

**Estados Emaranhados de Qubits e Qudits  
Criados com Pares de Fótons Produzidos na  
Conversão Paramétrica Descendente**

Leonardo Teixeira Neves

Setembro de 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



Instituto de Ciências Exatas – Departamento de Física  
Laboratório de Óptica Quântica

# Estados Emaranhados de Qubits e Qudits Criados com Pares de Fótons Produzidos na Conversão Paramétrica Descendente

Leonardo Teixeira Neves

**Orientador:** Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua

**Co-orientador:** Prof. Carlos Enrique Saavedra Rubilar\*

*\*Center for Quantum Optics and Quantum Information, Departamento de Física,  
Universidad de Concepción, Chile*

Tese apresentada à **Universidade Federal de Minas Gerais**, como requisito parcial para a obtenção do grau de **Doutor em Ciências**.

Dedico este trabalho aos meus pais, irmãos  
e ao meu sobrinho e afilhado Henrique

# Agradecimentos

Ao meu orientador de iniciação científica, mestrado e doutorado, Sebastião de Pádua. Eu quis trabalhar com ele, não só por interesse na área mas pelo que vi como ele era como professor. “De quebra” tive um ótimo orientador. Agradeço pelo apoio, amizade, confiança e toda a força que me deu.

Ao professor Carlos Saavedra, que mesmo de longe foi importantíssimo nesse trabalho.

Aos meus pais, por todo o apoio, todos os sacrifícios e toda a dedicação que tiveram com todos os filhos. Valeu!

À minha irmã Tuiú e ao meu irmão Rodrigo e à cunhada Kika, agradeço pela força e principalmente pelo Henrique. Ao meu sobrinho, afilhado e ídolo Henrique por existir. A todos os familiares que tiveram uma contribuição direta para esse momento.

Aos amigos do grupo de Óptica Quântica Marquinho, Caio e em especial àqueles que viraram madrugadas em medidas loucas de mil segundos, Aguirre, Fabian, Ivan, Olavo e G. Lima (antes conhecido como Gustavo). G. Lima merece um agradecimento especial, porque foi parceiro em todos os trabalhos no laboratório além de ser um grande amigo.

Aos grandes amigos que agora estão sumindo pelo mundo, Alexandre, Antônio (Tico), Frederico, Kagimura e Vinícius (Cara Legal). Boa sorte pra todos nós.

À Manu, pois sem ela teria sido mais difícil do que foi.

À Marluce da secretaria de pós-graduação, pela boa vontade com que quebrou um monte de galhos e pelos excelentes serviços.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.



# Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Introdução</b>	<b>vii</b>
<b>I Fundamentos Teóricos</b>	<b>1</b>
<b>1 Mecânica Quântica e Emaranhamento</b>	<b>2</b>
1.1 Introdução . . . . .	2
1.2 Sistemas quânticos bipartidos . . . . .	3
1.2.1 Estados puros . . . . .	4
1.2.2 Decomposição de Schmidt . . . . .	5
1.2.3 Estados mistos . . . . .	7
1.3 Manifestações e utilizações do emaranhamento . . . . .	8
1.3.1 Desigualdade de Bell . . . . .	8
1.3.2 Informação quântica . . . . .	11
1.4 Quantificação de emaranhamento . . . . .	13
1.4.1 Propriedades de uma medida emaranhamento . . . . .	13
1.4.2 Entropia de emaranhamento e concorrência . . . . .	14
<b>2 Fonte de Fótons Emaranhados: Conversão Paramétrica Descendente</b>	<b>17</b>
2.1 Introdução . . . . .	17
2.2 Conversão paramétrica descendente . . . . .	18
2.2.1 Emaranhamento em diversos graus de liberdade . . . . .	19
2.3 Teoria quântica da CPD . . . . .	21
2.3.1 O Hamiltoniano da CPD . . . . .	21
2.3.2 O estado quântico da luz produzida na CPD . . . . .	22
2.4 Correlações transversais na CPD . . . . .	23

---

2.4.1	O estado de dois fótons com correlações transversais . . . . .	24
2.4.2	A transferência do espectro angular . . . . .	25
2.5	Evolução do estado de dois fótons . . . . .	26
2.5.1	Elementos de óptica de Fourier . . . . .	26
2.5.2	Propagação e transmissão através de sistemas ópticos . . . . .	28
2.5.3	Aplicações e perspectivas . . . . .	31
 <b>II Geração Controlada de Qudits Emaranhados</b>		<b>33</b>
 <b>3 Geração de Qudits utilizando Fótons Gêmeos: Teoria</b>		<b>34</b>
3.1	Introdução . . . . .	34
3.2	Emaranhamento multidimensional . . . . .	35
3.2.1	Qudits <i>versus</i> qubits . . . . .	35
3.2.2	Métodos de geração de qudits com fótons gêmeos . . . . .	37
3.3	Qudits com fótons emaranhados espacialmente . . . . .	39
3.3.1	Cálculo do estado . . . . .	39
3.3.2	Estado maximamente emaranhado . . . . .	45
3.4	Discussão . . . . .	46
3.4.1	Comprimento de correlação do bifóton . . . . .	47
3.4.2	Vantagens e limitações do método . . . . .	47
3.4.3	Operações locais . . . . .	48
 <b>4 Geração de Qudits utilizando Fótons Gêmeos: Experimentos</b>		<b>51</b>
4.1	Geração de estados maximamente emaranhados . . . . .	51
4.1.1	Montagem experimental . . . . .	51
4.1.2	Preparação do estado . . . . .	52
4.1.3	Procedimento de medida . . . . .	54
4.1.4	Resultados e discussão . . . . .	55
4.2	Demonstração qualitativa de emaranhamento . . . . .	59
4.2.1	Estados classicamente correlacionados . . . . .	60

4.2.2	Interferência de dois fótons e emaranhamento	61
4.2.3	Medidas, resultados e discussão	63
4.3	Propagação de qudits no espaço livre	65
4.3.1	Montagem experimental	66
4.3.2	Resultados	66
4.4	Conclusão	67
<b>III Caracterização de Emaranhamento</b>		<b>70</b>
<b>5</b>	<b>Quantificação de Emaranhamento em Estados Puros de Dois Qubits</b>	<b>71</b>
5.1	Introdução	71
5.2	Teoria	73
5.2.1	Geração de qubits emaranhados	73
5.2.2	Decomposição de Schmidt	74
5.2.3	Quantificação de emaranhamento	75
5.3	Experimento	75
5.3.1	Montagem experimental	75
5.3.2	Preparação dos estados	77
5.4	Medidas na base $\{ \pm\rangle_s \otimes  \pm\rangle_i\}$	77
5.5	Medidas nas bases de Schmidt	81
5.5.1	Preliminares	81
5.5.2	Medidas, resultados e discussão	82
5.6	Medida da probabilidade marginal	86
5.7	Discussão e conclusão	88
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Determinação do operador campo e cálculo da taxa de coincidência</b>	<b>96</b>
A.1	Determinação do operador campo elétrico	96
A.1.1	Campo clássico propagando de $z_A$ a $z$	96
A.1.2	Operador campo elétrico	97



---

A.2 Taxa de coincidência . . . . .	98
A.2.1 Cálculo da amplitude de probabilidade $\langle \text{vac}   \mathbb{E}^{(+)}   l \rangle$ . . . . .	98
<b>B Publicações</b>	<b>101</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>102</b>

# Resumo

Nesta tese, nós exploramos as propriedades de fótons produzidos na conversão paramétrica descendente (CPD) e emaranhados em variáveis contínuas de momento transversal, com o objetivo de utilizar esse grau de liberdade para desenvolver um novo método de geração de estados emaranhados em espaços discretos e multidimensionais. Tais estados têm um grande potencial para aplicações em problemas fundamentais da mecânica quântica bem como em protocolos de informação quântica.

Nosso estudo tem como base a teoria de transferência do espectro angular do feixe de laser para o estado de dois fótons, proposta e demonstrada por Monken, Souto Ribeiro e Pádua [Phys. Rev. A **57**, 3123 (1998)]. Partindo dela, nós investigamos teoricamente a evolução do estado quântico dos pares de fótons quando estes se propagam do cristal e são transmitidos através de sistemas ópticos lineares, como lentes e aberturas. O estado de dois fótons é calculado para o caso onde há somente um sistema óptico no caminho de cada componente do par e a generalização do método empregado no cálculo, é discutida, para experimentos mais complexos.

Com o estado de dois fótons obtido, nós propomos um método de geração de estados emaranhados de qubits (sistemas quânticos bidimensionais) e qudits (sistemas quânticos  $D$ -dimensionais), utilizando o momento transversal dos fótons da CPD. O método se baseia na seleção de modos espaciais transversais específicos para cada fóton através de um arranjo de  $D$ -fendas ( $D \geq 2$ ) no caminho de cada um deles. Nesse método nós temos o controle da dimensão,  $D$ , de cada qudit e do grau de emaranhamento entre eles, através da manipulação do perfil transversal do feixe de laser, o que é um reflexo da transferência do espectro angular.

Para testar a teoria, realizamos um experimento para um caso específico e de grande interesse em aplicações práticas do emaranhamento: demonstramos a geração de estados *maximamente emaranhados* de qudits com  $D = 4$  e  $D = 8$ . O caráter quântico das correlações é atestado qualitativamente, por uma medida de interferência de dois fótons com franjas condicionais. Investigamos ainda a propagação desses estados emaranhados de qudits no espaço livre e através de um experimento simples, mostramos como eles podem ser distribuídos para partes distantes e separadas entre si, mantendo as correlações.

Finalizando, nós realizamos um experimento para quantificar emaranhamento nesse tipo de estados que estamos produzindo. Neste trabalho, nos restringimos ao caso mais simples de dois qubits. Preparamos estados diferentes manipulando o perfil transversal do feixe de laser e medimos o grau de emaranhamento deles de duas maneiras: (i) através do que chamamos de grau de condicionalidade dos padrões de interferência de dois fótons e (ii) através de medidas de probabilidade marginal. Nós discutimos a extensão do método (i) para estados de dois qudits.

# Abstract

In this thesis, we explore the properties of photons generated by parametric down-conversion (PDC) and entangled in continuous variables of transverse momentum, with the aim of using this degree of freedom for developing a new method for generating entangled states in discrete and multidimensional spaces. Such states have a great potential for applications in fundamental problems of quantum mechanics as well as in quantum information protocols.

Our study is based on the theory of angular spectrum transfer from the laser beam to the two-photon state, proposed and demonstrated by Monken, Souto Ribeiro and Pádua [Phys. Rev. A **57**, 3123 (1998)]. Using it, we investigate theoretically the evolution of the quantum state of photon pairs when they propagate from the crystal and are transmitted through linear optical systems like lenses and apertures. The two-photon state is calculated when there is only one optical system in the path of each photon and we also discuss the generalization of the method employed in the calculation, for more complex experiments.

With the two-photon state obtained, we propose a method for generating entangled states of qubits (two-dimensional quantum systems) and qudits ( $D$ -dimensional quantum systems), using the transverse momentum of photons from PDC. The method is based on the selection of specific transverse spatial modes of each photon, by using an array of  $D$ -slits ( $D \geq 2$ ) in the path of these photons. In this method we have the control of the dimension,  $D$ , of each qudit and also the degree of entanglement between them, by manipulating the transverse laser beam profile, which is due to the transfer of angular spectrum.

In order to test the theory, we make an experiment for a specific case, which has a great interest in practical applications of entanglement: we demonstrate the generation of *maximally entangled* states of qudits with  $D = 4$  and  $D = 8$ . The quantum character of the correlations is assured qualitatively by measuring two-photon interference patterns with conditional fringes. We also investigate the propagation of these entangled states of qudits through free space and with a simple experiment we show that they can be distributed for distant and spatially separated parts, keeping the correlations.

Finally, we perform an experiment for quantifying entanglement in this type of state that we are producing. In this work, we restrict ourselves to the simplest case of two qubits. We prepare different states by manipulating the transverse laser beam profile and their degree of entanglement is measured in two ways: (i) through the degree of conditionality of the two-photon interference patterns and (ii) through the measurement of marginal probability. We discuss the extension of the method (i) for two-qudit states.

# Introdução

Tentamos apresentar o trabalho da maneira mais lógica e coerente possível. Para isso, nós o dividimos em três partes:

## Parte I

Esta parte está mais voltada para uma revisão dos tópicos abordados e das ferramentas utilizadas ao longo da tese. No capítulo 1, descrevemos o emaranhamento em sistemas quânticos bipartidos com ênfase em estados puros, para os quais apresentamos uma importante ferramenta para o seu estudo, a decomposição de Schmidt. A desigualdade de Bell e algumas aplicações para o emaranhamento que achamos importantes no contexto do trabalho, são brevemente discutidas e finalizamos o capítulo discutindo a quantificação de emaranhamento em estados puros.

No capítulo 2 descrevemos a conversão paramétrica descendente (CPD), uma importante fonte de fótons emaranhados. Nessa revisão, a ênfase é dada às propriedades de correlação transversal entre esses fótons e o resultado obtido por Monken *et al.* [Phys. Rev. A **57**, 3123 (1998)] é apresentado. Discutimos ainda a evolução do estado quântico de dois fótons quando estes são transmitidos através de sistemas ópticos e apresentamos o nosso método para calculá-lo.

## Parte II

Nesta parte apresentamos nosso trabalho teórico e experimental de geração de estados emaranhados de qubits e qudits codificados em momento transversal dos fótons da CPD. No capítulo 3 discutimos as motivações para se gerarem qudits emaranhados e descrevemos métodos de geração que utilizam outros graus de liberdade dos fótons. Em seguida, apresentamos a nossa proposta, que se baseia no resultado que obtivemos no capítulo 2.

No capítulo 4 descrevemos um experimento que fizemos para geração de qudits maximamente emaranhados. Nesse experimento discutimos um teste para se caracterizar o emaranhamento (qualitativamente) e a propagação desses estados no espaço livre.

## Parte III

Esta parte trata de caracterização (quantitativa) de emaranhamento e contém apenas o capítulo 5 onde apresentamos um experimento em que propomos um método de se quantificar emaranhamento nos estados descritos no capítulo 3. O trabalho se restringe a qubits e a generalização para qudits é discutida.

O capítulo 6 é a conclusão do trabalho onde damos uma visão geral do que foi feito e discutimos as perspectivas para ele. O apêndice A traz detalhes de contas cujos resultados são mostrados no texto e não foram incluídas lá para não quebrar o “ritmo” do trabalho. O apêndice B traz as publicações resultantes do doutorado e trabalhos ainda em preparação.

**Parte I**  
**Fundamentos Teóricos**

# Mecânica Quântica e Emaranhamento

Neste capítulo, faremos uma breve revisão de alguns conceitos importantes de mecânica quântica e emaranhamento, que serão usados ao longo da Tese.

## 1.1 Introdução

A mecânica quântica sempre motivou discussões a respeito de seus fundamentos conceituais, desde o seu surgimento no início do século XX. Apesar disso, ela se estabeleceu como uma teoria de enorme sucesso graças à confirmação de várias de suas previsões (algumas aparentemente “bizarras”, como a dualidade onda-partícula) e também devido a uma série de aplicações tecnológicas que vieram destas previsões.

Uma das previsões mais “bizarras” da mecânica quântica é o *emaranhamento*, que foi trazido à tona por ninguém menos que Einstein, que tinha como objetivo contestar os fundamentos da teoria. Em um artigo clássico de 1935, Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [1] propuseram um experimento idealizado baseado nos postulados da teoria quântica, e verificaram que em certos casos seria possível fazer previsões sobre um dado sistema  $S_1$  fazendo medidas sobre um outro sistema  $S_2$ , mesmo se estes sistemas estivessem espacialmente separados<sup>1</sup>. Isto contradizia a teoria de relatividade especial de Einstein, pois permitiria transmissão de informação instantânea. Desta forma, eles concluíram que a mecânica quântica era uma teoria não-local e que necessitava de variáveis adicionais para restabelecer a localidade. O caráter probabilístico da teoria foi atribuído ao não conhecimento destas variáveis (chamadas variáveis ocultas). Portanto, os resultados de uma teoria determinista e local, como são as teorias de variáveis ocultas, seriam os mesmos da mecânica quântica, mas não haveria o “problema” da não-localidade.

Durante muitos anos esta discussão permaneceu no terreno da filosofia até que, em 1964, Bell [2] encontrou uma maneira de confrontar mecânica quântica e teorias locais de variáveis ocultas, que poderia ser testada experimentalmente. Tratando um experimento do tipo EPR por meio de uma teoria local de variáveis ocultas, Bell deduziu uma desigualdade à qual esta teoria deveria satisfazer. Ele mostrou então que, em certas situações, as previsões da mecânica quântica *não* eram as mesmas que as desta teoria local: a desigualdade é violada quando o sistema está num *estado emaranhado*. O emaranhamento é um tipo de correlação que existe entre sistemas quânticos (ou entre diferentes graus de liberdade de um dado sistema), e, por ser o responsável pelo caráter não local da teoria quântica é comum se dizer que esta correlação (quântica) é mais “forte” que qualquer

---

<sup>1</sup>Algo que Einstein afirmou mais tarde se tratar de uma “ação fantasmagórica à distância”.

correlação clássica. Existem várias formas da desigualdade de Bell, sendo a mais famosa a de Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) que foi concebida para situações experimentais mais realistas. Inúmeros experimentos demonstraram a violação da desigualdade de Bell [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] e portanto estão de acordo com mecânica quântica. Porém, ainda há muita discussão em torno deles devido aos problemas associados às limitações técnicas dos experimentos, como por exemplo a baixa eficiência quântica dos detectores. Apesar disso, tudo leva a crer que o comportamento não local dos estados emaranhados é uma realidade.

Após o trabalho de Bell, o emaranhamento passou a ser passível de testes para sua verificação, os quais na verdade são testes dos fundamentos da mecânica quântica. Mas a grande novidade ainda estava por vir. No final do século XX, o emaranhamento passou a ser pensado como um recurso com capacidade de realizar tarefas como computação, processamento e transmissão de informação de forma muito mais eficiente e segura que as conhecidas até hoje. Por isso, o emaranhamento é um dos pilares de uma nova área de pesquisa, a *teoria de informação quântica*, um ramo da ciência que engloba a computação quântica onde vários algoritmos já foram desenvolvidos (veja a Ref. [13]) e a comunicação quântica onde vários protocolos já foram propostos e realizados experimentalmente como por exemplo: criptografia quântica [14], codificação superdensa [15], teletransporte quântico [16], entre outros.

Vimos portanto que, o que a princípio poderia ser um grande furo da teoria teve um efeito contrário. A mecânica quântica “deu a volta por cima” e hoje o emaranhamento tem um potencial fantástico para aplicações tecnológicas as quais poderão revolucionar a maneira de processar e transmitir informação. Obviamente, ainda há muito o que se fazer para compreendermos completamente esta propriedade de sistemas quânticos e utilizá-la das formas que têm sido propostas. Neste capítulo vamos fazer uma revisão de alguns conceitos importantes de mecânica quântica e emaranhamento, com ênfase nos tópicos que abordaremos ao longo desta tese.

## 1.2 Sistemas quânticos bipartidos

Sistemas quânticos bipartidos são sistemas compostos por dois subsistemas associados a espaços de Hilbert de qualquer dimensão, como por exemplo, dois fótons, um átomo e um fóton, dois graus de liberdade de um mesmo sistema, etc. Estes são os sistemas mais simples onde pode haver emaranhamento e é o que será tratado neste trabalho. Nesta seção vamos discutir o emaranhamento em estados puros deste sistema e apresentar uma importante ferramenta para o seu estudo, a decomposição de Schmidt. Faremos também uma breve discussão de emaranhamento em estados mistos. O caso mais geral de emaranhamento multipartite, que tem uma estrutura muito mais complicada não será discutido.

### 1.2.1 Estados puros

Considere dois sistemas quânticos  $A$  e  $B$  os quais são associados aos espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  de dimensão  $d_A$  e  $\mathcal{H}_B$  de dimensão  $d_B$ , respectivamente. O sistema composto  $A + B$  deve ser descrito no espaço produto tensorial de cada parte, i.e.,  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  cuja dimensão será  $d_A \times d_B$  [17]. Uma possível base ortonormal de vetores em  $\mathcal{H}_{AB}$  é formada pelo produto tensorial de bases ortonormais  $\{|A_i\rangle\} \in \mathcal{H}_A$  e  $\{|B_j\rangle\} \in \mathcal{H}_B$  com  $i = 1, 2, \dots, d_A$  e  $j = 1, 2, \dots, d_B$ . Um estado puro arbitrário deste sistema composto pode ser expandido nesta base como

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |A_i\rangle \otimes |B_j\rangle, \quad (1.1)$$

onde  $c_{ij} = \langle A_i, B_j | \Psi \rangle$  são coeficientes complexos<sup>2</sup> que satisfazem  $\sum_i \sum_j |c_{ij}|^2 = 1$ . Se todos os coeficientes da expansão são fatoráveis, i.e.,  $c_{ij} = a_i b_j \forall i, j$ , teremos que o estado do sistema global é um estado produto

$$|\Psi\rangle = \sum_i a_i |A_i\rangle \otimes \sum_j b_j |B_j\rangle \equiv |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B. \quad (1.2)$$

Dito de outra forma, se pudermos descrever o estado de cada subsistema  $A$  e  $B$  como um estado puro, temos que o estado global  $|\Psi\rangle$  será um estado produto. Se esta condição não é satisfeita o estado é emaranhado, ou seja, o estado global é puro mas nós não podemos atribuir um vetor de estado para cada subsistema como em (1.2). Individualmente  $A$  e  $B$  serão misturas estatísticas e o estado de cada um deles é descrito por um operador densidade o qual é obtido tomando-se o traço parcial de  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$  sobre um dado subsistema. Esta discussão ficará mais clara quando usarmos a decomposição de Schmidt mais adiante.

Estados puros de sistemas bipartidos são, a princípio, fáceis de se caracterizar quanto ao seu emaranhamento. Na Ref. [18], por exemplo, Gisin mostrou que *qualquer* estado puro emaranhado viola uma desigualdade de Bell enquanto os estados produto satisfazem estas desigualdades. Portanto, para estados puros, existe uma equivalência entre estados emaranhados e estados que violam desigualdades de Bell.

### Qubits e qudits

O *bit* é a unidade básica de informação clássica e pode assumir um dos dois valores (ou estados) lógicos  $\{0, 1\}$ . De maneira similar, a unidade básica de informação quântica foi chamada de quantum bit ou *qubit*, que ao contrário do clássico, pode ser encontrado numa superposição arbitrária  $a|0\rangle + b|1\rangle$  dos estados lógicos  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , os quais formam a chamada base computacional. Muitos sistemas quânticos de dois níveis, como por exemplo, partículas de spin-1/2, a polarização do fóton entre outros, podem representar um

<sup>2</sup>Na fantástica notação de Dirac, o símbolo  $\otimes$  de produto tensorial pode sempre ser omitido e podemos escrever  $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle|\phi\rangle = |\psi, \phi\rangle$ , o que será visto frequentemente ao longo da tese.



qubit. Outra grande diferença entre bits e qubits é que graças ao princípio de superposição da mecânica quântica, o qubit pode ser emaranhado com outros qubits. Considerando o caso de dois qubits temos que uma possível base no espaço de Hilbert deste sistema seria  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ , que é simplesmente o produto tensorial das bases computacionais de cada parte. Uma base não-trivial deste sistema é a chamada base dos estados de Bell, cujos vetores ortonormais são dados por

$$\begin{aligned} |\Psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle \pm |1\rangle|0\rangle), \\ |\Phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle \pm |1\rangle|1\rangle). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Esta é uma base formada por estados emaranhados. Ela pode ser construída a partir da base produto por operações unitárias<sup>3</sup> sobre os qubits.

Ainda no contexto de teoria de informação quântica, os sistemas de mais dimensões também têm nomes especiais. Sistemas quânticos de  $d$  níveis são chamados de *qudits* (às vezes qunits por alguns autores). Entre os qudits, os representados por sistemas de três níveis são chamados de qutrits e os de quatro níveis de ququarts. Ainda vamos falar muito de qubits e qudits na segunda e terceira parte da tese.

## 1.2.2 Decomposição de Schmidt

O teorema da decomposição de Schmidt (DS) é uma ferramenta matemática de grande utilidade para estudar as propriedades de emaranhamento em sistemas quânticos bipartidos num estado *puro* arbitrário. Ela torna estas propriedades bem mais transparentes, como veremos. Este teorema nos diz que para qualquer estado puro de um sistema quântico bipartido ( $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ), devem existir bases ortonormais  $\{|a_i\rangle\} \in \mathcal{H}_A$  e  $\{|b_i\rangle\} \in \mathcal{H}_B$ , tais que este estado pode ser *sempre* representado por um somatório simples de termos bi-ortonormais<sup>4</sup>

$$|\Psi\rangle = \sum_i \mu_i |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle. \tag{1.4}$$

Além disso, se as fases são absorvidas na definição dos vetores de base, os coeficientes desta soma serão reais e positivos, satisfazendo  $\sum_i \mu_i^2 = 1$ . Note que a soma é sobre um único índice ao invés de uma soma sobre dois índices como na Eq. (1.1). Os coeficientes  $\mu_i$  são os chamados coeficientes de Schmidt e os conjuntos de vetores ortonormais  $\{|a_i\rangle\}$  e  $\{|b_i\rangle\}$  formam as chamadas bases de Schmidt para o estado  $|\Psi\rangle$ . A demonstração deste teorema é muito simples e pode ser encontrada, por exemplo, nas Refs. [19, 20]. Alguns aspectos da DS são importantes e merecem ser destacados:

<sup>3</sup>Na linguagem da computação quântica, estas operações são usualmente as portas lógicas quânticas Hadamard (sobre um dos qubits) seguida por uma CNOT [13].

<sup>4</sup>Para qualquer par  $|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$  da expansão temos que  $\langle a_i | a_j \rangle \langle b_i | b_j \rangle = \delta_{ij} \delta_{ij}$ .

### O espectro dos estados reduzidos

As matrizes densidade reduzidas dos subsistemas,  $\hat{\rho}_A$  e  $\hat{\rho}_B$ , têm o espectro positivo idêntico. Tomando o traço parcial de  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$  na Eq. (1.4) sobre os subsistemas  $B$  e  $A$  teremos

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_A &= \text{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_i \mu_i^2 |a_i\rangle\langle a_i|, \\ \hat{\rho}_B &= \text{Tr}_A |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_i \mu_i^2 |b_i\rangle\langle b_i|,\end{aligned}\tag{1.5}$$

onde a soma só inclui os  $\mu_i$ 's não nulos. Aqui, fica claro que para estados emaranhados (mais de um  $\mu_i \neq 0$ ) o estado reduzido dos subsistemas é uma mistura estatística enquanto para estados produto os subsistemas são puros (apenas um termo  $\mu_i = 1$ ). É muito interessante notar que para qualquer função  $\mathcal{F}$ , da matriz densidade reduzida que só dependa do seu espectro, teremos

$$\mathcal{F}(\hat{\rho}_A) = \mathcal{F}(\hat{\rho}_B).\tag{1.6}$$

Esta propriedade de sistemas bipartidos num estado puro, tem implicações diretas nas suas propriedades de emaranhamento. Veremos isto na seção 1.4 quando tratarmos de quantificação de emaranhamento.

### Número de Schmidt

O número de termos na DS de um dado estado puro bipartido  $|\Psi\rangle$ , é chamado número de Schmidt ( $n_S$ ) e o seu valor nos diz se este estado é ou não emaranhado. Se  $|\Psi\rangle$  tem  $n_S = 1$  ele é um estado produto, caso contrário será um estado emaranhado. Por exemplo, para dois qubits temos:

$$n_S = 1 \rightarrow |\Psi\rangle = |\phi\rangle_A |\chi\rangle_B,\tag{1.7}$$

$$n_S = 2 \rightarrow |\Psi\rangle = \mu_1 |a_1\rangle |b_1\rangle + \mu_2 |a_2\rangle |b_2\rangle.\tag{1.8}$$

Como este é o número de autovalores não nulos de  $\hat{\rho}_A$  (e  $\hat{\rho}_B$ ), ele não deve aumentar sob operações locais, isto é, operações realizadas sobre cada subsistema sem que haja interação direta entre as partes ou entre elas e outros sistemas quânticos. Estas operações incluem:

- *Transformações unitárias locais*: transformações do tipo  $\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B$  preservam o número de Schmidt pois representam apenas mudanças de base em cada subsistema. Portanto, não se pode criar nem destruir emaranhamento com este tipo de operação.

- *Medidas locais*: nenhum tipo de medida local pode aumentar o número de Schmidt. Se fosse possível, poderíamos criar um estado misto com medidas em um estado inicialmente puro, o que não ocorre. Portanto, com medidas locais apenas, não se pode criar (ou aumentar) emaranhamento.

Nem mesmo as *operações locais com comunicação clássica* (LOCC<sup>5</sup>), que são uma classe mais geral de operações locais, podem criar emaranhamento. Este tipo de operação envolve a comunicação via canais clássicos (telefone, por exemplo) mas as correlações que são geradas podem ser descritas classicamente.

### Construção da DS

Para construir a DS de  $|\Psi\rangle$  em caso de subsistemas discretos, nós diagonalizamos as matrizes densidade reduzidas  $\hat{\rho}_A$  e  $\hat{\rho}_B$  e então somamos o produto tensorial de seus autovalores (que tenham mesmo autovalor) multiplicado pela raiz quadrada do correspondente autovalor, chegando então à Eq. (1.4). Estados diferentes têm DS diferentes. Isto é claro uma vez que o conjunto  $\{|a_i\rangle \otimes |b_i\rangle\}$  não é uma base ortonormal completa em  $\mathcal{H}_{AB}$ . Em geral, a DS de um estado é única, a menos de escolhas de fases. Porém, quando  $\hat{\rho}_A$  (e então  $\hat{\rho}_B$ ) tem um ou mais autovalores positivos degenerados, a DS de  $|\Psi\rangle$  não é única. Se  $\mu_i^2$  tem um grau de degenerescência  $n$  ( $> 1$ ), os  $n$  vetores  $|a_i\rangle$  e  $|b_i\rangle$  correspondentes são definidos a menos de transformações unitárias unimodulares (determinante 1) representadas por matrizes  $n \times n$ . Um exemplo são os estados de Bell na Eq. (1.3). Por isso, um estado emaranhado, é emaranhado em qualquer base.

### 1.2.3 Estados mistos

Não é o nosso objetivo neste trabalho estudar emaranhamento em estados mistos de sistemas bipartidos, mas será útil definir o que não é emaranhamento em tais sistemas pois frequentemente há a necessidade de testar se um estado puro é realmente emaranhado ou se são estados mistos classicamente correlacionados. Nós mesmos fazemos estes testes nos trabalhos experimentais aqui apresentados<sup>6</sup>.

Consideramos novamente o sistema composto  $A + B$ . Em [21], Werner separou os estados mistos de tais sistemas em duas classes:

#### Estados classicamente correlacionados

Um estado classicamente correlacionado é dado por uma soma convexa de estados produto:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_i\rangle\langle b_i|, \quad (1.9)$$

<sup>5</sup>Sigla em inglês para Local Operations and Classical Communication.

<sup>6</sup>Veja os capítulos 4 e 5.

com  $p_i \geq 0$  e  $\sum_i p_i = 1$ . Ele é chamado também de estado separável. Um estado como este pode ser preparado através de LOCC da seguinte maneira: suponha que cada parte ( $A$  e  $B$ ) pode preparar um estado puro de um conjunto  $i = 1, \dots, n$ , através de operações locais, i.e.,  $A$  prepara  $|a_i\rangle$  e  $B$  prepara  $|b_i\rangle$ . Suponha agora que esta preparação está condicionada a um valor fornecido por um gerador de números aleatórios, que gera os números  $i = 1, \dots, n$  com probabilidade  $p_i$ . O valor gerado é comunicado às partes via canal clássico e o estado global preparado será então aquele dado pela Eq. (1.9). É nítido que estes estados têm correlações, porém elas são puramente clássicas. Como é uma mistura de estados que satisfazem as desigualdades de Bell (estados produto), o estado separável também satisfaz estas desigualdades.

### Estados mistos emaranhados

Estados mistos emaranhados são todos aqueles que *não* podem ser escritos como na Eq. (1.9). Surpreendentemente, como foi mostrado por Werner [21], nem todos os estados desta classe violam as desigualdades de Bell. Portanto existem estados mistos emaranhados, chamados agora de estados de Werner, que podem ser descritos por uma teoria local de variáveis ocultas. Ao contrário dos estados puros, não existe uma equivalência entre estados mistos emaranhados e estados que violam desigualdades de Bell. Isto já indica como é complexo o problema da caracterização de emaranhamento em estados mistos.

Apesar de a desigualdade de Bell não revelar a não-localidade dos estados de Werner, esta se revela por exemplo no processo de teletransporte quântico como foi mostrado por Popescu [22]. Ele mostrou que estes estados poderiam ser usados para teletransportar um estado desconhecido  $|\Phi\rangle$ , com uma fidelidade<sup>7</sup> maior que a que se poderia obter classicamente. Para sistemas bipartidos, foi demonstrado recentemente que *todo* estado emaranhado pode ser usado como recurso em protocolos de informação quântica [23].

## 1.3 Manifestações e utilizações do emaranhamento

Após definirmos o que é emaranhamento em sistemas quânticos bipartidos, vamos discutir nesta seção, quais são as propriedades que o torna tão estranho do ponto de vista da física clássica. Falaremos então de desigualdade de Bell e de aplicações práticas em protocolos de informação quântica.

### 1.3.1 Desigualdade de Bell

#### Paradoxo EPR

No artigo de EPR [1] os autores discutem se a mecânica quântica é uma teoria completa. Para isso, fazem inicialmente duas definições:

<sup>7</sup>A definição de fidelidade é dada na subseção 1.3.2.

- *Elementos de realidade*: quantidades físicas cujos valores podem ser previstos com certeza e sem perturbar o sistema.
- *Teoria completa*: para cada elemento de realidade deve haver uma descrição teórica do sistema físico.

Com essas definições, EPR argumenta que se a mecânica quântica é uma teoria completa, observáveis que não comutam nunca serão elementos de realidade simultaneamente, ou seja, se uma quantidade pode ser prevista com certeza, a outra não. Através de um experimento idealizado, eles chegam a uma contradição deste argumento.

Vamos considerar a versão do paradoxo EPR introduzida por Bohm [24], já que no original [1] os autores consideram duas partículas emaranhadas simultaneamente em variáveis contínuas de posição e momento. Bohm simplificou o problema tratando-o com variáveis discretas, mais especificamente, considerando duas partículas de spin-1/2, o que nos permite usar a linguagem de qubits.

Consideremos um sistema de dois qubits no estado  $|\Psi^-\rangle$  dado pela Eq. (1.3), ou seja

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle), \quad (1.10)$$

e vamos supor que cada qubit é enviado a um laboratório afastado um do outro; um qubit é entregue ao físico experimental  $A$  e outro ao  $B$ . Agora,  $A$  vai medir um dos observáveis definidos pelos operadores de Pauli

$$\sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, \quad (1.11)$$

$$\sigma_y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|, \quad (1.12)$$

$$\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|, \quad (1.13)$$

ou por uma combinação linear deles, pois juntamente com a identidade  $\mathbb{I}$ , esses operadores formam uma base para qualquer operador de um qubit e ainda satisfazem a relação de comutação  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$  [17]. Suponhamos que  $A$  meça  $\sigma_z$ , o qual tem  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  como autovetores, com autovalores  $+1$  e  $-1$ , respectivamente. Se por exemplo, o resultado da medida é  $+1$ , de acordo com os postulados da mecânica quântica, o estado do qubit de  $B$  será  $|1\rangle$ . Portanto, após a medida,  $A$  saberá com certeza que o resultado de uma medida de  $\sigma_z$  do qubit de  $B$  fornecerá o autovalor  $-1$ . Na definição de EPR,  $\sigma_z^B$  corresponde a um elemento de realidade física, pois seu valor pode ser determinado com certeza e sem perturbar o sistema (pela medida de  $\sigma_z^A$  de  $A$ ). Se ao invés de  $\sigma_z$ ,  $A$  medisse  $\sigma_x$  e obtivesse o autovalor  $+1$ , o qubit em  $B$  após a medida seria projetado no estado  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ . Novamente,  $A$  saberá com certeza o resultado da medida  $\sigma_x$  do qubit em  $B$  e portanto,  $\sigma_x^B$  é também um elemento de realidade.

Com isto, chega-se à contradição do argumento de EPR, pois nessa situação dois observáveis que não comutam,  $\sigma_z^B$  e  $\sigma_x^B$ , são elementos de realidade simultaneamente e assim, EPR concluem que a mecânica quântica é uma teoria incompleta.

### Desigualdade de Bell

A partir do trabalho de EPR, aqueles que acreditavam que a mecânica quântica era incompleta tentam desenvolver novas teorias onde a descrição dos estados quânticos é complementada por um conjunto de variáveis as quais por não serem descritas pela mecânica quântica foram chamadas de variáveis ocultas. Daí o nome de teoria de variáveis ocultas. Os debates em torno destas teorias ficaram mais próximos de um debate filosófico, pois não havia previsões de resultados diferentes daqueles da mecânica quântica.

Porém, em 1964 Bell mostrou que a hipótese implícita no argumento de EPR é o chamado *realismo local*, o que quer dizer que qualquer quantidade física de um sistema tem um valor definido independente se uma medida é feita ou não (realismo) e que sistemas distantes entre si não têm influência direta um sobre o outro (localidade). Bell demonstrou que uma teoria construída a partir destas hipóteses satisfaz uma desigualdade, que são violadas pela mecânica quântica. Agora, era possível testar experimentalmente se EPR tinham razão. Existem várias outras versões da desigualdade de Bell. Vamos discutir a mais famosa delas, a desigualdade de CHSH [3].

Vamos considerar agora que duas partículas são preparadas e uma é enviada para  $A$  e a outra para  $B$  em seus laboratórios distantes um do outro. Cada um pode medir duas propriedades da partícula,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  para  $A$  e  $\beta_1$  e  $\beta_2$  para  $B$ , e os possíveis resultados são  $+1$  ou  $-1$ . No restante da análise se assume a hipótese do realismo local. Assim, as medidas são feitas simultaneamente, de forma que não há influência de uma sobre a outra. Com as definições dadas acima, é fácil mostrar que

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_2 = \pm 2. \quad (1.14)$$

Agora entra a hipótese de realismo. Suponha que  $p(a_1, a_2, b_1, b_2)$  seja a probabilidade que o sistema tenha sido preparado com  $\alpha_1 = a_1$ ,  $\alpha_2 = a_2$ ,  $\beta_1 = b_1$  e  $\beta_2 = b_2$ , onde  $a$  e  $b$  podem assumir os valores  $+1$  ou  $-1$ . Calculando o valor esperado da quantidade dada pela Eq. (1.14), temos que

$$E(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_2) = \sum_{a_1, a_2, b_1, b_2} p(a_1, a_2, b_1, b_2)(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_2) \leq 2, \quad (1.15)$$

e assim nós obtemos a desigualdade de Bell (CHSH)

$$E(\alpha_1\beta_1) + E(\alpha_2\beta_1) + E(\alpha_2\beta_2) - E(\alpha_1\beta_2) \leq 2. \quad (1.16)$$

Os resultados de medidas de uma teoria realista e local satisfazem esta desigualdade. Vamos mostrar que a mecânica quântica pode violá-la. Consideremos novamente que  $A$  e  $B$  compartilham dois qubits no estado  $|\Psi^-\rangle$  dado pela Eq. (1.10). Agora os seguintes observáveis são medidos:  $\alpha_1 = \sigma_z^A$  e  $\alpha_2 = \sigma_x^A$  para  $A$  e  $\beta_1 = -(\sigma_z^B + \sigma_x^B)/\sqrt{2}$  e  $\beta_2 = (\sigma_z^B - \sigma_x^B)/\sqrt{2}$  para  $B$ . Calculando os valores esperados correspondentes na Eq. (1.16), temos que

$$E(\alpha_1\beta_1) + E(\alpha_2\beta_1) + E(\alpha_2\beta_2) - E(\alpha_1\beta_2) = 2\sqrt{2}, \quad (1.17)$$

o que mostra a violação da desigualdade. Por isso a mecânica quântica é uma teoria não local, e os estados emaranhados são os responsáveis por isso. Na derivação de Bell-CHSH usou-se o estado maximamente emaranhado  $|\Psi^-\rangle$ , mas como foi mostrado por Gisin [18], todo estado puro emaranhado viola essa desigualdade. Além disso, para a medida de qualquer observável que tenha apenas dois autovalores (como é o exemplo), a violação dada pela Eq. (1.17) é máxima [25].

### 1.3.2 Informação quântica

O emaranhamento discutido por EPR e colocado a prova por Bell passou a ser testado experimentalmente com todos os resultados a favor da mecânica quântica. Mas além disso, outros aspectos dessa propriedade quântica foram descobertos. O emaranhamento passou a ser visto como um recurso para tarefas como processamento de dados e comunicação numa forma mais segura e eficiente. Vamos descrever de forma resumida algumas das aplicações mais interessantes, nos limitando apenas ao caso de dois qubits.

#### Criptografia quântica com emaranhamento

A criptografia de chave privada consiste em duas partes que se comunicam conhecerem uma chave secreta. De posse dessa chave,  $A$  codifica uma mensagem que deseja enviar para  $B$ , o qual pode decodificar a mensagem, também utilizando a chave. O grande desafio é evitar que essa chave seja descoberta por um espião, que no caso poderia decodificar a mensagem. O que se mostrou foi que os axiomas da mecânica quântica permitem a geração e distribuição de chaves entre as partes  $A$  e  $B$  de forma absolutamente segura. Por isso, os protocolos de criptografia quântica são na realidade protocolos de distribuição de chaves, usando as propriedades da mecânica quântica. O primeiro deles foi proposto em 1984 por Bennett e Brassard [26] e não utilizava emaranhamento. Em 1991, Ekert propôs um esquema de distribuição de chaves que foi o primeiro protocolo em informação quântica a efetivamente utilizar o emaranhamento como recurso [14].

Suponhamos que um grande número de pares de qubits é preparado no estado de Bell  $|\Psi^-\rangle$  [Eq. (1.3)] e um componente de cada par é enviado para  $A$  e o outro para  $B$ . Primeiramente,  $A$  e  $B$  escolhem alguns desses pares e fazem um teste de Bell sobre eles. A violação da desigualdade de Bell como na Eq. (1.17), assegura que o estado não foi perturbado por nenhum espião e eles podem prosseguir na tarefa. Então,  $A$  e  $B$  fazem medidas sobre os qubits de cada par emaranhado escolhendo aleatoriamente entre  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  [Eqs. (1.11) e (1.13), respectivamente]. Por um canal público, eles divulgam as bases em que mediram cada qubit. As medidas feitas em bases diferentes são descartadas e como as medidas na mesma base são perfeitamente correlacionadas, a chave está estabelecida para  $A$  e  $B$ .

### Codificação superdensa

Nesse protocolo, dois bits de informação clássica podem ser codificados em um único qubit, daí o nome de codificação superdensa (“superdense coding”) [15]. Suponha que  $A$  e  $B$  dividem um par de qubits no estado de Bell  $|\Psi^+\rangle$  [Eq. (1.3)].  $B$  pode aplicar uma de quatro operações unitárias em seu qubit, que levam o estado de Bell que eles compartilham em outro. Ele pode não fazer nada, o que equivale a aplicar a identidade; ele pode fazer  $|\Psi^+\rangle \rightarrow |\Psi^-\rangle$ , aplicando um deslocamento de fase (“phase shift”) representado pelo operador de Pauli  $\sigma_z$  na Eq. (1.13). Para fazer  $|\Psi^+\rangle \rightarrow |\Phi^+\rangle$ , ele faz uma inversão de spin (“spin flip”) no seu qubit, i.e, aplica  $\sigma_x$  [Eq. (1.11)] enquanto com uma combinação de inversão de spin e deslocamento de fase ( $\sigma_z + \sigma_x$ ) ele faz  $|\Psi^+\rangle \rightarrow |\Phi^-\rangle$ . Após fazer uma dessas operações, ele envia seu qubit para  $A$  que vai fazer uma medida projetiva na base de Bell, sobre os dois qubits e terá como resultado um desses quatro estados de acordo com a operação de  $B$ . Atribuindo o bit 0 e para os estados  $\Psi$  e para a fase “-” e o bit 1 para os estados  $\Phi$  e a fase “+”,  $A$  ganha dois bits de informação com o único qubit enviado por  $B$ .

### Teletransporte quântico

Enquanto nos protocolos anteriores o emaranhamento é usado para melhorar aquilo que se pode fazer classicamente, há um protocolo baseado em emaranhamento que não tem nenhuma contrapartida no mundo clássico, o teletransporte quântico [16]. Suponha que  $A$  queira entregar para  $B$  um qubit num estado desconhecido  $|\varphi\rangle$  e não há como se transportar o próprio qubit de  $A$  para  $B$ . Sabemos também que nenhuma medida que  $A$  faça sobre, ele pode caracterizá-lo completamente, já que há apenas um qubit e seu estado seria destruído. Suponha agora que  $A$  e  $B$  compartilham um par de qubits no estado de Bell  $|\Psi^-\rangle$  [Eq. (1.3)]. O estado do sistema de três qubits é então  $|\varphi\rangle \otimes |\Psi^-\rangle$ . É fácil mostrar que se  $A$  fizer uma medida projetiva sobre os seu dois qubits, na base dos estados Bell, o estado do qubit de  $B$  é projetado em  $(\sigma_x)^i(\sigma_z)^j|\varphi\rangle$ , onde  $i, j = 0, 1$



depende do resultado da medida. Então,  $A$  envia para  $B$  por um canal clássico, dois bits de informação, ou seja o resultado de sua medida ( $\Psi$  ou  $\Phi$  e “+” ou “-”, onde  $0 \rightarrow \Psi$ ,  $-$  e  $1 \rightarrow \Phi$ ,  $+$ ). De posse dessa informação,  $B$  aplica a transformação unitária apropriada e o estado  $|\varphi\rangle$  é então “teletransportado” para seu qubit.

### O conceito de fidelidade

Para finalizar esta seção vamos apresentar o conceito de fidelidade que é muito importante em informação quântica e que será usado por nós no capítulo 4. A fidelidade é uma medida de quão próximos são dois estados quânticos. Por exemplo, entre um estado puro  $|\Psi\rangle$  e um estado  $\hat{\rho}$  arbitrário, ela é definida por [13]

$$F \equiv \sqrt{\langle \Psi | \hat{\rho} | \Psi \rangle}. \quad (1.18)$$

Em todas as aplicações para o emaranhamento discutidas acima, consideramos apenas os casos em que os comunicadores dividem pares de qubits num estado de Bell, ou seja, estados maximamente emaranhados. Estes são os casos ideais, mas a realidade é outra pois devido a decoerência e/ou imperfeições na preparação, os estados envolvidos são apenas parcialmente emaranhados e  $F$  na Eq. (1.18) pode ser uma medida da fidelidade da informação quântica transmitida em algum protocolo, em relação ao caso ideal.

## 1.4 Quantificação de emaranhamento

Estados como os de Bell na Eq. (1.3) são emaranhados enquanto estados produto não têm nenhum emaranhamento. Portanto, o emaranhamento é uma propriedade de sistemas compostos que pode ser comparada, isto é, podemos nos perguntar se um estado é mais ou menos emaranhado que outro. Além disso, o emaranhamento é um recurso utilizável em protocolos de informação quântica e sabe-se, por exemplo, que estados menos emaranhados reduzem a fidelidade da informação transmitida num processo de teletransporte quântico [16]. Portanto é importante saber a quantidade deste recurso presente num estado para sabermos com que eficiência podemos utilizá-lo. A quantificação de emaranhamento é então um meio de se obter um valor que expresse o grau de emaranhamento de um estado e responda as questões levantadas acima. Vamos discutir medidas de emaranhamento apenas para estados puros de sistemas bipartidos discretos. Para estados mistos, este problema é bastante complexo e não é nosso objetivo abordá-lo aqui.

### 1.4.1 Propriedades de uma medida emaranhamento

Seja  $|\Psi\rangle$  um estado qualquer de um sistema quântico bipartido e  $E(\Psi)$  uma medida de emaranhamento para este tipo estado. Na Ref. [27] Vedral *et al.* apresentaram as

condições que qualquer medida de emaranhamento deve satisfazer:

- (a)  $E(\Psi) = 0$  se e somente se  $|\Psi\rangle$  é um estado produto.
- (b)  $E(\Psi)$  não varia sob transformações unitárias locais.
- (c)  $E(\Psi)$  não aumenta sob medidas locais e comunicação clássica.

A condição (a) é óbvia, pois os estados produto são os únicos que não têm emaranhamento. As condições (b) e (c) seguem da nossa discussão de número de Schmidt na subseção 1.2.2. Como condições adicionais podemos citar a *aditividade*, i.e, a quantidade de emaranhamento em  $|\Psi\rangle^{\otimes n}$  ( $n$  cópias independentes de  $|\Psi\rangle$ ) é  $n$  vezes a quantidade de emaranhamento de uma única cópia  $|\Psi\rangle$  e a *continuidade*, que requer que pequenas mudanças no estado produzam pequenas mudanças no grau de emaranhamento.

### 1.4.2 Entropia de emaranhamento e concorrência

Antes de apresentar um quantificador de emaranhamento para estados puros de sistemas bipartidos, vamos relembrar a definição e o significado da função entropia de von Neumann.

#### Função entropia de von Neumann

A função entropia de von Neumann é definida como [28]

$$S(\hat{\rho}) \equiv -\text{Tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}). \quad (1.19)$$

Na base onde  $\hat{\rho}$  é diagonal temos

$$S(\hat{\rho}) = -\sum_n \lambda_n \log_2 \lambda_n, \quad (1.20)$$

onde  $\lambda_n$  são os autovalores de  $\hat{\rho}$  que satisfazem  $\sum_n \lambda_n = 1$ .

Esta função pode ser considerada como uma medida do grau de mistura [28] do estado representado por  $\hat{\rho}$ . Consideremos os dois casos extremos: um estado puro e uma mistura máxima. Teremos, para um qubit:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| &\rightarrow S(\hat{\rho}) = 0; \\ \hat{\rho} = \frac{1}{2}\mathbb{I} &\rightarrow S(\hat{\rho}) = 1. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Para quaisquer outras misturas temos que  $0 < S(\hat{\rho}) < 1$ . Para um sistema de  $N$  níveis, temos  $S(\hat{\rho}) = 0$  para estados puros,  $S(\hat{\rho}) = \log_2 N$  para misturas máximas e  $0 < S(\hat{\rho}) < \log_2 N$  para qualquer outra mistura.

### Quantificadores de emaranhamento

Como foi discutido na seção 1.2, quando um estado puro  $|\Psi\rangle$ , de um sistema bipartido é um estado produto, os subsistemas serão estados puros. Quando  $|\Psi\rangle$  é um estado emaranhado, os subsistemas serão necessariamente misturas estatísticas. O grau de mistura dos subsistemas é igual, pois a função entropia de von Neumann depende só dos autovalores dos estados reduzidos. É nítido que há uma relação entre o grau de mistura dos subsistemas, com o grau de emaranhamento do estado do sistema composto, quando este é um *estado puro*. Quanto maior o grau de mistura da matriz densidade reduzida dos subsistemas, mais emaranhado é o estado do sistema total. Isso torna a função entropia de von Neumann um ótimo candidato a quantificador de emaranhamento para estes sistemas.

De fato, como foi mostrado por Bennett *et al.* [29], a *entropia de emaranhamento*, que é a entropia de von Neumann dos subsistemas, satisfaz as condições para uma boa medida de emaranhamento. Portanto,

$$E(\Psi) = S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B). \quad (1.22)$$

Estados cujos operadores reduzidos são proporcionais à identidade, i.e., cujos subsistemas são misturas estatísticas máximas, são os chamados estados maximamente emaranhados.

Existem outras medidas de emaranhamento para estados puros, mas como foi mostrado na Ref. [30], todas são necessariamente funções monótonas de  $E(\Psi)$  e portanto não há problema de ordenamento do grau de emaranhamento dos estados quando se usa uma ou outra. Um exemplo é a *concorrência* (*concurrence*), uma medida de emaranhamento para sistemas de dois qubits. Para estados puros ela é definida como

$$\mathcal{C}(\Psi) = |\langle \Psi | \sigma_y^A \otimes \sigma_y^B | \Psi^* \rangle|, \quad (1.23)$$

onde  $|\Psi^*\rangle$  é o complexo conjugado do estado original  $|\Psi\rangle$  e  $\sigma_y$  é o operador de Pauli dado pela Eq. (1.12).

Esta quantidade apareceu pela primeira vez num artigo de Bennett *et al.* [31], onde se mostrou que ela satisfaz as condições necessárias às medidas de emaranhamento. Mais tarde, esta medida foi explorada de uma forma completa por Woiters e Hill [32] (os quais lhe deram o nome de *concorrência*) e por Woiters em [33]. Podemos expressar a concorrência em termos dos coeficientes de Schmidt o que torna a expressão muito mais clara e informativa. Utilizando a decomposição de Schmidt [veja Eq. (1.4)] para qubits, é fácil mostrar que

$$\mathcal{C}(\Psi) = 2\mu_1\mu_2 = 2\mu_1\sqrt{1 - \mu_1^2}. \quad (1.24)$$

Assim como  $E(\Psi)$  na Eq. (1.22),  $\mathcal{C}(\Psi)$  varia de 0 (estado produto) a 1 (estado maximamente emaranhado). Observe que para dois qubits num estado puro, a quantidade de emaranhamento depende de um único parâmetro. No capítulo 5 voltaremos a este tema

quando apresentarmos um experimento de medida de emaranhamento em estados puros de dois qubits.

# Fonte de Fótons Emaranhados: Conversão Paramétrica Descendente

Neste capítulo faremos uma breve revisão do processo de conversão paramétrica descendente e apresentaremos um importante resultado obtido por Monken, Souto Ribeiro e Pádua [34]. Utilizando este resultado, discutiremos a evolução do estado quântico dos fótons gêmeos emaranhados em momento transversal, quando eles se propagam no espaço livre e são transmitidos através de sistemas ópticos lineares.

## 2.1 Introdução

Como foi discutido no capítulo 1, o estudo do emaranhamento tem um interesse do ponto de vista fundamental em testes de fundamentos da mecânica quântica e também em aplicações práticas na teoria de informação quântica. Os protocolos de informação quântica utilizam propriedades (quânticas) como superposição e emaranhamento para processamento e transmissão de informação de forma eficiente e segura [13]. Portanto, essa é uma área promissora para aplicações tecnológicas e estas aplicações dependem, entre outras coisas, da existência de sistemas físicos capazes de produzir emaranhamento de forma eficiente e controlável. Isto ainda é um grande desafio, mas um esforço na pesquisa experimental têm sido feito na busca de fontes que satisfaçam estes requisitos. Uma variedade de sistemas físicos são candidatos para a implementação de protocolos de informação quântica e têm sido investigados experimentalmente, como por exemplo, armadilha de íons [35], ressonância nuclear magnética [36], pontos quânticos [37], dispositivos supercondutores [38], átomos em cavidades [39], entre outros.

Neste contexto, as implementações baseadas em fótons têm um papel de destaque porque o fóton a princípio representa o “portador” ideal de informação: existem vários graus de liberdade do fóton nos quais a informação pode ser codificada, além do que, a presente tecnologia fotônica permite que fótons sejam facilmente enviados de um lugar para outro. E há dois caminhos para isso: (i) via fibras ópticas, onde é possível pensar até mesmo em redes de comunicação quântica que funcionariam como as atuais redes de comunicações ópticas, que tratam a informação classicamente e (ii) através do espaço livre, onde já se estuda a realização de protocolos de informação via satélite! É claro que ainda é necessário um grande esforço para chegarmos a esse ponto, mas isso mostra que em se tratando de fótons as vantagens são grandes em relação a outros sistemas físicos.

Entre as fontes de fótons, a conversão paramétrica descendente (CPD) [40] é possivelmente a de maior sucesso. Como será discutido neste capítulo, esta fonte produz pares de fótons que podem ser emaranhados em vários graus de liberdade, até mesmo simultaneamente. Inúmeros experimentos têm utilizado a CPD para diversos fins, como testes de Bell [6, 7], teletransporte quântico [42, 41], codificação superdensa [43], criptografia quântica [44], realização de portas lógicas quânticas [45], etc<sup>1</sup>.

Além de revisar o processo de CPD, nós vamos apresentar neste capítulo um resultado obtido por Monken, Souto Ribeiro e Pádua [34], que é a transferência do espectro angular para o estado de dois fótons. Após estas revisões vamos mostrar o nosso cálculo da evolução do estado quântico dos pares de fótons quando eles se propagam no espaço livre e são transmitidos por sistemas ópticos lineares. O cálculo é baseado na propagação do espectro angular e utiliza algumas técnicas da Óptica de Fourier, as quais também serão brevemente discutidas.

## 2.2 Conversão paramétrica descendente

A conversão paramétrica descendente (CPD) é um processo óptico não linear no qual um fóton (usualmente chamado *pump*) com vetor de onda  $\mathbf{k}_p$  e frequência  $\omega_p$  ao incidir num cristal não linear, tem uma pequena probabilidade de ser convertido espontaneamente em dois outros fótons (chamados *signal* e *idler*) com vetores de onda  $\mathbf{k}_s$ ,  $\mathbf{k}_i$  e frequências  $\omega_s$  e  $\omega_i$ , respectivamente [46]. Um diagrama simplificado da CPD é mostrado na Fig. 2.1(a). O processo conserva energia e momento, i.e,

$$\begin{aligned}\omega_p &= \omega_s + \omega_i, \\ \mathbf{k}_p &= \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Os índices  $p, s, i$  denotam os fótons nos feixes pump, signal e idler, respectivamente. A criação do signal e idler é simultânea e por isso eles são também chamados de fótons gêmeos [47]. As equações de conservação acima, serão satisfeitas quando as condições de casamento de fase forem satisfeitas. Para entender o que são estas condições, basta usar  $|\mathbf{k}| = n\omega/c$  (onde  $n$  é o índice de refração) na equação de conservação de momento, levando em conta que o índice de refração num cristal birrefringente depende da direção de propagação do feixe, da sua polarização e da frequência da luz incidente. Teremos então

$$n(\theta_p, \omega_p)\omega_p\hat{\mathbf{k}}_p = n(\theta_s, \omega_s)\omega_s\hat{\mathbf{k}}_s + n(\theta_i, \omega_i)\omega_i\hat{\mathbf{k}}_i,\tag{2.2}$$

onde  $\theta_l$  é o ângulo entre o feixe  $l = p, s, i$  e o eixo óptico do cristal. Há duas maneiras de satisfazer esta equação, conhecidas como casamento de fase tipo I e tipo II. No tipo I, os

<sup>1</sup>Ao longo desta tese há várias outras referências.

feixes convertidos têm polarizações ortogonais à do pump e são emitidos em um contínuo de cores em forma de cones concêntricos em torno da direção do feixe de laser e cujo vértice se encontra no cristal. No casamento de fase tipo II, os pares signal e idler têm polarizações ortogonais, com uma delas coincidindo com a polarização do pump e são emitidos em dois cones distintos. As Figs. 2.1(b) e (c) mostram os dois tipos considerando-se três comprimentos de onda dos pares de fótons gerados. Os pares de símbolos indicam exemplos de regiões onde os fótons gêmeos podem ser encontrados.

### 2.2.1 Emaranhamento em diversos graus de liberdade

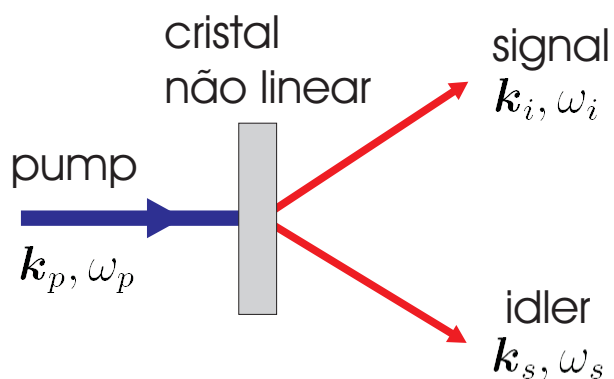
Devido às leis de conservação [Eq. (2.1)] que governam o processo de CPD, o estado quântico dos pares de fótons criados é intrinsecamente emaranhado em pelo menos um grau de liberdade, a energia. Portanto, é perigoso pensar neste estado como um estado de dois fótons individuais, devido à sua natureza intrinsecamente não-separável. Alguns experimentos [48, 49, 50] têm enfatizado este aspecto dos fótons gêmeos e por esta razão frequentemente nos referimos a eles como *bifóton*.

Um dos fatores do sucesso e da importância da CPD como fonte de estados emaranhados com possíveis aplicações práticas, é que ela pode produzir emaranhamento em diversos graus de liberdade dos fótons gêmeos, como por exemplo:

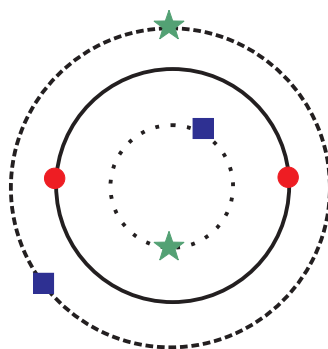
1. *Energia-tempo*: Este emaranhamento está presente em todos os pares de fótons gerados na CPD. Os fótons do par não possuem individualmente uma energia (ou tempo de emissão) definida, mas a soma de suas energias (ou a diferença de seus tempos de emissão) é bem definida. Uma boa descrição deste tipo de emaranhamento pode ser vista na Ref. [51].
2. *Polarização*: Na CPD tipo II este emaranhamento é direto [10] e ocorre na interseção dos cones [veja os círculos cheios na Fig. 2.1(c)]. No tipo I pode ser obtido com uma configuração de dois cristais não lineares [11].
3. *Momento*: Os pares de fótons são gerados em direções aleatórias ao longo do cone (ou cones) mas sempre satisfazendo a conservação de momento total [Figs. 2.1(b) e (c)]. Selecionando duas regiões onde os pares são gerados (com “pinholes” por exemplo), teremos um estado emaranhado em momento.
4. *Momento angular orbital*: Na Ref. [52] foi mostrado experimentalmente que a CPD conserva momento angular orbital e os fótons gerados são emaranhados em espaços discretos e multidimensionais, neste grau de liberdade.

O caráter quântico das correlações nesses graus de liberdade já foi demonstrado experimentalmente através de violação da desigualdade de Bell, como por exemplo em [9] para emaranhamento em energia-tempo, em [8] para momento, em [10] para polarização e em

a) CPD



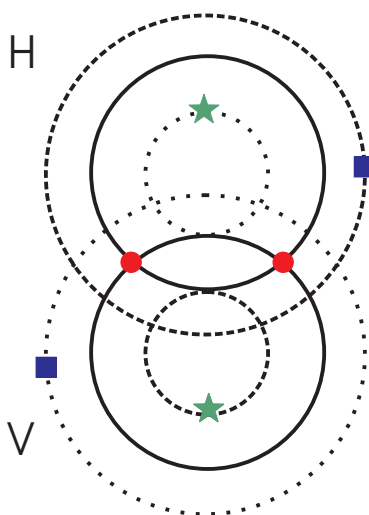
b) tipo I



comprimentos de onda



c) tipo II



fótons gêmeos



**Figura 2.1:** Conversão paramétrica descendente. (a) Diagrama da CPD. (b) Casamento de fases tipo I e (c) tipo II. Os cones são mostrados para três diferentes comprimentos de onda dos fótons gêmeos. Os símbolos mostram exemplos onde os pares de fótons gerados podem ser encontrados.



[12] para momento angular orbital. No próximo capítulo vamos descrever com mais detalhes o emaranhamento nestes diversos graus de liberdade, no contexto da geração de qudits emaranhados.

Dependendo da configuração experimental e do tipo de casamento de fases usado, o emaranhamento pode ocorrer até mesmo simultaneamente nestes diversos graus de liberdade, o chamado hiperemaranhamento [53]. O hiperemaranhamento é útil para uma análise completa dos estados de Bell [54], o que é importantíssimo em alguns protocolos de informação quântica. Recentemente, a geração de estados hiperemaranhados na CPD [55, 56] e a utilização destes para a detecção direta de emaranhamento [57], foram demonstradas experimentalmente.

A princípio, todo grau de liberdade pode ser utilizado para realização de tarefas de informação quântica ou testes fundamentais da teoria quântica. Neste trabalho, vamos considerar somente emaranhamento na componente transversal do momento através de um tratamento multimodal.

## 2.3 Teoria quântica da CPD

Para chegar ao estado de dois fótons gerados na CPD, que utilizaremos ao longo deste trabalho, o tratamento teórico mais adequado é aquele descrito por Mandel [46]. Não é o nosso objetivo aqui fazer uma descrição detalhada destes cálculos, mas sim apresentar a idéia de como os fótons são gerados e porque o estado quântico deles tem uma determinada forma.

### 2.3.1 O Hamiltoniano da CPD

Quando um campo eletromagnético se propaga num meio não linear de segunda ordem<sup>2</sup> e a interação deste campo com o meio é suficientemente fraca, podemos tratá-la como uma perturbação. A Hamiltoniana pode então ser dividida em duas partes

$$H = H_0 + H_I, \quad (2.3)$$

onde  $H_0$  é a componente linear e a perturbação  $H_I$  a componente não linear, que é a parte que nos interessa. Ela é dada por

$$H_I = \frac{1}{2} \int_V \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t - t') E_k(\mathbf{r}, t - t'') d\mathbf{r} dt' dt'', \quad (2.4)$$

onde  $V$  é o volume de interação dado pelo volume iluminado no meio não linear. Para tratar o problema quanticamente, basta substituir os campos na equação acima pelos

---

<sup>2</sup>A resposta do meio ao campo elétrico aplicado é proporcional ao primeiro termo não linear de sua susceptibilidade elétrica,  $\chi^{(2)}$ , o qual é um tensor de segunda ordem [58].

operadores campo elétrico que são dados por [46]

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbb{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbb{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, s} \left[ l(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}, s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + l^*(\omega) \hat{a}_{\mathbf{k}, s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right],\end{aligned}\quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{k}$  é o vetor de onda dentro do cristal,  $s$  é a polarização do campo,  $\hat{a}_{\mathbf{k}, s}$  e  $\hat{a}_{\mathbf{k}, s}^\dagger$  são os operadores destruição e criação, respectivamente;  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}, s}$  é um vetor bidimensional de polarização,  $\omega$  a frequência e  $l(\omega)$  é dado por

$$l(\omega) = i \left[ \frac{\hbar \omega(\mathbf{k}, s)}{2\epsilon_0 n^2(\mathbf{k}, s)} \right]^{1/2}, \quad (2.6)$$

com  $n(\mathbf{k}, s)$  denotando o índice de refração do meio não linear. Substituindo este operador na Eq. (2.4) e eliminando os termos que não conservam energia, obtém-se o operador Hamiltoniano que descreve o processo de CPD

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_I &= \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} \sum_{\mathbf{k}_s, s_s} \sum_{\mathbf{k}_i, s_i} \sum_{\mathbf{k}_p, s_p} l^*(\omega_s) l^*(\omega_i) l(\omega_p) \hat{a}_{\mathbf{k}_s, s_s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_i, s_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_p, s_p} e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t} \\ &\quad \times [\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}(\mathbf{e}_{\mathbf{k}_p, s_p})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s, s_s})_j^* (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_i, s_i})_k^*] \int_V d\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) \cdot \mathbf{r}} + \text{c.H.},\end{aligned}\quad (2.7)$$

onde os índices  $s, i, p$  denotam os campos signal, idler e pump, respectivamente, c.H. representa o conjugado Hermitiano e  $\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}$  é definido como

$$\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)} \equiv \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p = \omega_s + \omega_i) + \chi_{jik}^{(2)}(\omega_s = \omega_p - \omega_i) + \chi_{kij}^{(2)}(\omega_i = \omega_p - \omega_s), \quad (2.8)$$

com

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega = \omega' + \omega'') = \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') e^{-i(\omega' t' + \omega'' t'')}. \quad (2.9)$$

Observa-se no operador Hamiltoniano que um fóton do pump é destruído ( $\hat{a}_{\mathbf{k}_p, s_p}$ ) e dois outros são criados ( $\hat{a}_{\mathbf{k}_s, s_s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_i, s_i}^\dagger$ ).

### 2.3.2 O estado quântico da luz produzida na CPD

Suponha que num tempo  $t = 0$  temos um campo cujo estado inicial é dado pelo vácuo, i.e.,  $|\Psi(0)\rangle = |\text{vac}\rangle$ . O laser de bombeamento é então ligado dando início à interação não linear. Para obter o estado quântico da luz produzida na CPD num dado tempo  $t$ , aplicamos o operador evolução temporal no estado inicial do sistema, ou seja,

$$|\Psi(t)\rangle = \mathbb{U}(t, 0)|\Psi(0)\rangle = \mathbb{U}(t, 0)|\text{vac}\rangle, \quad (2.10)$$

e neste caso o operador evolução é dado por

$$\mathbb{U}(t, 0) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \mathbb{H}_I(t')\right) = \mathbb{I} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \mathbb{H}_I(t') + \dots, \quad (2.11)$$

onde fizemos a expansão até primeira ordem. O primeiro termo da expansão (a identidade) representa a não criação de fótons na interação, enquanto o segundo termo está associado à geração de um par de fótons. Os termos de ordem superior estão associados à geração de mais de um par de fótons e portanto, podem ser desprezados se considerarmos o feixe de bombeio pouco intenso, como é o caso em nossos experimentos.

Usando a Eq. (2.7) pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \mathbb{H}_I(t') &= \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} \sum_{\mathbf{k}_s, s_s} \sum_{\mathbf{k}_i, s_i} \sum_{\mathbf{k}_p, s_p} l^*(\omega_s) l^*(\omega_i) l(\omega_p) \hat{a}_{\mathbf{k}_s, s_s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_i, s_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_p, s_p} e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2} \\ &\times [\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}(\mathbf{e}_{\mathbf{k}_p, s_p})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s, s_s})_j^* (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_i, s_i})_k^*] \frac{\sin((\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2)}{(\omega_s + \omega_i - \omega_p)/2} \\ &\times \prod_{m=1}^3 \left[ \frac{\sin((\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_m l_m/2)}{(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_m/2} \right] e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) \cdot \mathbf{r}_0} + \text{c.H.} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Aqui,  $l_m$  são as dimensões do volume de interação e  $\mathbf{r}_0$  a origem do sistema de coordenadas. As funções do tipo sinc  $\equiv (\sin x)/x$  (a menos de fatores multiplicativos) acima, fornecem as condições de conservação de energia e momento na CPD [Eq. (2.1)].

Para calcular o estado na Eq. (2.10) podemos simplificar ainda mais a Eq. (2.12) através de aproximações que levam em conta quais propriedades da luz pretendemos estudar. Por exemplo, se quisermos estudar as propriedades de coerência longitudinal, fazemos a aproximação monomodal, onde a direção de propagação dos feixes signal e idler é definida (por orifícios, por exemplo) e as somas em  $\mathbf{k}$  na Eq. (2.7) são reduzidas a somas em  $\omega$ . Uma segunda aproximação extremamente utilizada é a aproximação monocromática, uma vez que a maioria dos experimentos nesta área utilizam filtros de interferência estreitos na entrada dos detectores.

## 2.4 Correlações transversais na CPD

Neste trabalho, nós utilizaremos as propriedades de correlação transversal espacial dos fótons da CPD. Portanto, não podemos considerar a aproximação monomodal pois as propriedades espaciais destes fótons são definidas pelos seus vetores de onda. Neste caso, temos que adotar um tratamento multimodal. Há muitos estudos teóricos [59, 60, 61, 62, 63, 64] e experimentais [34, 65, 66, 67, 68] nesta linha. O resultado apresentado nesta seção foi obtido por Monken, Souto Ribeiro e Pádua [34].

### 2.4.1 O estado de dois fótons com correlações transversais

No cálculo do estado quântico dos fótons gêmeos [34] as seguintes considerações ou aproximações foram feitas para simplificar a Eq. (2.12):

1. Os feixes pump, signal e idler são aproximadamente monocromáticos e têm polarizações definidas. Isso se justifica pelas propriedades do laser, pela presença de filtros de interferência de largura de banda estreita na entrada dos detectores e pelas propriedades da CPD que gera feixes polarizados.
2. O feixe pump pode ser tratado classicamente, pois é muito mais intenso que os feixes convertidos. Desta forma, substituímos o operador destruição  $\hat{a}_{\mathbf{k}_p}$  na Eq. (2.12) por  $v(\mathbf{k}_p)$ , a amplitude coerente do feixe pump.
3. O cristal está centrado na origem do sistema de coordenadas ( $\mathbf{r}_0 = 0$ ) e o feixe se propaga na direção  $z$ .
4. Os campos pump, signal e idler são observados somente em pontos próximos ao eixo  $z$ , de forma que  $|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{k}|$ , o que significa que a magnitude da componente transversal do vetor de onda é muito menor que a magnitude do próprio vetor de onda, a chamada aproximação paraxial.
5. Os somatórios em  $\mathbf{k}$  podem ser aproximados por integrais em  $\mathbf{k}$ ,  $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}$ .
6. A espessura do cristal na direção de propagação do pump ( $z$ ) é suficientemente pequena, da ordem de milímetros.

Utilizando estes argumentos, Monken *et al.* [34] mostraram após um árduo cálculo [69] que a Eq. (2.12) pode ser reescrita como

$$\int_0^t dt' \mathbb{H}_I(t') = \eta \int_{\Omega} d\mathbf{q}_s \int_{\Omega} d\mathbf{q}_i v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_s) \hat{a}^\dagger(\mathbf{q}_i) + \text{c.H.}, \quad (2.13)$$

onde  $\eta$  é uma constante que absorve todas as constantes que aparecem no cálculo,  $\Omega$  é a região de integração onde valem as aproximações [69] e  $v(\mathbf{q})$  é o espectro angular do feixe pump<sup>3</sup> em  $z = 0$ , ou seja, a transformada de Fourier do perfil transversal do campo do feixe pump em  $z = 0$ . A parte de polarização não é mostrada explicitamente nesta equação pois este grau de liberdade não nos interessa neste trabalho.

Usando as Eqs. (2.10), (2.11) e (2.13), temos finalmente o estado da luz gerada na CPD, considerando-se as aproximações anteriores:

$$|\Psi\rangle = |\text{vac}\rangle + \eta \int_{\Omega} d\mathbf{q}_s \int_{\Omega} d\mathbf{q}_i v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) |1\mathbf{q}_s\rangle |1\mathbf{q}_i\rangle. \quad (2.14)$$

<sup>3</sup>Para uma descrição detalhada do espectro angular, veja a seção 2.5.

Aqui,  $|\text{vac}\rangle$  denota o estado de vácuo e o segundo termo representa o estado de dois fótons onde  $|1\mathbf{q}_j\rangle$  é o estado de Fock para um fóton no modo  $j = s, i$  com vetor de onda transversal  $\mathbf{q}_j$ .

## 2.4.2 A transferência do espectro angular

O resultado mostrado acima é muito interessante, pois mostra que se nós considerarmos as aproximações monocromática, paraxial e de cristal fino, o espectro angular do feixe pump é transferido para o estado de dois fótons. Isto significa que este estado carrega informação sobre o feixe de laser que o gerou. Como consequência, a correlação transversal entre os fótons gêmeos pode ser controlada manipulando-se o feixe pump. Além disso, como  $v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)$  é uma função não-fatorável de  $\mathbf{q}_s$  and  $\mathbf{q}_i$ , os fótons gêmeos são gerados em um estado emaranhado nas variáveis de momento transversal.

Para entender a correlação entre os fótons gêmeos no estado dado pela Eq. (2.14), observe que nas aproximações consideradas, o momento transversal é conservado, i.e.,  $\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_p$ . Portanto, os fótons gêmeos serão anticorrelacionados neste grau de liberdade. Esta anticorrelação se torna maior quanto menor for a incerteza no momento transversal do pump, o que pode ser visto fazendo-se  $v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) = \delta(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)$ . Este seria o caso se o feixe pump fosse um onda plana, mas na prática o perfil do pump tem sempre uma largura finita (e portanto incerteza no momento). Portanto, temos que a amplitude do bifóton na Eq. (2.14) é uma expressão da incerteza na conservação do momento transversal. A medida do momento de um fóton determina o momento do outro dentro de uma região de incerteza, a qual é determinada pela largura do espectro angular do feixe pump.

Para se ter uma idéia da força do resultado da Eq. (2.14) podemos citar diversos experimentos e estudos que o utilizaram, como por exemplo:

- medida do comprimento de onda de de Broglie de um pacote de dois fótons [70, 71]
- observação de interferência condicional [72]
- antiagrupamento espacial de fótons [73, 74]
- formação de imagem com fótons gêmeos [34, 75, 76, 77]
- apagamento quântico [78]
- análise de estados de Bell [79]
- interferometria Hong-Ou-Mandel multimodal [80]
- geração de feixe singleto de polarização [81]
- teste do paradoxo de EPR [82]

- geração de estados emaranhados de qudits [83, 84, 85, 86]
- protocolo de distribuição de chaves quânticas [87]
- conservação e emaranhamento de momento angular orbital [88] e modos Hermite-Gaussianos na CPD [89]

entre outros. Como veremos, em nosso trabalho nós usamos este efeito para controlar o grau de emaranhamento entre os fótons gêmeos.

## 2.5 Evolução do estado de dois fótons

O estado  $|\Psi\rangle$  na Eq. (2.14) representa o estado de dois fótons na face de saída do cristal ( $z \approx 0$  no regime de cristal fino). Nesta seção vamos discutir a evolução deste estado quando os fótons gêmeos propagam-se no espaço livre e são transmitidos por sistemas ópticos lineares. Este cálculo é interessante pois conhecendo a evolução do estado poderemos compreender melhor suas propriedades de emaranhamento e assim encontrar aplicações práticas em testes fundamentais da mecânica quântica bem como protocolos de informação quântica. Mostraremos primeiramente algumas ferramentas da óptica de Fourier usadas para o cálculo e em seguida apresentaremos os resultados obtidos e uma discussão a respeito deles.

### 2.5.1 Elementos de óptica de Fourier

A óptica de Fourier é uma ferramenta adequada para se estudar campos ópticos que propagam-se através de sistemas ópticos. Vamos apresentar alguns resultados básicos deixando os detalhes para a Ref. [90].

#### O espectro angular

Seja  $U(\mathbf{r}, t)$  um campo elétrico monocromático e escalar. Este campo tem uma dependência temporal harmônica bem definida e podemos escrevê-lo como  $U(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$  onde  $\omega$  é a frequência angular. Se ele se propaga num meio linear, isotrópico e homogêneo, ao resolvermos a equação de onda, verifica-se que a parte espacial satisfaz a equação de Helmholtz, ou seja,

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.15)$$

com  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ , onde  $\mu$  e  $\epsilon$  são a permissividade e a permeabilidade do meio, respectivamente. Vamos considerar que este campo se propaga na direção  $z$ . A sua distribuição através de um plano  $z$  (constante) qualquer, que vamos escrever como  $u(\mathbf{r}) \equiv W(\boldsymbol{\rho}, z)$ ,

pode ser decomposta em componentes espaciais de Fourier

$$W(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} v(\mathbf{q}, z) e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}, \quad (2.16)$$

onde  $\boldsymbol{\rho}$  e  $\mathbf{q}$  são as componentes transversais de posição e momento, respectivamente. Pode-se mostrar que cada componente espacial deste campo é uma onda plana se propagando em diferentes direções para longe deste plano. O espectro de Fourier [ $v(\mathbf{q}, z)$ ] deste campo é simplesmente a amplitude complexa das componentes de onda plana desta decomposição e por esta razão é chamado de *espectro angular* do campo [90], que é dado por

$$v(\mathbf{q}, z) = \int d\boldsymbol{\rho} W(\boldsymbol{\rho}, z) e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}, \quad (2.17)$$

a transformada de Fourier inversa do campo  $W(\boldsymbol{\rho}, z)$ .

### Propagação do espectro angular

O campo na Eq. (2.16) satisfaz a equação de Helmholtz (2.15). Aplicando então esta equação em  $W(\boldsymbol{\rho}, z)$ , chegamos a

$$\frac{d^2}{dz^2} v(\mathbf{q}, z) + k_z^2 v(\mathbf{q}, z) = 0, \quad (2.18)$$

onde  $k_z^2 = k^2 - q^2$  e cuja solução é fácil mostrar que é dada por

$$v(\mathbf{q}, z) = v(\mathbf{q}, 0) e^{ik_z z}. \quad (2.19)$$

O valor de  $k_z$  pode ser real ou imaginário. Se for imaginário, a exponencial acima será real e o campo na Eq. (2.16) será atenuado pela propagação, a chamada onda evanescente. Se as distâncias de propagação são muito maiores que alguns comprimentos de onda, a contribuição destas componentes evanescentes é desprezível. No caso de  $k_z$  real, temos que o efeito da propagação da onda é a mudança das fases relativas das componentes de onda plana. Cada componente se propaga do plano  $z = 0$  ao plano  $z$  em ângulos diferentes e por isso percorrem distâncias diferentes, ganhando assim uma fase.

### Transmissão através de sistemas ópticos

Consideremos um sistema óptico linear, i.e., um sistema cuja a seguinte relação entre os campos de entrada ( $f_{in}$ ) e os campos de saída ( $F_{out}$ ) é satisfeita:

$$\text{Se } f_{in1} \rightarrow F_{out1} \text{ e } f_{in2} \rightarrow F_{out2}, \text{ então } f_{in1} + f_{in2} \rightarrow F_{out1} + F_{out2}.$$

Suponha que um sistema desse é introduzido num dado plano  $z$ , na direção de propagação de um campo. A razão entre as amplitudes do campo transmitido  $W_{trans}(\boldsymbol{\rho}, z)$  e do campo incidente  $W_{inc}(\boldsymbol{\rho}, z)$ , define a função amplitude de transmissão,  $t(\boldsymbol{\rho})$ , deste sistema óptico. Portanto,

$$W_{trans}(\boldsymbol{\rho}, z) = t(\boldsymbol{\rho})W_{inc}(\boldsymbol{\rho}, z). \quad (2.20)$$

Tomando a transformada de Fourier de ambos os lados e usando o teorema da convolução, podemos escrever esta relação como

$$v_{trans}(\mathbf{q}, z) = v_{inc}(\mathbf{q}, z) * T(\mathbf{q}), \quad (2.21)$$

onde o símbolo  $*$  denota a convolução e  $T(\mathbf{q})$  é a transformada de Fourier de  $t(\boldsymbol{\rho})$ .

Com essas ferramentas (clássicas) em mãos, vamos calcular o estado quântico dos fótons gêmeos a seguir.

## 2.5.2 Propagação e transmissão através de sistemas ópticos

Consideremos uma montagem experimental típica onde a CPD é usada, como ilustrado na Fig. 2.2. Um feixe de laser monocromático propagando-se na direção  $z$  incide em um cristal não linear em  $z = 0$  e produz pares de fótons signal e idler ( $s-i$ ). Cada um deles é enviado a um sistema óptico linear, denotados por  $A_s$  e  $A_i$ , os quais se encontram nos planos  $z_{A_s}$  e  $z_{A_i}$ , respectivamente. Estes sistemas ópticos poderiam ser por exemplo, aberturas difratantes, lentes, etc. Após serem transmitidos através de  $A_s$  e  $A_i$ , os fótons gêmeos podem se propagar através do espaço livre e/ou através de outros sistemas ópticos, antes de serem detectados por  $D_s$  e  $D_i$ , como indicado pelas linhas pontilhadas na Fig. 2.2. As setas pontilhadas indicam o estado de dois fótons em dois pontos distintos: na face de saída do cristal ( $|\Psi_1\rangle$ ) e após a transmissão através dos sistemas ópticos ( $|\Psi_2\rangle$ ). O primeiro caso foi investigado por Monken *et al.* [34], e é dado pela Eq. (2.14). O segundo caso, ( $|\Psi_2\rangle$ ), será calculado agora, de forma mais detalhada<sup>4</sup>.

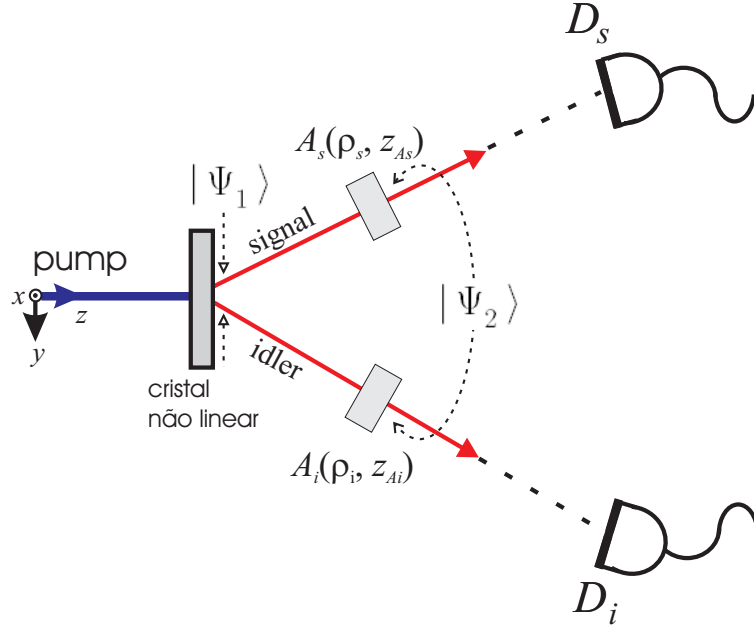
Desprezando o termo de vácuo, que é cancelado na detecção dos fótons, podemos escrever o estado  $|\Psi_2\rangle$  de uma forma geral, como

$$|\Psi_2\rangle = \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i \mathcal{F}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) |1\mathbf{q}_s\rangle |1\mathbf{q}_i\rangle, \quad (2.22)$$

onde a amplitude do bifóton,  $\mathcal{F}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$ , é a quantidade a ser calculada. Como estamos considerando campos (pump, signal e idler) monocromáticos e a amplitude do bifóton na face de saída do cristal ( $z = 0$ ) é dada pelo espectro angular transferido do feixe pump [Eq. (2.14)], temos que  $\mathcal{F}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$  é o espectro angular propagado até os sistemas

<sup>4</sup>Ao longo da tese tratamos o estado gerado na CPD como puro. Claro que essa hipótese sempre será uma aproximação. Por isso, o grau de pureza desses estados pode ser um importante tópico a ser estudado.





**Figura 2.2:** Fótons signal e idler gerados pela CPD em um cristal não-linear são transmitidos através de sistemas ópticos ( $A_s$  e  $A_i$ ) e detectados por  $D_s$  e  $D_i$ . Para mais detalhes veja o texto.

ópticos nos planos  $z_{A_s}$  e  $z_{A_i}$ , e transmitidos através dos mesmos. Dessa forma, usaremos os métodos da óptica de Fourier para determinar  $\mathcal{F}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$ , o que pode ser visto como um método semi-clássico para se calcular o estado de dois fótons.

Os resultados apresentados a seguir são generalizações para dois campos não locais (signal e idler), das relações usuais em óptica de Fourier vistas na subseção anterior. O espectro angular em um dado plano  $z_s$  para o signal e  $z_i$  para o idler é

$$v(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i; z_s, z_i) = \mathcal{T}_2[W(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i; z_s, z_i)], \quad (2.23)$$

onde  $\mathcal{T}_2$  denota a transformada de Fourier em duas variáveis, neste caso as componentes transversais  $\boldsymbol{\rho}_s$  e  $\boldsymbol{\rho}_i$  dos vetores de posição  $\mathbf{r}_s$  e  $\mathbf{r}_i$ , respectivamente;  $W(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i; z_s, z_i)$  é o perfil transversal do campo do feixe pump transferido para o estado de dois fótons via espectro angular. Usando a transformada de Fourier inversa na Eq. (2.23) e o fato que o campo deve satisfazer a equação de Helmholtz (2.15), é fácil mostrar que nós podemos escrever este espectro angular em termos daquele no plano  $z_s = z_i = 0$  [o qual é  $v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)$ ], como

$$v(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i; z_s, z_i) = v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \exp(ik_{z_s} z_s) \exp(ik_{z_i} z_i), \quad (2.24)$$

onde  $k_{z_j} = (k_j^2 - q_j^2)^{\frac{1}{2}}$  é a componente  $z$  do vetor de onda  $\mathbf{k}_j$  para  $j = s, i$ . Assim, o efeito da propagação será uma mudança das fases relativas das componentes de onda plana de cada campo. Os atrasos entre as fases relativas são introduzidos pois estas componentes percorrem distâncias diferentes entre dois planos paralelos.

Seja  $W_{inc}(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i; z_{A_s}, z_{A_i})$  o perfil transversal incidente nos sistemas ópticos descritos

pelas funções transmissão  $A_s(\boldsymbol{\rho}_s)$  e  $A_i(\boldsymbol{\rho}_i)$  nos planos  $z_{A_s}$  e  $z_{A_i}$ , respectivamente. Da mesma maneira,  $W_{trans}(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i; z_{A_s}, z_{A_i})$  é o perfil transmitido. A razão de  $W_{trans}$  para  $W_{inc}$  definirá a forma das funções transmissão destes sistemas ópticos em cada ponto  $\boldsymbol{\rho}_s$  e  $\boldsymbol{\rho}_i$  nestes planos. Então,

$$W_{trans}(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i; z_{A_s}, z_{A_i}) = A_s(\boldsymbol{\rho}_s)A_i(\boldsymbol{\rho}_i)W_{inc}(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i; z_{A_s}, z_{A_i}). \quad (2.25)$$

Tomando a transformada de Fourier em ambos os lados desta equação e usando os resultados das Eqs. (2.23) e (2.24) e o teorema da convolução, o espectro angular transmitido através dos sistemas ópticos, ou a amplitude do bifóton que queremos determinar, será dada por

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = T_s(\mathbf{q}_s)T_i(\mathbf{q}_i) * v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \exp\left(i\left(k_s - \frac{q_s^2}{2k_s}\right)z_{A_s} + i\left(k_i - \frac{q_i^2}{2k_i}\right)z_{A_i}\right), \quad (2.26)$$

onde

$$T(\mathbf{q}) = \mathcal{T}_1[A(\boldsymbol{\rho})], \quad (2.27)$$

é a transformada de Fourier da função transmissão  $A(\boldsymbol{\rho})$  e  $*$  denota a convolução. Aqui, nós usamos a já assumida aproximação paraxial onde

$$k_z \approx k - \frac{q^2}{2k}.$$

Vamos colocar a expressão da amplitude do bifóton em (2.26) numa forma cuja interpretação física é mais clara. Inserindo a Eq. (2.27) em (2.26), podemos escrever esta última como

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \mathcal{T}_2[A_s(\boldsymbol{\rho}_s)A_i(\boldsymbol{\rho}_i)G(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i)], \quad (2.28)$$

onde,

$$G(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i) = \mathcal{T}_2^{-1}\left[v(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \exp\left(i\left(k_s - \frac{q_s^2}{2k_s}\right)z_{A_s} + i\left(k_i - \frac{q_i^2}{2k_i}\right)z_{A_i}\right)\right]. \quad (2.29)$$

Usando a Eq. (2.23), o teorema da convolução e a propriedade de translação da transformada de Fourier<sup>5</sup>, pode-se mostrar que

$$G(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i) \propto \int d\xi W(\boldsymbol{\xi}) \exp\left(i\frac{k_s}{2z_{A_s}}|\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\xi}|^2 + i\frac{k_i}{2z_{A_i}}|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\xi}|^2\right). \quad (2.30)$$

Esta expressão para  $G(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i)$  pode ser simplificada novamente, usando o mesmo trata-

<sup>5</sup>A propriedade de translação é dada por  $\mathcal{T}[f(x+a)] = \mathcal{T}[f(x)]e^{ika}$ .

mento de Monken *et al.* na Ref. [34]. Definem-se os seguintes parâmetros:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k}{z_A} &\equiv \frac{k_s}{z_{A_s}} + \frac{k_i}{z_{A_i}} \\ \mu_j &\equiv \frac{k}{z_A} \frac{z_{A_j}}{k_j} \rightarrow \frac{k_j}{z_{A_j}} = \frac{k}{\mu_j z_A} \quad (j = s, i) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{\mu_s} + \frac{1}{\mu_i} = 1. \quad (2.31)$$

Aqui,  $k$  é o número de onda do feixe pump e  $z_A$  é um dado plano transversal. Usando estes parâmetros na Eq. (2.30) nós obtemos

$$G(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i) \propto \exp\left(i \frac{k}{2z_A} \frac{|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_s|^2}{\mu_s \mu_i}\right) \int d\boldsymbol{\xi} W(\boldsymbol{\xi}) \exp\left(i \frac{k}{2z_A} \left| \frac{\boldsymbol{\rho}_s}{\mu_s} + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{\mu_i} - \boldsymbol{\xi} \right|^2\right). \quad (2.32)$$

A menos de uma fase global, a integral acima é o conhecido propagador de Fresnel [90], o qual fornece a distribuição do campo em um plano  $z_A$  a partir da distribuição deste campo  $W(\boldsymbol{\rho})$ , em um plano  $z = 0$ , neste caso. Dessa forma, temos

$$G(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i) \propto \exp\left(i \frac{k}{2z_A} \frac{|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_s|^2}{\mu_s \mu_i}\right) W\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_s}{\mu_s} + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{\mu_i}; z_A\right). \quad (2.33)$$

Substituindo esta expressão na Eq. (2.28), a amplitude do bifóton pode finalmente ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) &= \gamma \int d\boldsymbol{\rho}_s \int d\boldsymbol{\rho}_i A_s(\boldsymbol{\rho}_s) A_i(\boldsymbol{\rho}_i) \exp(ik |\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_s|^2 / 2z_A \mu_s \mu_i) \\ &\quad \times W\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_s}{\mu_s} + \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{\mu_i}; z_A\right) \exp(-i(\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s + \mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i)), \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde  $\gamma$  é uma constante de normalização. Portanto, o estado de dois fótons transmitidos através de sistemas ópticos carrega informação sobre esses sistemas via funções transmissão  $A_s(\boldsymbol{\rho}_s)$  e  $A_i(\boldsymbol{\rho}_i)$  que os descrevem. E ainda, como consequência da transferência do espectro angular, este estado depende também do perfil transversal do pump no plano  $z_A$ , o qual é definido na Eq. (2.31). Esta dependência é dada através de uma média ponderada de  $\boldsymbol{\rho}_s$  e  $\boldsymbol{\rho}_i$ , onde  $\mu_s$  e  $\mu_i$ , também definidos em (2.31), são fatores de aumento. O fato de ser uma dependência não fatorável mostra que o estado é emaranhado. Estes resultados reforçam a idéia de que as propriedades de correlação transversal dos fótons gêmeos, nas aproximações consideradas, são determinadas pelas propriedades do laser as quais nós podemos manipular.

### 2.5.3 Aplicações e perspectivas

O tratamento adotado no cálculo da amplitude do bifóton, dada pela Eq. (2.34), pode ser estendido de forma direta para configurações experimentais mais complexas onde, por

exemplo, mais de um sistema óptico é inserido no caminho de cada fóton. O procedimento é o mesmo, envolvendo apenas propagações e transmissões através destes sistemas ópticos.

O restante desta tese é uma aplicação do resultado obtido acima. Através dele, mostramos teoricamente e experimentalmente a possibilidade de se gerar estados emaranhados em espaços *discretos*, selecionando modos espaciais transversais adequadamente através de  $A_s(\boldsymbol{\rho}_s)$  e  $A_i(\boldsymbol{\rho}_i)$ . E nesses estados, controlamos as correlações e o grau de emaranhamento através da manipulação de  $W(\boldsymbol{\rho})$ .

Há outras maneiras de se explorar esse resultado. Um tópico que vale a pena investigar é como o emaranhamento é preservado ou deteriorado quando os fótons gêmeos se propagam no espaço livre. No capítulo 4, nós mostramos uma prova de princípio que os estados de qudits se propagam a uma determinada distância inserindo-se uma lente convergente no caminho de cada fóton, de forma que o estado no plano de formação de imagens de cada lente é idêntico ao original. Foi um trabalho relativamente simples e que ainda pode ser mais explorado do ponto de vista teórico e experimental.

## Parte II

# Geração Controlada de Qudits Emaranhados

# Geração de Qudits utilizando Fótons Gêmeos: Teoria

Utilizando os resultados do capítulo anterior, mostraremos teoricamente, a possibilidade de se utilizarem pares de fótons gerados na CPD e emaranhados em variáveis contínuas de momento transversal, para a criação de estados emaranhados de qubits e qudits. Discutimos as vantagens e as limitações do método e também as maneiras de se realizar operações locais sobre esses estados, o que possibilitará a utilização dos mesmos em protocolos de informação quântica.

## 3.1 Introdução

No capítulo 1, ao discutirmos o paradoxo EPR (seção 1.3), nós utilizamos a versão de Bohm [24], que considera duas partículas de spin-1/2 para ilustrar de maneira simples todos os aspectos do paradoxo, originalmente discutido em termos das variáveis contínuas de posição e momento das partículas [1]. O próprio teorema de Bell [2] foi derivado a partir da versão de Bohm, ou seja, considerando-se partículas em espaços de Hilbert discretos e bidimensionais, os hoje populares qubits. A chamada “versão experimental” do teorema de Bell, a desigualdade de CHSH [3], foi também construída para dois qubits, mas ao invés de partículas de spin-1/2, eles propuseram a utilização da polarização de fótons. Da mesma forma, quando se começou investigar a utilização do emaranhamento como recurso para processamento e transmissão de informação, os protocolos propostos foram baseados em estados de dois qubits<sup>1</sup> (veja a seção 1.3), embora em alguns deles como codificação superdensa [15] e teletransporte quântico [16], os autores discutam a generalização para sistemas de mais dimensões.

Esta tendência de se estudar o emaranhamento nos sistemas mais simples onde ele se manifesta, i.e., sistemas de dois qubits, também foi seguida nos trabalhos experimentais. Diversos fatores contribuíram para isso. Em primeiro lugar, por já se ter uma teoria bem desenvolvida para estes sistemas. Em segundo, pela relativa facilidade de se realizar operações sobre qubits, em comparação a operações realizadas sobre sistemas de dimensão maior. Por último, considerando-se apenas experimentos ópticos, devido ao fácil acesso a pares de fótons emaranhados em polarização ou em outro grau de liberdade bidimensional, através por exemplo da conversão paramétrica descendente<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Provavelmente, pelo fato da teoria de informação clássica ser baseada em bits.

<sup>2</sup>Veja o capítulo 2.

Toda esta concentração de trabalhos baseados em qubits, resultou num interesse menor pela pesquisa de emaranhamento entre sistemas quânticos associados a espaços de Hilbert discretos de dimensão  $D > 2$ , os chamados qudits. Além da falta de resultados experimentais que demonstrassem a viabilidade de se gerar e manipular estados emaranhados de qudits utilizando fótons, não havia também nenhum resultado conclusivo que motivasse a utilização destes sistemas ao invés de qubits.

A situação mudou quando se mostrou que, em alguns aspectos, qudits têm certas vantagens sobre qubits, o que discutiremos na próxima seção. A partir de então, o emaranhamento entre qudits passou a ser estudado com maior interesse tanto do ponto de vista fundamental quanto para aplicações diretas em protocolos de informação quântica. Isto naturalmente despertou uma intensa pesquisa por fontes controláveis de qudits emaranhados. E é disso que se trata este capítulo. Vamos apresentar nossa proposta para geração controlada de qudits emaranhados utilizando pares de fótons da CPD com correlações transversais. O sentido da palavra controlada se tornará claro ao longo do texto. Na seção 3.2 damos as principais motivações para se gerarem estados emaranhados de qudits e apresentamos alguns métodos de geração que utilizam outros graus de liberdade dos pares de fótons da CPD. Na seção 3.3 descrevemos o nosso método e mostramos toda a teoria que o sustenta. Finalizamos o capítulo na seção 3.4 discutindo vantagens, limitações e aplicações deste método.

## 3.2 Emaranhamento multidimensional

O objetivo desta seção é apenas pôr em contexto os principais fatores que atraíram o interesse de pesquisa em emaranhamento multidimensional, e descrever os principais métodos experimentais de geração de estados emaranhados de qudits utilizando fótons.

### 3.2.1 Qudits *versus* qubits

#### Qudits são mais resistentes a ruído que qubits

A busca de possíveis diferenças entre qubits e qudits emaranhados no contexto de testes de realismo local versus mecânica quântica, via desigualdades de Bell [2], foi a grande motivação inicial para se estudar emaranhamento multidimensional. Na Ref. [91], os autores mostraram que quando observáveis dicotômicas são medidas em estados maximamente emaranhados de dois qudits, a desigualdade de Bell-CHSH é violada maximamente como na Eq. (1.17), mesmo com  $D \rightarrow \infty$ . Este é o mesmo limite da violação para dois qubits [25]. Portanto, esse trabalho deixou em aberto a questão de se a violação poderia ou não aumentar quando se medem observáveis mais gerais.

Essa questão foi tratada nas Refs. [92, 93]. Considerando medidas de observáveis não-dicotômicas, os autores adotam como critério para medir a magnitude da violação do

realismo local, a resistência ao ruído dos estados de qudits com  $D \geq 2$ . Basicamente, a idéia é a seguinte: considere um estado de dois qudits dado por

$$\hat{\rho}_D = F_D \hat{\rho}_{\text{ruído}} + (1 - F_D) |\Psi_{\text{max}}^D\rangle \langle \Psi_{\text{max}}^D|, \quad (3.1)$$

onde

$$\hat{\rho}_{\text{ruído}} = \frac{1}{D^2} \mathbb{I}_{D \times D}, \quad (3.2)$$

é a mistura estatística máxima e

$$|\Psi_{\text{max}}^D\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{n=1}^D |n\rangle_A |n\rangle_B, \quad (3.3)$$

é o estado maximamente emaranhado.  $F_D$  é um parâmetro  $0 \leq F_D \leq 1$ , o qual fornece a fração de ruído dentro do estado total  $\hat{\rho}_D$ . Quanto maior  $F_D$ , menos emaranhado é o estado. O valor máximo para  $F_D$  tal que o estado  $\hat{\rho}_D$  ainda não possa ser descrito por uma teoria realista local, i.e., tal que o estado ainda viole a desigualdade de Bell, fornece a magnitude dessa violação. Com este critério, os autores mostram numericamente [92, 93] que os estados de qudits violam o realismo local mais fortemente que qubits. Por isso, justificando o título desse tópico, se diz que estados maximamente emaranhados de dois qudits são mais resistentes à ruído que qubits<sup>3</sup>, pois permitem uma maior “adição de ruído” e ainda violam a desigualdade de Bell. O resultado foi também demonstrado analiticamente na Ref. [96].

### Eliminando o “loophole” de detecção

Em todos os experimentos de desigualdade de Bell que utilizam fótons emaranhados, a baixa eficiência dos detectores atuais é a responsável pelo chamado “loophole” de detecção. Como somente uma fração (definida pela eficiência quântica dos detectores) do número total de pares de fótons preparados pela fonte é detectada, se assume que o comportamento dessa fração reproduz o comportamento do “ensemble” total, o que é bastante razoável. Porém, do ponto de vista das teorias realistas locais, esta limitação dos experimentos faz com que um modelo de variáveis ocultas possa explicar os resultados e tornam os experimentos de Bell inconclusivos a favor da mecânica quântica. Na Ref. [97] foi mostrado teoricamente que se a eficiência dos detectores for  $\eta > 2/3$ , o loophole de detecção poderia ser eliminado, o que é um valor muito alto para a tecnologia atual. A utilização de qudits emaranhados ao invés de qubits, pode resolver esse problema. Recentemente foi mostrado que a eficiência mínima necessária aos detectores para se excluir o loophole de detecção, decresce exponencialmente com a dimensão,  $D$ , do qudit [98].

<sup>3</sup>Existem trabalhos que argumentam que a resistência ao ruído não é uma boa medida para se afirmar que qudits são mais não locais que qubits [94, 95], mas o aprofundamento nesta questão está além dos objetivos deste trabalho e pode ser obtido através destas referências.



## Protocolos de informação quântica com qudits

Com a consolidação da teoria de informação quântica, a utilização de qudits em protocolos de comunicação passou a ser também bastante estudada. O fato de qudits terem um número maior de estados ortogonais associados ao seu espaço de Hilbert, faz com que uma maior quantidade de informação possa ser codificada nele.

Em criptografia quântica, o grande interesse é exatamente desenvolver métodos que aumentem a taxa de transmissão de informação e a segurança do protocolo contra ataques de espiões que tentam decodificar a mensagem. Mostrou-se que com o uso de qudits há um aumento na taxa de criação de chaves entre dois comunicadores [99]. Recentemente, foi mostrado também que os protocolos que usam qutrits ( $D = 3$ ) [100] ou qudits emaranhados [101], ao invés de qubits, são mais seguros contra ataques em que a informação é violada a partir de um processo de interceptação, clonagem e reenvio de apenas um dos componentes do par emaranhado.

Alguns protocolos como o problema do acordo Bizantino (*Byzantine agreement problem*) [102] e o lançamento de moedas (*quantum coin tossing*) [103] requerem qudits ao invés de qubits, no sentido que a realização deles com qudits é muito mais eficiente.

### 3.2.2 Métodos de geração de qudits com fótons gêmeos

Na seção 2.2, vimos que os pares de fótons produzidos na conversão paramétrica descendente podem ser emaranhados em diversos graus de liberdade. Com o aumento do interesse em se gerar emaranhamento multidimensional, diversos métodos para a criação de qudits emaranhados têm sido propostos e demonstrados nos últimos anos, usando diferentes graus de liberdade dos fótons da CPD. Vamos descrever de forma resumida três desses métodos, que pelo nosso conhecimento eram os únicos demonstrados experimentalmente até os trabalhos que deram origem a esta tese.

#### Momento angular orbital (MAO)

Na Ref. [104], mostrou-se que os feixes Laguerre-Gaussiano (LG) carregam momento angular orbital (MAO)  $l\hbar$  por fóton. Considerando o processo de CPD onde os fótons pump tem MAO de 0 (feixes Gaussianos,  $l = 0$ ) e  $\pm\hbar$  (feixes LG de primeira ordem,  $l = \pm 1$ ), a conservação de MAO foi demonstrada experimentalmente em [52]. Posteriormente, este resultado foi demonstrado teoricamente e experimentalmente por Walborn *et al.* [88], considerando-se as aproximações monocromática e de cristal fino. Portanto, os fótons gêmeos são emaranhados nesse grau de liberdade que é discreto e de dimensão infinita e podemos escrever o estado quântico deles como [88]

$$|\Psi\rangle = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} C_m |l-m\rangle |m\rangle, \quad (3.4)$$

que é claramente um estado emaranhado de dois qudits. A geração de estados emaranhados em MAO de dois qutrits foi demonstrada em [12] e embora a violação da desigualdade de Bell tenha sido observada, os autores mostram que o estado gerado no processo não é maximamente emaranhado. Um protocolo de concentração de emaranhamento<sup>4</sup> neste método foi demonstrado em [105].

Observa-se da Eq. (3.4), que os fótons convertidos são criados em infinitos modos, mas para analisar os fótons em modos LG com  $l \neq 0$  é necessário se usar hologramas gerados por computador [52]. Em [106], os autores argumentam que isto é um fator que limita, em poucas, as dimensões que podem ser exploradas neste método, devido à eficiência de difração de tais hologramas.

### Time-bin

Em 1989, Franson propôs um experimento para testar a desigualdade de Bell, utilizando emaranhamento em energia-tempo entre pares de fótons emitidos pelo decaimento de um sistema atômico de três níveis [51]. Usando o emaranhamento intrínseco em energia-tempo no processo de CPD, Brendel *et al.* demonstraram uma versão discreta do trabalho proposto por Franson e a batizaram de time-bin [107]. Neste método, o estado do par de fótons da CPD é dado por uma superposição coerente do tempo de emissão deste par. Há diferentes maneiras de se produzir estados emaranhados em time-bin. Para se gerar qubits, um interferômetro Mach-Zender desbalanceado é colocado antes do cristal da CPD e produz na saída o estado  $\alpha|c\rangle + \beta|l\rangle$  para o pump, onde  $|c\rangle$  ( $|l\rangle$ ) denota o caminho curto (longo) do interferômetro. Os fótons convertidos geram um estado de dois qubits dado por [107]

$$|\Psi\rangle = \alpha|c\rangle_s|c\rangle_i + \beta|l\rangle_s|l\rangle_i. \quad (3.5)$$

Maiores dimensões podem ser atingidas em princípio, inserindo-se um interferômetro de  $D$ -caminhos antes do cristal. Em outra abordagem, cada fóton convertido é enviado a um interferômetro de três caminhos com diferentes comprimentos. Um estado emaranhado de dois qutrits é gerado [108] e mostra-se que ele viola uma desigualdade de Bell [109]. Para produzir estados em espaços de dimensão arbitrariamente grande, se utiliza uma sequência de  $D$  pulsos do laser com uma diferença de fase constante<sup>5</sup> entre si. Esta sequência de pulsos bombeia o cristal da CPD e gera um par de fótons (a probabilidade de se gerar mais de um par é desprezível) no estado [110, 111]

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{j=1}^D c_j e^{i\phi_j} |j\rangle|j\rangle, \quad (3.6)$$

<sup>4</sup>Este é um método para aumentar o grau de emaranhamento.

<sup>5</sup>Isto pode ser obtido, por exemplo, com um laser mode-locked.

onde  $j$  denota o pulso da sequência, ou o tempo de emissão do par. Qudits emaranhados até  $D = 11$  foram demonstrados nesse trabalho [110, 111].

### Polarização

Embora a polarização seja um observável bidimensional, é possível obter qudits emaranhados usando mais de um par de fótons convertidos. Na Ref. [112], mostrou-se experimentalmente uma maneira de se gerar, através da CPD, um estado de quatro fótons<sup>6</sup> emaranhados em polarização, que é dado por

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|2H\rangle|2V\rangle - |HV\rangle|VH\rangle + |2V\rangle|2H\rangle), \quad (3.7)$$

onde  $|2H\rangle|2V\rangle$  representa dois fótons em cada modo espacial com polarização  $H$  ou  $V$ , e da mesma forma para os outros termos. Este estado pode ser usado para representar um estado maximamente emaranhado de dois qutrits. Fazendo a associação  $|2H\rangle \rightarrow |1\rangle$ ,  $|HV\rangle \rightarrow |0\rangle$  e  $|2V\rangle \rightarrow |-1\rangle$ , observa-se um estado análogo ao de duas partículas de spin-1, ou seja, dois qutrits. Na Ref. [113] o emaranhamento entre eles foi demonstrado por uma violação da desigualdade de Bell do tipo proposta em [96]. Todavia, este método é menos eficiente que os demais quando se pensa em generalizá-lo para maiores dimensões, uma vez que isto requer um número cada vez maior de pares de fótons.

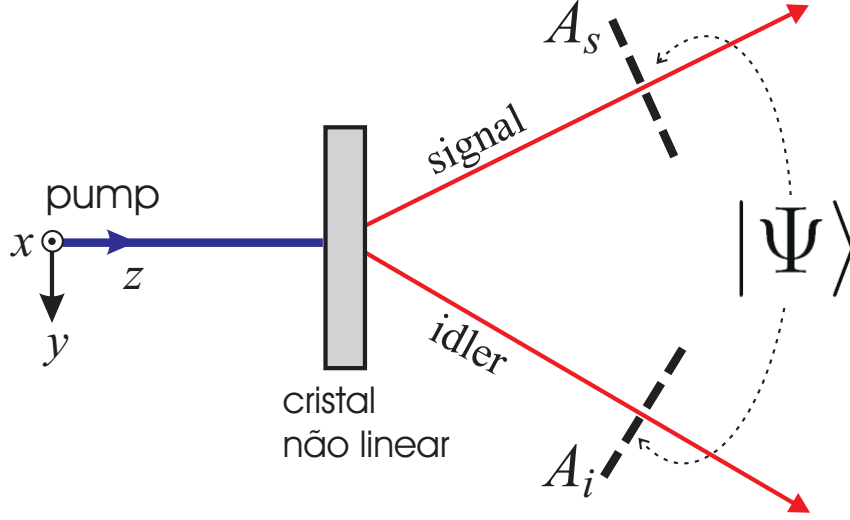
## 3.3 Qudits com fótons emaranhados espacialmente

Nos métodos de geração de qudits descritos na seção anterior, observa-se que dos graus de liberdade em que os fótons da CPD podem ser emaranhados (seção 2.2), nós não descrevemos um método que utilize o momento (modo espacial) desses fótons. No contexto de desigualdades de Bell para qudits, havia uma proposta baseada no tratamento monomodal da CPD [114], mas pelo nosso conhecimento não saiu do papel. Nesta seção, vamos mostrar que podemos explorar o emaranhamento em momento *transversal* (modo espacial transversal) dos fótons gêmeos da CPD, para a geração de estados emaranhados de dois qudits [83, 115]. Além disso, o nosso tratamento é multimodal, o que, ao contrário do monomodal, permite o controle das propriedades de correlação entre os fótons.

### 3.3.1 Cálculo do estado

Como foi feito na seção 2.5, vamos considerar novamente um experimento onde cada componente do par de fótons gerados na CPD é direcionado para um sistema óptico linear,

<sup>6</sup>O pump gera um par de fótons numa primeira passagem através do cristal não linear. Esse par é refletido de volta para o cristal assim como o pump. Nessa segunda passagem pelo cristal o pump gera um novo par de fótons, estimulada pelo par gerado anteriormente. Um estado de quatro fótons dado pela Eq. (3.7), é produzido nesse processo.



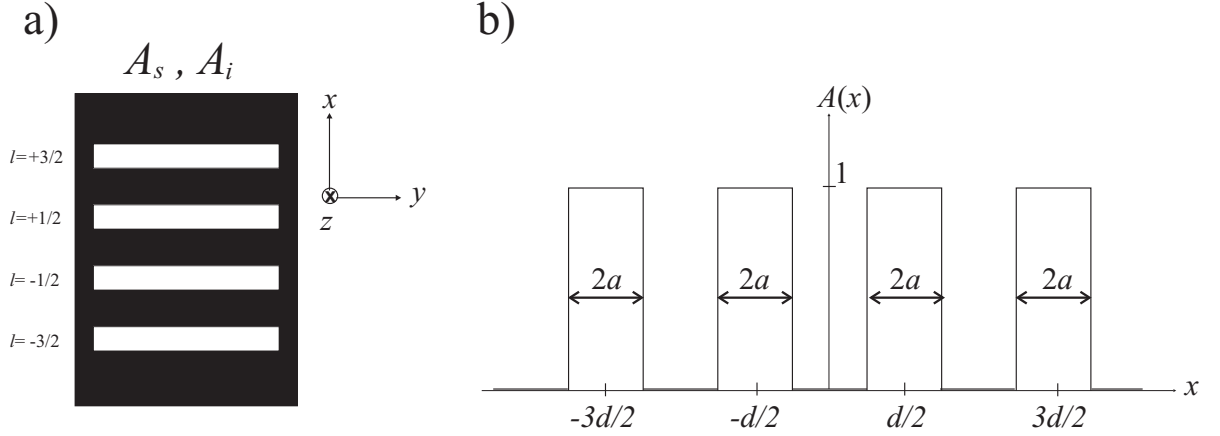
**Figura 3.1:** Fótons signal e idler gerados pela CPD em um cristal não-linear são transmitidos através de aberturas com  $D$  fendas ( $A_s$  e  $A_i$ ). Vamos determinar o estado de dois fótons,  $|\Psi\rangle$ , logo após estas aberturas.

como ilustrado na Fig. 3.1. Agora, vamos definir que estes sistemas ópticos no caminho de cada fóton do par convertido sejam anteparos opacos com  $D$  fendas transparentes ( $D \geq 2$ ), como ilustrado na Fig. 3.2(a) para  $D = 4$ , que mostra também a orientação da abertura em relação aos feixes. Estas aberturas são idênticas para o signal e idler, ou seja, as fendas têm a mesma largura e a mesma separação (centro a centro), como mostra a função transmissão da abertura na Fig. 3.2(b). Nós iremos nos referir a elas de agora em diante como “ $D$ -fendas”. Para realizar o cálculo do estado de dois fótons após estas aberturas, nós faremos as seguintes restrições:

- (i) Consideraremos somente o caso degenerado, i.e., fótons gêmeos com o mesmo comprimento de onda, o que pode ser obtido através de filtros espectrais no caminho de cada fóton. Assim,  $k_s = k_i = k/2$ .
- (ii) Ambas  $D$ -fendas são igualmente distantes do cristal, então  $z_{A_s} = z_{A_i}$ .
- (iii) A dimensão das fendas na direção  $y$  é muito maior que na direção  $x$  e portanto é suficiente considerar as equações em uma dimensão ( $\boldsymbol{\rho}_j \rightarrow x_j$  and  $\mathbf{q}_j \rightarrow q_j$ ).

Com as restrições (i) e (ii) temos da Eq. (2.31) que  $\mu_s = \mu_i = 2$  e também  $z_A = z_{A_s} = z_{A_i}$ . Usando isto e a restrição (iii), as Eqs. (2.22) e (2.34) que descrevem o estado de dois fótons, serão escritas respectivamente, como

$$|\Psi\rangle = \int dq_s \int dq_i \mathcal{F}(q_s, q_i) |1q_s\rangle |1q_i\rangle, \quad (3.8)$$



**Figura 3.2:** (a) Ilustração da abertura (4-fendas) colocados nos caminhos do sinal e idler. No lado esquerdo é mostrado o rótulo de cada fenda. (b) Função transmissão desta abertura.

com

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(q_s, q_i) &= \gamma \int dx_s \int dx_i A_s(x_s) A_i(x_i) \exp(ik(x_i - x_s)^2/8z_A) \\ &\times W(\tfrac{1}{2}(x_s + x_i); z_A) \exp(-i(q_s x_s + q_i x_i)), \end{aligned} \quad (3.9)$$

com todos os elementos já definidos na seção 2.5. A distância longitudinal  $z_A$  neste caso define o plano das aberturas. Assim, as correlações transversais dos fótons gêmeos dependerão da forma do perfil transversal do feixe pump no plano das  $D$ -fendas. A função transmissão que descreve a abertura  $D$ -fendas, mostrada na Fig. 3.2(b), é dada por:

$$A(x) = \sum_{l=-l_D}^{l_D} \Pi\left(\frac{x - ld}{2a}\right), \quad (3.10)$$

onde  $l_D \equiv (D - 1)/2$ ,  $2a$  é a largura de cada fenda,  $d$  é a separação (centro a centro) entre duas fendas consecutivas.  $\Pi(\xi)$  é uma função retângulo de largura e altura unitária:

$$\Pi(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\xi| \leq 1/2 \\ 0, & \text{se } |\xi| > 1/2 \end{cases}. \quad (3.11)$$

O índice  $l$  na Eq. (3.10) funciona como o rótulo de uma dada fenda deslocada de  $ld$  da origem (centro) do anteparo. Teremos então  $l$  semi-inteiro (inteiro) se  $D$  é par (ímpar) o que vai nos permitir representar o estado por uma notação tipo spin. Inserindo a Eq. (3.10) na Eq. (3.9) e fazendo uma mudança de variáveis ( $x_s \rightarrow x_s - ld$  e  $x_i \rightarrow x_i - md$ ),

a amplitude do bifóton pode ser colocada na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(q_s, q_i) &= \gamma \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} e^{-i(q_s l + q_i m)d} \int_{-a}^a dx_s \int_{-a}^a dx_i W\left(\frac{x_s + ld}{2} + \frac{x_i + md}{2}; z_A\right) \\ &\times \exp\left[\frac{ik}{8z_A}((x_i - x_s) + d(m - l))^2 - i(q_s x_s + q_i x_i)\right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Observe que a integração é realizada num intervalo tão pequeno quanto queiramos ( $[-a, a]$  é a largura das fendas, que é um parâmetro manipulável), e então vamos usar isso para fazeremos algumas aproximações, sempre de acordo com a realidade experimental. Primeiramente, a exponencial quadrática complexa na região de integração pode ser escrita aproximadamente como

$$\begin{aligned} &\exp\left[i\frac{k}{8z_A}((x_i - x_s) + d(m - l))^2\right] \\ &= \exp\left[i\frac{k}{8z_A}((x_i - x_s)^2 + 2d(x_i - x_s)(m - l) + d^2(m - l)^2)\right] \\ &\approx \exp\left[i\frac{kd^2(m - l)^2}{8z_A}\right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Esta aproximação é baseada em parâmetros experimentais usuais, especialmente os parâmetros  $a$  e  $d$  das  $D$ -fendas. Para ver que ela é válida nesta região de integração nós supomos  $D = 8$ ,  $d = 4a$ , e os demais valores que poderiam ser usados num experimento<sup>7</sup>:  $\lambda = 413\text{nm}$ ,  $z_A = 500\text{mm}$ ,  $d = 0.12\text{mm}$  e  $2a = 0.06\text{mm}$ . Desta maneira o primeiro e segundo termo na exponencial do lado direito têm, respectivamente, os seguintes valores máximos  $\frac{ka^2}{2z_A} = 1.37 \times 10^{-2}$  e  $\frac{kda}{2z_A}(D - 1) = 3.83 \times 10^{-1}$ . Portanto, estes termos podem ser desprezados para  $2 \leq D \leq 8$ . Manipulando os valores de  $a$ ,  $d$  e  $z_A$  esta aproximação permanece válida para  $D > 8$ .

Como segunda aproximação, observe que numa região muito pequena (como é o caso de nosso intervalo de integração) nós podemos considerar o perfil transversal do feixe pump constante sobre essa região. Desta forma, o perfil na Eq. (3.12) será independente das variáveis de integração e podemos escrevê-lo como

$$W\left(\frac{x_s + ld}{2} + \frac{x_i + md}{2}; z_A\right) \approx W\left(\frac{(l + m)d}{2}; z_A\right). \quad (3.14)$$

Assim, é suficiente tomar o perfil transversal no ponto médio das fendas ( $l + m$  ímpar para  $D$  par, e  $l + m$  zero ou par para  $D$  ímpar), ou no ponto médio da região opaca entre as fendas ( $l + m$  zero ou par para  $D$  par, e  $l + m$  ímpar para  $D$  ímpar).

<sup>7</sup>Esses valores foram propostos antes do experimento, o qual usou valores diferentes.

Com estas aproximações a amplitude do bifóton será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(q_s, q_i) &= \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} W_{lm} e^{i \frac{kd^2}{8z_A} (m-l)^2} e^{-i(q_s l + q_i m)d} \int_{-a}^a dx_s e^{-iq_s x_s} \int_{-a}^a dx_i e^{-iq_i x_i} \\ &= \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} W_{lm} e^{i \frac{kd^2}{8z_A} (m-l)^2} e^{-iq_s l d} \text{sinc}(q_s a) e^{-iq_i m d} \text{sinc}(q_i a). \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde

$$W_{lm} \equiv \gamma W\left(\frac{(l+m)d}{2}; z_A\right). \quad (3.16)$$

Substituindo a Eq. (3.15) na Eq. (3.8), o estado de dois fótons após as  $D$ -fendas pode finalmente ser escrito como

$$|\Psi\rangle = \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} W_{lm} e^{i \frac{kd^2}{8z_A} (m-l)^2} |l\rangle_s \otimes |m\rangle_i, \quad (3.17)$$

o qual nós afirmamos ser um estado emaranhado de dois qubits (se  $D = 2$ ) ou qudits (se  $D > 2$ ). Vamos então justificar esta afirmação. Os estados  $|l\rangle$  (ou  $|m\rangle$ ) são estados de um fóton definidos, a menos de um fator de fase global, por<sup>8</sup>

$$|l\rangle \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq e^{-iqld} \text{sinc}(qa) |1q\rangle. \quad (3.18)$$

É fácil mostrar que estes estados satisfazem as seguintes propriedades:

(i)  $|l\rangle$  é normalizado:

$$\langle l|l\rangle = \frac{a}{\pi} \int dq \text{sinc}^2(qa) = 1. \quad (3.19)$$

(ii) Dois estados diferentes ( $l' \neq l$ ) são ortogonais:

$$\begin{aligned} \langle l|l'\rangle &= \frac{a}{\pi} \int dq e^{id(l-l')q} \text{sinc}^2(qa) \\ &= \Lambda\left(\frac{d}{2a}(l-l')\right); \end{aligned}$$

onde  $\Lambda(x)$  é a função triângulo definida por

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ 1 - |x|, & |x| < 1. \end{cases} \quad (3.20)$$

<sup>8</sup>As constantes  $\sqrt{\pi/a}$ , usadas para permitir a definição de  $|l\rangle$  em (3.18), são absorvidas por  $W_{lm}$ .

Se  $l' = l$  nós voltamos à situação anterior. Se  $l' \neq l$ , o argumento da função triângulo acima será  $nd/2a$  com  $n$  inteiro. Desta forma, estes estados serão ortogonais para todo  $l$  e  $l'$  porque  $d > 2a$ . Teremos então,

$$\langle l|l' \rangle = \delta_{ll'}. \quad (3.21)$$

- (iii) Os feixes da CPD nas aproximações consideradas podem ser aproximados por ondas planas [63], tal que podemos considerar uma representação de posição para o estado de um fóton,  $|1x\rangle$ , que é relacionado com o estado de Fock  $|1q\rangle$  por uma transformada de Fourier:

$$|1x\rangle = \frac{1}{2\pi} \int dq e^{iqx} |1q\rangle \quad \rightarrow \quad |1q\rangle = \int dx e^{-iqx} |1x\rangle. \quad (3.22)$$

Usando este resultado na Eq. (3.18) nós temos

$$|l\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int dx \Pi[(x - ld)/2a] |1x\rangle. \quad (3.23)$$

Portanto, os estados  $|l\rangle$  representam um fóton transmitido através da fenda que está a uma distância  $ld$  do centro ( $x = 0$ ) da abertura, em outras palavras, transmitido através da fenda  $l$ .

As propriedades (i) e (ii) estabelecem que o conjunto de  $D$  vetores  $\{|l\rangle\}$  formam uma base ortonormal no espaço de Hilbert  $D$ -dimensional associado ao fóton. Assim, o fóton signal (idler) após a abertura, é um qudit onde os estados lógicos são dados pelo conjunto  $\{|l\rangle_s\}$  ( $\{|m\rangle_i\}$ ), com os vetores definidos na Eq. (3.18). Além disso, como os coeficientes complexos  $W_{lm}$  e a fase no estado de dois fótons na Eq. (3.17) não fatoram [veja Eq. (3.16)], este é um estado emaranhado de dois qudits onde os fótons signal e idler são emaranhados nos diferentes modos transversais espaciais definidos pelas fendas através das quais são transmitidos. Levando em conta a condição de normalização do estado de dois fótons, os coeficientes  $W_{lm}$  são dados pelo perfil transversal normalizado do feixe pump no plano das  $D$ -fendas, tomados nas partes opacas ou transparentes desta abertura. Os fatores de fase relativos são devidos à diferença do caminho óptico entre o caminho do bifóton (a média dos caminhos de cada fóton) e o caminho do centro do pacote de onda de dois fótons quando ambos se propagam até o plano das  $D$ -fendas,  $z_A$ .

Com o significado descrito acima para os coeficientes  $W_{lm}$  do estado de dois fótons, vemos claramente da Eq. (3.17) que diferentes estados emaranhados de qudits podem ser preparados utilizando-se diferentes tipos de feixes de bombeio e através da manipulação da distribuição transversal desses feixes no plano das  $D$ -fendas. É nesse sentido que o nosso método de geração de qudits é controlado, uma vez que podemos definir na preparação, a dimensão e as propriedades de emaranhamento entre eles. Por exemplo, estados parcialmente emaranhados ou estados emaranhados em subespaços de  $D$  podem



ser preparados para dados perfis. A seguir, discutiremos um caso muito importante o qual será demonstrado experimentalmente no próximo capítulo.

### 3.3.2 Estado maximamente emaranhado

Vamos agora considerar os estados maximamente emaranhados (ME) de dois qudits, que são um caso específico do estado de dois fótons dado pela Eq. (3.17). Ao longo da tese nós já ressaltamos a importância destes estados em protocolos de informação quântica e por isso justifica-se uma seção a parte (ou até mesmo um capítulo a parte, como é o próximo) para eles. Aqui, nós mostraremos como é a preparação de qudits ME no nosso método.

Suponhamos para as  $D$ -fendas que  $d = 4a$ , o que significa que as partes opacas entre as fendas têm largura  $2a$ . Esta será então a separação espacial entre cada nível do nosso qudit<sup>9</sup>. Consideremos também que o perfil transversal do feixe pump no plano das  $D$ -fendas é dado por  $W(x; z_A) = W_o \Pi(x/2a)$ , onde  $W_o$  é uma constante e  $\Pi(\xi)$  é a função retângulo, definida na Eq. (3.11). Este perfil pode ser obtido experimentalmente projetando-se a imagem (com fator de aumento um) de uma fenda simples de largura  $2a$  no centro do plano das  $D$ -fendas (ou pode ser muito bem aproximado focalizando-se o perfil transversal numa região de largura menor que  $2a$  no centro do plano das  $D$ -fendas). Da Eq. (3.14) vemos que o perfil transversal transferido para o estado de dois fótons será dado por

$$W\left(\frac{(l+m)d}{2}; z_A\right) = W_o \Pi\left(\frac{(l+m)d}{4a}\right). \quad (3.24)$$

Como  $d = 4a$ , esta quantidade é o valor da função retângulo no ponto  $l+m$ . Pela definição da função e como  $l+m$  é sempre inteiro, temos que  $W_{lm}$  é não nulo somente quando  $l+m = 0$ . Então, nós podemos escrever  $W_{lm} \propto \delta_{m,-l}$ . Inserindo isto na Eq. (3.17), teremos para o estado de dois fótons após a normalização

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{l=-l_D}^{l_D} e^{ik\frac{d^2 l^2}{2z_A}} |l\rangle_s \otimes |-l\rangle_i. \quad (3.25)$$

Neste estado, as correlações dos fótons gêmeos são tais que se o fóton idler passar através das fenda  $l$ , o fóton signal irá passar com certeza através da fenda simetricamente oposta  $-l$ . Eles são emaranhados nestes diferentes modos transversais espaciais representados pelo estado produto  $|l\rangle_s |-l\rangle_i$ . Mais que isso, eles são maximamente emaranhados uma vez que os estados que formam esta superposição coerente têm a mesma probabilidade ( $1/D$ ). Portanto, o estado de dois fótons na Eq. (3.25) descreve um estado ME de dois

<sup>9</sup>Esse valor foi escolhido meramente por questões experimentais. Poderia ser menor (desde que  $d > 2a$ ) ou maior.

qudits. Por exemplo, no caso de  $D = 3$  (qutrits), teremos

$$|\Psi\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ |0\rangle_s |0\rangle_i + e^{i\frac{kd^2}{2z_A}} (|-1\rangle_s |+1\rangle_i + |+1\rangle_s |-1\rangle_i) \right], \quad (3.26)$$

e no caso de  $D = 4$  (os chamados ququarts) nós temos a menos de uma fase global

$$|\Psi\rangle_4 = \frac{1}{2} \left[ |+\frac{1}{2}\rangle_s |-\frac{1}{2}\rangle_i + |-\frac{1}{2}\rangle_s |+\frac{1}{2}\rangle_i + e^{i\frac{kd^2}{z_A}} (|-\frac{3}{2}\rangle_s |+\frac{3}{2}\rangle_i + |+\frac{3}{2}\rangle_s |-\frac{3}{2}\rangle_i) \right]. \quad (3.27)$$

Aqui, se o fóton signal passar através da fenda  $l = +1/2$ , o idler passará através de  $l = -1/2$  e assim por diante.

### 3.4 Discussão

Não é um fato surpreendente que um sistema de dois fótons emaranhados em variáveis contínuas possa ser tratado como um sistema discreto como mostra a Eq. (3.17). De fato, quando um sistema bipartido com graus de liberdade contínuos é tratado por meio de equações integrais de autovalor, mostra-se que tal sistema é intrinsecamente discreto, o que é visto fazendo-se a decomposição de Schmidt<sup>10</sup> da amplitude do bifóton. Trabalhos recentes [64, 116, 117] têm explorado este aspecto do emaranhamento em variáveis contínuas.

Na Ref. [61], foi ressaltado que ao invés de expressar a amplitude do bifóton em termos de ondas planas (que é o que fazemos), poderíamos expressá-la em termos de um outro conjunto de modos como  $\sum_n c_n U_n(\mathbf{q}_s) V_n(\mathbf{q}_i)$  (que na realidade são os modos espaciais de Schmidt [64]) e o autor argumenta que o sistema óptico atuaria como um projetor sobre um subconjunto desses modos. Em nosso caso, embora não façamos a decomposição de Schmidt na amplitude do bifóton [isso é visto pelo somatório duplo na Eq. (3.15)], vemos que a presença das  $D$ -fendas no caminho de cada fóton seleciona modos espaciais transversais específicos, o que discretiza o espaço de cada fóton gerando um espaço de qudit. As  $D$ -fendas podem ser vistas como um artifício para selecionar esses modos. Como foi proposto em nosso trabalho experimental [84] (que discutiremos no próximo capítulo), elas poderiam ser substituídas por fibras ópticas o que foi feito pouco tempo depois por O’Sullivan-Hale *et al.*, embora o estado de qudits emaranhados espacialmente que eles geraram não foi maximamente emaranhado [85].

<sup>10</sup>Veja capítulo 1, subseção 1.2.2 ou as Refs. [19, 20]. No caso de sistemas com graus de liberdade contínuos, descrito por uma amplitude  $A(x_1, x_2)$ , a DS permite escrever esta amplitude como  $A(x_1, x_2) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \psi_n(x_1) \phi_n(x_2)$ , onde  $\lambda_n$ ,  $\psi_n$  e  $\phi_n$  são soluções de equações integrais de autovalor referentes a este sistema [117].

### 3.4.1 Comprimento de correlação do bifóton

É importante entender como a forma do perfil transversal do feixe de laser pode mudar as correlações entre os qudits. Para isso, considere o estado de dois fótons dado pela Eq. (3.8), com a amplitude dada por (3.9) e suponha que não haja abertura no caminho deles, i.e.,  $A_j(x_j) = 1$  para  $j = s, i$ . Usando as relações de transformada de Fourier entre as representações de posição e momento para o estado de um fóton [veja a Eq. (3.22)], podemos escrever o estado de dois fótons, nesse caso, como

$$|\Psi\rangle = \tilde{\gamma} \int dx_s \int dx_i W\left(\frac{1}{2}(x_s + x_i); z_A\right) e^{i\frac{k}{8z_A}(x_i - x_s)^2} |1x_s\rangle |1x_i\rangle. \quad (3.28)$$

Supondo detectores pontuais em  $z_A$ , a probabilidade de detectar o fóton signal em  $x_s$  e o seu gêmeo idler em  $x_i$  será dada por

$$P(x_s, x_i) \propto |W\left(\frac{1}{2}(x_s + x_i); z_A\right)|^2. \quad (3.29)$$

Esta quantidade nos dá uma medida do comprimento de correlação do bifóton (com um fator de aumento de dois), uma vez que detectando um fóton num dado ponto, o seu gêmeo será detectado dentro de uma região definida pela forma do perfil do laser. Quando o perfil do pump é muito estreito no plano  $z_A$ , o comprimento de correlação do bifóton será também muito estreito neste plano. Para o caso de  $D$ -fendas (em  $z_A$ ) nos caminhos do signal e idler, se a separação entre as fendas for maior que este comprimento de correlação, haverá correlação somente entre as fendas simetricamente opostas devido à conservação de momento transversal observada no regime de cristal fino [34]. Para perfis do pump mais largos que a separação entre as fendas, haverá correlações entre fendas que não são simétricas e neste caso teríamos estados parcialmente emaranhados.

### 3.4.2 Vantagens e limitações do método

O método que estamos propondo de geração de qudits emaranhados usando a correlação transversal dos fótons gêmeos tem algumas vantagens sobre aqueles descritos na seção 3.2:

1. É relativamente mais simples de ser realizado experimentalmente.
2. É facilmente generalizado para dimensões maiores que dois.
3. Temos o controle das propriedades de emaranhamento através da manipulação do perfil transversal do feixe de laser.
4. Permite, de forma simples, se estudar emaranhamento entre subsistemas de dimensão diferente, bastando utilizar aberturas com um número de fendas diferentes no caminho de cada fóton.

Como os demais métodos, este também tem suas limitações físicas. Apesar de ser fácil aumentar a dimensão  $D$  do qudit, esse aumento não é arbitrário pelas seguintes razões:

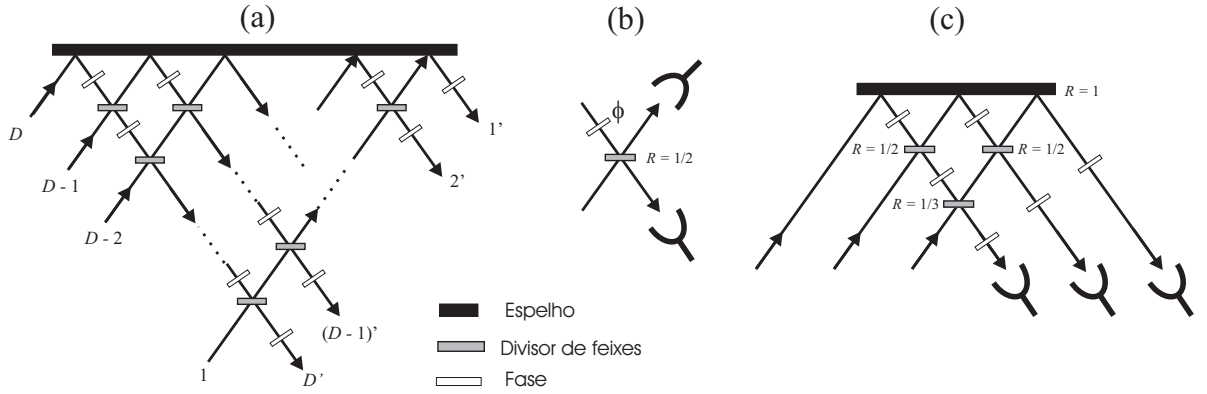
1. Temos que levar em conta as aproximações que fizemos para chegar ao estado (seção 3.3.1). Se aumentamos  $D$  (número de fendas) e mantemos os parâmetros  $a$  (largura das fendas) e  $d$  (separação entre as fendas) fixos, em algum momento tais aproximações não valerão mais.
2. Podemos aumentar  $D$  reduzindo os parâmetros  $a$  e  $d$ , de modo que as aproximações ainda valham. Porém, para  $D$  muito grande isso pode ter dois inconvenientes, do ponto de vista experimental:
  - Uma redução de  $d$  significa diminuir a separação entre os níveis do qudit. Se essa redução for muito grande, a separação pode se tornar tão pequena a ponto de não ser possível produzir um perfil do feixe de laser suficientemente estreito para se preparar o estado maximamente emaranhado.
  - O problema da redução de  $a$  é que a utilização de fendas com larguras muito reduzida, acarretaria na redução do sinal, o que poderia inviabilizar qualquer experimento.

### 3.4.3 Operações locais

Como vimos na seção 1.3, quando queremos utilizar o caráter não local dos estados emaranhados em protocolos de informação quântica ou testá-lo em experimentos de Bell, é necessário realizar operações locais sobre os subsistemas. Estas operações incluem transformações unitárias e medidas de observáveis. Isto quer dizer que, para um sistema quântico ser caracterizado como qubit ou qudit, com possibilidade de portar informação, não basta apenas gerá-lo, devemos ser capazes também de realizar qualquer tipo de operação sobre ele. Vamos descrever duas maneiras de se fazer tais rotações nos estados  $|l\rangle$  dados pela Eq. (3.18) e mostrar que em princípio, esses estados podem ser utilizáveis.

#### Divisores de feixes multiportas

Em um trabalho muito interessante, Reck *et al.* demonstram que um dispositivo construído com um conjunto de espelhos, divisores de feixe e deslocadores de fase, pode reproduzir *todas* as transformações unitárias de dimensão finita,  $D$ , para estados de um fóton e permite também a medida de quaisquer observáveis [118]. O nome desse dispositivo é divisor de feixes multiportas (DFM) e a forma geral dele é ilustrada na Fig. 3.3(a). O DFM transforma  $D$  estados de entrada em  $D$  estados de saída; ele é uma generalização



**Figura 3.3:** Divisores de feixe multiportas. (a) Esquema geral para um sistema  $D$ -dimensional. (b) e (c) são divisores de feixes simétricos para  $D = 2$  e  $D = 3$ , respectivamente.

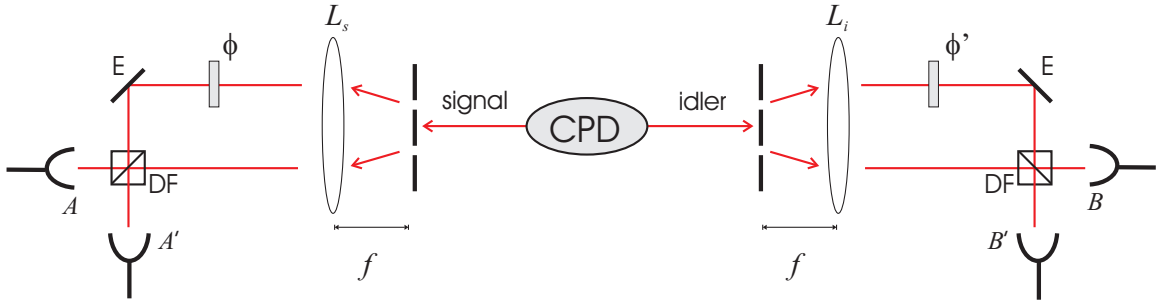
do divisor de feixes comum, que tem duas portas de entrada e duas de saída [Fig. 3.3(b)] e cuja operação unitária em um estado de entrada é dada por

$$[\mathbb{U}_2(R)] = \begin{pmatrix} \sqrt{R} & e^{i\phi}\sqrt{1-R} \\ \sqrt{1-R} & -e^{i\phi}\sqrt{R} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

onde  $R$  é a refletividade e  $1 - R = T$  a transmissividade do divisor de feixes;  $\phi$  é uma fase externa. No caso do DFM, cada divisor de feixe que o compõe realiza uma transformação unitária num subespaço bidimensional do espaço de Hilbert  $D$ -dimensional. O que os autores mostram então, é que uma transformação unitária qualquer,  $\mathbb{U}_D$ , nesse espaço, pode ser fatorada em um produto de matrizes do divisor de feixe<sup>11</sup> [Eq. (3.30)] com as fases externas apropriadas. O número máximo de divisores de feixe para construir  $\mathbb{U}_D$  é uma combinação todos os subespaços bidimensionais possíveis, ou seja,  $D(D-1)/2$ . Isso pode ser visto nas Figs. 3.3(b) e (c) para  $D = 2$  e  $D = 3$ , respectivamente. Nestas figuras vemos um caso especial que são os DFM's simétricos, onde se um fóton entra por uma porta  $i$ , a probabilidade de sair por qualquer porta (de saída) é igual a  $1/D$ . O divisor de feixe 50/50 é o exemplo mais simples e para maiores dimensões, basta utilizar divisores de feixes com refletividades diferentes. Na ponta da “pirâmide” temos  $R = 1/D$ , na segunda linha  $R = 1/(D-1)$  e sucessivamente até a última linha de divisores de feixe com  $R = 1/2$ , como mostra a Fig. 3.3(c).

Da mesma forma, qualquer observável pode, em princípio, ser medido através de um DFM, bastando uma manipulação apropriada das fases externas e das refletividades dos divisores de feixe. Suponha, um observável  $\mathbb{O}_D$  cujos autovetores são  $\{|o_1\rangle, |o_2\rangle, \dots, |o_D\rangle\}$  e os respectivos autovalores são  $\{o_1, o_2, \dots, o_D\}$ . Em cada porta de saída se coloca um detector, correspondente a um desses  $D$  autovetores. Se o estado de entrada no DFM

<sup>11</sup>Neste caso, matrizes identidade  $D$ -dimensionais com um bloco formado pela matriz do divisor de feixes.



**Figura 3.4:** Esquema de um experimento de Bell para dois qubits emaranhados espacialmente.  $L_s$  e  $L_i$  são lentes convergentes de foco  $f$ ,  $\phi$  e  $\phi'$  são fases externas variáveis; E e DF denotam espelho e divisor de feixes, respectivamente.  $A, A', B, B'$  são os rótulos dos detectores.

é  $|o_i\rangle$ , haverá um “clique” no detector  $i$ . Para um estado de entrada arbitrário  $|\Psi\rangle$ , as amplitudes de probabilidade de detecção são dadas por  $\langle o_i|\Psi\rangle$ . O clique no detector  $i$  corresponde à medida do autovalor  $o_i$ .

Portanto, qualquer operação local pode ser realizada através desses DFM e acreditamos que este pode ser um caminho de se utilizar de forma prática, os estados emaranhados de qubits e qudits que estamos propondo aqui. Um exemplo concreto é um teste de Bell para qubits que será discutido com detalhes na tese de doutorado de G. Lima [119], do Grupo de Óptica Quântica da UFMG. O esquema do experimento é mostrado na Fig. 3.4. Uma lente convergente de comprimento focal  $f$  é colocada a uma distância  $f$  das fendas duplas, de forma que os feixes de saída da fenda dupla são colimados e direcionados para um divisor de feixe simétrico. Considerando detectores ideais, as probabilidades de detecção em coincidência são dadas por

$$P(A, B|\phi, \phi') = P(A', B'|\phi, \phi') = \frac{1}{4}[1 + \cos(\phi - \phi')],$$

$$P(A, B'|\phi, \phi') = P(A', B|\phi, \phi') = \frac{1}{4}[1 - \cos(\phi - \phi')].$$

Aqui, as fases  $\phi$  e  $\phi'$  definem as bases de medida. A variação da fase resulta numa rotação do estado de um qubit, o que está de acordo com a teoria de DFM descrita acima.

### Propagação no espaço livre

Outra maneira de se fazer rotações dos vetores  $|l\rangle$  dados pela Eq. (3.18), é através da propagação no espaço livre. Vamos deixar esta discussão para o capítulo 5, onde determinamos o grau de emaranhamento para dois qubits, medindo no plano de transformada de Fourier de uma lente. Mostraremos que as medidas nesse plano, correspondem a medidas sobre combinações lineares dos vetores  $|l\rangle$ , e são portanto, medidas sobre outra base. Outro trabalho realizado em nosso grupo, utiliza a mudança de base devido à propagação para fazer a reconstrução tomográfica de estados mistos de dois qubits [119, 120].

# Geração de Qudits utilizando Fótons Gêmeos: Experimentos

Neste capítulo apresentaremos um experimento que demonstra o uso das correlações transversais entre os pares de fótons gerados na CPD para a criação de estados *maximamente emaranhados* de qudits. Através de medidas de interferência condicional, fazemos uma demonstração qualitativa de emaranhamento. Num segundo experimento, demonstramos a propagação do estado de dois qudits no espaço livre.

## 4.1 Geração de estados maximamente emaranhados

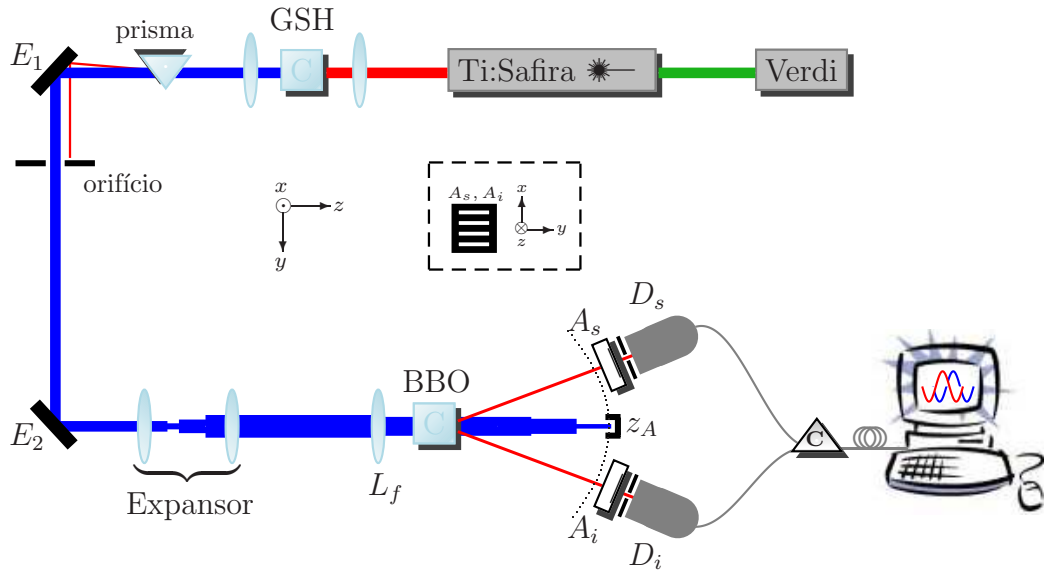
No capítulo anterior, apresentamos a nossa proposta para geração de qudits emaranhados, codificados no momento transversal dos fótons gêmeos da CPD. O trabalho foi motivado pela importância que tais sistemas têm para aplicações em informação quântica. Como se sabe, a eficiência de tais aplicações está diretamente ligada ao grau de emaranhamento que se pode gerar. Por isso, ao pensarmos em realizar o experimento para verificar o método que propusemos, nos restringimos aos estados maximamente emaranhados (ME) [84, 115], dada a sua importância. Apresentaremos o experimento nesta seção.

### 4.1.1 Montagem experimental

A Fig. 4.1 ilustra a montagem experimental usada para demonstrar a geração dos estados ME de qudits produzidos da maneira descrita no capítulo anterior. Um laser de Titânio-safira emitindo no infravermelho ( $\lambda = 826$  nm) tem sua frequência dobrada pelo processo de geração de segundo harmônico (GSH) ao incidir em um cristal não-linear. Como a eficiência da GSH é baixa<sup>1</sup>, temos feixes violeta ( $\lambda = 413$  nm) e infravermelho na saída, os quais são separados por um prisma e em seguida o infravermelho é bloqueado por um orifício. O feixe violeta com uma potência de 100 mW é direcionado para um sistema expensor-lente e após isso incide num cristal não linear de BBO ( $\beta$  borato de bário) de 5 mm de espessura. Com o cristal preparado para o processo de CPD tipo II, fótons gêmeos com o mesmo comprimento de onda ( $\lambda_s = \lambda_i = 826$  nm) são gerados em feixes que fazem um ângulo de  $2.5^\circ$  em relação à direção do feixe pump. Duas fendas múltiplas

---

<sup>1</sup>O laser de saída no infravermelho tem potência de 1.3 W enquanto para o violeta conseguimos no máximo 0.3 W.



**Figura 4.1:** Esquema da montagem experimental usada para a geração de estados maximamente emaranhados de qudits. GSH denota a geração de segundo harmônico,  $E_1$  e  $E_2$  são espelhos,  $L_f$  é a lente para focalizar o feixe,  $A_s$  e  $A_i$  são as  $D$ -fendas,  $D_s$  e  $D_i$  são os detectores e  $C$  é o contador de fótons. Mais detalhes no texto.

( $D$ -fendas) idênticas,  $A_s$  e  $A_i$ , são colocadas no caminho dos feixes convertidos à mesma distância  $z_A = 200$  mm do cristal. Uma imagem dessa abertura obtida via microscópio é mostrada na Fig. 4.2, para  $D = 4$ . Observe que as separações entre as fendas não são idênticas, mas isso não acarretou em nenhum prejuízo aparente para o trabalho. A largura das fendas é  $2a \approx 0.09$  mm e a separação entre elas é  $d \approx 0.17$  mm. Os detectores  $D_s$  e  $D_i$  são colocados logo atrás das  $D$ -fendas a uma distância  $z \approx 2$  mm. Estes detectores são fotodiodos de avalanche que convertem cada fóton em um pulso elétrico o qual é enviado a um contador, que conta tanto os pulsos (contagem simples) de cada detector, como também os pulsos  $(s, i)$  que chegam dentro de uma janela de 5 ns (contagem em coincidência). Os dados são enviados a um computador. Na entrada de cada detector, temos um arranjo composto de uma fenda simples de  $100 \mu\text{m}$  orientada paralelamente às fendas da abertura, um filtro de interferência de 8 nm de largura de banda centrado para o comprimento de onda dos fótons gêmeos (826 nm) seguido de uma objetiva de microscópio focalizada na área ativa do detector. A fenda simples é usada para obtermos resolução espacial nas medidas enquanto o filtro de interferência nos permite considerar os feixes gêmeos quasi-monocromáticos.

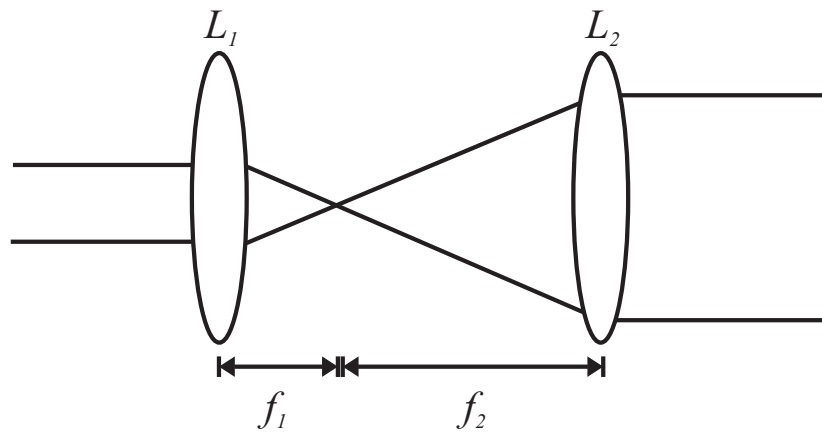
### 4.1.2 Preparação do estado

Para preparar o estado ME de qudits nós devemos ter um perfil transversal do feixe de laser bastante estreito no centro do plano das  $D$ -fendas, como foi discutido na subseção 3.3.2.





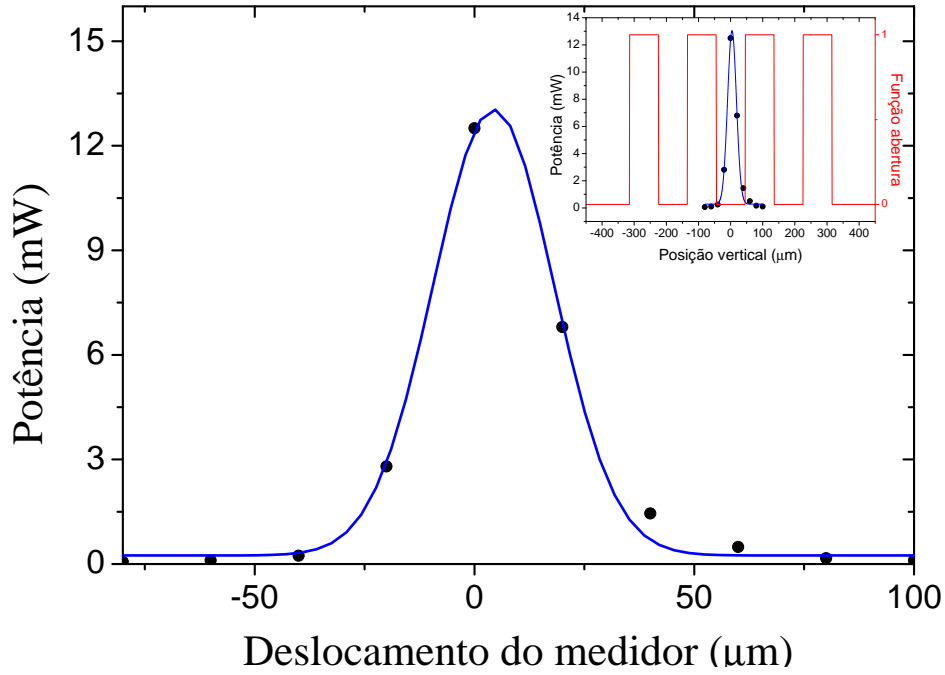
**Figura 4.2:** Imagem da fenda quádrupla, com suas dimensões  $d = 0.17$  mm e  $2a = 0.09$  mm e também os seus rótulos  $l$ .



**Figura 4.3:** Esquema de um expensor de feixes.

Lá, isto foi mostrado considerando-se um perfil retangular, o qual pode ser obtido projetando a imagem de uma fenda simples estreita no plano  $z_A$ . Experimentalmente, isso tem muitas desvantagens, pois é necessário montar um sistema de imagem para a fenda e também porque a potência do feixe de laser incidindo no cristal é bastante atenuada pelo uso da fenda, o que reduz bastante o sinal para os fótons gêmeos. Uma forma de contornar o problema é simplesmente focalizar o laser no plano das  $D$ -fendas através de uma lente colocada antes do cristal (Fig. 4.1). Para conseguirmos um perfil suficientemente estreito no foco da lente  $L_f$ , usamos um expensor de feixe antes dela, como é mostrado na Fig. 4.1. O expensor foi montado com a primeira lente com comprimento focal de 25 mm e a segunda 100 mm; o seu papel é mostrado esquematicamente na Fig. 4.3.

Para verificar se o perfil do pump no plano das  $D$ -fendas era suficientemente estreito (largura  $< 2a$ ), nós o medimos através de um medidor de potência colocado no plano



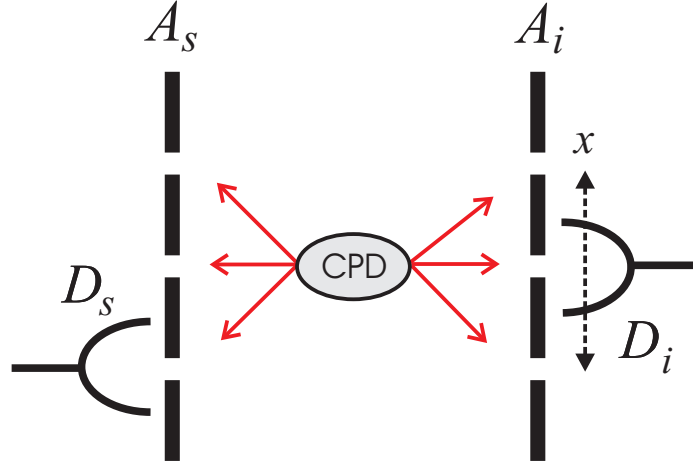
**Figura 4.4:** Perfil transversal do feixe pump no plano das aberturas. Os valores medidos são representados por (●) e a linha contínua é o ajuste Gaussiano. No canto superior à direita, temos uma comparação entre este perfil e a função da fenda quádrupla.

focal da lente ( $f = 250$  mm). Um pinhole de  $15 \mu\text{m}$  é colocado na frente do medidor para se obter resolução espacial. Deslocando-o na direção  $x$ , a potência do laser transmitida em função da posição deste pinhole é medida. O perfil transversal medido é mostrado na Fig. 4.4. O ajuste Gaussiano forneceu um valor de  $0.034$  mm de largura a meia altura (FWHM, *full width at half maximum*). A figura mostra também que a largura desse perfil é menor que a parte opaca entre as fendas. Como veremos, isto é suficiente para garantir que o estado ME de qudits dado pela Eq. (3.25) será formado após as  $D$ -fendas.

### 4.1.3 Procedimento de medida

Vamos descrever agora o procedimento que adotamos para identificar o estado gerado após as  $D$ -fendas. Os detectores signal e idler, denotados por  $D_s$  e  $D_i$ , respectivamente, são colocados logo atrás das  $D$ -fendas do feixe correspondente, como mostrado na Fig. 4.1. Fazemos então, o que nós chamamos de medida seletiva<sup>2</sup> em coincidência sobre a base  $\{|l\rangle_s |l'\rangle_i\}$ . O detector  $D_s$  é mantido fixo atrás da fenda  $l$  (no ponto de contagem simples máxima) enquanto o detector  $D_i$  varre a outra abertura na direção  $x$ , como ilustrado no diagrama da Fig 4.5. A cada varredura completa de  $D_i$ ,  $D$  vetores de base do conjunto  $\{|l\rangle_s |l'\rangle_i\}$  são selecionados, pois para um dado  $l$ ,  $D_i$  varia de  $l' = -(D-1)/2$  a  $l' = (D-1)/2$ . Após  $D$  medidas deste tipo ( $D_s$  variando de  $l = -(D-1)/2$  a  $l = (D-1)/2$ ), nós teremos as *probabilidades* para todos os  $D^2$  vetores da base  $\{|l\rangle_s |l'\rangle_i\}$ . De

<sup>2</sup>Na próxima subseção discutiremos a utilização deste termo.



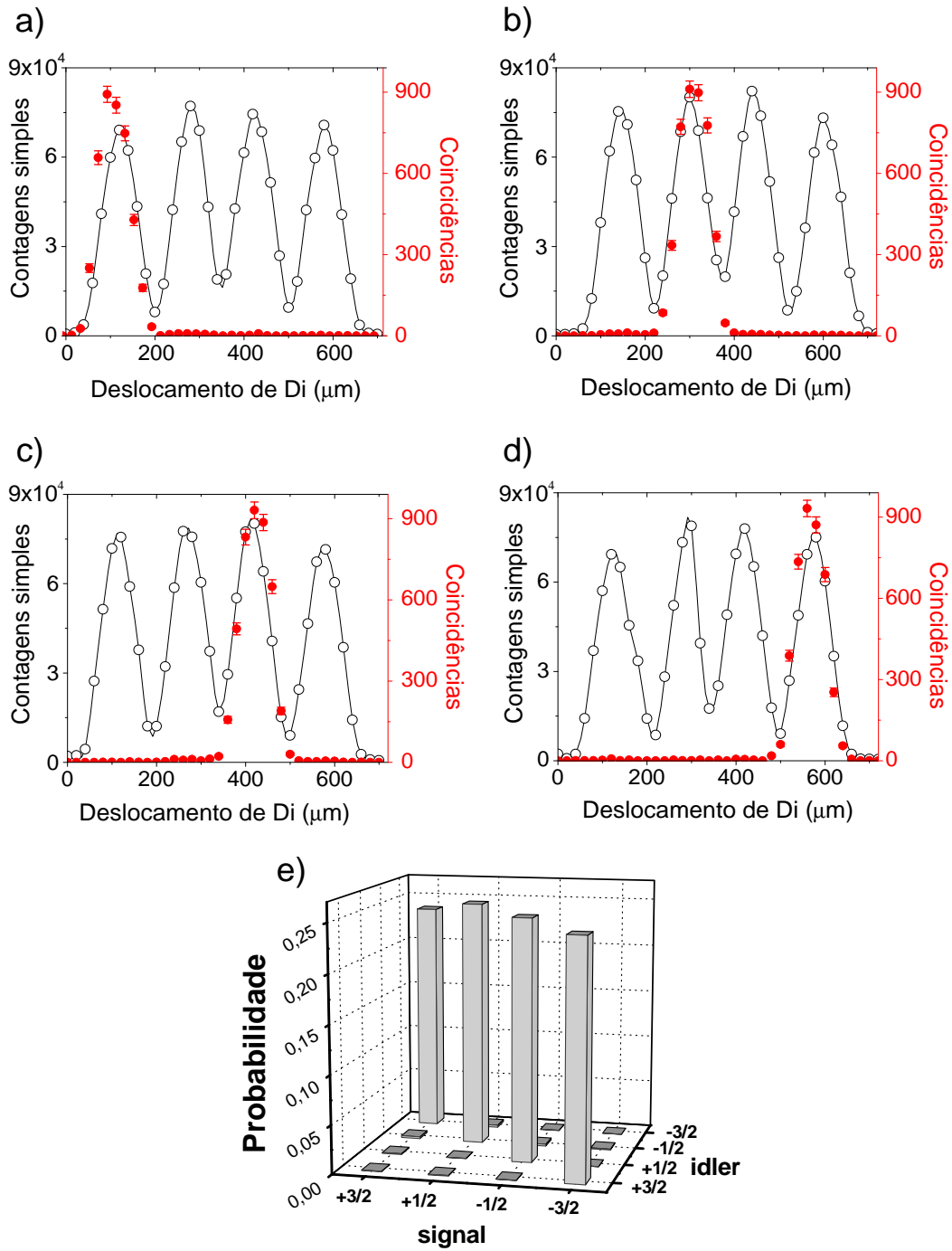
**Figura 4.5:** Diagrama esquemático do procedimento de medida.

acordo com o estado quântico que afirmamos que estamos gerando aqui [veja a Eq. (3.25)], em cada etapa deste procedimento deverá ocorrer “cliques” simultâneos nos detectores (coincidências) somente quando o detector  $D_i$  varrer a fenda  $l' = -l$ . Não há ambiguidade na detecção em coincidência, i.e., saberemos exatamente de onde veio o par de fótons, devido às fendas simples na entrada dos detectores serem suficientemente estreitas de modo a não “enxergar” duas fendas da abertura ao mesmo tempo. E também pelo fato de que estes detectores estão muito próximos das fendas e portanto não há difração nem interferência no processo.

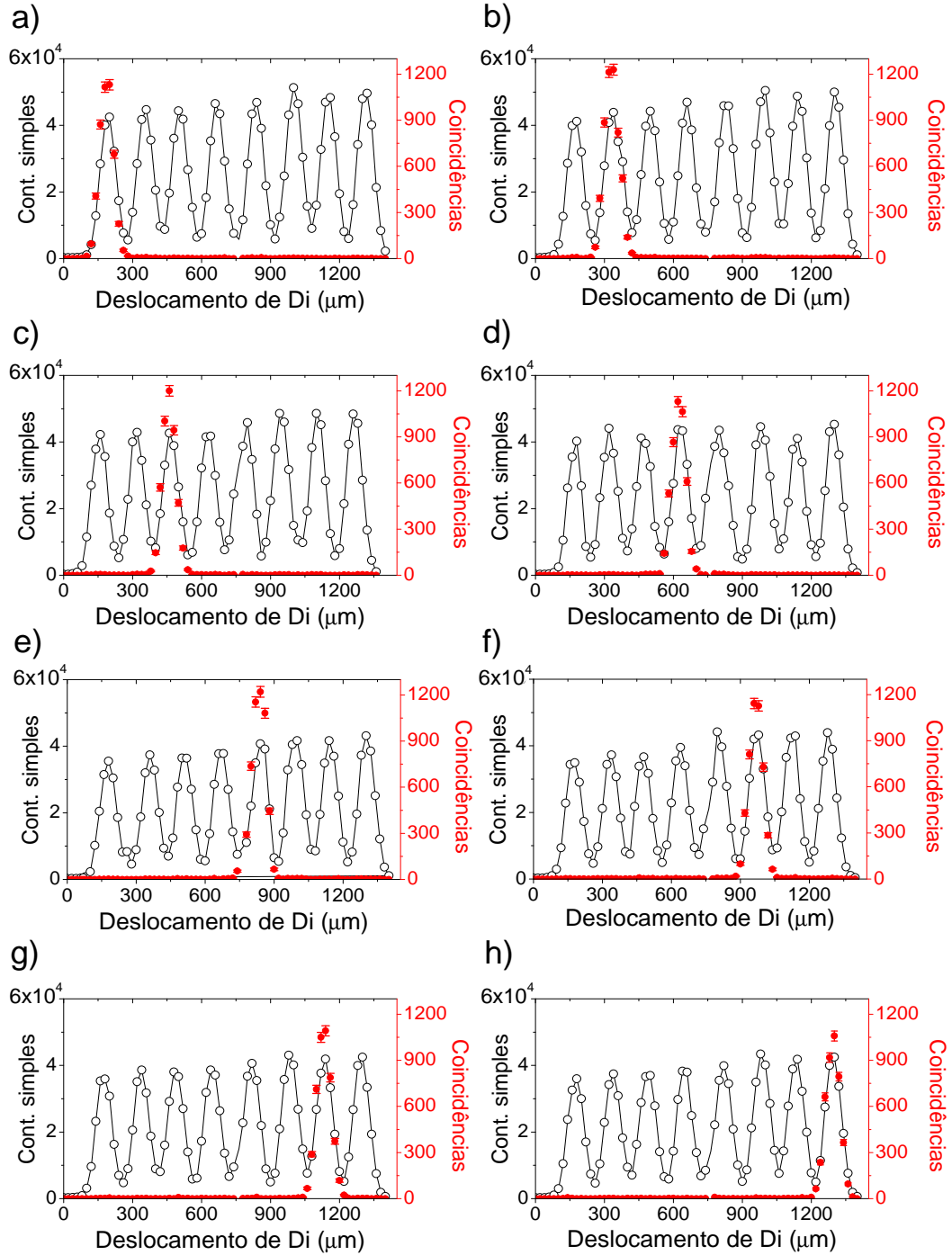
#### 4.1.4 Resultados e discussão

Seguindo os procedimentos descritos acima, nós fizemos medidas para qudits com  $D = 4$  e  $D = 8$ . Os resultados são mostrados nas Figs. 4.6 e 4.7, respectivamente. Para ambos casos pode-se ver que os dados experimentais estão de acordo com as expectativas: existem picos de coincidência somente quando o detector  $D_i$  varre a fenda simetricamente oposta àquela a qual o detector  $D_s$  está fixo. Além disso nota-se que estes picos têm aproximadamente o mesmo número de coincidências dentro das barras de erro. Por estas razões, os estados  $|l\rangle_s | -l\rangle_i$  terão aproximadamente a mesma probabilidade não-nula enquanto as probabilidades para os demais vetores da base serão praticamente zero. Para ver isto, nós calculamos as probabilidades para todos os estados da base. Estas são definidas como

$$P_{l_s l'_i} = \frac{C_{l_s l'_i}}{\sum_{\{l_s, l'_i\}} C_{\{l_s, l'_i\}}}, \quad (4.1)$$



**Figura 4.6:**  $D = 4$  qudits ME. Contagens simples em  $D_i$  ( $-\circ-$ ) e contagens em coincidências em  $D_s-D_i$  ( $\bullet$ ) medidas simultaneamente em 20 s com  $D_s$  fixo atrás da fenda  $l$  e  $D_i$  varrendo na direção  $x$ . Da esquerda para direita os picos de contagens simples são as fendas  $l' = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}$ .  $D_s$  é fixo atrás da fenda  $l$  (a)  $+\frac{3}{2}$ , (b)  $+\frac{1}{2}$ , (c)  $-\frac{1}{2}$  e (d)  $-\frac{3}{2}$ . (e) Histograma de probabilidades para todos os estados da base  $\{|l\rangle_s |l'\rangle_i\}$ .



**Figura 4.7:**  $D = 8$  qudits ME. Contagens simples em  $D_i$  ( $-\circ-$ ) e contagens em coincidências em  $D_s-D_i$  ( $\bullet$ ) medidas simultaneamente em 20 s com  $D_s$  fixo atrás da fenda  $l$  e  $D_i$  varrendo na direção  $x$ . Da esquerda para direita os picos de contagens simples são as fendas  $l' = -\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, \dots, +\frac{7}{2}$ .  $D_s$  é fixo atrás da fenda  $l$  (a)  $+\frac{7}{2}$ , (b)  $+\frac{5}{2}$ , (c)  $+\frac{3}{2}$ , (d)  $+\frac{1}{2}$ , (e)  $-\frac{1}{2}$ , (f)  $-\frac{3}{2}$ , (g)  $-\frac{5}{2}$  e (h)  $-\frac{7}{2}$ .

onde  $C_{l_s l'_i}$  é o número de coincidências<sup>3</sup> entre o detector  $D_s$  na fenda  $l$  e  $D_i$  em  $l'$ . As Figs. 4.6(e) e 4.8 mostram um histograma de probabilidades para todos os estados da base para  $D = 4$  e  $D = 8$ , respectivamente. Observa-se claramente nestas figuras uma estrutura de estados maximamente emaranhados de qudits de dimensão 4 e 8. É claro que uma afirmação como esta é perigosa baseada apenas nestas medidas em coincidência. Estas medidas, que chamamos de seletivas, podem ser vistas como um conjunto completo de projeções ortogonais<sup>4</sup> do tipo  $|l_s, l'_i\rangle\langle l_s, l'_i|$ , embora soe estranho falar em projeção quando o estado final é destruído. Mas olhando por esse lado, é nítido que medidas assim só fornecem as probabilidades para o estado expandido na base produto  $\{|l\rangle_s |l'\rangle_i\}$ . Porém, nós vamos considerar que os estados aqui são puros e emaranhados porque temos uma informação a priori sobre a natureza do estado de dois fótons gerados na CPD. No nosso caso em particular, ele é dado pela Eq. (2.14).

Levando-se em conta então o nosso prévio conhecimento do estado de dois fótons e o fato das fases para o estado maximamente emaranhado só dependerem de parâmetros experimentais fixos, podemos escrever uma forma aproximada<sup>5</sup> para o estado de dois qudits. Para  $D = 4$ , levando-se em conta os erros experimentais<sup>6</sup> em torno de 4%, nós obtemos

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_4 = & 0.50 |-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle + 0.50 |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ & + e^{i\frac{kd^2}{z_A}} (0.49 |-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle + 0.49 |+\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para  $D = 8$ , os erros são em torno de 3%, e nós obtemos

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_8 = & 0.36 |-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle + 0.34 |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ & + e^{i\frac{kd^2}{z_A}} (0.34 |-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle + 0.34 |+\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle) \\ & + e^{i\frac{3kd^2}{z_A}} (0.34 |-\frac{5}{2}, +\frac{5}{2}\rangle + 0.36 |+\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\rangle) \\ & + e^{i\frac{6kd^2}{z_A}} (0.36 |-\frac{7}{2}, +\frac{7}{2}\rangle + 0.35 |+\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\rangle). \end{aligned} \quad (4.3)$$

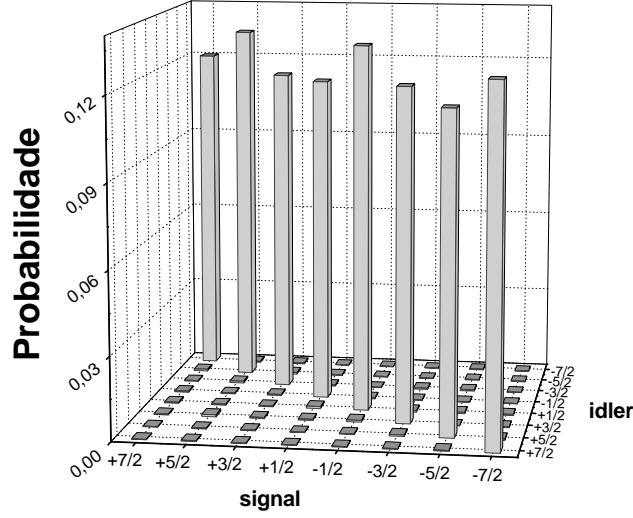
Para termos uma *noção* de quão próximos são estes estados daqueles previstos pela teoria [veja Eq. (3.25)], nós recorremos ao conceito de fidelidade, que foi discutida na

<sup>3</sup>Cada  $C_{l_s l'_i}$  é a soma do número de coincidências em quatro pontos correspondendo aos quatro pontos de máxima contagem simples da fenda varrida  $l'$ .

<sup>4</sup>Completo no sentido  $\sum_{l, l'} |l_s, l'_i\rangle\langle l_s, l'_i| = \mathbb{I}$ . No próximo capítulo vamos tratar desse assunto com mais profundidade.

<sup>5</sup>Observe que da forma como estão escritos, os estados  $|\Psi\rangle_4$  e  $|\Psi\rangle_8$  não são nem mesmo normalizados. Isto porque nós omitimos os outros termos da base  $\{|l\rangle_s |l'\rangle_i\}$  que tem amplitudes desprezíveis.

<sup>6</sup>O módulo da amplitude é dado por  $\sqrt{P_{l_s l'_i}}$  onde  $P_{l_s l'_i}$  é dado pela Eq. (4.1). O erro desse valor é calculado a partir da propagação de erros em  $\sqrt{P_{l_s l'_i}}$ , com o erro de  $C_{l_s l'_i}$  devido à estatística Poissoniana de contagem de fótons.



**Figura 4.8:** Histograma de probabilidades para todos os estados da base  $\{|l\rangle_s |l'\rangle_i\}$  para qudits ME com  $D = 8$ .

subseção 1.3.2, cuja expressão é dada pela Eq. (1.18). Claro que calcular a fidelidade nos baseando apenas em medidas de probabilidade não é correto. Fazemos isso aqui a partir do conhecimento prévio da natureza do estado gerado na CPD. Nossa intenção em calcular a fidelidade, não é afirmar que o estado gerado é puro e maximamente emaranhado. Queremos dar uma idéia de que se este for o caso, quão próximo o estado gerado deve ser do estado previsto teoricamente. Temos então

$$\begin{aligned}
 F_4 &= 0.98 \pm 0.08, \\
 F_8 &= 0.96 \pm 0.05.
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Portanto, feitas as considerações acima, ambos estados observados no experimento são muito próximos do estado ME de qudits. Além disso, estes resultados mostram também que o perfil focalizado que utilizamos é bastante apropriado para nossas propostas. As fases nas Eqs. (4.2) and (4.3) não foram medidas. Elas dependem de parâmetros experimentais fixos e podem em princípio ser canceladas escolhendo-se valores apropriados para  $d$  e  $z_A$  ou adicionando-se fases externas em determinadas fendas.

## 4.2 Demonstração qualitativa de emaranhamento

Quando geramos estados emaranhados, é necessário de alguma maneira demonstrar o caráter quântico das correlações, ou seja, caracterizar este emaranhamento. Para isto vários métodos podem ser aplicados como tomografia quântica, violação de uma desigual-

dade de Bell, medida de grau de emaranhamento entre outros. Esses tipos de caracterização são mais quantitativos. Na seção anterior, iniciamos a discussão se os estados que geramos são ou não emaranhados. Nesta seção, vamos dar continuidade a esta discussão, mas vamos agora nos basear numa medida concreta que vai nos dizer apenas “sim” ou “não” em relação ao caráter das correlações ser quântico ou clássico. Neste sentido, será uma demonstração qualitativa.

### 4.2.1 Estados classicamente correlacionados

Vamos supor que não temos nenhuma informação a priori sobre o estado que geramos. Fizemos as medidas e obtivemos os resultados mostrados na seção anterior. Com o procedimento de medida que nós adotamos lá, demonstrou-se que as correlações entre os fótons gêmeos estão de acordo com as de um estado maximamente emaranhado. Mas nós podemos assegurar que estas correlações são de caráter quântico? Baseados somente em tais medidas a resposta é *não*. Para mostrar isto, vamos considerar uma fonte que emite pares de fótons independentes mas com direções correlacionadas<sup>7</sup> tal que, se  $D$ -fendas são colocadas no caminho dos fótons o estado de cada par será descrito por  $|l\rangle_s|-l\rangle_i$ , ou seja os momentos dos fótons são iguais e opostos. Além disso, cada par de fótons numa dada direção tem igual probabilidade de ser emitido por esta fonte. Neste caso, o estado de dois fótons após as  $D$ -fendas será dado por uma mistura de estados todos com a mesma probabilidade, descrito pela seguinte matriz densidade:

$$\hat{\rho}_{cc} = \frac{1}{D} \sum_{l=-l_D}^{l_D} |l\rangle_s \langle l| \otimes |-l\rangle_i \langle -l|. \quad (4.5)$$

Reconhecemos imediatamente este estado como um estado classicamente correlacionado [veja Eq. (1.9)]. Como foi discutido na subseção 1.2.3, podemos criá-lo via operações locais e comunicação clássica e embora ele tenha as mesmas correlações (para medidas na base  $\{|l\rangle_s|l'\rangle_i\}$ ) de um estado puro e maximamente emaranhado, a natureza das correlações é puramente clássica. É o caso aqui. Observa-se que os fótons nesta fonte têm as mesmas correlações mostradas no estado da Eq. (3.25), mas ao invés de ser uma superposição coerente de  $|l\rangle_s|-l\rangle_i$ , aqui temos uma mistura incoerente de tais estados e portanto, estas correlações são de natureza clássica.

Se fizermos medidas sobre  $\hat{\rho}_{cc}$  da mesma forma descrita na subseção 4.1.3, exatamente os mesmos resultados mostrados nas Figs. 4.6 e 4.7 deveriam ser obtidos. Assim, baseados somente nestas medidas, nós não podemos distinguir entre os qudits ME da Eq. (3.25) e o estado classicamente correlacionado da Eq. (4.5) ou em outras palavras, não podemos afirmar se as correlações são de natureza clássica ou quântica. Porém, as diferenças

<sup>7</sup>Uma fonte composta de dois feixes com direções classicamente correlacionadas foi usada para se estudar formação de imagens com detecção em coincidência [121].



entre estes estados são muito maiores que suas semelhanças e existem vários meios de se distinguir entre emaranhamento e correlações clássicas neste sistema de dois fótons. A seguir discutiremos e mostraremos experimentalmente uma maneira direta de se fazer tal distinção.

## 4.2.2 Interferência de dois fótons e emaranhamento

Vamos fazer medidas em coincidência que ao contrário das anteriores não sejam ambíguas em distinguir o estado maximamente emaranhado do estado classicamente correlacionado. Para isso devemos calcular a probabilidade de detecção em coincidência, numa outra configuração experimental para os detectores<sup>8</sup>. Primeiro vamos definir o que é essa probabilidade. Para um sistema de dois fótons (signal e idler) num estado quântico arbitrário  $\hat{\rho}$  a probabilidade de detectá-los em coincidência por um detector pontual nas posições<sup>9</sup>  $x_s$  e  $x_i$  em dados planos  $z_s$  e  $z_i$ , respectivamente é [46]

$$P(x_s, x_i) = \text{Tr}(\hat{\rho}\mathbb{E}_s^{(-)}\mathbb{E}_i^{(-)}\mathbb{E}_i^{(+)}\mathbb{E}_s^{(+)}), \quad (4.6)$$

onde  $\mathbb{E}_j^{(+)} \equiv \mathbb{E}^{(+)}(x_j, z_j)$  é a parte positiva do operador campo elétrico para o modo  $j$  e  $x$  é a posição de detecção no plano  $z$ . No nosso caso, esses operadores são calculados com base no modelo clássico de propagação do espectro angular que discutimos no capítulo 2. Calculamos o campo clássico e em seguida o quantizamos, trocando o espectro angular pelo operador destruição [46].

Para obter o operador para os nossos propósitos, vamos considerar a seguinte configuração experimental: após a transmissão através das  $D$ -fendas os pares de fótons gêmeos (no estado  $|\Psi\rangle$  ou  $\hat{\rho}_{cc}$ ) são coletados por lentes convergentes no plano  $z_L$  e propagam-se livremente até serem detectados no plano  $z$  como mostra a Fig 4.9. Como o estado dos fótons gêmeos é dado após as aberturas, os campos associados às suas detecções devem se propagar desse ponto. Então, usando o método descrito na subseção 2.5.1, determinamos o operador campo quantizando o campo elétrico que se propaga a partir destas aberturas em  $z_A$ , é transmitido através de uma lente convergente em  $z_L$  e chega ao detector no plano  $z$ . Estes cálculos são mostrados no apêndice A, e o operador obtido é dado por

$$\mathbb{E}_j^{(+)} \propto \int dq \int dq' \hat{a}_j(q') \exp \left[ i \left( qx - \frac{q^2}{2k_j}(z - z_L) - \frac{q'^2}{2k_j}(z_L - z_A) + \frac{(q - q')^2}{2k_j}f \right) \right], \quad (4.7)$$

onde  $\hat{a}_j(q')$  é o operador destruição para um fóton no modo  $j$  com magnitude do vetor de onda transversal  $q'$ ,  $x$  é a posição de detecção no plano  $z$  e  $k_j$  é o número de onda do fóton convertido (com  $k_s = k_i = k/2$ ). Esta expressão é válida para os operadores de

<sup>8</sup>Como mostraremos no capítulo 5, esta nova configuração dos detectores corresponde a se fazer medidas em outra base diferente da base  $\{|l\rangle_s |l'\rangle_i\}$ .

<sup>9</sup>As dimensões de interesse para nós são a distância longitudinal  $z$  e a posição transversal  $x$ .

campo do signal e do idler.

A nossa intenção é medir no regime de Fraunhofer (ou regime de campo distante) e isto pode ser feito utilizando-se essas lentes, que também têm a vantagem de aumentar o sinal nos detectores. Usando as Eqs. (3.25), (4.6) e (4.7) mostramos no apêndice A que a probabilidade de detecção em coincidência para os qudits maximamente emaranhados será dada por

$$P_{\Psi}(x_s, x_i) \propto \sum_{l=-l_D}^{l_D} V_{ll}(x_s, x_i) + 2 \sum_{l=-l_D}^{l_D-1} \sum_{m=l+1}^{l_D} V_{lm}(x_s, x_i) \times \cos(\beta(l-m)[x_i - x_s + (l+m)\phi]), \quad (4.8)$$

onde os parâmetros  $\beta$  e  $\phi$  são dados por

$$\beta = \frac{kfd}{2[f^2 - (z - z_L - f)(z_L - z_A - f)]}, \quad (4.9)$$

$$\phi = \frac{d[f^2 - (z - z_L - f)(z_L - f)]}{fz_A}, \quad (4.10)$$

e  $V_{lm}(x_s, x_i)$  são os termos de difração de fenda simples

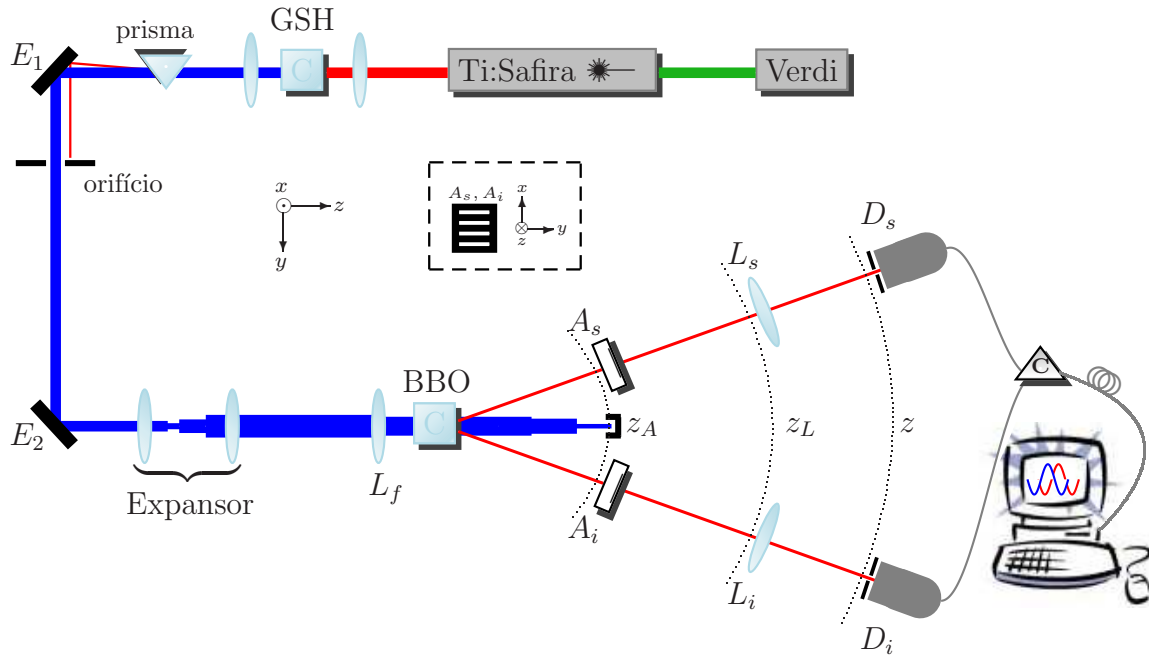
$$V_{lm}(x_s, x_i) \equiv \prod_{j=l,m} \text{sinc}(a\beta[x_s - j\eta d]/d) \text{sinc}(a\beta[x_i + j\eta d]/d),$$

com  $\eta = (z - z_L - f)/f$ . Nós vemos que para os qudits ME, a probabilidade de coincidência possui termos de interferência puro de dois fótons com franjas condicionais [122, 123]. A condicionalidade do padrão significa que a distribuição das franjas de interferência depende da posição de um dado detector. Por exemplo, se  $D_i$  está fixo em  $x_i = 0$  e  $D_s$  faz uma varredura na direção  $x_s$ , observaremos um padrão de interferência medido em coincidência. Mas quando  $D_i$  é fixado no ponto de mínimo deste padrão, as franjas de interferência medidas em coincidência, serão deslocadas da mesma quantidade e neste caso, observaremos um padrão de interferência de dois fótons composto por anti-franjas. Para estados puros, interferência condicional é um comportamento típico de duas partículas emaranhadas [122, 123] e já foi demonstrada para fótons gêmeos [72].

Para o estado classicamente correlacionado na Eq. (4.5) a probabilidade de coincidências será dada por

$$P_{\rho}(x_s, x_i) \propto \sum_{l=-l_D}^{l_D} V_{ll}(x_s, x_i). \quad (4.11)$$

Esta expressão possui somente termos de difração de fenda simples e assim para este estado não há interferência. Portanto, para o nosso sistema de qudits espacialmente emaranhados, a observação de um padrão de interferência de dois fótons com franjas



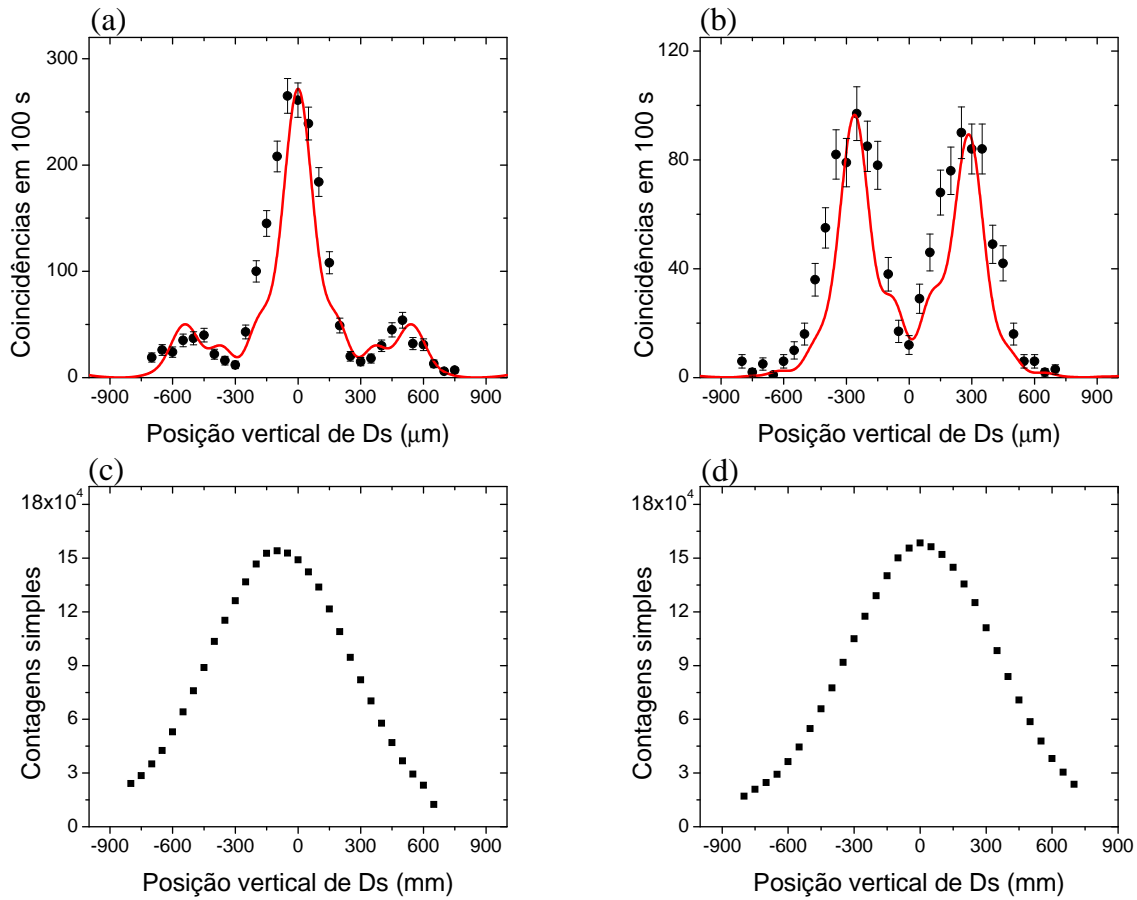
**Figura 4.9:** Esquema da montagem experimental usada para demonstrar o emaranhamento dos estados de qudits. GSH denota a geração de segundo harmônico,  $E_1$  e  $E_2$  são espelhos,  $L_f$  é a lente para focalizar o feixe,  $A_s$  e  $A_i$  são as  $D$ -fendas,  $L_s$  e  $L_i$  são lentes convergentes,  $D_s$  e  $D_i$  são os detectores e  $C$  é o contador de fótons. Mais detalhes na seção 4.1 e no texto.

condicionais é uma maneira suficiente de se garantir que as correlações são de natureza quântica (emaranhamento) e não clássica.

### 4.2.3 Medidas, resultados e discussão

Vamos usar o que foi discutido acima para mostrar que nossa fonte gera, de fato, qudits emaranhados. Para isto, fizemos medidas em coincidência no regime de campo distante apenas para o caso de fenda quádrupla, o que consideramos suficiente. A montagem experimental usada é aquela ilustrada na Fig. 4.9. Os detalhes mais técnicos do experimento e a parte de geração dos estados já foram descritos na seção 4.1. A única diferença agora está no caminho dos fótons gêmeos após a transmissão através das  $D$ -fendas (que como antes estão a  $z_A = 20$  cm do cristal). Os pares transmitidos pelas aberturas serão coletados por lentes convergentes com comprimento focal  $f = 150$  mm, fixas a  $z_L = 650$  mm do cristal e então detectados por detectores fixos a  $z = 800$  mm do cristal. Portanto, estamos medindo no plano de transformada de Fourier das  $D$ -fendas [90]. Como ficará claro no próximo capítulo, esta medida equivale a medir em uma outra base diferente da base  $\{|l\rangle_s |l'\rangle_i\}$ .

Medidas em coincidência foram feitas em função da posição  $x_s$  do detector  $D_s$ , enquanto  $D_i$  foi mantido fixo, em duas situações:



**Figura 4.10:** Padrões de interferência de dois fótons para fótons gêmeos transmitidos através de fendas quádruplas em função da posição vertical de  $D_s$ . (a)  $D_i$  está fixo em  $x_i = 0 \mu\text{m}$ . (b)  $D_i$  está fixo em  $x_i = 300 \mu\text{m}$ . A curva sólida foi obtida da Eq. (4.8) com um parâmetro de normalização. (c) e (d) são os gráficos de contagens simples de (a) e (b), respectivamente, que como esperado não exibem interferência.

1.  $D_i$  foi mantido fixo em  $x_i = 0 \mu\text{m}$ . Varrendo  $D_s$  na direção  $x$ , nós observamos um padrão de interferência de dois fótons composto de franjas [Fig. 4.10(a)];
2.  $D_i$  foi mantido fixo no ponto de mínimo do padrão anterior que foi em  $x = 300 \mu\text{m}$ . Varrendo  $D_s$  na direção  $x$ , nós observamos um padrão de interferência de dois fótons composto de anti-franjas [Fig. 4.10(b)].

As curvas sólidas nas Figs. 4.10(a) e (b) são as previsões teóricas e foram obtidas integrando-se a probabilidade de coincidências na Eq. (4.8) sobre a largura das fendas à frente dos detectores ( $100 \mu\text{m}$ ) e usando-se um parâmetro de normalização. Levou-se em conta também nesse fit pequenos erros no posicionamento dos elementos experimentais e os valores não exatos dos parâmetros  $a$  e  $d$  das  $D$ -fendas. Contudo, o principal resultado mostrado na Fig. 4.10 é a clara existência de um padrão de interferência de dois fótons com franjas condicionais. Isto está de acordo com a probabilidade de coincidências para os qudits ME na Eq. (4.8) e como dissemos, é suficiente para garantir emaranhamento, basea-

dos na hipótese de os estados preparados serem puros. Na verdade, a simples observação de um padrão de interferência de dois fótons aqui já seria suficiente. Basta comparar as Eqs. (4.8) e (4.11). Portanto, o fato deste padrão ser condicional é um ingrediente a mais para indicar que o estado não é classicamente correlacionado. Com os dados que temos para  $D = 4$ , podemos afirmar que o estado de dois fótons preparado e medido em nosso experimento são ququarts aproximadamente maximamente emaranhados. Apesar de não termos feito este tipo de medida para qudits com  $D = 8$ , acreditamos que os resultados seriam semelhantes.

Para concluir esta seção e já abordar um tema que vai ser discutido no próximo capítulo, nós mostramos também os gráficos de contagens simples do detector signal, obtidos nas medidas dos padrões de interferência de dois fótons [Figs. 4.10(c) e (d)]. Como se vê, não há nenhuma interferência de segunda ordem (interferência de um fóton). Isto acontece porque a área iluminada do cristal (a fonte) é grande o que torna o comprimento de coerência transversal do feixe signal menor que a separação entre as fendas, como foi mostrado em [65]. Poderia se pensar que isso ocorre porque os subsistemas do estado total são misturas estatísticas. De fato, são, mas não é este efeito que estamos vendo aqui. O estado que geramos é pós-selecionado, i.e., só é medido em coincidência. Para saber o comportamento de um dos subsistemas, o signal por exemplo, deveríamos medir apenas aqueles fótons que temos certeza que fazem parte do par. No próximo capítulo vamos discutir isso melhor.

### 4.3 Propagação de qudits no espaço livre

Na primeira parte do trabalho, mostramos que os estados de dois qudits gerados satisfaziam as correlações de um estado maximamente emaranhado, detectando os fótons logo após as  $D$ -fendas. Na segunda parte, deixamos os fótons propagarem-se após as fendas e observamos interferência. Agora, vamos supor que quiséssemos compartilhar o estado emaranhado entre duas partes distantes,  $A$  e  $B$ , para que de alguma forma, cada parte pudesse manipular seu estado para realizar algum protocolo quântico. Isto quer dizer que devemos entregar a estas partes o mesmo estado que foi gerado após as  $D$ -fendas. Neste trabalho, vamos focar esta questão. Através de uma prova de princípio, mostraremos como o estado gerado após as fendas pode ser distribuído para observadores distantes e separados. Há duas abordagens do problema que podem ser seguidas: a propagação em fibras ópticas [85] e a propagação no espaço livre, que é a que estudamos [86].

O estudo de como o estado se propaga e como suas correlações são preservadas, é o primeiro passo para uma aplicação concreta destes qudits emaranhados. Na maioria dos protocolos de informação quântica, é necessário transmitir partículas emaranhadas de forma eficiente para as partes que se comunicam. A palavra eficiente aqui quer dizer que a decoerência ou o ruído induzido pelo ambiente não pode ser capaz de deteriorar

o emaranhamento a ponto de inviabilizar a utilização do mesmo como um recurso fundamental nestes protocolos. Trabalhos nesse sentido têm sido realizados principalmente com qubits emaranhados, como por exemplo: (i) A propagação de qubits emaranhados em time-bin por fibras ópticas por mais de 10 km foi mostrada na Ref. [124]. (ii) Para qubits emaranhados em polarização, a propagação no espaço livre de foi demonstrada para uma distância de 600 m em [125] e para uma distância de 13 km em [126]. Em todos estes trabalhos, a violação de uma desigualdade de Bell mostrou que o emaranhamento pode ser mantido a longas distâncias. A propagação no espaço livre tem particular interesse pois já se considera a realização de protocolos de informação quântica utilizando-se satélites [127]. Aqui, mostraremos uma prova de princípio da propagação de qudits (com  $D = 4$ ) maximamente emaranhados.

### 4.3.1 Montagem experimental

A montagem experimental para demonstrar a propagação é idêntica à montagem usada para medir os padrões de interferência de dois fótons [veja Fig. 4.9], mudando apenas o plano  $z_L$  das lentes do signal e idler. As distâncias de interesse em relação ao cristal em  $z = 0$  são: aberturas a  $z_A = 20$  cm; lentes a  $z_L = 50$  cm e detectores a  $z = 80$  cm. As lentes do signal e do idler têm  $f = 15$  cm. A relação de formação de imagem para lente fina será então

$$\frac{1}{z_L - z_A} + \frac{1}{z - z_L} = \frac{1}{f}, \quad (4.12)$$

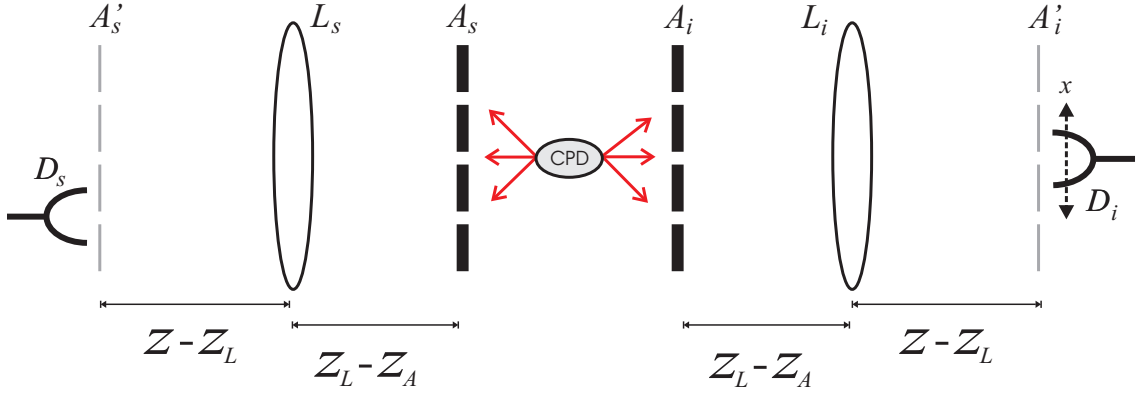
e prevê a formação da imagem da fenda quádrupla no plano dos detectores com um fator de aumento  $[(z - z_L)/(z_L - z_A)]$  igual a um. Não é necessário que o comprimento focal das lentes e que as distâncias longitudinais envolvidas sejam iguais para os fótons signal e idler, mas por simplicidade, nós usamos os mesmos valores para todos.

### 4.3.2 Resultados

O procedimento de medida adotado para identificar o estado propagado  $|\Psi\rangle_P$  é exatamente o mesmo que descrevemos na subseção 4.1.3, só que agora os detectores fazem as contagens no plano de formação de imagem das aberturas, como mostra o diagrama da Fig. 4.11.

Os resultados obtido são mostrados na Fig. 4.12. O histograma de probabilidades de todos os estados da base  $\{|l\rangle_s |l'\rangle_i\}$  na Fig. 4.12(e) mostra claramente a estrutura de um estado maximamente emaranhado. O estado propagado obtido das medidas é dado por

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_P = & 0.49 |-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle + 0.50 |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ & + e^{i\frac{kd^2}{z_A}} (0.47 |-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle + 0.49 |+\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle), \end{aligned} \quad (4.13)$$



**Figura 4.11:** Diagrama esquemático do procedimento de medida. Temos aqui  $z_L - z_A = 2f$  e  $z - z_L = 2f$ .

onde novamente, a fase não foi medida. A fidelidade<sup>10</sup> desse estado em relação àquele previsto pela teoria [Eq. (3.25)] é

$$F_P = 0.98 \pm 0.06, \quad (4.14)$$

o que mostra que embora a distância de propagação tenha sido pequena, as correlações<sup>11</sup> são preservadas.

## 4.4 Conclusão

Mostramos experimentalmente a geração de estados maximamente emaranhados de qudits com  $D = 4$  e  $D = 8$ , codificados no momento transversal dos fótons gêmeos da CPD. Através de medidas de interferência de dois fótons, demonstramos o caráter quântico das correlações e excluímos a possibilidade de o estado gerado ser classicamente correlacionado. Visando futuras aplicações, demonstramos também uma propagação no espaço livre, de qudits maximamente emaranhados com  $D = 4$ . Vários outros graus de liberdade dos fótons gêmeos como polarização, momento angular orbital, time-bin, já haviam sido explorados para a geração de qudits, mas o momento transversal foi utilizado pela primeira vez por nós. Como propusemos [84], as fendas múltiplas utilizadas para selecionar os modos espaciais adequados e assim formar os qudits, poderiam ser substituídas por fibras ópticas o que já foi demonstrado por O’Sullivan-Hale *et al.* na Ref. [85].

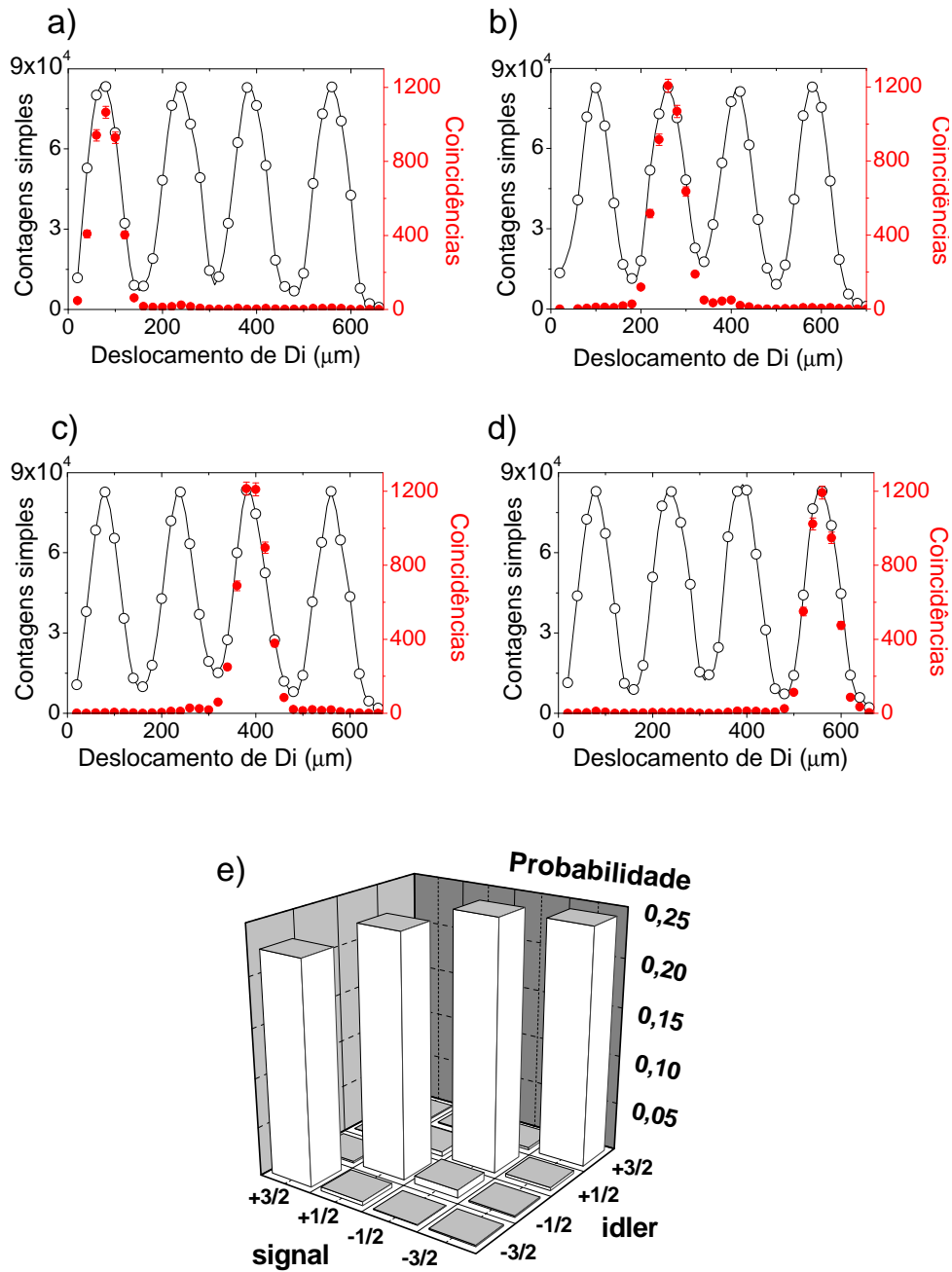
Esperamos que os resultados apresentados aqui tenham aplicações em protocolos de informação quântica, como criptografia quântica por exemplo onde a utilização de qu-

<sup>10</sup>A mesma discussão feita no fim da subseção 4.1.4 sobre a estimativa da fidelidade nesse tipo de medida, vale para esse caso.

<sup>11</sup>A demonstração do emaranhamento via medidas de interferência de dois fótons será tratada na tese de doutorado de G. Lima [119], do Grupo de Óptica Quântica da UFMG.

bits torna o protocolo mais seguro. Nossa intenção inicial é uma completa caracterização de emaranhamento nestes estados, i.e., uma caracterização quantitativa. Por isso discutiremos no próximo capítulo a quantificação de emaranhamento, porém para qubits. A realização do processo de tomografia em estados mistos e de testes de Bell também para qubits emaranhados especialmente são tópicos a serem “dissecados” na tese de doutorado de G. Lima [119], do Grupo de Óptica Quântica da UFMG.





**Figura 4.12:**  $D = 4$  qudits ME. Contagens simples em  $D_i$  ( $-\circ-$ ) e contagens em coincidências em  $D_s-D_i$  ( $\bullet$ ) medidas simultaneamente em 20 s com  $D_s$  fixo no ponto de formação de imagem da fenda  $l$  e  $D_i$  varrendo na direção  $x$  na região de formação de imagem da fenda quádrupla. Da esquerda para direita os picos de contagens simples são as fendas  $l' = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}$ .  $D_s$  é fixo na imagem da fenda  $l$  (a)  $+\frac{3}{2}$ , (b)  $+\frac{1}{2}$ , (c)  $-\frac{1}{2}$  e (d)  $-\frac{3}{2}$ . (e) Histograma de probabilidades para todos os estados da base  $\{|l\rangle_s |l'\rangle_i\}$ .

## Parte III

# Caracterização de Emaranhamento

# Quantificação de Emaranhamento em Estados Puros de Dois Qubits

No trabalho de geração de qubits, usamos a interferência de dois fótons como uma maneira de atestar o caráter quântico das correlações entre os fótons. Neste capítulo, mostraremos que é também possível utilizar estes padrões de interferência para se quantificar o emaranhamento. Por simplicidade, faremos isto somente para estados de dois qubits, mas como veremos, a extensão dos resultados para qubits é direta. O importante aqui é estabelecer um procedimento para quantificação de emaranhamento nesse tipo de estado que estamos produzindo aqui.

## 5.1 Introdução

A utilização e a importância do emaranhamento como recurso para computação e processamento de informação já está bem estabelecida [13], principalmente na teoria que está muito a frente em relação aos avanços experimentais. As aplicações tecnológicas deste recurso exigem intensa pesquisa de tópicos periféricos, mas não menos importantes e sem os quais não se poderia nem pensar em aplicações. Um desses tópicos parte de duas questões óbvias quando se pensa em emaranhamento como recurso utilizável:

1. *Dado um estado quântico, ele é emaranhado ou não?*
2. *Dado um estado emaranhado, qual a quantidade de emaranhamento presente?*

Para respondê-las, temos que caracterizar e/ou quantificar o emaranhamento. E há diversas maneiras de se fazer isso. Em sistemas bipartidos, a violação de uma desigualdade de Bell é uma forma de caracterizar emaranhamento para todos estados puros [18] e também quantificá-lo para estados puros de qubits [128]. Porém, como vimos no capítulo 1, existem estados mistos emaranhados que não violam estas desigualdades [21], mas mesmo para eles o emaranhamento se manifesta de outras formas [22]. Assim, a realização de protocolos de informação quântica como teletransporte [16], codificação superdensa [15] entre outros, é também uma maneira de caracterizar o emaranhamento, já que a realização de tais protocolos com estados classicamente correlacionados, fornece resultados diferentes. Para uma caracterização de forma mais concreta que as apresentadas acima, se usam os chamados critérios de separabilidade, que são critérios que respondem à primeira pergunta. Um desses por exemplo, é o critério de Peres [129], que diz que um estado  $\hat{\rho}$  é emaranhado se a transposta parcial dele não for positiva. Em [130] os autores mostram

que esse critério é suficiente para sistemas de dois qubits ( $2 \times 2$ ) e de um qubit e um qutrit ( $2 \times 3$ ).

Para se aplicar algum critério de separabilidade em um estado temos que conhecer este estado e isto é feito experimentalmente através da tomografia quântica [131, 132]. Neste processo, todos os elementos da matriz densidade são medidos e portanto temos o completo conhecimento do estado, o que nos permite computar *qualquer* propriedade do mesmo. Mas imagine que queiramos apenas responder à segunda questão. Obviamente a tomografia ainda pode ser usada para fazer o trabalho, já que “qualquer propriedade” inclui também o grau de emaranhamento do estado. No entanto, este procedimento requer a medida de  $D^2$  parâmetros para sistemas  $D$ -dimensionais [133] e isto tem duas desvantagens: (i) é difícil de implementar experimentalmente para sistemas grandes e (ii) com todas essas medidas nós sempre obteremos informação irrelevante se a única informação que queremos é a quantidade de emaranhamento presente no estado. Isto faz com que o problema de medir o emaranhamento diretamente, sem a reconstrução completa do estado, seja muito atrativo. Para estados *puros* de dois qubits, este problema foi abordado em dois trabalhos recentes que de certa forma são complementares:

- Na Ref. [134] foi mostrado que não existe nenhum observável do sistema composto cuja medida permita a quantificação de seu emaranhamento. Restringindo-se a estratégias de medidas locais, mostrou-se que o procedimento mínimo e ótimo<sup>1</sup> para fazer isto é a reconstrução da matriz densidade reduzida (de qualquer subsistema), o que requer a medida de três observáveis, ao contrário dos dezesseis que seriam necessários para a tomografia do estado total.
- Uma abordagem mais geral foi adotada na Ref. [135]. Usando o fato especial que estados puros de dois qubits têm somente um parâmetro que caracteriza simultaneamente o seu grau de emaranhamento e o grau de mistura da matriz densidade reduzida (de qualquer subsistema), foi mostrado que medidas locais, locais com comunicação clássica e globais, desse parâmetro, são equivalentes e ótimas para se quantificar o emaranhamento.

Em ambos trabalhos, não se considera a utilização de sistemas auxiliares para medir emaranhamento e os resultados ótimos ocorrem para medidas em várias cópias do estado inicial. A detecção direta de emaranhamento em estados puros de dois qubits criados com fótons da CPD emaranhados em polarização, foi demonstrada experimentalmente por Walborn *et al.* [57], com somente duas cópias do estado, porém usando o momento dos fótons como um grau de liberdade auxiliar.

Neste capítulo, nós apresentaremos métodos experimentais para se quantificar emaranhamento em estados puros de dois qubits criados com momento transversal de fótons

---

<sup>1</sup>Mínimo porque requer o menor número de observáveis e ótimo porque apresenta menos incerteza nos resultados em comparação com outros procedimentos mínimos.

Antes ( $l, m = \pm\frac{1}{2}$ )	Agora ( $n = 0, \pm$ )
$ \pm\frac{1}{2}\rangle$	$ \pm\rangle$
$W_{lm}e^{i\frac{kd^2}{8z_A}(m-l)^2}$	$W_n$

Tabela 5.1: Mudança de notação.

gêmeos da CPD. A geração destes estados foi discutida teoricamente no capítulo 3 e demonstrada experimentalmente no capítulo 4 onde nos restringimos a qudits maximamente emaranhados. Aqui, vamos preparar estados puros de dois qubits com diferentes graus de emaranhamento, manipulando o perfil do laser. Como principal resultado, mostraremos que as medidas de padrões de interferência de dois fótons com franjas condicionais, além de distinguir entre emaranhamento e correlação clássica, podem ser usadas para a quantificação de emaranhamento nesse sistema.

Na seção 5.2, faremos um breve resumo dos resultados obtidos anteriormente, considerando agora um estado de dois qubits e também apresentaremos as ferramentas que utilizaremos para medir o grau de emaranhamento deles. Na seção 5.3, apresentamos o experimento e a preparação dos estados. As seções 5.4, 5.5 e 5.6, tratam de diferentes tipos de medidas sobre os estados preparados, com o objetivo de se quantificar o emaranhamento dos mesmos. O capítulo termina com a seção 5.7 onde discutimos os resultados, as perspectivas de utilização deles e conclusão das idéias apresentadas.

## 5.2 Teoria

### 5.2.1 Geração de qubits emaranhados

No capítulo 3, calculamos o estado dos fótons gêmeos gerados no processo de CPD nas aproximações monocromática, paraxial e de cristal fino, quando estes fótons são transmitidos através de um arranjo de multifendas (um anteparo opaco com  $D$  fendas transparentes de largura  $2a$  e período  $d$ ). O resultado, dado pela Eq. (3.17), é um estado emaranhado de dois qudits o qual foi medido num caso particular no capítulo 4 para  $D = 4$  e  $D = 8$ . Vamos tratar agora o problema mais simples de dois qubits ( $D = 2$ ), porém de uma maneira mais geral. O estado dos fótons gêmeos após as fendas duplas é dado por

$$|\Psi\rangle = W_+|+\rangle_s|+\rangle_i + W_0|+\rangle_s|-\rangle_i + W_0|-\rangle_s|+\rangle_i + W_-|-\rangle_s|-\rangle_i, \quad (5.1)$$

onde  $s$  e  $i$  denotam os fótons signal e idler, respectivamente. Note que fizemos pequenas mudanças de notação aqui em relação aos capítulos 3 e 4. Estas mudanças são mostradas na Tabela 5.1. O conjunto  $\{|\pm\rangle\}$  forma uma base ortonormal no espaço de Hilbert bidi-

mensional de cada fóton, definindo os qubits lógicos como a fenda por onde o fóton passou. Os coeficientes  $W_n$  (para  $n = 0, \pm$ ) são dados por

$$W_n \equiv \gamma W(nd/2; z_A) e^{i\phi_n}, \quad (5.2)$$

onde  $\gamma$  é uma constante de normalização,  $W(nd/2; z_A)$  é o perfil de amplitude do feixe pump no plano das fendas duplas ( $z_A$ ) tomado na posição das fendas ( $n = \pm$ ) ou entre elas ( $n = 0$ ) e a fase  $\phi_n$  com  $\phi_{\pm} = 0$  e  $\phi_0 = -kd^2/8z_A$ , vem dos fótons passando através de diferentes fendas, onde  $k$  é o número de onda do fóton pump. Portanto, a forma e o grau de emaranhamento do estado de dois qubits é controlado pelo tipo de feixe pump usado e através da manipulação do seu perfil no plano das aberturas. Neste trabalho, a amplitude do campo pump será assumida simétrica em torno do centro das fendas duplas, i.e.,  $|W_+| = |W_-|$ , o que é uma situação experimental usual.

### 5.2.2 Decomposição de Schmidt

O estado de dois fótons na Eq. (5.1) pode também ser escrito em termos da decomposição de Schmidt<sup>2</sup> (DS) como

$$|\Psi\rangle = c_+ |\eta_+\rangle_s |\eta_+\rangle_i + c_- |\eta_-\rangle_s |\eta_-\rangle_i, \quad (5.3)$$

onde os coeficientes de Schmidt são dados por

$$c_{\pm} = \sqrt{1/2 \pm |W_+ W_0^* + W_0 W_-^*|}, \quad (5.4)$$

e os conjuntos  $\{|\eta_{\pm}\rangle_s\}$  e  $\{|\eta_{\pm}\rangle_i\}$  são outras bases ortonormais no espaço de Hilbert dos fótons signal e idler, respectivamente. Eles formam as chamadas *bases de Schmidt* para  $|\Psi\rangle$ . Os vetores  $|\eta_{\pm}\rangle$  serão dados por

$$|\eta_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \pm e^{i\xi} |-\rangle), \quad (5.5)$$

com a fase  $e^{i\xi}$  dependendo do tipo de feixe pump usado,

$$\exp(i\xi) = \frac{|W_+ W_0^* + W_0 W_-^*|}{W_+ W_0^* + W_0 W_-^*}. \quad (5.6)$$

Como discutimos na subseção 1.2.2, o estado reduzido dos subsistemas têm o espectro positivo idêntico. Isto pode ser visto tomando-se o traço parcial de  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$  sobre qualquer

<sup>2</sup>Veja capítulo 1, subseção 1.2.2 ou as Refs. [19, 20].

dos dois subsistemas. A matriz densidade reduzida resultante é:

$$\hat{\rho} = c_+^2 |\eta_+\rangle\langle\eta_+| + c_-^2 |\eta_-\rangle\langle\eta_-|. \quad (5.7)$$

Além de estarem vinculados pela normalização ( $c_+^2 + c_-^2 = 1$ ), observa-se da Eq. (5.4) que os coeficientes de Schmidt ao quadrado no nosso caso estão dentro dos seguintes limites

$$c_+^2 \in [\frac{1}{2}, 1] \quad \text{e} \quad c_-^2 \in [0, \frac{1}{2}]. \quad (5.8)$$

Vamos então escolher  $c_-$  como o único parâmetro que caracteriza o emaranhamento em nosso sistema. Se  $c_- = 0$ , o estado total  $|\Psi\rangle$  na Eq. (5.3) será um estado produto e a matriz densidade reduzida na Eq. (5.7) será pura. Se  $c_- \neq 0$ ,  $|\Psi\rangle$  é emaranhado e  $\hat{\rho}$  é uma mistura estatística (particularmente, para  $c_- = 1/\sqrt{2}$ ,  $|\Psi\rangle$  é um estado maximamente emaranhado e  $\hat{\rho}$  é um estado de máxima mistura).

### 5.2.3 Quantificação de emaranhamento

Na seção 1.4 vimos dois quantificadores de emaranhamento para estados puros de dois qubits, que dependem somente dos coeficientes de Schmidt, ou equivalentemente, dos autovalores positivos dos estados reduzidos. Vamos nos restringir aqui somente à concorrência [32, 33], que é dada por

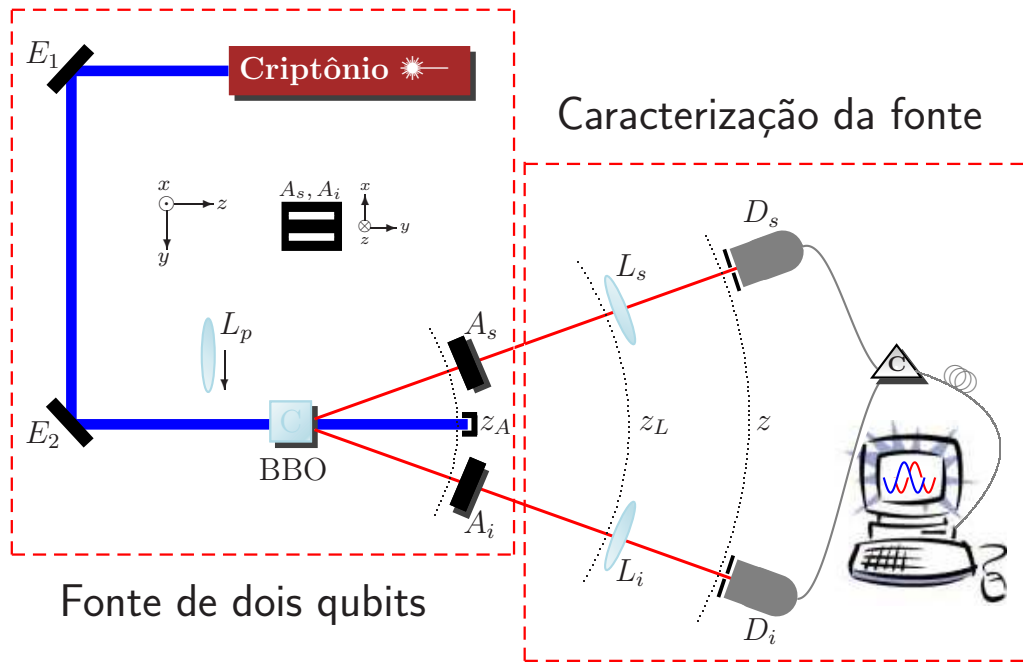
$$\mathcal{C}(\Psi) = 2c_+c_-. \quad (5.9)$$

Os coeficientes de Schmidt contêm toda a informação sobre a quantidade de emaranhamento presente no estado, o que já deixa implícito que isso é um propriedade exclusiva de sistemas bipartidos num estado puro qualquer, que são os únicos que têm uma decomposição de Schmidt. Portanto, se nós formos capazes de determinar estes coeficientes através de ações globais sobre  $|\Psi\rangle$  ou ações locais sobre  $\hat{\rho}$ , nós poderemos quantificar emaranhamento em nosso sistema.

## 5.3 Experimento

### 5.3.1 Montagem experimental

O experimento para medida de grau de emaranhamento de estados de dois qubits é ilustrado na Fig. 5.1. A montagem é semelhante à do capítulo anterior. Vamos simbolicamente dividi-la em duas partes, a fonte de estados emaranhados e a parte que caracterizará esta fonte.



**Figura 5.1:** Esquema da montagem experimental usada para geração e caracterização de emaranhamento em estados de dois qubits.  $E_1$  e  $E_2$  são espelhos,  $L_p$  é a lente para preparar o estado,  $A_s$  e  $A_i$  são as fendas duplas,  $L_s$  e  $L_i$  são lentes convergentes,  $D_s$  e  $D_i$  são os detectores e C é o contador de fótons. Mais detalhes no texto.

### Fonte de dois qubits

A fonte de qubits é mostrada na caixa pontilhada do lado esquerdo da Fig. 5.1. Um laser contínuo de criptônio operando com o comprimento de onda de  $\lambda = 413$  nm (violeta), bombeia, com uma potência de 200 mW, um cristal não linear de BBO ( $\beta$ -borato de bário) de 5 mm de espessura, preparado para CPD com o casamento de fase tipo II. Os fótons convertidos com o comprimento de onda degenerado de 826 nm são produzidos em um ângulo de  $2.5^\circ$  em relação à direção do pump e eles são enviados para fendas duplas colocadas à mesma distância de  $z_A = 200$  mm do cristal. A largura das fendas é  $2a = 0.09$  mm e a separação entre elas é  $d = 0.21$  mm. Após as fendas temos um estado de dois qubits. Uma lente,  $L_p$ , pode ou não ser inserida no feixe pump antes do cristal, para definir o perfil transversal do laser no plano das fendas duplas ( $z_A$ ) e assim, preparar o estado.

### Caracterização da fonte

Após a preparação, os pares de fótons são “enviados” para um sistema de caracterização do seu estado. Um esquema geral deste sistema é mostrada na caixa pontilhada do lado direito da Fig. 5.1. Os fótons gêmeos transmitidos pelas fendas duplas são coletados por



lentes convergentes  $L_s$  e  $L_i$ , ambas com o mesmo comprimento focal  $f = 150$  mm e fixas a uma distância  $z_L$  do cristal. Após a transmissão, eles se propagam livremente na direção dos detectores  $D_s$  e  $D_i$ , os quais são mantidos fixos a uma distância  $z = 800$  mm do cristal. Estes detectores são fotodiodos de avalanche compostos por um filtro de interferência de 8 nm de largura de banda centrado em 826 nm e uma lente objetiva de microscópio focalizando na área ativa deles. Os pulsos de saída são enviados aos contadores, C, que medem contagens simples e contagens em coincidência com uma resolução temporal de 5 ns, e os dados são enviados a um computador. À frente de cada detector pode haver ainda uma fenda simples de 0.1 mm orientada paralelamente às fendas da fenda dupla, usadas para se obter resolução espacial nas medidas.

### 5.3.2 Preparação dos estados

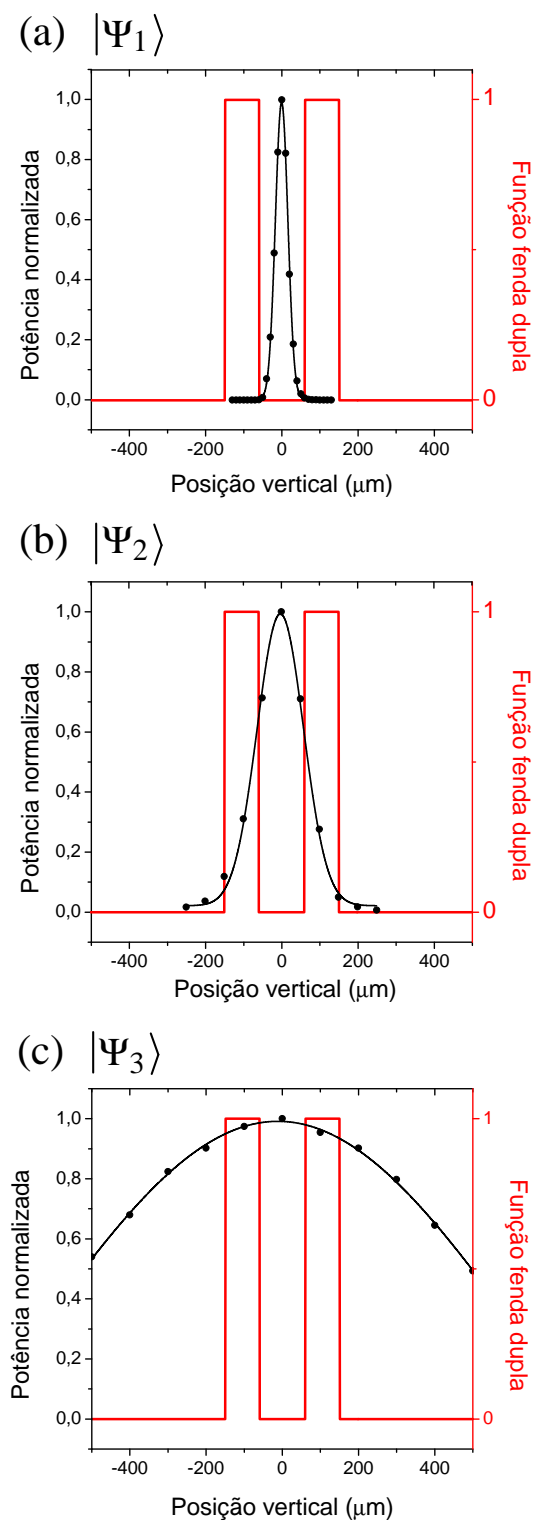
Neste trabalho, nós utilizamos somente feixes Gaussianos. Com isto, temos que além da condição de simetria da distribuição da amplitude, as fases também serão simétricas em relação ao centro das fendas duplas. Portanto teremos  $W_+ = W_-$  para os coeficientes do estado na Eq. (5.1) e  $e^{i\xi} = 1$  na Eq. (5.6). Nestas condições, preparamos três estados de dois qubits diferentes, denotados por  $|\Psi_1\rangle$ ,  $|\Psi_2\rangle$  e  $|\Psi_3\rangle$ , modificando a distribuição do perfil Gaussiano no plano das fendas duplas da seguinte maneira:

1. Para preparar  $|\Psi_1\rangle$ , uma lente  $L_P$  de comprimento focal  $f = 250$  mm é inserida no feixe pump a 50 mm antes do cristal da CPD (Fig. 5.1) de tal forma que o pump é focalizado no plano das fendas duplas. A intensidade normalizada neste caso é mostrada na Fig. 5.2(a) e comparada com uma simulação da fenda dupla usada no experimento.
2. Para  $|\Psi_2\rangle$ , uma lente  $L_P$  com  $f = 300$  mm a 50 mm antes do cristal focaliza o feixe pump após o plano das fendas duplas, de forma que eles será mais largo em  $z_A$  em relação ao focalizado. A Fig. 5.2(b) mostra o perfil obtido em  $z_A$ .
3. Para  $|\Psi_3\rangle$  não há nenhuma lente no feixe pump de forma que o perfil do laser em  $z_A$  terá a própria largura do feixe. O perfil medido em  $z_A$  é mostrado na Fig. 5.2(c), onde se nota que ele é praticamente constante sobre o comprimento da fenda dupla.

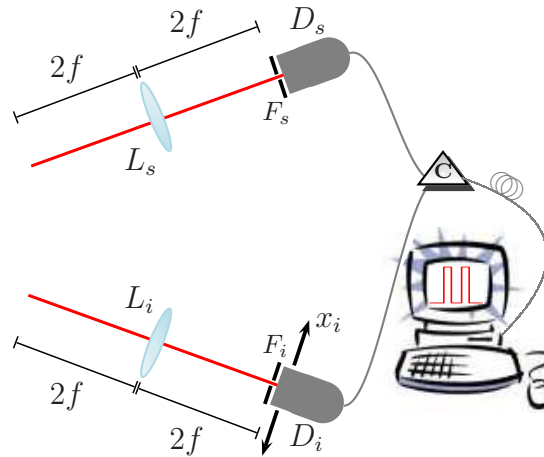
Apesar de nos restringirmos a feixes Gaussianos, o método de quantificação de emaranhamento apresentado aqui é geral.

### 5.4 Medidas na base $\{|\pm\rangle_s \otimes |\pm\rangle_i\}$

Primeiramente, fazemos medidas na base  $\{|\pm\rangle_s \otimes |\pm\rangle_i\}$  usando a montagem mostrada na Fig. 5.3. As lentes  $L_s$  e  $L_i$  formam as imagens das fendas duplas do signal e idler no plano



**Figura 5.2:** Perfis transversais no plano das fendas duplas usados para preparar os estados  $|\Psi_j\rangle$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Os valores medidos são representados por  $(\bullet)$  e a linha contínua é o ajuste Gaussiano. (a) Perfil para o estado  $|\Psi_1\rangle$  com largura (FWHM)  $l = 0.033$  mm. (b) Perfil para o estado  $|\Psi_2\rangle$  com  $l = 0.126$  mm. (c) Perfil para o estado  $|\Psi_3\rangle$  com  $l = 0.846$  mm.



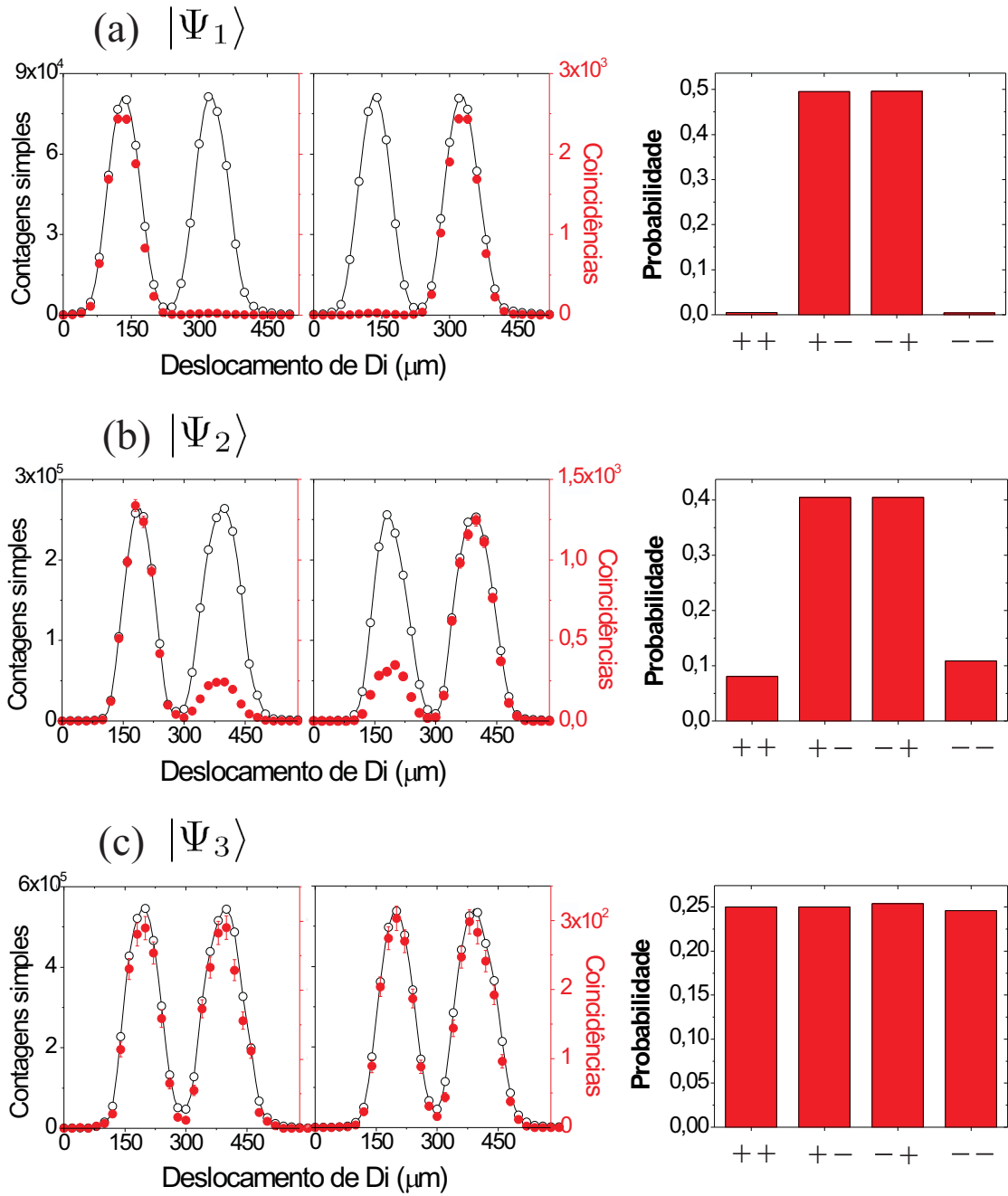
**Figura 5.3:** Configuração da montagem experimental para medidas na base  $\{|\pm\rangle_s \otimes |\pm\rangle_i\}$ .  $F_s$  e  $F_i$  são fendas simples de 0.1 mm fixas na entrada dos detectores.

dos detectores  $D_s$  e  $D_i$ , respectivamente, com um fator de aumento de um. Como vimos na seção 4.3, o estado propagado é idêntico àquele após as fendas. As medidas seletivas em coincidência são feitas exatamente da mesma maneira descrita na subseção 4.1.3, mas agora no plano de formação de imagens. Resumidamente,  $D_s$  é mantido fixo na imagem da fenda “+” (ou “-”) da fenda dupla do sinal, enquanto  $D_i$  faz uma varredura na imagem da fenda dupla do idler na direção  $x$ . Desta maneira, os quatro estados da base são selecionados e as contagens em coincidência normalizadas, dadas pela Eq. (4.1), nos darão as probabilidades para cada um deles.

Seguindo este procedimento, fizemos as medidas cujos resultados para  $|\Psi_1\rangle$ ,  $|\Psi_2\rangle$  e  $|\Psi_3\rangle$  são mostrados na Fig. 5.4(a)-(c), respectivamente. Observa-se que com os perfis do pump que usamos na preparação dos estados, as probabilidades obtidas estão totalmente de acordo com o que se esperava.

Voltando à discussão do capítulo anterior, embora estas medidas forneçam as correlações entre os dois qubits através das probabilidades  $|W_n|^2$  ( $n = 0, \pm$ ), elas não fornecem as fases dos coeficientes  $W_0$  e  $W_{\pm}$  e portanto não são suficientes para se detectar emaranhamento neste sistema. Se não temos nenhuma informação a priori sobre a natureza do estado, os resultados inferidos olhando-se apenas os gráficos de probabilidade são ambíguos. Por exemplo, o estado  $|\Psi_1\rangle$  poderia ser um estado maximamente emaranhado ou talvez um estado classicamente correlacionado como o da Eq. (4.5), o qual tem as mesmas correlações de  $|\Psi_1\rangle$ . Da mesma forma, poderia se pensar que  $|\Psi_3\rangle$  é um estado produto, mas dependendo das fases que não conhecemos, ele pode ser emaranhado.

Vamos considerar nossas medidas seletivas em coincidência como uma medida de um conjunto de projetores ortogonais do tipo  $|n, n'\rangle\langle n, n'|$  com  $\sum_{n, n'=\pm} |n, n'\rangle\langle n, n'| = \mathbb{I}$ , e o conjunto  $\{|n, n'\rangle\}$  formando uma base ortonormal para qualquer operador linear. Neste caso, estes resultados apenas confirmam que para estados puros de dois qubits, não é



**Figura 5.4:** Medidas na base  $\{|\pm\rangle_s \otimes |\pm\rangle_i\}$  para os estados  $|\Psi_1\rangle$  (a),  $|\Psi_2\rangle$  (b) e  $|\Psi_3\rangle$  (c). Primeira coluna: Contagens simples em  $D_i$  (—○—) e contagens em coincidências em  $D_s-D_i$  (●) medidas simultaneamente em 10 s com  $D_s$  fixo na imagem da fenda “+” (“-”) e  $D_i$  varrendo a imagem da fenda dupla do idler. O primeiro pico de contagem simples representa a fenda “-” e o segundo a fenda “+”. No primeiro gráfico  $D_s$  é fixo atrás da fenda “+” e no segundo, atrás da fenda “-”. As linhas contínuas são guias para os olhos. Segunda coluna: histogramas de probabilidades para todos os estados da base.

possível se quantificar emaranhamento através da medida de um único observável do sistema composto, como foi mostrado matematicamente na Ref. [134].

## 5.5 Medidas nas bases de Schmidt

Para determinar o grau de emaranhamento, é preciso fazer um conjunto de medidas que nos forneçam resultados sem ambiguidades, como foi no caso anterior. Para isso, nós adotaremos primeiramente uma estratégia para medir os coeficientes de Schmidt, pois o grau de emaranhamento é computado diretamente deles [Eq. (5.9)].

### 5.5.1 Preliminares

Para fazermos medidas sobre o estado  $|\Psi\rangle$  na decomposição de Schmidt da Eq. (5.3), precisamos em primeiro lugar, dar significado físico aos estados  $|\eta_{\pm}\rangle$  que formam a base de Schmidt. Como usamos perfis Gaussianos,  $e^{i\xi} = 1$  na Eq. (5.5) e então

$$|\eta_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle). \quad (5.10)$$

Estes estados são uma superposição coerente de caminhos que um fóton pode seguir (as fendas “ $\pm$ ”), com a mesma probabilidade de passar por qualquer um deles. Seguindo a explicação de Dirac [136], eles representam um fóton interferindo consigo mesmo. Se quisermos detectá-los em regiões distantes da fenda dupla, a distribuição de probabilidade exibirá franjas de interferência devido à interferência das amplitudes de probabilidade dos dois possíveis caminhos. Para mostrar isso matematicamente, vamos supor que os estados de um fóton  $|\eta_{+}\rangle$  ou  $|\eta_{-}\rangle$  são preparados e queremos detectá-los numa região distante (regime de Fraunhofer). Como discutido no capítulo anterior, podemos fazer isso inserindo uma lente no caminho do feixe e medindo no plano focal dessa lente que é o plano de transformada de Fourier da fenda dupla. O operador campo elétrico para essa situação já foi calculado no apêndice A e é dado na sua forma geral pela Eq. (4.7). Se  $z$  é o plano de detecção e  $z_L$  o plano da lente [Fig. A.1], temos que  $z - z_L = f$ . Fazendo isso na Eq. (4.7), o operador campo (a menos de um fator de fase) será dado por<sup>3</sup>

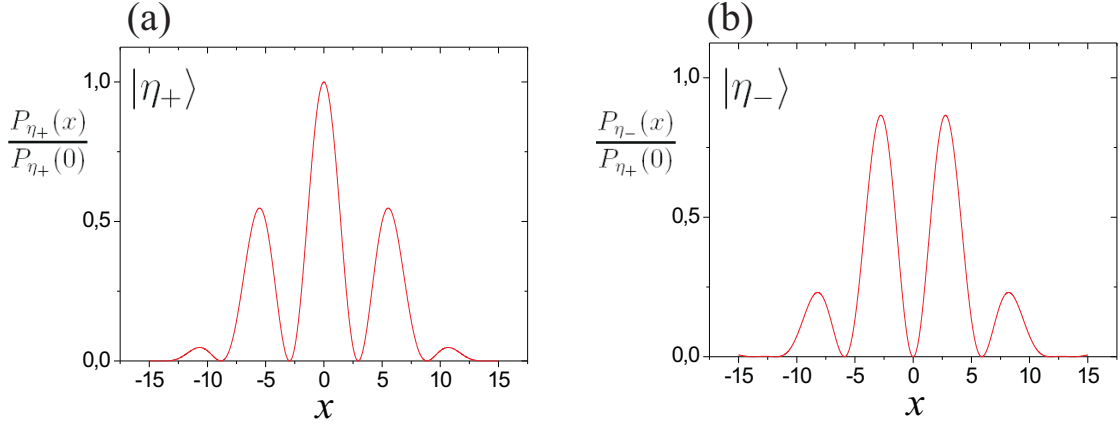
$$\mathbb{E}^{(+)} \propto \hat{a}(kx/2f). \quad (5.11)$$

A probabilidade de detecção de um fóton num estado arbitrário  $\hat{\rho}$  é dada por [46]

$$P_1(x) = \text{Tr}(\hat{\rho}\mathbb{E}^{(-)}\mathbb{E}^{(+)}). \quad (5.12)$$

---

<sup>3</sup>No capítulo anterior preferimos manter a forma geral do operador e da probabilidade de coincidências por razões de ajuste do fit teórico. Aqui, é mais conveniente manter estas equações numa forma mais simples.



**Figura 5.5:** Distribuição (normalizada) de probabilidades de detecção de um fóton no estado  $|\eta_+\rangle$  (a) e  $|\eta_-\rangle$  (b).

Usando a definição dos estado  $|\pm\rangle$  dada na Eq. (3.18) e o operador campo acima, a probabilidade de detecção para um fóton no estado  $|\eta_{\pm}\rangle$  será dada por

$$P_{\eta_{\pm}}(x) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{ka}{2f}x\right) \left[1 \pm \cos\left(\frac{kd}{2f}x\right)\right], \quad (5.13)$$

onde  $2a$  e  $d$  são a largura e a separação das fendas, respectivamente. Os gráficos correspondentes são mostrados na Fig. 5.5. Como esperado, temos padrões de interferência de Young compostos de franjas para  $|\eta_+\rangle$  e anti-franjas para  $|\eta_-\rangle$ . Há pontos onde um fóton no estado  $|\eta_+\rangle$  nunca será medido e o mesmo vale para  $|\eta_-\rangle$ . Estes são os pontos de mínimo de suas respectivas distribuições de probabilidade. Temos por exemplo

$$P_{\eta_-}(0) = 0, \quad (5.14)$$

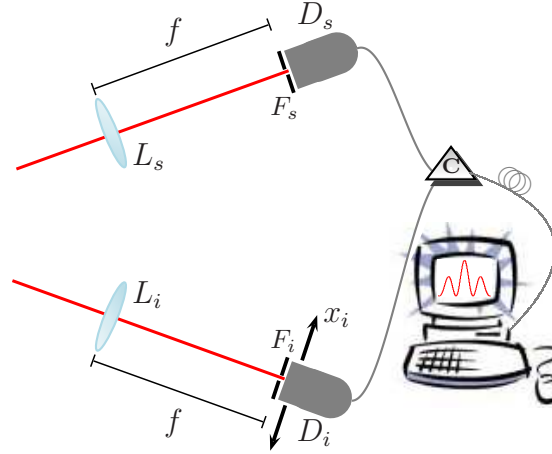
para a probabilidade de detectar um fóton no estado  $|\eta_-\rangle$  com o detector fixo em  $x = 0$ , e também

$$P_{\eta_+}\left(\frac{2\pi f}{kd}\right) = 0, \quad (5.15)$$

para a probabilidade de detectar um fóton no estado  $|\eta_+\rangle$  com o detector fixo em  $x = 2\pi f/kd$ .

### 5.5.2 Medidas, resultados e discussão

Com os resultados mostrados acima, podemos estabelecer um procedimento para a medida dos coeficientes de Schmidt. A configuração da montagem experimental é ilustrada na Fig. 5.6. Ambos detectores estão no plano da transformada de Fourier das fendas duplas, de tal forma que os operadores campo elétrico para o signal e idler serão dados pela Eq. (5.11). Usando as Eqs. (3.18), (4.6) e (5.1) (considerando o perfil Gaussiano usado),



**Figura 5.6:** Configuração da montagem experimental para medidas na base de Schmidt.  $F_s$  e  $F_i$  são fendas simples de 0.1 mm fixas na entrada dos detectores.

a probabilidade de detecção em coincidência nessa configuração será dada por

$$\begin{aligned}
 P_2(x_s, x_i) \propto & S^2(x_s)S^2(x_i) \{1 + 2|W_0|^2 \cos(\alpha(x_s - x_i)) \\
 & + 4|W_0W_+| \cos(\phi)[\cos(\alpha x_s) + \cos(\alpha x_i)] \\
 & + 2|W_+|^2 \cos(\alpha(x_s + x_i))\}, \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

onde  $\alpha = kd/2f$ ,  $S(x)$  é o termo de difração dado por  $S(x) \equiv \text{sinc}(kax/2f)$  e  $\phi$  é uma fase relativa entre os coeficientes  $W_+(=W_-)$  e  $W_0$  da Eq. (5.1).

As medidas serão semelhantes àsquelas feitas na base  $\{|\pm\rangle_s \otimes |\pm\rangle_i\}$ , porém serão feitas sobre o estado na decomposição de Schmidt, o qual tem apenas duas componentes [Eq. (5.3)]. Para cada estado, faremos então duas medidas seletivas em coincidência da seguinte maneira:

- (i)  $D_s$  é mantido fixo em  $x_s = 0$  e  $D_i$  faz uma varredura na direção  $x$  no braço do idler.
- (ii)  $D_s$  é mantido fixo em  $x_s = \pi/\alpha = 2\pi f/kd$  e  $D_i$  faz uma varredura na direção  $x$  no braço do idler.

No primeiro caso,  $D_s$  selecionará idealmente<sup>4</sup>, de acordo com a Eq. (5.14), apenas fótons signal no estado  $|\eta_+\rangle_s$ . Esta medida projeta o estado do idler em  $|\eta_+\rangle_i$  [veja Eq. (5.3)] e a contagem em coincidência obtida com a varredura em  $D_i$  apresentará um padrão de interferência de Young composto por franjas, como mostrado na Fig. 5.5(a). Isto pode ser visto pela Eq. (5.16) com  $x_s = 0$ . Neste caso, estamos medindo a componente  $|\eta_+\rangle_s|\eta_+\rangle_i$  do estado de dois fótons na DS e esta componente ocorre para todos os estados pois, da Eq. (5.8),  $c_+^2 \in [\frac{1}{2}, 1]$ .

<sup>4</sup>Considerando um detector pontual.

No segundo caso,  $D_s$  selecionará, de acordo com a Eq. (5.15), *somente* fótons signal no estado  $|\eta_-\rangle_s$ , o que projeta o estado do idler em  $|\eta_-\rangle_i$ . As contagens em coincidência obtidas com a varredura de  $D_i$ , apresentarão um padrão de interferência composto por anti-franjas (veja Eq. (5.16) com  $x_s = \pi/\alpha$ ), como o da Fig. 5.5(b). Portanto, esta é uma medida da componente  $|\eta_-\rangle_s|\eta_-\rangle_i$  da Eq. (5.3). Ao contrário da primeira, esta componente não ocorre para todos os estados pois  $c_-^2 \in [0, \frac{1}{2}]$  [veja Eq. (5.8)].

Para *todos* os estados, a medida (i) fornecerá um padrão de interferência de dois fótons composto de franjas, com visibilidade um (idealmente). Já a medida (ii) fornecerá um padrão composto de anti-franjas, também com visibilidade um, mas cuja altura dos máximos dependerá do valor de  $c_-^2$ , i.e., do grau de emaranhamento dos estados. Portanto, é este padrão que nos dá informação relevante sobre o emaranhamento. Porém, como nós temos acesso somente às contagens em coincidências e não às probabilidades diretamente, a medida apenas desse padrão não é suficiente para obter a concorrência e nós precisamos medir ambos padrões por questões de normalização.

Seguindo o procedimento descrito acima, nós obtivemos os resultados experimentais e as probabilidades  $c_{\pm}^2$  para  $|\Psi_1\rangle$ ,  $|\Psi_2\rangle$  e  $|\Psi_3\rangle$  os quais são mostrados na Fig. 5.7(a)-(c), respectivamente. Os pontos experimentais foram ajustados com a Eq. (5.16), usando os valores dos coeficientes medidos anteriormente, e um parâmetro de normalização. As probabilidades são dadas por

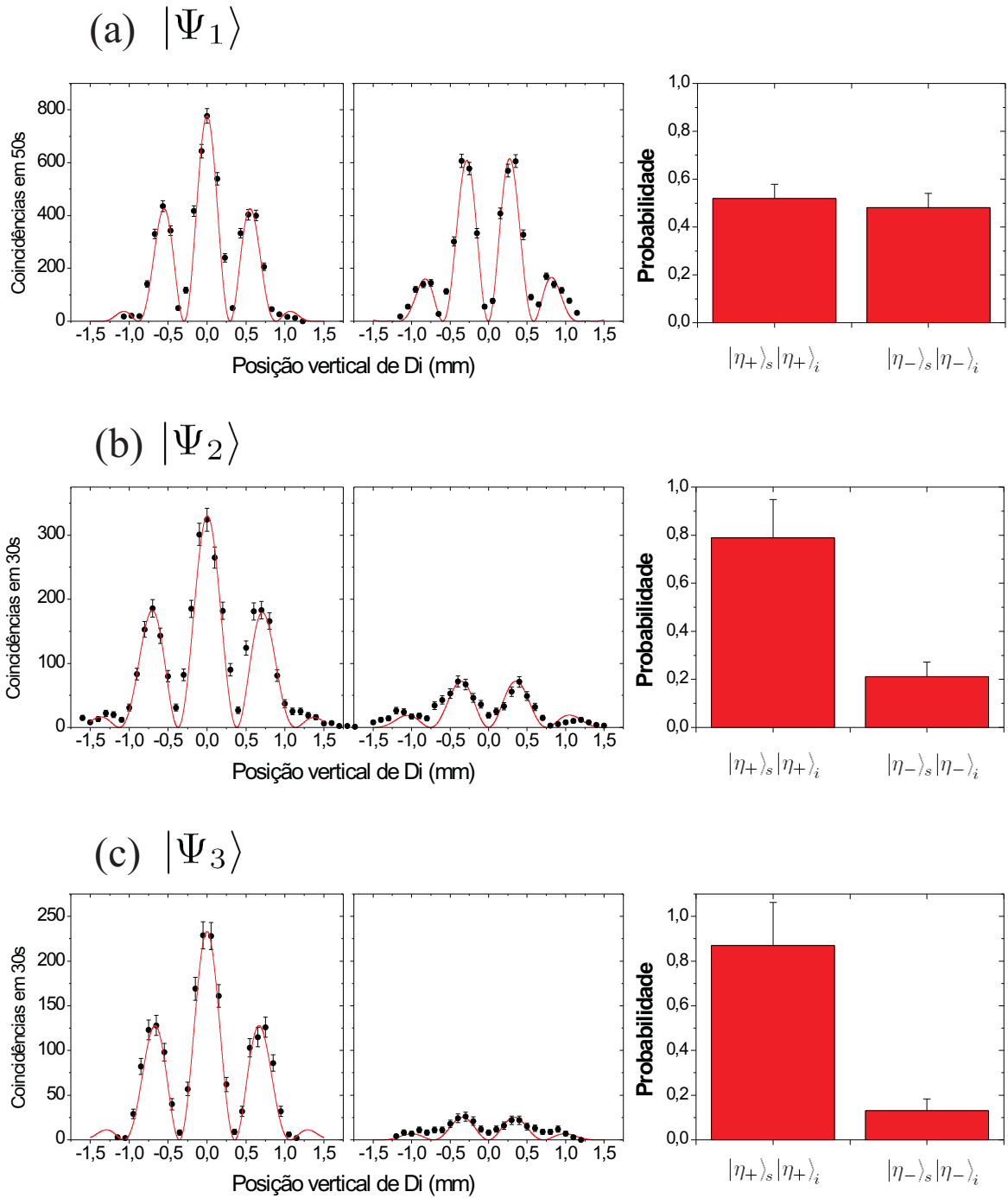
$$c_+^2 = \frac{N_F}{(N_F + N_{AF})}, \quad c_-^2 = \frac{N_{AF}}{(N_F + N_{AF})}, \quad (5.17)$$

onde  $N_F$  e  $N_{AF}$  é o número de coincidências em todos os pontos medidos em um padrão de franjas e anti-franjas, respectivamente.

Os valores da concorrência obtidos destas medidas são mostrados na primeira coluna da Tabela 5.2. Os erros desse valores foram grandes devido à propagação de erros que vêm da estatística Poissoniana de contagens de fótons. Nós podemos em princípio reduzi-los, aumentando o tempo de medida e/ou usando fontes mais eficientes. Isto pode ser visto claramente para  $|\Psi_1\rangle$  na Fig. 5.7(a), onde o maior tempo de medida resultou em um menor erro para a concorrência. Então, dentro dos erros experimentais  $|\Psi_1\rangle$  é um estado maximamente emaranhado, enquanto  $|\Psi_2\rangle$  e  $|\Psi_3\rangle$  são apenas parcialmente emaranhados com  $\mathcal{C}(\Psi_2) > \mathcal{C}(\Psi_3)$ . Note que, embora  $|\Psi_3\rangle$  tenha o menor grau de emaranhamento, ele está longe de ser um estado produto, como se poderia pensar considerando apenas as medidas na base  $\{|\pm\rangle_s \otimes |\pm\rangle_i\}$ . Isso se deve às fases do feixe pump na região das fendas, que aquelas medidas detróem, mas que estão embutidas nos padrões de interferência [a fase  $\phi$  na Eq. (5.16)].

Suponha um cenário onde medimos interferência de duas partículas, utilizando dois detectores, um fixo e um móvel. Quando a distribuição das franjas medidas depende da posição do detector fixo, dizemos que o padrão de interferência é condicional. Quando





**Figura 5.7:** Medidas na base de Schmidt para os estados  $|\Psi_1\rangle$  (a),  $|\Psi_2\rangle$  (b) e  $|\Psi_3\rangle$  (c). Primeira coluna: padrões de interferência de dois fótons medidos ( $\bullet$ ) movendo-se  $D_i$ , enquanto  $D_s$  está fixo em  $x_s = 0$  mm (esquerda) e  $x_s = (\pi/\alpha)$  mm (direita). As curvas sólidas foram obtidas da Eq. (5.16). Segunda coluna: histograma de probabilidades para as componentes da decomposição de Schmidt.

	Base de Schmidt	Probabilidade Marginal
$ \Psi_1\rangle$	$0.99 \pm 0.11$	$0.99 \pm 0.01$
$ \Psi_2\rangle$	$0.82 \pm 0.20$	$0.83 \pm 0.03$
$ \Psi_3\rangle$	$0.69 \pm 0.21$	$0.72 \pm 0.04$

Tabela 5.2: Concorrência.

analisamos estados puros de sistemas bipartidos, a condicionalidade está associada ao emaranhamento [122, 123]. Se as partículas são independentes, i.e., o estado quântico delas é produto, os padrões de cada uma também serão independentes e a posição das franjas não depende da posição do detector fixo. Por outro lado, é intuitivo pensar que quanto maior essa dependência, mais emaranhado deve ser o estado, até o limite do estado maximamente emaranhado em que o padrão é inteiramente deslocado.

No capítulo 4, nós usamos a observação de um padrão de interferência de dois fótons com franjas condicionais, como uma demonstração qualitativa de emaranhamento para dois qubits. Aqui, nós estamos mostrando que há uma relação direta entre grau de emaranhamento dos qubits emaranhados espacialmente e o “grau de condicionalidade” do padrão de interferência: quanto menor  $c_-^2$ , menor será o grau de emaranhamento e também a condicionalidade do padrão de interferência, pois a contribuição do segundo termo na Eq. (5.3) será reduzida. Portanto, podemos usar a condicionalidade desses padrões para se quantificar emaranhamento.

## 5.6 Medida da probabilidade marginal

Na seção anterior obtivemos o grau de emaranhamento dos qubits através de medidas sobre o estado total  $|\Psi\rangle$ . Uma outra maneira para quantificar emaranhamento em estados puros de dois qubits é adotando-se estratégias de medidas locais [135], i.e., medidas sobre a matriz densidade reduzida dada pela Eq. (5.7), que também nos fornecem os coeficientes de Schmidt e assim a concorrência.

Vamos considerar medidas sobre o fóton idler, ou seja, vamos detectá-lo e ignorar o que acontece com o fóton signal, afinal é disso que se trata tomar o traço parcial e medir um subsistema. Queremos medir padrões de interferência e portanto o detector idler estará novamente no plano focal de uma lente, tal que o operador campo elétrico será dado pela Eq. (5.11). A probabilidade de detecção de um fóton é dada pela Eq. (5.12). Usando o estado reduzido da Eq. (5.7) e a concorrência na Eq. (5.9), é fácil mostrar que

$$P_1(x_i) \propto S^2(x_i) \left[ 1 + \sqrt{1 - [\mathcal{C}(\Psi)]^2} \cos(\alpha x_i) \right], \quad (5.18)$$

com  $\alpha = kd/2f$  e  $S(x) \equiv \text{sinc}(kax/2f)$ . Esse resultado nos diz que quanto maior o grau de emaranhamento do estado total, menor será a visibilidade do padrão de interferência de um fóton. Isto está de acordo com a nossa intuição de que quanto mais emaranhado é um estado, mais misturado serão os estados reduzidos.

O nosso caso seria então simplesmente medir as contagens simples do lado do idler e determinar a visibilidade dos padrões obtidos. Porém, como já foi dito no capítulo 4, o nosso estado de dois qubits é pós-selecionado, i.e, ele é medido somente em coincidências e como vimos lá e veremos aqui, o número de contagens simples é muito maior que o número de coincidências. Isto quer dizer que para para fazermos medidas sobre o subsistema idler, temos que ter certeza que o fóton pertence a um par cujo gêmeo signal também foi detectado. Aí entra o conceito de probabilidade marginal, que no nosso contexto é definida como a probabilidade de observar o fóton idler em  $x_i$  e o signal em qualquer lugar ( $-\infty < x_s < +\infty$ ) [63], ou seja,

$$\bar{P}_1(x_i) = \int dx_s P_2(x_s, x_i), \quad (5.19)$$

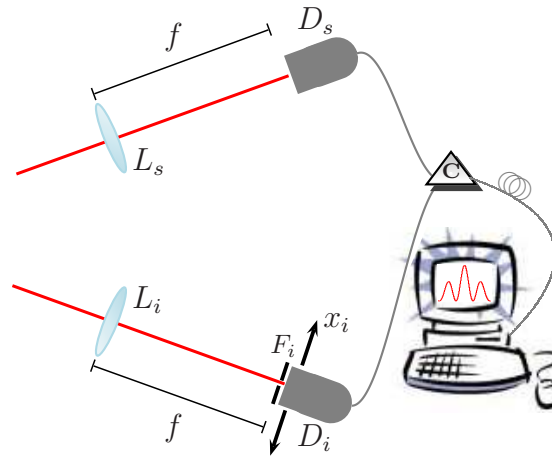
com  $P_2(x_s, x_i)$  dado pela Eq. (5.16). Resolvendo essa integral, podemos mostrar que

$$\bar{P}_1(x_i) = P_1(x_i), \quad (5.20)$$

com  $P_1(x_i)$  dado pela Eq. (5.18). Esse é um resultado esperado pois o traço parcial já foi tomado de um estado pós-selecionado, e ele nos dá solução do problema de se medir no subsistema. A medida da probabilidade marginal, é feita com o detector signal completamente aberto. Desta forma, ele não pode registrar o local de chegada do fóton signal (como fazia na medida na base de Schmidt), e então ele selecionará  $|\eta_+\rangle_s$  ou  $|\eta_-\rangle_s$  aleatoriamente e com a mesma probabilidade. Isto é equivalente a tomar o traço parcial e embora nós estejamos medindo contagens em coincidência, o detector signal pode ser visto como um trigger para as medidas locais realizadas pelo detector idler.

A configuração da montagem experimental para fazer estas medidas é mostrada na Fig. 5.8. Ela é idêntica à configuração para medidas na base de Schmidt, porém o detector signal está totalmente aberto e tem um diâmetro de 12 mm. As contagens em coincidência foram obtidas movendo-se  $D_i$  na direção  $x$  e os resultados destas medidas para  $|\Psi_1\rangle$ ,  $|\Psi_2\rangle$  e  $|\Psi_3\rangle$  são mostrados na Fig. 5.9(a)-(c), respectivamente.

Os dados experimentais foram ajustados com a Eq. (5.18) e a concorrência foi usada como o parâmetro de ajuste. Os respectivos valores são mostrados na segunda coluna da Tabela 5.2. Os resultados estão de acordo com os valores obtidos através da medida na base de Schmidt, mostrando que ambos métodos são apropriados para a quantificação de emaranhamento nos estados puros de dois qubits emaranhados espacialmente. Como se nota, os erros para as medidas na base de Schmidt são bem maiores que para medidas



**Figura 5.8:** Configuração da montagem experimental para medidas da probabilidade marginal.  $F_i$  é uma fenda simples de 0.1 mm fixa na entrada do detector idler. O detector signal não tem fenda.

de probabilidade marginal. Isto se deve à relação sinal/ruído ser bem menor no primeiro caso, já que no segundo caso, o detector está totalmente aberto.

Para encerrar nossa discussão de que as contagens simples não nos dão nenhuma informação sobre o subsistema, mostramos na Fig. 5.10, os gráficos dessas contagens referentes às medidas em coincidência na base de Schmidt (Fig. 5.7) e de probabilidade marginal (Fig. 5.9) para os três estados preparados. Como antes, a não observação de interferência de um fóton aqui se deve à grande área iluminada do cristal, o que torna o comprimento de coerência transversal do feixe signal menor que a separação entre as fendas [65].

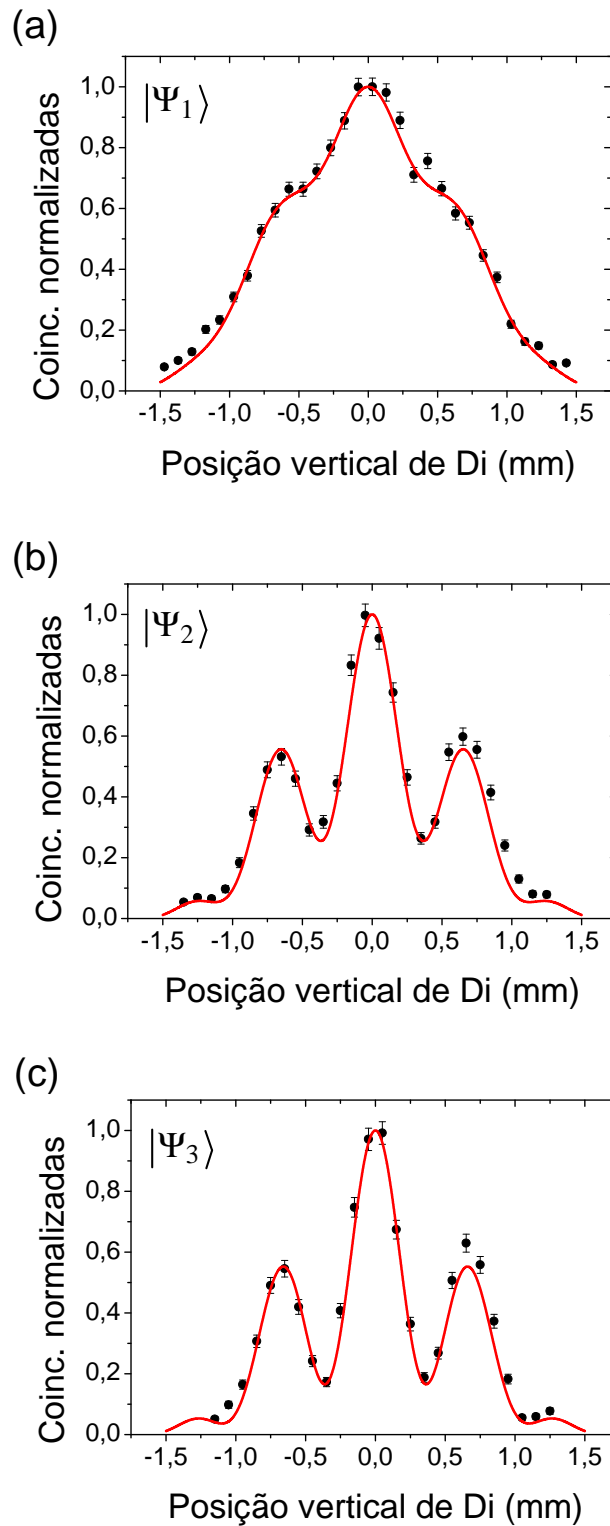
## 5.7 Discussão e conclusão

Os estados emaranhados propostos no capítulo 3 e demonstrados no capítulo 4 foram analisados de forma mais ampla, desde sua geração até a caracterização de seu emaranhamento. Embora tenhamos nos restringido a qubits, muitos aspectos interessantes podem ser observados.

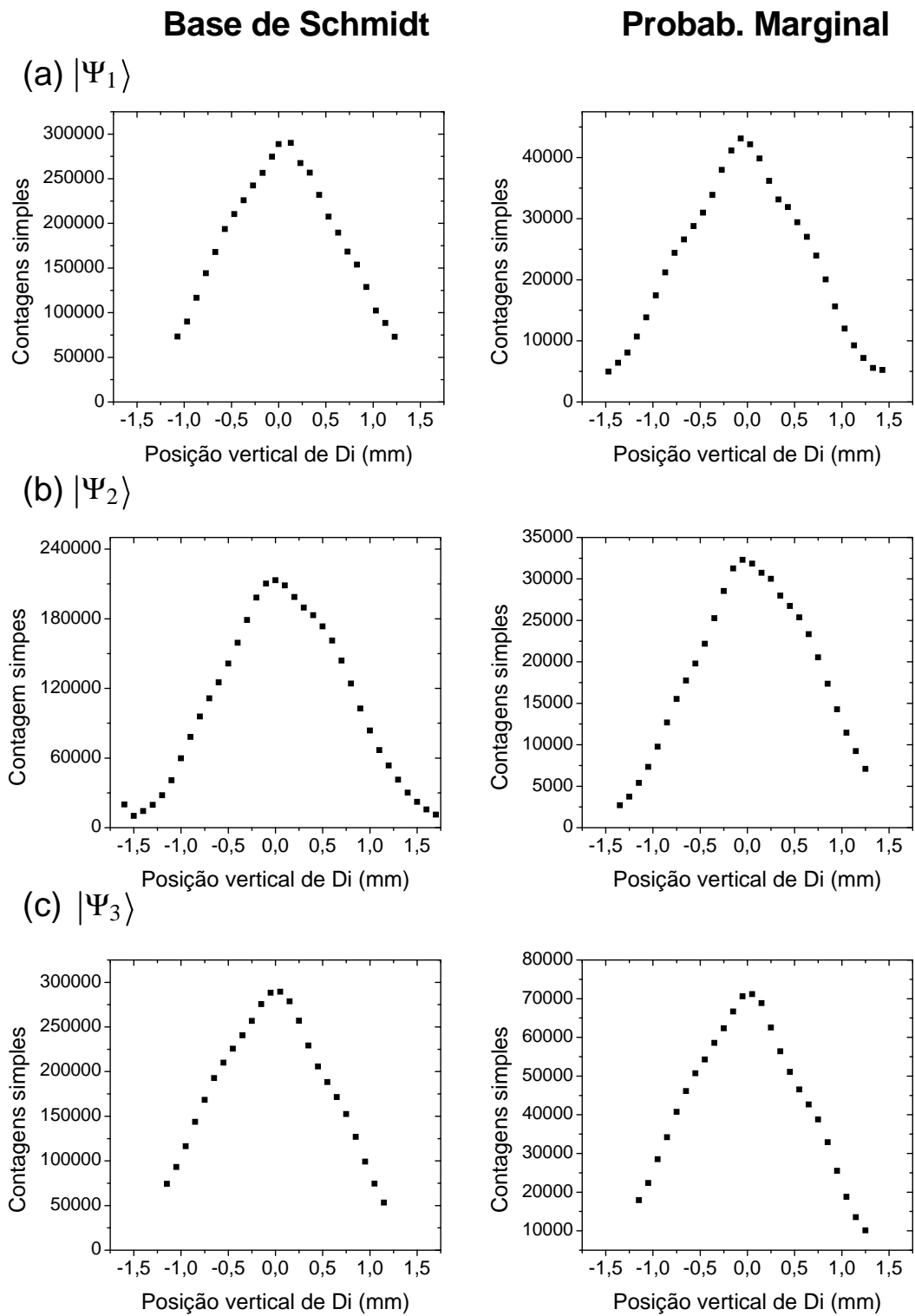
### Estados de Bell

Pela Eq. (5.1) pode-se ver que em princípio podemos preparar os quatro estados de Bell para qubits emaranhados espacialmente, dados por

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_s |-\rangle_i \pm |-\rangle_s |+\rangle_i), \quad (5.21)$$



**Figura 5.9:** Medidas de probabilidade marginal para os estados  $|\Psi_1\rangle$  (a),  $|\Psi_2\rangle$  (b) e  $|\Psi_3\rangle$  (c). Os padrões de interferência medidos em coincidência ( $\bullet$ ) foram normalizados. As curvas sólidas foram obtidas da Eq. (5.20) com a concorrência como parâmetro de ajuste.



**Figura 5.10:** Contagens simples referentes às contagens em coincidência das Figs. 5.7 (primeira coluna) e 5.9 (segunda coluna).

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_s |+\rangle_i \pm |-\rangle_s |-\rangle_i). \quad (5.22)$$

Para isto, precisamos usar um determinado tipo de feixe e manipulá-lo no plano das fendas duplas e em alguns casos inserir uma fase em uma das fendas. Por exemplo, consideremos um feixe pump Gaussiano: focalizando-o, teremos  $W_+ = W_- = 0$ , o que gera  $|\Psi^+\rangle$ ; se inserirmos uma fase em uma das fendas podemos gerar ainda  $|\Psi^-\rangle$ . Se projetarmos a imagem de um fio na parte escura da fenda dupla tal que  $W_0 = 0$  [70], geramos  $|\Phi^+\rangle$  e acrescentando a fase podemos gerar  $|\Phi^-\rangle$ . Outros tipos de feixes, como Laguerre-Gaussiano [52, 88, 104], podem ser usados nessa preparação.

### Analogia com polarização

As medidas na base de Schmidt se mostraram essenciais para a quantificação de emaranhamento em nosso sistema, uma vez que as medidas na base  $\{|\pm\rangle_s \otimes |\pm\rangle_i\}$  não eram suficientes. Nesse ponto, podemos fazer uma analogia com o estado de dois qubits emaranhados em polarização. O método usado para confirmar emaranhamento em polarização baseia-se em medidas em duas bases não ortogonais. Por exemplo, um estado de Bell  $|\Psi^-\rangle$  e um estado classicamente correlacionado com as mesmas correlações em polarização, fornecem um padrão de interferência igual, quando são medidos na base  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ . Porém, com medidas na base  $\{|H\rangle + |V\rangle, |H\rangle - |V\rangle\}$ , somente se observa interferência para o estado emaranhado. Em geral esse método é usado para verificar a qualidade do emaranhamento através da visibilidade do padrão de interferência nesta segunda base. No nosso caso, a medida na base de Schmidt  $\{|+\rangle + |-\rangle, |+\rangle - |-\rangle\}$  é análoga à medida na base “rodada” de polarização, pois além de prever resultados diferentes de estados classicamente correlacionados, ela também serve para caracterizar o emaranhamento através da condicionalidade dos padrões de interferência.

### Mudança de base

É interessante ver como se dá a mudança de base nos qubits/qudits emaranhados espacialmente. Voltando à analogia com polarização, lá, o ângulo do polarizador seleciona uma dada base. No nosso caso é a posição transversal do detector no plano de transformada de Fourier que seleciona a base de medida. Em particular, neste trabalho, nós escolhemos medir na base  $\{|\eta_+\rangle, |\eta_-\rangle\}$ . Mas outras escolhas, para outros fins são possíveis, como por exemplo na realização do processo de tomografia de um estado misto de dois qubits [120].

### Generalização para qudits

Nós mostramos como usar interferência condicional de dois fótons para medir grau de emaranhamento em estados puros de qubits criados com momento transversal de fótons

da CPD. A extensão desse método para o caso de qudits é direta. Basta utilizar a decomposição de Schmidt do estado e fazer a medida das suas  $D$  componentes, ou seja,  $D$  padrões de interferência. Normalizando o número de coincidências desses padrões, o grau de emaranhamento pode ser computado diretamente via entropia de von Neumann discutida na seção 1.4. Por outro lado, a medida da probabilidade marginal não é suficiente para determinar o emaranhamento de dois qudits, pois fornece apenas um parâmetro (a visibilidade), enquanto a entropia de von Neumann requer  $D - 1$  parâmetros (os coeficientes de Schmidt).

### Pureza dos estados

Por último, mas não menos importante, vem a questão da pureza dos estados que estamos gerando aqui. Nesta tese, nós assumimos que os estados de qubits e qudits são puros, como é usual com qualquer grau de liberdade que se utilize dos fótons da CPD. A pureza de estados quânticos é sempre uma aproximação, pois isto só seria possível com sistemas totalmente isolados e sem interação com o ambiente externo, o que não ocorre. A hipótese da pureza é crucial neste trabalho de quantificação de emaranhamento e se os estados não forem (aproximadamente) puros, estas medidas que fizemos não medem concorrência. O fato de fazermos o trabalho da forma que foi feito é porque acreditamos que estes estados são puros, mas sempre é bom mostrar isto experimentalmente, o que pode ser feito através da tomografia [119, 120], por exemplo.



# Conclusão

O tema central neste trabalho foi o emaranhamento em momento transversal dos pares de fótons gerados na conversão paramétrica descendente (CPD), tendo como base a teoria de transferência do espectro angular do feixe de laser para o estado quântico desses fótons. Nosso estudo teve como objetivo mostrar que esse grau de liberdade contínuo pode ser explorado para a geração de estados emaranhados em espaços discretos e multidimensionais. Vamos fazer um resumo dos resultados obtidos na tese e discutir perspectivas de aplicações para eles.

No capítulo 2, estudamos a evolução do estado de dois fótons, quando estes se propagam no espaço livre, a partir do cristal, e são transmitidos através de sistemas ópticos lineares. Dado que a amplitude do bifóton na saída do cristal é o espectro angular transferido do feixe de laser, nós simplesmente generalizamos as técnicas da óptica de Fourier para determinar a evolução do espectro angular do bifóton e conseqüentemente a evolução do estado. Apesar do método ser geral, nós nos concentramos num caso mais simples, onde havia apenas um sistema óptico no caminho de cada fóton convertido. Obtivemos um estado cuja amplitude carrega informação desses sistemas ópticos e também do perfil transversal do feixe de laser. Essa dependência do perfil é devido à transferência do espectro angular, e é dada em função da soma das coordenadas transversais de posição dos fótons. Portanto, podemos manipular os sistemas ópticos e o perfil do laser para criar estados de diferentes formas, a chamada engenharia de estados.

No capítulo 3, partimos do estado de dois fótons calculado anteriormente e apresentamos uma proposta para geração de estados emaranhados de qubits e qudits, codificados no momento transversal (modo espacial) desses fótons. Este grau de liberdade não tinha sido explorado até então para esse fim. Mostramos que selecionando modos espaciais transversais específicos, nós podemos gerar um espaço discreto e  $D$ -dimensional para cada fóton. Para selecionar esses modos utilizamos um anteparo opaco com  $D$  fendas transparentes no caminho de cada fóton, uma abertura que chamamos de  $D$ -fendas. Sob certas condições, mostramos que os  $D$  caminhos que as aberturas estabelecem para o fóton representam estados ortonormais e portanto, uma base no espaço de Hilbert  $D$ -dimensional. No nosso método, temos o controle da dimensão do qudit, variando o número de fendas, embora esse número tenha que satisfazer as aproximações utilizadas no cálculo do estado. Temos também o controle das propriedades de emaranhamento, pela manipulação do perfil transversal do feixe de laser. Por isso dissemos, que o nosso método de geração é controlado. Neste capítulo discutimos também maneiras de se realizar operações locais sobre os estados. Uma possibilidade se baseia na teoria de divisores de feixes multiportas e a outra é através da propagação livre, que realiza transformações unitárias naturalmente.

No capítulo 4 realizamos um experimento mostrando a geração de estados maximamente emaranhados de qudits com  $D = 4$  e  $D = 8$ . Fizemos medidas logo atrás das fendas e os resultados obtidos mostraram que as correlações estão de acordo com as de um estado maximamente emaranhado previsto pela teoria. Contudo, discutimos que essas medidas não eram suficientes para atestar o caráter quântico das correlações, pois os mesmos resultados poderiam ser obtidos com um estado classicamente correlacionado. Então, mostramos que, detectando no plano de transformada de Fourier de uma lente, as previsões para um estado emaranhado e um classicamente correlacionado, são totalmente diferentes. A detecção em coincidência para o primeiro apresenta um padrão de interferência de dois fótons com franjas condicionais e para o segundo, apenas difração. Fizemos medidas que comprovaram isto e certificaram que o estado produzido no experimento é emaranhado. Esta foi a primeira demonstração concreta, de emaranhamento multidimensional utilizando o momento transversal dos fótons da CPD. Ainda neste capítulo, mostramos que as correlações dos estados de qudits são mantidas quando os fótons se propagam no espaço livre, o que é feito formando a imagem das  $D$ -fendas no plano de detecção.

Finalmente, no capítulo 5, estudamos uma maneira de caracterizar quantitativamente o emaranhamento dos estados de qubits e qudits emaranhados espacialmente. A discussão ficou restrita para estados de dois qubits, mas a generalização é direta. Resultados interessantes foram obtidos nessa análise. Primeiro, geramos estados com perfis Gaussianos de diferentes larguras. Mostramos através de medidas no plano de imagem das fendas duplas, que as correlações estavam de acordo com os perfis usados. Porém, como essas medidas não são suficientes para se determinar o grau de emaranhamento, tivemos que medir em outra base. A escolha natural foi a base de Schmidt, pois conhecendo os coeficientes da decomposição de Schmidt, podemos quantificar o emaranhamento. Mostramos então que a medida nessa base, é uma medida no plano de transformada de Fourier da lente, com os detectores fixos em posições transversais específicas para selecionar cada componente da base. Medimos padrões de interferência de dois fótons e estabelecemos uma relação direta entre grau de emaranhamento e grau de condicionalidade das franjas desse padrão. O método é facilmente generalizado para qudits. Além disso, mostramos também que para os nossos estados de dois qubits a medida da probabilidade marginal, é equivalente a tomar o traço parcial no estado total e medir num subsistema qualquer. Medimos um padrão de interferência de um fóton (com a detecção do outro atuando como um trigger) para cada estado e mostramos que visibilidade obtida está diretamente ligada ao grau de emaranhamento deste estado. Porém, esse é um caso especial de estados de dois qubits cujo grau de emaranhamento, depende apenas de um parâmetro. A generalização desse método para qudits não é possível. Este trabalho também mostrou como a propagação realiza transformações unitárias locais, pois a medida no plano de transformada de Fourier da lente, é numa base que é uma combinação linear dos vetores que representam a fenda pela qual o fóton passou.

Quando associamos a palavra qubit ou qudit a um sistema quântico, estamos implicitamente assumindo que tal sistema tem capacidade de carregar informação e portanto ser utilizado em protocolos de informação quântica. Para que isto seja verdade, devemos ser capazes de realizar todo tipo de operações sobre ele. No capítulo 3, demos as primeiras indicações de como isso pode ser feito para os estados que estamos gerando aqui. A teoria de divisores de feixes multiportas é bastante interessante e em princípio pode ser aplicada nos nossos estados. Além dela, a propagação livre também realiza operações unitárias locais, como mostramos no capítulo 5. Porém, o estudo aqui mostrou apenas uma transformação unitária particular. Um estudo mais geral se faz necessário para verificar como a propagação realiza qualquer transformação unitária. Mas, como é possível em princípio, fazer estas operações sobre os qubits e qudits espaciais, justifica-se a nomenclatura deles.

Acreditamos que ainda há muitos caminhos que podem ser aprofundados a partir dos resultados apresentados neste trabalho. Alguns exemplos: No capítulo 2, é possível a generalização do cálculo da evolução do estado, para experimentos mais complexos e estudar como o emaranhamento é preservado ou deteriorado a longas distâncias. No capítulo 3, é possível se determinar um limite para as dimensões do qudit, que leve em conta os fatores experimentais como a largura finita do perfil do laser. No capítulo 4 é testar a propagação de qudits no espaço livre, a longas distâncias. No capítulo 5, é possível generalizar, para qudits, o método de quantificação de emaranhamento que utiliza a condicionalidade dos padrões de interferência. Esses não são os únicos caminhos e talvez nem sejam os melhores a se seguir. O melhor a se fazer é uma leitura crítica dos resultados e discussões apresentados aqui, de modo que cada um encontre uma maneira de levá-los adiante. O que vale ressaltar é que o tratamento multimodal dos fótons emaranhados em variáveis contínuas de momento transversal têm ainda um grande potencial a ser explorado, para a realização de protocolos de informação quântica. Em particular, para os estados de qubits e qudits espaciais, demos apenas o primeiro passo que foi a geração.

# Determinação do operador campo e cálculo da taxa de coincidência

## A.1 Determinação do operador campo elétrico

Vamos usar os métodos apresentados na subseção 2.5.1 para calcular o operador campo elétrico da Eq. (4.7). A situação para o campo clássico é ilustrada na Fig. A.1.

### A.1.1 Campo clássico propagando de $z_A$ a $z$

Queremos determinar o campo elétrico  $E(x, z)$  no plano  $z$  (plano de detecção) quando este se propaga de  $z_A$  (plano das aberturas), passando por uma lente no plano  $z_L$ , como mostra a Fig. A.1. De acordo com a Eq. (2.19), o espectro angular do campo incidente na lente será dado por:

$$\tilde{E}_{iL}(q, z_L) = \tilde{E}(q, z_A)e^{ik_z(z_L-z_A)}. \quad (\text{A.1})$$

O campo correspondente será

$$\begin{aligned} E_{iL}(x, z_L) &= \text{const.} \int dq \tilde{E}_{iL}(q, z_L)e^{iqx} \\ &= \text{const.} \int dq \tilde{E}(q, z_A)e^{i(qx+k_z(z_L-z_A))}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

O espectro angular do campo transmitido pela lente é dado obtido via Eq. (2.21)

$$\tilde{E}_{tL}(q, z_L) = \tilde{E}_{iL}(q, z_L) * T(q) =$$

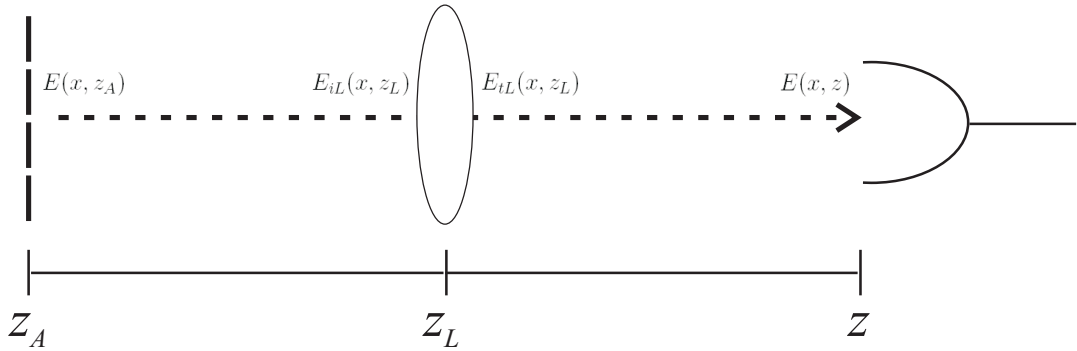


Figura A.1: Um campo se propaga de  $z_A$  até  $z$ , sendo transmitido por uma lente em  $z_L$ .

$$= \text{const.} \int dq' \tilde{E}_{iL}(q', z_L) T(q - q'), \quad (\text{A.3})$$

onde  $T(q)$  é a transformada de Fourier da lente. O campo no plano de detecção ( $z$ ) será dado por

$$E(x, z) = \text{const.} \int dq \tilde{E}(q, z_L) e^{iqx}, \quad (\text{A.4})$$

onde  $\tilde{E}(q, z) = \tilde{E}_{iL}(q, z) e^{ik_z(z-z_L)}$ , é o espectro angular propagado de  $z_L$  a  $z$ . Usando a Eq. (A.3), teremos

$$E(x, z) = \text{const.} \int dq \int dq' \tilde{E}_{iL}(q', z_L) T(q - q') e^{i(qx + k_z(z-z_L))}. \quad (\text{A.5})$$

Usando a Eq. (A.1) para  $\tilde{E}_{iL}(q, z_L)$  e considerando a já assumida aproximação paraxial  $k_z \approx k - q^2/2k$ , teremos

$$E(x, z) = \text{const.} \int dq \int dq' \tilde{E}(q', z_A) T(q - q') e^{i\left(qx - \frac{q^2}{2k}(z-z_L) - \frac{q'^2}{2k}(z_L-z_A)\right)}, \quad (\text{A.6})$$

onde as fases globais foram incluídas na constante.

## A lente

A função transmissão da lente (considerando só o eixo  $x$ ) é dada por [90]

$$t_L(x) = e^{-i\frac{k}{2f}x^2}, \quad (\text{A.7})$$

onde  $f$  é o comprimento focal da lente. A transformada de Fourier  $T(q - q')$  será então

$$T(q - q') \propto e^{i\frac{f}{2k}(q-q')^2}. \quad (\text{A.8})$$

### A.1.2 Operador campo elétrico

Para quantizar o campo elétrico, basta fazer  $\tilde{E}(q, z_A) \rightarrow \hat{a}(q)$ . Fazendo isso e substituindo a Eq. (A.8) na Eq. (A.6) teremos

$$\mathbb{E}^{(+)} = \text{const.} \int dq \int dq' \hat{a}(q') e^{i\left(qx - q^2 \frac{(z-z_L)}{2k} - q'^2 \frac{(z_L-z_A)}{2k} + \frac{f}{2k}(q-q')^2\right)}, \quad (\text{A.9})$$

que representa um operador campo propagando-se de  $z_A$  (plano das aberturas) até  $z$  (plano de detecção) sendo transmitido por uma lente de comprimento focal  $f$  no plano  $z_L$  ( $z_A < z_L < z$ ).

## A.2 Taxa de coincidência

A probabilidade de detecção em coincidência,  $P(x_1, x_2)$ , para um estado de dois fótons qualquer, é dada pela Eq. (4.6). Para o estado puro de dois qudits dado pela Eq. (3.25), a probabilidade de coincidências será dada por:

$$P_{\Psi}(x_1, x_2) \propto \left| \sum_{l=-l_D}^{l_D} e^{ik \frac{d^2 l^2}{2z_A}} \langle \text{vac} | \mathbb{E}_i^{(+)} \mathbb{E}_s^{(+)} | l_s, -l_i \rangle \right|^2, \quad (\text{A.10})$$

enquanto para o estado classicamente correlacionado correspondente, dado pela Eq. (4.5) teremos

$$P_{\rho}(x_1, x_2) = \sum_{l=-l_D}^{l_D} \left| \langle \text{vac} | \mathbb{E}_i^{(+)} \mathbb{E}_s^{(+)} | l_s, -l_i \rangle \right|^2. \quad (\text{A.11})$$

Observa-se dessas expressões que a probabilidade de coincidência para o estado misto não apresenta termos de interferência. Para chegar às Eqs. (4.8) e (4.11), basta calcular  $\langle \text{vac} | \mathbb{E}^{(+)} | l \rangle$ , inserir nas Eqs. (A.10) e (A.11) e arranjar os termos.

### A.2.1 Cálculo da amplitude de probabilidade $\langle \text{vac} | \mathbb{E}^{(+)} | l \rangle$

Usando o operador campo (com  $k_s = k_i = k/2$ ) dado pela Eq. (A.9) e a definição do estado  $|l\rangle$  dada pela Eq. (3.18), temos que

$$\begin{aligned} \langle \text{vac} | \mathbb{E} | l \rangle &\propto \int dq \int dq' \int dq'' e^{i \left( qx - q^2 \frac{(z-z_L)}{k} - q'^2 \frac{(z_L-z_A)}{k} + \frac{f}{k} (q-q')^2 - q''ld \right)} \text{sinc}(q''a) \langle \text{vac} | \hat{a}(q') | 1q'' \rangle \\ &= \int dq' F(q', x) e^{-iq'ld} e^{-iq'^2\beta} \text{sinc}(q'a), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde

$$\begin{aligned} F(q', x) &= \int dq e^{iq \left( x - \frac{2f}{k} q' \right)} e^{-i\alpha q^2} \\ &\propto e^{i \frac{1}{4\alpha} \left( x - q' \frac{2f}{k} \right)^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

e os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são dados por

$$\alpha \equiv \frac{z - z_L - f}{k} \quad \text{e} \quad \beta \equiv \frac{z_L - z_A - f}{k}. \quad (\text{A.14})$$

Fazendo  $q' \rightarrow q$  e usando (A.13), podemos reescrever (A.12) como

$$\langle \text{vac} | \mathbb{E} | l \rangle \propto e^{i \frac{x^2}{4\alpha}} \int dq e^{-i\lambda q} e^{i\delta q^2} \text{sinc}(qa)$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{i\frac{x^2}{4\alpha}} e^{-i\frac{\lambda^2}{4\delta^2}} \int dq e^{i\delta(q-\frac{\lambda}{2\delta})} \text{sinc}(qa) \\
 &= e^{i\frac{x^2}{4\alpha}} e^{-i\frac{\lambda^2}{4\delta^2}} f(q) * g(q)
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

onde  $f * g$  é a convolução das funções  $f$  e  $g$  as quais são definidas como:

$$f(q) = \text{sinc}(qa) \quad \text{e} \quad g(q) = e^{i\delta q^2}.$$

e os parâmetros  $\lambda$  e  $\delta$  são dados por

$$\lambda \equiv x \frac{f}{\alpha k} + ld \quad \text{e} \quad \delta \equiv \frac{f^2}{\alpha k^2} - \beta. \tag{A.16}$$

A função  $f * g$  será uma função de  $\lambda/2\delta$  definida acima. Pelo teorema da convolução temos que  $\mathcal{T}[f * g] = \mathcal{T}[f]\mathcal{T}[g]$ , onde  $\mathcal{T}$  denota a transformada de Fourier de uma função. Temos então  $f * g = \mathcal{T}^{-1}\{\mathcal{T}[f]\mathcal{T}[g]\}$ . Calculando estas transformadas temos que:

$$\mathcal{T}[f] = \int dq e^{iqx'} \text{sinc}(qa) \propto \Pi\left(\frac{x'}{2a}\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x'| \leq a \\ 0, & \text{se } |x'| > a. \end{cases}$$

$$\mathcal{T}[g] = \int dq e^{iqx'} e^{i\delta q^2} \propto e^{-i\frac{x'^2}{4\delta}}$$

Portanto a convolução de  $f$  e  $g$  será dada por

$$\begin{aligned}
 f * g &= \mathcal{T}^{-1}[e^{-i\frac{x'^2}{4\delta}} \Pi(x'/2a)] \\
 &= \int dx' e^{-i\frac{\lambda}{2\delta}x'} e^{-i\frac{x'^2}{4\delta}} \Pi(x'/2a) \\
 &= \int_{-a}^a dx' e^{-i\frac{\lambda}{2\delta}x'} e^{-i\frac{x'^2}{4\delta}} \\
 &\approx \int_{-a}^a dx' e^{-i\frac{\lambda}{2\delta}x'} \\
 &= 2a \text{sinc}\left(\frac{\lambda}{2\delta}a\right).
 \end{aligned}$$

Usamos aqui a aproximação  $e^{-i\frac{x'^2}{4\delta}} = 1$  que é válida neste intervalo de integração

$$\frac{x'^2}{4\delta} \leq \frac{ka^2}{4\delta} \approx 10^{-7}$$

para os parâmetros experimentais envolvidos.

Temos finalmente que

$$\langle \text{vac} | \mathbb{E} | l \rangle \propto 2a e^{i\frac{x^2}{4\alpha}} e^{-i\frac{1}{4\delta\phi^2}(x+ld\phi)^2} \text{sinc}\left(\frac{a}{2\delta\phi}(x+ld\phi)\right), \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\phi = \frac{2\alpha k}{f}, \quad (\text{A.18})$$

e os parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$  são definidos em (A.14) e (A.16) respectivamente. Arranjando esse emaranhado de parâmetros e substituindo nas probabilidades de coincidências (A.10) e (A.11), chegamos às expressões (4.8) e (4.11), respectivamente.



## Apêndice B

---

# Publicações

### Artigos publicados

- ✓ Leonardo Neves, S. Pádua e C. Saavedra, *Controlled generation of maximally entangled qudits using twin photons*, *Physical Review A* **69**, 042305 (2004).
- ✓ Leonardo Neves, G. Lima, J. G. A. Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra e S. Pádua, *Generation of entangled states of qudits using twin photons*, *Physical Review Letters* **94**, 100501 (2005).
- ✓ Ivan F. Santos, Leonardo Neves, G. Lima, C. H. Monken e S. Pádua, *Generation and detection of magnified images via illumination by entangled photon pairs*, *Physical Review A* **72**, 033802 (2005).
- ✓ Leonardo Neves, G. Lima, J. G. A. Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra e S. Pádua, *Two-photon high-dimensional spatial entanglement: theory and experiment*, *Modern Physics Letters B* **20**, 1–23 (2006).
- ✓ G. Lima, Leonardo Neves, Ivan F. Santos, J. G. Aguirre Gómez, C. Saavedra e S. Pádua, *Propagation of spatially entangled qudits through the free space*, *Physical Review A* **73**, 032340 (2006).

### Artigos submetidos ou em preparação

- ✗ G. Lima, F. Torres, Leonardo Neves, A. Delgado, C. Saavedra e S. Pádua, *Optimal state determination for composite systems of two spatial qubits*, submetido à *Physical Review A*.
- ✗ Leonardo Neves, G. Lima e S. Pádua, *Quantifying entanglement in qubits created with spatially correlated twin photons*, em preparação.

### Outras publicações

- ℹ Leonardo Neves, G. Lima, J. G. A. Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra e S. Pádua, *Três passos adiante: Físicos de Minas e São Paulo aprimoram manipulação e transmissão de dados em computadores quânticos*, *Pesquisa FAPESP* **112**, 54–57 (2005).

# Referências Bibliográficas

---

- [1] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, *Physical Review* **47**, 777–780 (1935).
- [2] J. S. Bell, *On the Einstein-Podolski-Rosen paradox*, *Physics* **1**, 195–200 (1964).
- [3] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt, *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, *Physical Review Letters* **23**, 880–884 (1969).
- [4] S. J. Freedman e J. F. Clauser, *Experimental test of local hidden-variable theories*, *Physical Review Letters* **28**, 938–941 (1972).
- [5] A. Aspect, P. Grangier e G. Roger, *Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem*, *Physical Review Letters* **47**, 460–463 (1981).
- [6] Z. Y. Ou e L. Mandel, *Violation of Bell's inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment*, *Physical Review Letters* **61**, 50–53 (1988).
- [7] Y. H. Shih e C. O. Alley, *New type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion*, *Physical Review Letters* **61**, 2921–2924 (1988).
- [8] J. G. Rarity e P. R. Tapster, *Experimental violation of Bell's inequality based on phase and momentum*, *Physical Review Letters* **64**, 2495–2498 (1990).
- [9] P. R. Tapster, J. G. Rarity e P. C. M. Owens, *Violation of Bell's inequality over 4 km of optical fiber*, *Physical Review Letters* **73**, 1923–1926 (1994).
- [10] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter e A. Zeilinger, *New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs*, *Physical Review Letters* **75**, 4337–4341 (1995).
- [11] P. G. Kwiat, E. Waks, A. G. White, I. Appelbaum e P. H. Eberhard, *Ultrabright source of polarization-entangled photons*, *Physical Review A* **60**, R773–R776 (1999).
- [12] A. Vaziri, G. Weihs e A. Zeilinger, *Experimental two-photon, three-dimensional entanglement for quantum communication*, *Physical Review Letters* **89**, 240401 (2002).
- [13] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [14] A. K. Ekert, *Quantum cryptography based on Bell's theorem*, *Physical Review Letters* **67**, 661–663 (1991).

- [15] C. H. Bennett, S. J. Wiesner, *Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolski-Rosen states*, *Physical Review Letters* **69**, 2881–2884 (1992).
- [16] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. Wootters, *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, *Physical Review Letters* **70**, 1895–1899 (1993).
- [17] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, *Quantum Mechanics*, (Hermann, Paris, 1977).
- [18] N. Gisin, *Bell's inequality holds for all non-product states*, *Physics Letters A* **154**, 201–202 (1991).
- [19] A. Ekert e P. L. Knight, *Entangled quantum system and Schmidt decomposition*, *American Journal of Physics* **63**, 415–423 (1995).
- [20] Leonardo Teixeira Neves, *Estudo do emaranhamento em experimentos de interferência de Young com dois fótons*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Física, UFMG (2002).
- [21] R. F. Werner, *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model*, *Physical Review A* **40**, 4277–4281 (1989).
- [22] S. Popescu, *Bell's inequalities versus teleportation: what is nonlocality?*, *Physical Review Letters* **72**, 797–799 (1993).
- [23] L. Masanes, *All bipartite entangled states are useful for information processing*, *Physical Review Letters* **96**, 150501 (2006).
- [24] D. Bohm, *Quantum Theory*, (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1951).
- [25] B. S. Cirel'son, *Quantum generalizations of Bell's inequality*, *Letters in Mathematical Physics* **4**, 93–100 (1980).
- [26] C. H. Bennett e G. Brassard, *Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing*, *Proceedings of IEEE Conference on Computers, Systems, and Signal Processing*, p. 175 (IEEE, New York, 1984).
- [27] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin e P. L. Knight, *Quantifying entanglement*, *Physical Review Letters* **78**, 2275–2279 (1997).
- [28] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, Massachusetts, 1994).
- [29] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu e B. Schumacher, *Concentrating partial entanglement by local operations*, *Physical Review A* **53**, 2046–2052 (1996).

- [30] S. Popescu e D. Rohrlich, *Thermodynamics and the measure of entanglement*, *Physical Review A* **56**, R3319–R3321 (1997).
- [31] C. H Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin e W. K. Wootters, *Mixed-state entanglement and quantum error correction*, *Phys. Rev. A* **54**, 3824–3851 (1996).
- [32] S. Hill e W. K. Wootters, *Entanglement of a pair of quantum bits*, *Physical Review Letters* **78**, 5022–5025 (1997).
- [33] W. K. Wootters, *Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits*, *Physical Review Letters* **80**, 2245–2248 (1998).
- [34] C. H. Monken, P. H. S. Ribeiro e S. Pádua, *Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion*, *Physical Review A* **57**, 3123–3126 (1998).
- [35] J. I. Cirac e P. Zoller, *Quantum computations with cold trapped ions*, *Physical Review Letters* **74**, 4091–4094 (1995).
- [36] I. L. Chuang, N. Gershenfeld e M. Kubinec, *Experimental implementation of fast quantum searching*, *Physical Review Letters* **80**, 3408–3411 (1998).
- [37] C. Santori, D. Fattal, J. Vucković, G. S. Solomon e Y. Yamamoto, *Indistinguishable photons from a single photon device*, *Nature* **419**, 594–597 (2002).
- [38] Y. Nakamura, Y. A. Pashkin e J. S. Tsai, *Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box*, *Nature* **398**, 786–788 (1999).
- [39] A. Kuhn, M. Hennrich e G. Rempe, *Deterministic single-photon source for distributed quantum networking* *Physical Review Letters* **89**, 067901 (2002).
- [40] D. C. Burnham e D. L. Weinberg, *Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs* *Physical Review Letters* **25**, 84–87 (1970).
- [41] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, H. Weinfurter e A. Zeilinger, *Experimental quantum teleportation*, *Nature* **390**, 575–579 (1997).
- [42] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy e S. Popescu, *Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, *Physical Review Letters* **80**, 1121–1125 (1998).
- [43] K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat e A. Zeilinger, *Dense coding in experimental quantum communication*, *Physical Review Letters* **76**, 4656–4659 (1998).

- [44] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel e H. Zbinden, *Quantum cryptography*, *Reviews of Modern Physics* **74**, 145–195 (1988).
- [45] T. B. Pittman, B. C. Jacobs, and J. D. Franson, *Demonstration of nondeterministic quantum logic operations using linear optical elements*, *Physical Review Letters* **88**, 257902 (2002).
- [46] L. Mandel e E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [47] C. K. Hong, Z. Y. Ou e L. Mandel, *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference*, *Physical Review Letters* **59**, 2044–2046 (1987).
- [48] T. B. Pittman, D. V. Strekalov, A. Migdall, M. H. Rubin, A. V. Sergienko e Y. Shih, *Can two-photon interference be considered the interference of two photons?*, *Physical Review Letters* **77**, 1917–1920 (1996).
- [49] D. V. Strekalov, T. B. Pittman e Y. Shih, *What we can learn about single photons in a two-photon interference experiment*, *Physical Review A* **57**, 567–570 (1998).
- [50] D. V. Strekalov, Y.-H. Kim e Y. Shih, *Experimental study of a subsystem in an entangled two-photon state*, *Physical Review A* **60**, 2685–2688 (1999).
- [51] J. D. Franson, *Bell inequality for position and time*, *Physical Review Letters* **62**, 2205–2208 (1989).
- [52] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs e A. Zeilinger, *Entanglement of the orbital angular momentum states of photons*, *Nature* **412**, 313–316 (2001).
- [53] P. G. Kwiat, *Hyper-entangled states*, *Journal of Modern Optics* **44**, 2173–2184 (1997).
- [54] S. P. Walborn, S. Pádua e C. H. Monken, *Hyperentanglement-assisted Bell-state analysis*, *Physical Review A* **68**, 042313 (2003).
- [55] J. T. Barreiro, N. K. Langford, N. A. Peters e P. G. Kwiat, *Generation of hyper-entangled photon pairs*, *Physical Review Letters* **95**, 260501 (2005).
- [56] M. Barbieri, C. Cinelli, P. Mataloni e F. De Martini, *Polarization-momentum hyper-entangled states: Realization and characterization*, *Physical Review Letters* **72**, 052110 (2005).
- [57] S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, F. Mintert e A. Buchleitner, *Experimental determination of entanglement with a single measurement*, *Nature* **440**, 1022–1024 (2006).

- [58] Y. R. Shen, *Principles of Nonlinear Optics*, (Wiley-Interscience, New York, 1984).
- [59] D. N. Klyshko, *Transverse photon bunching and two-photon processes in the field of parametrically scattered light*, *Zh. Ekso. Teor. Fiz.* **83**, 1313 (1982) [*Sov. Phys. JETP* **56**, 753–759 (1982)].
- [60] T. P. Grayson e G. A. Barbosa, *Spatial properties of spontaneous parametric down-conversion and their effect on induced coherence without induced emission*, *Physical Review A* **49**, 2948–2961 (1994).
- [61] M. H. Rubin, *Transverse correlation in optical spontaneous parametric down-conversion*, *Physical Review A* **54**, 5349–5360 (1996).
- [62] B. E. A. Saleh, A. F. Abouraddy, A. V. Sergienko e M. C. Teich, *Duality between partial coherence and partial entanglement*, *Physical Review A* **62**, 043816 (2000).
- [63] A. F. Abouraddy, B. E. A. Saleh, A. V. Sergienko e M. C. Teich, *Role of entanglement in two-photon imaging*, *Physical Review Letters* **87**, 123602 (2001).
- [64] C. K. Law e J. H. Eberly, *Analysis and interpretation of high transverse entanglement in optical parametric down-conversion*, *Physical Review Letters* **92**, 127903 (2004).
- [65] P. H. S. Ribeiro, C. H. Monken e G. A. Barbosa, *Measurement of coherence area in parametric downconversion luminescence*, *Applied Optics* **33**, 352–355 (1994).
- [66] D. V. Strekalov, A. V. Sergienko, D. N. Klyshko e Y. Shih, *Observation of two-photon “ghost” interference and diffraction*, *Physical Review Letters* **74**, 3600–3603 (1995).
- [67] T. B. Pittman, D. V. Strekalov, D. N. Klyshko, M. H. Rubin, A. V. Sergienko e Y. H. Shih, *Two-photon geometric optics*, *Physical Review A* **53**, 2804–2815 (1996).
- [68] E. J. S. Fonseca, G. A. Barbosa, C. H. Monken e S. Pádua, *Transverse coherence length of down-converted light in the two-photon state*, *Physical Review A* **59**, 1608–1614 (1999).
- [69] C. H. Monken, *Transferência do espectro angular e correlações transversais na conversão paramétrica descendente*, *Notas de aula do curso de Óptica*, Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais (2002).
- [70] E. J. S. Fonseca, C. H. Monken e S. Pádua, *Measurement of the de Broglie wavelength of a multiphoton wave packet*, *Physical Review Letters* **82**, 2868–2871 (1999).
- [71] E. J. S. Fonseca, Z. Paulini, P. Nussensweig, C. H. Monken e S. Pádua, *Nonlocal de Broglie wavelength of a two-photon system*, *Physical Review A* **56**, 191–196 (2001).

- [72] E. J. S. Fonseca, J. C. M. da Silva, C. H. Monken e S. Pádua, *Controlling two-particle conditional interference*, *Physical Review A* **61**, 023801 (2000).
- [73] W. A. T. Nogueira, S. P. Walborn, S. Pádua e C. H. Monken, *Experimental observation of spatial antibunching of photons*, *Physical Review Letters* **86**, 4009–4012 (2001).
- [74] W. A. T. Nogueira, S. P. Walborn, S. Pádua e C. H. Monken, *Spatial antibunching of photons with parametric down-conversion*, *Physical Review A* **66**, 053810 (2002).
- [75] I. F. Santos, M. A. Sagiore, C. H. Monken e S. Pádua, *Resolution and apodization in images generated by twin photons*, *Physical Review A* **67**, 033812 (2003).
- [76] I. F. Santos, L. Neves, G. Lima, C. H. Monken e S. Pádua, *Generation and detection of magnified images via illumination by entangled photon pairs*, *Physical Review A* **72**, 033802 (2005).
- [77] D. P. Caetano e P. H. Souto Ribeiro, *Image formation by manipulation of the entangled angular spectrum*, *Optics Communications* **239**, 121–127 (2004).
- [78] S. P. Walborn, M. O. Terra Cunha, S. Pádua e C. H. Monken, *Double slit quantum eraser*, *Physical Review A* **65**, 033818 (2002).
- [79] S. P. Walborn, W. A. T. Nogueira, S. Pádua e C. H. Monken, *Optical Bell-state analysis in the coincidence basis*, *Europhysics Letters* **62**, 161–167 (2003).
- [80] S. P. Walborn, A. N. de Oliveira, S. Pádua e C. H. Monken, *Multimode Hong-Ou-Mandel interference*, *Physical Review Letters* **90**, 143601 (2003).
- [81] W. A. T. Nogueira, S. P. Walborn, S. Pádua e C. H. Monken, *Generation of a two-photon singlet beam*, *Physical Review Letters* **92**, 043602 (2004).
- [82] J. C. Howell, R. S. Bennink, S. J. Bentley e R. W. Boyd, *Realization of Einstein-Podolski-Rosen Paradox using momentum- and position-entangled photons from spontaneous parametric down conversion*, *Physical Review Letters* **92**, 210403 (2004).
- [83] L. Neves, S. Pádua e C. Saavedra, *Controlled generation of maximally entangled qudits using twin photons*, *Physical Review A* **69**, 042305 (2004).
- [84] L. Neves, G. Lima, J. G. A. Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra e S. Pádua, *Generation of entangled states of qudits using twin photons*, *Physical Review Letters* **94**, 100501 (2005).

- [85] M. N. O'Sullivan-Hale, I. A. Khan, R. W. Boyd e J. C. Howell, *Pixel entanglement: Experimental realization of optically entangled  $d = 3$  and  $d = 6$  qudits*, *Physical Review Letters* **94**, 220501 (2005).
- [86] G. Lima, Leonardo Neves, Ivan F. Santos, J. G. Aguirre Gómez, C. Saavedra e S. Pádua, *Propagation of spatially entangled qudits through free space*, *Physical Review A* **73**, 032340 (2006).
- [87] M. P. Almeida, S. P. Walborn e P. H. Souto Ribeiro, *Experimental investigation of quantum key distribution with position and momentum of photon pairs*, *Physical Review A* **72**, 022313 (2005).
- [88] S. P. Walborn, A. N. de Oliveira, R. S. Thebaldi e C. H. Monken, *Entanglement and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion*, *Physical Review A* **69**, 023811 (2004).
- [89] S. P. Walborn, S. Pádua e C. H. Monken, *Conservation and entanglement of Hermite-Gaussian modes in parametric down-conversion*, *Physical Review A* **71**, 053812 (2005).
- [90] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, (McGraw-Hill, Inc., New York, NY, 1996).
- [91] N. Gisin e A. Peres, *Maximal violations of Bell's inequality for arbitrarily large spin*, *Physics Letters A* **162**, 15–17 (1992).
- [92] D. Kaszlikowski, P. Gnaniński, M. Żukowski, W. Miklaszewski e A. Zeilinger, *Violations of local realism by two entangled  $N$ -dimensional systems are stronger than for two qubits*, *Physical Review Letters* **85**, 4418–4421 (2000).
- [93] T. Durt, D. Kaszlikowski e M. Żukowski, *Violations of local realism with quantum systems described by  $N$ -dimensional Hilbert spaces up to  $N = 16$* , *Physical Review A* **64**, 024101 (2001).
- [94] D. Collins e S. Popescu, *Violations of local realism by two entangled quNits*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **34**, 6831–6835 (2001).
- [95] A. Acín, T. Durt, N. Gisin e J. I. Latorre, *Quantum nonlocality in two three-level systems*, *Physical Review A* **65**, 052325 (2002).
- [96] D. Collins, N. Gisin, N. Linden, S. Massar e S. Popescu, *Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems*, *Physical Review Letters* **88**, 040404 (2002).
- [97] P. H. Eberhard, *Background level and counter efficiencies required for a loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experiment*, *Physical Review A* **47**, R747–R750 (1993).



- [98] S. Massar, *Nonlocality, closing the detection loophole, and communication complexity*, *Physical Review A* **65**, 032121 (2002).
- [99] H. B.-Pasquinucci e W. Tittel, *Quantum Cryptography using larger alphabets*, *Physical Review A* **61**, 062308 (2000).
- [100] T. Durt, N. J. Cerf, N. Gisin e M. Żukowski, *Security of quantum key distribution with entangled qutrits*, *Physical Review A* **67**, 012311 (2003).
- [101] T. Durt, D. Kaszlikowski, J.-L. Chen e L. C. Kwek, *Security of quantum key distributions with entangled qudits*, *Physical Review A* **69**, 032313 (2004).
- [102] M. Fitzi, N. Gisin e U. Maurer, *Quantum solution to the Byzantine agreement problem*, *Physical Review Letters* **87**, 217901 (2001).
- [103] A. Ambainis, *A new protocol and lower bounds for quantum coin flipping*, *quant-ph/0204022* **87**, 217901 (2001).
- [104] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw e J. P. Woerdman, *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes*, *Physical Review A* **45**, 8185–8189 (1992).
- [105] A. Vaziri, J.-W. Pan, T. Jennewein, G. Weihs e A. Zeilinger, *Concentration of higher dimensional entanglement: Qutrits of photon orbital angular momentum*, *Physical Review Letters* **91**, 227902 (2003).
- [106] X.-F. Ren, G.-P. Guo, Bo Yu, J. Li e G.-C. Guo, *The orbital angular momentum of down-converted photons*, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **6**, 243–247 (2004).
- [107] J. Brendel, N. Gisin, W. Tittel e H. Zbinden, *Pulsed energy-time entangled twin photon source for quantum communication*, *Physical Review Letters* **82**, 2594–2597 (1999).
- [108] R. Thew, A. Acín, H. Zbinden e N. Gisin, *Experimental realization of entangled qutrits for quantum communication*, *Quantum Information and Computation* **4**, 93–101 (2004).
- [109] R. Thew, A. Acín, H. Zbinden e N. Gisin, *Bell-Type Test of Energy-Time Entangled Qutrits*, *Physical Review Letters* **93**, 010503 (2004).
- [110] H. de Riedmatten, I. Marcikic, H. Zbinden e N. Gisin, *Creating high dimensional entanglement using mode-locked lasers*, *Quantum Information and Computation* **2**, 425–433 (2002).

- [111] H. de Riedmatten, I. Marcikic, H. Zbinden e N. Gisin, *Tailoring photonic entanglement in high-dimensional Hilbert spaces*, *Physical Review A* **69**, 050304(R) (2004).
- [112] A. L.-Linares, J. C. Howell e D. Bouwmeester, *Stimulated emission of polarization-entangled photons*, *Nature* **412**, 887–890 (2001).
- [113] J. C. Howell, A. L.-Linares e D. Bouwmeester, *Experimental violation of a spin-1 Bell inequality using maximally entangled four-photon states*, *Physical Review Letters* **88**, 030401 (2002).
- [114] M. Żukowski, A. Zeilinger e M. A. Horne, *Realizable higher-dimensional two-particle entanglements via multipoint beam splitters*, *Physical Review A* **55**, 2564–2579 (1997).
- [115] Leonardo Neves, G. Lima, J. G. A. Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra e S. Pádua, *Two-photon high-dimensional spatial entanglement: theory and experiment*, *Modern Physics Letters B* **20**, 1–23 (2006).
- [116] C. K. Law, I. A. Walmsley e J. H. Eberly, *Continuous frequency entanglement: effective finite Hilbert space and entropy control*, *Physical Review Letters* **84**, 5304–5307 (2000).
- [117] S. Parker, S. Bose e M. B. Plenio, *Entanglement quantification and purification in continuous-variable systems*, *Physical Review A* **61**, 032305 (2000).
- [118] M. Reck, A. Zeilinger, H. J. Bernstein e P. Bertani, *Experimental realization of any discrete unitary operator*, *Physical Review Letters* **73**, 58–61 (1994).
- [119] Gustavo de Aquino Moreira Lima, *Geração de estados emaranhados de qudits espaciais e análises experimentais visando sua utilização prática*, Tese de Doutorado, Departamento de Física, UFMG (2006).
- [120] G. Lima, F. Torres, Leonardo Neves, A. Delgado, C. Saavedra e S. Pádua, *Optimal state determination for composite systems of two spatial qubits*, submetido à *Physical Review A*.
- [121] R. S. Bennink, S. J. Bentley e R. W. Boyd, *“Two-photon” coincidence imaging with a classical source*, *Physical Review Letters* **89**, 113601 (2002).
- [122] M. A. Horne, A. Shimony e A. Zeilinger, *Two-particle interferometry*, *Physical Review Letters* **62**, 2209–2212 (1989).
- [123] D. M. Greenberger, M. A. Horne e A. Zeilinger, *Multipartite interferometry and the superposition principle*, *Physics Today* **46**, 22–29 (1993).

- [124] W. Tittel, J. Brendel, B. Gisin, T. Herzog, H. Zbinden e N. Gisin, *Experimental demonstration of quantum correlations over more than 10 km*, *Physical Review A* **57**, 3229–3232 (1998).
- [125] M. Aspelmeyer, H. R. Böhm, T. Gyatso, T. Jennewein, R. Kaltenbaek, M. Lindenthal, G. M.-Terriza, A. Poppe, K. Resch, M. Taraba, R. Ursin, P. Walther e A. Zeilinger, *Long-distance free-space distribution of quantum entanglement*, *Science* **301**, 621–623 (2003).
- [126] C.-Zhi Peng, T. Yang, X.-Hui Bao, J.-Zhang, X.-Min Jin, F.-Yong Feng, B. Yang, J. Yang, J. Yin, Q. Zhang, N. Li, B.-Li Tian e J.-Wei Pan, *Experimental free-space distribution of entangled photon pairs over 13 km: towards satellite-based global quantum communication*, *Physical Review Letters* **94**, 150501 (2005).
- [127] M. Aspelmeyer, T. Jennewein, M. Pfennigbauer, W. R. Leeb e A. Zeilinger, *Long-distance quantum communication with entangled photons using satellites*, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* **9**, 1541–1551 (2003).
- [128] A. F. Abouraddy, B. E. A. Saleh, A. V. Sergienko e M. C. Teich, *Degree of entanglement for two qubits*, *Physical Review A* **64**, 050101R (2001).
- [129] A. Peres, *Separability criterion for density matrices*, *Physical Review Letters* **77**, 1413–1415 (1996).
- [130] M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki, *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions*, *Physics Letters A* **223**, 1–8 (1996).
- [131] K. Vögel e H. Rinsken, *Determination of quasiprobability distribution in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase*, *Physical Review A* **40**, 2847–2849 (1989).
- [132] U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [133] D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro e A. G. White, *Measurement of qubits*, *Physical Review A* **64**, 052312 (2001).
- [134] J. M. G. Sancho e S. F. Huelga, *Measuring the entanglement of bipartite pure states*, *Physical Review A* **61**, 042303 (2000).
- [135] A. Acin, R. Tarrach e G. Vidal, *Optimal estimation of two-qubit pure-state entanglement*, *Physical Review A* **61**, 062307 (2000).
- [136] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, (Clarendon Press, Oxford, 1947).