delta = kL$ é a fase adquirida na propagação entre os dois espelhos. Usando novamente as matrizes \mathbf{S} e \mathbf{S}' , obtemos mais uma relação entre os campos $\hat{E}_1^{(+)}(-L/2 + dz)$, $\hat{E}_2^{(+)}(L/2 - dz)$ e os demais campos, e com um pouco de álgebra, chegamos a:

$$\begin{aligned}\hat{E}_t^{(+)} &= \frac{S_{11}S'_{11}e^{i\Delta}}{1 - S_{12}S'_{21}e^{2i\Delta}}\hat{E}_i^{(+)} + \frac{S'_{12} + S_{12}(S'_{11}S'_{22} - S'_{12}S'_{21})e^{2i\Delta}}{1 - S_{12}S'_{21}e^{2i\Delta}}\hat{E}_v^{(+)} \quad , \\ \hat{E}_r^{(+)} &= \frac{S_{22}S'_{22}e^{i\Delta}}{1 - S_{12}S'_{21}e^{2i\Delta}}\hat{E}_v^{(+)} + \frac{S_{21} + S'_{21}(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21})e^{2i\Delta}}{1 - S_{12}S'_{21}e^{2i\Delta}}\hat{E}_i^{(+)} \quad ,\end{aligned}\quad (32)$$

onde:

$$\begin{aligned}\hat{E}_i^{(+)} &= \hat{E}_1^{(+)}(-L/2 - dz) \quad ; \\ \hat{E}_t^{(+)} &= \hat{E}_1^{(+)}(L/2 + dz) \quad ; \\ \hat{E}_r^{(+)} &= \hat{E}_2^{(+)}(-L/2 - dz) \quad ; \\ \hat{E}_v^{(+)} &= \hat{E}_2^{(+)}(L/2 + dz) \quad .\end{aligned}$$

Supondo que a cavidade é simétrica:

$$S_{11} = S_{22} = S'_{11} = S'_{22} = t_e \text{ (coeficiente de transmissão dos espelhos),}$$

$$S_{12} = S'_{21} = r \text{ (coeficiente de reflexão dos espelhos no interior da cavidade),}$$

$$S_{21} = S'_{12} = r' \text{ (coeficiente de reflexão dos espelhos no exterior da cavidade).}$$

Colocando todos os operadores campo elétrico na forma $\hat{E}_l^{(+)} = \hat{a}_l e^{ikz_l}$, as equações (32), escritas em forma matricial, ficam:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_t \\ \hat{a}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{a}_v \end{pmatrix}, \quad (33)$$

onde

$$\mu = \frac{t_e^2}{1 - r^2 e^{2i\Delta}}, \quad (34)$$

$$\nu = e^{-i\Delta} \left(\frac{r' + r(t_e^2 - rr')e^{2i\Delta}}{1 - r^2 e^{2i\Delta}} \right). \quad (35)$$

Explicitando a dependência em ω ,

$$\mu(\omega) = \frac{t_e^2}{1 - r^2 e^{2i\omega\tau_c}}, \quad (36)$$

$$\nu(\omega) = e^{-i\omega\tau_c} \left(\frac{r' + r(t_e^2 - rr')e^{2i\omega\tau_c}}{1 - r^2 e^{2i\omega\tau_c}} \right), \quad (37)$$

onde $\tau_c = L/c$ é o tempo de 1 trânsito pela cavidade. Está claro que μ e ν são os coeficientes de transmissão e reflexão, respectivamente, da cavidade como um todo. Note que μ e ν satisfazem às relações

$$|\mu|^2 + |\nu|^2 = 1 \quad (38)$$

e

$$\mu^* \nu + \mu \nu^* = 0, \quad (39)$$

o que significa que a cavidade F-P funciona como um divisor de feixe. Se a cavidade for composta de dois espelhos simétricos, então $r = r'$ e $\theta_t - \theta_r = \pm \frac{\pi}{2}$. Se for uma cavidade formada por um bloco dielétrico de faces paralelas, $\theta_t = 0$, $\theta_r = 0$ e $\theta_{r'} = \pi$, isto é, $r = -r'$. Em qualquer um dos casos temos a transmitância, dependente da frequência, $|\mu|^2 = \frac{1}{1+F \text{sen}^2 \omega \tau_c}$, conhecida como função de Airy, onde $F = \frac{4r^2}{t_e^2}$ é chamado *coeficiente de finesse* da cavidade. Na Fig. 9, temos um gráfico de $|\mu|^2 \times \omega$, com $|r|^2 = 0.81$ e $|t_e|^2 = 0.19$.

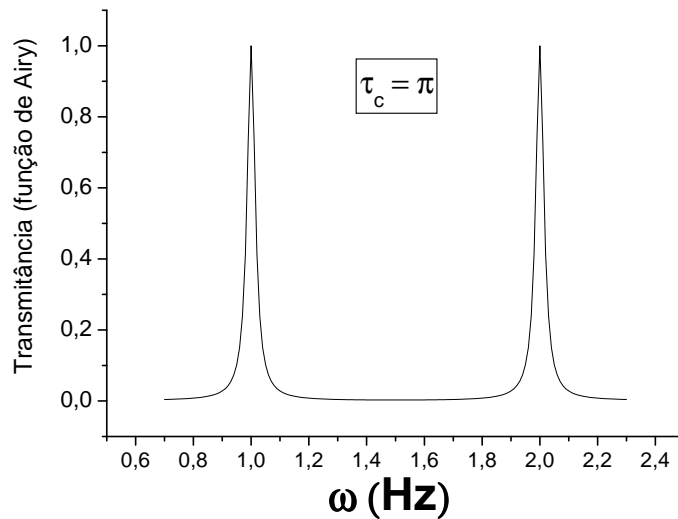


Figura 9: Gráfico $|\mu|^2 \times \omega$, com $R=0.81$ e $\tau_c = \pi$.

Note que podemos, nas ressonâncias, ter uma transmissão de 100%, mesmo com um alto coeficiente de reflexão dos espelhos.

Introdução

Estudamos os efeitos quânticos da interação de fótons com cavidades de Fabry-Perot. Para isto usamos fótons gêmeos que são gerados simultaneamente num cristal não linear quando este é bombeado por um feixe de laser (conversão paramétrica espontânea descendente), e um interferômetro de dois fótons de alta resolução. O interferômetro, chamado de interferômetro de Hong-Ou-Mandel, consiste de dois braços pelos quais vão os fótons, um divisor de feixes para onde os fótons são direcionados e, nas saídas do divisor, detectores medindo em coincidência. A cavidade de Fabry-Perot utilizada foi construída com semi-espelhos dielétricos. Numa primeira etapa, fizemos os cálculos referentes às alterações nas medidas em coincidência quando uma cavidade de Fabry-Perot é inserida num dos braços do interferômetro. Numa segunda etapa, em colaboração com o Dr. Marco Sagioro, realizamos o experimento com as características mencionadas acima, num regime onde o comprimento de coerência do fóton é menor que a largura da cavidade (distância entre os semi-espelhos). Os resultados experimentais confirmaram nossa previsão teórica e estão publicados na *Physical Review A*. Em seguida realizamos um experimento no regime oposto ao do anterior, ou seja, no regime onde o comprimento de coerência do fóton é maior que a largura da cavidade. Os resultados experimentais nos permitem mapear aproximadamente a distorção causada nos fótons pela presença da cavidade. Também desenvolvemos cálculos, em colaboração com o Dr. Aldo Delgado da Universidade de Concepcion, referentes às alterações nas medidas de coincidências quando duas cavidades são inseridas no interferômetro, uma em cada braço.

No capítulo 1, abordaremos o caso em que a largura da cavidade é menor que a coerência longitudinal do fóton gêmeo. Mostraremos um experimento no qual é medido o deslocamento do pico de um pacote de ondas que atravessa uma cavidade de Fabry-Perot vazia. Para isto usaremos pares de fótons gerados pela conversão paramétrica espontânea descendente, um interferômetro de Hong-Ou-Mandel (HOM) e detecção em coincidência. A cavidade de Fabry-Perot distorce o pacote de ondas do fóton. O interferômetro de

HOM é uma boa ferramenta para mapear esta distorção no limite em que a separação dos espelhos da cavidade é muito menor que o comprimento de coerência dos fótons individuais. Nós discutiremos as correções que precisam ser feitas nos resultados da interferência de dois fótons, para que se atinja os reais dados desejados. Mesmo na ausência de meios absorventes ou meios com populações atômicas invertidas, efeitos “superluminais” conectados com o fenômeno do tunelamento são observados. Uma interpretação dos resultados experimentais no campo da causalidade é dada.

No capítulo 2, nós estudamos teoricamente a interferência de dois fótons na saída de um interferômetro de Hong-Ou-Mandel cujos braços foram suplementados com a adição de uma ou duas cavidades ópticas. A função de correlação de quarta ordem nas saídas do divisor de feixes é calculada. No regime onde a largura das cavidades são maiores que o comprimento de coerência de um fóton, coalescência e anti-coalescência fotônica são observadas. Diagramas de Feynman para os processos parcialmente indistinguíveis que levam à interferência quântica são apresentados. A construção de uma porta “C-NOT” óptica é discutida como uma aplicação para o interferômetro de Hong-Ou-Mandel com duas cavidades.

No capítulo 3, propomos dois esquemas para a análise de estados de Bell na variável de polarização, baseados em transformações de polarização e detecção em coincidência. Ambos esquemas permitem a identificação conclusiva dos quatro estados de Bell. Novamente, supomos que os pares de fótons nos estados de Bell em polarização foram gerados através da conversão paramétrica descendente. A distinção conclusiva de estados de Bell é importante, por exemplo, no protocolo de teleportação de fótons.

Capítulo 1

Regime da Cavidade Menor que a Coerência do Fóton Gêmeo

1.1 Introdução

No começo do século passado, Sommerfeld e Brillouin [1] concluíram teoricamente que um pacote de ondas representa um sinal, somente se ele possui uma bem definida frente de onda na direção de propagação, e a velocidade desta frente de onda não pode ultrapassar c , a velocidade da luz no vácuo. Eles investigaram a resposta de um meio semi-infinito com dispersão anômala a um sinal incidente senoidal cuja amplitude é zero antes de algum tempo inicial, e um para tempos posteriores. Um pulso Gaussiano passando através de alguma barreira linear mas que é feita de um meio dispersivo e que tem uma linha de absorção na vizinhança da frequência central do pulso foi investigado por Garrett e McCumber, em 1970 [2]. Eles mostraram que, se a barreira não é muito estreita, o pulso emergente clássico permanece substancialmente Gaussiano e o pico do pulso emerge no instante dado pela expressão clássica da velocidade de grupo, mesmo que este instante seja anterior ao instante no qual o pulso incidente entra na barreira. A velocidade do pulso no regime linear de um feixe de laser pulsado em amostras de $GaP : N$ foi medida por Chu e Wong [3]. O pulso de laser foi sintonizado num limite de uma linha de um exciton e foi visto propagar-se através do material com uma pequena distorção no formato do pulso e com a velocidade do envelope dada pela velocidade de grupo, mesmo quando a velocidade de grupo excede c . Como discutido por Garrett e McCumber [2], o efeito da velocidade do pulso excedendo c é devido a uma reformatação do pulso incidente na amostra onde a beira da frente do pulso é menos atenuada que a beira de trás, e portanto não viola a relatividade especial ou a causalidade. Recentemente, Carey et al. [4] mostraram que

na reflexão total interna frustrada (em dois prismas retos de vidro, cujas hipotenusas estão muito próximas), a onda na lacuna de ar é não causal. Apesar da fase e energia propagarem-se com velocidade acima de c , é impossível transmitir informação devido ao espalhamento do sinal do feixe [1].

Em 2000, Peatross et al. [5] usaram uma integral de tempo esperado sobre o vetor de fluxo de Poynting para definir o tempo de chegada de um pulso de luz num ponto do espaço, abordagem usada pela primeira vez por Smith [6]. O atraso entre os tempos de chegada do pulso em dois pontos distintos é mostrado consistir de duas partes: uma superposição espectral de atrasos de grupo (inverso da velocidade de grupo) e um atraso devido à reformatação espectral via absorção ou amplificação. O resultado fornece um contexto no qual a velocidade de grupo tem sempre um significado, mesmo para pulsos de banda larga e quando a velocidade de grupo é superluminal ou negativa. Em 2005, Aminul et al. [7] experimentalmente mediram o atraso global de grupo e atrasos de reformatação para pulsos ópticos arbitrários num meio dispersivo, verificando as previsões anteriores de Peatross et al.. A propagação de um pulso incoerente num sistema sem absorção foi bem descrita pelo atraso global de grupo, mesmo quando o meio causa uma grande deformação no pulso transmitido. No caso de pulsos de fase modulada num meio ressonante absorvedor, as tais chamadas velocidades de propagação superluminal ou subluminal são fortemente influenciadas pelo atraso de reformatação. Eles observaram que o novo conceito de velocidade de grupo não falha em caso algum. Velocidades de grupo superluminais também foram medidas com um pulso de laser atravessando uma fibra ótica birrefringente por Brunner et al. [8]. O experimento mostra que a velocidade de grupo certamente excede c na fibra. Os autores também mediram a “velocidade” do sinal, a velocidade na qual a informação se propaga e não pode exceder c . Este fato foi diretamente demonstrado experimentalmente [9].

Entender a física da propagação luminosa é uma importante tarefa por causa da sua relevância para ambas comunicações clássica e quântica [10]. No regime quântico com poucos fótons, não foram realizados muitos trabalhos experimentais para medir o atraso temporal do fóton quando este atravessa uma amostra. Nosso alvo neste capítulo é experimentalmente extrair informação sobre o deslocamento do pico do pacote de ondas de um fóton, quando ele atravessa uma cavidade de Fabry-Perot vazia (FP), e o formato final do pacote de ondas transmitido. Entretanto, como a coerência longitudinal do pacote de ondas de um fóton é extremamente curta, é impossível medi-los diretamente. Assim, a interferometria deve ser aplicada [11]. Pares de fótons (fótons gêmeos) gerados pela

conversão paramétrica espontânea descendente (SPDC) são usados, uma vez que eles são gerados essencialmente simultaneamente [12]. Nós fazemos um dos fótons passar através do obstáculo e deixamos o outro ir livremente. Depois disto, ambos os fótons interferem no interferômetro de Hong-Ou-Mandel (HOM) como descrito abaixo. Um experimento relacionado ao nosso foi feito em 1993 por Steinberg, Kwiat e Chiao [13]. Eles usaram HOM e fótons gêmeos para medir tempos fotônicos de tunelamento. Um cristal unidimensional fotônico ou um espelho dielétrico de multicamadas foi usado como barreira para o fóton.

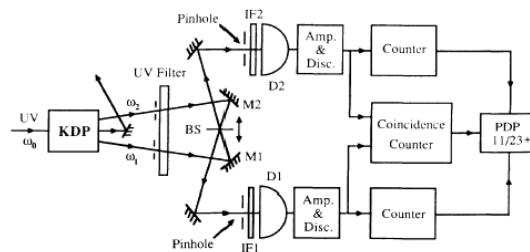


Figura 1.1: Esquema original do interferômetro de Hong-Ou-Mandel.

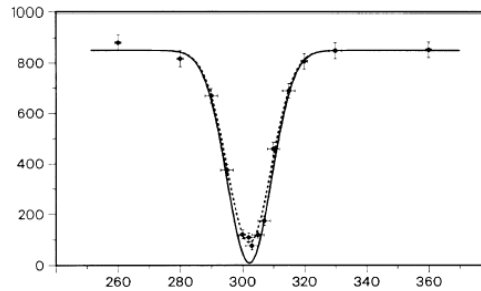


Figura 1.2: Resultado das medidas em coincidência do aparato da Fig. 1.1. No eixo horizontal está a posição do divisor de feixes em μm . Os pontos são resultados experimentais com suas respectivas barras de erro, a linha contínua é a curva esperada pela teoria e a linha pontilhada é um ajuste teórico.

Sua medida mostra que o pico do pacote de ondas do fóton transmitido chegou mais cedo do que chegaria se ele viajasse pelo vácuo com velocidade c . A causalidade de Einstein não é violada neste processo e o processo da reformatação do pulso ocorre ao nível

de partículas quânticas: a probabilidade de detectar um fóton decai menos em tempos anteriores do que em tempos posteriores [14]. O mesmo aparato foi também usado para demonstrar o cancelamento da dispersão na medida da velocidade de propagação de um único fóton no vidro [15]. Em 2005, Silberberg et al. [16] mediram o formato do pacote de ondas de dois fótons de pares de fótons emaranhados gerados pela SPDC. Usando um fluxo ultra elevado de fótons emaranhados colineares e um interferômetro de Mach-Zehnder eles puderam gerar o segundo harmônico com os pares de fótons emaranhados e desta maneira observar o formato do par de fótons ou bi-fóton diretamente.

Na SPDC, um feixe de bombeamento (p) incidente sobre um cristal não-linear cria um par de fótons emaranhados, usualmente chamados *signal* (s) e *idler* (i) [17]. A interferência quântica num divisor de feixes foi primeiramente demonstrada por Hong, Ou e Mandel em 1987 [12]. No experimento deles, os fótons *signal* e *idler* com a mesma frequência e polarização são combinados num divisor de feixes (BS) 50-50 e os fótons que saem do divisor são detectados em coincidência. Quando os caminhos dos fótons *signal* e *idler* do cristal até o divisor de feixes são tornados iguais, nenhuma contagem em coincidência é detectada nas saídas do BS , veja as Figs. 1.1 e 1.2.

1.2 Cálculo clássico da forma de um pacote de ondas transmitido por uma cavidade de Fabry-Perot

Nós começamos por observar classicamente como uma cavidade de Fabry-Perot simétrica afeta o formato de um pacote de ondas que é transmitido através dela. Considere um pacote de ondas, antes da cavidade, cuja dependência temporal do seu campo eletromagnético é descrito pela superposição:

$$f(t) = \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (1.1)$$

onde $\phi(\omega)$ é alguma função peso centrada em $\omega_0/2$. A ação da cavidade em cada uma das ondas planas é bem conhecida [18], e depois de ser transmitida, a superposição (1.1) se torna:

$$f_T(t) = \int_0^{\omega_0} d\omega \mu(\omega) \phi(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (1.2)$$

onde $\mu(\omega)$ é o coeficiente de transmissão da cavidade como um todo. A cavidade é formada por dois espelhos dielétricos planos com os mesmos coeficientes de reflexão e transmissão

(r) e (t) separados por uma distância L . Para este modelo de cavidade, $\mu(\omega)$ é dado por [19]:

$$\mu(\omega) = T \sum_{m=0}^{\infty} R^m \exp(2im\omega\tau_c), \quad (1.3)$$

onde $\tau_c = L/c$, $R = |r|^2$ e $T = |t|^2$.

Supondo que $\phi(\omega)$ seja da forma:

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\Delta\omega}\sqrt{\pi}} \exp[-(\omega_0/2 - \omega)^2/2(\Delta\omega)^2], \quad (1.4)$$

onde $\Delta\omega \ll \omega_0$, nós podemos obter da Eq. (1.2) a intensidade de luz transmitida como função do tempo:

$$\begin{aligned} |f_T(t)|^2 &\propto T^2 \sum_{m,n} R^{m+n} \cos[\omega_0\tau_c(m-n)] \times \\ &\times (\exp\{\frac{-\Delta\omega^2}{2}[(2m\tau_c - t)^2 + (2n\tau_c - t)^2]\}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.3 Cálculo quântico da intensidade média

Agora vamos calcular a intensidade média em função do tempo de um pacote de onda que atravessa um obstáculo, como por exemplo, uma cavidade de Fabry-Perot.

Nós começamos escrevendo o estado de um fóton antes da barreira,

$$|\psi\rangle = \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) |\omega\rangle, \quad (1.6)$$

e o estado de um fóton transmitido pela barreira

$$|\tilde{\psi}\rangle = \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) \mu(\omega) |\omega\rangle, \quad (1.7)$$

As grandezas $\phi(\omega)$ e $\mu(\omega)$ têm o mesmo significado que tinham na seção anterior: função peso inicial e o coeficiente de transmissão, respectivamente.

A média da intensidade detectada é dada por

$$\langle I(t) \rangle = \langle \tilde{\psi} | E^{(-)}(t) E^{(+)}(t) | \tilde{\psi} \rangle, \quad (1.8)$$

onde o operador campo elétrico é

$$E^{(+)}(t) \propto \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} a(\omega), \quad (1.9)$$

com $a(\omega)$ sendo o operador aniquilação de um fóton com frequência ω . O resultado de $E^{(+)}(t)|\tilde{\psi}\rangle$ é

$$E^{(+)}(t)|\tilde{\psi}\rangle \propto \int_0^{\omega_0} d\omega e^{-i\omega t} \phi(\omega) \mu(\omega) |vac\rangle. \quad (1.10)$$

A Eq. (1.5) foi desenvolvida para o caso onde a barreira era uma cavidade de Fabry-Perot, ela mostra o perfil temporal de um pacote de ondas Gaussiano distorcido quando atravessa a cavidade. Note que se nós completássemos o cálculo da equação Eq. (1.8) usando a Eq. (1.10) nós acharíamos o mesmo resultado da Eq. (1.5), isto é, o tratamento quântico leva às mesmas previsões a que levam o tratamento clássico (neste caso) para a dependência temporal da intensidade luminosa ao atravessar uma barreira qualquer. A função $\mu(\omega)$ afeta cada componente de frequência da amplitude de probabilidade do fóton, Eq. (1.10), de uma maneira diferente, distorcendo a distribuição temporal inicial do pacote de ondas. A cavidade foi posta para ser menor que o comprimento de coerência do fóton. No regime onde a separação dos espelhos é maior que o comprimento de coerência do fóton, nenhuma distorção ocorre no pacote de ondas do fóton. É como se o fóton “visse” um só espelho de cada vez, e todas as componentes do pacote recebessem um coeficiente r , em cada reflexão e um t em cada transmissão. Na ref.[20] este regime foi experimentalmente estudado. Foram medidos uma série de picos e/ou vales devido aos diferentes percursos do fóton dentro da cavidade ou interferência entre os parcialmente indistinguíveis caminhos dos pares de fótons no interferômetro. Os processos de coalescência (quando os fótons saem juntos pela mesma saída de um divisor de feixes) e anti-coalescência (quando os fótons saem separados por portas distintas de um divisor de feixes) foram estudados.

1.4 Um experimento idealizado

Suponha um experimento idealizado no qual a resolução temporal dos detectores é infinita. O aparato de um experimento destes é descrito abaixo, Fig. 1.3.

A figura 1.3 mostra um aparato que poderia ser usado num experimento idealizado. Neste experimento dois fótons gerados na SPDC (*signal* e *idler*) são direcionados para dois detectores ($D1$ e $D2$), que são supostos ter suas resoluções temporais infinitas. O fóton *idler* atravessa uma cavidade de Fabry-Perot, as contagens em coincidência são feitas em termos do atraso temporal eletrônico entre os detectores $D1$ e $D2$. Vamos agora obter uma expressão para a taxa de coincidência em tal situação. O estado de dois fótons

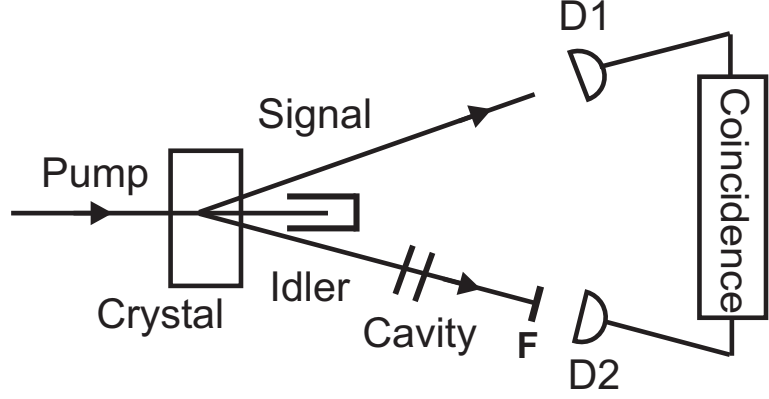


Figura 1.3: Esquema experimental de um experimento idealizado. Um feixe de bombeamento monocromático de frequência angular ω_0 incidente num cristal não-linear gera dois outros feixes, *signal* e *idler*. O feixe *idler* passa através de uma cavidade de Fabry-Perot. Medidas em coincidência são feitas em termos do atraso temporal entre os dois detectores *D1* e *D2*. *F* é um filtro de interferência colocado em frente ao detector *D2*.

gerados na SPDC imediatamente depois do cristal é

$$|\xi\rangle = \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) |\omega\rangle_i |\omega_0 - \omega\rangle_s. \quad (1.11)$$

Nós podemos usar a mesma $\phi(\omega)$ mostrada na Eq. (1.4), a qual neste caso é a distribuição em frequência do filtro *F*, porque a largura de banda da distribuição espectral na SPDC é muito maior que a largura de banda do filtro de interferência [12]. O estado de dois fótons, depois da cavidade se torna

$$|\xi_T\rangle = \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) \mu(\omega) |\omega\rangle_i |\omega_0 - \omega\rangle_s, \quad (1.12)$$

onde $\mu(\omega)$ é dada pela Eq. (1.3). A probabilidade de se obter um “click” num tempo t em um detector e num tempo $t + \tau$ no outro para um estado puro é dado por [17, 21]

$$P(\tau) = K \langle \xi_T | E_i^-(t) E_s^-(t + \tau) E_s^+(t + \tau) E_i^+(t) | \xi_T \rangle, \quad (1.13)$$

onde K é alguma constante dependente da eficiência dos detectores. Nós vamos por $K = 1$ porque estamos interessados na taxa de coincidência, não no número de coincidências

propriamente dito; $E_j^+(t)$ são os operadores campo elétrico e são:

$$E_j^+(t) \propto \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega t} a_j(\omega), \quad (1.14)$$

$a_j(\omega)$ são operadores aniquilação, com $j = i, s$. Usando a Eq. (1.12) e Eq. (1.14), nós podemos calcular a amplitude de probabilidade de coincidência que é proporcional a

$$E_s^+(t + \tau) E_i^+(t) |\xi_T\rangle \propto e^{-i\omega_0 t} \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) \mu(\omega) e^{-i\omega \tau} |vac\rangle. \quad (1.15)$$

Se agora nós calcularmos $P(\tau)$ a partir da Eq. (1.13), nós obteremos o mesmo resultado mostrado na Eq. (1.5) (veja Eq. (1.12), a única diferença é que $|f_T(t)|^2$ está em função de t enquanto $P(\tau)$ está em função de τ .

Na verdade, neste experimento idealizado, nós podemos interpretar o fóton *signal* como um gatilho temporal, usado para o mapeamento temporal do pacote de ondas distorcido do fóton *idler*. Nós vamos manter esta interpretação na análise do experimento mostrado abaixo.

1.5 O experimento real

O experimento descrito na seção 1.4 é idealizado porque não há detectores com resolução infinita. Na realidade, há uma “janela eletrônica” (no nosso caso $\Delta\tau = 5$ ns) durante a qual as coincidências são contadas. O que nós podemos fazer, em geral, para realizar experimentos envolvendo fótons é usar interferometria. A Fig. 1.4 mostra o aparato usado para fazer as medidas da forma temporal dos fótons *idler* transmitidos através de uma cavidade de Fabry-Perot assim como o deslocamento temporal do pico de seus pacotes de onda comparados com o pacote de onda dos fótons *signal*.

O aparato experimental consiste de um interferômetro de HOM, e uma cavidade formada por dois divisores de feixe dielétricos $BS2$ e $BS3$ com 50% de reflectividade em torno de 826.2 nm (Fig. 1.4). Um cristal de Iodato de Lítio ($LiIO_3$) de 5 mm de comprimento orientado para o casamento de fase do tipo-I é bombeado por uma onda contínua de um laser de criptônio oscilando em 413.1 nm e com 70 mW de potência. Um fóton violeta do feixe de bombeamento é convertido em dois fótons infravermelhos conjugados de 826.2 nm (*signal* e *idler*). O feixe *signal* passa através de uma placa compensadora de vidro (não mostrada na Fig. 1.4) e o feixe *idler* através da cavidade de cerca de 0.013 mm de largura. A placa de vidro compensadora compensa o atraso do fóton *idler* nos substratos de vidro

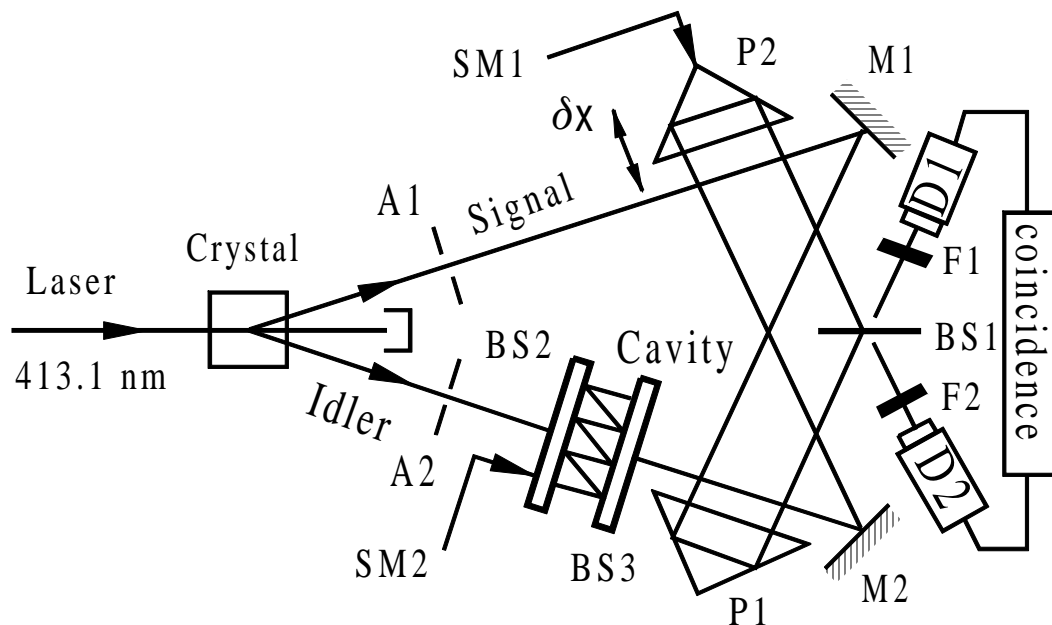


Figura 1.4: Esquema experimental de um interferômetro de Hong-Ou-Mandel, no qual uma cavidade de Fabry-Perot é inserida num dos braços. Os símbolos *BS*, *M*, *P*, *SM*, *A* e *D* significam divisores de feixe, espelhos, prismas, motores de passo, aberturas e detectores, respectivamente. O feixe *signal* passa através de uma placa de vidro compensadora, depois de *A1* (não mostrada na figura).

de *BS2* e *BS3*. A seguir, ambos os feixes são direcionados pelos espelhos *M1* e *M2*, e os prismas *P1* e *P2* para as duas portas de entrada do divisor de feixe *BS1*. Ambos os detectores *D1* e *D2* são fotodiodos de avalanche operando no modo de contagem de fótons e *F1*, *F2* são filtros de interferência colocados em frente a eles, com 5.8 nm FWHM largura de banda e centrados em 826,2 nm. Por ser a SPDC um processo espontâneo, o experimento se dá num regime de poucos pares de fótons e somente um fóton por vez atravessa a cavidade. A distribuição espectral inicial dos pacotes de onda dos fótons, como mencionado acima (seção 1.4), é determinada pela distribuição espectral do filtro de interferência, e como consequência, também sua distribuição temporal. O prisma *P2* estava fixado num estágio de translação dirigido pelo motor de passo *SM1* usado para

mudar o comprimento do caminho do fóton *idler*. O motor de passo *SM2* tem 50 nm de resolução e é usado para mover o semi-espelho *BS2*, mudando a largura da cavidade (L).

Vamos considerar o estado da luz emitida pelo processo da SPDC quando um fóton do feixe de bombeamento de frequência ω_0 é convertido em dois fótons degenerados de frequência $\omega_0/2$. Este estado é afetado pela presença da cavidade. A taxa de contagens em coincidência, nas saídas do divisor de feixe *BS1*, se supormos os filtros *F1* e *F2* centrados em $\omega_0/2$ e tendo uma distribuição Gaussiana (Eq. (1.4)) pode ser calculada como se segue. O estado inicial de dois fótons gerados pela SPDC é mostrado na Eq. (1.11). Depois que o fóton *idler* encontra a cavidade, o estado se torna

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) [\mu(\omega) |1, \omega\rangle_{i,t} |1, \omega_0 - \omega\rangle_s + \nu(\omega) |1, \omega\rangle_{i,r} |1, \omega_0 - \omega\rangle_s], \quad (1.16)$$

onde $\mu(\omega)$ é dada pela Eq. (1.3), $\phi(\omega)$ é dada pela Eq. (1.4), $\nu(\omega)$ é o coeficiente de reflexão da cavidade, (i, t) significa *idler* transmitido e (i, r) significa *idler* refletido. A segunda parte da Eq. (1.16) não contribui para as contagens em coincidência porque ela representa aqueles fótons que são refletidos pela cavidade. Os operadores campo elétrico dos modos *idler* e *signal* são mostrados na Eq. (1.14). O divisor de feixes (*BS1*) mistura os dois campos eletromagnéticos dos modos *idler* e *signal*, e os operadores campo elétrico em frente aos detectores 1 e 2 são

$$E_1^{(+)} = E_i^{(+)} + iE_s^{(+)} \quad (1.17)$$

e

$$E_2^{(+)} = iE_i^{(+)} + E_s^{(+)}. \quad (1.18)$$

O coeficiente imaginário i aparece devido à diferença de $\pi/2$ entre os coeficientes de reflexão e de transmissão do divisor de feixe simétrico [12, 17]. A taxa de coincidência é dada pela probabilidade de se encontrar um fóton em um detector num tempo t e outro fóton num tempo $t + \tau$ no outro detector [17]:

$$P(\tau) = \langle \tilde{\Psi} | E_1^{(-)}(t) E_2^{(-)}(t + \tau) E_2^{(+)}(t + \tau) E_1^{(+)}(t) | \tilde{\Psi} \rangle. \quad (1.19)$$

Agora nós integramos $P(\tau)$ no intervalo de tempo da janela eletrônica para obtermos a taxa de coincidência. Este intervalo de tempo não só é muito maior que a coerência

longitudinal dos fótons gêmeos [12], como também é muito maior do que o atraso relativo entre os fótons, assim podemos estender o intervalo de integração para infinito.

$$R_c = \int_{-\infty}^{\infty} P(\tau) d\tau. \quad (1.20)$$

Com isto a taxa de coincidência é [22]:

$$\begin{aligned} R_c(\delta) = & T^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} R^{(n+m)} \times \\ & \times \cos[\omega_0 \tau_c (m - n)] \times \\ & \times \{ \exp[-\Delta\omega^2 (n - m)^2 \tau_c^2] - \\ & - \exp[-\Delta\omega^2 ((n + m)\tau_c - \delta)^2] \}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

onde $\Delta\omega$ é a FWHM largura de banda dos filtros de interferência $F1$ e $F2$, veja a Fig. 1.4, τ_c é a largura da cavidade (L) dividida pela velocidade da luz no vácuo (c), $\tau_c = L/c$, $T(R)$ é a transmitância (refletância) de cada semi-espelho da cavidade, e δ é o atraso temporal fornecido pelo prisma (trombone) $P2$. A direção positiva de δ é aquela que encurta o comprimento do caminho do fóton *idler* (veja a Fig. 1.4). Os semi-espelhos da cavidade têm a mesma refletância.

Neste ponto, uma definição de ressonância e anti-ressonância é apropriada. Um fóton é ressonante com a cavidade, quando L é igual a um múltiplo inteiro de meio comprimento de onda, isto é, $N\lambda/2$ (λ é a frequência central do pacote de ondas do fóton *idler* e $N = 1, 2, 3, \dots$), ou em outras palavras, quando $\omega_0 \tau_c = 2N\pi$. Um fóton é anti-ressonante com a cavidade quando L é igual a um múltiplo semi-inteiro de $\lambda/2$, $L = [(2N - 1)/2][\lambda/2]$, ou em outras palavras, quando $\omega_0 \tau_c = (2N - 1)\pi$.

Para ver como as contagens em coincidência estão relacionadas com a forma do pacote de ondas *idler*, depois de passar pela cavidade, nós sobrepomos os gráficos do pacote de onda transmitido (Eq. (1.5)) e a taxa de coincidência (Eq. (1.21)) usando os mesmos parâmetros do nosso experimento, nos dois casos, perto da ressonância e perto da anti-ressonância. Não obstante, para conseguir uma boa comparação entre as duas equações, nós precisamos inverter o gráfico gerado pela Eq. (1.21). A razão é que a Eq. (1.5) sempre nos dá picos (lembre-se que ela é o módulo quadrado de uma função de onda), enquanto a Eq. (1.21) em geral nos dá vales para o casamento de fase do tipo I [12]. A inversão é feita da seguinte maneira: nós pegamos o valor do patamar, o qual é uma taxa de coincidências de valor constante quando δ está fora da região de interferência do HOM

(quando o comprimento do caminho percorrido pelo fóton *signal* é suficientemente menor do que o comprimento do caminho percorrido pelo fóton *idler*, ou seja, o caminho do *signal* é muito mais curto que o caminho do *idler*, veja a Fig. 1.4) [12], e subtraímos dele os valores originais dos gráficos. As curvas teóricas são mostradas na Fig. 1.5. Nós vemos que a contagem em coincidência é uma maneira razoável de mapear um pacote de onda distorcido que não tem nem 0.1 mm de comprimento de coerência. À medida que L decresce, o mapeamento se torna cada vez mais exato. Vamos mostrar isto. Primeiro, nós adicionamos o lado direito da Eq. (1.5) ao lado direito da Eq. (1.21), e trocando δ por t em Eq. (1.21),

$$\begin{aligned}
R_c(t) + |f_T(t)|^2 = & \\
1 + T^2 \sum_{n \neq m}^{\infty} R^{(n+m)} \cos[\omega_0 \tau_c (m - n)] \times & \\
\times \{ \exp[-\Delta\omega^2 (n - m)^2 \tau_c^2] + & \\
+ [\exp[-2\Delta\omega^2 (n^2 + m^2) \tau_c^2] - \exp[-\Delta\omega^2 (n + m)^2 \tau_c^2]] \times & \\
\times \exp[-\Delta\omega^2 [t^2 - 2(n + m) \tau_c t]] \}, & \tag{1.22}
\end{aligned}$$

onde nós separamos as somas originais em duas outras: uma com $n = m$ e a outra, para $n \neq m$. A primeira soma é 1, como mostrado na Eq. (1.22). Analisando a Eq. (1.22), é fácil ver que quando $L \rightarrow 0$, a segunda parte no lado direito da equação tende para $T^2 \sum_{n \neq m}^{\infty} R^{(n+m)}$, a qual é apenas uma constante. Portanto, o mapeamento do pacote de onda é feito com uma boa aproximação, apesar de não perfeita, pelas medidas em coincidência, ou $R_c(\delta = t) \approx CT^2 \sum_{n \neq m}^{\infty} R^{(n+m)} - |f_T(t)|^2$, onde C é alguma constante (lembre-se da proporcionalidade na Eq. (1.5)).

O experimento pode ser descrito como se segue: nós começamos com a largura da cavidade em torno de 0.013 mm. A diferença entre o comprimento dos dois caminhos do interferômetro foi primeiro colocado maior que o comprimento de coerência dos fótons gêmeos, isto é, fora da região de interferência. Neste caso, a contagem em coincidência é proporcional ao número de fótons que atravessam a cavidade [20]. Com a ajuda do motor de passo *SM2*, o qual tem 50 nm de resolução, nós variamos L muito lentamente e tentamos parar perto de um máximo nas contagens em coincidência, o que nos permite saber que o pacote de ondas está quase ressonante com a cavidade ($\omega_0 \tau_c \simeq 63.77\pi$, nós pós inferimos isto ajustando os dados experimentais pela Eq. (1.21)). Agora, com o motor de passo *SM1*, o prisma *P2* é deslocado em passos de 0.0015 mm, mudando a diferença entre os caminhos dos fótons e coletando o primeiro grupo de dados experimentais de

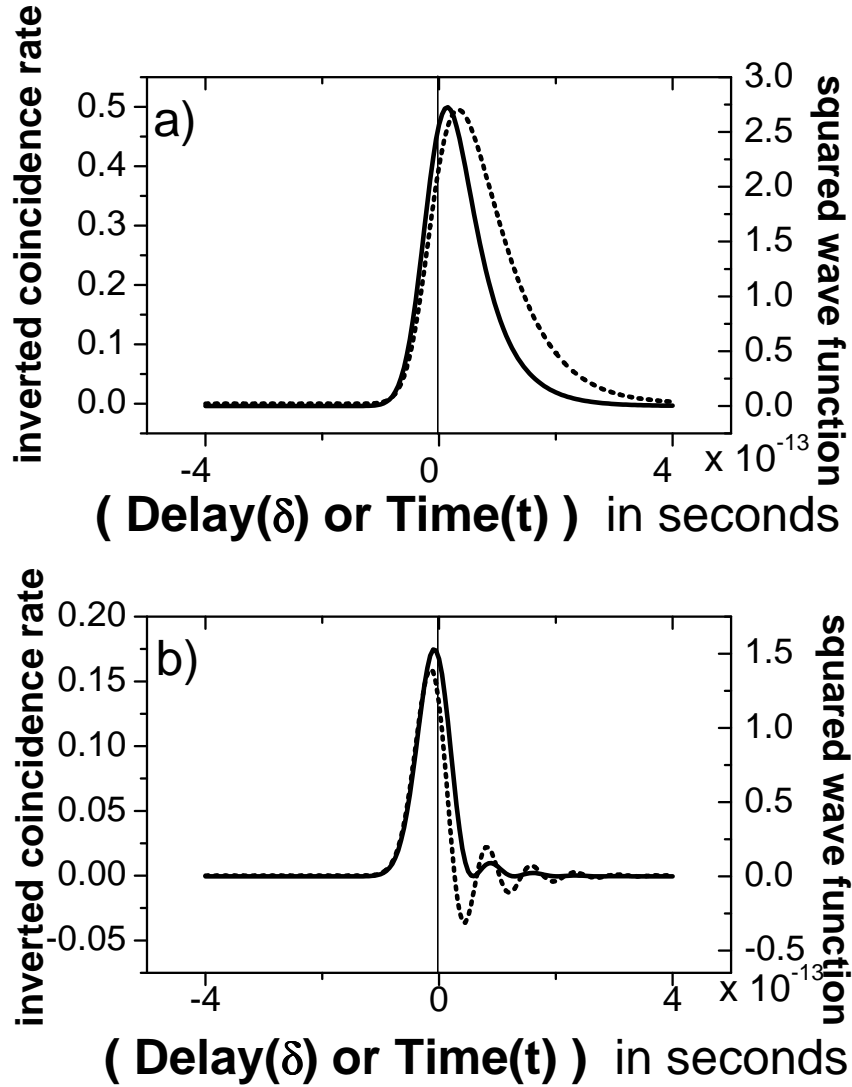


Figura 1.5: Cálculo da taxa de coincidências, invertidas, obtidas da Eq. (1.21) (linha pontilhada) em função de δ e a probabilidade de transmissão do pacote de onda, da Eq. (1.5) (linha contínua) em função de t . Em a), a separação dos espelhos era $L=0.013172$ mm, quase um caso ressonante; em b), $L=0.01383$, um caso anti-ressonante (veja o texto). Os outros parâmetros são $R = T = 0.5$, o comprimento de onda do feixe de bombeamento $\lambda_0=413.1$ nm, e $\Delta\lambda=5.8$ nm.

coincidências (Fig. 1.6a, círculos abertos). Uma vez mais nós usamos o motor de passo *SM2* para mudar L , desta vez para 0.4 mm, que é mais largo que o comprimento de

coerência dos fótons gêmeos ($l_c \simeq 0.1$ mm). Nesta situação, os pacotes de ondas *idler* não são distorcidos, somente atenuados [20], porque cada fóton “vê” a cavidade como dois espelhos muito separados, e cada uma das componentes (ondas planas) do pacote de onda recebe um coeficiente r , independente de ω , em cada reflexão e um coeficiente t , também independente de ω , em cada transmissão. Então, é varrida de volta, com *SM1*, a mesma região de interferência do HOM, usando passos de 0.0015 mm. Estes novos dados servem como um marco do zero na diferença de comprimento dos caminhos no HOM (Fig. 1.6, quadrados sólidos). Agora que estamos novamente fora da região de interferência do HOM, nós usamos *SM2* para trazer de volta L para aproximadamente 0.013 mm. Então L é variado muito lentamente, com *SM2*, até conseguirmos um mínimo nas contagens em coincidência. Assim sabemos que o sistema se aproxima do regime anti-ressonante ($\omega_0\tau_c \simeq 66.96\pi$). Usando *SM1*, nós varremos novamente a região de interferência do HOM em passos de 0.0015 mm, e coletamos os dados finais de coincidências. Estes resultados estão mostrados na Fig. 1.6b. (círculos abertos). As curvas contínuas na Fig. 1.6 são curvas teóricas obtidas da Eq. (1.21). Nós também não podemos nos esquecer que cada deslocamento do prisma *P2*, fornecido pelo motor de passo *SM1*, corresponde a uma diferença no comprimento do caminho do fóton *idler* que é o dobro deste deslocamento (veja a Fig. 1.4).

Lembrando que as contagens em coincidência, em nosso experimento, refletem (não exatamente, veja Fig. 1.5) o formato do pacote de ondas *idler*, os resultados experimentais na Fig. 1.6 parecem mostrar um atraso do pico do pacote que atravessa a cavidade no caso “ressonante”, e um avanço no caso anti-ressonante.

Alguém poderia pensar que as contagens em coincidência medem diretamente aqueles atrasos e avanços do pico do pacote de ondas *idler*. Mas isto não é verdade. Nós medimos coincidências (Fig. 1.6), não a distribuição temporal de probabilidade do pacote de onda. Então nós consultamos as simulações na Fig. 1.5 para ver quanto é a discrepância entre os picos dos pacotes de ondas e os picos das taxas de coincidências correspondentes. Isto pode ser feito porque os parâmetros usados na simulação são os mesmos daqueles usados no experimento. Depois do procedimento descrito acima, nós concluímos que a correção a ser feita é multiplicar o atraso aparente obtido da medida em coincidência por 0.651 e o avanço aparente por 0.603, nos casos “ressonante” e anti-ressonante respectivamente, para conseguir os valores reais para o atraso e o avanço dos picos. Finalmente, o atraso correto do pico do pacote de onda foi 15.9 ± 0.2 fs para o caso quase ressonante, e o avanço real foi 11.9 ± 0.2 fs para o caso anti-ressonante. A incerteza estimada é principalmente

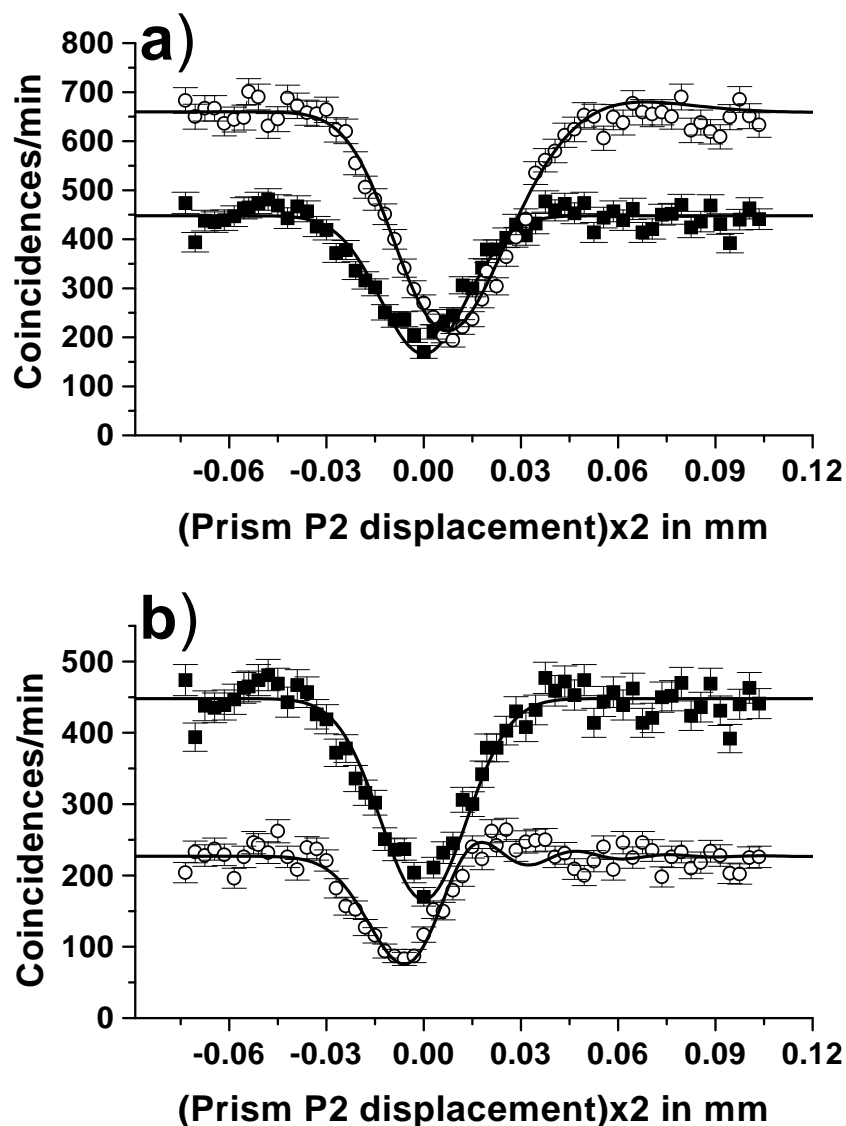


Figura 1.6: Resultados experimentais das medidas em coincidência obtidos nas saídas do divisor de feixe $BS1$ no interferômetro de HOM com a cavidade. Os quadrados sólidos se referem às medidas feitas quando $L=0.4$ mm, os quais estabelecem o marco zero de referência do interferômetro de HOM. Os círculos abertos se referem a quando L é aproximadamente 0.013 mm; em a) temos o caso quase ressonante, e em b) o caso anti-ressonante (veja o texto). As linhas contínuas são ajustes teóricos baseados na Eq. (1.21) (veja no texto).

devida ao motor de passo $SM1$ usado para varrer a região de interferência do HOM (50 nm de resolução).

Vamos voltar nossa atenção para a situação anti-ressonante. Nós queremos comparar o pacote de ondas *idler* transmitido através da cavidade, com este pacote de ondas sem a cavidade. Entretanto, para estabelecer o marco zero de referência no interferômetro, a cavidade não pode ser removida, porque há uma placa de vidro compensadora no braço *signal* do interferômetro e os dois substratos em $BS2$ e $BS3$, no braço *idler*. Para mapear o pacote de onda *idler* “sem” a cavidade, nós alargamos L para 0.4 mm ($L > l_c$) e usamos aqueles fótons que atravessam a cavidade diretamente, sem reflexões internas, para interferir com os fótons *signal* em $BS1$. Mas nós sabemos que $BS2$ e $BS3$ têm 50% de refletividade, e isto atenua a amplitude dos pacotes de onda *idler* usados em $3/4$. Finalmente, para conseguir uma boa comparação entre os dois casos, pacote de onda com e sem a cavidade, tudo que temos a fazer é tomar os gráficos da Fig. 1.6b, invertê-los, e multiplicar os dados correspondentes aos quadrados sólidos por 4, por causa dos $3/4$ de atenuação. Os gráficos resultantes estão mostrados na Fig. 1.7. Agora podemos ver que o pico de um pacote de ondas que atravessa uma cavidade anti-ressonante está realmente avançado em relação ao pico de um pacote de ondas que viaja livre. Mas a amplitude do primeiro está sempre abaixo da amplitude do segundo (veja a Fig. 1.7). Este resultado indica porque efeitos do tipo “superluminal” estão sempre associados a eventos do tipo tunelamento. A interpretação correta é: o pacote de onda *idler* é deformado durante a interação com a cavidade de tal modo que a parte dianteira do pacote original é menos atenuada que a parte traseira. Uma outra explicação, um tanto polêmica, é: no caso anti-ressonante, os fótons que vão na frente na distribuição temporal de probabilidades do pacote de onda ($|f_T(t)|^2$ é a probabilidade de se encontrar um fóton num tempo t) atravessam preferencialmente a cavidade. Aqueles fótons situados na parte traseira são refletidos. Veja referências [23, 24] para uma discussão sobre o processo de reformatação de um pacote de onda no experimento particular realizado por Steinberg et al. [25].

Uma outra coisa que deve ser notada observando os gráficos da Fig. 1.6 é que a coerência longitudinal, que é a coerência temporal, aumenta em relação à coerência do pacote de ondas original, no caso ressonante e diminui no caso anti-ressonante. O pacote de ondas, que é a distribuição temporal da probabilidade de se encontrar um fóton num tempo t é simplesmente a transformada de Fourier da distribuição $\phi(\omega)$ dos pacotes livres e da distribuição $\phi(\omega)\mu(\omega)$, dos pacotes que atravessam a cavidade (veja as Eqs. 1.1 e 1.2). Vamos agora entrar no domínio das frequências definindo $d(\omega) = |\phi(\omega)|^2$

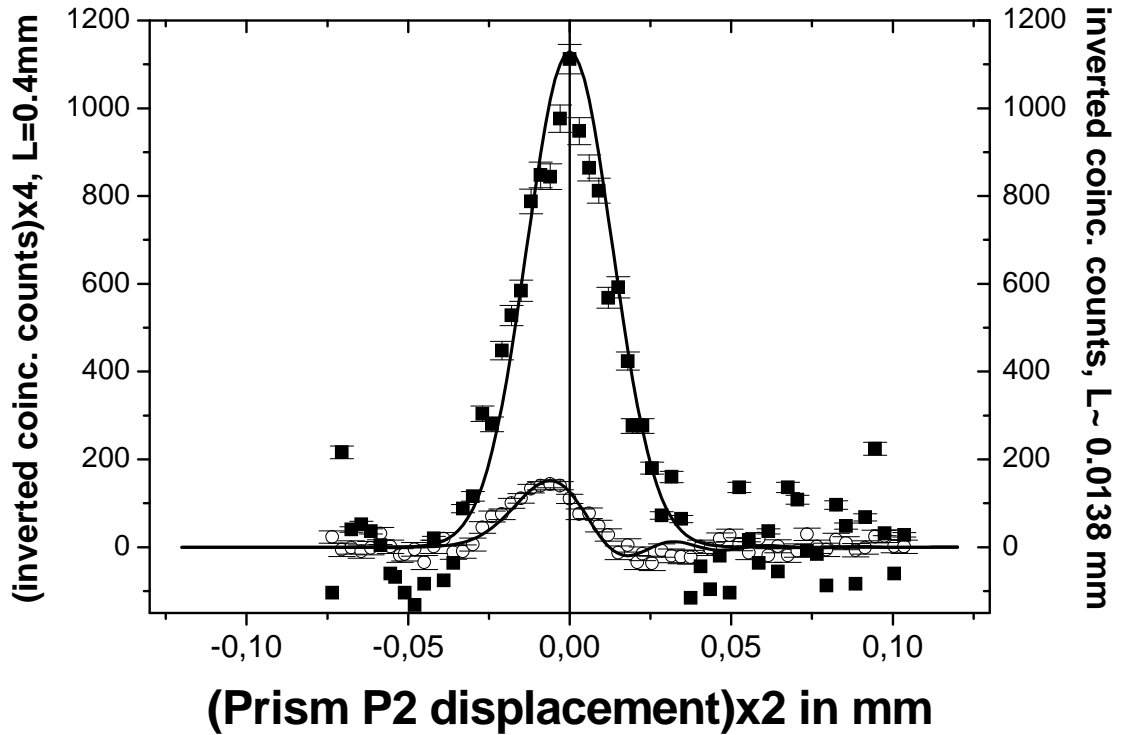


Figura 1.7: Gráfico da Fig. 1.6b invertida e com os dados experimentais correspondentes a $L = 0.4$ mm (curva dos quadrados sólidos) multiplicados por quatro (veja o texto).

e $D(\omega) = |\phi(\omega)\mu(\omega)|^2$. A Fig. 1.8 mostra os gráficos de $d(\omega)$ e $D(\omega)$ em função de ω nos dois casos estudados, quase ressonante e anti-ressonante.

Percebemos que no caso ressonante, a largura à meia altura do espectro das frequências do fóton que atravessa a cavidade é menor que a largura à meia altura do espectro do fóton livre, e no caso anti-ressonante, a largura à meia altura do espectro é maior que esta largura num fóton livre, veja a Fig. 1.8. Isto explica as mudanças nas coerências temporais. Já que estas são as transformadas de Fourier das distribuições em frequência; quanto maior a largura à meia altura da distribuição em frequência, menor é a largura à meia altura da distribuição temporal.

No caso anti-ressonante a coerência temporal do fóton diminui depois da cavidade. Para isto a largura à meia altura da distribuição em frequência deste fóton deve aumentar.

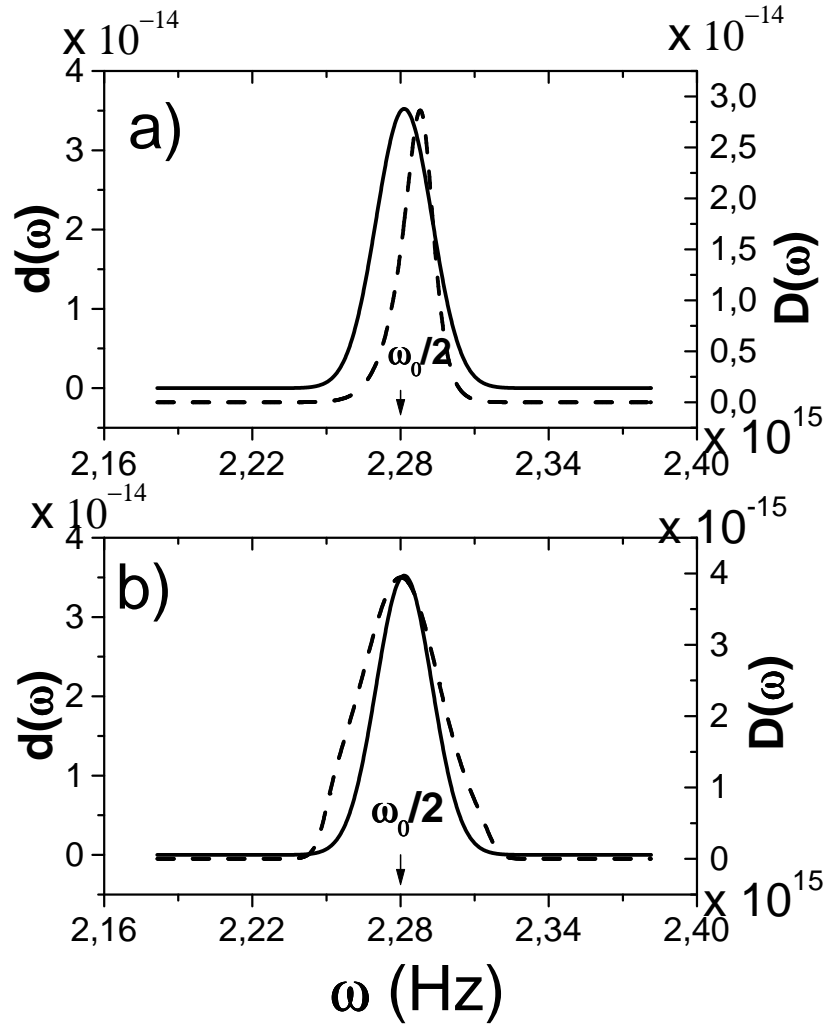


Figura 1.8: Gráfico de $d(\omega)$, linhas contínuas, e $D(\omega)$, linhas pontilhadas, em função de ω . Em a) temos o caso quase ressonante e em b) o caso anti-ressonante.

No entanto não há como esta distribuição ganhar novas frequências, o jeito é ela se alargar.

1.6 Estudo dos fótons *idler* refletidos pela cavidade

Até agora estudamos as propriedades interferométricas entre os fótons *idler*, transmitidos por uma cavidade, e *signal* num interferômetro de HOM com uma cavidade no braço *idler*. Agora vamos estudar a interferometria entre os fótons *idler* refletidos pela cavidade,

e os fótons *signal* em propagação livre, no mesmo interferômetro de HOM modificado. Reproduziremos aqui parcialmente uma discussão anterior mostrada na referência [26], para completarmos a discussão sobre o problema abordado. A montagem para este estudo está na Fig. 1.9.

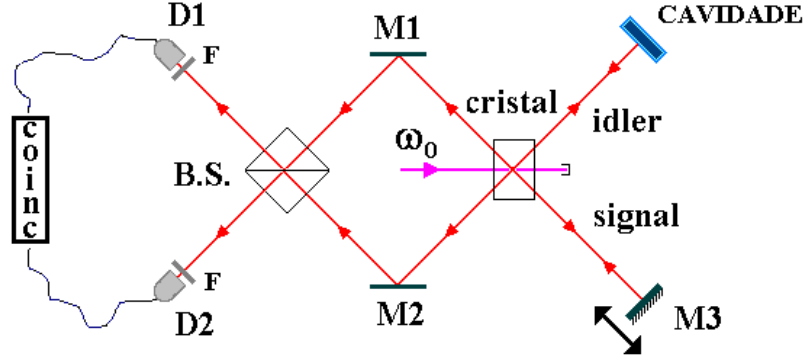


Figura 1.9: Aparato experimental para o estudo dos fótons *idler* refletidos pela cavidade. Os símbolos *D*, *B.S.* e *F* significam detectores, divisor de feixe e filtro de interferência, respectivamente.

A definição de ressonância e anti-ressonância continua a mesma dada na seção 1.5. Nesta seção estudaremos apenas o caso ressonante. Se na seção 1.5 os resultados interessantes eram na situação anti-ressonante, aqui os resultados interessantes estão no caso ressonante. Para conseguirmos a distribuição temporal do pacote de ondas *idler* depois da reflexão, usamos as Eqs. (1.1) a (1.4), trocando apenas o coeficiente de transmissão da cavidade $\mu(\omega)$ pelo coeficiente de reflexão $\nu(\omega)$ dado por:

$$\nu(\omega) = -2ir \operatorname{sen}(\omega\tau_c) \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m} e^{im\omega_0\tau_c}, \quad (1.23)$$

onde r é o coeficiente de reflexão de cada semi-espelho da cavidade. Com isto chegamos à distribuição temporal:

$$\begin{aligned} |f_R(t)|^2 \propto & R \sum_{m,n} R^{m+n} \times \\ & \times \left\{ e^{-\Delta\omega^2((2m-1)\tau_c-t)^2 + [(2n-1)\tau_c-t]^2)^{\frac{1}{2}}} \cos[(m-n)\omega_0\tau_c] + \right. \\ & + e^{-\Delta\omega^2((2m+1)\tau_c-t)^2 + [(2n+1)\tau_c-t]^2)^{\frac{1}{2}}} \cos[(m-n)\omega_0\tau_c] - \\ & - e^{-\Delta\omega^2((2m-1)\tau_c-t)^2 + [(2n+1)\tau_c-t]^2)^{\frac{1}{2}}} \cos[(m-n-1)\omega_0\tau_c] - \\ & \left. - e^{-\Delta\omega^2((2m+1)\tau_c-t)^2 + [(2n-1)\tau_c-t]^2)^{\frac{1}{2}}} \cos[(m-n+1)\omega_0\tau_c] \right\}, \quad (1.24) \end{aligned}$$

Do mesmo modo podemos calcular a taxa de coincidências para o caso dos fótons refletidos. Usando as Eqs. (1.16) a (1.20). (Note que na Eq. (1.16) somente a segunda parte da equação contribui para as coincidências, pois a primeira parte se refere aos fótons transmitidos). Chegamos então à taxa de coincidências para os fótons refletidos:

$$\begin{aligned}
R_c(\delta) &= R \sum_{m,n} R^{(m+n)} \{ \cos[\omega_0 \tau_c(m-n)] \times \\
&\quad \times [2e^{-\delta \omega^2 \tau_c^2(m-n)^2} - e^{-\Delta \omega^2 [\tau_c(m+n+2)-\delta]^2} + \\
&\quad + 2e^{-\Delta \omega^2 [\tau_c(m+n+1)-\delta]^2} \cos(\omega_0 \tau_c) - e^{-\Delta \omega^2 [\tau_c(m+n)-\delta]^2}] - \\
&\quad - e^{-\Delta \omega^2 \tau_c^2(m-n+1)^2} \cos[\omega_0 \tau_c(m-n+1)] - \\
&\quad - e^{-\Delta \omega^2 \tau_c^2(m-n-1)^2} \cos[\omega_0 \tau_c(m-n-1)] \}. \tag{1.25}
\end{aligned}$$

Já que esta seção é totalmente teórica, vamos fazer algumas simulações baseadas nas Eqs. (1.24) e (1.25), porém sem nos preocuparmos com unidades; desde que os parâmetros levem os resultados para uma situação física coerente.

Na Fig. 1.10 temos gráficos na ordem decrescente de τ_c , todos na situação ressonante. A coluna da esquerda mostra os pacotes de onda (distribuição de probabilidade temporal) deformados do fóton *idler* e na coluna da direita, seus padrões de coincidência correspondentes. Vamos voltar nossa atenção para a última linha da Fig. 1.10 e dar uma interpretação heurística para aquele padrão de interferência. O padrão de interferência vem de uma varredura (feita por um motor de passo acoplado ao espelho móvel do braço *signal* do interferômetro, veja a Fig. 1.9), na região onde se espera encontrar os pacotes de onda dos fótons *idler* e *signal* quase superpostos no divisor de feixe *B.S.*. A Fig. 1.11 mostra o momento em que o pacote *signal* está superposto à corcova esquerda do pacote deformado *idler*. Por isto esta região do padrão de interferência cai para a metade do patamar (região sem interferência). É bem sabido que fótons emaranhados, com a mesma polarização, mesma frequência e mesmo modo transversal saem pela mesma porta de saída do divisor de feixe (coalescência) quando se superpõem nele. A Fig. 1.12 mostra o momento em que o pacote de onda do fóton *signal* se encontra entre as duas corcovas do pacote de onda deformado do fóton *idler*. Aqui há dois processos indistinguíveis que levam ao mesmo evento (a chegada defasada de dois fótons nos detectores *D1* e *D2*, veja a Fig. 1.9), daí vem a interferência neste momento. Os dois processos são: um fóton oriundo da corcova esquerda do pacote distorcido *idler* chega a um detector antes do fóton *signal*, ou um fóton *signal* chega antes a um detector que um fóton oriundo da corcova direita do pacote deformado *idler*. Como não há sobreposição de pacotes neste caso, a interferência

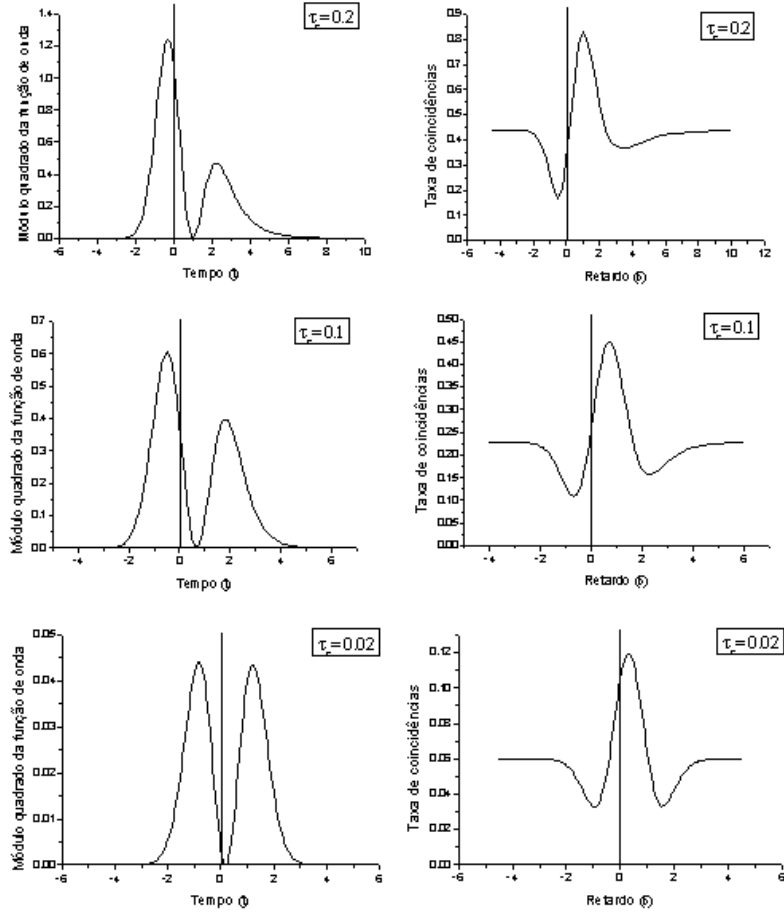


Figura 1.10: Sequência de gráficos em ordem decrescente de τ_c , todos no caso ressonante. $|f_R|^2 \times t$ (coluna da esquerda), baseados na Eq. (1.24); $R_c \times \delta$ (coluna da direita), baseados na Eq. (1.25). Em todos os gráficos $\Delta\omega = 1$, $\omega_0 = 100\pi$ e $R = 0.81$.

tanto pode ser destrutiva (coalescência) como construtiva (anti-coalescência). No nosso caso, esta interferência é totalmente construtiva, o valor do pico é o dobro do valor do patamar, ou seja, todos os fótons saem por portas distintas do divisor de feixe. Esta interferência só é possível porque a conversão paramétrica descendente é um fenômeno espontâneo, e por isto não sabemos quando um par de fótons gêmeos é gerado, o que torna os dois processos indistinguíveis; se soubéssemos exatamente quando um par de fótons gêmeos é gerado, seríamos capazes de distinguir os dois processos, e esta interferência não existiria.

Esse experimento será realizado brevemente.

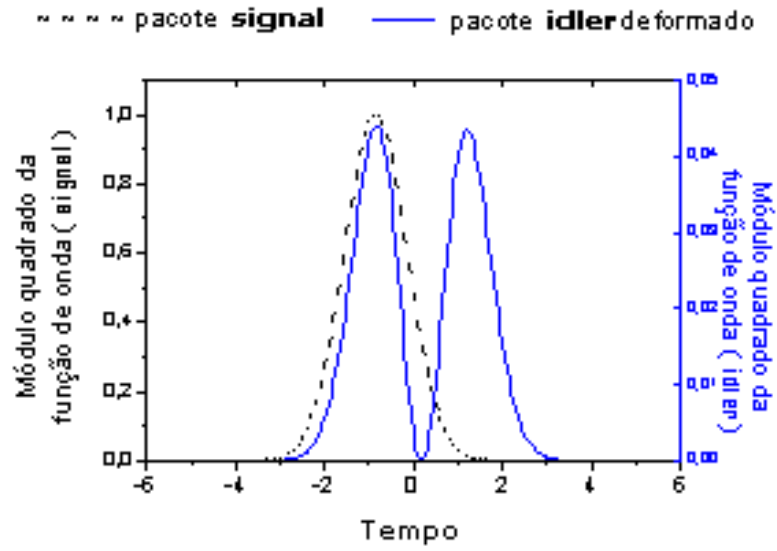


Figura 1.11: Imagem do encontro parcial dos fótons gêmeos no divisor de feixes, mostrando a origem da queda nas coincidências em $\delta = -1$.

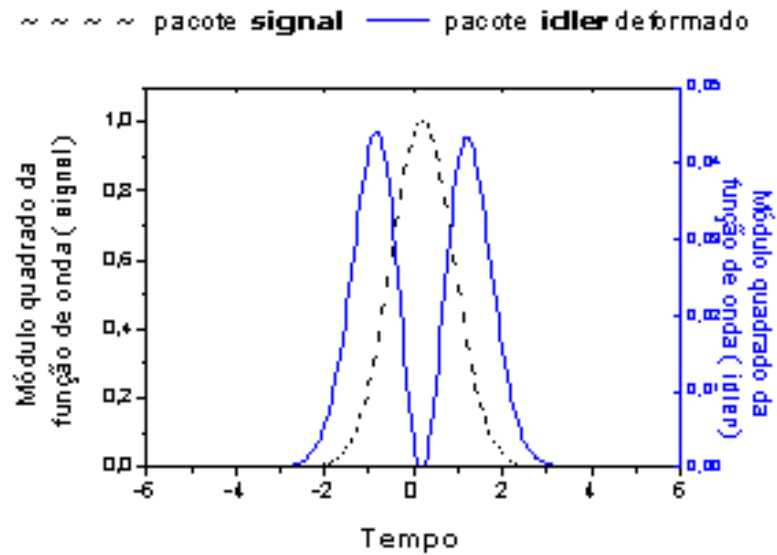


Figura 1.12: Imagem do desencontro dos fótons gêmeos no divisor de feixes, mostrando a origem do aumento nas coincidências em $\delta = 0.2$.

Capítulo 2

Regime da Cavityde Maior que a Coerência do Fóton Gêmeo

2.1 Introdução

A conversão paramétrica espontânea descendente (SPDC) é um importante fenômeno para estudos em óptica quântica. No processo da SPDC, um feixe de bombeamento (p) de feixe de laser incidente sobre um cristal não-linear cria um par de fótons emaranhados, usualmente chamados *signal* (s) e *idler* (i) [17]. A SPDC foi primeiramente proposta teoricamente por Klyshko em 1969 [27] e demonstrada experimentalmente por Burnham e Weinberg em 1970 [28]. A interferência quântica entre *idler* e *signal* num divisor de feixes foi demonstrada pela primeira vez por Hong, Ou e Mandel (HOM) em 1987 [12]. Em seu experimento, os fótons *signal* e *idler* com a mesma frequência e polarização são combinados num divisor de feixes (BS) 50-50, então os fótons emergentes do divisor são detectados em coincidência. Quando as distâncias dos fótons do cristal até o divisor são tornadas iguais, nenhuma contagem de coincidências é detectada nas saídas do divisor. Este resultado nulo é devido à uma interferência destrutiva entre as duas possibilidades indistinguíveis que podem produzir coincidências: ambos os fótons podem ser refletidos no divisor de feixes ou ambos podem ser transmitidos. Devido a uma mudança de fase de $\pi/2$ na amplitude de probabilidade quando o fóton é refletido no divisor de feixes, as amplitudes de probabilidade para esses dois eventos indistinguíveis cancelam-se e coincidência zero ou um mínimo, é medido. A produção dos pares no cristal é essencialmente simultânea, daí a necessidade de se igualarem as distâncias para garantir a indistinguibilidade. A incerteza temporal na geração dos fótons é dada pelo inverso da largura de banda dos filtros de interferência posicionados na frente dos detectores. O que acontece é que o

par de fótons deixa o divisor pela mesma saída (coalescência fotônica [24]).

Recentemente, cavidades ópticas têm sido usadas em experimentos de óptica quântica objetivando a demonstração do controle da coalescência e anti-coalescência de fótons através de uma cavidade e da produção de pares de fótons emaranhados em tempo. Saggiaro, Olindo, Monken e Pádua [20], demonstraram experimentalmente a interferência de fótons com a mesma polarização, gerados pela conversão paramétrica espontânea descendente em um interferômetro de Hong-Ou-Mandel, depois de um deles ter passado por uma cavidade simétrica, isto é, uma cavidade cujos espelhos possuem refletividades iguais. No regime onde a largura da cavidade (distância entre os espelhos) é maior que o comprimento de coerência longitudinal de um fóton, coalescência e anti-coalescência fotônica são observadas. Foi mostrado que mudando-se a largura da cavidade, picos de coincidência podem ser transformados em vales e vice-versa, apesar de o comprimento de coerência do pacote de ondas do fóton ser menor que a largura da cavidade. No regime oposto, isto é, quando a largura da cavidade é menor que a coerência longitudinal do pacote de ondas do fóton, nós demonstramos experimentalmente [22] que o mesmo método pode ser usado para mapear a distorção causada pela cavidade sobre o pacote de ondas ao atravessá-la. Indicamos como o método poderia ser estendido ao mapeamento de pacotes distorcidos por outros tipos de barreiras, e como ilustração do nosso método, oferecemos uma demonstração experimental da compatibilidade entre relatividade especial e os tais chamados efeitos “superluminais”.

Começaremos analisando teoricamente uma versão um pouco mais complicada do interferômetro de Hong-Ou-Mandel, a qual consiste em se colocar não apenas uma, mas duas cavidades de Fabry-Perot, uma em cada braço do interferômetro. Com uma escolha correta dos parâmetros, é fácil reduzir este caso ao de somente uma cavidade em um dos braços. Não é apenas por uma questão de completeza na análise do problema, o interferômetro com duas cavidades apresenta efeitos interferométricos inusitados em relação ao de uma cavidade, por isso vale a pena ser estudado. É possível inclusive com o interferômetro de duas cavidades construir-se uma porta lógica C-NOT.

2.2 Aparato experimental

O aparato experimental, representado na Fig. 2.1, consiste de um interferômetro de HOM [12] e duas cavidades simétricas formadas por dois espelhos dielétricos planos $M5$ e $M6$ ($M3$ e $M4$). Um cristal de LiIO_3 com 5 mm de espessura, orientado para o casamento

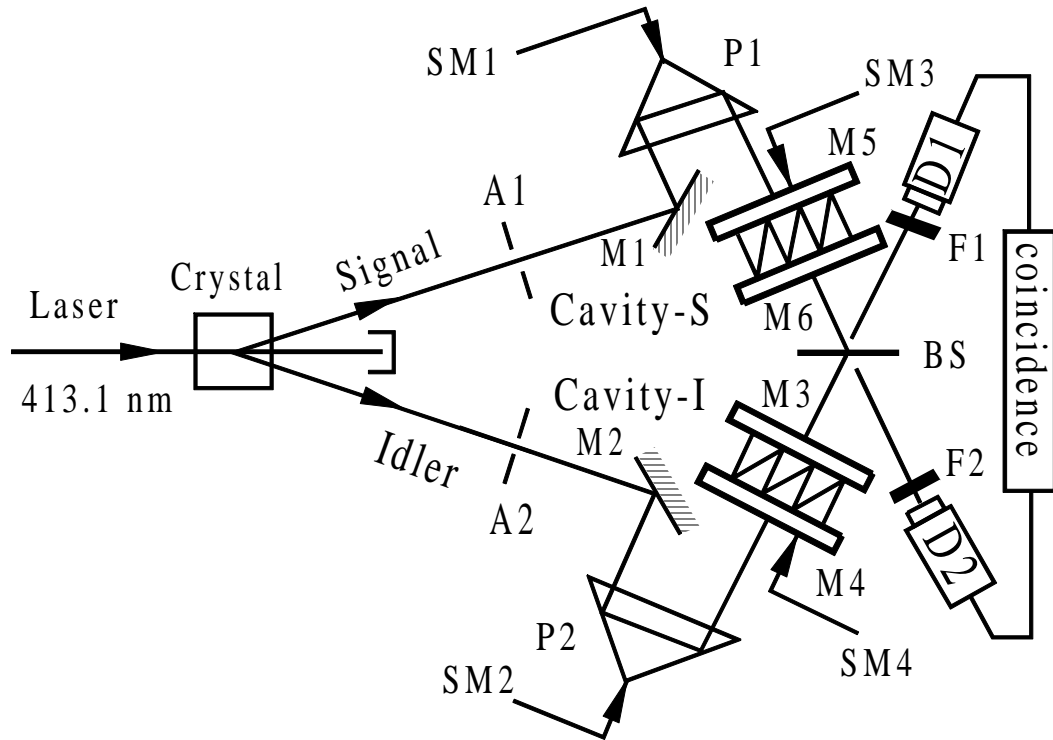


Figura 2.1: Esquema experimental de um interferômetro de Hong-Ou-Mandel no qual duas cavidades de Fabry-Perot são colocadas nos braços do interferômetro. Os símbolos *BS*, *M*, *P*, *SM*, *A*, e *D* indicam divisores de feixe, espelhos, prismas, motores de passo, aberturas, e detectores, respectivamente.

de fase do tipo-I, é bombeado por um laser contínuo com 413.1 nm de comprimento de onda. Um fóton violeta do feixe de bombeamento é convertido em dois fótons conjugados infravermelhos com 826.2 nm de comprimento de onda (*signal* e *idler*), de tal maneira que energia e momentum são conservados durante o processo. Ambos os fótons *signal* e *idler* são horizontalmente polarizados e se propagam segundo algum ângulo θ em relação à direção do feixe de bombeamento. As aberturas A1, A2 selecionam os desejados pares degenerados de fótons. Ambos os feixes são direcionados pelos prismas P1, P2, e os espelhos M1, M2 para as portas de entrada do divisor de feixes 50-50 BS. Cada feixe passa através de cavidades de Fabry-Perot. Os detectores D1 e D2 são fotodiodos de avalanche operando em modo de contagem e F1, F2 são filtros de interferência iguais centrados em 826.2 nm. O prisma P1 (P2) está fixado sobre uma plataforma de translação acionada

por um motor de passo SM1 (SM2) usado para alterar o comprimento do caminho *signal* (*idler*). O motor de passo SM3 (SM4) é usado para mover o espelho M5 (M4) mudando as larguras das cavidades.

2.3 Resultados analíticos

Nós consideramos que os pares de fótons são gerados não colinearmente (Fig. 2.1) pelo processo da SPDC com o cristal cortado para o casamento de fase do tipo I. Neste caso, os fótons *signal* e *idler* são gerados com a mesma polarização linear. Suponha que nós selecionamos os fótons *signal* e *idler* com a mesma frequência e igual à metade da frequência do laser bombeador (caso degenerado): $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2$. Considere também que os feixes de fótons são selecionados por aberturas de pequeno diâmetro (veja Fig. 2.1) de tal modo que as direções de propagação são bem definidas e a dispersão nos vetores de onda possa ser negligenciada. Nós também consideramos que o laser de bombeamento é um feixe coerente clássico monocromático, sem dispersão em frequência. O estado dos fótons é então descrito por [12, 17]:

$$|\Psi\rangle = \int_0^{\omega_p} d\omega \phi(\omega) |1, \omega\rangle_i |1, \omega_p - \omega\rangle_s, \quad (2.1)$$

onde a função $\phi(\omega)$ é centrada em $\omega_p/2$. Na prática $\phi(\omega)$ é definida pelos filtros de interferência em frente aos detectores (Fig. 2.1). O estado $|1, \omega\rangle_i$ ($|1, \omega_p - \omega\rangle_s$) descreve um fóton de frequência ω ($\omega_p - \omega$) no feixe *idler* (*signal*). A contribuição do vácuo é cancelada em um experimento de foto-coincidência como descrito acima, então sua contribuição foi negligenciada na Eq. (2.1). O estado $|\Psi\rangle$ também pode ser escrito na forma

$$|\Psi\rangle = \int_0^{\omega_p} d\omega \phi(\omega) a_i^\dagger(\omega) a_s^\dagger(\omega - \omega_p) |\text{vacuum}\rangle, \quad (2.2)$$

onde os operadores $a_i^\dagger(\omega)$ e $a_s^\dagger(\omega - \omega_p)$ criam fótons de frequências ω e $\omega_p - \omega$ nos modos *idler* e *signal*, respectivamente.

Depois de serem gerados, os fótons de cada feixe interagem com as cavidades de Fabry-Perot. Os fótons podem ser transmitidos ou refletidos pelas cavidades. A ação destas cavidades é similar à de um divisor de feixes [18], isto é

$$a_i^\dagger(\omega) = \mu_i(\omega)a_{i,t}^\dagger(\omega) + \nu_i(\omega)a_{i,r}^\dagger(\omega), \quad (2.3)$$

$$a_s^\dagger(\omega) = \mu_s(\omega)a_{s,t}^\dagger(\omega) + \nu_s(\omega)a_{s,r}^\dagger(\omega), \quad (2.4)$$

onde os operadores $a_{i,t}^\dagger(\omega)$ e $a_{i,r}^\dagger(\omega)$ ($a_{s,t}^\dagger(\omega)$ e $a_{s,r}^\dagger(\omega)$) descrevem fótons transmitidos (t) e refletidos (r) dos feixes incidentes *idler* (*signal*) com frequência ω . Os coeficientes $\mu_i(\omega)$, $\nu_i(\omega)$, $\mu_s(\omega)$, e $\nu_s(\omega)$ são os coeficientes de transmissão e reflexão das cavidades para os feixes *idler* e *signal*, respectivamente.

Depois da interação com as cavidades, o estado dos feixes é dado pela expressão

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \int_0^{\omega_p} d\omega \phi(\omega) (\mu(\omega)\mu(\omega_p - \omega)|1, \omega\rangle_{i,t}|1, \omega_p - \omega\rangle_{s,t} + \mu(\omega)\nu(\omega_p - \omega)|1, \omega\rangle_{i,t}|1, \omega_p - \omega\rangle_{s,r} + \nu(\omega)\mu(\omega_p - \omega)|1, \omega\rangle_{i,r}|1, \omega_p - \omega\rangle_{s,t} + \nu(\omega)\nu(\omega_p - \omega)|1, \omega\rangle_{i,r}|1, \omega_p - \omega\rangle_{s,r}). \quad (2.5)$$

Os feixes transmitidos através das cavidades são direcionados para um divisor de feixes 50-50 (BS). Os dois feixes emergentes são então detectados em coincidência nas portas de saída do BS. O estado dos feixes depois das cavidades, Eq. (2.5), é uma superposição de quatro estados mutuamente ortogonais. Estes estados descrevem a reflexão ou transmissão de fótons em cada feixe pelas cavidades. Consequentemente, somente os fótons transmitidos de ambos os feixes podem ser detectados na saída do BS.

Os operadores de campo nos detectores do interferômetro são [12]

$$\begin{aligned} E_1^+(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[E_{i,t}^+(t - \tau_1 - \delta_i) + iE_{s,t}^+(t - \tau_1 - \delta_s)], \\ E_2^+(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[E_{s,t}^+(t - \tau_1 - \delta_s) + iE_{i,t}^+(t - \tau_1 - \delta_i)], \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde τ_1 é o tempo de propagação dos espelhos até os detectores e δ_i e δ_s são os atrasos temporais nos feixes *idler* e *signal* devido à modificação nos seus caminhos ópticos (P1 e P2 podem ser deslocados, veja Fig. 2.1). Os operadores campo na entrada de BS são dados por

$$\begin{aligned} E_{i,t}^+(t) &= \int d\omega e^{-i\omega t} a_{i,\omega,t}, \\ E_{s,t}^+(t) &= \int d\omega e^{-i\omega t} a_{s,\omega,t}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

A probabilidade $P(\tau)$ de se detectar um fóton em um detector num tempo t e o outro fóton no outro detector num tempo $t + \tau$ é [17]:

$$P(\tau) = \text{Tr}(\rho E_1^-(t) E_2^-(t + \tau) E_2^+(t + \tau) E_1^+(t)), \quad (2.8)$$

onde o operador densidade ρ descreve o estado do campo eletromagnético antes do divisor de feixes [17]. O número N_c de coincidências, pode ser obtido integrando essa probabilidade em τ , no intervalo temporal da janela de coincidências.

Devido à pureza do estado de dois fótons, a probabilidade $P(\tau)$ pode ser calculada como [17]

$$P(\tau) = \langle \Psi_1 | E_1^-(t) E_2^-(t + \tau) E_2^+(t + \tau) E_1^+(t) | \Psi_1 \rangle, \quad (2.9)$$

onde

$$|\Psi_1\rangle = \int_0^{\omega_p} d\omega \phi(\omega) \mu(\omega) \mu(\omega_p - \omega) |1, \omega\rangle_{i,t} |1, \omega_p - \omega\rangle_{s,t}. \quad (2.10)$$

Agora daremos uma breve justificativa, não uma dedução completa [19], para a expressão de $\mu_j(\omega)$ ($j = s, i$) ($\mu_j(\omega)$ é o coeficiente j de transmissão da cavidade como um todo). As cavidades são formadas por dois espelhos dielétricos planos com os mesmos coeficientes de reflexão e transmissão (r_j e t_j) separados por uma distância L_j . Para obtermos a forma de $\mu_j(\omega)$ devemos pegar uma onda plana monocromática de frequência angular ω . Uma vez que o campo eletromagnético da onda “penetra” a cavidade, há múltiplas reflexões e transmissões do campo nos espelhos. Cada vez que o campo eletromagnético da onda atravessa um espelho da cavidade, o campo é multiplicado por t_j e cada vez que ele é refletido, é multiplicado por r_j . Devemos também considerar a propagação do campo entre os espelhos (aqui está a dependência de μ_j em L_j). Finalmente, somamos todos os campos eletromagnéticos que são transmitidos pela cavidade e obtemos $E_t = \mu E_0$, onde E_t é o campo transmitido e E_0 o incidente.

Consideremos primeiro o estado $E_2^+(t + \tau) E_1^+(t) | \Psi_1 \rangle$. Agora a probabilidade $P(\tau)$ pode ser calculada como o quadrado da norma deste estado. De fato, nós precisamos calcular

$$\begin{aligned}
E_2^+(t+\tau)E_1^+(t)|\Psi_1\rangle &= \frac{1}{2}E_{s,t}^+(t+\tau-\tau_1-\delta_s)E_{i,t}^+(t-\tau_1-\delta_i)|\Psi_1\rangle + \\
&+ \frac{i}{2}E_{s,t}^+(t+\tau-\tau_1-\delta_s)E_{s,t}^+(t-\tau_1-\delta_s)|\Psi_1\rangle + \\
&+ \frac{i}{2}E_{i,t}^+(t+\tau-\tau_1-\delta_i)E_{i,t}^+(t-\tau_1-\delta_i)|\Psi_1\rangle - \\
&- \frac{1}{2}E_{i,t}^+(t+\tau-\tau_1-\delta_i)E_{s,t}^+(t-\tau_1-\delta_s)|\Psi_1\rangle. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito da equação (2.11) é

$$\frac{1}{2} \int d\omega' e^{-i\omega'(t+\tau-\tau_1-\delta_s)} a_{s,t}(\omega') \int d\omega'' e^{-i\omega''(t-\tau_1-\delta_i)} a_{i,t}(\omega'') |\Psi_1\rangle. \tag{2.12}$$

Escrevendo o estado $|\Psi_1\rangle$ em termos dos operadores criação e arranjando as integrais, nós obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int d\omega d\omega' d\omega'' e^{-i\omega'(t+\tau-\tau_1-\delta_s)} e^{-i\omega''(t-\tau_1-\delta_i)} \times \\
&\times \phi(\omega) \mu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega) a_{i,t}(\omega'') a_{i,t}^\dagger(\omega) a_{s,t}(\omega') a_{s,t}^\dagger(\omega_p - \omega) |\text{vacuum}\rangle. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Reescrevendo a equação acima, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int d\omega d\omega' e^{-i\omega'(t+\tau-\tau_1-\delta_s)} \phi(\omega) \times \\
&\times \mu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega) a_{s,t}(\omega') a_{s,t}^\dagger(\omega_p - \omega) \times \\
&\times \int d\omega'' e^{-i\omega''(t-\tau_1-\delta_i)} a_{i,t}(\omega'') a_{i,t}^\dagger(\omega) |\text{vacuum}\rangle. \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Na Eq. (2.14), o operador $a_{i,t}(\omega'')$ destrói o estado de vácuo a menos que $\omega'' = \omega$. De fato, a expressão anterior (2.14) se torna

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int d\omega d\omega' e^{-i\omega'(t+\tau-\tau_1-\delta_s)} \phi(\omega) \times \\
&\times \mu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega) a_{s,t}(\omega') a_{s,t}^\dagger(\omega_p - \omega) e^{-i\omega(t-\tau_1-\delta_i)} |\text{vacuum}\rangle. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Na integral da expressão (2.14), a condição $\omega' = \omega_p - \omega$ também deve valer. Assim, nós obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_{s,t}^+(t + \tau - \tau_1 - \delta_s) E_{i,t}^+(t - \tau_1 - \delta_i) |\Psi_1\rangle &= \\ \frac{1}{2} \int d\omega e^{-i(\omega_p - \omega)(t + \tau - \tau_1 - \delta_s)} e^{-i\omega(t - \tau_1 - \delta_i)} \phi(\omega) \mu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega) |\text{vacuum}\rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

De uma maneira similar pode ser mostrado que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_{i,t}^+(t + \tau - \tau_1 - \delta_i) E_{s,t}^+(t - \tau_1 - \delta_s) |\Psi_1\rangle &= \\ \frac{1}{2} \int d\omega e^{-i\omega(t + \tau - \tau_1 - \delta_i)} e^{-i(\omega_p - \omega)(t - \tau_1 - \delta_s)} \phi(\omega) \mu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega) |\text{vacuum}\rangle, \end{aligned} \quad (2.17)$$

sendo zero os outros termos. Deste modo, temos

$$\begin{aligned} E_2^+(t + \tau) E_1^+(t) |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{2} e^{-i\omega_p(t - \tau_1 - \delta_s)} [e^{-i\omega_p \tau} \int_0^{\omega_p} d\omega e^{i\omega \tau} e^{i\omega(\delta_i - \delta_s)} \phi(\omega) \mu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega) - \\ &- \int_0^{\omega_p} d\omega e^{-i\omega \tau} e^{i\omega(\delta_i - \delta_s)} \phi(\omega) \mu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega)] |\text{vacuum}\rangle. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Uma simplificação extra dessa expressão pode ser obtida com uma mudança de variável e a omissão de uma fase global. Nós obtemos para a Eq. (2.11)

$$\begin{aligned} E_2^+(t + \tau) E_1^+(t) |\Psi_1\rangle &= \int_{-\frac{\omega_p}{2}}^{\frac{\omega_p}{2}} d\omega (e^{i\omega \tau} - e^{-i\omega \tau}) e^{i\omega(\delta_i - \delta_s)} \phi(\omega + \frac{\omega_p}{2}) \mu_i(\omega + \frac{\omega_p}{2}) \mu_s(\frac{\omega_p}{2} - \omega) \\ &\times |\text{vac}\rangle. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Finalmente calculamos o produto escalar prescrito na Eq. (2.9), e ficamos com

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \frac{K(T_i T_s)^2}{4} \sum_{m,n,l,q} R_s^{m+l} R_i^{n+q} e^{i\omega_p \tau c_s(m-l)} e^{i\omega_p \tau c_i(n-q)} \int_{-\frac{\omega_p}{2}}^{\frac{\omega_p}{2}} \times \\ &\times \int_{-\frac{\omega_p}{2}}^{\frac{\omega_p}{2}} d\omega d\omega' e^{i\omega(2m\tau c_s - 2n\tau c_i - \delta)} e^{-i\omega'(2l\tau c_s - 2q\tau c_i - \delta)} \phi(\omega + \frac{\omega_p}{2}) \phi^*(\omega' + \frac{\omega_p}{2}) \times \\ &\times \left(e^{i\tau(\omega - \omega')} - e^{i\tau(\omega + \omega')} - e^{-i\tau(\omega + \omega')} + e^{-i\tau(\omega - \omega')} \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde $\delta = \delta_i - \delta_s$, $T_j = |t_j|^2$ é a transmitância j dos espelhos da cavidade e $R_j = |r_j|^2$ é a reflectância j dos espelhos da cavidade, com $j = i, s$, e K é proporcional à eficiência dos detectores.

Agora estamos prontos para fazer a integração em τ . Mas antes, é importante ressaltar que como a janela eletrônica de coincidências é muito maior que a coerência temporal do laser de bombeamento, o intervalo de integração pode ser estendido de $-\infty$ a $+\infty$. E lembramos que $\int e^{\pm i\tau\omega} d\tau = 2\pi\delta(\omega)$ onde $\delta(\omega)$ é a função delta de Dirac.

Depois de integrar em τ e considerando a simetria de $\phi(\omega + \frac{\omega_p}{2})$ em torno de $\frac{\omega_p}{2}$, o número N_c de coincidências se torna

$$\begin{aligned}
N_c = & \pi K (T_i T_s)^2 \sum_{m,n,l,q} R_s^{m+l} R_i^{n+q} \cos(\omega_p \tau_{cs}(m-l)) \cos(\omega_p \tau_{ci}(n-q)) \times \\
& \times \int_{-\frac{\omega_p}{2}}^{\frac{\omega_p}{2}} d\omega \left[\cos(2\omega(\tau_{cs}(m-l) - \tau_{ci}(n-q))) - \right. \\
& \left. - \cos(2\omega(\tau_{cs}(m+l) - \tau_{ci}(n+q)) - \delta) \right] |\phi(\omega + \frac{\omega_p}{2})|^2.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Finalmente, para que possamos resolver a última integral explicitamente, vamos supor uma distribuição Gaussiana para a função ϕ , com dispersão $\Delta\omega$ e que seja suficientemente estreita dentro do intervalo $(-\frac{\omega_p}{2}, \frac{\omega_p}{2})$ para que possamos estender os limites de integração para $(-\infty, \infty)$. Seja

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\Delta\omega}\sqrt{\pi}} e^{-(\omega - \omega_p/2)^2 / 2\Delta\omega^2} \tag{2.22}$$

que, inserida na expressão anterior, nos leva ao número de coincidências

$$\begin{aligned}
N_c = & \pi K (T_i T_s)^2 \sum_{m,n,l,q} R_s^{m+l} R_i^{n+q} \cos(\omega_p \tau_{cs}(m-l)) \cos(\omega_p \tau_{ci}(n-q)) \times \\
& \times \left[e^{(-\Delta\omega^2(\tau_{cs}(m-l) - \tau_{ci}(n-q))^2)} - e^{(-\Delta\omega^2(\tau_{cs}(m+l) - \tau_{ci}(n+q) - \delta)^2)} \right].
\end{aligned} \tag{2.23}$$

2.4 Resultados teóricos com uma cavidade

Daqui em diante faremos a constante $\pi K = 1$, ficaremos com a Eq. (2.23) normalizada, a qual chamaremos de T_c (taxa de coincidências). O primeiro teste da validade de T_c é

fazer $R_s = R_i = 0, T_s = T_i = 1$, o que corresponde à ausência de cavidades. Com isso, T_c fica reduzida a $T_c = 1 - e^{-\Delta\omega^2\delta^2}$, que é a conhecida expressão para a taxa de coincidências no interferômetro de HOM sem cavidades [12].

Agora começaremos a estudar as propriedades interferométricas do HOM com cavidades mostrando algumas simulações feitas usando T_c . Fazendo $R_s = 0, T_s = 1$ e $\tau_{cs} = 0$, reduzimos o caso geral de duas cavidades ao caso particular de uma cavidade no lado *idler*. T_c reduzida desta maneira fica

$$T_{c,i} = T^2 \sum_{n,q} R^{n+q} \cos[\omega_p \tau_c (n - q)] \left[e^{-\Delta\omega^2 \tau_c^2 (n-q)^2} - e^{-\Delta\omega^2 [\tau_c (n+q) - \delta]^2} \right], \quad (2.24)$$

onde $T = T_i, R = R_i$ e $\tau_c = \tau_{ci}$. As simulações desta seção serão feitas com a Eq. (2.24).

Definamos primeiro ressonância e anti-ressonância: um fóton é ressonante com a cavidade quando a largura da cavidade (L) é um múltiplo inteiro da metade do comprimento de onda do pacote de ondas do fóton, e é anti-ressonante quando L é um semi-inteiro da metade do comprimento de onda. Gostaríamos de explicar o que é coalescência e anti-coalescência em nosso contexto. Coalescência é quando o par de fótons deixa o divisor de feixe pela mesma porta de saída, o que faz decrescer a taxa de coincidências; anti-coalescência é quando os fótons gêmeos deixam o divisor por diferentes portas de saída, de tal maneira que as coincidências aumentam.

Começamos observando a influência da reflectância (R) dos espelhos da cavidade na contagem de coincidências. Para tanto pegamos o caso ressonante (Fig. 2.2).

Na Fig. 2.2, os vales são regiões de interferência, e o patamar é a região livre de interferências. Note que aumentando R o vale mais profundo fica cada vez mais distante da origem, e o patamar cada vez mais baixo. A distância entre os vales é exatamente o tempo de atravessar a cavidade com velocidade c . A razão para este comportamento será entendida com o exame dos diagramas de Feynman, mostrados mais adiante (Fig. 2.7).

A seguir discutimos o caso anti-ressonante (Fig. 2.3). Vemos na Fig. 2.3 que as regiões de interferência também podem ser picos (anti-coalescência). O próximo passo é observar como os vários parâmetros agem sobre a taxa de coincidências (Fig. 2.4). Observando a Fig. 2.4.a, vemos que para $L = 0.4$ mm, a cavidade não é nem ressonante nem anti-ressonante com os fótons, então o padrão de coincidências não é composto somente de vales ou alternado entre vales e picos (veja Fig. 2.2 e Fig. 2.3). Indo para a Fig. 2.4.b, concluímos que uma mudança em R somente muda o valor do patamar, mas não altera em nada o padrão de coincidências (a ordem do aparecimento dos picos e vales). Mudando

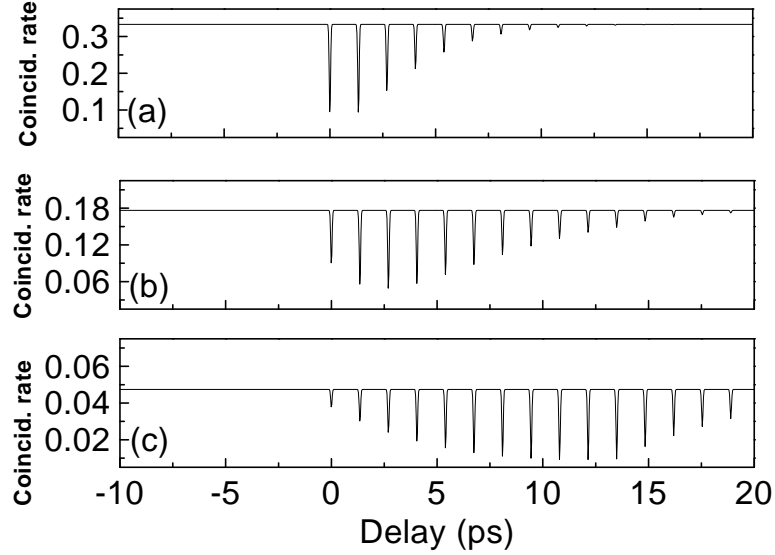


Figura 2.2: Em todos os três gráficos o comprimento de onda dos fótons degenerados (λ) era 826.2 nm e os filtros de interferência em frente aos detectores tinham largura de banda ($\Delta\lambda$) igual a 8 nm. Em todos os três casos L era igual a 0.404838 mm (para que a situação de ressonância fosse atingida). Em (a) $R = 0.5$, em (b) $R = 0.7$, em (c) $R = 0.9$ e $R + T = 1$ (sem perdas).

$\Delta\lambda$ de 8 nm para 4 nm, nada acontece com o padrão de coincidências, mas a coerência longitudinal dos fótons muda, claro, veja a Fig. 2.4.c. A Fig. 2.4.d mostra que o padrão de coincidências depende de λ , e porque o comprimento de coerência longitudinal (l_c) é $l_c \propto \lambda^2/\Delta\lambda$, este também muda (o comprimento de onda foi mudado de 826.2 nm para 1200 nm). Ainda na Fig. 2.4.d, note que a terceira, a sexta e assim por diante (ordens múltiplas de três) regiões de interferência parecem estar ausentes, mas não é bem assim: exceto a primeira, todas as outras regiões de interferência podem ser picos ou vales, e em particular elas podem ter o valor do patamar. De fato, a taxa de coincidências nas regiões de interferência (exceto a primeira em $\delta = 0$) varia continuamente desde valores abaixo do patamar até valores acima do patamar (veja o experimento de Sagioro et al. [20] mostrado no Apêndice A). Na Fig. 2.4.e, λ e $\Delta\lambda$ são mantidos intactos, então a coerência longitudinal dos fótons não é afetada. No entanto, o padrão de coincidências é diferente daquele mostrado na Fig. 2.4.d: o padrão de coincidências depende de L . Finalmente na Fig. 2.4.f, notamos que o padrão de coincidências não é diferente daquele na Fig. 2.4.e, então concluímos: o padrão de coincidências depende da razão entre L e λ . Desta vez, L

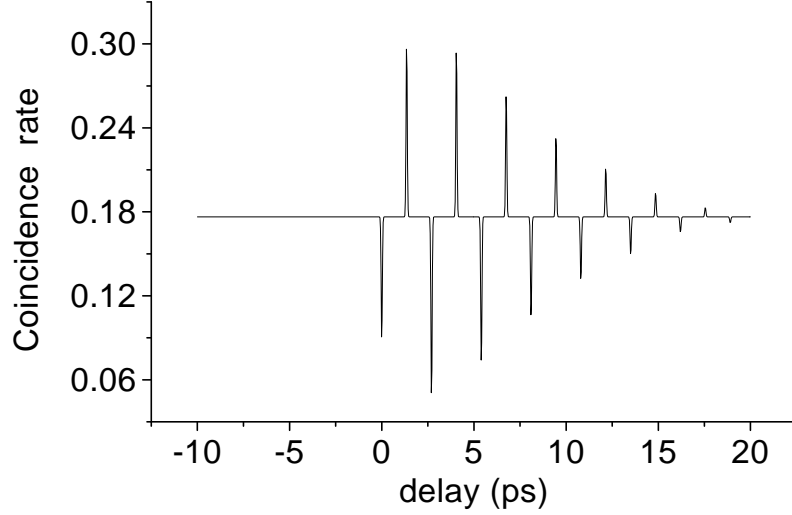


Figura 2.3: Os parâmetros do arranjo são: $\lambda = 826.2$ nm, $\Delta\lambda = 8$ nm, $R = 0.7$ e $L = 0.4050447$ mm. A cavidade está anti-ressonante com os fótons gêmeos.

e λ foram mudados mas a razão L/λ foi mantida fixa.

Agora estudaremos a dependência do patamar de coincidências com a largura da cavidade (Fig. 2.5). Vemos que o patamar de coincidências, quando o comprimento de coerência longitudinal dos fótons é muito menor que a largura da cavidade, não depende de L . Mas sabemos que o patamar depende de R (veja a Fig. 2.4.b e compare com os outros gráficos na Fig. 2.4). A Fig. 2.6 mostra como é esta dependência. Ela mostra que quando $R = 0$, a taxa de coincidências é 1, já que estamos lidando com coincidências normalizadas. Neste caso é como se não houvesse cavidade. Quando $R = 1$, a taxa de coincidências é 0, isto é, todos os fótons *idler* são refletidos no primeiro espelho da cavidade. O valor do patamar é proporcional à energia total (ou número de fótons) que atravessa a cavidade. A curva da Fig. 2.6 é exatamente igual à curva da função $(1 - R)/(1 + R)$. Vejamos de onde vem esta função. A probabilidade de um fóton atravessar um espelho é T e de ser refletido é R , devemos então somar todas as possibilidades (um fóton atravessando a cavidade diretamente, um segundo fóton refletindo em seu interior duas vezes antes de atravessá-la, um terceiro refletindo quatro vezes e assim por diante), e obtemos a probabilidade total dos fótons atravessarem (P): $P = T^2 + T^2 R^2 + T^2 R^4 + T^2 R^6 + \dots = \frac{T^2}{1 - R^2} = \frac{T^2}{(1 - R)(1 + R)}$, mas $1 - R = T$ então $P = \frac{1 - R}{1 + R}$. Este resultado mostra que, quando o comprimento de coerência longitudinal de um único fóton é muito menor que a largura da cavidade, o

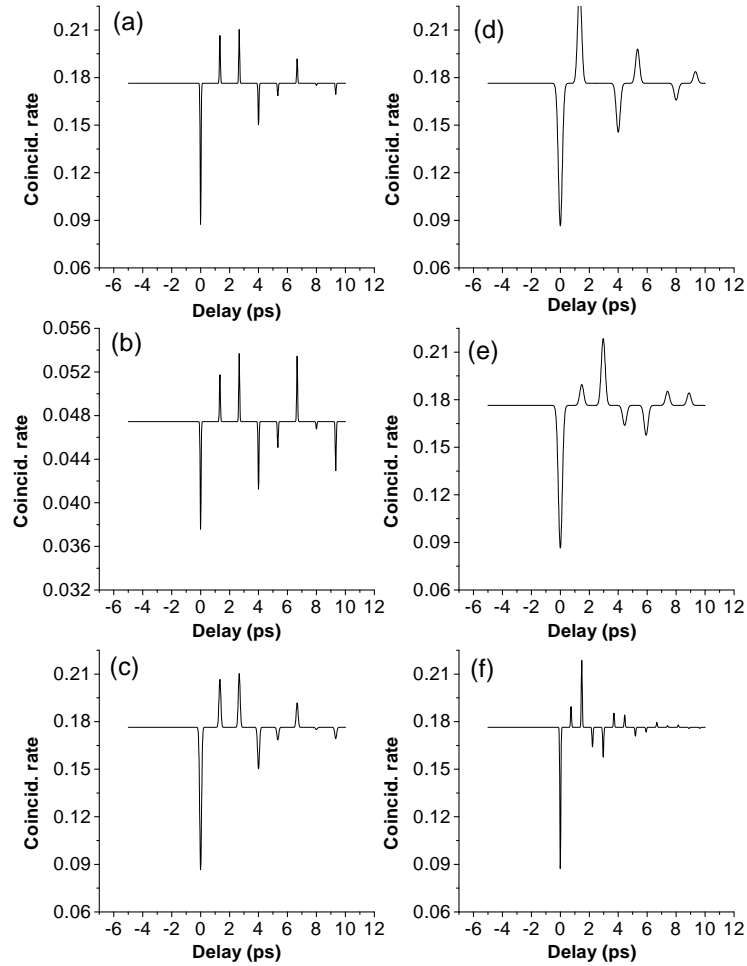


Figura 2.4: As cavidades estão fora das condições de ressonância e anti-ressonância. Nós começamos em (a) com $\lambda = 826.2$ nm, $\Delta\lambda = 8$ nm, $L = 0.4$ mm, $R = 0.7$. Em (b) trocamos somente R para 0.9. Em (c) nós voltamos R para 0.7, mantemos todos os outros parâmetros inalterados, e mudamos $\Delta\lambda$ para 4 nm. Em (d), em relação a (c), nós somente mudamos λ para 1200 nm. Em (e), fizemos L igual a 0.44444 mm. Finalmente em (f), mudamos λ para 600 nm e L para 0.22222 mm.

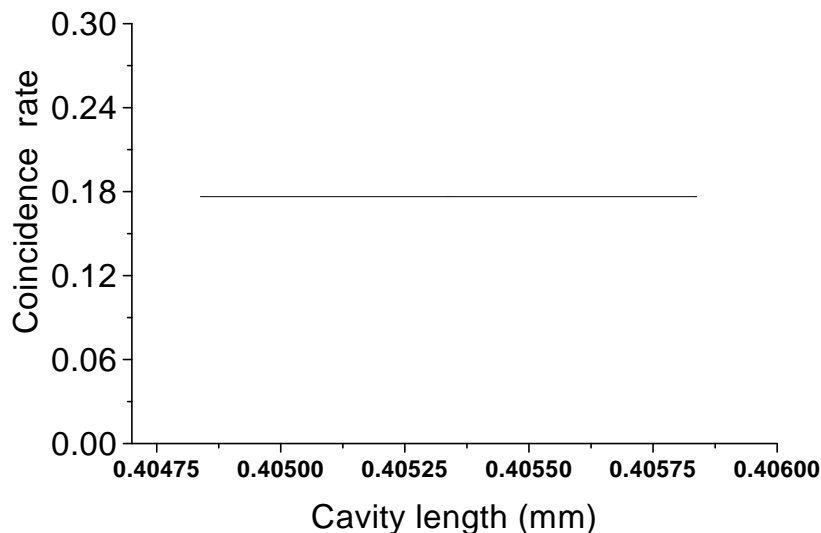


Figura 2.5: Gráfico mostrando a taxa de coincidências versus a largura da cavidade. Nós começamos com $L = 0.404838$ mm e fixamos o atraso temporal em 0.66733 ps, o qual está aproximadamente no meio termo entre a primeira e a segunda interferências (patamar), e variamos L apenas poucos lambdas. Os parâmetros são $R = 0.7$, $\lambda = 826.2$ nm e $\Delta\lambda = 8$ nm.

fóton age como uma pequena “bola” com probabilidade T de atravessar um obstáculo e probabilidade R de ser refletido, isto é, não há interferência do fóton consigo mesmo, como haveria numa cavidade de Fabry-Perot tradicional.

Agora nós veremos de onde vêm os picos e vales (as regiões de interferência) no interferômetro de HOM com uma cavidade (Fig. 2.7). Analisando a Fig. 2.7.a, vemos que o prisma P1 fornece ao fóton *signal* um atraso temporal de um τ_c (prisma P2 mantido fixo, veja Fig. 2.1) em relação ao fóton *idler*. No lado esquerdo da Fig. 2.7.a, o fóton *idler* passa através da cavidade diretamente, ambos os fótons refletem em BS, de tal maneira que o detector D2 recebe um fóton um τ_c antes do detector D1. No lado direito da Fig. 2.7.a, o fóton *idler* reflete duas vezes no interior da cavidade antes de seguir para BS, mas desta vez ambos os fótons são transmitidos no divisor de feixe (BS), deste modo D2 continua recebendo um fóton τ_c antes de D1. Os dois processos que acabamos de mencionar que levam ao mesmo evento (D2 recebendo um fóton um tempo τ_c antes de D1) são parcialmente indistinguíveis, então existe interferência parcial entre eles. O termo parcialmente indistinguíveis se justifica porque o processo à esquerda (fóton *idler* atravessando direta-

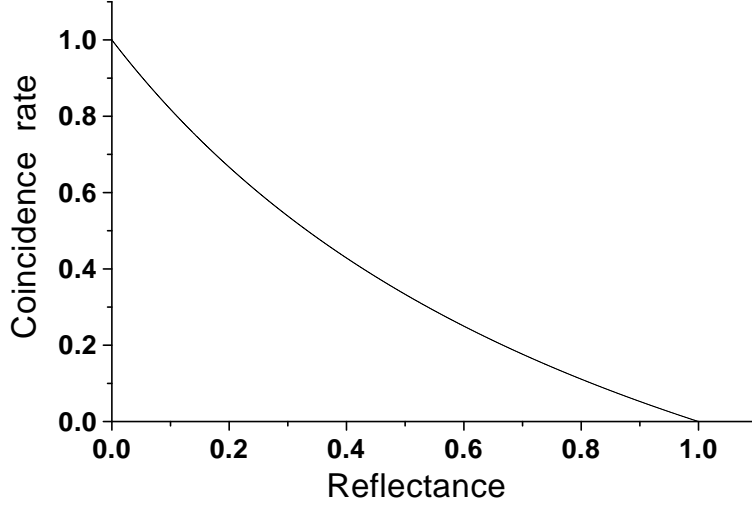


Figura 2.6: Gráfico mostrando a taxa de coincidências versus reflectância (R). Nós fizemos $L = 0.4$ mm, o atraso temporal em 0.66733 ps, o qual está aproximadamente no meio termo entre a primeira e a segunda interferências (patamar), $\lambda = 826.2$ nm e $\Delta\lambda = 8$ nm.

mente) é mais provável de acontecer que o processo à direita. O raciocínio é o mesmo para a Fig. 2.7.b, a única diferença é que o detector D1 é o que recebe um fóton um tempo τ_c antes do detector D2. De uma maneira similar podemos entender a interferência quando $\delta = 2\tau_c$ (Fig. 2.7.c,d,e). Note que na Fig. 2.7.d, os fótons se superpõe no divisor de feixes (BS), mas nos outros casos da Fig. 2.7 não há superposição entre os fótons gêmeos. Por outro lado, quando $\delta = 0$, a única razão para a interferência é a superposição entre os fótons no divisor de feixes, causada pela passagem direta do fóton *idler* pela cavidade, sem atraso. A Fig. 2.7 mostra porque as interferências sempre ocorrem quando δ é um múltiplo de τ_c .

Analisando a Eq. (2.24) deduzimos o valor da taxa de coincidências para cada região de interferência:

$$T_{c,i}(j) = \frac{T^2}{1 - R^2} - T^2 \sum_{n,q} R^{n+q} \cos[\omega_p \tau_c (n - q)], \quad (2.25)$$

onde $n + q = j - 1$ e j é a ordem da região de interferência ($j = 1$ para a primeira, em $\delta = 0$; $j = 2$ para a segunda, em $\delta = \tau_c$; $j = 3$ para a terceira, em $\delta = 2\tau_c$ e assim por diante).

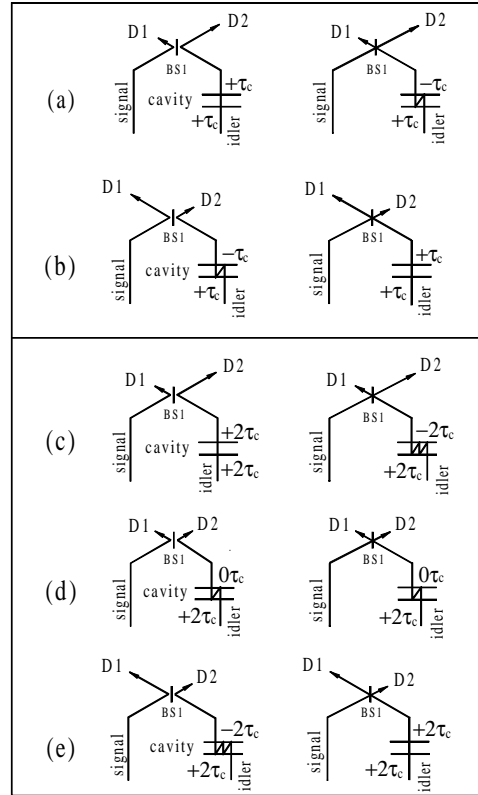


Figura 2.7: (a) e (b) são diagramas de caminhos de Feynman associados com a segunda região de interferência ($\delta = \tau_c$), o fóton *idler* está inicialmente $+\tau_c$ adiantado em relação ao fóton *signal*. (c), (d) e (e) são diagramas de caminhos de Feynman associados com a terceira região de interferência ($\delta = 2\tau_c$), o fóton *idler* está inicialmente $+2\tau_c$ adiantado em relação ao fóton *signal*.

Agora gostaríamos de voltar à Fig.2.2, lembrando que aumentando R o vale mais profundo fica cada vez mais distante da origem. Daremos uma breve explicação para tal comportamento. Olhe para Fig.2.7, as partes (a) e (b) estão associadas com a segunda região de interferência ($\delta = \tau_c$), as partes (c), (d) e (e) estão associadas com a terceira região ($\delta = 2\tau_c$). Poderíamos escrever partes (f), (g), (h) e (i) associadas com a quarta região de interferência, se quiséssemos, e assim por diante. Note que crescendo a ordem da região de interferência, o número de pares de processos que interferem cresce a mesma quantidade (veja Fig. 2.7). Por outro lado, a probabilidade de ocorrência de tais processos diminui. O caso mostrado na Fig.2.2 é o ressonante, quando todas as contribuições para a interferência são destrutivas. Para ver isto, pegue a Eq. (2.24) e faça $\omega_p \tau_c = E\pi$, onde E

é um número par (condição de ressonância). Analisando a mesma Eq. (2.24), concluímos que a probabilidade de ocorrência de um determinado par de processos de interferência é proporcional a $R^{(j-1)}$, onde R é a reflectância de um espelho da cavidade e j é a ordem da região de interferência. O número de pares de processos de interferência em cada região de interferência é j (veja Fig. 2.7), então a probabilidade total de ocorrer determinada região de interferência é proporcional a $jR^{(j-1)}$, $P(j, R) \propto jR^{(j-1)}$. O maior $P(j, R)$ corresponde ao vale mais profundo (no caso ressonante). Uma vez que temos $P(j, R)$ é fácil mostrar que seu valor máximo, quando você aumenta R ocorre para um valor maior de j . Este maior valor de $P(j, R)$ quando $R \rightarrow 1$ ocorre quando $j \rightarrow \infty$.

2.5 Resultados teóricos com duas cavidades

Agora mostraremos algumas simulações feitas usando a Eq. (2.23) completa, lembrando que $\pi K = 1$ (equação normalizada, T_c). A Fig. 2.8 mostra o padrão de interferências quando as duas cavidades estão presentes no interferômetro.

Note que na Fig. 2.8.a e na Fig. 2.8.c temos padrões simétricos em relação à origem, mas não temos esta simetria na Fig. 2.8.b. Note também que há interferências para atrasos temporais negativos, não somente um patamar como no problema de uma cavidade (Fig. 2.2-2.4). Finalmente note que nas Fig. 2.8.a e Fig. 2.8.c, quando $\delta = 0$ obtemos 100% de coalescência. Esta interferência totalmente destrutiva não é possível, no regime da coerência longitudinal dos fótons menor que a largura da cavidade, usando somente uma cavidade.

No caso de uma cavidade, o patamar não depende de L e tem um significado especial (é proporcional ao número de fótons que atravessam a cavidade, veja a Fig. 2.5). Como será isto com duas cavidades? Veja Fig. 2.9.

Na Fig. 2.9.a, nós começamos com $L_i = 0.404838$ mm (ressonante) e variamos L_i apenas alguns poucos lambdas, passando por anti-ressonâncias, casos intermediários, voltando a ressonâncias e assim por diante. Note que, diferentemente da Fig. 2.5, o patamar depende de L . Seu valor máximo é exatamente quando L_i é ressonante (porque L_s é ressonante também) e seu valor mínimo é quando L_i é anti-ressonante. Com duas cavidades o patamar não mais representa o percentual de fótons que atravessam a cavidade, isto é, você nunca está livre de interferências, em qualquer lugar que você ponha o atraso temporal (δ), incluindo o patamar, você tem algum tipo de interferência. Este novo tipo de interferência será entendido quando estudarmos, logo adiante, os diagramas de Feynman

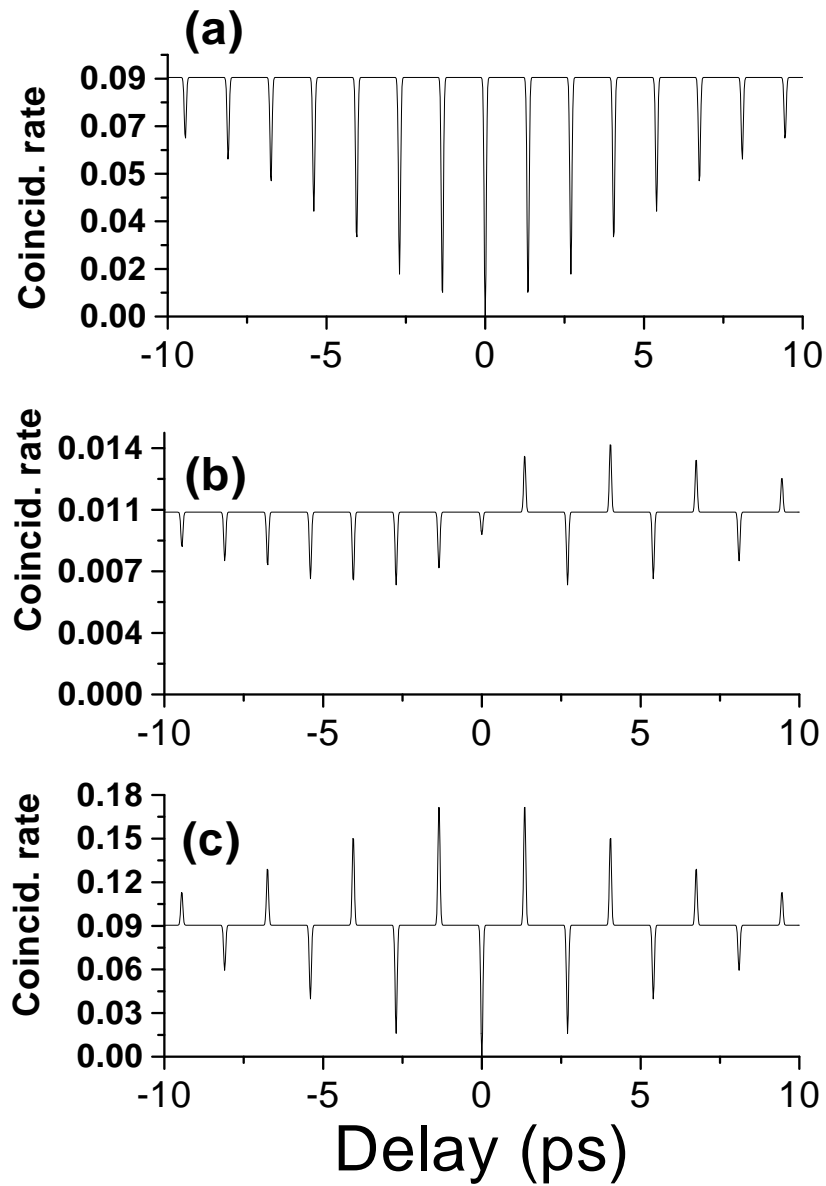


Figura 2.8: Neste gráfico ambas as cavidades possuem os parâmetros: $R_i = R_s = 0.7$, $\lambda_i = \lambda_s = 826.2$ nm e $\Delta\lambda = 8$ nm. Em (a), $L_i = L_s = 0.404838$ mm, ambas as cavidades são ressonantes com os fótons gêmeos. Em (b), $L_s = 0.404838$ mm (ressonante), $L_i = 0.4050447$ mm (anti-ressonante). Em (c), $L_s = L_i = 0.4050447$ mm, ambas as cavidades são anti-ressonantes.

para duas cavidades, Fig. 2.10. A distância entre máximos consecutivos na Fig. 2.9.a é $\lambda/2$. Na Fig. 2.9.b, a única diferença para a Fig. 2.9.a é que fixamos L_s em $L_s = 0.4$ mm

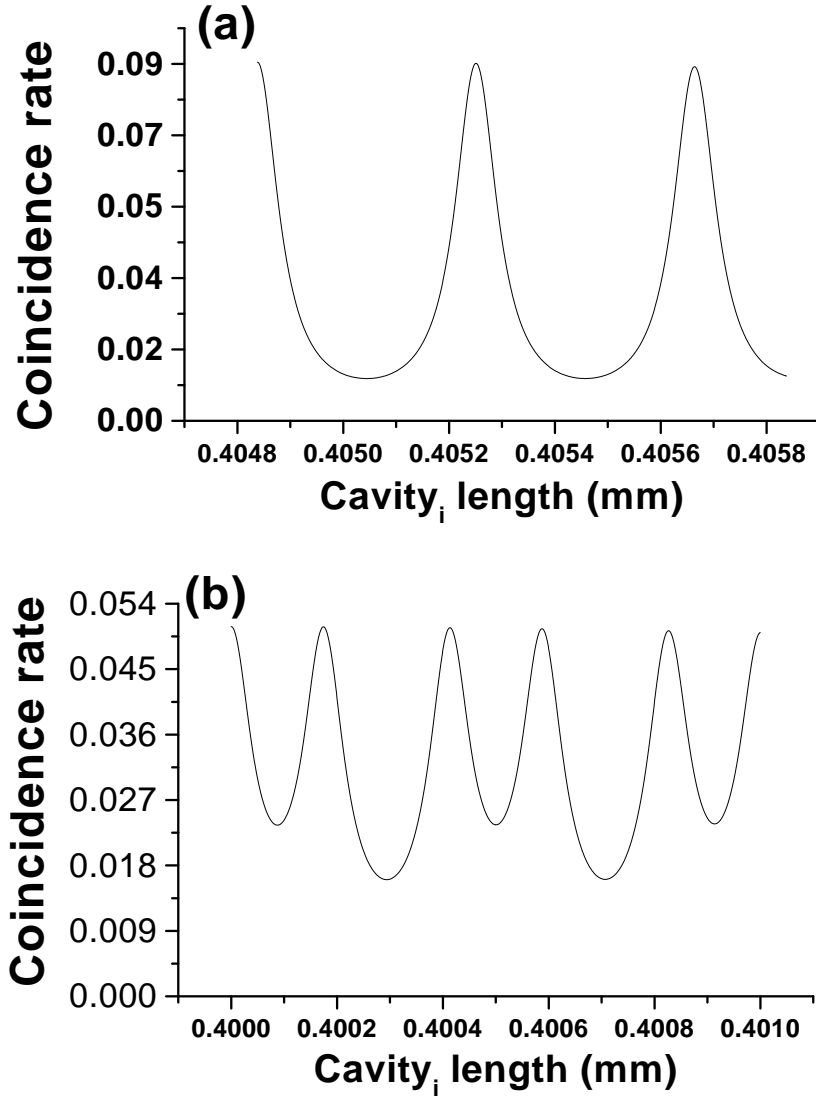


Figura 2.9: Gráficos mostrando a taxa de coincidências versus L_i para duas cavidades no interferômetro de HOM. Todos os outros parâmetros são mantidos fixos: $R_i = R_s = 0.7$, $\lambda = 826.2$ nm, $\Delta\lambda = 8$ nm, $\delta = 0.66733$ ps (patamar), em (a) $L_s = 0.404838$ mm (ressonante), em (b) $L_s = 0.4$ mm (nem ressonante e nem anti-ressonante).

(nem ressonante e nem anti-ressonante) e começamos com $L_i = 0.4$ mm. O procedimento foi o mesmo (variar L_i apenas alguns poucos lambdas). Desta vez a distância entre mínimos consecutivos é $\lambda/4$.

Podemos explicar a variação do patamar com L analisando a Fig. 2.10.

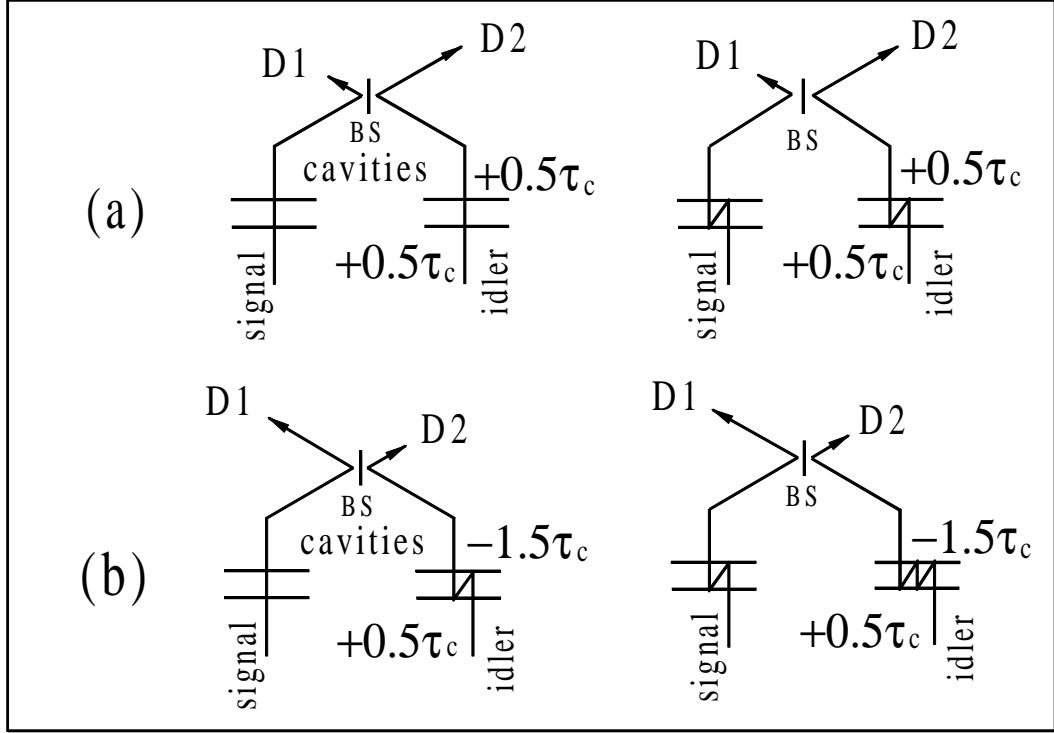


Figura 2.10: Diagramas de Feynman para duas cavidades, explicando a variação do patamar com L . O fóton *idler* começa $0.5\tau_c$ avançado em relação ao fóton *signal*. Em (a) ele permanece $0.5\tau_c$ avançado, depois que ambos os fótons atravessam suas cavidades. Em (b), o fóton *signal*, depois que ambos os fótons atravessam suas cavidades, fica avançado $1.5\tau_c$ em relação ao fóton *idler*.

As razões para a presença dos picos e vales no padrão de interferência do interferômetro de HOM com duas cavidades são as mesmas apresentadas na Fig. 2.7: você não sabe qual fóton chegou num dos detectores primeiro. Porém o patamar de coincidências com apenas uma cavidade não depende de L (Fig. 2.5). Quando duas cavidades estão presentes, o próprio patamar depende de L (Fig. 2.9). Nós poderíamos explicar esta dependência de uma maneira geral, mas para tornar a explicação mais fácil de se entender, tomaremos um caso particular.

Na Fig. 2.10, $\tau_{cs} \simeq \tau_{ci}$ ou $\tau_{cs} = \tau_{ci}$, então nós os chamaremos simplesmente de τ_c . Nós começamos com o fóton *idler* $0.5\tau_c$ avançado em relação ao fóton *signal* (para con-

seguirmos isto, fazemos uso dos prismas P1 e P2, veja a Fig. 2.1). Na Fig. 2.10.a, ambos os fótons podem atravessar suas cavidades diretamente ou ambos podem refletir duas vezes no interior das cavidades antes de atravessá-las ou ainda (isto não é mostrado aqui) eles podem refletir quatro vezes no interior das cavidades antes de atravessá-las e assim por diante. Em todos estes casos o fóton *idler* continuará $0.5\tau_c$ avançado. Na Fig. 2.10.b, devido à diferença no número de reflexões que os fótons executam no interior de suas cavidades, o fóton *signal* chega $1.5\tau_c$ antes do fóton *idler* no divisor de feixes (BS), e isto pode acontecer de diversas maneiras distintas (duas delas são mostradas na Fig. 2.10.b). Se a diferença entre os disparos (“clicks”) dos detectores for $0.5\tau_c, 2.5\tau_c, 4.5\tau_c$ e assim por diante, sabemos que foi o fóton *idler* que chegou primeiro em BS. Se a diferença entre os “clicks” dos detectores for $1.5\tau_c, 3.5\tau_c, 5.5\tau_c$ e assim por diante, sabemos que foi o fóton *signal* que chegou primeiro em BS. Diferentemente da interferência que causa os picos e vales, quando não se pode saber com certeza qual fóton chegou primeiro num determinado detector, neste novo tipo de interferência (que faz o patamar variar) sempre se pode saber qual fóton chegou primeiro, mas não se pode saber qual processo aconteceu antes da chegada. Resumindo: na Fig. 2.10, todos os processos na linha (a) interferem, todos os processos na linha (b) interferem e assim por diante. Esta é a verdadeira razão para a flutuação do patamar.

Até agora nós temos tratado somente casos onde as cavidades tinham o mesmo ou quase o mesmo L ($L_i = L_s$ ou $L_i \simeq L_s$). Para finalizar esta seção, mostraremos alguns casos onde as cavidades têm larguras bastante diferentes, veja Fig. 2.11. Para facilitar a visualização dos padrões de coincidência nós colocamos algumas setas espaçadas pelas larguras das cavidades nos gráficos da Fig. 2.11. Note que na Fig. 2.11a, as interferências sempre ocorrem em deslocamentos espaçados por 0.3 mm, isto ocorre porque a largura da cavidade, L_i , é apenas um múltiplo da outra, L_s ($L_i = 0.6$ mm e $L_s = 0.3$ mm). Na Fig. 2.11b, as interferências novamente em passos de 0.3 mm, porque as larguras das cavidades ($L_i = 0.9$ mm e $L_s = 1.5$ mm) têm um fator comum de 0.3 mm. Finalmente na Fig. 2.11c, as larguras das cavidades não têm um fator comum ($L_i = 0.7$ mm and $L_s = 1.1$ mm), nós colocamos uma seta por cima neste gráfico na posição de deslocamento 0.3 mm e nós vamos explicar a origem desta interferência num lugar aparentemente inesperado, veja Fig. 2.12.

A Fig. 2.11d, foi feita só por uma questão de completeza; porque na Fig. 2.11a nós começamos com $L_i/L_s = 2$, em b) $L_i/L_s = 0.9/1.5 = 3/5$ (as larguras têm um fator comum), em c) as larguras não têm fatores comuns, mas a sua razão ainda é um número

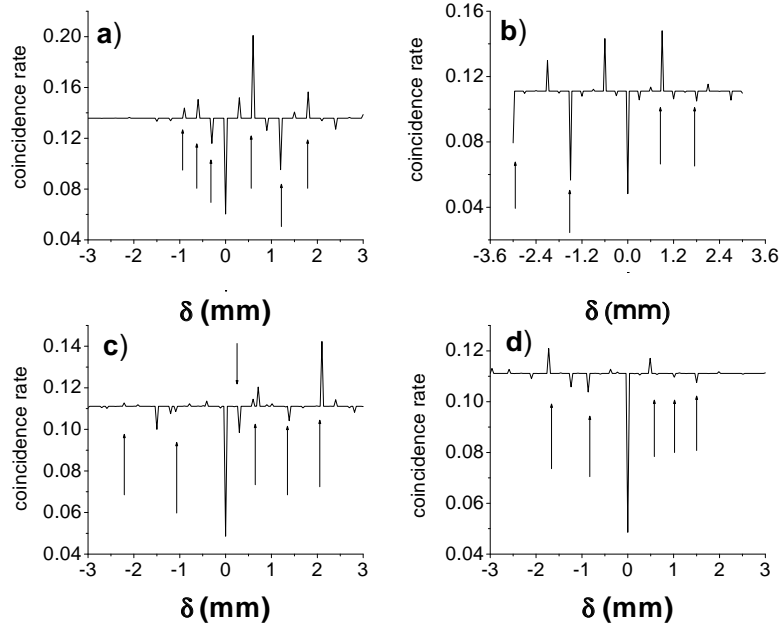


Figura 2.11: Gráficos mostrando coincidências versus deslocamentos em mm. Em a) $L_i = 0.6$ mm enquanto $L_s = 0.3$ mm, em b) $L_i = 0.9$ mm e $L_s = 1.5$ mm, em c) $L_i = 0.7$ mm e $L_s = 1.1$ mm, em d) $L_i = 0.5$ mm e $L_s = 0.6\sqrt[3]{3}$ mm. Os outros parâmetros são $\lambda = 826.2$ nm e $\Delta\lambda = 12$ nm.

racional, $L_i/L_s = 0.7/1.1 = 7/11$, finalmente em d) L_i/L_s é um número irracional.

Seguindo a convenção dos diagramas da Fig. 2.7, nós fizemos um diagrama para ilustrar esta interferência, veja Fig. 2.12. O fóton *idler* começa 0.3 mm adiantado em relação ao fóton *signal*. Se os dois fótons atravessam as cavidades diretamente, sem reflexões internas, e em seguida eles refletem no divisor de feixe, o detector $D2$ recebe um fóton, num tempo $(0.3 \text{ mm})/c$ (c = velocidade da luz no vácuo), antes que o detector $D1$. Por outro lado, se o fóton *signal* reflete duas vezes na cavidade de 1.1 mm antes de seguir para o divisor de feixe, e o fóton *idler* reflete quatro vezes na cavidade de 0.7 mm antes de seguir para o divisor de feixe; desta vez, porém, eles atravessam o divisor de feixe, o detector $D2$ continuará recebendo um fóton, num tempo $(0.3 \text{ mm})/c$ antes que o detector $D1$. Estes são dois processos parcialmente indistinguíveis que levam ao mesmo evento

($D2$ recebendo um fóton num tempo $(0.3 \text{ mm})/c$ antes que o $D1$), daí a interferência.

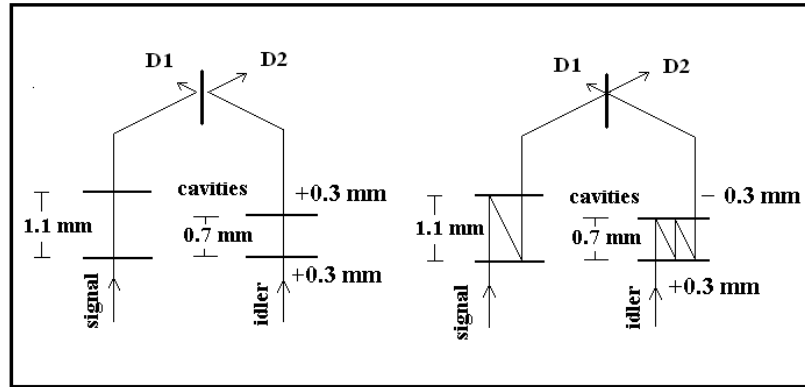


Figura 2.12: Diagramas de Feynman ilustrando a interferência na posição de deslocamento 0.3 mm que aparece na Fig. 2.11c. O fóton *idler* começa 0.3 mm avançado em relação ao fóton *signal*.

2.6 Interferências usando laser pulsado

Observando os diagramas da Fig. 2.7 nós entendemos de uma maneira heurística porque há interferências mesmo quando os fótons não se encontram no divisor de feixes (BS da Fig. 2.1). Aqui nós estamos voltando para o caso de apenas uma cavidade no braço *idler* do interferômetro. Para simplificar, vamos nos ater, por enquanto, à Fig. 2.7a. O motivo da interferência então é não se saber, com certeza, qual fóton chegou, por exemplo, no detector $D1$; o fóton *signal* (lado esquerdo da figura) ou o fóton *idler* (lado direito da figura). São processos parcialmente indistinguíveis que levam ao mesmo evento. Os processos são apenas parcialmente indistinguíveis porque o processo da direita é menos provável de acontecer do que o processo da esquerda, por que neste não há reflexões internas na cavidade; quanto mais reflexões, menor a probabilidade de acontecer um determinado processo.

Há um ingrediente indispensável para que estas interferências ocorram: por se tratar de um fenômeno espontâneo, a conversão paramétrica descendente não permite que se saiba quando o par de fótons é gerado dentro do cristal. Se pudéssemos saber quando exatamente um par de fótons gêmeos é gerado, poderíamos distinguir entre os dois processos da Fig. 2.7a. Se fosse o processo da esquerda, o detector $D1$ receberia um fóton num

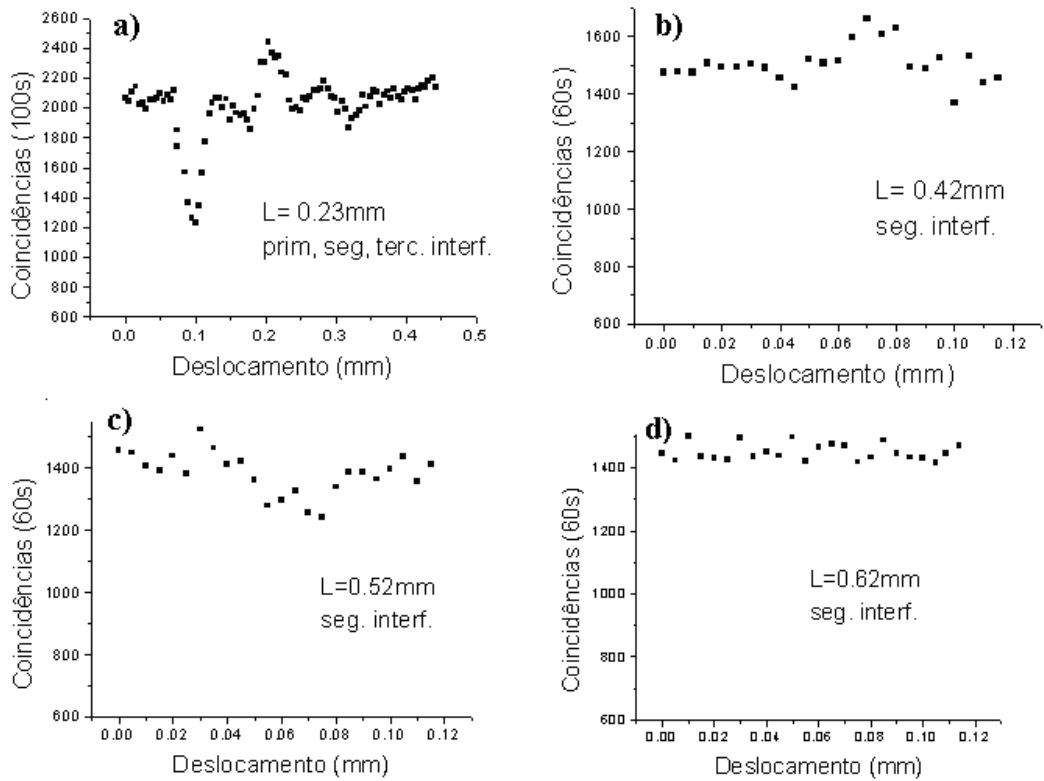


Figura 2.13: Gráficos de coincidências versus deslocamentos em mm.

tempo t (tempo gasto para ir do cristal ao detector $D1$), se fosse o processo da direita, $D1$ receberia um fóton num tempo $t + \tau_c$. Distinguindo os dois processos, acabaríamos com a interferência. O mesmo aconteceria com os processos da Figs. 2.7b,c,e. Os processos da Fig. 2.7d continuariam indistinguíveis. Em resumo, se soubéssemos quando um par de fótons gêmeos é gerado dentro do cristal, acabaríamos com toda interferência não local (nome dado às interferências onde os fótons não se encontram em BS), e continuaríamos acontecendo interferências quando os fótons se encontrassem em BS , como na Fig. 2.7d.

É aqui que entra em cena o laser pulsado. Se o comprimento longitudinal do pulso fosse menor que a largura da cavidade, poderíamos saber (em princípio) quando um par de fótons é gerado: é quando o pulso passa pelo cristal. Nós fizemos tal experimento, cujos resultados estão mostrados na Fig. 2.13. Nós fomos aumentando gradativamente a largura da cavidade e varrendo com o trombone $P1$ (da Fig. 2.1) sempre a segunda região de interferência, correspondente às Figs. 2.7a,b, na qual só existem interferências “não locais”. Observando os gráficos da Fig. 2.13, vemos que em a) com $L = 0.23$ mm ainda podemos

observar as primeiras 3 interferências nitidamente; em b) com $L = 0.42$ mm, a segunda interferência começa a desaparecer; em c) com $L = 0.52$ mm, a segunda interferência já quase não existe mais; e em d) com $L = 0.62$ mm, a segunda interferência acabou completamente. Podemos então inferir que o comprimento do pulso é da ordem de 0.5 mm.

2.7 Aplicação: porta lógica C-not

Essa montagem (Fig. 2.1) é apropriada para aplicações em problemas de informação. Por exemplo: nós podemos construir uma porta lógica C-not óptica [29], de um modo semelhante ao mostrado na ref.[30]. No caso deles o controle era feito mudando eletro-opicamente a birrefringência de duas placas de quartzo de diferentes comprimentos colocadas em cada braço do HOM. Em nosso caso o controle é feito mudando a largura das cavidades. O padrão de interferência do HOM muda se a largura de cada cavidade é um múltiplo inteiro de $\lambda/2$ (ressonância) ou um múltiplo semi-inteiro de $\lambda/2$ (anti-ressonância). Os bits lógicos são codificados nas ressonâncias/antirressonâncias das cavidades. Cálculos a respeito de duas cavidades, cada uma em um dos braços do interferômetro, mostraram o comportamento acima das contagens em coincidência. Considere que as larguras das cavidades são quase iguais. Se ambos os fótons são ressonantes ou anti-ressonantes com suas cavidades, temos um padrão de interferência simétrico em relação a $\delta = 0$. Entretanto se um fóton é ressonante com sua cavidade e o outro é anti-ressonante, obtemos um padrão não simétrico, veja Fig. 2.8. Agora vamos identificar o bit de entrada “0” com a ressonância e o bit de entrada “1” com a anti-ressonância. Também identificaremos o bit de saída “0” com o padrão de coincidências simétrico e o bit de saída “1” com o padrão não simétrico. Feitas tais identificações, é fácil simular uma operação lógica C-not, veja a tabela 2.1.

A tabela 2.1 mostra que podemos escolher o fóton *idler* como o controle e o fóton *signal* como o alvo para simular a porta C-not, ou vice-versa. Este intercâmbio entre controle e alvo é muito útil na construção de circuitos lógicos.

| Table for C-NOT gate | | | | | |
|----------------------|-----|----------------------|-----|------------------------|---|
| Idler bit cavity | | Signal bit cavity | | Results pattern bit | |
| 0 | res | 0 | res | SY | 0 |
| 0 | res | 1 | ant | NS | 1 |
| 1 | ant | 0 | res | NS | 1 |
| 1 | ant | 1 | ant | SY | 0 |

Tabela 2.1: Tabela mostrando o comportamento da operação lógica C-not. “res” significa ressonante, “ant” significa anti-ressonante, “SY” significa padrão de coincidências simétrico e “NS” significa padrão de coincidências não simétrico.

Capítulo 3

Análise Probabilística Completa dos Estados de Bell

3.1 Introdução

Desde o começo da mecânica quântica, os estados emaranhados têm tido um importante papel no estudo dos fundamentos desta teoria, como a sua completude e não-localidade [31]. Entretanto, só recentemente foi entendido que os estados emaranhados são também uma fonte de recursos para transmitir e processar informação [32]. Hoje existe uma grande coleção de protocolos baseados em estados emaranhados, como teleportação de estados quânticos [33], teleportações unitárias [34], compartilhamento de estados quânticos [35], codificação densa [36], permuta de emaranhamentos [37] e criptografia quântica [38] entre outros, os quais estendem e melhoram a performance das técnicas clássicas de comunicação ou mesmo permitem que o processamento de informação vá muito além dos limites clássicos.

Um requerimento comum destes protocolos é a capacidade de analisar os quatro estados de Bell ou fazer medidas nas bases definidas por estes estados. Os estados de Bell têm sido preparados em íons, átomos e em pares de fótons gerados pela conversão paramétrica descendente espontânea (SPDC) [39]. Infelizmente, os métodos ópticos usados para implementar tais análises são capazes de identificar conclusivamente somente uma fração dos estados de Bell, ou permitir apenas uma discriminação probabilística [40].

Neste capítulo, nós apresentamos dois métodos capazes de identificar completamente os quatro estados de Bell em polarização. Estes esquemas são baseados no interferômetro de Hong-Ou-Mandel [12] e em transformações de polarização, e são projetados de tal maneira que o sinal do número de coincidências é único para cada estado de Bell. A

abordagem que nós empregamos se aplica a uma classe muito geral de estados, sendo os estados de Bell em polarização um exemplo particular dentro desta classe. Esta família de estados permite considerar deformações dos estados de Bell as quais se originam, por exemplo, no método usado para gerá-los ou na dispersão em frequência, ou em operações aplicadas nos estados de Bell.

Este capítulo está organizado como se segue: na seção 3.2 nós deduzimos o número de coincidências como uma função do atraso no caminho óptico controlável externamente para uma classe de estados. Na seção 3.3 nós analisamos este resultado e o conectamos a transformações de polarização. Isto nos permite formular os dois esquemas para a análise dos estados de Bell.

3.2 Calculando o número de coincidências

Um interferômetro de Hong-Ou-Mandel [12] consiste de um divisor de feixe e de dois fotodetectores. As portas de entrada do divisor de feixe recebem pares de fótons gerados pela SPDC [41] enquanto os fótons que saem são direcionados para os fotodetectores (veja Fig. 1.1). Tipicamente, as propriedades da luz incidente são inferidas do sinal das fotocoincidências como uma função de um atraso no caminho óptico em um dos braços do interferômetro, controlado externamente. Nós começamos definindo a classe Ω de estados cujos membros são da forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha,\beta=\pm} A_{\alpha,\beta} |\nu_{\alpha,\beta}\rangle, \quad (3.1)$$

com os $|\nu_{\alpha,\beta}\rangle$ estados definidos por

$$|\nu_{\alpha,\beta}\rangle = \int_0^{\omega_0} d\omega C_{\alpha,\beta}(\omega) |1, \omega, \alpha\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, \beta\rangle_s. \quad (3.2)$$

Estes estados podem ser gerados pela SPDC do tipo II, veja Figs. 3.1 e 3.2, nelas é mostrada uma possível maneira de se gerar estados pertencentes à família Ω . O estado $|1, \omega', \gamma\rangle_a$ representa um fóton de frequência ω' e polarização $\gamma = +, -$ no modo *signal* ($a = s$) ou no modo *idler* ($a = i$). As funções $|C_{\alpha,\beta}(\omega)|^2$ são distribuições de probabilidade definidas no intervalo $[0, \omega_0]$ as quais dependem da frequência e possivelmente da polarização. Os coeficientes $A_{\alpha,\beta}$ são números complexos arbitrários satisfazendo a condição de normalização $\sum_{\alpha,\beta} |A_{\alpha,\beta}|^2 = 1$. Os estados $|\nu_{\alpha,\beta}\rangle$ satisfazem a propriedade

$$\langle \nu_{\alpha',\beta'} | \nu_{\alpha,\beta} \rangle = \delta_{\alpha',\alpha} \delta_{\beta',\beta}. \quad (3.3)$$

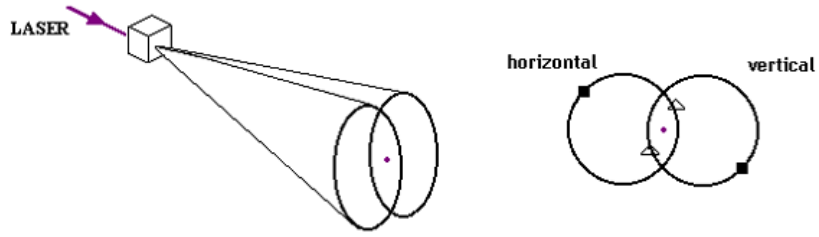


Figura 3.1: Conversão paramétrica tipo II. O feixe de bombeamento gera dois cones com pares de fótons emaranhados degenerados, um deles é formado de fótons polarizados verticalmente e o outro é formado por fótons polarizados horizontalmente.

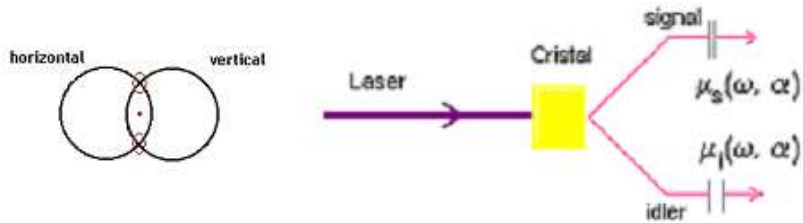


Figura 3.2: Os feixes de fótons tomados na interseção dos dois cones são lançados em cavidades cujos coeficientes de transmissão dependem da frequência e da polarização dos fótons.

Um exemplo simples de estados pertencentes a Ω são:

$$\begin{aligned}
 |\Phi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\omega_0} d\omega C(\omega) (|1, \omega, +\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, +\rangle_s \pm |1, \omega, -\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, -\rangle_s), \\
 |\Psi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\omega_0} d\omega C(\omega) (|1, \omega, +\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, -\rangle_s \pm |1, \omega, -\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, +\rangle_s). \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Estes estados correspondem a estados de Bell em polarização gerados pela conversão paramétrica descendente espontânea. A distribuição $C(\omega)$ considera a dispersão em frequência e a ação de filtros colocados em frente aos detectores.

Um segundo exemplo de estados em Ω é:

$$\begin{aligned}
|\Phi_{\pm}\rangle &= \int d\omega \frac{\Phi(\omega)}{\sqrt{2}} (u_{i,+}(\omega)u_{s,-}(\omega_0 - \omega)|1, \omega, +\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, +\rangle_s \pm \\
&\quad \pm u_{i,-}(\omega)u_{s,+}(\omega_0 - \omega)|1, \omega, -\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, -\rangle_s), \\
|\Psi_{\pm}\rangle &= \int d\omega \frac{\Phi(\omega)}{\sqrt{2}} (u_{i,+}(\omega)u_{s,-}(\omega_0 - \omega)|1, \omega, +\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, -\rangle_s \pm \\
&\quad \pm u_{i,-}(\omega)u_{s,+}(\omega_0 - \omega)|1, \omega, -\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, +\rangle_s).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Estes estados assemelham-se aos quatro estados de Bell em polarização. Entretanto, nestes estados nós incluímos as funções $u_{i,\alpha}(\omega)$ e $u_{s,\alpha}(\omega)$ as quais dependem da frequência e da polarização. A forma funcional particular destas funções reflete o método particular aplicado para gerar estes estados. Neste caso, os estados dos fótons descritos pela Eq. (3.4) foram lançados através de cavidades cujas amplitudes de transmissão $u_{a,\alpha}(\omega)$ dependem da frequência e da polarização dos fótons. Esta classe de estados foi gerada experimentalmente [20].

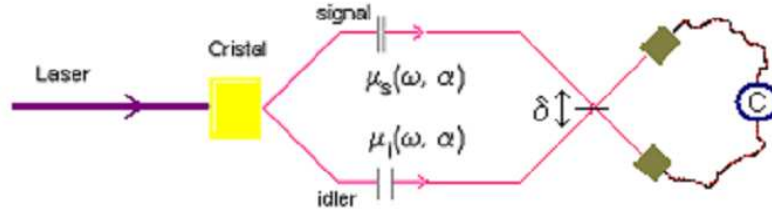


Figura 3.3: Os feixes *idler* e *signal* são dirigidos para um divisor de feixes com detectores nas portas de saída medindo em coincidência (interferômetro de Hong-Ou-Mandel).

Nós agora procedemos ao cálculo do número de coincidências para a família de estados da Eq. (3.1), veja Fig. 3.3. O número de coincidências num intervalo de tempo τ é dado pelo valor esperado

$$C(\tau) = \langle : f I_1(t) I_2(t + \tau) : \rangle, \tag{3.6}$$

onde os símbolos f e $::$ indicam ordenamento temporal e normal [17], respectivamente. Os operadores intensidade que entram na Eq. (3.6) são

$$\begin{aligned}
\hat{I}_1(t) &= \hat{\vec{E}}_1^-(t) \cdot \hat{\vec{E}}_1^+(t), \\
\hat{I}_2(t + \tau) &= \hat{\vec{E}}_2^-(t + \tau) \cdot \hat{\vec{E}}_2^+(t + \tau),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $\hat{E}_i^\alpha(t)$ é a parte positiva ($\alpha = +$) ou negativa ($\alpha = -$) do operador campo eletromagnético nos detectores D_i ($i = 1, 2$) no tempo t . Estes operadores estão relacionados com os operadores campo eletromagnéticos antes do divisor de feixes do HOM pela transformação

$$\begin{aligned}\hat{E}_1^+(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{E}_i^+(t) + i \hat{E}_s^+(t - \delta) \right), \\ \hat{E}_2^+(t + \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{E}_s^+(t + \tau - \delta) + i \hat{E}_i^+(t + \tau) \right)\end{aligned}\quad (3.8)$$

onde δ é um atraso no caminho óptico controlável externamente.

Inserindo as Eqs. (3.8) e (3.7) dentro da Eq. (3.6) nós obtemos o número de coincidências que é dado por uma soma de dezesseis termos. Doze destes termos são produtos contendo operadores aniquilação agindo no mesmo modo. Desde que nós consideremos os estados de um fóton *idler* e *signal*, todos estes termos se anulam. De fato, depois de decompor em componentes de polarização, o número de coincidências é dado pela expressão

$$\begin{aligned}C(\tau) &= \frac{1}{4} \left[\sum_{a,b=+,-} \left(\langle \hat{E}_{s,b}^-(t_1) \hat{E}_{i,a}^-(t_2) \hat{E}_{i,a}^+(t_2) \hat{E}_{s,b}^+(t_1) \rangle + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \langle \hat{E}_{s,a}^-(t_0) \hat{E}_{i,b}^-(t_3) \hat{E}_{i,b}^+(t_3) \hat{E}_{s,a}^+(t_0) \rangle \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{a,b=+,-} \left(\langle \hat{E}_{s,b}^-(t_1) \hat{E}_{i,a}^-(t_2) \hat{E}_{i,b}^+(t_3) \hat{E}_{s,a}^+(t_0) \rangle + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \langle \hat{E}_{s,a}^-(t_0) \hat{E}_{i,b}^-(t_3) \hat{E}_{i,a}^+(t_2) \hat{E}_{s,b}^+(t_1) \rangle \right) \right],\end{aligned}\quad (3.9)$$

com as definições

$$t_0 = t - \delta, \quad t_1 = t + \tau - \delta, \quad t_2 = t, \quad t_3 = t + \tau. \quad (3.10)$$

Notamos que os primeiros dois termos na Eq. (3.9) são reais e que os últimos dois termos formam uma contribuição real. Nós procedemos como se segue: primeiro nós calculamos separadamente cada termo na Eq. (3.9) com sub-índices a, b fixados. Daí em diante, nós fazemos a soma sobre estes índices. Devido à linearidade do produto escalar, nós podemos somar as contribuições vindas dos operadores campo elétrico com diferentes índices e interpretar a soma como um único operador.

A ação dos primeiros três operadores campo elétrico na Eq. (3.9) no estado $|\nu_{\alpha,\beta}\rangle$ para a e b fixos é dada por

$$\begin{aligned}
& \delta_{b,\beta}\delta_{a,\alpha} \int d\omega d\omega_1 d\omega_2 C_{\alpha,\beta}(\omega) \exp(i\omega_1 t_1) \exp(i\omega_2 t_2) \exp(-i\omega t_2) \times \\
& \quad \times \exp(-i(\omega_0 - \omega) t_1) |1, \omega_2, a\rangle_i |1, \omega_1, b\rangle_s, \\
& \delta_{a,\beta}\delta_{b,\alpha} \int d\omega d\omega_1 d\omega_2 C_{\alpha,\beta}(\omega) \exp(i\omega_1 t_0) \exp(i\omega_2 t_3) \exp(-i\omega t_3) \times \\
& \quad \times \exp(-i(\omega_0 - \omega) t_0) |1, \omega_2, b\rangle_i |1, \omega_1, a\rangle_s, \\
& \delta_{b,\alpha}\delta_{a,\beta} \int d\omega d\omega_1 d\omega_2 C_{\alpha,\beta}(\omega) \exp(i\omega_1 t_1) \exp(i\omega_2 t_2) \exp(-i\omega t_3) \times \\
& \quad \times \exp(-i(\omega_0 - \omega) t_0) |1, \omega_2, a\rangle_i |1, \omega_1, b\rangle_s.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Desde que nós consideremos o número de coincidências numa escala de tempo muito maior que o tempo de correlação dos fótons, nós integramos sobre a variável τ . Depois de integrar, somando sobre os índices a e b , e considerando o produto escalar desses estados com um estado arbitrário $|\nu_{p,q}\rangle$, os primeiros três termos na equação prévia levam às expressões

$$\begin{aligned}
& 2\pi\delta_{\alpha,p}\delta_{b,q} \int d\omega C_{\alpha,\beta}(\omega) C_{p,q}^*(\omega), \\
& 2\pi\delta_{\alpha,p}\delta_{b,q} \int d\omega C_{\alpha,\beta}(\omega) C_{p,q}^*(\omega), \\
& 2\pi\delta_{p,\beta}\delta_{q,\alpha} \int d\omega C_{\alpha,\beta}(\omega) C_{p,q}^*(\omega_0 - \omega) \exp(i(\omega_0 - 2\omega)\delta),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

correspondentemente.

Finalmente, o número de coincidências para um estado arbitrário $|\Psi\rangle = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} |\nu_{\alpha,\beta}\rangle$ é dado por

$$C(\delta) = \pi \sum_{\alpha,\beta} |A_{\alpha,\beta}|^2 t_{\alpha,\beta} - \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha,\beta} (A_{\alpha,\beta} A_{\beta,\alpha}^* r_{\alpha,\beta} + A_{\alpha,\beta}^* A_{\beta,\alpha} r_{\alpha,\beta}^*), \tag{3.13}$$

onde nós definimos as quantidades

$$t_{\alpha,\beta} = \int_0^{\omega_0} d\omega |C_{\alpha,\beta}(\omega)|^2, \quad r_{\alpha,\beta} = \int_0^{\omega_0} d\omega C_{\alpha,\beta}(\omega) C_{\beta,\alpha}^*(\omega_0 - \omega) \exp(i(\omega_0 - 2\omega)\delta). \tag{3.14}$$

3.3 Número de coincidências para alguns estados particulares

Vamos agora analisar a expressão para o número de coincidências. Porque as funções $|C_{\alpha,\beta}|^2$ e $|A_{\alpha,\beta}|^2$ são coeficientes de distribuições de probabilidade, o número de coincidências se torna

$$C(\delta) = \pi - \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha,\beta} (A_{\alpha,\beta} A_{\beta,\alpha}^* r_{\alpha,\beta} + A_{\alpha,\beta}^* A_{\beta,\alpha} r_{\alpha,\beta}^*). \quad (3.15)$$

Os coeficientes $r_{\alpha,\beta}$ podem ser escritos na forma

$$r_{\alpha,\beta} = \int_{\frac{+\omega_0}{2}}^{\frac{-\omega_0}{2}} d\omega C_{\alpha,\beta} \left(\omega + \frac{\omega_0}{2} \right) C_{\beta,\alpha}^* \left(\frac{\omega_0}{2} - \omega \right) \exp(-2i\omega\delta). \quad (3.16)$$

O conhecido resultado para o interferômetro de Hong-Ou-Mandel pode ser facilmente recuperado da expressão prévia para o número de coincidências. Consideremos por exemplo o estado

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) (|1, \omega, +\rangle_t |1, \omega_0 - \omega, -\rangle_s + |1, \omega, -\rangle_t |1, \omega_0 - \omega, +\rangle_s), \quad (3.17)$$

onde a função de valores reais $|\phi(\omega)|^2$ representa a ação de um filtro gaussiano centrado em $\omega_0/2$ de largura $\Delta\omega$, isto é

$$|\phi(\omega)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\omega^2}} \exp\left(-\frac{(\omega - \frac{\omega_0}{2})^2}{2\Delta\omega^2}\right). \quad (3.18)$$

Neste caso particular nós temos $A_{+,-} = A_{-,+} = 1/\sqrt{2}$ e $C(\omega)_{+,-} = C(\omega)_{-,+} = \phi(\omega)$. Assim, o número de coincidências para este estado particular se torna

$$C(\delta)_{|\Psi\rangle} = \pi (1 - Re(r)), \quad (3.19)$$

com

$$r = \int_{\frac{+\omega_0}{2}}^{\frac{-\omega_0}{2}} d\omega \phi\left(\omega + \frac{\omega_0}{2}\right)^2 \exp(-2i\omega\delta). \quad (3.20)$$

Considerando a distribuição Gaussiana $\phi(\omega)^2$ suficientemente estreita no intervalo $[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}]$ de tal maneira que os limites de integração possam ser estendidos para o intervalo $(-\infty, \infty)$, nós obtemos o número de coincidências para o estado $|\Psi\rangle$ que é

$$C(\delta)_{|\Psi\rangle} = \pi (1 - \exp(-(\Delta\omega\delta)^2)), \quad (3.21)$$

o qual é o bem conhecido resultado para o interferômetro de Hong-Ou-Mandel.

Agora nós calculamos o valor do número de coincidências dado pela Eq. (3.15) para várias famílias de estados. A primeira família a estudar é formada pelos estados

$$\begin{aligned} |\Psi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_{+-}\rangle \pm |\nu_{-+}\rangle), \\ |\Phi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_{--}\rangle \pm |\nu_{++}\rangle). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Um exemplo particular desta família são os estados na Eq. (3.4). O valor do número de coincidências para estes estados é

$$\begin{aligned} C_{\Psi_{\pm}}(\delta) &= \pi \mp \frac{\pi}{4} (r_{+,-} + r_{-,+} + r_{-,+}^* + r_{+,-}^*) \\ C_{\Phi_{\pm}}(\delta) &= \pi - \frac{\pi}{4} (r_{+,+} + r_{-,-} + r_{+,+}^* + r_{-,-}^*). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Claramente, o sinal do número de coincidências não permite discriminar sem ambiguidades entre este conjunto de estados. Os estados $|\Psi_{\pm}\rangle$ têm diferentes sinais. Entretanto, os estados $|\Phi_{\pm}\rangle$ têm o mesmo sinal. Portanto, nós podemos identificar conclusivamente os estados $|\Psi_{\pm}\rangle$.

Vamos agora considerar uma segunda família de quatro estados mutuamente ortogonais dados por

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}}(|\nu_{++}\rangle + |\nu_{+-}\rangle + |\nu_{-+}\rangle + |\nu_{--}\rangle) \\ |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}}(|\nu_{++}\rangle - |\nu_{+-}\rangle - |\nu_{-+}\rangle + |\nu_{--}\rangle) \\ |\Psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}}(|\nu_{++}\rangle + |\nu_{+-}\rangle - |\nu_{-+}\rangle - |\nu_{--}\rangle) \\ |\Psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}}(|\nu_{++}\rangle - |\nu_{+-}\rangle + |\nu_{-+}\rangle - |\nu_{--}\rangle). \end{aligned} \quad (3.24)$$

O número de coincidências para estes estados vem a ser

$$\begin{aligned} C_{\Psi_1}(\tau) &= \pi - \frac{\pi}{8} (r_{+,+} + r_{-,+} + r_{+,-} + r_{-,-} + c.c.) = C_{\Psi_2}(\tau) \\ C_{\Psi_3}(\tau) &= \pi - \frac{\pi}{8} (r_{+,+} - r_{-,+} - r_{+,-} + r_{-,-} + c.c.) = C_{\Psi_4}(\tau). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Certamente, nós encontramos que os estados $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$ têm o mesmo sinal para o número de coincidências. Isto também acontece com os estados $|\Psi_3\rangle$ e $|\Psi_4\rangle$. Portanto, neste caso, observando o comportamento do número de coincidências (como uma função de δ) nós só podemos identificar o par ao qual o estado pertence.

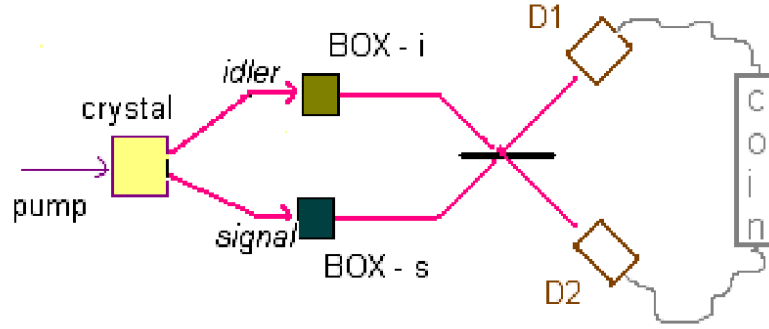


Figura 3.4: Através de transformações locais, é possível obter as transformações dadas pelas Eqs. (3.26).

Vamos agora considerar o efeito de uma transformação geral de polarização no número de coincidências (veja Fig. 3.4). Esta transformação é dada por

$$\begin{aligned} |\nu_{++}\rangle &\rightarrow a |\nu_{++}\rangle + b |\nu_{+-}\rangle, & |\nu_{+-}\rangle &\rightarrow b^* |\nu_{++}\rangle - a^* |\nu_{+-}\rangle, \\ |\nu_{-+}\rangle &\rightarrow a |\nu_{-+}\rangle + b |\nu_{--}\rangle, & |\nu_{--}\rangle &\rightarrow b^* |\nu_{-+}\rangle - a^* |\nu_{--}\rangle, \end{aligned} \quad (3.26)$$

com a condição $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Sob esta transformação os estados $\{|\Psi_{\pm}\rangle, |\Phi_{\pm}\rangle\}$ se tornam

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}_{\pm}\rangle &= 1/\sqrt{2} [b^* |\nu_{++}\rangle - a^* |\nu_{+-}\rangle \pm a |\nu_{-+}\rangle \pm b |\nu_{--}\rangle], \\ |\tilde{\Phi}_{\pm}\rangle &= 1/\sqrt{2} [\pm a |\nu_{++}\rangle \pm b |\nu_{+-}\rangle + b^* |\nu_{-+}\rangle - a^* |\nu_{--}\rangle]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

O número de coincidências para estes estados é

$$\begin{aligned} C_{\tilde{\Psi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - \frac{\pi}{2} \operatorname{Re} (|b|^2 r_{+,+} \mp (a^*)^2 r_{+,-} \mp (a)^2 r_{-,+} + |b|^2 r_{-,-}), \\ C_{\tilde{\Phi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - \frac{\pi}{2} \operatorname{Re} (|a|^2 r_{+,+} \pm (b)^2 r_{+,-} \pm (b^*)^2 r_{-,+} + |a|^2 r_{-,-}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Com isso, nós vimos que através de uma transformação local, nós podemos manipular o sinal do número de coincidências. Assim, escolhendo uma transformação caracterizada por $|a| \neq |b|$ é possível gerar diferentes sinais para cada estado.

Considerando a parametrização

$$a = \cos(\theta) \quad b = \sin(\theta) \exp(i\varphi) \quad (3.29)$$

para a transformação, o número de coincidências para os estados $\{|\tilde{\Psi}_{\pm}\rangle, |\tilde{\Phi}_{\pm}\rangle\}$ finalmente torna-se

$$\begin{aligned} C_{\tilde{\Psi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - \pi \operatorname{Re} [\sin^2(\theta)(r_{+,+} + r_{-,-}) \mp \cos^2(\theta)(r_{+,-} + r_{-,+})], \\ C_{\tilde{\Phi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - \pi \operatorname{Re} [\cos^2(\theta)(r_{+,+} + r_{-,-}) \pm \\ &\quad \pm \sin^2(\theta)(\exp(2i\varphi)r_{+,-} + \exp(-2i\varphi)r_{-,+})]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Estas expressões nos permite claramente caracterizar cada um dos estados no conjunto $\{|\Psi_{\pm}\rangle, |\Phi_{\pm}\rangle\}$ pelo sinal do número de coincidências. No caso de uma transformação real, isto é $\varphi = 0$, o número de coincidências torna-se

$$\begin{aligned} C_{\tilde{\Psi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - \pi \operatorname{Re} [\sin^2(\theta)(r_{+,+} + r_{-,-}) \mp \cos^2(\theta)(r_{+,-} + r_{-,+})], \\ C_{\tilde{\Phi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - \pi \operatorname{Re} [\cos^2(\theta)(r_{+,+} + r_{-,-}) \pm \sin^2(\theta)(r_{+,-} + r_{-,+})]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Claramente, há quatro sinais diferentes. Assim, é possível distinguir sem ambiguidades os estados no conjunto $\{|\Psi_{\pm}\rangle, |\Phi_{\pm}\rangle\}$. Este resultado não vale no caso onde os coeficientes $C_{\alpha,\beta}(\omega)$ não dependem da polarização. Neste caso particular e para $\varphi \neq 0$ nós encontramos

$$\begin{aligned} C_{\tilde{\Psi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - 2\pi (\sin^2(\theta) \mp \cos^2(\theta)) \operatorname{Re}(r), \\ C_{\tilde{\Phi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - 2\pi (\cos^2(\theta) \pm \sin^2(\theta) \cos(2\varphi)) \operatorname{Re}(r), \end{aligned} \quad (3.32)$$

com $r = r_{+,+} = r_{+,-} = r_{-,+} = r_{-,-}$ sem dependência de polarização. De fato, uma transformação real leva a dois sinais iguais, tornando uma identificação conclusiva impossível. Neste caso uma transformação de polarização complexa é necessária.

Conclusões

No capítulo 1 nós mostramos um método para mapear pacotes de onda deformados, usando interferência quântica e detecção em coincidência, capaz de medir deslocamentos temporais da ordem de fs, ou muito melhor, dependendo somente da precisão do motor de passo *SM1*. Com este método, nós podemos também medir alargamentos ou compressões no comprimento de coerência longitudinal de pacotes de onda. As Eqs. (1.21) e (1.5) foram desenvolvidas para o caso onde a deformação é causada por uma cavidade de Fabry-Perot, mas o método pode ser estendido para outros casos. O procedimento geral é: pegue um par de partículas emaranhadas, faça uma delas passar através do seu obstáculo específico e deixe a outra ir livremente; calcule a forma final, depois do obstáculo, da partícula deformada, a primeira equação é alcançada (a análoga de nossa Eq. (1.5)); então calcule o resultado de uma interferência num HOM entre as duas partículas, para obter a segunda equação (a análoga de nossa Eq. (1.21)), esta é a que se vai medir. Agora, compare as duas equações e aplique as correções necessárias nas contagens em coincidência medidas para atingir os dados reais que estavam sendo procurados. Como enfatizado acima, este capítulo também serve como um alerta: nem sempre os resultados da interferência com coincidências dá a forma correta de um pacote de ondas transmitido por um obstáculo, frequentemente é necessário fazer correções nestes resultados, baseado na sua teoria específica, para obter os dados verdadeiros sobre o pacote de ondas. Nós ilustramos nosso método apresentando uma demonstração experimental da compatibilidade entre efeitos do tipo “superluminais” e a relatividade (veja a Fig. 1.7). A curva de círculos abertos, que está abaixo da curva de quadrados sólidos, se refere a contagens de medidas em coincidência. Mas se nós olharmos a Fig. 1.5b, nós notamos que o pico das coincidências avança mais que o pico do pacote de ondas propriamente dito (pico da distribuição de probabilidade temporal do pacote de onda), então a compatibilidade é ainda mais garantida.

No capítulo 2, nós começamos fazendo os cálculos das medidas em coincidência para

o interferômetro de Hong-Ou-Mandel com duas cavidades simétricas, cada uma delas colocada em um braço do interferômetro. Usando a equação resultante fizemos algumas simulações. É fácil reduzir a equação geral para duas cavidades para uma mais específica com apenas uma cavidade. Um resultado interessante no caso de uma cavidade é a observação de coalescência e anti-coalescência, apesar de o comprimento de coerência do fóton ser menor que a largura da cavidade. O que determina se vai haver coalescência ou anti-coalescência, é a razão entre a largura da cavidade e o comprimento de onda do fóton que a atravessa. Mas a principal conclusão a respeito de anti-coalescência é que ela só é possível devido aos processos de não superposição que acontecem a partir da segunda região de interferência (veja a Fig. 2.7.a,b). Se os fótons se superpuserem no divisor de feixes (tendo a mesma polarização, a mesma frequência e o mesmo modo transversal) eles necessariamente deixam o divisor de feixes pela mesma porta de saída, o que leva a nenhuma coincidência. No caso de duas cavidades, há dois resultados que merecem ser comentados. O primeiro é o resultado nulo para as coincidências quando $\delta = 0$ (Fig. 2.8.a,c), isto não é possível no caso de uma cavidade. O segundo é a variação do patamar com a mudança nas larguras das cavidades, isto é devido a um novo tipo de interferência que também não existe no caso de uma cavidade. Finalmente mostramos que é possível construir uma porta lógica C-not usando nosso aparato.

No capítulo 3, nós estudamos um possível aparato experimental para implementar uma análise completa dos estados de Bell. O aparato consiste de um interferômetro de HOM complementado com transformações de polarização. Os estados de entrada do interferômetro pertencem a uma família muito geral de estados de dois fótons. Estados de Bell em polarização pertencem a esta família. Esta família de estados vem a ser geral o bastante para também admitir deformações dos estados de Bell, as quais devem se originar nos diferentes métodos empregados para gerá-las, por exemplo, em efeitos como dispersão em frequência e operações dependentes da polarização. Nós calculamos o número de coincidências para cada estado dentro da família e mostramos que é possível gerar, com a ajuda de transformações de polarização, diferentes sinais do número de coincidências para cada um dos quatro estados de Bell.

Apêndice A

Artigos publicados

Time control of two-photon interference

M. A. Sagiuro, C. Olindo, C. H. Monken, and S. Pádua*

Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Caixa Postal 702, 30123-970 Belo Horizonte, Minas Gerais, Brazil
(Received 15 August 2003; revised manuscript received 20 January 2004; published 25 May 2004)

The interference of photons with the same polarization generated by spontaneous parametric down conversion in a Hong-Ou-Mandel interferometer, after one of them passed through a symmetric cavity, is demonstrated experimentally. In the regime where the cavity length is larger than the one-photon coherence length, photon coalescence and anticoalescence interference is observed. We show that by changing the cavity length, coincidence peaks can be transformed in dips and vice versa, even though the coherence length of the photon wave packet is smaller than the cavity length. The photon pair coalescence or anticoalescence at the beam splitter can be controlled by changing the length of the cavity.

DOI: 10.1103/PhysRevA.69.053817

PACS number(s): 42.50.-p, 03.65.-w, 03.67.-a

One of the most important resources used for entanglement studies and quantum interference experiments has been the production of photon pairs generated by spontaneous parametric down conversion (SPDC). In the process of SPDC, a pump (p) laser beam incident upon a nonlinear crystal creates a pair of entangled photons, usually called signal (s) and idler (i) [1]. Although SPDC was first proposed theoretically by Klyshko in 1969 [2] and demonstrated experimentally by Burnham and Weinberg in 1970 [3], idler and signal quantum interference in a beam splitter was first demonstrated by Hong, Ou, and Mandel (HOM) in 1987 [4]. In their experiment, signal and idler photons with the same frequency and polarization are combined in a 50/50 beam splitter (BS) and the output photons are detected at the exit of the beam splitter by coincidence detection. When the idler and the signal paths are made equal from the crystal to the BS, no coincidence counts are detected at the BS output. This null result is due to a destructive interference between the two indistinguishable paths that the pair can follow to produce coincidences: Both photons are reflected at the BS or both photons are transmitted. Since there is a $\pi/2$ phase shift for the photon reflection probability amplitude at the BS, the probability amplitudes for these two indistinguishable events cancel out, and zero coincidence, or a minimum, is measured [5]. Therefore, at this point the photon pair goes to either exit (photon coalescence [6]).

Since its first demonstration, the HOM interferometer has been used in many applications: Bell inequality tests [7], tests of nonlocality [8], photon tunneling measurements [9], dispersion cancelation [10], quantum-eraser demonstration [11], quantum teleportation [12], and multimode quantum interference [13]. More recently, the HOM interferometer has found applications in the rapidly developing field of quantum information. Knill *et al.* [14] showed theoretically that scalable quantum computation can be done with only linear optical components. Propositions for optical quantum gates using linear optical components were already made and some of them use the HOM interferometer for the construction of a controlled-NOT (CNOT) gate [15]. The HOM inter-

ferometer has extrapolated its fundamental research character to become an useful tool.

In order to enhance its potential applications, a better control of the photon pair behavior in the HOM interferometer is desirable. For example, photon pair anticoalescence or a peak in the coincidences as a function of the signal-idler path difference has been obtained by preparing the photon pair in a singlet polarization state [16]. The coalescence/anticoalescence control can also be observed by playing with the polarization state together with the spatial part of the two-photon state [13]. In this paper, we present a new way to control the two-photon HOM interference, making it constructive, destructive, or even suppressing it. This control is achieved locally by means of a Fabry-Perot cavity introduced in one of the paths. The character of the interference is determined by the cavity length.

The experimental apparatus, represented in Fig. 1, consists of an HOM interferometer [4], and a cavity formed by two planar dielectric beam splitters $BS2$ and $BS3$ with 50% of their reflectance around 826 nm. A 5-mm-long LiIO_3 crystal, oriented for type-I phase matching, is pumped by a 70 mW krypton-ion laser oscillating at 413.1 nm. A violet photon from the pump beam is down converted into two

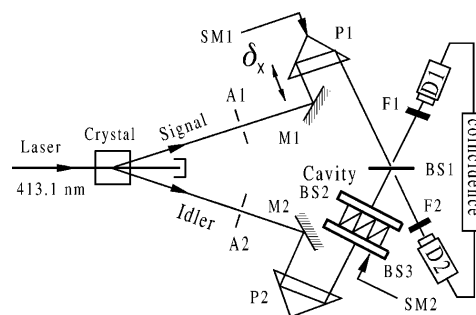


FIG. 1. Experimental scheme of a Hong-Ou-Mandel interferometer in which a Fabry-Pérot cavity is inserted in one arm. The symbols BS , M , P , SM , A , and D label beam splitters, mirrors, prisms, step motors, apertures, and detectors, respectively.

*Electronic address: spadua@fisica.ufmg.br

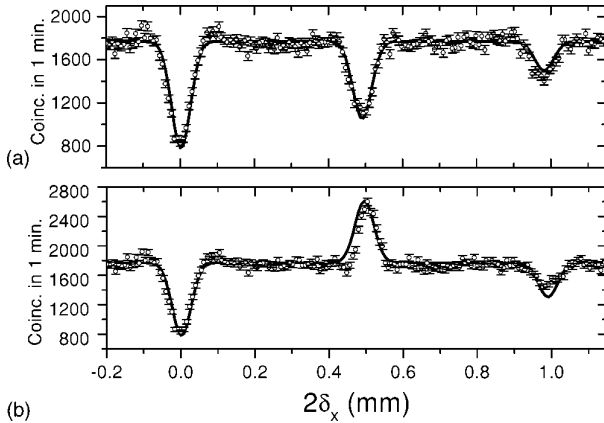


FIG. 2. (a) Coincidence counting vs. relative optical-path difference in the interferometer. δ_x is the spatial displacement of the prism $P1$. A displacement δ_x in prism $P1$, corresponds to a $2\delta_x$ change in the signal photon path. The dip at zero corresponds the typically HOM interference. The second dip displays interference between nonoverlapping wave packets separated by a distance equal to the length of the cavity, 0.49 mm in our experiment. The last dip appears when we advanced the idler packet by twice the cavity length (0.98 mm). (b) Coincidence counting vs relative optical-path difference in the interferometer. Observe the interference pattern at 0.49 mm in (a). By fixing the signal arm and changing the cavity length by $\lambda_0/2$ this dip alters to coincidence peak as shown above. Continuous lines are the theoretical curves obtained from Eq. (1) and multiplied by 0.75, to account for the imperfect visibility due to interferometer imperfections (see text).

conjugate infrared photons at 826.2 nm (signal and idler), so that energy and momentum are conserved during this process. Both signal and idler photons are horizontally polarized and propagate at about 2.5° from the pump beam direction. The apertures $A1$, $A2$ with 1.4 mm diameter select out the desired degenerate photon pairs. Both beams are directed by the prisms $P1$, $P2$, and mirrors $M1$, $M2$ into the two input ports of the 50/50 beam splitter $BS1$. The signal beam passes through a compensating glass plate and the idler beam passes through the 0.49-mm-long cavity. Both detectors $D1$ and $D2$ are avalanche photodiodes operating in photon counting mode and $F1$, $F2$ are 8 nm interference filters. The prism $P1$ was fixed over a translation stage displaceable by a step motor $SM1$ used to change the signal path length. The step motor $SM2$ has 50 nm of resolution, and it is used for moving the mirror $BS3$ for changing the cavity length L .

In the regime where the cavity is much larger than the coherence length of the photon we can speak about the round-trip number of the idler wave packet, moving into the cavity. When a cavity is put into the HOM interferometer, two interference types can appear. The typical HOM interference occurs when identical single photons, entering from opposite input ports of the 50/50 beam splitter, overlap perfectly, and the wave packets leave at the same exit port in the same momentum state. Both Figs. 2(a) and 2(b) show it through the coincidence dip at the zero optical-path difference. This is due to the signal-idler wave packets' overlap, in which the idler photon pass through the cavity without any reflection. On the other hand, the HOM picture for interfer-

ence should be generalized to take into account the experimental results that appear far from the zero optical-path difference. Now, the separation between the conjugate photons at $BS1$ is much larger than its coherence length, and photon pairs no longer overlap at the beam splitter. Nevertheless, both the coincidence peak and dip at position 0.49 mm and the coincidence dips at 0.98 mm show an interference led by this nonoverlapping aspect (see Ref. [17]). For understanding this interference effect, we must see the photon pair as a whole, and since the photon pairs are detected in coincidences, the biphoton coherence length is the important parameter and it must be larger than the cavity length [19]. The interference arises from the pairs of Feynman's paths [5] that lead to the same indistinguishable coincidence detection outcome. For explaining the experimental results, we define the quantities τ_c , δ , and δ_x . τ_c is the idler transit time ($\tau_c=L/c$, L = cavity length, and c is the light velocity in the cavity). The signal path length is varied in the interferometer by displacing the prism $P1$ by $\delta_x=c\delta/2$, where δ is the signal time delay introduced by $P1$. A displacement δ_x in the prism $P1$, corresponds to the $2\delta_x$ change in the signal photon path length.

Consider, for example, the idler photon at the cavity entrance advanced by τ_c , with respect to the signal photon, due to the increase of the signal path with the displacement of the trombone prism $P1$ (Fig. 1). Figures 3(a) and 3(b) show two pairs of indistinguishable paths that lead to the same coincidence result at the $BS1$ exit. In Fig. 3(a), $D2$ detects one of the photons of the pair before $D1$, by a time difference of τ_c . The two alternative paths are: (1) the advanced idler (by τ_c) passes the cavity and is reflected by $BS1$, arriving earlier in $D2$ than the signal in $D1$; (2) the initially advanced idler becomes delayed by τ_c in relation to the signal, after it reflects twice in the cavity. The signal photon then arrives earlier at $D2$ than the idler at $D1$, after being transmitted through $BS1$. In Fig. 3(b), it is shown as the reverse situation. Now, $D1$ detects one of the photons of the pair before $D2$, by the same time difference τ_c . The pair of indistinguishable paths that lead to interference are complementary to the ones shown in Fig. 3(a). Moreover, by fixing the idler and signal arms and varying the cavity length by a quantity much smaller than the photon coherence length l_{coh} , we can obtain either a coincidence dip or a peak. Interference fringes in Fig. 4(a) show smooth transitions from dip to peak passing through the coincidence flat (dashed line) within the same photon-photon interference condition, that is, $\lambda_0/2 \ll l_{coh}$. The coincidence dip indicates that the photon pairs exit preferentially at the same output port when the length of cavity is a multiple integer of λ_0 [1]. On the other hand, if the last length differs by $\lambda_0/2$, the photons exit in opposite output ports as shown by the coincidence peak. Therefore, by changing the cavity length, we can control the photon-pair coalescence or anticoalescence with some precision. The photon anticoalescence interference effects have been proposed recently as a signature of the two-photon entanglement [6].

Finally, let us analyze the third dip at 0.98 mm in both Figs. 2(a) and 2(b). Suppose that the idler photon at the cavity entrance is advanced by $2\tau_c$ with respect to the signal photon, due to the increase of the signal path with the dis-

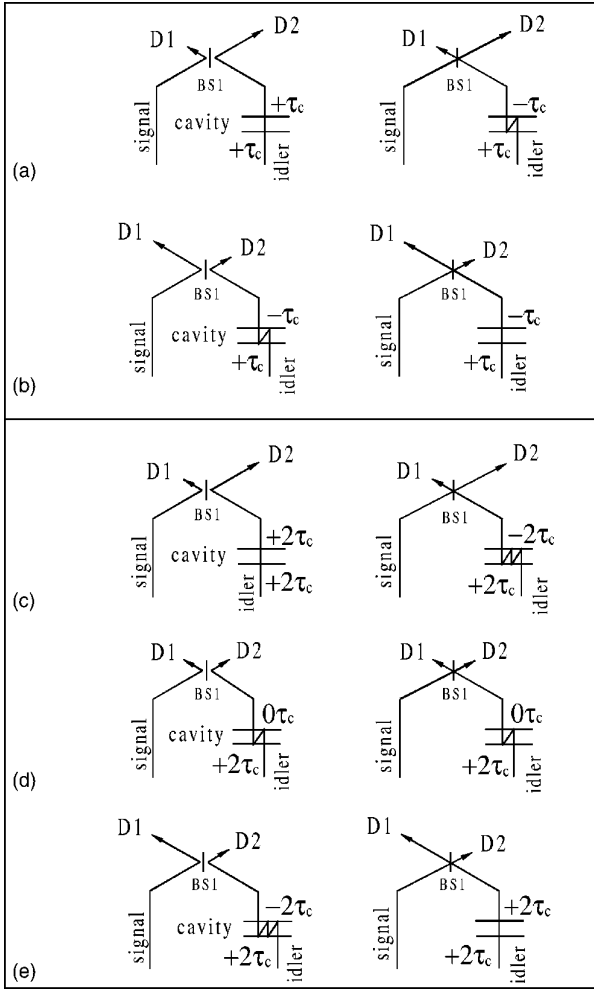


FIG. 3. (a), (b) Feynman's path diagrams for the passage modes of the cavity for reflection-reflection and transmission-transmission processes at the $BS1$ associated with the peak or dip at 0.49 mm; $D1$ and $D2$ are the photodetectors, and $+\tau_c$ and $-\tau_c$ indicate advanced- and delay-idler wave packets, compared with its twin. (c), (d), (e) Feynman's path diagrams for the third interference dip at 0.98 mm. The probabilities of each diagram pair above can be obtained from the terms of Eq. (2).

placement of the trombone prism $P1$ (Fig. 1). Now, there are three pairs of indistinguishable paths which lead to interference. In Figs. 3(c) and 3(e), $D2$ ($D1$) detects one of the photons of the pair before $D1$ ($D2$), by a time difference of $2\tau_c$. The two indistinguishable possibilities shown in Figs. 3(c) and 3(e) are similar to the ones shown in Figs. 3(a) and 3(b), respectively. Here, the idler photon reflects four times in the cavity, instead of two times as before. The third pair of indistinguishable paths is shown in Fig. 3(d). In this case, the idler photon, after being reflected two times in the cavity, superposes at $BS1$ with the signal photon, being either reflected or transmitted through $BS1$ and being detected at the same time. The indistinguishable paths pairs shown in Figs. 3(c) and 3(e) lead to either a dip or peak coincidence [see the second term in Eq. (5)] whereas the indistinguishable paths

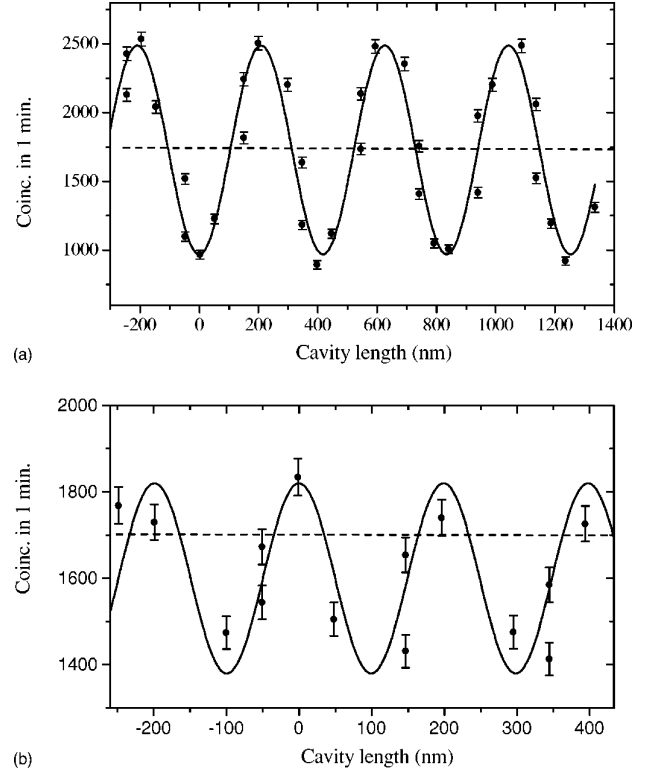


FIG. 4. (a) Coincidences vs cavity length. The interference fringes illustrate the dip-peak transitions at 0.49 mm shown in Fig. 2. (b) Coincidences vs cavity length. The interference fringes illustrate the dip-peak transitions at 0.98 mm shown in Fig. 2. Continuous lines in (a) and (b) are the theoretical fits of the experimental data by using Eqs. (4) and (5), respectively.

shown in Fig. 3(d), originate only a coincidence dip [(see the first term in Eq. (5)]. The peak amplitude is, therefore, smaller than the dip one. Figure 4(b) shows asymmetric fringes that lead to dip-peak transitions.

We are interested in the changing of the fourth-order correlation function when the Fabry-Perot cavity is put into the idler path in the HOM interferometer. The theoretical model concerning this will be published elsewhere. Consider the state of the light emitted from the SPDC process when a pump beam of frequency ω_0 is converted in two degenerate photons of frequency $\omega_0/2$ [1]. By including the cavity [18] in the HOM interferometer, the coincidence counting rate at the $BS1$ exit can be shown to be

$$\begin{aligned}
 R_c(t) = & T^2 \sum_k R^{2k} \{1 - \exp[-\Delta\omega^2(2k\tau_c - \delta)^2]\} \\
 & - T^2 \sum_{n \neq m} R^{(n+m)} \cos[\omega_0\tau_c(m-n)] \\
 & \times \exp[-\Delta\omega^2[(n+m)\tau_c - \delta]^2], \quad (1)
 \end{aligned}$$

in the regime where the cavity length L is much larger than the coherence length of down-converted photon, i.e., $\tau_c \gg 1/\Delta\omega$, where $\Delta\omega$ is the bandwidth of the interference fil-

ter; n , m , and k are positive integers and $T(R)$ is the transmissivity (reflectivity) of each cavity mirror.

In Eq. (1), when $\delta \neq 2k\tau_c$ and $\delta \neq (m+n)\tau_c$, all exponential vanishes and R_c can be reduced to

$$R_c \simeq T^2 \sum_k R^{2k} = T^2 + T^2 R^2 + \dots, \quad (2)$$

that is independent of δ . When the signal time delay δ is an integer multiple of τ_c , i.e., $l\tau_c$ (l integer), we obtain null terms in Eq. (1). Let us consider a signal time delay close to zero ($\delta \approx 0$). Thus, the last summation vanishes in Eq. (1) and R_c is

$$R_c \simeq T^2 \sum_{k \neq 0} R^{2k} + T^2 (1 - e^{-\Delta\omega^2 \delta^2})_{\delta=0}. \quad (3)$$

The second term in Eq. (3) corresponds to the passage of the idler wave packet through the cavity without reflections. The first dip in both Figs. 2(a) and 2(b) show this interference. The summation in Eq. (3) comes from distinguishable coincidence events within the same coincidence time window. Now, let us assume $\delta = \tau_c$. Thus, the possible terms different from zero are $\{(m, n)\} = \{(0, 1), (1, 0)\}$. In this case, there is not the wave packet overlapping in the HOM-type interference at the BS1, as discussed above. The first exponential in Eq. (1) becomes negligible and Eq. (1) can be written as

$$R_c \simeq T^2 \sum_k R^{2k} - 2T^2 R \cos k_0 L, \quad (4)$$

where $\omega_0 \tau_c = k_0 L = 2\pi L / \lambda_0$, so that k_0 and λ_0 are the wave number and wavelength of the pump beam. Consider the dip and the peak-coincidence counting rate in Figs. 2(a) and 2(b) at position 0.49 mm. The second term in Eq. (4) is responsible for this interference pattern: a dip for destructive and a peak for constructive interference. Finally, let us assume $\delta = 2\tau_c$. In this case, we can separate the “nonoverlapping” terms $\{(m, n)\} = \{(0, 2), (2, 0)\}$, and the “overlapping” term $k=1$ from the summation in Eq.(1). The rest of the terms vanishes. For this reason, the coincidence counting rate can be written as

$$R_c \simeq T^2 \sum_{k \neq 1} R^{2k} - 2T^2 R^2 \cos 2k_0 L, \quad (5)$$

where the maximum amplitude of dip occurs at $L = l\lambda_0/2$ (l integer) and at $L = (2l+1)\lambda_0/4$ for a peak. For predicting the visibility of the first dip ($\delta=0$) we make as follows: Eq. (2) represents the total number of photons that are transmitted by the cavity. This gives the rate of coincidences out of the interference region [plateau in Figs. 2(a) and 2(b)]. This rate

is 1 if there is no cavity. For the used cavity (mirrors with $T=R=1/2$), this rate is 1/3 [see Eq. (2)]. When ($\delta=0$), only photons that do not reflect in the cavity mirrors (probability T^2 of being transmitted through the cavity) interfere at BS1. Because the interference of the above photons is completely destructive, the expected visibility is $T^2/T^2 \sum_k R^{2k} = (1/4)/(1/3) = 3/4$ [20]. The other interference regions (all the other dips or peaks) have variable visibilities, depending on the ratio between L and λ [21]. We did not obtain experimentally the visibility equal to 3/4 for the first dip, as expected theoretically, because the interferometer alignment was not perfect. The maximum visibility obtained experimentally in the HOM without the cavity was 0.75. The continuous line in Fig. 2 is the theoretical curve obtained from Eq. (1). Since the maximum visibility obtained experimentally without the cavity was 0.75, we multiplied the theoretical coincidence rate by $0.75 \times N$, where N is the average number of coincidences of the plateau (~ 1800 coincidences in Fig. 2). Of course, we also make fine changes (of the order of λ) in the cavity length L around 0.49 mm in Eq. (1), looking for the best matching between the theory and the experimental data. We see that the theory explains qualitatively and quantitatively the experimental data.

In conclusion, we have studied experimentally the interference of photons generated by spontaneous parametric down conversion in a Hong-Ou-Mandel interferometer, with a symmetric cavity inserted in one of the arms. In the regime where the cavity length is larger than the one-photon coherence length, photon coalescence and anticoalescence interference is observed. By detecting the photon pairs in coincidence at the exit of the beam splitter as a function of the relative optical-path difference in the interferometer, a dip is detected when the idler-signal path difference is equal to zero; dips or peaks occur when the path difference is an integer multiple of the cavity length. We show that by changing the cavity length, we can transform peaks in dips and vice versa, even though the coherence length of the photon wave packet is smaller than the cavity length. The periodicity of the dip-peak oscillation is measured and it is the pump beam wavelength for a signal-idler path difference that is equal to the cavity length. Half of the pump wavelength for the path differences equal to two times the cavity length. The photon pairs can exit at the same (or at different) beam-splitter ports, being controlled by the changing of the cavity length.

This work was supported by CNPq, Pronex-Semicondutores, and Milênio-Informação Quântica. We would like to thank S. P. Walborn, C. Saavedra, and A. Delgado for very useful discussions.

- [1] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
 [2] D. N. Klyshko, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **55**, 1006 (1968) [JETP Lett. **28**, 522 (1969)].
 [3] D. C. Burnham and D. L. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **25**, 84

- (1970).
 [4] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **37**, 2044 (1987).
 [5] Z. Y. Ou and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **57**, 66 (1989); A. M. Steinberg and R. Y. Chiao, Phys. Rev. A **49**, 3283 (1994).

- [6] Kaige Wang and Shiyao Zhu, *Europhys. Lett.* **64**, 22 (2003).
- [7] Z. Y. Ou and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 50 (1991); Y. Shih and C. Alley, *ibid.* **61**, 2921 (1988).
- [8] J. Torgerson, D. Branning, C. H. Monken, and L. Mandel, *Phys. Lett. A* **204**, 323 (1995).
- [9] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 708 (1993).
- [10] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2421 (1992).
- [11] P. G. Kwiat, A. M. Steinberg, and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. A* **45**, 7729 (1992).
- [12] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3891 (1998).
- [13] S. P. Walborn, A. N. Oliveira, S. Pádua, and C. H. Monken, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 143601 (2003).
- [14] E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn, *Nature (London)* **409**, 46 (2001).
- [15] T. B. Pittman, B. C. Jacobs, and J. D. Franson, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 257902 (2002); J. L. O'Brien, G. J. Pryde, A. G. White, T. C. Ralph, and D. Branning, *Nature (London)* **426**, 264 (2003); H. Becker, K. Schmid, W. Dultz, W. Martienssen, and H. Roskos, in *Quantum Information Processing*, edited by Gerd Leuchs and Thomas Beth (Wiley-VCH, Weinheim, 2003), p. 301.
- [16] D. Boschi, F. De Martini, and G. Di Giuseppe, in *Quantum Interferometry*, Proceedings of an Adriatico Workshop, Trieste, March 1996, edited by F. De Martini, G. Denardo, and Y. Shih (VCH, Weinheim, 1996), p. 135.
- [17] T. B. Pittman, D. V. Strekalov, A. Migdall, M. H. Rubin, A. V. Sergienko, and Y. H. Shih, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1917 (1996).
- [18] C. H. Monken and G. A. Barbosa, *Opt. Commun.* **99**, 152 (1993).
- [19] D. V. Strekalov, T. B. Pittman, and Y. H. Shih, *Phys. Rev. A* **57**, 567 (1998).
- [20] The dip(peak) visibility was defined here as $R_c^{max} - R_c^{min} / R_c^{max}$ ($R_c^{max} - R_c^{min} / R_c^{min}$), where R_c^{max} and R_c^{min} are the maximum and minimum coincidence rates, respectively.
- [21] Notice that the maximum visibility of the second dip (peak) is equal to the visibility of the first dip, i.e., $3/4$, when $\cos k_0 L = 1(-1)$, for $T=R=1/2$. See Eqs. (2) and (4). The maximum visibility of the third dip (peak) is $9/16$ ($3/16$) when $\cos 2k_0 L = 1(-1)$. See Eqs. (2) and (5).

Hong-Ou-Mandel interferometer with cavities: Theory

C. Olindo, M. A. Sagiolo, C. H. Monken, and S. Pádua*

Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Caixa Postal 702, 30123-970 Belo Horizonte MG, Brazil

A. Delgado

Center for Quantum Optics and Quantum Information, Departamento de Física, Universidad de Concepción, casilla 160-C, Concepción, Chile

(Received 21 August 2005; revised manuscript received 13 February 2006; published 19 April 2006)

We study the number of coincidences in a Hong-Ou-Mandel interferometer exit whose arms have been supplemented with the addition of one or two optical cavities. The fourth-order correlation function at the beam splitter exit is calculated. In the regime where the cavities lengths are larger than the one-photon coherence length, photon coalescence and anticoalescence interference is observed. Feynman's path diagrams for the indistinguishable processes that lead to quantum interference are presented. The construction of an optical XOR gate is discussed as an application for the Hong-Ou-Mandel interferometer with two cavities.

DOI: [10.1103/PhysRevA.73.043806](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.043806)

PACS number(s): 42.50.Dv, 03.65.Ud

I. INTRODUCTION

Spontaneous parametric down-conversion (SPDC) is an important resource for quantum optics studies. In the process of SPDC, a pump (p) laser beam incident upon a nonlinear crystal creates a pair of entangled photons, usually called signal (s) and idler (i) [1]. SPDC was first proposed theoretically by Klyshko in 1969 [2] and demonstrated experimentally by Burnham and Weinberg in 1970 [3]. Idler and signal quantum interference in a beam splitter was first demonstrated by Hong, Ou, and Mandel (HOM) in 1987 [4]. In their experiment, signal and idler photons with the same frequency and polarization are combined in a 50-50 beam splitter (BS) and the output photons are detected at the exit of the beam splitter by coincidence detection. When the idler and the signal paths are made equal from the crystal to the BS, no coincidence counts are detected at the BS output. This null result is due to a destructive interference between the two indistinguishable paths that the pair can follow to produce coincidences: both photons are reflected at the BS or both photons are transmitted. Since there is a $\pi/2$ phase shift for the photon reflection probability amplitude at the BS, the probability amplitudes for these two indistinguishable events cancel out and zero coincidence or a minimum is measured [5]. Therefore at this point the photon-pair goes to either exit (photon coalescence [6]).

Optical cavities have been used in SPDC quantum optics experiments recently with the objective of demonstrating the control of photon coalescence and anticoalescence via a cavity and the production of time entangled photon pairs. Sagiolo, Olindo, Monken, and Pádua [7] have demonstrated experimentally the interference of photons with the same polarization generated by spontaneous parametric down-conversion in a Hong-Ou-Mandel interferometer, after one of them passed through a symmetric cavity, i.e., a cavity whose mirrors have equal reflectivity. In the regime where the cav-

ity length is larger than the one-photon coherence length, photon coalescence and anticoalescence interference is observed. It is shown that by changing the cavity length, coincidence peaks can be transformed into dips and vice versa, even though the coherence length of the photon wave packet is smaller than the cavity length. With a different goal, Lu, Campbell, and Ou [8,9] have generated mode-locked two-photon states by using a Fabry-Pérot cavity for filtering the wide band light produced by SPDC. The comblike time correlation of the photon pairs is observed with a HOM interferometer at the exit of the Fabry-Pérot cavity. Zavatta, Viciani, and Bellini [10] have generated comblike two-photon entangled states by inserting in one of the arms of a HOM interferometer a Fabry-Pérot cavity. In 1996, Dusek [11] proposed an experiment, using entangled photons produced in SPDC, in which a filter providing spectral selection is placed in the route of one photon of the pair. If this photon is detected behind it, then interference is observed in a Mach-Zehnder interferometer placed in the route of the other photon of the pair, even if the optical path difference through the interferometer exceeds the one-photon coherence length. In 2003, Dusek *et al.* [12] experimentally demonstrated the Dusek's predictions about the interferences in the Mach-Zehnder interferometer using a narrow spectral filter. They also demonstrated narrow time correlations for the same photon-pair source using the Hong-Ou-Mandel interferometer. In this paper, we analyze theoretically a modified version of the Hong-Ou-Mandel interferometer. The optical paths along the arms of the interferometer contain two Fabry-Pérot cavities, each one in an arm of the interferometer. These cavities allow the partial transmission and reflection of photons on each arm leading to a deviation of the number N_c of coincidences from the standard Hong-Ou-Mandel interferometer.

II. EXPERIMENTAL SETUP

The experimental apparatus, represented in Fig. 1, consists of an HOM interferometer [4] and two symmetric cavi-

*Electronic address: spadua@fisica.ufmg.br

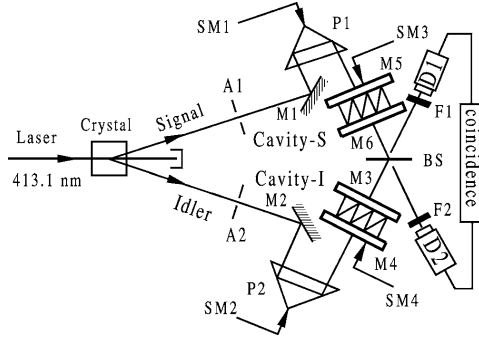


FIG. 1. Experimental scheme of a Hong-Ou-Mandel interferometer in which two Fabry-Pérot cavities are inserted in the arms of the interferometer. The symbols BS, M, P, SM, A, and D label beam splitters, mirrors, prisms, step motors, apertures, and detectors, respectively.

ties formed by two planar dielectric mirrors M5 and M6 (M3 and M4). A 5 mm long LiIO_3 crystal, oriented for type-I phase matching, is pumped by a cw laser oscillating at 413.1 nm. A violet photon from the pump beam is down-converted into two conjugate infrared photons at 826.2 nm (signal and idler), so that energy and momentum are conserved during this process. Both signal and idler photons are horizontally polarized and propagate at some angle θ from the pump beam direction. The apertures A1, A2 select out the desired degenerate photon pairs. Both beams are directed by the prisms P1, P2, and mirrors M1, M2 into the two input ports of the 50-50 beam splitter (BS). Each beam passes through symmetric Fabry-Perot cavities. Both detectors D1 and D2 are avalanche photodiodes operating in photon counting mode and F1, F2 are equal interference filters centered at 826.2 nm. The coincidence time window is assumed to be 5 ns (typical of commercial coincidence systems). The prism P1 (P2) is fixed over a translation stage displaceable by a step motor SM1 (SM2) used to change the signal (idler) path length. The step motor SM3 (SM4) is used for moving the mirror M5 (M4) for changing the cavity length L .

III. ANALYTICAL RESULTS

We assume that the photon pairs are generated not collinearly (Fig. 1) by the SPDC process with the crystal cut for type-I phase matching. In this case, signal and idler photons are generated with the same linear polarization. Suppose we select the idler and signal photons with the same frequency and equal to half of the frequency of the laser pump beam (degenerate case): $\omega_i = \omega_s = \omega_p/2$. We also assume that the photon beams are selected by small diameter apertures (see Fig. 1) such that the propagation directions are well selected. In this case, the wave-vector dispersion can be neglected and the momentum conservation in the SPDC process considered perfect. We also assume that the pump laser beam is a coherent monochromatic beam, with no dispersion in fre-

quency. The photons are then described by the state [1,4]

$$|\Psi\rangle = \int_0^{\omega_p} d\omega \phi(\omega) |1, \omega\rangle_i |1, \omega_p - \omega\rangle_s, \quad (1)$$

where the function $\phi(\omega)$ is centered in $\omega_p/2$. In practice $\phi(\omega)$ is defined by interference filters in front of the detectors (see Fig. 1). The state $|1, \omega\rangle_i (|1, \omega_p - \omega\rangle_s)$ describes one photon of frequency ω ($\omega_p - \omega$) in the idler (signal) beam. The contribution from the vacuum cancels out in a photocoincidence experiment as we have described above, so its contribution has been neglected in Eq. (1). The state $|\Psi\rangle$ can also be cast in the form

$$|\Psi\rangle = \int_0^{\omega_p} d\omega \phi(\omega) a_i^\dagger(\omega) a_s^\dagger(\omega_p - \omega) |\text{vacuum}\rangle, \quad (2)$$

where the operators $a_i^\dagger(\omega)$ and $a_s^\dagger(\omega_p - \omega)$ create photons of frequency ω and $\omega_p - \omega$ in the idler and signal modes, respectively.

After being generated, the photons of each beam interact with a Fabry-Perot cavity. The photons can be transmitted or reflected by the cavities. The action of these cavities is similar to a beam splitter [13], that is

$$a_i^\dagger(\omega) = \mu_i(\omega) a_{i,r}^\dagger(\omega) + \nu_i(\omega) a_{i,t}^\dagger(\omega), \quad (3)$$

$$a_s^\dagger(\omega) = \mu_s(\omega) a_{s,r}^\dagger(\omega) + \nu_s(\omega) a_{s,t}^\dagger(\omega), \quad (4)$$

where the operators $a_{i,r}^\dagger(\omega)$ and $a_{i,t}^\dagger(\omega)$ ($a_{s,r}^\dagger(\omega)$ and $a_{s,t}^\dagger(\omega)$) describe reflected and transmitted photons of the incoming idler (signal) beam with frequency ω . The coefficients $\mu_i(\omega)$, $\nu_i(\omega)$, $\mu_s(\omega)$, and $\nu_s(\omega)$ are the cavities transmission and reflection coefficients for idler and signal beam, respectively. Thereby, the state $|\tilde{\Psi}\rangle$ of the beams after the interaction with the cavities is given by the expression

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}\rangle = & \int_0^{\omega_p} d\omega \phi(\omega) [\mu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega) |1, \omega\rangle_{i,r} |1, \omega_p - \omega\rangle_{s,t} \\ & + \mu_i(\omega) \nu_s(\omega_p - \omega) |1, \omega\rangle_{i,r} |1, \omega_p - \omega\rangle_{s,r} \\ & + \nu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega) |1, \omega\rangle_{i,t} |1, \omega_p - \omega\rangle_{s,t} \\ & + \nu_i(\omega) \nu_s(\omega_p - \omega) |1, \omega\rangle_{i,t} |1, \omega_p - \omega\rangle_{s,r}]. \end{aligned} \quad (5)$$

The transmitted beams through the cavities are directed to a 50-50 beam splitter (BS). The two output beams are then detected in coincidence at the BS exit ports. The state of the beams after the cavities, Eq. (5), is a superposition of four mutually orthogonal states. These states describe the reflection or transmission of photons in each beam by the cavities. Consequently, only the transmitted photons of both beams can be detected at the exit of the BS.

The field operators at the detectors of the interferometer are [4]

$$E_1^+(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[E_{i,t}^+(t - \tau_1 - \delta_i) + iE_{s,t}^+(t - \tau_1 - \delta_s)],$$

$$E_2^+(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[E_{s,t}^+(t - \tau_1 - \delta_s) + iE_{i,t}^+(t - \tau_1 - \delta_i)], \quad (6)$$

where τ_1 is the propagation time from mirrors to detectors and δ_i and δ_s are the time delays in the idler and signal beams due to a modification of their optical paths (P1 and P2 can be displaced, see Fig. 1).

The field operators at the BS input are given by

$$E_{i,t}^+(t) = \int d\omega e^{-i\omega t} a_{i,t}(\omega),$$

$$E_{s,t}^+(t) = \int d\omega e^{-i\omega t} a_{s,t}(\omega). \quad (7)$$

The probability $P(\tau)$ of detecting one photon on a detector in the time t and a second photon in the other detector, in the time $t + \tau$ is

$$P(\tau) = \text{Tr}[\rho E_1^-(t) E_2^-(t + \tau) E_2^+(t + \tau) E_1^+(t)], \quad (8)$$

where the density operator ρ describes the state of the electromagnetic field before the beam splitter [1]. The number N_c of coincidences can be obtained by integrating this probability in the time interval τ of the coincidence window. See Appendix A for the details of the calculation. We finally obtain for the number N_c of coincidences the expression

$$N_c = \pi K (T_i T_s)^2 \sum_{m,n,l,q} R_s^{m+l} R_i^{n+q} \times \cos[\omega_p \tau_{cs}(m-l)] \cos[\omega_p \tau_{ci}(n-q)] \times [e^{-\Delta\omega^2[\tau_{cs}(m-l) - \tau_{ci}(n-q)]^2} - e^{-\Delta\omega^2[\tau_{cs}(m+l) - \tau_{ci}(n+q) - \delta]^2}], \quad (9)$$

IV. HOM WITH ONE CAVITY

Here we study interferometric properties of a HOM interferometer with one cavity. To obtain the number of coincidences N_c in this particular case we make $R_s=0$, $T_s=1$, and $\tau_{cs}=0$ in Eq. (9). Thereby, we consider a single cavity in the path of the idler beam. The number of coincidences becomes

$$N_c = T^2 \sum_{n,q} R^{n+q} \cos[\omega_p \tau_c(n-q)] [e^{-\Delta\omega^2 \tau_c^2 (n-q)^2} - e^{-\Delta\omega^2 [\tau_c(n+q) - \delta]^2}], \quad (10)$$

with $T=T_i$, $R=R_i$, $\tau_c=\tau_{ci}$, and the constant πK removed because we are interested in the coincidence rate, not in the number of coincidences itself. In particular, making $T=1$, $R=0$, and $\tau_c=0$ we recover from Eq. (10) the well-known expression for the number of coincidences of the HOM interferometer without cavities, that is

$$N_c = 1 - e^{-\Delta\omega^2 \delta^2}. \quad (11)$$

Before proceeding with the analysis of Eq. (10) we make a change of variables. This equation becomes

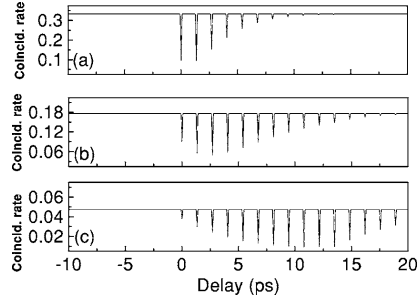


FIG. 2. In all three graphics the wavelength of the degenerate photons (λ) was 826.2 nm and the interference filters in front of the detectors had bandwidth ($\Delta\lambda$) equal to 8 nm. In all three cases, L was equal to 0.404 838 mm (to achieve the resonant situation). In (a) $R=0.5$, in (b) $R=0.7$, in (c) $R=0.9$, and $R+T=1$ (no losses).

$$N_c = T^2 \sum_{n,q} R^{n+q} \cos\left[\frac{2\pi L}{\lambda_p}(n-q)\right] e^{-[2\pi\Delta\lambda/L\lambda^2(n-q)]^2} - T^2 \sum_{n,q} R^{n+q} \cos\left[\frac{2\pi L}{\lambda_p}(n-q)\right] e^{-(2\pi\Delta\lambda/\lambda^2)^2 [L/c(n+q) - \delta]^2}, \quad (12)$$

where λ is the central wavelength of the twin photons wave packets, λ_p is the pump wavelength, $\Delta\lambda$ is the wavelength bandwidth of the interference filter placed in front of the detectors, c is the speed of light, and L is the length of the cavity.

Figures 2–4 show the behavior of the number of coincidences, according to Eq. (12), as a function of the delay δ . The values for the different parameters entering in this equation were taken from the experimental data reported by Sagiore *et al.* [7]. In Fig. 2, the length L of the cavity was chosen as an integer multiple of half of the central wavelength of the photon wave packet. In this case, the curve is composed of a mesa function intersected by equally separated valleys. In Fig. 3, the length of the cavity was chosen as a half integer multiple of half of the central wavelength of

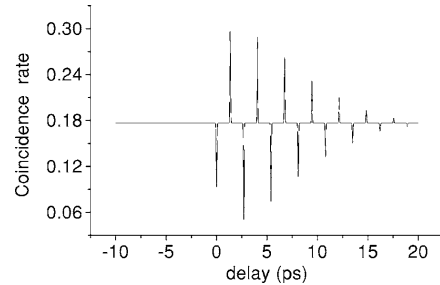


FIG. 3. The setup parameters are $\lambda=826.2$ nm, $\Delta\lambda=8$ nm, $R=0.7$, and $L=0.405\ 044\ 7$ mm.

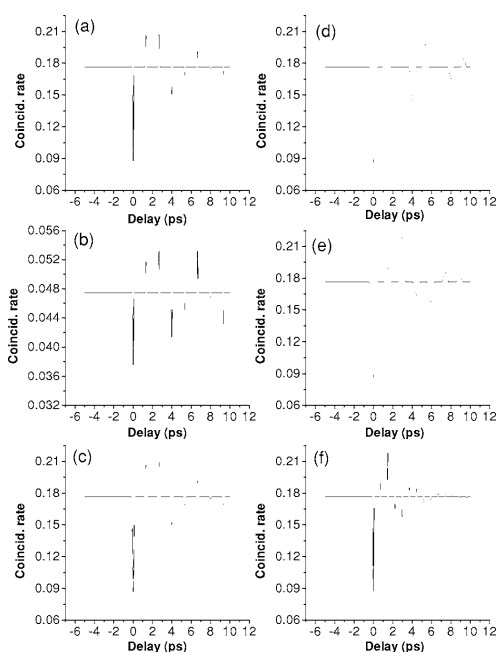


FIG. 4. We begin in (a) with $\lambda=826.2$ nm, $\Delta\lambda=8$ nm, $L=0.4$ mm, and $R=0.7$. In (b), we change only R to 0.9. In (c), we return to $R=0.7$, maintaining all the other parameters the same, and change $\Delta\lambda$ to 4 nm. In (d), in relation to (c), we only change λ to 1200 nm. In (e), we made L equal to 0.444 44 mm. Finally in (f), we change λ to 600 nm and L to 0.222 22 mm.

the photon wave packet. Here, the curve is composed of a mesa function intersected by alternated valleys and peaks. We refer to these cases as resonant and antiresonant, respectively. A different situation is depicted in Fig. 4(a) which shows the number of coincidences when the conditions for resonance or antiresonance are not fulfilled. In this particular case peaks and valleys do not alternate following a regular pattern. Figure 4 also shows the behavior of the number of coincidences when we change the value of the other parameters entering in Eq. (12). In Fig. 4(b), the value of R has been increased from 0.7 to 0.9. The only noticeable effect is a change in the value of the mesa function and on the amplitudes of valleys and peaks. The positions of peaks and valleys remains unchanged. In Fig. 4(c), we change $\Delta\lambda$ from 8 to 4 nm leaving the other parameters as in Fig. 4(b). In this case, the width of valleys and peaks increases, leaving the other features of the number of coincidences unchanged. Figure 4(d) shows the modification of the number of coincidences when the wavelength is changed from 826.2 to 1200 nm. Notice that some of the valleys and peaks appeared to be absent. In Fig. 4(e), the parameters are as in Fig. 4(c) with $L=0.444$ 44 mm. Finally, in Fig. 4(f) L and λ were changed while keeping the ratio L/λ fixed. The number of coincidences behaves like in Fig. 4(e).

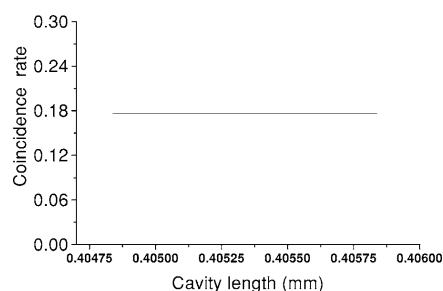


FIG. 5. Graphic showing coincidence rate vs cavity length. We begin with $L=0.404$ 838 mm and fix the delay in 0.667 33 ps, which is approximately in the middle between the first and the second interferences (platform), and vary L just a few wavelengths. The parameters are $R=0.7$, $\lambda=826.2$ nm, and $\Delta\lambda=8$ nm.

The value of the mesa function can be obtained easily and its detailed derivation is shown in Appendix B. In Fig. 5, we fix the delay δ in a value which is out of the interference region, $\delta \neq \frac{L}{c}(n+q)$, vary L just a few wavelengths, and count the coincidences. The resultant graphic leads to the conclusion that for the regime in which the longitudinal coherence length of the photons is smaller than the cavity length, the coincidences do not depend on L . In fact, the coincidence rate is proportional to the total number of photons that crosses the cavity (see the explanation below). Figure 6 shows the number of coincidences as a function of the reflectance R when δ is out of some interference region. The curve coincides exactly with the function $T^2/(1-R^2)$ [14]. This result shows that, when the longitudinal coherence length $\lambda^2/\Delta\lambda$ of the single photons is much smaller than the cavity length L , the photons act like particles with probability T for crossing an obstacle and probability R to be reflected, i.e., there is no interference between a “photon with itself,” as there would be in a traditional Fabry-Perot cavity.

The origin of peaks and valleys can be illustrated by considering the diagrams depicted in Fig. 7. Below, Fig. 7(j)

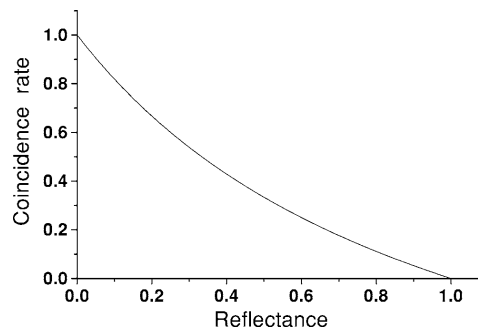


FIG. 6. Graphic showing the coincidence rate vs reflectance (R). We put $L=0.4$ mm, the delay in 0.667 33 ps, which is approximately in the middle between the first and the second interferences (platform); $\lambda=826.2$ nm and $\Delta\lambda=8$ nm.

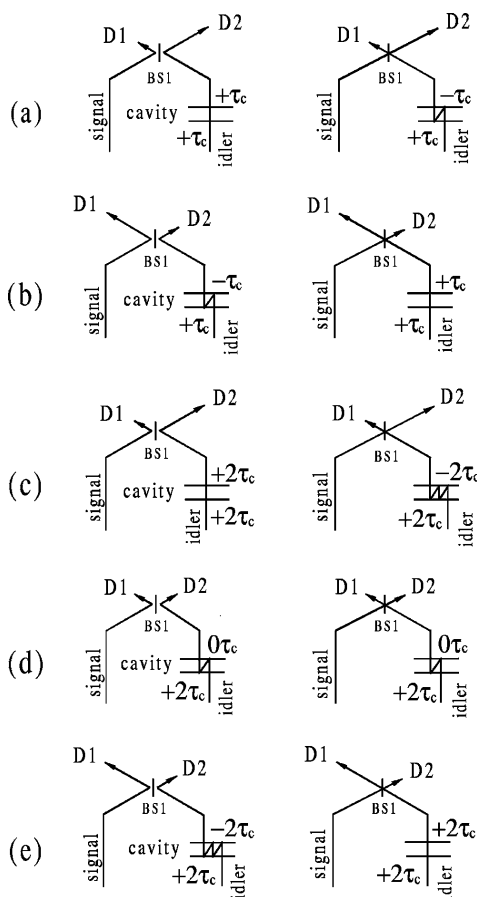


FIG. 7. (a) and (b) are Feynman's path diagrams associated with the second interference region ($\delta=\tau_c$). (c)–(e) are Feynman's path diagrams associated with the third interference region ($\delta=2\tau_c$). In the text, Fig. 7(j) refers to the diagram shown on the left side of Fig. 7(j) while Fig. 7(j') refers to the diagram shown on the right side of Fig. 7(j), with $j=a, b, c, d, e$.

refers to the diagram shown on the left side of Fig. 7 while Fig. 7(j') refers to the diagram shown on its right side, with $j=a, b, c, d, e$. Figure 7(a) shows the signal beam with a delay $\delta=\tau_c$ which is produced by changing the length of the optical path (see Fig. 1). The photons of the idler beam are transmitted through the cavity without being reflected by the mirrors of the cavity. Both beams are reflected at the beam splitter. The overall effect is that detector D2 detects a photon a time τ_c before detector D1. The situation depicted in Fig. 7(a') is slightly different but the overall effect remains unchanged. In this case photons of the idler beam reflect twice inside the cavity but photons of both beams are transmitted at the beam splitter, so that detector D2 detects the

photons a time τ_c before detector D1. The situation is similar in the cases of Figs. 7(b) and 7(b'), the only difference is that detector D1 detects photons a time τ_c before detector D2. These four cases, which are partially distinguishable due to their different probabilities, contribute to the same peak or valley at $\delta=\tau_c$ in the coincidence detection. The interference at $\delta=2\tau_c$ can also be explained in these terms. Figures 7(c), 7(c'), 7(d), 7(d'), 7(e), and 7(e') show all the possible processes contributing in this case. Notice that in the process depicted in Fig. 7(d) the photons overlap at the beam splitter, but in the other processes there is no such overlap between the photons. When $\delta=0$, the only possible process is the overlap between the photons at the beam splitter caused by the direct crossing of photons of the idler beam through the cavity. The nonoverlapping interferences presented in the diagrams of Fig. 4 are possible just because: (i) The electronic time window for the coincidence is about 5 ns, while each transit of a photon inside the cavity is of the order of a few ps. (ii) You cannot know when a photon is created in the crystal, SPDC is a spontaneous process. The interfering processes that occur without the overlapping of the photons are responsible for the peaks (anticoalescence) in the coincidence pattern.

Figure 7 shows why the interferences always happen when δ is a multiple of τ_c . By analyzing Eq. (10) we deduce the coincidence rate value for each interference region:

$$N_c(j) = \frac{T^2}{1-R^2} - T^2 \sum_{n,q;n+q=j-1} R^{n+q} \cos[\omega_p \tau_c (n-q)], \quad (13)$$

where j is the order of the interference region ($j=1$ for the first, in $\delta=0$; $j=2$ for the second, in $\delta=\tau_c$; $j=3$ for the third, in $\delta=2\tau_c$, and so on) and the summation is for all $n+q=j-1$.

Returning to Fig. 2, recall that with each increase of R , the deepest valley grows farther from the origin. The following is a brief explanation of such behavior. Observe that in Fig. 7, parts (a) and (b) are associated with the second interference region ($\delta=\tau_c$), and parts (c)–(e) are associated with the third one ($\delta=2\tau_c$). We could write out parts (f)–(i) associated with the fourth interference region, if we want to, and so on. Notice that increasing the order of the interference region, the number of pairs of interfering processes increases the same quantity. On the other hand, the probability of occurrence of these processes decreases. The case shown in Fig. 2 is the resonant one, when all the interference contributions are destructive. To see this, take Eq. (10) and make $\omega_p \tau_c = E\pi$, where E is an even number (resonance condition). By analyzing the same Eq. (10), we conclude that the probability of an occurring determinate pair of the interference process is proportional to $R^{(j-1)}$, where R is the cavity mirror reflectance and j is the order of the interference region. The number of pairs of interference processes in each interference region is j , so the total probability of an occurring determinate interference region is proportional to $jR^{(j-1)}$ or $P(j,R) \propto jR^{(j-1)}$. The highest $P(j,R)$ corresponds to the deepest valley (in the resonant case). Once we have $P(j,R)$ it is easy to show that its highest value occurs for high j , when R in-

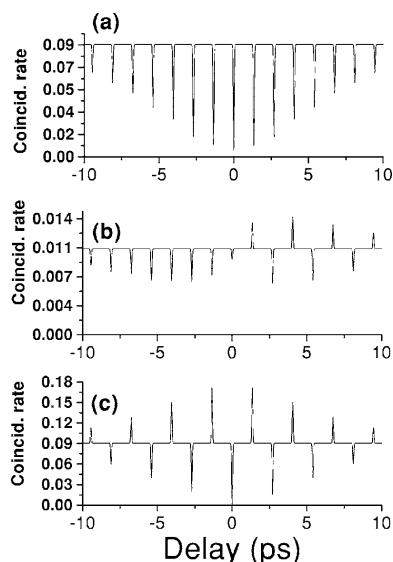


FIG. 8. In this graphic, both cavities have the parameters: $R_i = R_s = 0.7$, $\lambda_i = \lambda_s = 826.2$ nm, and $\Delta\lambda = 8$ nm. In (a), $L_i = L_s = 0.404838$ mm, both cavities are resonant with the twin photons. In (b), $L_s = 0.404838$ mm (resonant), $L_i = 0.4050447$ mm (antiresonant). In (c), $L_s = L_i = 0.4050447$ mm, both cavities are antiresonant.

increases. This highest value for $P(j,R)$ when $R \rightarrow 1$ is when $j \rightarrow \infty$.

V. HOM WITH TWO CAVITIES

Now we will show some simulations using the complete Eq. (9) with the constant πK removed. Figure 8 shows the interference patterns when two cavities are present in the interferometer.

Notice that in Figs. 8(a) and 8(c), we have symmetric patterns with respect to the origin, but we do not have this symmetry in Fig. 8(b). Notice also that there are interferences for negative delays, not only a platform as in the one cavity problem (Figs. 2–4). Finally, observe that in Figs. 8(a) and 8(c), when $\delta = 0$, we obtain 100% of coalescence. This totally destructive interference is not possible when the longitudinal coherence of the photons is much smaller than the cavity length, using only one cavity.

In the one cavity case, the platform does not depend on L and has a special meaning (Fig. 5). How would this be with two cavities? See Fig. 9. In Fig. 9(a), we begin with $L_i = 0.404838$ mm (resonant) and vary it just a few wavelengths, passing by antiresonances, intermediate cases, coming back to resonances and so on. Notice that now, unlike Fig. 5, the platform depends on L . Its value is maximum exactly when L_i is resonant (because L_s is resonant too) and is minimum when L_i is antiresonant. With two cavities the

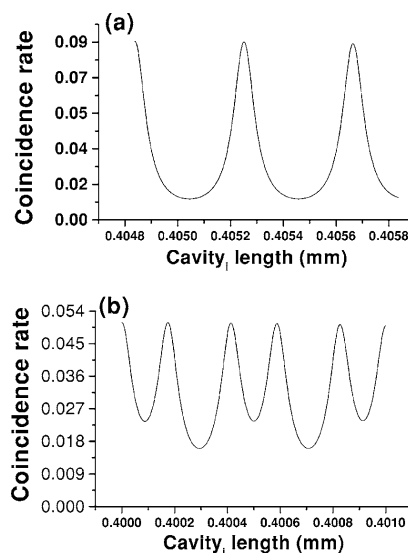


FIG. 9. Graphics showing coincidence rate vs L_i . All the other parameters are kept fixed: $R_i = R_s = 0.7$, $\lambda = 826.2$ nm, $\Delta\lambda = 8$ nm, $delay = 0.66733$ ps (platform), in (a) $L_s = 0.404838$ mm (resonant), in (b) $L_s = 0.4$ mm (neither resonant nor antiresonant).

platform does not mean the percentage of crossing photons anymore, i.e., you never are free of interferences, any place you put the delay, including the platform, you have some kind of interference (this will be better understood when we study the Feynman's diagrams of the paths interference for the two cavities). The distance between consecutive maximums is $\lambda/2$. In Fig. 9(b), the only difference from Fig. 9(a) is that we fixed L_s in $L_s = 0.4$ mm (neither resonant nor antiresonant) and began with $L_i = 0.4$ mm. The procedure was the same (to vary L_i just a few wavelengths). Now the distance between consecutive minimums is $\lambda/4$.

We can explain the platform variation with L by analyzing Fig. 10. The reasons for the presence of peaks and dips in the interference pattern of the HOM interferometer with two cavities are the same as those presented in Fig. 7: you do not know what photon arrives in a detector first. But the coincidence rate platform with just one cavity does not depend on L (Fig. 5). When you have two cavities, the platform itself depends on L (Fig. 9). We could explain this dependence in a general fashion. However, to make the explanation easier to understand, we took a particular case. In Fig. 10, $\tau_{cs} \approx \tau_{ci}$ or $\tau_{cs} = \tau_{ci}$, so we call them τ_c . We began with photon idler advanced by $0.5\tau_c$ with respect to photon signal (we made use of prisms P1 and P2 to do so, see Fig. 1). In Fig. 10(a), both photons can cross their cavities directly or both can reflect inside the cavities twice before crossing them or (this is not shown here) they can reflect inside their cavities four times before crossing the cavities and so on; in all these cases the photon idler still would be $0.5\tau_c$ advanced. In Fig. 10(b), because of the different amounts of reflections be-

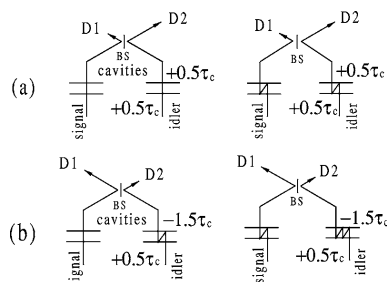


FIG. 10. Feynman's diagrams for two cavities, explaining the platform variation with L . Photon idler begins $0.5\tau_c$ advanced in relation to photon signal. In (a), it remains $0.5\tau_c$ advanced, after both twin photons cross their cavities. In (b), photon signal, after both photons cross their cavities, is advanced $1.5\tau_c$ in relation to photon idler.

tween the photons inside their cavities, the photon signal arrives $1.5\tau_c$ before the photon idler in BS, and this can happen in various different ways. If the difference between the clicks at the detectors is $0.5\tau_c$, $2.5\tau_c$, $4.5\tau_c$, and so on, you know that it was the photon idler that arrived first; if the difference is $1.5\tau_c$, $3.5\tau_c$, $5.5\tau_c$, and so on, you know that it was the photon signal that arrived first. Unlike the interferences that cause the peaks and dips, when you do not know with certainty what photon arrives first at a detector, in this kind of interference (that makes the platform vary) you know what photon arrives first, but you do not know which process has happened before its arrival. To sum up: in Fig. 10, all processes in line (a) interfere, all processes in line (b) interfere, and so on, this is the very reason for the fluctuation of the platform. Up to now we have treated only cases where the cavities had the same or nearly the same L ($L_i=L_s$ or

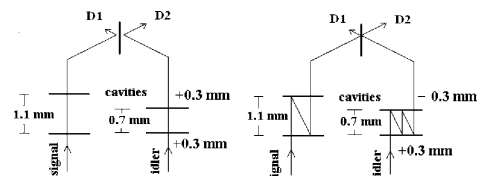


FIG. 12. Feynman's diagrams illustrating the interference in the displacement position $\delta=0.3$ mm that appears in Fig. 11(c). Photon idler is initially 0.3 mm ahead of photon signal.

$L_i \approx L_s$). To finalize this section, we will show some cases where the cavities have very different lengths, see Fig. 11. To facilitate the visualization of the coincidence patterns we put some arrows spaced by the lengths of the cavities in the graphics of Fig. 11. Notice that in Fig. 11(a), the interferences always occur in displacements spaced by 0.3 mm. This is because the length of one cavity, L_i , is just a multiple of the other, L_s ($L_i=0.6$ mm and $L_s=0.3$ mm). In Fig. 11(b), the interferences again occur in steps of 0.3 mm because the lengths of the cavities ($L_i=0.9$ mm and $L_s=1.5$ mm) have a common factor of 0.3 mm. Finally, in Fig. 11(c), the lengths of the cavities do not have a common factor ($L_i=0.7$ mm and $L_s=1.1$ mm). We placed an upper arrow in this graphic in the 0.3 mm displacement position and we explain below the origin of the interference in such a place apparently unexpected. Following the convention of the diagrams in Fig. 7, we made a diagram to illustrate this interference (Fig. 12). Figure 11(d) was made only for a question of completeness. Because in Fig. 11(a) we begin with $L_i/L_s=2$, in (b) $L_i/L_s=0.9/1.5=3/5$ (the lengths had common factors), in (c) the widths did not have common factors, but their ratio is still a rational number, $L_i/L_s=0.7/1.1$, finally in (d) L_i/L_s is an irrational number.

VI. APPLICATIONS: CONTROLLED NOT GATE

The setup shown in Fig. 1 is suitable for applications in information problems. For example: we can construct an optical XOR gate [15], in a similar way as shown in Refs. [16,17]. In their case the control was made by changing electro-optically the birefringence of two quartz plates with different lengths inserted at each arm of the HOM. In our case the control is made by changing the length of the cavities. The HOM interference pattern changes if the length of each cavity is an integer multiple of half wavelength ("resonance") or a semi-integer multiple of half wavelength ("antiresonance"). The logical bits are encoded in the resonances/antiresonances of the cavities with the photon central wavelength similarly to the phases of photon 1 and 2 in the setup of Becker *et al.* [16]. Calculations concerning two cavities, each one in one of the arms of the interferometer, showed above the behavior of the coincidence counts. Consider that the cavities are nearly equal in length. If both central wavelength of idler and signal photons are resonant or antiresonant with their cavities, you have a symmetric interference pattern, in relation to $\delta=0$, in the coincidence counts. But if one of the photons is resonant with its cavity and the

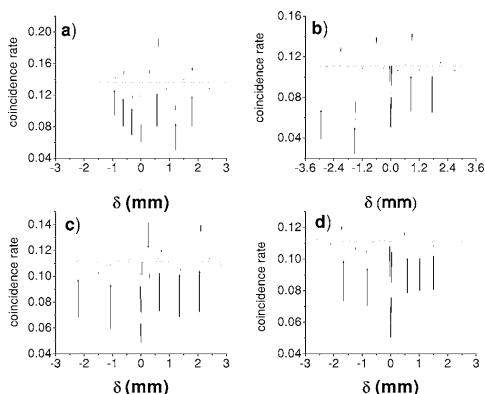


FIG. 11. Graphics showing coincidences vs displacement in mm. In (a) $L_i=0.6$ mm while $L_s=0.3$ mm, in (b) $L_i=0.9$ mm and $L_s=1.5$ mm, in (c) $L_i=0.7$ mm and $L_s=1.1$ mm, in (d) $L_i=0.5$ mm and $L_s=0.6\sqrt{3}$ mm. The other parameters are $\lambda=826.2$ nm and $\Delta\lambda=12$ nm.

TABLE I. Table showing the behavior of a logical XOR operation. “res” stands for resonant, “ant” for antiresonant, “SY” stands for the symmetric coincidence pattern, and “AS” for the asymmetric one.

| Idler | | Signal | | Results | |
|-------|--------|--------|--------|---------|-----|
| Bit | Cavity | Bit | Cavity | Pattern | Bit |
| 0 | res | 0 | res | SY | 0 |
| 0 | res | 1 | ant | AS | 1 |
| 1 | ant | 0 | res | AS | 1 |
| 1 | ant | 1 | ant | SY | 0 |

other is antiresonant with its, an asymmetrical coincidence pattern is obtained (in relation to $\delta=0$), see Fig. 8. Now let us identify input bit 0 with the resonance and input bit 1 with the antiresonance. We also identify output bit 0 with the symmetric pattern in the coincidences and output bit 1 with the asymmetric pattern. With these identifications, it is easy to simulate a logical XOR operation, see Table I.

Table I shows that we can choose photon idler as the control and photon signal as the target, for simulating the XOR gate, or vice versa. This interchanging between control and target is very useful in constructing logical circuits. As an alternative, if we prefer, instead of using as outgoing bits, SY standing for bit 0 and NS for bit 1 (see Table I last column) we can also use the value of the platform (see Fig. 8), all you have to do is to stop the delay in the platform, e.g., $\delta=0.66733$ ps in that case, calibrate your system, and you are ready to use the platform value as outgoing bits, for example, the highest value can stand for bit 0 and the lowest one for bit 1. It must be clear that this setup is not suitable for building a quantum XOR gate. The patterns used to encode the outgoing bits are built up by several counts. This XOR optical gate is not quantum, it is classical.

VII. CONCLUSION

We started making the calculations for the coincidences at the exit of the Hong-Ou-Mandel interferometer with two symmetric cavities, each one placed in one arm of the interferometer. Using the resulting equation we made some simulations. It was easy to reduce the general equation for two cavities to the more specific one for just one cavity. One interesting result in this case (one cavity) is the observation of coalescence and anticoalescence, both behaviors are determined by the rate between the cavity length and the wavelength of the photon that crosses it, although the photon coherence length is smaller than the cavity length. The main conclusion concerning anticoalescence is that this is only possible due to the nonoverlapping processes happening from the second interference region [see Figs. 7(a) and 7(b)] in ahead. If the photons overlap in the beam splitter (having the same polarization, frequency, and transverse mode) they necessarily leave the beam splitter by the same output, giving origin to no coincidence. In the two cavities case, there are two results that deserve to be pointed out. The first is the null result for the coincidences when $\delta=0$ [Figs. 8(a) and

8(c)], which was not possible in the one cavity case. The second is the variation of the platform with the changing in the cavities lengths, which is due to a new kind of interference that did not happen in the one cavity case. Finally, we show that it is possible to construct a XOR gate using our apparatus.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by CNPq, FAPEMIG, Pronex-Semicondutores, Instituto do Milênio de Informação Quântica and Instituto do Milênio de Nanociência. We would like to thank S. P. Walborn for pointing out Ref. [16]. A.D. was supported by Fundación Andes and Milenio ICM P02-49F.

APPENDIX A: CALCULATION OF THE NUMBER OF COINCIDENCES

Due to the purity of the two-photon state, the probability $P(\tau)$ can be calculated as [1]

$$P(\tau) = \langle \Psi_1 | E_1^-(t) E_2^-(t + \tau) E_2^+(t + \tau) E_1^+(t) | \Psi_1 \rangle, \quad (A1)$$

where the state

$$|\Psi_1\rangle = \int_0^{\omega_p} d\omega \phi(\omega) \mu_{i(\omega)} \mu_{s(\omega_p - \omega)} |1, \omega\rangle_{i,i} |1, \omega_p - \omega\rangle_{s,t} \quad (A2)$$

describes photons transmitted through both cavities.

Let us now consider the state $E_2^+(t + \tau) E_1^+(t) |\Psi_1\rangle$. Thereafter the probability $P(\tau)$ can be calculated, according to Eq. (A1), as the square of the norm of this state. The action of the operator $E_2^+(t + \tau) E_1^+(t)$ onto the state $|\Psi_1\rangle$ is

$$\begin{aligned} & E_2^+(t + \tau) E_1^+(t) |\Psi_1\rangle \\ &= \frac{1}{2} E_{s,t}^+(t + \tau - \tau_1 - \delta_s) E_{i,i}^+(t - \tau_1 - \delta_i) |\Psi_1\rangle \\ &+ \frac{i}{2} E_{s,t}^+(t + \tau - \tau_1 - \delta_s) E_{s,t}^+(t - \tau_1 - \delta_s) |\Psi_1\rangle \\ &+ \frac{i}{2} E_{i,i}^+(t + \tau - \tau_1 - \delta_i) E_{i,i}^+(t - \tau_1 - \delta_i) |\Psi_1\rangle \\ &- \frac{1}{2} E_{i,i}^+(t + \tau - \tau_1 - \delta_i) E_{s,t}^+(t - \tau_1 - \delta_s) |\Psi_1\rangle. \quad (A3) \end{aligned}$$

The first term on the right-hand side of the previous equation can be cast in the form

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \int \int d\omega d\omega' d\omega'' e^{-i\omega'(t + \tau - \tau_1 - \delta_s)} e^{-i\omega''(t - \tau_1 - \delta_i)} \\ & \times \phi(\omega) \mu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega) a_{i,i}(\omega'') a_{i,i}^\dagger(\omega) a_{s,t}(\omega') \\ & \times a_{s,t}^\dagger(\omega_p - \omega) |\text{vacuum}\rangle. \quad (A4) \end{aligned}$$

The operators $a_{i,i}(\omega'')$ and $a_{s,t}(\omega')$ entering in Eq. (A4) destroy the vacuum state unless the conditions $\omega'' = \omega$ and $\omega' = \omega_p - \omega$ hold. In this case, we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} E_{s,i}^+(t + \tau - \tau_1 - \delta_s) E_{i,s}^+(t - \tau_1 - \delta_i) |\Psi_1\rangle \\ &= \frac{1}{2} \int d\omega e^{-i(\omega_p - \omega)(t + \tau - \tau_1 - \delta_s)} e^{-i\omega(t - \tau_1 - \delta_i)} \\ & \quad \times \phi(\omega) \mu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega) |\text{vacuum}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

In a similar way it can be shown that

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} E_{i,s}^+(t + \tau - \tau_1 - \delta_i) E_{s,i}^+(t - \tau_1 - \delta_s) |\Psi_1\rangle \\ &= \frac{1}{2} \int d\omega e^{-i\omega(t + \tau - \tau_1 - \delta_i)} e^{-i(\omega_p - \omega)(t - \tau_1 - \delta_s)} \\ & \quad \times \phi(\omega) \mu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega) |\text{vacuum}\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

with the remaining terms entering in Eq. (A3) being zero. Thereby, we have

$$\begin{aligned} & E_2^+(t + \tau) E_1^+(t) |\Psi_1\rangle \\ &= \frac{1}{2} e^{-i\omega_p(t - \tau_1 - \delta_s)} \\ & \quad \times \left\{ e^{-i\omega_p \tau} \int_0^{\omega_p} d\omega e^{i\omega \tau} e^{i\omega(\delta_r - \delta_s)} \phi(\omega) \mu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega) \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{\omega_p} d\omega e^{-i\omega \tau} e^{i\omega(\delta_r - \delta_s)} \phi(\omega) \mu_i(\omega) \mu_s(\omega_p - \omega) \right\} \\ & \quad \times |\text{vacuum}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

A further simplification of this expression can be obtained by a variable change and a global phase omission. We obtain for Eq. (A3)

$$\begin{aligned} E_2^+(t + \tau) E_1^+(t) |\Psi_1\rangle &= \int_{-\omega_p/2}^{\omega_p/2} d\omega (e^{i\omega \tau} - e^{-i\omega \tau}) e^{i\omega(\delta_r - \delta_s)} \\ & \quad \times \phi\left(\omega + \frac{\omega_p}{2}\right) \\ & \quad \times \mu_i\left(\omega + \frac{\omega_p}{2}\right) \mu_s\left(\frac{\omega_p}{2} - \omega\right) |\text{vacuum}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

The transmission coefficients μ_s and μ_i entering in this state are given by

$$\mu_j(\omega) = t_j^2 \sum_{m=0}^{\infty} r_j^{2m} e^{2im\omega \tau_{cj}}, \quad (\text{A9})$$

where $j=i,s$ denotes the *idler* or *signal* beam. t_j and r_j are the transmission and reflection coefficients of the cavity, respectively, and $\tau_{cj} = L_j/c$, with L_j being the j cavity length, c is the light velocity, and m is a positive integer. This particular form of the μ_j coefficient arises from considering the cavities as two planar dielectric mirrors with the same reflection and transmission coefficients (r_j and t_j) separated by a distance L_j . Each time a monochromatic plane wave of frequency ω enters the cavity there are multiple reflections and

transmissions of the field on the mirrors. Each time the electromagnetic field of the wave crosses a mirror of the cavity, the field is multiplied by t_j and each time it is reflected, it is multiplied by r_j . We must also consider the field propagation between the mirrors (here is the dependence of μ_j on the product of ω and L_j). Finally, adding all the contributions of the electromagnetic fields that are transmitted by the cavity we get $E_i = \mu_i E_0$, where E_i is the transmitted field and E_0 the incident one.

The probability $P(\tau)$ is then given by

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \frac{K(T_i T_s)^2}{4} \sum_{m,n,l,q} R_s^{m+l} R_i^{n+q} e^{i\omega_p \tau_{cs}(m-l)} e^{i\omega_p \tau_{ci}(n-q)} \\ & \quad \times \int_{-\omega_p/2}^{\omega_p/2} \int_{-\omega_p/2}^{\omega_p/2} d\omega d\omega' e^{i\omega(2m\tau_{cs} - 2n\tau_{ci} - \delta)} e^{-i\omega'(2l\tau_{cs} - 2q\tau_{ci} - \delta)} \\ & \quad \times \phi\left(\omega + \frac{\omega_p}{2}\right) \phi^*\left(\omega' + \frac{\omega_p}{2}\right) (e^{i\tau(\omega - \omega')} - e^{i\tau(\omega + \omega')}) \\ & \quad - e^{-i\tau(\omega + \omega')} + e^{-i\tau(\omega - \omega')}, \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

where $\delta = \delta_r - \delta_s$ is the difference of the optical paths of both beams, $T_j = |t_j|^2$ and $R_j = |r_j|^2$ are the transmittance and reflectance of the j cavity, respectively; K is proportional to the detectors' efficiency, and m, n, l , and q are positive integers.

Now we integrate over τ in the coincidence time interval. But this time interval is much larger than all the other times involved in the experiment, so we can integrate over τ from $-\infty$ to ∞ . After integrating over τ and assuming symmetry of $\phi(\omega + \frac{\omega_p}{2})$ around $\frac{\omega_p}{2}$, the number N_c of coincidences becomes

$$\begin{aligned} N_c &= \pi K (T_i T_s)^2 \sum_{m,n,l,q} R_s^{m+l} R_i^{n+q} \cos[\omega_p \tau_{cs}(m-l)] \\ & \quad \times \cos[\omega_p \tau_{ci}(n-q)] \int_{-\omega_p/2}^{\omega_p/2} d\omega \left| \phi\left(\omega + \frac{\omega_p}{2}\right) \right|^2 \\ & \quad \times (\cos\{2\omega[\tau_{cs}(m-l) - \tau_{ci}(n-q)]\} \\ & \quad - \cos\{2\omega[\tau_{cs}(m+l) - \tau_{ci}(n+q)] - \delta\}). \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

A further simplification can be achieved considering a Gaussian distribution of width $\Delta\omega$ for the function $\phi(\omega + \frac{\omega_p}{2})$, supposed sufficiently narrow in the interval $(-\frac{\omega_p}{2}, \frac{\omega_p}{2})$ such that the limits of integration can be extended to $(-\infty, \infty)$. Thereby, we finally obtain for the number N_c of coincidences the expression

$$\begin{aligned} N_c &= \pi K (T_i T_s)^2 \sum_{m,n,l,q} R_s^{m+l} R_i^{n+q} \cos[\omega_p \tau_{cs}(m-l)] \\ & \quad \times \cos[\omega_p \tau_{ci}(n-q)] (e^{(-\Delta\omega)^2[\tau_{cs}(m-l) - \tau_{ci}(n-q)]^2} \\ & \quad - e^{(-\Delta\omega)^2[\tau_{cs}(m+l) - \tau_{ci}(n+q) - \delta]^2}). \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

APPENDIX B: CALCULATION OF THE PLATFORM FOR THE ONE-CAVITY HOM INTERFERENCE PATTERN

We consider N_c as a function of the delay δ . Thus the first term entering in Eq. (12) turns out to be a constant. Since, for

the values of the parameters that we consider, the ratio $2\pi\Delta\lambda L/\lambda^2$ is larger than 30 the exponential function in the first term of Eq. (12) approximately vanishes for values of $n-q \neq 0$. Thereby, Eq. (12) becomes

$$N_c = \frac{T^2}{1-R^2} - T^2 \sum_{n,q} R^{n+q} \cos\left(\frac{2\pi L}{\lambda_p}(n-q)\right) \times e^{-(2\pi\Delta\lambda L/\lambda^2)^2 [Lc(n+q) - \delta]^2}. \quad (\text{B1})$$

The second term in Eq. (12) is composed of a sum over unnormalized Gaussian functions $e^{-(\delta-\tilde{\delta})^2/2\sigma^2}$ centered at $\tilde{\delta}_{n+q} = (L/c)(n+q)$ with standard deviation $\sigma = \lambda^2/(2\sqrt{2}\pi\Delta\lambda)$, which is independent of n and q . Let us note that the distance between the centers of two consecutive Gaussian functions is given by L/c . The overlap between two consecutive Gaussian functions is given by

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\delta e^{-(\delta-\tilde{\delta}_{n+q}/\sqrt{2}\sigma)^2} e^{-(\delta-\tilde{\delta}_{n+q+1}/\sqrt{2}\sigma)^2} = \sqrt{\pi}\sigma e^{-(\tilde{\delta}_{n+q}-\tilde{\delta}_{n+q+1}/2\sigma)^2} \quad (\text{B2})$$

being its value tenth of picoseconds for the value of the parameters here considered. Thus it is possible to distinguish consecutive Gaussian functions. These Gaussian functions lead to the peaks and valleys in Figs. 2–4. Peaks or valleys

appear for values of δ fulfilling the condition

$$\delta = \frac{L}{c}(n+q) \quad (\text{B3})$$

with a maximum amplitude given by

$$N_c(j) = \frac{T^2}{1-R^2} - T^2 \sum_{n,q;n+q=j-1} R^{n+q} \cos\left(\frac{2\pi L}{\lambda_p}(n-q)\right), \quad (\text{B4})$$

where j is the order of the peak or valley ($j=1$ for the first, in $\delta=0$; $j=2$ for the second, in $\delta=\tau_c$; $j=3$ for the third, in $\delta=2\tau_c$, and so on) and the summation is for all $n+q=j-1$.

Let us now consider, for instance, the condition for the resonant case. In this case, the cosine function entering in Eq. (B4) is always one. Thereby, the amplitude of the valleys becomes

$$N_c(j) = \frac{T^2}{1-R^2} - T^2 R^{j-1} j. \quad (\text{B5})$$

In the antiresonant case, the amplitude of the peaks and valleys is given by

$$N_c(j) = \frac{T^2}{1-R^2} - T^2 (-R)^{j-1} j. \quad (\text{B6})$$

-
- [1] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1995).
- [2] D. N. Klyshko, *Sov. Phys. JETP* **28**, 522 (1969).
- [3] D. C. Burnham and D. L. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 84 (1970).
- [4] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987).
- [5] H. Klar, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 66 (1986); A. M. Steinberg and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. A* **49**, 3283 (1994).
- [6] Kaige Wang and Shiyao Zhu, *Europhys. Lett.* **64**, 22 (2003).
- [7] M. A. Sagiorgo, C. Olindo, C. H. Monken, and S. Pádua, *Phys. Rev. A* **69**, 053817 (2004).
- [8] Y. J. Lu, R. L. Campbell, and Z. Y. Ou, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 163602 (2003).
- [9] Y. J. Lu, F. Huang, and Z. Y. Ou, *Mod. Phys. Lett. B* **19**, 269 (2005).
- [10] A. Zavatta, S. Viciani, and M. Bellini, *Phys. Rev. A* **70**, 023806 (2004).
- [11] M. Dusek, *Czech. J. Phys.* **46**, 921 (1996).
- [12] J. Soubusta, J. Perina, Jr., M. Hendrych, O. Haderka, P. Trojek, and M. Dusek, *Phys. Lett. A* **319**, 251 (2003).
- [13] C. H. Monken and G. A. Barbosa, *Opt. Commun.* **99**, 152 (1993).
- [14] Let us see where this function comes from. The probability of one photon being transmitted through a cavity is T and being reflected is R . Summing over all the possibilities (a photon crossing the cavity directly; reflecting inside twice before crossing it; reflecting four times and so on), and obtaining the total probability for crossing the photons (P): $P = T^2 + T^2 R^2 + T^2 R^4 + T^2 R^6 + \dots = \frac{T^2}{1-R^2}$.
- [15] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Communication and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, England (2000).
- [16] H. Becker, K. Schmid, W. Dultz, W. Martienssen, and H. Roskos, in *Quantum Information Processing*, edited by Gerd Leuchs and Thomas Beth (Wiley-VCH, Weinheim, 2003), p. 301.
- [17] Grant R. Fowles, *Introduction to Modern Optics* (Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, 1975).

Apêndice B

Artigo submetido 1

Measure of the Tunnelling Time of a Single Photon Through a Fabry-Perot Cavity

C. Olindo, M. A. Sagiuro, A. Delgado, C. H. Monken, and S. Pádua

21 de junho de 2006

The displacement of the peak of a wavepacket that crosses an empty Fabry-Perot cavity is measured by using photon pairs generated by parametric down conversion, a Hong-Ou-Mandel (HOM) interferometer and coincidence detection. The Fabry-Perot cavity distorts the photon wavepacket. The HOM interferometer is a good tool to map this distortion. We discuss the corrections which must be made in the two-photon interference results, in order to achieve the true data researched. Even in the absence of active absorbers media or media with inverted atomic populations, superluminal-like effects connected with the tunnelling phenomena are observed. An interpretation of the experimental results in the causality frame is given.

B.1 Introduction

In the beginning of the last century, Sommerfeld and Brillouin [1] theoretically concluded that a wavepacket represents a signal, only if it possesses a well defined wave front in the propagation direction, and this wave front cannot propagate with a velocity higher than c , the speed of light in the vacuum. They investigated the response of a semi-infinite anomalous dispersion medium to an incident sinusoidal signal whose the amplitude is zero before some initial time, and unity thereafter. A Gaussian pulse passing through a slab of some linear but dispersive medium having an absorption line in the vicinity of the central frequency of the pulse was investigated by Garrett and MacCumber, in 1970 [2]. They showed that, if the slab is not too thick, the classical emerging pulse remains substantially Gaussian and the peak of the pulse emerges at the instant given by the classical group velocity expression, even if that instant is earlier than the instant at which the peak of the input pulse entered the slab. The pulse velocity in the linear regime of a laser beam pulse in samples of $GaP : N$ were measured by Chu and Wong [3]. The laser pulse was tuned to a bound exciton line and is seen to propagate through the material with little pulse shape distortion and with the envelope velocity given by the group velocity, even when the group velocity exceeds c . As discussed by Garrett and McCumber [2], the effect of the pulse velocity exceeding c is due to an incident pulse reshaping in the sample where the leading edge of the pulse is less attenuated than the trailing edge, and therefore does not violate special relativity or causality. Recently, Carey *et al.* [4] showed that in frustrated total internal reflection, the wave in the air gap is noncausal. Although phase and energy propagate with velocity higher than c , it is impossible to transmit information, due to the spreading of the signal beam.

In 2000, Peatross, Glasgow, and Ware [5] used a time expectation integral over the incoming Poynting vector flux to define the light pulse arrival time at a point in space, approach first used by Smith [6]. The delay between pulse arrival times at two distinct points is shown to consist of two parts: a spectral superposition of group delays (inverse of the group velocity) and a delay due to spectral reshaping via absorption or amplification. The result provides a context wherein group velocity is always meaningful even for broad band pulses and when the group velocity is superluminal or negative. In 2005, Aminul *et al.* [7] experimentally measured the net group and reshaping delays for arbitrary optical pulses in dispersive media, verifying the earlier prediction of Peatross, Glasgow, and Ware. Incoherent pulse propagation in an absorptionless system was well described by net group delay; even when the medium causes a great deal of deformation in the transmitted pulse. In the case of phase modulated chirping pulses in a resonant absorber, the so-called superluminal or subluminal propagation velocity is strongly influenced by the reshaping delay. They observed that the new concept of group velocity does not break down in any case. Superluminal group velocities were also measured by a laser pulse crossing a birefringent optical fiber by Brunner *et al.* [8]. The experiment show that the group velocity indeed exceed c in the fiber. The authors also measured the “signal velocity”, the speed at which information propagates and cannot exceed c . This fact had been directly demonstrated experimentally [9].

Understanding the physics of light propagation is an important task because of its relevance for both classical and quantum communication [10]. In the quantum regime with few photons, not many experimental works have been done for measuring the photon delay time when it crosses a sample. Our aim in this manuscript is to experimentally extract information about the displacement of the peak of a photon wavepacket, when it crosses an empty Fabry-Perot cavity (FP), and the final (transmitted) shape of this wavepacket. However, because of the extremely short longitudinal coherence length of the photon wavepacket, it is impossible to measure it directly. Thus, interferometry has to be applied [11]. Photon pairs (twin photons) generated by spontaneous parametric down-conversion (SPDC) are used provided they are generated essentially simultaneously [12]. We make one of the photons pass through the obstacle and let the other go freely. After that, both photons interfere in the Hong-Ou-Mandel (HOM) interferometer described bellow. A related experiment was done in 1993 by Steinberg, Kwiat and Chiao [13]. They used a HOM and twin photons for measuring photonic tunnelling times. An one dimensional photonic-bandgap material or a multilayer dielectric mirror was used as barrier. Their

measurement show that the peak of the transmitted photon wavepacket was *earlier* than it would if it were to travel at the vacuum speed of light c . Einstein causality is not violated in this process and the pulse reshaping process occurs at the levels of single particles: the probability of detecting a photon decreases less at early times than it does later [14]. The same setup was also used for demonstrating the dispersion cancellation in the measurement of the single photon propagation velocity in glass [15]. It was demonstrated that the single photons travel at the group velocity in glass. In 2005, Silberberg *et al.* [16] measured the shape of the two-photon wave packet of the entangled-photon pairs generated by SPDC. Using an ultrahigh flux of collinear entangled photons and a Mach-Zehnder interferometer they could generate the second harmonic with the pairs of the entangled photons and in this way observe the shape of the photon pair or the biphoton directly.

In SPDC, a pump (p) laser beam incident upon a nonlinear crystal creates a pair of entangled photons, usually called *signal* (s) and *idler* (i) [17]. Quantum interference in a beam-splitter was first demonstrated by Hong, Ou and Mandel in 1987 [12]. In their experiment, *signal* and *idler* photons with the same frequency and polarization are combined in a 50 – 50 beam-splitter (BS) and the output photons are detected at the exit of the beam-splitter by coincidence detection. When the *idler* and the *signal* paths are made equal from the crystal to the BS , no coincidence counts are detected at the BS output.

B.2 Classical calculation of the shape of a transmitted wave packet through a Fabry-Perot cavity.

We begin by classically observing how a symmetric Fabry-Perot cavity affects the shape of a wavepacket, that is transmitted through it. Consider a wavepacket, before the cavity, whose the temporal dependence of the electromagnetic field is described by the superposition of plane waves:

$$f(t) = \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.1})$$

where ϕ is some weight function of ω centered in $\omega_0/2$. The action of the cavity in each of the plane waves is well known [18], and after being transmitted, the superposition (B.1) becomes:

$$f_T(t) = \int_0^{\omega_0} d\omega \mu(\omega) \phi(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.2})$$

where $\mu(\omega)$ is the transmission coefficient of the cavity as a whole. The cavity is formed by two planar dielectric mirrors with the same reflection and transmission coefficients (r and t) separated by a distance L . For this cavity model, $\mu(\omega)$ is given by [19]:

$$\mu(\omega) = T \sum_{m=0}^{\infty} R^m \exp(2im\omega\tau_c), \quad (\text{B.3})$$

where $\tau_c = L/c$, $R = |r|^2$ and $T = |t|^2$.

Supposing that $\phi(\omega)$ has the form:

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\Delta\omega}\sqrt{\pi}} \exp[-(\omega_0/2 - \omega)^2/2(\Delta\omega)^2], \quad (\text{B.4})$$

we can then obtain from Eq. (B.2), the transmitted light intensity as function of time:

$$\begin{aligned} |f_T(t)|^2 &\propto T^2 \sum_{m,n} R^{m+n} \cos[\omega_0\tau_c(m-n)] \times \\ &\times (\exp\{\frac{-\Delta\omega^2}{2}[(2m\tau_c - t)^2 + (2n\tau_c - t)^2]\}). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

B.3 Quantum calculation of the average intensity

Now we are going to calculate the average intensity as a function of time of a wavepacket that crosses a Fabry-Perot cavity, which have the same transmission coefficient as the one described in the previous section by Eq. (B.3), and also have the same spectra distribution shown in Eq. (B.4).

We begin by writing the one-photon state before the cavity,

$$|\psi\rangle = \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) |\omega\rangle, \quad (\text{B.6})$$

and the one-photon state transmitted through the cavity,

$$|\tilde{\psi}\rangle = \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) \mu(\omega) |\omega\rangle. \quad (\text{B.7})$$

The detected average intensity is given by

$$\langle I(t) \rangle = \langle \tilde{\psi} | E^{(-)}(t) E^{(+)}(t) | \tilde{\psi} \rangle, \quad (\text{B.8})$$

where the electromagnetic field operator is

$$E^{(+)}(t) = \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} a(\omega), \quad (\text{B.9})$$

with $a(\omega)$ being the annihilation operator. The result of $E^{(+)}(t)|\tilde{\psi}\rangle$ is

$$E^{(+)}(t)|\tilde{\psi}\rangle = \int_0^{\omega_0} d\omega e^{-i\omega t} \phi(\omega) \mu(\omega) |vac\rangle. \quad (\text{B.10})$$

Notice that if we complete the calculation of Eq. (B.8), by using Eq. (B.10) we shall find the same result of Eq. (B.5), that is, the quantum treatment leads to the same prediction of the classical one, for the temporal dependence of the transmitted light intensity through the FP cavity. This function gives the temporal profile of the distorted wavepacket after it crossed the cavity. Eq. (B.10) shows how the wavepacket is distorted by the cavity. The function $\mu(\omega)$ affects each frequency component of the photon probability amplitude, Eq. (B.10), in a different way, distorting the initial wavepacket temporal distribution. The cavity was set to be smaller than the photon coherence length. In the regime where the cavity separation is larger than the photon coherence length, no distortion occurs in the photon wavepacket. In ref. [20] this regime was studied. It was measured a series of peaks and/or dips due to the different photon travel paths inside the cavity or interference between indistinguishable photon-pairs paths in the interferometer. It was studied the processes of photon coalescence and anti-coalescence interference.

B.4 An Idealized Experiment

Suppose an idealized experiment in which the time resolution of the detectors is infinity. The apparatus of such an experiment is depicted bellow in Fig.B.1.

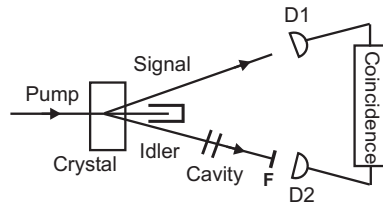


Figura B.1: Experimental scheme of an idealized experiment. A monochromatic pump beam of angular frequency ω_0 incident upon a non-linear crystal generates two other beams, *signal* and *idler*. The *idler* beam pass trough a Fabry-Perot cavity. Coincidence measurements are made in terms of the time delay between the two detectors $D1$ and $D2$. F is an interference filter placed in front of the detector $D2$.

Figure B.1 shows an apparatus which should be used in an idealized experiment. In this experiment two photons generated in spontaneous parametric down conversion

(*signal* and *idler*) are directed to two detectors (D1 and D2), the detectors are supposed to have their time resolution infinity. The *idler* photon crosses a Fabry-Perot cavity, and the coincidence counts are made in terms of the electronic time delay between the two detectors $D1$ and $D2$.

Let us now obtain an expression for the coincidence rate in such a situation. The state of the two photons generated in spontaneous parametric down conversion immediately after the crystal is

$$|\xi\rangle = \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) |\omega\rangle_i |\omega_0 - \omega\rangle_s. \quad (\text{B.11})$$

We can use the same $\phi(\omega)$ shown in Eq. (B.4), which in this case is the frequency distribution of the filter F, because the gain frequency bandwidth of the parametric down conversion process is much broader than the filter bandwidth [12]. The state of the two photons, after the cavity, becomes:

$$|\xi_T\rangle = \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) \mu(\omega) |\omega\rangle_i |\omega_0 - \omega\rangle_s, \quad (\text{B.12})$$

where $\mu(\omega)$ is given by Eq. (B.3). The probability of detecting a coincidence at a time t in one detector and at a time $t + \tau$ in the other for a pure state is given by [17, 21].

$$P(\tau) = K \langle \xi_T | E_i^-(t) E_s^-(t + \tau) E_s^+(t + \tau) E_i^+(t) | \xi_T \rangle \quad (\text{B.13})$$

where K is some constant depending on the detectors efficiency. We will set $K = 1$, because we are interested in the coincidence rate, not in the number of coincidences itself; $E_j^\pm(t)$ are the electric field operators and are equal to

$$E_j^+(t) = \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega t} a_j(\omega), \quad (\text{B.14})$$

$a_j(\omega)$ being the annihilation operators, with $j = i, s$. By using Eq. (B.12) and Eq. (B.14), we can calculate the coincidence probability amplitude that is proportional to:

$$E_s^+(t + \tau) E_i^+(t) | \xi_T \rangle = e^{-i\omega_0 t} \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) \mu(\omega) e^{-i\omega \tau} | vac \rangle. \quad (\text{B.15})$$

Now if we calculate $P(\tau)$, from Eq. (B.15), we obtain the same result shown in Eq. (B.5), the only difference being that $|f_T(t)|^2$ is a function of t while $P(\tau)$ is a function of τ .

In fact, in this idealized experiment, we can interpret the *signal* photon as a trigger for making the temporal map of the distorted *idler* photon wavepacket. We will keep this interpretation in the experiment analysis shown below.

B.5 The Real Experiment

The experiment described in the previous section is an idealized one because there are not detectors with infinity time resolution. In reality, there is an “electronic window” (in our case $\Delta\tau = 5$ ns) by which the coincidences are counted. What we can do, in general, when doing experiments involving photons is to use interferometry. Figure B.2 shows the apparatus we used to make measure the temporal shape of the transmitted idler photons through a Fabry-Perot cavity as well as the temporal displacement of the peak of their wavepackets compared with the signal photon wavepackets. The used experimental

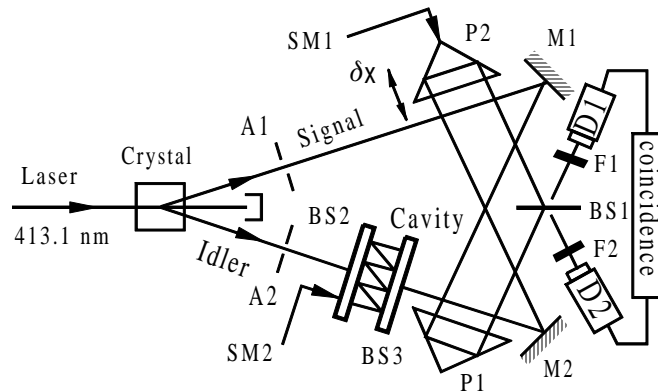


Figura B.2: Experimental scheme of a Hong-Ou-Mandel interferometer, in which a Fabry-Perot cavity is inserted in one arm. The symbols BS , M , P , SM , A , and D label beam splitters, mirrors, prisms, stepper motors, apertures, and detectors, respectively. Signal beam passes through a compensating glass plate (not shown in the figure) after $A1$.

apparatus consists of an HOM interferometer, and a cavity formed by two planar dielectric beam splitters $BS2$ and $BS3$ with 50% of reflectivity around 826.2 nm (Fig. B.2). A 5 mm long Lithium Iodate ($LiIO_3$) crystal oriented for type-I phase matching is pumped by a 70 mW continuous wave krypton-ion laser oscillating at 413.1 nm. A violet photon from the pump beam is down-converted into two conjugated infrared photons at 826.2 nm (*signal* and *idler*). The *signal* beam passes through a compensating glass plate (not shown in Fig. B.2) and the *idler* beam through the approximately 0.013 mm length cavity. The compensating glass plate compensates the *idler* delay in the glass substrates of $BS2$ and $BS3$. Next, both beams are directed by the mirrors $M1$, $M2$, and prisms $P1$, $P2$ into

the two input ports of the beam splitter $BS1$. Both detectors $D1$ and $D2$ are avalanche photodiodes operating in photon counting mode and $F1$, $F2$ are interference filters placed in front of them, with 5.8 nm FWHM bandwidth and centered at 826.2 nm. Since SPDC is a spontaneous process, the experiment is carried in a regime of few photon pairs and only a photon per time cross the cavity. The initial spectral distribution of the photons wavepackets, as mentioned above, is determined by the filter spectral distribution, and as consequence, also their time distribution. The prism $P2$ was fixed on a translation stage driven by a stepper motor $SM1$ used to change the *idler* path length. The stepper motor $SM2$ has 50 nm of resolution, and it is used for moving the mirror $BS2$, thus changing the cavity length L .

Let us consider the state of the light emitted from the SPDC process when a pump beam of frequency ω_0 is converted in two degenerated photons of frequency $\omega_0/2$. This state is affected by the presence of the cavity. The coincidence counting rate, at the beam-splitter exit, if we assume the filters $F1$ and $F2$ centered in $\omega_0/2$ and having a Gaussian distribution (Eq. (B.4)) can be calculated as follows. The initial state of the two photons generated by SPDC is shown in Eq. (B.11). After the *idler* photon crosses the cavity, the state becomes

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) [\mu(\omega) |1, \omega\rangle_{i,t} |1, \omega_0 - \omega\rangle_s + \nu(\omega) |1, \omega\rangle_{i,r} |1, \omega_0 - \omega\rangle_s], \quad (\text{B.16})$$

where $\mu(\omega)$ is given by Eq. (B.3), $\phi(\omega)$ is given by Eq. (B.4), $\nu(\omega)$ is the reflection coefficient of the cavity, (i,r) means the reflected *idler* and (i,t) the transmitted one. The second part of Eq. (B.16) does not contribute to the coincidence counts because it represents those photons that are reflected by the cavity. The electromagnetic field operators of the *idler* and *signal* modes are shown in Eq. (B.14). The beam splitter (BS1) mix the two electromagnetic fields of the *idler* and *signal* modes, and the electromagnetic field operators in front of the detectors 1 and 2 are

$$E_1^{(+)} = E_i^{(+)} + iE_s^{(+)} \quad (\text{B.17})$$

and

$$E_2^{(+)} = iE_i^{(+)} + E_s^{(+)} \quad (\text{B.18})$$

The imaginary coefficient i appears due to a phase difference of $\pi/2$ between the reflection and the transmission coefficients of the symmetric beam splitter [12, 17]. The coincidence

rate is calculated by the probability of finding a photon in one detector at a time t and another photon at a time $t + \tau$ in the other detector [17]:

$$P(\tau) = \langle \tilde{\Psi} | E_1^{(-)}(t) E_2^{(-)}(t + \tau) E_2^{(+)}(t + \tau) E_1^{(+)}(t) | \tilde{\Psi} \rangle. \quad (\text{B.19})$$

Now we integrate $P(\tau)$ in the time interval of the electronic window for obtaining the coincidence rate. This time interval is much larger than the longitudinal coherence time of the photons, so we can extend the integration interval to infinity.

$$R_c = \int_{-\infty}^{\infty} P(\tau) d\tau. \quad (\text{B.20})$$

The coincidence rate is then [22]:

$$\begin{aligned} R_c(\delta) = & T^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} R^{(n+m)} \cos[\omega_0 \tau_c (m - n)] \times \\ & \times \{ \exp[-\Delta\omega^2 (n - m)^2 \tau_c^2] - \\ & - \exp[-\Delta\omega^2 ((n + m)\tau_c - \delta)^2] \}, \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

where $\Delta\omega$ is the FWHM bandwidth of the interference filter, τ_c is the length of the cavity (L) divided by the speed of light in the vacuum (c), $\tau_c = L/c$; $T(R)$ is the transmittance (reflectance) of each cavity mirror, and δ is the time delay furnished by the trombone prism $P2$. The positive direction of δ is the one shorting the *idler* path length (see Fig. B.2). The cavity mirrors have the same reflectance.

At this point, a definition of resonance and anti-resonance should be provided. A photon is resonant with the cavity, when L is equal to an integer multiple of half wavelength, i.e., $L = N\lambda/2$ (λ is the central wavelength of the *idler* wavepacket and $N = 1, 2, 3, \dots$), or in other words, when $\omega_0 \tau_c = 2N\pi$. A photon is anti-resonant with the cavity, when L is equal to a half-integer multiple of $\lambda/2$, $L = [(2N - 1)/2][\lambda/2]$, or in other words, when $\omega_0 \tau_c = (2N - 1)\pi$.

In order to see how the coincidence counts are related to the *idler* wavepacket shape, after passing through the cavity, we superpose the graphics of the transmitted wavepacket probability (Eq.(B.5)) and the coincidence rate (Eq. (B.21)), using the same parameters of our experiment, in the two cases, near the resonance and near the anti-resonance. Nevertheless, to get a good comparison between the two equations, we need to invert the graphic generated by Eq. (B.21). The reason is that Eq. (B.5) always gives us peaks (remember it is a squared modulus of a wave function), while Eq. (B.21) in general gives us

dips for type I phase-matching [12]. The inversion is done as follows: we take the plateau value, which is the constant coincidence rate value when δ is out of the HOM interference region (when the path length of *signal* photon is many longitudinal coherence length shorter than the *idler* path length, see Fig. B.2) [12], and subtract the original graphic from it. The theoretical curves are shown in Fig. B.3. We see that the coincidence counts are a reasonable way of mapping a distorted wavepacket, that has no more than 0.1 mm of coherence length. With the decreasing of L , the mapping becomes more and more exact. Let us show it. First, we add the right side of Eq. (B.5) and Eq. (B.21), and changing δ to t in Eq. (B.21),

$$\begin{aligned}
R_c(t) + |f_T(t)|^2 = & \\
1 + T^2 \sum_{n \neq m}^{\infty} R^{(n+m)} \cos[\omega_0 \tau_c (m - n)] \times & \\
\times \{ \exp[-\Delta\omega^2 (n - m)^2 \tau_c^2] + & \\
+ [\exp[-2\Delta\omega^2 (n^2 + m^2) \tau_c^2] - \exp[-\Delta\omega^2 (n + m)^2 \tau_c^2]] \times & \\
\times \exp[-\Delta\omega^2 [t^2 - 2(n + m) \tau_c t]] \}, & \tag{B.22}
\end{aligned}$$

where we have separated the original sums in two others: one with $n = m$ and the other, for $n \neq m$. The first sum is 1, as shown in Eq. (B.22). By analyzing Eq. (B.22) it is straightforward to see that when $L \rightarrow 0$, the second part in the right side of the equation approach $T^2 \sum_{n \neq m}^{\infty} R^{(n+m)}$, which is only a constant. Therefore, the wavepacket mapping is done with a good approximation, although not perfect, by the coincidence measurement, or $R_c(\delta = t) \approx CT^2 \sum_{n \neq m}^{\infty} R^{(n+m)} - |f_T(t)|^2$, where C is some constant (recall the proportionality in Eq. (B.5)).

The experiment can be described as follows: we begin with a cavity length of about 0.013 mm. The difference between the two paths length of the interferometer was at first set to be larger than the coherence length of the twin photons wavepacket i.e., out of the interference region. In this case, the coincidence count is proportional to the number of photons, which pass through the cavity [20]. With the help of the stepper motor *SM2*, which has 50 nm of resolution, we vary L very slowly and try to stop near a maximum in the coincidence counts, what allows us to learn, that the wavepacket is almost resonant with the cavity ($\omega_0 \tau_c \simeq 63.77\pi$, we pos infer it by fitting the experimental data). Now, with the stepper motor *SM1*, prism *P2* is displaced in steps of 0.0015 mm, changing the photon paths difference and collecting the first coincidence experimental data group (Fig. B.4a, open circle). Once again we use the stepper motor *SM2* to change L , at this time

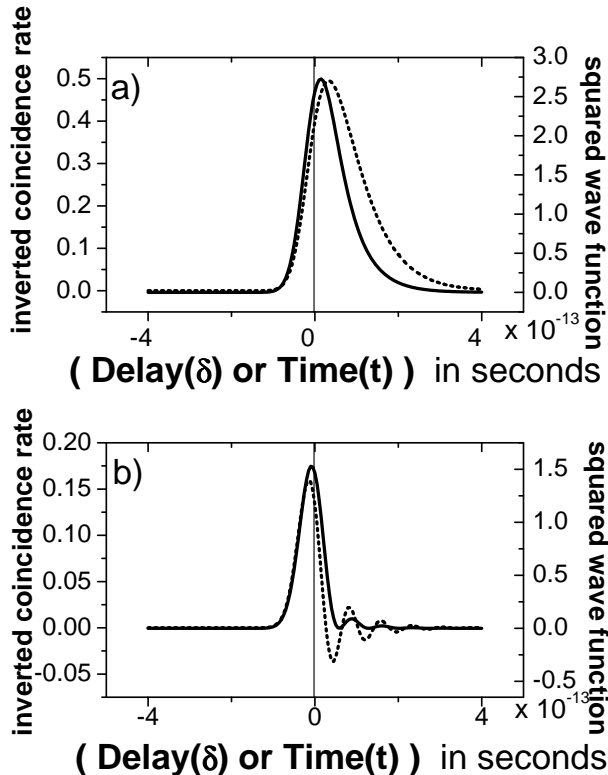


Figure B.3: Calculated inverted coincidence rate obtained from Eq. (B.21) (dotted line) as a function of δ and the transmitted wavepacket probability, from Eq. (B.5) (solid line) as a function of t . In a), the mirrors separation $L = 0.013172$ mm, almost a resonant case; in b), $L = 0.01383$ mm, an anti-resonant case (see text). The other parameters are $R = T = 0.5$, the pump wavelength $\lambda_0 = 413.1$ nm, and $\Delta\lambda = 5.8$ nm.

to 0.4 mm, which is larger than the coherence length of the twin photons ($l_c \simeq 0.1$ mm). In this situation, the *idler* wavepackets are not distorted, only attenuated [20], because each of the photons “see” the cavity as two very separated mirrors and take only a global phase (r for each reflection on the mirrors or t for each transmission). Then, it is scanned back, with SM1, the same HOM interference region, using steps of 0.0015 mm. This new data serves as a mark of the zero paths length difference of the HOM interferometer (Fig. B.4, solid square). Now that we are again out of the HOM interference region, we use SM2 to bring back L to approximately 0.013 mm. Then, L is varied very slowly, with SM2, until we get a minimum in the coincidence counts. So we know that the system approaches the anti-resonant regime ($\omega_0\tau_c \simeq 66.96\pi$). By using SM1, we scan again the HOM interference region, in steps of 0.0015 mm, and collect the final coincidence data.

These results are shown in Fig. B.4b. The solid curves in Fig. B.4 are the theoretical curves obtained from Eq. (B.21). We also must not forget that each displacement of the prism $P2$, furnished by the stepper motor $SM1$, corresponds to a difference in the *idler* photon path length that is the double of this displacement (see Fig. B.2).

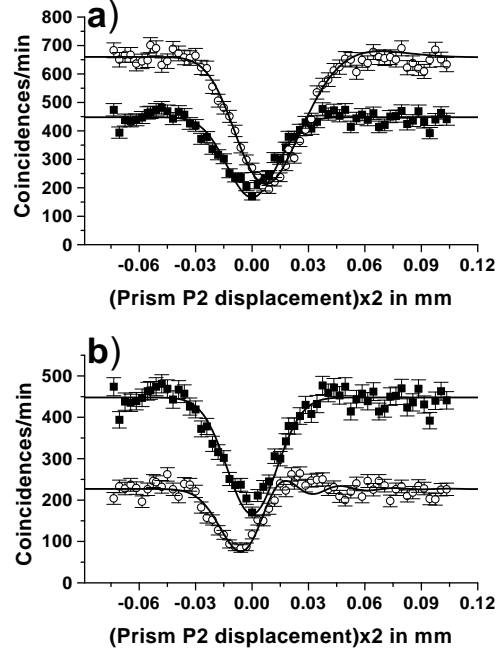


Figure B.4: Experimental results of the coincidence measurements obtained at the exit of the HOM interferometer with a cavity. The solid square curves refer to the measurements when $L = 0.4$ mm, which establish the zero mark reference of the HOM interferometer. The open circle curves refer to the measurements when L is approximately 0.013 mm; Fig. B.4.a is the near resonance case, and Fig. B.4.b is the anti-resonant one (see text.). The continuous lines are theoretical fittings based on Eq. (B.21) (see text).

Remembering that the coincidence counts, in our experiment, reflect (not exactly, see Fig. B.3) the shape of the *idler* wavepacket, the experimental results in Fig. B.4 appear to show a delay of the peak of this wavepacket in crossing the cavity in the “resonant” case, and an advance in the anti-resonant one.

One could think that the coincidence counts measure directly those delay and advance of the *idler* wavepacket peak. But it is not true. We measure coincidences (Fig. B.4), not the wavepacket temporal probability distribution. So we consult the simulations on Fig. B.3 to see how much is the discrepancy between the peaks of the wavepackets and the peaks of the corresponding coincidence rates. It can be done because the simulation

parameters used are the same as those used in the experiment. After the above described procedure, we conclude that the correction that must be undertaken is to multiply the apparent delay obtained from the coincidence measurement by 0.651 and the apparent advance by 0.603, in the “resonant” and anti-resonant regimes respectively, in order to get the real values for the delay and advance of the peaks. Finally, the correct measured delay of the wavepacket peak was 15.9 ± 0.2 fs for the almost resonant case, and the real advance was 11.9 ± 0.2 fs for the anti-resonant one. The estimated uncertainty is mainly due to the stepper motor *SM1* used for scanning the interference region (50 nm of resolution).

Let us turn our attention to the anti-resonant situation. We want to compare the transmitted *idler* wavepacket through the cavity with this wavepacket without the cavity. However, to establish the zero mark reference in the interferometer, the cavity cannot be removed, because there is a compensating glass plate in the *signal* arm of the interferometer and the two substrates in *BS2* and *BS3*, in the *idler* arm. In order to map the *idler* wavepacket “without” the cavity, we enlarge L to 0.4 mm ($L > l_c$) and use those *idler* photons that cross the enlarged cavity directly, without internal reflections, to interfere with the *signal* photons at *BS1*. But we know that *BS2* and *BS3* have 50% of reflectivity, and this attenuates the used *idler* wavepackets amplitude in 3/4. Finally, to get a good comparison between the two cases, wavepacket with and without the cavity, all we have to do is to take the graphics of Fig. B.4.b, invert them, and multiply the data corresponding to the solid square by 4, because of the 3/4 attenuation. The resultant graphics are shown in Fig. B.5. Now we can see that the peak of a wavepacket that crosses an anti-resonant cavity is really advanced in relation to the peak of a free wavepacket. But the amplitude of the former is always under the amplitude of the later (see Fig. B.5). This result indicates why “superluminal-like effects are always associated with tunnelling-like events. The correct interpretation is: the *idler* wavepacket is distorted by the cavity in such a way that the frontal side of the original packet is less attenuated than the back side. See references [23, 24] for a discussion about the reshaping process of a wavepacket in the particular experiment made by Steinberg, Kwiat and Chiao [13].

In conclusion, we have shown a method to map distorted wavepackets, using quantum interference and coincidence detection, capable of measuring temporal displacements of the order of *fs*, or much better, depending only on the precision of the stepper motor *SM1*. With this method we can also measure enlargements or compressions of the longitudinal coherence length of the wave packets. Equations (B.21) and (B.5) were developed for the case where the distortion was caused by a Fabry-Perot cavity, but the method can

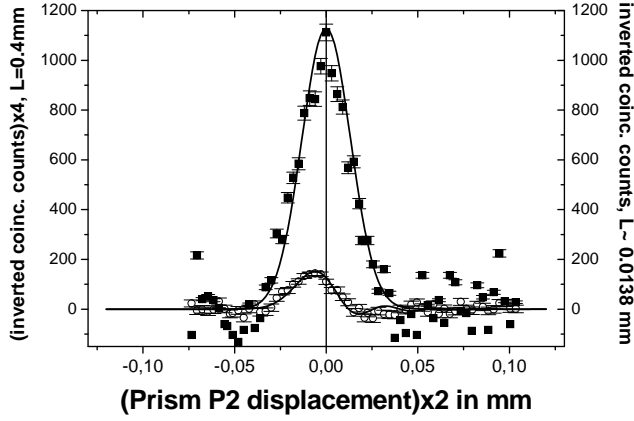


Figura B.5: Graphic of Fig. B.4.b inverted and having the experimental data corresponding to $L = 0.4$ mm (solids square curve) multiplied by 4 (see text above).

be extended to other cases. The general procedure is: take a pair of entangled particles, make one of them pass through its specific obstacle and let the other go free, acting like a pointer; calculate the final shape of the distorted particle after the obstacle and the first equation is achieved (the analogue of our Eq. (B.5)); then calculate the result of a HOM interference between the two particles, in order to find the second equation (the analogue of our Eq. (B.21)), this one has to be measured. Now, compare the two equations and apply the necessary corrections on the measured coincidence counts to achieve the real data which has been searched. As stressed above, this paper also serves as an alert: coincidence interference result does not always gives the correct shape of the transmitted wavepacket through an obstacle, one needs often to make corrections on these results, based on its particular theory, to obtain the true data about the wavepacket. We illustrate our method showing an experimental demonstration of the compatibility between a “superluminal-like effect and special relativity (see Fig. B.5). The open circle curve, that is under the solid square one, refers to the measured coincidence counts. But if we look at Fig. B.3b, we see that the coincidence peak advances more than the wavepacket peak (peak of the wavepacket temporal probability distribution), so the compatibility is even more guaranteed. We acknowledge the financial support by: CNPq, FAPEMIG, Pronex-semicondutores, Instituto do Milênio de Nanociência and Instituto do Milênio de Informação Quântica. We thank O. Cosme and C. Saavedra for helpful discussions. A.D.

was supported by Fundación Andes.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Sommerfeld, Z. Physik **8**, 841 (1907); L. Brillouin, Ann. Physik **44**, 203 (1914); L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*(Academic Press, New York, 1960).
- [2] C. G. B. Garrett and D. E. McCumber, Phys.Rev.A **1**, 305 (1970).
- [3] S. Chu and S. Wong, Phys.Rev.Lett. **48**, 738 (1982).
- [4] J. J. Carey, et. al., Phys.Rev.Lett. **84**, 1431 (2000).
- [5] J. Peatross, S. A. Glasgow, and M. Ware, Phys.Rev.Lett. **84**, 2370 (2000).
- [6] R. L. Smith, Am. J. Phys. **38**, 978 (1970).
- [7] Aminul I. Talukder, Tacaloshi Haruka, and Makoyo Tomita, Phys.Rev.Lett. **94**, 223901 (2005).
- [8] N. Brunner, V. Scarani, M. Wegmüller, M. Legré, and N. Gisin, Phys.Rev.Lett. **93**, 203902 (2004).
- [9] M. D. Stenner, D. J. Gauthier, and M. Neifeld, Nature **425**, 695 (2003).
- [10] D. Bouwmeester, A. Ekert and A. Zeilinger, *The Physics of Quantum Information*, Springer, Berlin (2000).
- [11] R. Y. Chiao, P. G. Kwiat, and A. M. Steinberg, Physica B, **175**, 257 (1991).
- [12] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, Phys.Rev.Lett. **59**, 2044 (1987).
- [13] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, Phys.Rev.Lett. **71**, 708 (1993).

- [14] A. M. Steinberg, *When can light go faster than light? The tunneling time and its sub-femtosecond measurement via quantum interference*, Ph.D Thesis, University of Berkeley (1994).
- [15] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, Phys.Rev.A **45**, 6659 (1992);
A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R Y. Chiao, Phys.Rev.Lett. **68**, 2421 (1992).
- [16] Avi Pe'er, Barak Dayan, Asher A. Friesem, and Yron Silberberg, Phys.Rev.Lett. **94**, 073601 (2005).
- [17] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [18] C. H. Monken and G. A. Barbosa, Opt. Commun **99**, 152 (1993).
- [19] Grant R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York (1975).
- [20] M. A. Sagiuro, C. Olindo, C. H. Monken, and S. Pádua, Phys.Rev.A **69**, 053817 (2004).
- [21] R. Glauber, Phys.Rev.Lett. **10**, 84 (1963).
- [22] C. Olindo, M. A. Sagiuro, A. Delgado, C. H. Monken, and S. Pádua, quant-ph/0503217.
- [23] R Y. Chiao, P. G. Kwiat, and A. M. Steinberg, Sci. Am., **269** (2), 52 (1993);
R Y. Chiao, and A. M. Steinberg, Prog. in Opt. **37**, 345 (1997).
- [24] Wang Yun-ping and Zhang Dian-lin, Phys.Rev.A **52**, 2597 (1995).

Apêndice C

Artigo submetido 2

Complete Bell state analysis

C. Olindo, A. Delgado, S. Pádua, and C. Saavedra

21 de junho de 2006

We propose two schemes for Bell state analysis based on polarization transformations and coincidence detection. Both schemes permit the conclusive identification of the four Bell states.

C.1 Introduction

Since the beginning of quantum mechanics, entangled states have played an important role in the study of fundamental issues of this theory, such as completeness and nonlocality [1]. However, it has only recently been understood that entangled states are also a source of deep differences with the classical theory concerning the capability of transmitting and processing information [2]. Today there exists a large collection of protocols based on entangled states, such as quantum state teleportation [3], unitaries teleportation [4], quantum state sharing [5], dense coding [6], entanglement swapping [7] and quantum cryptography [8] among others, which extend and improve the performance of classical communication techniques or even allow for information processing far beyond the classical limits.

A common requirement of these protocols is the capability to analyse the four Bell states or to perform measurements in the basis defined by these states. Bell states have been generated in ions, atoms and in photon pairs generated in spontaneous parametric down-conversion (SPDC) [9]. Unfortunately, the optical methods used to implement such analysis are capable of identifying conclusively only a fraction of the Bell states or allow for probabilistic discrimination only [10].

In this article, we present two methods which allow complete identification of the four polarization Bell states. These schemes are based on a Hong-Ou-Mandel interferometer [11] and transformations of polarization and are designed in such a way that the signal of the number of coincidences is unique for each Bell state. The approach that we employ

applies to a very general class of states, being polarization Bell states a particular example within this class. This family of states allows considering deformations of Bell states which originate for instance in the method used to generate them, or in frequency dispersion, or in operations applied on Bell states.

This article is organized as follows: in section II we deduce the number of coincidences as a function of an externally controllable optical path delay for a class of states. In section III we analyze this result and connect it to transformations of polarization. This allows us to formulate the two schemes for Bell state analysis.

C.2 Calculating the Number of Coincidences

A Hong-Ou-Mandel interferometer [11] consists of a beam splitter and two photodetectors. The input ports of the beam splitter receive photon pairs generated by SPDC [12] while the outgoing photons are directed to the photodetectors. Typically, the properties of the incoming light are inferred from the signal of the photocoincidences as a function of an externally controllable optical path delay in one of the arms of the interferometer.

We start by defining the Ω class of states whose members are of the form

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha,\beta=\pm} A_{\alpha,\beta} |\nu_{\alpha,\beta}\rangle, \quad (\text{C.1})$$

with the $|\nu_{\alpha,\beta}\rangle$ states defined by

$$|\nu_{\alpha,\beta}\rangle = \int_0^{\omega_0} d\omega C_{\alpha,\beta}(\omega) |1, \omega, \alpha\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, \beta\rangle_s. \quad (\text{C.2})$$

These states can be generated by SPDC type II. The $|1, \omega', \gamma\rangle_a$ state denotes a one-photon state with frequency ω' and polarization $\gamma = +, -$ in the signal ($a = s$) or idler ($a = i$) mode. The $|C_{\alpha,\beta}(\omega)|^2$ functions are probability distributions defined on the interval $[0, \omega_0]$ which depend on frequency and possibly on polarization. The $A_{\alpha,\beta}$ coefficients are arbitrary complex numbers satisfying the normalization condition $\sum_{\alpha,\beta} |A_{\alpha,\beta}|^2 = 1$. The $|\nu_{\alpha,\beta}\rangle$ states satisfy the property

$$\langle \nu_{\alpha',\beta'} | \nu_{\alpha,\beta} \rangle = \delta_{\alpha',\alpha} \delta_{\beta',\beta}. \quad (\text{C.3})$$

A simple example of states belonging to Ω are:

$$\begin{aligned} |\Phi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\omega_0} d\omega C(\omega) (|1, \omega, +\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, +\rangle_s \pm |1, \omega, -\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, -\rangle_s), \\ |\Psi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\omega_0} d\omega C(\omega) (|1, \omega, +\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, -\rangle_s \pm |1, \omega, -\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, +\rangle_s). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

These states correspond to polarization Bell states generated by spontaneous parametric down conversion. The distribution $C(\omega)$ considers frequency dispersion and the action of filters placed in front of photodetectors.

A second example of states in Ω is:

$$\begin{aligned}
|\Phi_{\pm}\rangle &= \int d\omega \frac{\Phi(\omega)}{\sqrt{2}} (u_{i,+}(\omega)u_{s,-}(\omega_0 - \omega)|1, \omega, +\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, +\rangle_s \pm \\
&\quad \pm u_{i,-}(\omega)u_{s,+}(\omega_0 - \omega)|1, \omega, -\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, -\rangle_s), \\
|\Psi_{\pm}\rangle &= \int d\omega \frac{\Phi(\omega)}{\sqrt{2}} (u_{i,+}(\omega)u_{s,-}(\omega_0 - \omega)|1, \omega, +\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, -\rangle_s \pm \\
&\quad \pm u_{i,-}(\omega)u_{s,+}(\omega_0 - \omega)|1, \omega, -\rangle_i |1, \omega_0 - \omega, +\rangle_s). \tag{C.5}
\end{aligned}$$

These states resemble the four polarization Bell states. However, in these states we have included functions $u_{i,\alpha}(\omega)$ and $u_{s,\alpha}(\omega)$ which depend on frequency and polarization. The particular functional form of these functions reflects the particular method applied to generate these states. In this case, the photons described by the Eq. (C.4) states have been sent through cavities whose transmission amplitudes $u_{a,\alpha}(\omega)$ depend on the frequency and on the polarization of the photons. This class of states has been experimentally generated [13].

We now proceed to calculate the number of coincidences for the family of Eq. (C.2) states. The number of coincidences in a time interval τ is given by the expectation value

$$C(\tau) = \langle : f I_1(t) I_2(t + \tau) : \rangle, \tag{C.6}$$

where the symbols f and $: :$ indicate temporal and normal ordering, respectively. The intensity operators entering in Eq. (C.6) are

$$\begin{aligned}
\hat{I}_1(t) &= \hat{\vec{E}}_1^-(t) \cdot \hat{\vec{E}}_1^+(t), \\
\hat{I}_2(t + \tau) &= \hat{\vec{E}}_2^-(t + \tau) \cdot \hat{\vec{E}}_2^+(t + \tau), \tag{C.7}
\end{aligned}$$

where $\hat{\vec{E}}_i^\alpha(t)$ is the positive ($\alpha = +$) or negative ($\alpha = -$) part of the electromagnetic field operator at detector D_i ($i = 1, 2$) at time t . These operators are related to the electromagnetic field operators before the beam splitter by the transformation

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{E}}_1^+(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\vec{E}}_i^+(t) + i\hat{\vec{E}}_s^+(t - \delta) \right), \\
\hat{\vec{E}}_2^+(t + \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\vec{E}}_s^+(t + \tau - \delta) + i\hat{\vec{E}}_i^+(t + \tau) \right) \tag{C.8}
\end{aligned}$$

with δ an externally controllable optical path delay.

Inserting Eqs. (C.8) and (C.7) into Eq. (C.6) we obtain that the number of coincidences is given by a sum over sixteen terms. Twelve of these terms are products containing annihilation operators acting on the same mode. Since we consider idler and signal one-photon states, all these terms vanish. Thus, after decomposing in polarization components, the number of coincidences is given by the expression

$$\begin{aligned}
C(\tau) = & \frac{1}{4} \left[\sum_{a,b=+,-} \left(\left\langle \hat{E}_{s,b}^-(t_1) \hat{E}_{i,a}^-(t_2) \hat{E}_{i,a}^+(t_2) \hat{E}_{s,b}^+(t_1) \right\rangle + \right. \right. \\
& + \left. \left\langle \hat{E}_{s,a}^-(t_0) \hat{E}_{i,b}^-(t_3) \hat{E}_{i,b}^+(t_3) \hat{E}_{s,a}^+(t_0) \right\rangle \right) - \\
& - \sum_{a,b=+,-} \left(\left\langle \hat{E}_{s,b}^-(t_1) \hat{E}_{i,a}^-(t_2) \hat{E}_{i,b}^+(t_3) \hat{E}_{s,a}^+(t_0) \right\rangle + \right. \\
& \left. \left. + \left\langle \hat{E}_{s,a}^-(t_0) \hat{E}_{i,b}^-(t_3) \hat{E}_{i,a}^+(t_2) \hat{E}_{s,b}^+(t_1) \right\rangle \right) \right], \tag{C.9}
\end{aligned}$$

with the definitions

$$t_0 = t - \delta, \quad t_1 = t + \tau - \delta, \quad t_2 = t, \quad t_3 = t + \tau. \tag{C.10}$$

Let us point out that the first two terms in Eq. (C.9) are real and that the last two terms form a real contribution. We proceed as follows: first we calculate separately each term entering in Eq. (C.9) with sub-indexes a, b fixed. Thereafter, we perform the summation over these indices. Due to the linearity of the scalar product we can sum the contributions coming from electric field operators with different indices and interpret the sum as a single operator.

The action of the first three electric field operators in Eq. (C.9) on the $|\nu_{\alpha,\beta}\rangle$ state for a and b fixed is given by (C.9) no estado $|\nu_{\alpha,\beta}\rangle$ para a e b fixos é dada por

$$\begin{aligned}
& \delta_{b,\beta} \delta_{a,\alpha} \int d\omega d\omega_1 d\omega_2 C_{\alpha,\beta}(\omega) \exp(i\omega_1 t_1) \exp(i\omega_2 t_2) \exp(-i\omega t_2) \times \\
& \quad \times \exp(-i(\omega_0 - \omega) t_1) |1, \omega_2, a\rangle_i |1, \omega_1, b\rangle_s, \\
& \delta_{a,\beta} \delta_{b,\alpha} \int d\omega d\omega_1 d\omega_2 C_{\alpha,\beta}(\omega) \exp(i\omega_1 t_0) \exp(i\omega_2 t_3) \exp(-i\omega t_3) \times \\
& \quad \times \exp(-i(\omega_0 - \omega) t_0) |1, \omega_2, b\rangle_i |1, \omega_1, a\rangle_s, \\
& \delta_{b,\alpha} \delta_{a,\beta} \int d\omega d\omega_1 d\omega_2 C_{\alpha,\beta}(\omega) \exp(i\omega_1 t_1) \exp(i\omega_2 t_2) \exp(-i\omega t_3) \times \\
& \quad \times \exp(-i(\omega_0 - \omega) t_0) |1, \omega_2, a\rangle_i |1, \omega_1, b\rangle_s. \tag{C.11}
\end{aligned}$$

Since we consider the number of coincidences on a time scale much larger than the correlation time of the photons, we integrate over the variable τ . After integrating, summing over the a and b indices, and considering the scalar product of these states with an arbitrary state $|\nu_{p,q}\rangle$, we obtain that the three first terms in the previous equation lead to the expressions

$$\begin{aligned} & 2\pi\delta_{b,p}\delta_{b,q} \int d\omega C_{\alpha,\beta}(\omega)C_{p,q}^*(\omega), \\ & 2\pi\delta_{\alpha,p}\delta_{b,q} \int d\omega C_{\alpha,\beta}(\omega)C_{p,q}^*(\omega), \\ & 2\pi\delta_{p,\beta}\delta_{q,\alpha} \int d\omega C_{\alpha,\beta}(\omega)C_{p,q}^*(\omega_0 - \omega) \exp(i(\omega_0 - 2\omega)\delta), \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

correspondingly.

Finally, the number of coincidences for an arbitrary state $|\Psi\rangle = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}|\nu_{\alpha,\beta}\rangle$ is given by

$$C(\delta) = \pi \sum_{\alpha,\beta} |A_{\alpha,\beta}|^2 t_{\alpha,\beta} - \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha,\beta} (A_{\alpha,\beta}A_{\beta,\alpha}^* r_{\alpha,\beta} + A_{\alpha,\beta}^*A_{\beta,\alpha} r_{\alpha,\beta}^*), \quad (\text{C.13})$$

where we have defined the quantities

$$t_{\alpha,\beta} = \int_0^{\omega_0} d\omega |C_{\alpha,\beta}(\omega)|^2, \quad r_{\alpha,\beta} = \int_0^{\omega_0} d\omega C_{\alpha,\beta}(\omega)C_{\beta,\alpha}^*(\omega_0 - \omega) \exp(i(\omega_0 - 2\omega)\delta). \quad (\text{C.14})$$

C.3 Number of coincidences for some particular states

Let us now analyze the expression for the number of coincidences. Since the $|C_{\alpha,\beta}|^2$ functions and the $|A_{\alpha,\beta}|^2$ coefficients are probability distributions, the number of coincidences becomes

$$C(\delta) = \pi - \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha,\beta} (A_{\alpha,\beta}A_{\beta,\alpha}^* r_{\alpha,\beta} + A_{\alpha,\beta}^*A_{\beta,\alpha} r_{\alpha,\beta}^*). \quad (\text{C.15})$$

The $r_{\alpha,\beta}$ coefficients can be cast in the form

$$r_{\alpha,\beta} = \int_{\frac{+\omega_0}{2}}^{\frac{-\omega_0}{2}} d\omega C_{\alpha,\beta}\left(\omega + \frac{\omega_0}{2}\right) C_{\beta,\alpha}^*\left(\frac{\omega_0}{2} - \omega\right) \exp(-2i\omega\delta). \quad (\text{C.16})$$

The known result for the Hong-Ou-Mandel interferometer can be easily recovered from the previous expression for the number of coincidences. Let us consider for instance the state

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\omega_0} d\omega \phi(\omega) (|1, \omega, +\rangle_t |1, \omega_0 - \omega, -\rangle_s + |1, \omega, -\rangle_t |1, \omega_0 - \omega, +\rangle_s), \quad (\text{C.17})$$

where the real valued function $|\phi(\omega)|^2$ represents the action of a gaussian filter centered at $\omega_0/2$ of width $\Delta\omega$, that is

$$|\phi(\omega)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\omega^2}} \exp\left(-\frac{(\omega - \frac{\omega_0}{2})^2}{2\Delta\omega^2}\right). \quad (\text{C.18})$$

In this particular case we have $A_{+,-} = A_{-,+} = 1/\sqrt{2}$ and $C(\omega)_{+,-} = C(\omega)_{-,+} = \phi(\omega)$. Thereby, the number of coincidences for this particular state becomes

$$C(\delta)_{|\Psi\rangle} = \pi (1 - Re(r)), \quad (\text{C.19})$$

with

$$r = \int_{\frac{+\omega_0}{2}}^{\frac{-\omega_0}{2}} d\omega \phi\left(\omega + \frac{\omega_0}{2}\right)^2 \exp(-2i\omega\delta). \quad (\text{C.20})$$

Considering the gaussian distribution $\phi(\omega)^2$ to be sufficiently narrow in the interval $[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}]$ such that the limits of integration can be extended to the interval $(-\infty, \infty)$, we obtain that the number of coincidences for the $|\Psi\rangle$ state is

$$C(\delta)_{|\Psi\rangle} = \pi (1 - \exp(-(\Delta\omega\delta)^2)), \quad (\text{C.21})$$

which is the well known result for the Hong-Ou-Mandel interferometer.

Now we calculate the value of the number of coincidences given by Eq. (C.15) for several families of states. The first family to study is formed by the states

$$\begin{aligned} |\Psi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_{+-}\rangle \pm |\nu_{-+}\rangle), \\ |\Phi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_{--}\rangle \pm |\nu_{++}\rangle). \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

A particular example of this family are the states in Eq. (C.4). The value of the number of coincidences for these states is

$$\begin{aligned} C_{\Psi_{\pm}}(\delta) &= \pi \mp \frac{\pi}{4} (r_{+,-} + r_{-,+} + r_{-,+}^* + r_{+,-}^*) \\ C_{\Phi_{\pm}}(\delta) &= \pi - \frac{\pi}{4} (r_{+,+} + r_{-,-} + r_{+,+}^* + r_{-,-}^*). \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Clearly, the signal of the number of coincidences does not allow discriminating unambiguously among this set of states. The $|\Psi_{\pm}\rangle$ states have different signals. However, the $|\Phi_{\pm}\rangle$ states have the same signal. Therefore, we can only identify conclusively the $|\Psi_{\pm}\rangle$ states. If we obtain the signal corresponding to the $|\Phi_{\pm}\rangle$ states, we can try to guess.

Let us now consider a second family of four mutually orthogonal states given by

$$\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}}(|\nu_{++}\rangle + |\nu_{+-}\rangle + |\nu_{-+}\rangle + |\nu_{--}\rangle) \\
|\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}}(|\nu_{++}\rangle - |\nu_{+-}\rangle - |\nu_{-+}\rangle + |\nu_{--}\rangle) \\
|\Psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}}(|\nu_{++}\rangle + |\nu_{+-}\rangle - |\nu_{-+}\rangle - |\nu_{--}\rangle) \\
|\Psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}}(|\nu_{++}\rangle - |\nu_{+-}\rangle + |\nu_{-+}\rangle - |\nu_{--}\rangle).
\end{aligned} \tag{C.24}$$

The number of coincidences for these states turn out to be

$$\begin{aligned}
C_{\Psi_1}(\tau) &= \pi - \frac{\pi}{8} (r_{+,+} + r_{-,+} + r_{+,-} + r_{-,-} + c.c.) = C_{\Psi_2}(\tau) \\
C_{\Psi_3}(\tau) &= \pi - \frac{\pi}{8} (r_{+,+} - r_{-,+} - r_{+,-} + r_{-,-} + c.c.) = C_{\Psi_4}(\tau).
\end{aligned} \tag{C.25}$$

Thus, we find that the $|\Psi_1\rangle$ and $|\Psi_2\rangle$ states have the same signal for the number of coincidences. This also happens with the $|\Psi_3\rangle$ and $|\Psi_4\rangle$ states. Therefore, in this, case by observing the behavior of the number of coincidences (as a function of δ) we can only identify the pair to which a state belongs.

Let us now consider the effect of a general polarization transformation into the number of coincidences. This transformation is given by

$$\begin{aligned}
|\nu_{++}\rangle &\rightarrow a|\nu_{++}\rangle + b|\nu_{+-}\rangle, & |\nu_{+-}\rangle &\rightarrow b^*|\nu_{++}\rangle - a^*|\nu_{+-}\rangle, \\
|\nu_{-+}\rangle &\rightarrow a|\nu_{-+}\rangle + b|\nu_{--}\rangle, & |\nu_{--}\rangle &\rightarrow b^*|\nu_{-+}\rangle - a^*|\nu_{--}\rangle,
\end{aligned} \tag{C.26}$$

with the condition $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Under this transformation the $\{|\Psi_{\pm}\rangle, |\Phi_{\pm}\rangle\}$ states become

$$\begin{aligned}
|\tilde{\Psi}_{\pm}\rangle &= 1/\sqrt{2}[b^*|\nu_{++}\rangle - a^*|\nu_{+-}\rangle \pm a|\nu_{-+}\rangle \pm b|\nu_{--}\rangle], \\
|\tilde{\Phi}_{\pm}\rangle &= 1/\sqrt{2}[\pm a|\nu_{++}\rangle \pm b|\nu_{+-}\rangle + b^*|\nu_{-+}\rangle - a^*|\nu_{--}\rangle].
\end{aligned} \tag{C.27}$$

The number of coincidences for these states is

$$\begin{aligned}
C_{\tilde{\Psi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - \frac{\pi}{2} \operatorname{Re} (|b|^2 r_{+,+} \mp (a^*)^2 r_{+,-} \mp (a)^2 r_{-,+} + |b|^2 r_{-,-}), \\
C_{\tilde{\Phi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - \frac{\pi}{2} \operatorname{Re} (|a|^2 r_{+,+} \pm (b)^2 r_{+,-} \pm (b^*)^2 r_{-,+} + |a|^2 r_{-,-}).
\end{aligned} \tag{C.28}$$

Thereby, we learn that by a local transformation we can manipulate the signal of the number of coincidences. Thereby, by choosing a transformation characterized by $|a| \neq |b|$ it is possible to generate different signals for each state.

Considering the parametrization

$$a = \cos(\theta) \quad b = \sin(\theta) \exp(i\varphi) \quad (\text{C.29})$$

for the transformation, the number of coincidences for the $\{|\tilde{\Psi}_{\pm}\rangle, |\tilde{\Phi}_{\pm}\rangle\}$ states finally becomes

$$\begin{aligned} C_{\tilde{\Psi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - \pi \operatorname{Re} [\sin^2(\theta)(r_{+,+} + r_{-,-}) \mp \cos^2(\theta)(r_{+,-} + r_{-,+})], \\ C_{\tilde{\Phi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - \pi \operatorname{Re} [\cos^2(\theta)(r_{+,+} + r_{-,-}) \pm \\ &\quad \pm \sin^2(\theta)(\exp(2i\varphi)r_{+,-} + \exp(-2i\varphi)r_{-,+})]. \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

These expressions allow us clearly to characterize each one of the states in the set $\{|\Psi_{\pm}\rangle, |\Phi_{\pm}\rangle\}$ by the signal of the number of coincidences. In the case of a real transformation, that is $\varphi = 0$, the number of coincidences becomes

$$\begin{aligned} C_{\tilde{\Psi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - \pi \operatorname{Re} [\sin^2(\theta)(r_{+,+} + r_{-,-}) \mp \cos^2(\theta)(r_{+,-} + r_{-,+})], \\ C_{\tilde{\Phi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - \pi \operatorname{Re} [\cos^2(\theta)(r_{+,+} + r_{-,-}) \pm \sin^2(\theta)(r_{+,-} + r_{-,+})]. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Clearly, there are four different signals. Thereby, it is possible to distinguish unambiguously the states in the set $\{|\Psi_{\pm}\rangle, |\Phi_{\pm}\rangle\}$. This result does not hold in the case where the coefficients $C_{\alpha,\beta}(\omega)$ do not depend on polarization. In this particular case and for $\varphi \neq 0$ we found

$$\begin{aligned} C_{\tilde{\Psi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - 2\pi (\sin^2(\theta) \mp \cos^2(\theta)) \operatorname{Re}(r), \\ C_{\tilde{\Phi}_{\pm}}(\delta) &= \pi - 2\pi (\cos^2(\theta) \pm \sin^2(\theta) \cos(2\varphi)) \operatorname{Re}(r), \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

with $r = r_{+,+} = r_{+,-} = r_{-,+} = r_{-,-}$ without dependence on polarization. Thus, a real transformation leads to two equal signals making a conclusive identification not possible. In this case a complex polarization transformation is necessary.

C.4 Conclusions

We have studied a possible experimental setup for implementing complete Bell state analysis. This consists of a Hong-Ou-Mandel interferometer complemented with polarization

transformations. The input states of the interferometer belong to a very general family of two-photon states. Polarization Bell states belong to this family. This family of states turns out to be general enough to also admit deformations of the Bell states which might originate in the different methods employed to generate the Bell states and, for instance, in effects such as frequency dispersion and polarization dependent operations. We have calculated the number of coincidences for each state within the family and have shown that it is possible to generate, with the help of polarization transformations, different numbers of coincidence signals for each of the four Bell states.

C.5 Acknowledgment

A. D. acknowledges support by Fundación Andes. C. S. and A. D. were supported by Milenio ICM P02-49F.

Referências Bibliográficas

- [1] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **48**, 52 (1935); *ibid* **49**, 53 (1935); A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Physical Review* **15**, 777 (1935).
- [2] G. Alber et al. *Quantum Information* (Springer, Berlin, 2001); M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [3] C. H. Bennett et al. *Phys.Rev.Lett.* **70**, 1895 (1993); D. Bouwmeester, J. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *Nature* **390**, 575 (1997).
- [4] S. F. Huelga, M. B. Plenio, and J. A. Vaccaro, *Phys.Rev.Lett.* **65**, 042316 (2002); S. F. Huelga, J. A. Vaccaro, A. Cheffles, and M. B. Plenio, *Phys.Rev.A* **63**, 042303 (2001).
- [5] A. M. Lance, T. Symul, W. P. Bowen, B. C. Sanders, T. Tyc, T. C. Ralph, and P. K. Lam *Phys.Rev.A* **71**, 033814 (2005); A. M. Lance, T. Symul, W. P. Bowen, B. C. Sanders, and P. K. Lam *Phys.Rev.Lett.* **92**, 177903 (2004).
- [6] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, *Phys.Rev.Lett.* **69**, 2881 (1992); K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat, and A. Zeilinger, *Phys.Rev.Lett.* **76**, 4656 (1996).
- [7] M. Zukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne, and A. K. Ekert, *Phys.Rev.Lett.* **71**, 4287 (1993).
- [8] C. H. Bennett, G. Brassard, and A. K. Eckert, *Sci. Am.* **274(4)**, 50 (1992).
- [9] P. G. Kwiat et al. *Phys.Rev.Lett.* **75**, 4337 (1995).
- [10] M. Michler, K. Mattle, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *Phys.Rev.A* **53**, R1209 (1996); H. Weinfurter, *Europhys. Lett.* **25**, 559 (1994).

- [11] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, Phys.Rev.Lett. **59**, 2044 (1987).
- [12] D. N. Klyshko, JETP Lett. **28**, 522 (1969); D. C. Burnham and D. L. Weinberg, Phys.Rev.Lett. **25**, 84 (1970).
- [13] M. A. Sapiro, C. Olindo, C. H. Monken, and S. Pádua, Phys.Rev.A **69**, 053817 (2004).

Referências Bibliográficas

- [1] A. Sommerfeld, *Z. Physik* **8**, 841 (1907); L. Brillouin, *Ann. Physik* **44**, 203 (1914); L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*(Academic Press, New York, 1960).
- [2] C. G. B. Garrett and D. E. McCumber, *Phys. Rev. A* **1**, 305 (1970).
- [3] S. Chu and S. Wong, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 738 (1982).
- [4] J. J. Carey, et al., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1431 (2000).
- [5] J. Peatross, S. A. Glasgow, and M. Ware, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2370 (2000).
- [6] R. L. Smith, *Am. J. Phys.* **38**, 978 (1970).
- [7] Aminul I. Talukder, Tacaloshi Haruka, and Makoyo Tomita, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 223901 (2005).
- [8] N. Brunner, V. Scarani, M. Wegmüller, M. Legré, and N. Gisin, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 203902 (2004).
- [9] M. D. Stenner, D. J. Gauthier, and M. Neifeld, *Nature* **425**, 695 (2003).
- [10] D. Bouwmeester, A. Ekert and A. Zeilinger, *The Physics of Quantum Information*, Springer, Berlin (2000).
- [11] R. Y. Chiao, P. G. Kwiat, and A. M. Steinberg, *Physica B*, **175**, 257 (1991).
- [12] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987).
- [13] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 708 (1993).

- [14] A. M. Steinberg, *When can light go faster than light? The tunneling time and its sub-femtosecond measurement via quantum interference*, Ph.D Thesis, University of Berkeley (1994).
- [15] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. A* **45**, 6659 (1992);
A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2421 (1992).
- [16] Avi Pe'er, Barak Dayan, Asher A. Friesem, and Yron Silberberg, *Phys. Rev. Lett.* (94), 073601 (2005).
- [17] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [18] C. H. Monken and G. A. Barbosa, *Opt. Commun* **99**, 152 (1993).
- [19] Grant R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York (1975).
- [20] M. A. Sagiuro, C. Olindo, C. H. Monken, and S. Pádua, *Phys. Rev. A* **69**, 053817 (2004).
- [21] R. Glauber, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 84 (1963).
- [22] C. Olindo, M. A. Sagiuro, A. Delgado, C. H. Monken, and S. Pádua, *Phys. Rev. A* (73), 043806 (2006).
- [23] R. Y. Chiao, P. G. Kwiat, and A. M. Steinberg, *Sci. Am.*, **269** (2), 52 (1993);
R. Y. Chiao, and A. M. Steinberg, *Prog. in Opt.* **37**, 345 (1997).
- [24] Wang Yun-ping and Zhang Dian-lin, *Phys. Rev. A* **52**, 2597 (1995).
- [25] Z. Y. Ou and L. Mandel, *Phys.Rev.Lett.* **57**, 66 (1989); A. M. Steinberg and R. Y. Chiao, *Phys.Rev.A* **49**, 3283 (1994).
- [26] C. Olindo, tese de mestrado.
- [27] D. N. Klyshko, *JETP* **28**, 522 (1969).
- [28] D. C. Burnham and D. L. Weinberg, *Phys.Rev.Lett.* **25**, 84 (1970).

- [29] M. A. Nielsen, and I. L. Chuang, *Quantum Communication and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [30] H. Becker, K. Schmid, W. Dultz, W. Martienssen, H. Roskos, in *Quantum Information Processing*, edited by Gerd Leuchs and Thomas Beth (Wiley-VCH, Weinheim, 2003), pag. 301.
- [31] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **48**, 52 (1935); *ibid* **49**, 53 (1935); A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Physical Review* **15**, 777 (1935).
- [32] G. Alber et al. *Quantum Information* (Springer, Berlin, 2001); M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [33] C. H. Bennett et al. *Phys.Rev.Lett.* **70**, 1895 (1993); D. Bouwmeester, J. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *Nature* **390**, 575 (1997).
- [34] S. F. Huelga, M. B. Plenio, and J. A. Vaccaro, *Phys.Rev.Lett.* **65**, 042316 (2002); S. F. Huelga, J. A. Vaccaro, A. Chefles, and M. B. Plenio, *Phys.Rev.A* **63**, 042303 (2001).
- [35] A. M. Lance, T. Symul, W. P. Bowen, B. C. Sanders, T. Tyc, T. C. Ralph, and P. K. Lam *Phys.Rev.A* **71**, 033814 (2005); A. M. Lance, T. Symul, W. P. Bowen, B. C. Sanders, and P. K. Lam *Phys.Rev.Lett.* **92**, 177903 (2004).
- [36] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, *Phys.Rev.Lett.* **69**, 2881 (1992); K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat, and A. Zeilinger, *Phys.Rev.Lett.* **76**, 4656 (1996).
- [37] M. Zukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne, and A. K. Ekert, *Phys.Rev.Lett.* **71**, 4287 (1993).
- [38] C. H. Bennett, G. Brassard, and A. K. Eckert, *Sci. Am.* **274(4)**, 50 (1992).
- [39] P. G. Kwiat et al. *Phys.Rev.Lett.* **75**, 4337 (1995).
- [40] M. Michler, K. Mattle, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *Phys.Rev.A* **53**, R1209 (1996); H. Weinfurter, *Europhys. Lett.* **25**, 559 (1994).
- [41] D. N. Klyshko, *JETP Lett.* **28**, 522 (1969); D. C. Burnham and D. L. Weinberg, *Phys.Rev.Lett.* **25**, 84 (1970).