

**Aplicações da Regularização Implícita em
teorias de calibre não-abelianas e em
supergravidade**

José Eloy Ottoni

Setembro de 2007

Aplicações da Regularização Implícita em teorias de calibre não-abelianas e em supergravidade

José Eloy Ottoni

Co-orientador: Prof. Dr. Antônio Paulo Baêta Scarpelli

Orientador: Prof. Dr. Marcos Donizeti Sampaio

Projeto de Tese apresentado à
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
DOUTOR EM CIÊNCIAS.

Setembro de 2007

If the doors of perception were cleansed everything would appear as it is,
infinite.

William Blake, *The Marriage of Heaven and Hell*

Agradecimentos

Agradeço ao Tonhão, ao Marcos e à Maria Carolina (e, claro, dona Eglè) pela infinita paciência e amizade. E ao professor Helayel por sua valiosa colaboração.

À Shirley pela constante gentileza e amizade e à Marluce por suportar minhas intransigências.

À minha família, pais, irmãos e avós. Aos meus amigos, dessa vez, em especial, carinhosamente, à Suse e ao Miguel.

Ao meu amado filho - Rafael.

A todos que me levantaram quando não tinha mais forças - que todos sejam felizes, ditosos, e estejam em paz.

A todos os amigos que percorrem a *Senda do Fio da Navalha*, desejo-lhes muita luz. Ao Manoel e à Edmaire, luminares em tempos de trevas.

E à Amanda pela mais corajosa dedicação que já tive a sorte de receber na vida.

Sumário

RESUMO	v
ABSTRACT	vi
1 Introdução	1
1.1 Fundamentos da Regularização Implícita	1
1.2 A Técnica	2
2 Renormalização da QCD	7
2.1 Cômputo dos diagramas	9
2.1.1 $\Pi_{\mu\nu}^{ab}$: A auto-energia do glúon	10
2.1.2 $\Sigma(p)$: A auto-energia do quark	13
2.1.3 $\Sigma_{ghost}^{ab}(p^2)$	14
2.1.4 Λ_{μ}^a : Vértice <i>quark-gluon</i>	15
2.1.5 Λ_{μ}^{abc} e $\Lambda_{\mu\nu\lambda}^{abc}$	17
2.1.6 $\Lambda_{\mu\nu\alpha\beta}^{abcd}$: Vértices de quatro glúons	19
2.2 Identidades de Slavnov-Taylor e Funções do Grupo de Renormalização	20
3 Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g - 2)_l$ em supergravidade	22
3.1 O momento magnético do elétron	23
3.1.1 O momento magnético anômalo do elétron	26
3.2 O cálculo do fator $(g - 2)_l$ em super-QED local	30
3.2.1 Diagrama 1	33
3.2.2 Diagramas 2 e 3	39
3.2.3 Diagramas 4 e 5	41
3.2.4 Diagrama 6	48

3.2.5	Diagramas 7 e 8	51
3.2.6	Diagramas 9 e 10	53
3.2.7	Conclusão	58
4	Conclusões	62
A	Identidade 1.9	64
B	Finitude no Infravermelho das Amplitudes a um <i>Loop</i>	66
C	As integrais $I, I_\mu, I_{\mu\nu}, J, J_\mu, J_{\mu\nu}, Z_n, \eta_{nm}, F$	70
C.1	Definições	70
C.2	Resultados gerais e específicos das integrais	73
C.2.1	Caso geral: Dois momenta e duas massas diferentes	73
C.2.2	<i>On shell</i> , uma massa nula	77
C.2.3	<i>On shell</i> , massas iguais	78
C.2.4	Funções η	81
C.2.5	Funções Z_n	85
D	Regras de Feynman	88
D.1	QCD	88
D.2	Sugra	90
E	Álgebra das matrizes Gama	92

Lista de Figuras

2.1	Diagramas da QCD a um loop	9
2.2	Auto-energia do glúon	10
2.3	Auto-energia do quark	13
2.4	Correção para o propagador fantasma	14
2.5	Vértice <i>quark-gluon</i>	15
2.6	<i>loop ghost-ghost</i> -glúon	17
2.7	<i>ghost</i> -glúon-glúon	17
2.8	Vértices de quatro glúons	19
3.1	Diagramas em super-QED do momento magnético anômalo	31
3.2	Diagrama 1	33
3.3	Diagramas 2 e 3	39
3.4	Diagramas 4 e 5	41
3.5	Diagrama 6	48
3.6	Diagramas 7 e 8	51
3.7	Diagramas 9 e 10	53

Lista de Tabelas

- 3.1 Contribuições dos diagramas a $\left(\frac{g-2}{2}\right)_l$ em unidades de $\frac{G_N m^2}{\pi}$, na IR e em diferentes outras técnicas de regularização/renormalização . . . 61

Resumo

Aplicamos a Técnica de Regularização Implícita (RI) a uma teoria de calibre não-abeliana e a uma teoria supersimétrica. Na primeira parte mostramos que a IR preserva a simetria de calibre afirmada nas relações entre as constantes de renormalização requeridas pelas identidades de Slavnov-Taylor em ordem de um *loop* na QCD. Mostramos também que a técnica trata as divergências em teorias quânticas de campo massivas e não-massivas em pé de igualdade. Na segunda parte, mostramos que a IR preserva também a supersimetria no cálculo do momento magnético anômalo do elétron na QED local supersimétrica (supergravidade não-quebrada) em ordem um *loop*.

Abstract

We apply the Implicit Regularization Technique (IR) in a non-abelian gauge theory as well as in a local supersymmetric theory. In the first part we show that IR preserves gauge symmetry as encoded in relations between the renormalization constants required by the Slavnov-Taylor identities at the one loop level of QCD. Moreover, we show that the technique handles divergences in massive and massless QFT on equal footing. In the second part, we show that IR preserves also supersymmetry on a specific calculation: the anomalous magnetic moment of the electron in local supersymmetric QED (unbroken supergravity), at one loop level.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Fundamentos da Regularização Implícita

A Regularização Dimensional (Dimensional Regularization, DR) é a maneira tradicional mais natural de efetuarmos cálculos de diagramas de Feynman em teorias de calibre. Entretanto, o problema da regularização de teorias quânticas de campos com a dimensão do espaço-tempo específicas, tais como as teorias quirais, as topológicas e as supersimétricas, é mais delicado no contexto da DR. Isso porque a continuação analítica do tensor de Levi-Civita não é bem definida, enquanto a supersimetria é definida intrinsecamente na dimensão física do modelo.

Em vista disso, algumas extensões da DR foram construídas (e.g. Dimensional Reduction [1] e [2]), mas essas extensões são, em geral, inconsistentes a ordens de *loops* arbitrárias, e podem dar origem às chamadas anomalias espúrias. Logo, um cálculo prudente, ordem a ordem, no qual as simetrias do modelo são asseguradas por equações de vínculo precisa ser preparado. As desvantagens são claras: além de tornar o processo de cálculo trabalhoso e tedioso, não podemos contar com este procedimento para estudarmos quebras anômalas de simetria (vindas de correções quânticas). Isso é particularmente relevante nas extensões supersimétricas do modelo padrão [3], (cap. 3).

Isso motiva uma procura por esquemas de regularização/renormalização não-dimensionais, que, além de preservarem as simetrias fundamentais do modelo em vista, sejam simples do ponto de vista calculacional.

A Regularização Implícita (IR) é uma técnica na qual os cálculos de diagramas de Feynman são efetuados no espaço dos momentos de forma independente do esquema de regularização. A Lagrangeana da teoria quântica de campo em questão não é modificada - nem um regulador explícito é introduzido, nem a dimensionalidade do espaço-tempo é alterada de sua dimensão física.

A Regularização Implícita tem sido aplicada com sucesso em uma variedade de modelos em teoria quântica de campos, incluindo aqueles que só fazem sentido na dimensão física.

1.2 A Técnica

A idéia principal da IR é bem simples. O comportamento no ultravioleta da amplitude é isolado como integrais de *loop* irreduzíveis (*irreducible loop integrals*, ILI's), as quais são independentes do momento externo e não precisam ser calculadas explicitamente para exibir o conteúdo físico dessa amplitude. Isso pode ser feito usando criteriosamente a identidade algébrica abaixo no integrando, de maneira a eliminar os momentos externos k_i da ILI, N sendo escolhido de tal forma que o último termo seja finito sob integração em k :

$$\frac{1}{[(k + k_i)^2 - m^2]} = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^j}{(k^2 - m^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (k_i^2 + 2k_i \cdot k)^{N+1}}{(k^2 - m^2)^{N+1} [(k + k_i)^2 - m^2]}, \quad (1.1)$$

A rigor, pode-se assumir que uma técnica qualquer de regularização (por exemplo *cut-off*) atua implicitamente na amplitude, de maneira que pode-se manipular o integrando com (1.1). No entanto, uma vez separadas as divergências como integrais de *loops* irreduzíveis da parte finita da amplitude, *não* é necessário computar as integrais divergentes em IR. Elas podem ser subtraídas e absorvidas nos contra-termos exatamente como são. A computação explícita de tais ILI's é a origem de quebras de simetrias que podem contaminar a física do modelo subjacente. Em [4] é definido o que se quer dizer com um esquema de subtração mínima no contexto da IR e comparado com a regularização dimensional e renormalização diferencial.

Nesse processo, uma escala natural do grupo de renormalização emerge, como deveria. A generalização desse programa para ordens mais altas de *loops* é direta: as divergências sobrepostas (*overlapped*) podem ser tratadas de modo similar seguindo uma prescrição bem definida que corresponde à fórmula da floresta do BPHZ [5].

Ao nível um *loop* no espaço-tempo de Minkowski quadridimensional as ILI's são da forma

$$\Theta_{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m}^{(\infty)}(\mu^2) = \int_k \frac{1, k_{\alpha_1}, k_{\alpha_2} \dots k_{\alpha_m}}{(k^2 - \mu^2)^n} \quad (1.2)$$

onde $\int_k \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$, k é o momento interno, μ é um regulador infravermelho e $n = 1, 2, \dots$

Típicas ILI's de ordens mais altas (divergências logarítmicas), em 4 dimensões:

$$\Theta_{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m}^n \equiv \int_k \frac{1, k_{\alpha_1}, k_{\alpha_2} \dots k_{\alpha_m}}{(k^2 - \mu^2)^p} \ln^n \left(\frac{-\lambda^2}{k^2 - \mu^2} \right), \quad (1.3)$$

onde $4 + m = 2p$ e λ é uma escala de massa não-nula originada na ordem anterior [6].

Deve-se observar o seguinte:

- Para modelos não-massivos sempre podemos introduzir uma massa fictícia para regular os propagadores no limite infravermelho sem ter que sacrificar nem a simetria de calibre [4] nem a supersimetria [6]. Verificaremos isso explicitamente no contexto da QCD na primeira parte (capítulo 2) e no contexto da super-QED na segunda parte (capítulo 3).
- Contratermos arbitrários locais aparecerão em IR como diferenças entre ILI's do mesmo grau de divergência. Dado que não calculamos explicitamente as integrais divergentes, tais diferenças (finitas) terão o *status* de parâmetros livres que devem ser ajustados por vínculos de simetria ou fenomenológicos. Regularizações explícitas geralmente determinarão os valores (dependentes do esquema de regularização) de tais diferenças, o que pode levar a quebras de simetrias.

Em 3 + 1 dimensões, ao nível um *loop*, esses parâmetros arbitrários são:

$$\Upsilon_{\mu\nu}^2 \equiv g_{\mu\nu} I_{quad}(m^2) - 2\Theta_{\mu\nu}^{(2)} = \alpha_1 g_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

$$\Upsilon_{\mu\nu}^0 \equiv g_{\mu\nu} I_{log}(m^2) - 4\Theta_{\mu\nu}^{(0)} = \alpha_2 g_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

$$\Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^2 \equiv g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}} I_{quad}(m^2) - 8\Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(2)} = \alpha_3 g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}}, \quad (1.6)$$

$$\Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^0 \equiv g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}} I_{log}(m^2) - 24\Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)} = \alpha_4 g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}} \quad (1.7)$$

onde

$$\begin{aligned} I_{log}(m^2) &= \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}, \\ I_{quad}(m^2) &= \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)}, \\ \Theta_{\mu\nu}^{(0)}(m^2) &= \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3}, \\ \Theta_{\mu\nu}^{(2)}(m^2) &= \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2}, \\ \Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)}(m^2) &= \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4}, \\ \Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(2)}(m^2) &= \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Lembrando que $g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}}$ significa $g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}$, e os α_i 's são arbitrários, finitos e dependentes do esquema de regularização. Relações similares aparecem em ordens de *loops* mais altas.

É fácil ver que na Regularização Dimensional (1.4)-(1.7) vão a zero. Em [7] é demonstrado que a simetria de calibre vetorial é compatível com a idéia de fixar todos os α_i 's em zero. Entretanto foi mostrado que essa não é a única solução. Tais características explicam de alguma maneira por que a Regularização Dimensional é invariante de calibre.

Conquanto fixar os α_i 's em zero desde o começo é mais prático do ponto de vista computacional, deve-se ter cuidado quando estamos tratando de objetos

de dimensão específica tais como vértices axiais e tensores de Levi-Civita - tais parâmetros arbitrários devem ser fixados, em última análise, pela *física*. Em [7] foi demonstrado que (1.4)-(1.7) são conectados pela invariância do rótulo do momento em um diagrama de Feynman. Se os α_i 's anulam, então a amplitude é invariante pelo rótulo do momento.

Em outras palavras, vemos que, dado que essas diferenças devem ser anuladas (α_i 's = 0), então a amplitude é invariante pelos rótulos dos momentos e invariante de calibre (calibre abeliano) (no entanto se se assume que eles apresentem valores não-nulos não significa isso necessariamente que a invariância de calibre é quebrada). Quando uma forma explícita do regulador é usada, essas diferenças têm um valor determinado (dependente de regularização). Em geral devemos manter qualquer arbitrariedade que aparecer na teoria de perturbação até o estágio final dos cálculos, para que as condições físicas possam fixar esses valores. Nesse sentido, a IR é perfeitamente adequada para implementar essa idéia, especialmente quando quebras de simetrias quânticas podem ocorrer.

Em [4] foi verificado que restringir os α_i 's em zero assegura a transversalidade do tensor de polarização do vácuo da QCD. O próximo passo então, de maneira a se estabelecer a generalidade da IR é estender essas idéias a teorias de calibre não-abelianas, como a QCD.

Portanto, no capítulo seguinte, nos concentraremos em três objetivos:

1) Verificar se uma versão vinculada da IR (constrained version of IR, CIR) pode ser generalizada para uma teoria de calibre não-abeliana (QCD) e mostrar que a simetria de calibre é preservada, como expressado pelas identidades de Slavnov-Taylor entre as constantes de renormalização e calcular todas as constantes do grupo de renormalização, em ordem de um *loop*.

2) Definir a escala do grupo de renormalização da seguinte maneira: - Assim como no caso do propagador do fóton, introduzimos uma massa fictícia (μ) para o glúon que deverá aparecer tanto na parte finita quanto na divergente (logaritmica-

mente) da amplitude. Para a parte divergente deve-se ter como ILI

$$I_{log}(\mu^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2}.$$

Eliminamos o regulador de massa infravermelho da definição do contratermo usando a identidade (ver o apêndice A):

$$I_{log}(\mu^2) = I_{log}(\lambda^2) + b \ln \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} \right) \quad (1.9)$$

Em que $b \equiv i/(4\pi)^2$ e λ é um parâmetro não-nulo que parametriza a arbitrariedade na separação da parte divergente do conteúdo finito da amplitude e faz o papel de uma escala de renormalização na IR. Como conseqüência, percebemos o que significa um esquema de subtração mínima independente de massa (*minimal subtraction scheme*) em IR, ou seja, subtrair $I_{log}(\lambda^2)$. O termo divergente infravermelho expressado por $\ln \mu^2$ deverá cancelar exatamente a dependência no cutoff infravermelho na parte *finita* da amplitude, como deveria, para todas as teorias livres no infravermelho.

3) Observar que ao contrário da Regularização Dimensional, os diagramas tipo “*tadpole*” dos campos de Yang-Mills têm papel crucial na manifestação da invariância de calibre através do cancelamento de divergências quadráticas que aparecem a ordem um *loop*.

Capítulo 2

Renormalização da QCD

Procederemos com o estudo da QCD a um loop na Regularização Implícita. Sabemos que a Lagrangeana da QCD é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \frac{1}{4}(F_{0\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_{0\mu}^a)^2 \\ &+ \bar{\psi}_0^i(i\gamma_\mu D_\mu^{ij} - m_0\delta^{ij})\psi_0^j +\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$+ i(\partial^\mu \bar{c}_0^a)D_\mu^{ab}c_0^b\tag{2.2}$$

onde D_μ^{ab} e D_μ^{ij} se referem à representação fundamental e adjunta do grupo de cor $SU(3)$. Também

$$F_{0\mu\nu}^a = \partial_\mu A_{0\nu}^a - \partial_\nu A_{0\mu}^a + g_0 f^{abc} A_{0\mu}^b A_{0\nu}^c,$$

$$D_\mu = (\partial_\mu - ig_{01} A_{0\mu}^a t_r^a),$$

α é o parâmetro que fixa o calibre e $A_{0\mu}$ são os campos de calibre acoplados aos n_f férmions de Dirac ψ_0 e aos campos fantasmas c_0 . O índice “0” é reservado às quantidades “nuas”. Os fatores de grupo da teoria que aparecerem nas amplitudes são definidos através das relações $tr(t_r^a t_r^b) = C(r)\delta^{ab}$, $t_r^a t_r^a = C_2(r)\hat{\mathbf{1}}$, $f^{acd} f^{bcd} = C_2(G)\delta^{ab}$. Porque os termos de interação na Lagrangeana acima estão relacionados pela simetria BRS, apenas uma constante de acoplamento é independente à esquerda. Conseqüentemente, as constantes de renormalização serão vinculadas pelas identidades de Ward-Takahashi generalizadas (identidades de Slavnov-Taylor).

Definimos os campos e as constantes de acoplamento renormalizados através

das constantes de renormalização, como segue

$$\begin{aligned} A_{0\mu}^a &= Z_3^{1/2} A_\mu^a, \quad c_0^a = \tilde{Z}_3^{1/2} c^a, \quad \psi_0 = Z_2^{1/2} \psi, \\ g_0 &= Z_g g, \quad m_0 = Z_m m. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Portanto, definimos $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{ct}$, onde \mathcal{L} tem a mesma forma de \mathcal{L}_0 , exceto pelo fato de ser escrita em termos das variáveis renormalizadas, enquanto \mathcal{L}_{ct} é a Lagrangeana dos contratermos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ct} &= (Z_3 - 1) \frac{1}{2} A_a^\mu \delta^{ab} (g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A_b^\nu + \\ &+ (\tilde{Z}_3 - 1) \bar{c}^a \delta_{ab} (-i \partial^2) c^b \\ &+ (Z_2 - 1) \bar{\psi}^i (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi^i \\ &- (Z_2 Z_m - 1) m \bar{\psi}^i \psi^i \\ &- (Z_1 - 1) \frac{1}{2} g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A_b^\mu A_c^\nu \\ &- (Z_4 - 1) \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{cde} A_\mu^a A_\nu^b A_c^\mu A_d^\nu \\ &- (\tilde{Z}_1 - 1) i g f^{abc} (\partial^\mu \bar{c}^a) c^b A_\mu^c \\ &+ (Z_{1F} - 1) g \bar{\psi}^i t_{ij}^a \gamma^\mu \psi^j A_\mu^a, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Onde definimos

$$Z_1 \equiv Z_g Z_3^{3/2}, \quad Z_4 \equiv Z_g^2 Z_3^2,$$

$$\tilde{Z}_1 \equiv Z_g \tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}, \quad Z_{1F} \equiv Z_g Z_2 Z_3^{1/2}.$$

A igualdade de Z_g para todos os acoplamentos leva às identidades de Slavnov-Taylor:

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_1}. \quad (2.5)$$

2.1 Cômputo dos diagramas

As regras de Feynman para a QCD podem ser encontradas em qualquer livro texto (e estão reunidas no apêndice D). Seguimos T. Muta [8] e trabalhamos no calibre de Feynman, no qual $\alpha = 1$. Em ordem de um *loop*, as amplitudes relevantes são representadas pelos bem conhecidos diagramas que podemos chamar de:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}^{ab} &\rightarrow \text{auto-energia do glúon} \\
 \Sigma &\rightarrow \text{auto-energia do quark} \\
 \Sigma_{ghost}^{ab} &\rightarrow \text{auto-energia do } ghost \\
 \Lambda_{\mu}^a &\rightarrow \text{vértice quark-glúon} \\
 \Lambda_{\mu\nu\lambda}^{abc} &\rightarrow \text{vértice de 3 glúons} \\
 \Lambda_{\mu}^{abc} &\rightarrow \text{vértice } ghost\text{-glúon} \\
 \Lambda_{\mu\nu\alpha\beta}^{abcd} &\rightarrow \text{vértice de 4 glúons.}
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

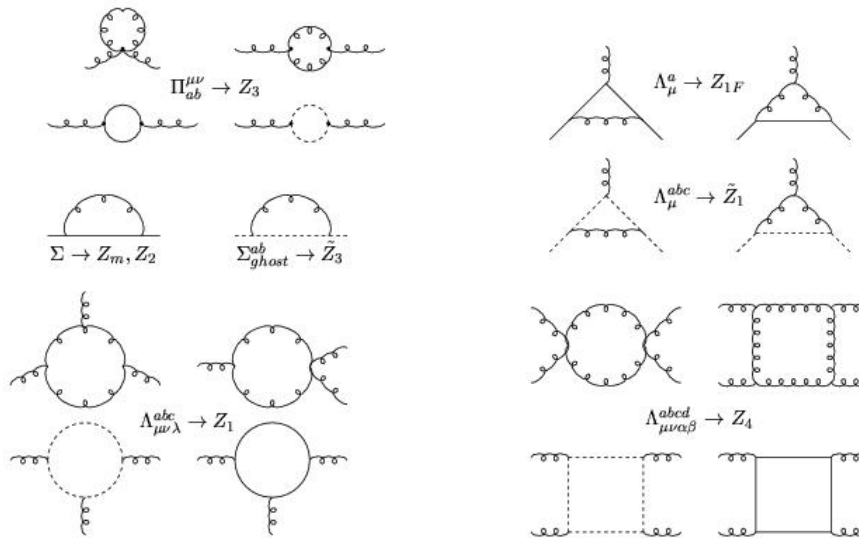


Figura 2.1: Diagramas da QCD a um loop

2.1.1 $\Pi_{\mu\nu}^{ab}$: A auto-energia do glúon

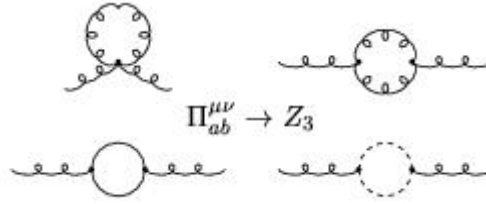


Figura 2.2: Auto-energia do glúon

Começamos com a auto-energia do glúon que é composta de quatro contribuições, como podemos ver pela figura.

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab} = \Pi_{\mu\nu}^{ab}(1) + \Pi_{\mu\nu}^{ab}(2) + \Pi_{\mu\nu}^{ab}(3) + \Pi_{\mu\nu}^{ab}(4) \quad (2.7)$$

Onde $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(1)$, $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(2)$, $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(3)$ e $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(4)$ representam o *loop* do quark, o *loop* do glúon, o diagrama “*tadpole*” do glúon e o *loop* fantasma (*ghost*) respectivamente. É puramente transversal, como requerido pelas identidades de Slavnov-Taylor e, portanto, não admite um termo de massa e não deveria ter renormalização da massa. Portanto, as divergências quadráticas que aparecerem em $\Pi_{\mu\nu}^{ab}$ devem se cancelar.

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(1) &= -g^2 C_2(G) \delta^{ab} 3 \int_k^\Lambda \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)} \\ &= -3g^2 g_{\mu\nu} C_2(G) \delta^{ab} I_{quad}(\mu^2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Onde μ é um *cutoff* infravermelho (regulador da massa) que deve ser igualado a zero, no fim.

A amplitude do glúon é

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(2) = \frac{1}{2} \int_k^\Lambda g^2 f^{acd} f^{bcd} N_{\mu\nu} \frac{-i}{(k^2 - \mu^2)} \frac{-i}{[(k+p)^2 - \mu^2]}, \quad (2.9)$$

onde

$$\begin{aligned}
 N^{\mu\nu} &= [g^{\mu\rho}(p-k)^\sigma + g^{\rho\sigma}(2k+p)^\mu + g^{\sigma\mu}(-k-2p)^\rho] \\
 &\times [\delta_\rho^\nu(k-p)_\sigma + g_{\rho\sigma}(-2k-p)^\nu + \delta_\sigma^\nu(k+2p)_\rho] \\
 &= 2p_\mu p_\nu - 5(p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu) - 10k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}[(p-k)^2 + (k+2p)^2]. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

Usando

$$(p-k)^2 + (k+2p)^2 = (k+p)^2 + k^2 + 4p^2, \quad (2.11)$$

e calculando a integral, (2.9) fica

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}^{ab}(2) &= -\frac{1}{2}g^2 C_2(G) \delta^{ab} [(2p_\mu p_\nu - 4p^2 g_{\mu\nu}) I(p^2, \mu^2) \\
 &- g_{\mu\nu} (2I_{quad}(\mu^2) + p^\alpha p^\beta \Upsilon_{\alpha\beta}^0) \\
 &- 10(p_\nu I_\mu(p^2, \mu^2) + I_{\mu\nu}(p^2, \mu^2))]. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Na qual $I_{\mu\nu}$, I_μ e I são definidos como no apêndice C.

E para o *loop* fantasma, temos

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}^{ab}(3) &= -g^2 f^{dac} f^{cbd} \int_k^\Lambda \frac{i^2}{(k^2 - \mu^2)} \frac{(p+k)_\mu k_\nu}{[(k+p)^2 - \mu^2]} \\
 &= -g^2 \delta^{ab} C_2(G) [p_\mu I_\nu(p^2, \mu^2) + I_{\mu\nu}(p^2, \mu^2)], \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

Juntando todos os resultados até agora, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 \Pi_{\mu\nu}^{ab}(i) &= g^2 C_2(G) \delta^{ab} \left\{ (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \left[-\frac{2b}{9} + \frac{5}{3} \left(I_{log}(\mu^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{e^2 \mu^2} \right) \right) \right] \right. \\
 &\left. + \Upsilon_{\mu\nu}^2 + p^2 \Upsilon_{\mu\nu}^{(0)} + p^\alpha p^\beta \Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)} + p^\alpha p_\mu \Upsilon_{\nu\alpha}^{(0)} + p^\beta p_\nu \Upsilon_{\mu\beta}^{(0)} + p^\alpha p^\beta g_{\mu\nu} \Upsilon_{\alpha\beta}^{(0)} \right\}, \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

Υ 's são constantes arbitrárias definidas nas relações (1.4) à (1.7). Além do mais, ao escrever (2.14) absorvemos alguns fatores constantes nos Υ 's.

A contribuição do *loop* do férmion à auto-energia do glúon é idêntica ao tensor de polarização do vácuo da *QED* exceto pelos fatores de cor e número de férmions (n_f). Isso foi extensamente calculado na IR [9]. Sem perda de generalidade, escrevemos o resultado no limite dos férmions sem massa e chegamos em:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(4) = & \frac{4}{3}g^2C(r)n_f\delta^{ab} \left\{ (p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) \left[I_{log}(\mu^2) - b \left(\ln \left(-\frac{p^2}{e^2\mu^2} \right) + \frac{1}{3} \right) \right] \right. \\ & \left. + \Upsilon_{\mu\nu}^2 + p^2 \Upsilon_{\mu\nu}^{(0)} + p^\alpha p^\beta \Upsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)} + p^\alpha p_\mu \Upsilon_{\nu\alpha}^{(0)} + p^\beta p_\nu \Upsilon_{\mu\beta}^{(0)} + p^\alpha p^\beta g_{\mu\nu} \Upsilon_{\alpha\beta}^{(0)} \right\}. \quad (2.15) \end{aligned}$$

Comentário: - Primeiramente, deve ser notado que as divergências quadráticas expressas por $g_{\mu\nu}I_{quad}(\mu^2)$ e $\Theta_{\mu\nu}^2$ que aparecem nas amplitudes do “*tadpole*” do glúon, no *loop* do glúon e no *loop* fantasma combinam-se resultando $\Upsilon_{\mu\nu}^2 \equiv \alpha_1 g_{\mu\nu}$. A invariância de calibre nos diz que devemos deixar $\alpha_1 = 0$, assim como todos os outros α_i 's como definidos em (1.4)-(1.7). Logo, os gráficos “*tadpoles*” dos campos de calibre têm papel essencial no estabelecimento da invariância de calibre no âmbito da IR. DR automaticamente leva as divergências quadráticas a zero no limite $\mu \rightarrow 0$. Aqui isso não é necessário de maneira a assegurar a forma transversal da auto-energia do glúon, como requerido pela invariância de calibre. Como veremos, levar os λ_i 's a zero em (1.4) a (1.7) automaticamente preserva a invariância de calibre (vetorial) através das identidades de Slavnov-Taylor. Isso é consoante com a idéia de que, em última análise, devem-se fixar os parâmetros arbitrários em bases físicas. No caso em questão, a invariância de calibre faz esse papel. Operacionalmente é conveniente por se ter uma técnica invariante de calibre no espaço dos momentos.

Deve ser notado, também, que o procedimento algébrico que usamos para definir um esquema de renormalização mínimo independente de massa naturalmente introduz uma escala arbitrária λ . Como vemos, λ faz o papel de uma escala de grupo de renormalização.

De maneira a definir as constantes de renormalização que mostrem o comportamento de escala no ultravioleta do modelo, usamos a identidade (1.9) e notamos que a divergência (infravermelha) parametrizada por $\ln \mu^2$, com $\mu \rightarrow 0$, cancela-se com um termo idêntico vindo da parte finita do UV, enquanto um parâmetro não-nulo λ aparece.

Juntos, $\Pi_{\mu\nu}^{ab} = \sum_{i=1}^4 \Pi_{\mu\nu}^{ab}(i)$ resultam

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p^2, \lambda^2) &= -\frac{b}{9}g^2(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)\delta^{ab} \times \\ &\times \left\{ i \left[\frac{5}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f C(r) \right] I_{\log}(\lambda^2) \right. \\ &+ \left. \left(15C_2(r) - 6n_f \right) \ln \left(\frac{\lambda^2}{p^2} \right) - 2C_2(r) + 2n_f \right\} \\ &+ (Z_3 - 1)\delta^{ab}(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Definimos o contratermo para a amplitude (2.16) subtraindo minimalmente (no sentido da IR) a ILL, expressada por $I_{\log}(\lambda^2)$, para definir

$$Z_3 = 1 - i \left[\frac{5}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f C(r) \right] I_{\log}(\lambda^2)g^2 + O(g^3). \quad (2.17)$$

2.1.2 $\Sigma(p)$: A auto-energia do quark

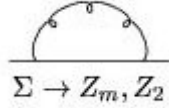


Figura 2.3: Auto-energia do quark

A auto-energia do quark, $\Sigma(p)$; é similar à auto-energia do elétron, fora fatores da teoria de grupos.

$\Sigma(p)$ foi calculado em [4] no contexto da IR e dá

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= -ig^2 C_2(r)(\not{p} - 4m)I_{\log}(m^2) + g^2 g^{\mu\nu} \Upsilon_{\mu\nu}^{(0)} \not{p} \\ &+ (Z_2 - 1)\not{p} - (Z_2 Z_m - 1)m + \tilde{\Sigma}(p, m), \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde o *til* é usado para significar que a quantidade é finita (usaremos essa notação de agora em diante). De fato $\tilde{\Sigma}(p, m)$ é finito tanto no limite ultravioleta quanto infravermelho. De maneira a definir as constantes de renormalização correspondentes, fazemos uso consistente de (1.9) em busca de um esquema independente de massa, assim como de introduzir a constante arbitrária λ^2 . É digno de nota que a parte $b \ln \mu^2$ advinda de (1.9) cancela exatamente a divergência infravermelha na parte ultravioleta finita da amplitude, como deveria.

Daqui em diante, definimos sistematicamente as constantes de renormalização de forma independente de massa (que define o esquema mínimo em IR) assim como fixamos os α_i 's (Υ 's) em zero. Chamamos esse procedimento de IR vinculada (constrained IR, CIR). Não mais escreveremos os Υ 's explicitamente nas amplitudes remanescentes, por ser mais simples.

Portanto, as constantes da massa do férmion e da renormalização do campo podem ser resumidas em

$$\begin{aligned} Z_m &= 1 + 3iC_2(r)I_{\log}(\lambda^2)g^2 + O(g^3), \\ Z_2 &= 1 + iC_2(r)I_{\log}(\lambda^2)g^2 + O(g^3). \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.1.3 $\Sigma_{ghost}^{ab}(p^2)$

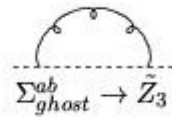


Figura 2.4: Correção para o propagador fantasma

Após as contrações dos índices de cor apropriadas, a correção a um *loop* para o propagador fantasma fica, simplificada

$$\begin{aligned} \Sigma_{ghost}^{ab}(p^2) &= g^2 g_{\mu\nu} C_2(G) \delta^{ab} \int_k^\Lambda \frac{(p-k)^\mu p^\nu}{[(p-k)^2 - \mu^2](k^2 - \mu^2)} \\ &+ (\tilde{Z}_3 - 1) \delta^{ab} p^2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

Onde μ^2 é um regulador infravermelho de massa tanto para o propagador do glúon quanto para o propagador do fantasma. Após alguma álgebra temos

$$\Sigma_{ghost}^{ab}(p^2, \lambda^2) = \delta^{ab} p^2 \left(\frac{ig^2}{2} C_2(G) I_{\log}(\lambda^2) + \tilde{Z}_3 - 1 \right) + \tilde{\Sigma}_{ghost}^{ab}(p^2, \lambda^2), \quad (2.21)$$

de onde definimos a constante de renormalização

$$\tilde{Z}_3 = 1 - \frac{i}{2} C_2(G) I_{\log}(\lambda^2) g^2 + O(g^3). \quad (2.22)$$

2.1.4 Λ_μ^a : Vértice *quark-gluon*

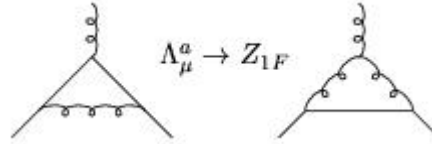


Figura 2.5: Vértice *quark-gluon*

Para o vértice quark-glúon de um *loop*, Λ_μ^a , mostrado na figura, temos duas contribuições: o diagrama elétron-fóton tipo QED, $\Lambda_\mu^a(p, q)(1)$, e o que envolve um vértice de três glúons; $\Lambda_\mu^a(p, q)(2)$. O último difere do vértice elétron-fóton da QED por um fator da teoria de grupo

$$\Lambda_\mu^a(p, q)(1) = (t^d t^a t^d) \Lambda_\mu^{QED}(p, q). \quad (2.23)$$

Calculamos também $\Lambda_\mu^{QED}(p, q)$ na IR em [4]. Portanto, aqui apenas citamos o resultado:

$$i\Lambda_\mu^{QED}(p, q) = \gamma_\mu[\alpha_2 + I_{log}(m^2)] + \tilde{\Lambda}_\mu(p, q), \quad (2.24)$$

m é a massa do férmion, $\tilde{\Lambda}^\mu(p, q)$ é finito e α_2 é arbitrário (fazemos $= 0$). Usando $t^d t^a t^d = [C_2(r) - 1/2 C_2(G)]t^a$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^a(p, q, \lambda^2)(1) &= -ig^3 t^a \gamma_\mu \left(C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G) \right) \times \\ &\times \left(I_{log}(\lambda^2) + \tilde{\Lambda}^a(p, q, \lambda^2)(1) \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como para $\Lambda_\mu^a(p, q)(2)$, a aplicação das regras de Feynman fornece

$$i\Lambda_\mu^a(p, q)(2) = g^3 f^{abc} t^b t^c \int_k^\Lambda \frac{N_\mu}{D} \quad (2.26)$$

com

$$\begin{aligned} N_\rho &= \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu \left[(2p - q - k)_\nu g_{\mu\rho} + (2k - p - q)_\rho g_{\mu\nu} + (2q - p - k)_\mu g_{\nu\rho} \right], \\ D &= (k^2 - m^2)[(k - p)^2 - \mu^2][(k - q)^2 - \mu^2]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde, de novo, μ é um regulador de massa para o propagador do glúon. Procederemos da maneira que se segue. Removemos a dependência do momento externo das IIII aplicando a identidade (1.1) nos propagadores que contêm os momentos p e q acima. Então isolamos uma contribuição genuína ao contratérmo (divergente ultravioleta apenas) com ajuda da identidade (1.9) para chegar, em CIR,

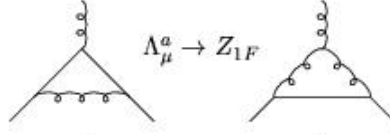
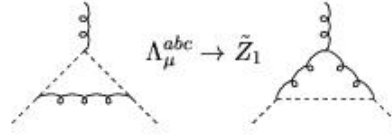
$$\Lambda_\mu^a(p, q, \lambda^2)(2) = -i\frac{3}{2}g^3 C_2(G) t^a \left(\gamma_\mu I_{log}(\lambda^2) + \tilde{\Lambda}_\mu^a(p, q, \lambda^2)(2) \right). \quad (2.28)$$

Finalmente, definimos a constante de renormalização Z_{1F} a ordem um *loop* somando as duas contribuições ao vértice quark-glúon:

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^a(p, q, \lambda^2) &= g\gamma_\mu t^a \left(-ig^2(C_2(G) + C_2(r))I_{log}(\lambda^2) + \right. \\ &\left. + Z_{1F} - 1 + \tilde{\Lambda}^a(p, q, \lambda^2) \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

que dá

$$Z_{1F} = 1 + ig^2 \left(C_2(G) + C_2(r) \right) I_{log}(\lambda^2). \quad (2.30)$$

2.1.5 Λ_μ^{abc} e $\Lambda_{\mu\nu\lambda}^{abc}$

 Figura 2.6: *loop ghost-ghost-glúon*

 Figura 2.7: *ghost-glúon-glúon*

Para calcularmos a constante de renormalização \tilde{Z}_1 trabalhamos com o vértice *ghost-glúon*. Duas são as contribuições (fig. 2.1): o *loop ghost-ghost-glúon* $\Lambda_{1\mu}^{abc}$ e o *loop ghost-glúon-glúon* $\Lambda_{2\mu}^{abc}$.

Sejam p_1 , p_2 e $p_1 + p_2 \equiv q$ os momentos externos. Logo:

$$\Lambda_\mu^{abc} = \tilde{\Lambda}_{1\mu}^{abc} + \Lambda_{2\mu}^{abc} + (-i)gf^{abc}q_\mu(\tilde{Z}_1 - 1). \quad (2.31)$$

Das regras de Feynman, com ajuda da identidade $f^{afe}f^{bep}f^{cpf} = N/2f^{abc}$ para $SU(N)$, chega-se em

$$\Lambda_{1\mu}^{abc}(p_1, p_2) = -\frac{g^3}{2}C_2(G)f^{abc}q^\alpha \int_k^\Lambda \frac{k_\alpha k_\mu}{(k^2 - \mu^2)[(k - p_1)^2 - \mu^2][(k - q)^2 - \mu^2]}. \quad (2.32)$$

Continuamos com as regras da CIR, como fizemos antes, para chegar em

$$\Lambda_{1\mu}^{abc}(p_1, p_2) = \frac{g^3}{8}C_2(G)f^{abc}q_\mu I_{\log}(\lambda^2) + \tilde{\Lambda}_{1\mu}^{abc}(p_1, p_2). \quad (2.33)$$

Analogamente, temos para as outras contribuições

$$\Lambda_{2\mu}^{abc}(p_1, p_2) = \frac{3g^3}{8} C_2(G) f^{abc} q_\mu I_{log}(\lambda^2) + \tilde{\Lambda}_{2\mu}^{abc}(p_1, p_2), \quad (2.34)$$

e, logo,

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{abc}(p_1, p_2) &= -igf^{abc} q_\mu \left(-i\frac{g^2}{2} C_2(G) I_{log}(\lambda^2) + \tilde{Z}_1 - 1 \right) \\ &+ \tilde{\Lambda}_\mu^{abc}(p_1, p_2). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Finalmente definimos a constante de renormalização em um esquema mínimo na IR como

$$\tilde{Z}_1 = 1 + \frac{i}{2} g^2 C_2(G) I_{log}(\lambda^2). \quad (2.36)$$

As classes de diagramas de vértice de três glúons para o qual definimos Z_1 são mostrados na fig. 2.1. Eles foram computados explicitamente em [10], [11] com DR. O cálculo é direto mas tedioso. Foi trabalhado de acordo com as regras da CIR como antes, de maneira a isolar a divergência ultravioleta como um termo proporcional a $I_{log}(\lambda^2)$ após usarmos (1.9). A parte divergente infravermelha proporcional a $\ln(\lambda^2/\mu^2)$, quando $\mu \rightarrow 0$, cancela com um termo semelhante vindo da parte finita ultravioleta da amplitude, como discutido no apêndice B.

Sejam p e q os momentos externos. Então

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu\nu\lambda}^{abc}(p, q) &= -igf^{abc} V_{\mu\nu\lambda}(p, q, p+q) \times \\ &\times \left(-ig^2 \left(-\frac{2}{3} C_2(G) + \frac{4}{3} C(r) n_f \right) I_{log}(\lambda^2) \right. \\ &\left. + Z_1 - 1 \right) + \tilde{\Lambda}_{\mu\nu\lambda}^{abc}(p, q), \end{aligned} \quad (2.37)$$

$V_{\mu\nu\lambda}(p, q, p+q) = (p-q)_\lambda g_{\mu\nu} - p_\mu g_{\nu\lambda} + q_\nu g_{\mu\lambda}$, de onde podemos definir

$$Z_1 = 1 + ig^2 \left(-\frac{2}{3} C_2(G) + \frac{4}{3} C(r) n_f \right) I_{log}(\lambda^2). \quad (2.38)$$

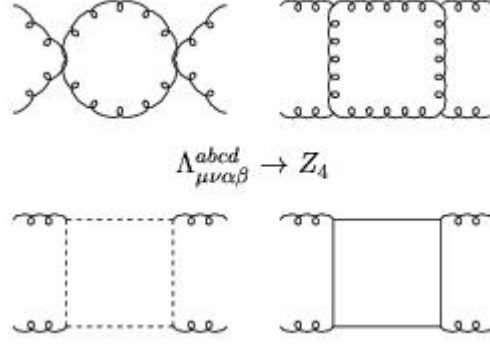
2.1.6 $\Lambda_{\mu\nu\alpha\beta}^{abcd}$: Vértices de quatro glúons


Figura 2.8: Vértices de quatro glúons

Finalmente podemos calcular os vértices de quatro glúons da figura com todas as suas permutações. Esse longo cálculo foi computado com grande detalhe por Pascual e Tarrach em [11] no esquema de Weinberg e por Papavassiliou em [12], usando a técnica da matriz S. O resultado correspondente em CIR dá:

$$\Lambda_{\alpha\beta\mu\nu}^{abcd}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -g^2 W_{\alpha\beta\mu\nu}^{abcd} \left(-\frac{ig^2}{3} (C_2(G) + 4C(r)n_f) I_{\log}(\lambda^2) + Z_4 - 1 \right) + \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta\mu\nu}^{abcd}(p_1, p_2, p_3, p_4), \quad (2.39)$$

onde foi usada a mesma notação do T. Muta [8], qual seja

$$\begin{aligned} W_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{a_1a_2a_3a_4} &= (f^{13,24} - f^{14,32})g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_4} \\ &+ (f^{12,34} - f^{14,23})g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_4} \\ &+ (f^{13,42} - f^{12,34})g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_3\mu_2}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

com $f^{ij,lm} = f^{a_i a_j a l a m}$. Portanto:

$$Z_4 = 1 + ig^2 \left(\frac{1}{3} C_2(G) + \frac{4}{3} C(r)n_f \right) I_{\log}(\lambda^2). \quad (2.41)$$

2.2 Identidades de Slavnov-Taylor e Funções do Grupo de Renormalização

É uma tarefa relativamente simples verificar que a CIR preserva explicitamente as identidades de Slavnov-Taylor expressadas em (2.5):

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_1} = 1 + ig^2 C_2(G) I_{log}(\lambda^2). \quad (2.42)$$

Em outras palavras, CIR fixa explicitamente a arbitrariedade da IR de tal maneira que a invariância de calibre é mantida. Em ordens mais altas, relações similares a essas mostradas nas equações (1.4)-(1.7) devem aparecer [6] e sua versão vinculada deve implementar a invariância de calibre vetorial também [13].

Na definição de um esquema mínimo independente de massa em CIR apareceu uma constante arbitrária não-nula λ . Como discutido antes, subtraindo-se apenas o termo proporcional a $I_{log}(\lambda^2)$ define-se um esquema de subtração mínimo no contexto da IR e ficamos com a parte finita da amplitude que também é dependente de λ . Além disso, essa é idêntica à amplitude que obteríamos se tivéssemos usado a renormalização diferencial! [4], [14]. As escalas arbitrárias que aparecem na IR e na renormalização diferencial podem ser identificadas e portanto as funções de Green renormalizadas conexas truncadas a n -pontos $G_c^{(n)}(p_i, g, m)$ devem satisfazer uma equação de grupo de renormalização tipo Callan-Symanzik na qual λ faz o papel de escala do grupo de renormalização. Então, temos

$$\left(\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m(g) m \frac{\partial}{\partial m} - n_A \gamma_A(g) - n_f \gamma_\psi(g) \right) G_c^{(n)} = 0,$$

Sendo n_A (n_f) o número de pernas do glúon (quark) no espaço de momentos, m e g são definidos como em (2.3), $\gamma_A(\gamma_\psi)$ é a dimensão anômala do campo do glúon (quark) e

$$\begin{aligned}
 \beta(g) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda}, \\
 \gamma_m(g) &= -\frac{\lambda}{m} \frac{\partial m}{\partial \lambda}, \\
 \gamma_A(g) &= \frac{\lambda}{2Z_3} \frac{\partial Z_3}{\partial \lambda} \text{ e} \\
 \gamma_\psi(g) &= \frac{\lambda}{2Z_2} \frac{\partial Z_2}{\partial \lambda}.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Por exemplo podemos calcular explicitamente a função β . Lembrando que: $g_0 = Z_g g$, $Z_g = Z_1 Z_3^{-3/2}$ (equações 2.3). Logo

$$2\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda^2} (Z_g g) = 0. \tag{2.44}$$

E usando

$$\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda^2} I_{\log}(\lambda^2) = -b \tag{2.45}$$

a equação acima leva, após alguma álgebra, ao resultado:

$$\beta = -\frac{g^3}{3(4\pi)^2} \left(11C_2(G) - 4C(r)n_f \right) + O(g^5). \tag{2.46}$$

De maneira similar, podemos usar as constantes de renormalização que calculamos em CIR para mostrar que

$$\gamma_m = \frac{6g^2}{(4\pi)^2} C_2(r) + O(g^5), \tag{2.47}$$

$$\gamma_A = -\frac{g^2}{3(4\pi)^2} \left(5C_2(G) - 4C(r)n_f \right) + O(g^5), \tag{2.48}$$

$$\gamma_\psi = \frac{g^2}{(4\pi)^2} C_2(r) + O(g^5), \tag{2.49}$$

Que são os valores padrões das funções do grupo de renormalização. Particularmente, em um esquema mínimo no contexto da IR, eles coincidem com o esquema MS na regularização dimensional.

Capítulo 3

Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g - 2)_l$ em supergravidade

Um teste fundamental para qualquer método de regularização é sua aplicabilidade a teorias supersimétricas, dado que se espera hoje que os melhores candidatos a teorias fundamentais (como por exemplo a supergravidade - SUGRA e as supercordas) sejam teorias supersimétricas. O cálculo do momento magnético do elétron a um *loop* na eletrodinâmica quântica supersimétrica local (supergravidade não-quebrada) presta-se especialmente como um teste consistente nessa área. A supergravidade é uma teoria com alto grau de simetria, e apesar de a gravidade ser uma teoria não-renormalizável, leva a um resultado finito na correção a um *loop* desse observável físico e; ainda mais, em combinação com a SUSY, o fator $(g - 2)_l$, a correção do momento magnético anômalo do lépton, é anulado! Isso se dá por não haver termos de Pauli na Lagrangeana de um supermultiplete quirial [15], como pode ser visto nas equações 3.9 a 3.12 da seção 3.2.

A regularização dimensional enfrenta problemas com teorias supersimétricas - pode quebrar a supersimetria do modelo em questão! Essencialmente, a razão é que a igualdade dos graus de liberdade fermiônicos e bosônicos só valem para valores específicos da dimensão do espaço-tempo, que é alterada por essa regularização. Uma variante desse método, a redução dimensional (dimensional reduction) - na qual as componentes do campo permanecem inalteradas, enquanto as integrais de *loop* são calculadas em um espaço d-dimensional - preserva SUSY, pelo menos em ordem

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g - 2)_l$ em supergravidade 23

de um *loop*, mas a ordens mais altas a situação é mais complicada, especialmente no caso de supersimetria quebrada. Outra abordagem é baseada na regularização de derivadas de ordens mais altas de Pauli-Villars. Em todo caso, é clara a falta de métodos simples adequados a teorias supersimétricas. O método da renormalização diferencial (DR) é relativamente recente e é um método de renormalização sem reguladores ou contratermos explícitos que, ao contrário da IR, funciona no espaço das coordenadas, e, também como a IR, não altera a dimensão do espaço-tempo. Logo, é também um bom candidato para preservar SUSY.

Algumas técnicas de regularização foram testadas com o cálculo do valor do fator $(g - 2)_l$ (ver [16],[17], [18], [19], [20], [21] e [22]). Nesse contexto sabe-se, por exemplo, que a regularização dimensional ([23]) provê um resultado finito, mas não nulo como deveria ser ([17]), e a técnica de redução dimensional ([24], [25]), que é invariante por supersimetria (um *loop*), assim como a versão vinculada da regularização diferencial ([20], [21] e [22], [26], [27], [28] e [29]) resultam em cancelamento entre os setores do gráviton e do gravitino a ordem um *loop* ([16], [17] e [20], [21] e [22]). Ordens mais altas estão sendo feitas em redução dimensional, ver [30].

A regularização implícita submetida ao cálculo do fator $(g - 2)_l$ na supergravidade é levada a cabo nas subseqüentes seções deste capítulo e mostra-se que a IR leva ao esperado resultado nulo, e uma comparação diagrama a diagrama dos resultados das diferentes técnicas é feita na última secção. Mas antes, um pouco de história.

3.1 O momento magnético do elétron

O cálculo do momento magnético do elétron tem um expressivo papel na história da física. Classicamente, a razão entre o momentum angular total \vec{L} e o momento magnético $\vec{\mu}$ de um objeto uniformemente carregado em rotação é $Q/2M$, onde Q é a carga total e M , a massa total. De fato,

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3x \rho_c \vec{x} \times \vec{v}(\vec{x}) = \frac{Q}{2M} \int d^3x \rho \vec{x} \times \vec{v}(\vec{x}) = \frac{Q}{2M} \vec{L}$$

Aqui ρ é a densidade de massa constante, ρ_c a densidade de carga, e $\vec{v}(\vec{x})$ a velocidade do corpo no ponto \vec{x} . Equivalentemente $\vec{\mu} \equiv g(Q/2M)\vec{L}$, e $g = 1$ sempre

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g - 2)_l$ em supergravidade 24

que a razão carga e massa para as densidades for constante. O fator g é conhecido na literatura como fator giromagnético (ou fator de Landè).

A mecânica quântica e a teoria de campos mudam substancialmente esse resultado. Ingenuamente, podemos esperar que a constante de proporcionalidade entre o spin do elétron e o seu momento magnético seria o mesmo $e/2m$, e então, o valor do momento magnético intrínseco do elétron seria $(e/2m)|\vec{S}| = e\hbar/4m$ - e o fator g_s , intrínseco, deveria ser 1. Mas a Natureza revelou-se mais sutil. Experimentos no começo do século vinte mostravam “anomalias” em medidas do efeito Zeeman, *explicáveis se o fator g intrínseco do elétron fosse na verdade 2!*

Analisemos a questão sob a ótica quântica.

Podemos descrever um campo escalar (portanto, sem spin) com carga interagindo com um campo eletromagnético através da equação de Klein-Gordon com interação eletromagnética (aqui, $\hbar = c = 1$):

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\Phi = 0$$

Sendo $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ a derivada covariante. Agora, consideremos um campo magnético constante apontando para a direção z , fraco, de maneira que termos da ordem de $(A_i)^2$ possam ser ignorados. Podemos escolher $A_0 = 0$, $A_1 = -\frac{1}{2}Bx^2$ e $A_2 = \frac{1}{2}Bx^1$ (logo $F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B$), por causa da invariância de calibre. Como temos um campo magnético constante, a parte temporal do operador dá

$$(D_0)^2 = (\partial_0)^2 - ie(\partial_0 A_0 + A_0 \partial_0) + O(A_0^2) = (\partial_0)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

E, para as partes espaciais, ficamos com

$$\begin{aligned} (D_i)^2 &= (\partial_i)^2 - ie(\partial_i A_i + A_i \partial_i) + O(A_i^2) \\ &= (\partial_i)^2 - 2\frac{ie}{2}B(x^1 \partial_2 - x^2 \partial_1) + O(A_i^2) \\ &= \nabla^2 - e\vec{B} \cdot \vec{x} \times \vec{p} + O(A_i^2) \end{aligned}$$

Usamos $\partial_i A_i + A_i \partial_i = (\partial_i A_i) + 2A_i \partial_i = 2A_i \partial_i$, sendo a notação $(\partial_i A_i)$ usada para derivadas que agem apenas em A_i . Reconhecemos $\vec{L} \equiv \vec{x} \times \vec{p}$ como o operador momento angular orbital. Finalmente, para esse campo escalar a equação fica

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 25

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - e\vec{B} \cdot \vec{L}\right)\Phi = 0$$

Portanto o momento angular orbital gera um momento magnético orbital que interage com o campo magnético.

Agora, passemos a estudar como um **elétron** interagiria com esse campo magnético constante. Por ser um campo carregado de spin meio, partimos da equação de Dirac com interação eletromagnética:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0 \quad (3.1)$$

E multipliquemos à esquerda pelo operador conjugado, $(i\gamma^\nu D_\nu + m)$, e obtemos

$$-(\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu + m^2)\psi = 0$$

Antes de continuarmos, vale lembrar as mais importantes propriedades das matrizes *gama* (vide apêndice E, para mais identidades):

$$\begin{cases} \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = +2g_{\mu\nu} \\ \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu = -2i\sigma_{\mu\nu} \end{cases}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} - i\sigma_{\mu\nu}$$

E, portanto,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = D_\mu D^\mu - i\sigma^{\mu\nu} D_\mu D_\nu$$

E, como $i\sigma^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}[D_\mu, D_\nu] = \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, então

$$\left(D_\mu D^\mu - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + m^2\right)\psi = 0 \quad (3.2)$$

Analogamente ao caso anterior para campo escalar, vimos que para o caso de campo magnético fraco, constante, obtemos $(D_i)^2 = \nabla^2 - e\vec{B} \cdot \vec{x} \times \vec{p}$, e $(D_0)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, escreveremos $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ na base de Dirac, na qual $\sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$, e focaremos em ϕ , já que no limite não-relativístico este domina sobre χ . Logo, $(e/2)\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ agindo sobre ϕ é efetivamente igual a $(e/2)\sigma^3(F_{12} - F_{21}) = (e/2)2\sigma^3 B = 2e\vec{B} \cdot \vec{S}$, pois

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g - 2)_l$ em supergravidade 26

$\vec{S} = (\vec{\sigma}/2)$. Podemos escrever $\phi = e^{-imt}\Psi$, em que Ψ oscila muito mais lentamente que e^{-imt} de tal maneira que $(\partial_0^2 + m^2)e^{-imt}\Psi \simeq e^{-imt}[-2im(\partial/\partial t)\Psi]$. Finalmente,

$$\left[-2im\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 - e\vec{B} \cdot (\vec{L} + 2\vec{S}) \right] \Psi = 0 . \quad (3.3)$$

Enfim, podemos ver agora que uma unidade de momento angular de spin interage com um campo magnético duas vezes mais que uma unidade de momento angular orbital, um fato experimental que não encontrava explicações no começo do século vinte, até a proposta da equação de Dirac. Esse cálculo é celebrado até hoje como um dos mais famosos da história da física. Diz-se que Dirac só veio a fazê-lo um dia depois de descoberta a sua equação, tão certo estava que a equação tinha que ser a equação correta. (Ver [31]).

3.1.1 O momento magnético anômalo do elétron

Isidor Rabi anunciou na conferência de Shelter Island que medidas na estrutura fina do hidrogênio e do deutério, realizadas em seu laboratório, em 1947, sugeriam que o momento magnético do elétron era maior que o valor de Dirac $e\hbar/2m$, por um fator de aproximadamente 1.0013, e subsequentes medidas dos fatores giro-magnéticos nos elementos sódio e gálio forneceram o valor ainda mais preciso (Ver [32])

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m} [1.00118 \pm 0.00003]$$

Gregory Breit sugeriu que a origem da discrepância seria uma correção radiativa de ordem α no momento magnético do elétron. Ainda na conferência de Shelter Island, Breit e Schwinger apresentaram seus esforços no cálculo dessa correção. Pouco depois da conferência, Schwinger completou com sucesso o cálculo do momento magnético anômalo do elétron em excelente acordo com os experimentos

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m} \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right] = \frac{e\hbar}{2m} [1.001162]$$

O espetacular sucesso de Schwinger, juntamente com o cálculo de Hans Bethe do desvio Lamb, foram fatores históricos fundamentais no estabelecimento da con-

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 27

fiança da comunidade dos físicos na realidade das correções radiativas (Ver [32]) e hoje, o cálculo do momento magnético anômalo, corrigido em ordens ainda mais elevadas, é o mais preciso já atingido em toda a história da ciência, chegando à impressionante predição de 13 casas em acordo com os experimentos! (ver [33]) E, convencendo os críticos da eficácia da teoria relativista quântica de campos, ao menos ao lidar com os fenômenos eletromagnéticos, para além de qualquer dúvida.

Na maneira atual, essa correção é calculada através dos chamados fatores de forma. A idéia é que o vértice total Γ_μ , que inclui o efeito radiativo, Λ_μ , como primeira correção (ou “um *loop*”) à interação de Dirac, γ_μ (ou ao nível de *árvore*), em sua expressão mais geral, possa sempre ser escrito como:

$$\bar{u}(p')\Gamma_\mu(p', p)u(p) = \bar{u}(p')\left(\gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m}F_2(q^2)q^\nu\sigma_{\mu\nu}\right)u(p) \quad (3.4)$$

Que pode ser demonstrada como a seguir. Temos ao nosso dispor, de maneira a construir a função de vértice $\Gamma_\mu(p', p)$, duas quantidades cinemáticas p^μ e p'^μ , os *momenta* do lépton antes e depois da interação, respectivamente. Mas desde que o elétron se move livremente, antes e depois da interação (se encontra “*on mass shell*”), há, na verdade, apenas uma variável escalar independente, porque $p^2 = p'^2 = m^2$, que escolheremos como o quadrado do momentum do fóton $q^2 = (p - p')^2$. Desde que $\Gamma_\mu(p', p)$ tem que ser um vetor de Lorentz, o *ansatz* mais geral para ele deve ser escrito com ajuda dos bilineares covariantes da teoria de Dirac:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\Gamma_\mu(p', p)u(p) = & \bar{u}(p')\left(A(q^2)\gamma_\mu + B(q^2)p'_\mu \right. \\ & \left. + C(q^2)p_\mu + iD(q^2)p'^\nu\sigma_{\mu\nu} + iE(q^2)p'^\nu\sigma_{\mu\nu}\right)u(p) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$A(q^2)$, $B(q^2)$, ..., $E(q^2)$ são funções escalares não determinadas da variável q^2 . Pelo critério de Hermiticidade, conclui-se que essas funções sejam reais. Uma outra restrição é o requerimento da invariância de calibre, que tem a forma

$$q^\mu\bar{u}(p')\Gamma_\mu(p', p)u(p) = 0 \quad (3.6)$$

O primeiro termo em 3.5 é uma corrente de Dirac comum, que obviamente satisfaz a equação 3.6, com ajuda da equação de Dirac. Para os termos subsequentes

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g - 2)_l$ em supergravidade 28

$$\left\{ \begin{array}{l} (p'^{\mu} - p^{\mu})(Bp'^{\mu} + Cp^{\mu}) = (B - C)(m^2 - p' \cdot p) = 0 \\ i(p'^{\mu} - p^{\mu})(Dp'^{\nu} + Ep^{\nu})\sigma_{\mu\nu} = -iDp^{\mu}p'^{\nu}\sigma_{\mu\nu} + iEp'^{\mu}p^{\nu}\sigma_{\mu\nu} \\ \qquad \qquad \qquad = i(D + E)p'^{\mu}p^{\nu}\sigma_{\mu\nu} = 0 \end{array} \right.$$

Levando em conta a antissimetria do tensor $\sigma_{\mu\nu}$ e, novamente, a equação de Dirac. Portanto, deduzimos que $C = B$ e $E = -D$, ou seja

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\Gamma_{\mu}(p', p)u(p) &= \bar{u}(p')[A(q^2)\gamma_{\mu} + B(q^2)(p' + p)_{\mu} \\ &\quad + iD(q^2)(p' - p)^{\nu}\sigma_{\mu\nu}]u(p) \end{aligned}$$

E, em vista da decomposição de Gordon

$$\bar{u}(p')\gamma_{\mu}u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')[p + p']_{\mu} + iq^{\nu}\sigma_{\mu\nu}]u(p) \quad (3.7)$$

Vemos que os termos A , B e D não são linearmente independentes. Portanto, um dos termos, por exemplo $B(q^2)(p' + p)_{\mu}$, pode ser eliminado. Isso nos leva a 3.4.

A decomposição de Gordon é frequentemente referenciada nesse tipo de cálculo e, portanto, merece ser demonstrada. Ora, de novo lembrando algumas propriedades das matrizes de Dirac

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = +2g_{\mu\nu} \\ \gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = -2i\sigma_{\mu\nu} \end{array} \right.$$

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} = g_{\mu\nu} - i\sigma_{\mu\nu}$$

E a equação de Dirac

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\mu}p^{\mu}u(p) = mu(p) \\ \bar{u}(p')\gamma_{\mu}p'^{\mu} = m\bar{u}(p') \end{array} \right.$$

De onde

$$\gamma_{\mu}u(p) = \frac{1}{m}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}p^{\nu}u(p) = \frac{1}{m}(g_{\mu\nu} - i\sigma_{\mu\nu})p^{\nu}u(p)$$

$$\bar{u}(p')\gamma_{\mu} = \frac{1}{m}\bar{u}(p')\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}p'^{\nu} = \frac{1}{m}\bar{u}(p')(g_{\mu\nu} - i\sigma_{\nu\mu})p'^{\nu}$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g - 2)_l$ em supergravidade²⁹

Portanto,

$$\begin{cases} \gamma_\mu u(p) = \frac{1}{m}(p_\mu - i\sigma_{\mu\nu}p^\nu)u(p) \\ \bar{u}(p')\gamma_\mu = \frac{1}{m}\bar{u}(p')(p'_\mu + i\sigma_{\mu\nu}p'^\nu) \end{cases}$$

Combinando ambas

$$\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) = \frac{1}{2}\bar{u}(p')[\gamma_\mu u(p)] + \frac{1}{2}[\bar{u}(p')\gamma_\mu]u(p)$$

Chegamos em

$$\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')[(p + p')_\mu - i\sigma_{\mu\nu}(p - p')^\nu]u(p)$$

Como queríamos demonstrar.

O momento magnético anômalo do elétron, $(g - 2)_l$, é portanto definido no espaço dos momentos em termos de um limite estático.

$$\frac{g - 2}{2} = \lim_{q^2 \rightarrow 0} F_2(q^2) \quad (3.8)$$

3.2 O cálculo do fator $(g - 2)_l$ em super-QED local

Ferrara e Remiddi provaram explicitamente em 1974 que a correção a um loop (ordem e^3) do fator $(g - 2)_l$ na super-QED global é cancelada, pois a contribuição do férmion (o resultado de Schwinger) e a contribuição escalar, onde o slépton e o fotino substituem respectivamente o lépton e o fóton, se cancelam [15, 34, 14].

No caso local, claramente haverá um acoplamento da supergravidade com a matéria, problema esse vastamente descrito na literatura [35, 36, 37, 38, 39, 40], que pode ser estudado através da densidade de Lagrangeana das interações (linearizada), no espaço de Minkowski, que simplificadamente dividimos em quatro partes:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ee\gamma+\tilde{e}\tilde{e}\gamma+e\tilde{e}\tilde{\gamma}} = & - e\bar{\Psi}A\Psi - [ieA^\mu\phi_L^\dagger\overleftrightarrow{\partial}_\mu\phi_L \\ & - e\sqrt{2}(\bar{\lambda}\phi_L^\dagger\mathcal{P}_L\Psi + h.c.) + (L \leftrightarrow R)] , \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eeg+ee\gamma} = & - \frac{\kappa}{4}h^{\alpha\beta}[(i\bar{\Psi}(\gamma_\alpha\partial_\beta + \gamma_\beta\partial_\alpha)\Psi + h.c.) \\ & - 2e(\bar{\Psi}(\gamma_\alpha A_\beta + A_\beta\partial_\alpha)\Psi + h.c.)] , \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e\tilde{e}\tilde{g}+e\tilde{e}\tilde{g}\gamma} = & - \frac{\kappa}{\sqrt{2}}[\bar{\chi}^\nu\mathcal{P}_L(i\not{\partial} - m)\phi_L^\dagger\gamma_\nu\Psi \\ & + e\bar{\chi}^\nu\mathcal{P}_L A\phi_L^\dagger\gamma_\nu\Psi + h.c.] + (L \leftrightarrow R) , \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\gamma\gamma g+\gamma\tilde{g}} = & + \kappa[h^{\alpha\beta}(F^{\alpha\mu}F_\beta^\mu - \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\ & + (\frac{i}{8}\bar{\lambda}\gamma^\nu[\not{\partial}, A]\chi_\nu + h.c.)] . \end{aligned} \quad (3.12)$$

A primeira relaciona as interações: elétron-elétron-fóton, superelétron-superelétron-fóton e elétron-superelétron-fotino. A segunda relaciona as interações: elétron-elétron-gráviton e elétron-elétron-gráviton-fóton. A terceira relaciona as interações: elétron-superelétron-gravitino e elétron-superelétron-gravitino-fóton. E, finalmente,

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 31

a quarta parte relaciona as interações: fóton-fóton-gráviton e fóton-fotino-gravitino. Saliendo que a notação representa $\overleftrightarrow{\partial} = \partial - \overleftarrow{\partial}$, que $\mathcal{P}_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ são os projetores quirais e que $\kappa^2 = 8\pi G_N$ (G_N é a constante gravitacional de Newton), Ψ para o campo do lépton (elétron), A_μ para o fóton, $h_{\mu\nu}$ para o gráviton, $\phi_{L,R}$ para o slépton (superelétron), λ para o fotino e χ_μ para o gravitino.

As regras de Feynman que são utilizadas nesse problema podem ser deduzidas dessa densidade de Lagrangeana e constam no apêndice D.

Na determinação do fator $(g-2)_l$ a ordem um *loop* aqui, como no caso da QED, interessam as correções quânticas ao vértice elétron-fóton-elétron. Os diagramas a um *loop* para a supergravidade são os que constam na figura 3.1.

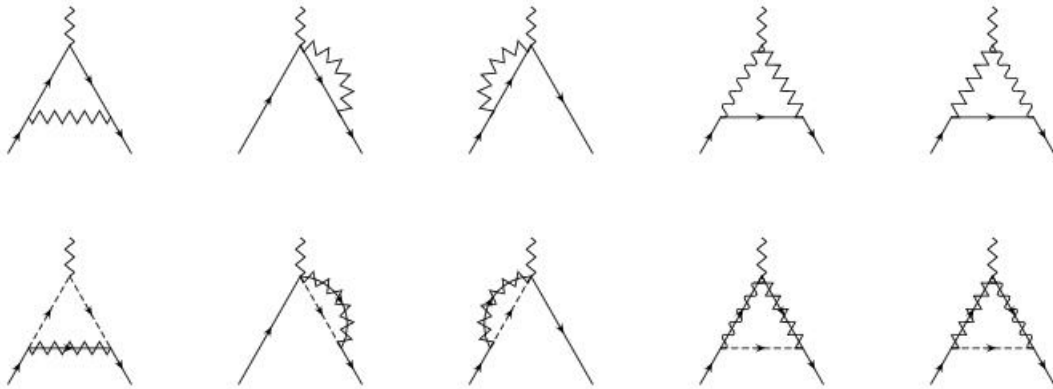


Figura 3.1: Diagramas em super-QED do momento magnético anômalo

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 32

$\Lambda_\mu^{(j)}$ sendo a contribuição do diagrama j , determinaremos $\Lambda_\mu = \sum_{j=1}^{10} \Lambda_\mu^{(j)}$.

Em todo caso, constantemente far-se-á uso das condições *on-shell*:

$$\not{p}\Psi = m\Psi, \quad \bar{\Psi}\not{p}' = \bar{\Psi}m \quad (3.13)$$

$$p^2 = p'^2 = m^2, \quad q^2 = (p - p')^2 = 0 \quad (3.14)$$

Onde, de novo, p e p' são os *momenta* do elétron entrando e saindo, respectivamente, e $q = p - p'$ o *momentum* do fóton.

Portanto, nos cálculos de todos os diagramas a seguir, lembraremos sempre de usar essas condições acima, ou seja, toda vez que um fator \not{p} aparecer à direita, depois de toda possível matriz *gama*, transformaremos-no em um fator m (pois estamos sempre “ensanduichando” a conta por espinores à direita e à esquerda) bem como todo fator \not{p}' à esquerda, antes de qualquer matriz *gama*. De maneira que manipularemos constantemente com a álgebra de Clifford (apêndice E) de forma a passar, sempre que convier, todo fator \not{p} para direita, e todo fator \not{p}' para a esquerda.

Outra observação constante é o fato de ignorarmos todo fator proporcional à uma única matriz γ_μ , ou seja, após contrairmos todos os outros índices, restarão apenas termos proporcionais à γ_μ ou a 1. Aqueles que forem proporcionais à γ_μ não nos interessam e serão ignorados, assim pode-se chegar ao fator de forma F_2 de maneira mais direta.

As regras de Feynman para a sugra podem ser encontradas no apêndice D. Referir-se-á constantemente a elas.

3.2.1 Diagrama 1

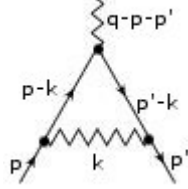


Figura 3.2: Diagrama 1

Utilizando as regras de Feynman podemos calcular $\Lambda_\mu^{(1)}$, que representa a contribuição do diagrama 1, o diagrama triangular da troca de um gráviton entre os elétrons. Começamos o cálculo pelo vértice direito, ao qual rotulamos com os índices mudos α e β e que resulta $(\frac{i\kappa}{2})\gamma_\alpha(2p' - k)_\beta$. O elétron virtual à direita entra com o propagador $i(\not{p}' - \not{k} + m)\Delta_F$. O vértice de cima, o vértice da QED, $-ie\gamma_\mu$. Outra vez um elétron virtual, dessa vez com propagador $i(\not{p} - \not{k} + m)\Delta'_F$. O vértice da esquerda $(\frac{i\kappa}{2})\gamma_\rho(2p - k)_\sigma$. E, finalmente, o propagador do gráviton, $\frac{i}{2}(g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma} + g^{\beta\rho}g^{\alpha\sigma} - g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma})$. Para o caso de supergravidade não-quebrada, que é o caso em questão, a massa do gráviton, bem como do gravitino, fóton e fotino, são iguais a zero.

$$\Lambda_\mu^{(1)} = \int_k^\Lambda \frac{1}{D} \left(\frac{i\kappa}{2}\right)\gamma_\alpha(2p' - k)_\beta i(\not{p}' - \not{k} + m) (-ie\gamma_\mu) i(\not{p} - \not{k} + m) \left(\frac{i\kappa}{2}\right)\gamma_\rho(2p - k)_\sigma \times \frac{i}{2}(g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma} + g^{\beta\rho}g^{\alpha\sigma} - g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}), \quad (3.15)$$

Com $D = [(p' - k)^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2]k^2$. Organizando as constantes e fazendo as contrações dos índices das métricas temos:

$$\Lambda_\mu^{(1)} = \frac{i\kappa^2 e}{8} \int_k^\Lambda \frac{1}{D} [\gamma_\alpha(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma_\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\alpha(2p - k) \cdot (2p' - k) + (2\not{p} - \not{k})(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma_\mu(\not{p} - \not{k} + m)(2\not{p}' - \not{k}) - (2\not{p}' - \not{k})(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma_\mu(\not{p} - \not{k} + m)(2\not{p} - \not{k})] . \quad (3.16)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 34

Sinteticamente,

$$\Lambda_\mu^{(1)} = \frac{i\kappa^2 e}{8} \int_k^\Lambda \frac{N_\mu^{(1)}}{D}. \quad (3.17)$$

Para simplificar, separemos o problema em três:

$$N_\mu^{(1)} = N_\mu^{(1)(1)} + N_\mu^{(1)(2)} + N_\mu^{(1)(3)} \quad (3.18)$$

Onde, distribuindo termos, e com o uso das condições *on-shell* (3.13 e 3.14) no terceiro numerador $N_\mu^{(1)(3)}$, de maneira a tornar os cálculos mais convenientes:

- $N_\mu^{(1)(1)}$

$$N_\mu^{(1)(1)} = [\gamma_\alpha(\not{p}' - \not{k})\gamma_\mu(\not{p} - \not{k})\gamma^\alpha + m\gamma_\alpha(\not{p}' - \not{k})\gamma_\mu\gamma^\alpha + m\gamma_\alpha\gamma_\mu(\not{p} - \not{k})\gamma^\alpha + m^2\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma^\alpha](2p - k) \cdot (2p' - k), \quad (3.19)$$

- $N_\mu^{(1)(2)}$

$$N_\mu^{(1)(2)} = (2\not{p}\not{p}' - 2\not{p}\not{k} + 2m\not{p} - \not{k}\not{p}' + k^2 - m\not{k})\gamma_\mu(2\not{p}\not{p}' - 2\not{k}\not{p}' + 2m\not{p}' - \not{p}\not{k} + k^2 - m\not{k}), \quad (3.20)$$

- $N_\mu^{(1)(3)}$

$$N_\mu^{(1)(3)} = -(2m - \not{k})(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)(2m - \not{k}). \quad (3.21)$$

Portanto, deve ser de novo enfatizado que faremos sempre o uso de agora em diante das condições *on-shell*, ou seja, toda vez que um fator \not{p} aparecer à direita, transformaremos-no em um fator m (pois estamos sempre “ensanduichando” a conta por espinores à direita e à esquerda) bem como todo fator \not{p}' à esquerda. Também manipularemos constantemente os produtos de matrizes *gama* (apêndice E) de forma a passar, sempre que convier, todo fator \not{p} para direita, e todo fator \not{p}' para a esquerda.

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 35

Ignorando os fatores que não interessam ao problema em questão - todo fator que for proporcional à uma única matriz γ_μ - os numeradores N_μ acima são calculados:

- $N_\mu^{(1)(1)}$

$$N_\mu^{(1)(1)} = [-4(\not{p} - \not{k})(p' - k)_\mu + 2(\not{p} - \not{k})(\not{p}' - \not{k})\gamma_\mu + 4m(p + p' - 2k)_\mu - 2m^2\gamma_\mu](2p - k) \cdot (2p' - k) \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} &= [-4(m - \not{k})(p' - k)_\mu + [2(m - \not{k})\gamma_\mu(m - \not{k}) + 4(p - k) \cdot (p' - k)\gamma_\mu - 4(m - \not{k})(p - k)_\mu] + 4m(p + p' - 2k)_\mu - 2m^2\gamma_\mu](2p - k) \cdot (2p' - k) \\ &= [-4(m - \not{k})(p + p' - 2k)_\mu - 2m\gamma_\mu\not{k} - 2m\not{k}\gamma_\mu + 2\not{k}\gamma_\mu\not{k} + 4(p - k) \cdot (p' - k)\gamma_\mu + 4m(p + p' - 2k)_\mu](2p - k) \cdot (2p' - k) \\ &= [4\not{k}(p + p' - 2k)_\mu - 4mk_\mu - 2k^2\gamma_\mu + 4\not{k}k_\mu + 4(p - k) \cdot (p' - k)\gamma_\mu] \times (2p - k) \cdot (2p' - k) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Finalmente,

$$N_\mu^{(1)(1)} = [4\not{k}(p + p')_\mu - 4(\not{k} + m)k_\mu](2p - k) \cdot (2p' - k) \quad (3.24)$$

- $N_\mu^{(1)(2)}$

$$\begin{aligned} N_\mu^{(1)(2)} &= (2\not{p}\not{p}' - 2\not{p}\not{k} + 2m\not{p} - \not{k}\not{p}' + k^2 - m\not{k})\gamma_\mu(2\not{p}\not{p}' - 2\not{k}\not{p}' + 2m\not{p}' - \not{p}\not{k} + k^2 - m\not{k}) \\ &= (4m^2 - 2\not{p}\not{k} - 2p' \cdot k + k^2)\gamma_\mu(4m^2 - 2\not{k}\not{p}' - 2p \cdot k + k^2) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} &= (A - 2\not{p}\not{k})\gamma_\mu(B - 2\not{k}\not{p}') \\ &= AB\gamma_\mu - 2A\gamma_\mu\not{k}\not{p}' - 2B\not{p}\not{k}\gamma_\mu + 4\not{p}\not{k}\gamma_\mu\not{k}\not{p}' \end{aligned} \quad (3.26)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g - 2)_l$ em supergravidade 36

$$\begin{aligned} A &= 4m^2 + [(p' - k)^2 - m^2] \\ B &= 4m^2 + [(p - k)^2 - m^2] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Os termos A e B são nas equações 3.27, e com o uso da álgebra das matrizes gama:

$$\begin{aligned} = & -2mA\gamma_\mu \not{k} - 4(p' \cdot k)A\gamma_\mu + 4A\not{k}p'_\mu - 2mB\not{k}\gamma_\mu - 4B(p \cdot k)\gamma_\mu + 4B\not{k}p_\mu \\ & + 4m\not{p}\not{k}\gamma_\mu \not{k} + 8(p' \cdot k)\not{p}\not{k}\gamma_\mu - 8\not{p}k^2p'_\mu + 8(p' \cdot k)\not{p}\gamma_\mu \not{k} - 8m^2\not{k}\gamma_\mu \not{k} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} = & -2mA\gamma_\mu \not{k} - 4(p' \cdot k)A\gamma_\mu + 4A\not{k}p'_\mu - 2mB\not{k}\gamma_\mu - 4B(p \cdot k)\gamma_\mu + 4B\not{k}p_\mu \\ & - 4m^2\not{k}\gamma_\mu \not{k} + 8m(p \cdot k)\gamma_\mu \not{k} - 8mk^2p_\mu + 8m(p \cdot k)\not{k}\gamma_\mu + 8m(p' \cdot k)\not{k}\gamma_\mu \\ & + 16(p \cdot k)(p' \cdot k)\gamma_\mu - 16(p' \cdot k)\not{k}p_\mu - 8mk^2p'_\mu + 8m(p' \cdot k)\gamma_\mu \not{k} + 16(p' \cdot k)\not{k}p_\mu \\ & - 16(p \cdot k)(p' \cdot k)\gamma_\mu - 8m\not{k}\gamma_\mu \not{k} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} N_\mu^{(1)(2)} = & -2mA\gamma_\mu \not{k} + 4A\not{k}p'_\mu - 2mB\not{k}\gamma_\mu + 4B\not{k}p_\mu + 12m^2k^2\gamma_\mu - 24m^2\not{k}k_\mu \\ & + 16m(p \cdot k)k_\mu - 8mk^2p_\mu + 16m(p' \cdot k)k_\mu - 8mk^2p'_\mu \end{aligned} \quad (3.30)$$

• $N_\mu^{(1)(3)}$

$$\begin{aligned} N_\mu^{(1)(3)} &= -(2m - \not{k})(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)(2m - \not{k}) \quad (3.31) \\ &= -(2m^2 - 2m\not{k} + 2m^2 - \not{k}\not{p}' + k^2 - m\not{k})\gamma^\mu(2m^2 - 2m\not{k} + 2m^2 - \not{p}\not{k} + k^2 - m\not{k}) \\ &= -(4m^2 - 2m\not{k} + k^2 - 2p' \cdot k)\gamma_\mu(4m^2 - 2m\not{k} + k^2 - 2p \cdot k) \\ &= -(4m^2 + [(p' - k)^2 - m^2] - 2m\not{k})\gamma_\mu(4m^2 + [(p - k)^2 - m^2] - 2m\not{k}) \end{aligned}$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 37

Então,

$$\begin{aligned}
 = & -16m^4\gamma_\mu - 4m^2([(p' - k)^2 - m^2] + [(p - k)^2 - m^2])\gamma_\mu \\
 & -([(p' - k)^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2]\gamma_\mu + 8m^3\gamma_\mu\not{k} + 8m^3\not{k}\gamma_\mu \\
 & + 2m[(p - k)^2 - m^2]\not{k}\gamma_\mu + 2m[(p' - k)^2 - m^2]\gamma_\mu\not{k} - 4m^2\not{k}\gamma^\mu\not{k}
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$N_\mu^{(1)(3)} = 16m^3k_\mu + 2m[(p - k)^2 - m^2]\not{k}\gamma_\mu + 2m[(p' - k)^2 - m^2]\gamma_\mu\not{k} - 8m^2\not{k}k_\mu \quad (3.32)$$

Levando esse três numeradores na equação 3.17 e integrando cada uma das três partes assim resultantes:

$$\Lambda_\mu^{(1)(1)} = \frac{i\kappa^2 e}{8} \int_k^\Lambda \frac{N_\mu^{(1)(1)}}{D} \quad (3.33)$$

$$\Lambda_\mu^{(1)(2)} = \frac{i\kappa^2 e}{8} \int_k^\Lambda \frac{N_\mu^{(1)(2)}}{D} \quad (3.34)$$

$$\Lambda_\mu^{(1)(3)} = \frac{i\kappa^2 e}{8} \int_k^\Lambda \frac{N_\mu^{(1)(3)}}{D} \quad (3.35)$$

No cálculo de $\Lambda_\mu^{(1)(1)}$, usando:

$$(2p-k) \cdot (2p'-k) = -2p' \cdot k - 2p \cdot k + k^2 + 4m^2 = [(k-p)^2 - m^2] + [(k-p')^2 - m^2] + 4m^2 - k^2 \quad (3.36)$$

Integrando fica:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_\mu^{(1)(1)} = \frac{i\kappa^2 e}{8} \left\{ 4\gamma^\alpha (p+p')_\mu (I_\alpha(p') + I_\alpha(p) + 4m^2 J_\alpha - I_\alpha(p, p')) \right. \\
 - 4m (I_\mu(p') + I_\mu(p) + 4m^2 J_\mu - I_\mu(p, p')) \\
 \left. - 4\gamma^\alpha (I_{\alpha\mu}(p') + I_{\alpha\mu}(p) + 4m^2 J_{\alpha\mu} - I_{\alpha\mu}(p, p')) \right\} \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 38

No cálculo de $\Lambda_\mu^{(1)(2)}$, usando:

$$p \cdot k = \frac{1}{2}[k^2 + p^2 - (p-k)^2] = \frac{1}{2}[k^2 - [(p-k)^2 - m^2]]$$

Integrando fica:

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(1)(2)} = & \frac{i\kappa^2 e}{8} \left\{ -2m\gamma_\mu\gamma^\alpha(4m^2J_\alpha + I_\alpha(p)) + 4p'_\mu\gamma^\alpha(4m^2J_\alpha + I_\alpha(p)) \right. \\ & -2m\gamma^\alpha\gamma_\mu(4m^2J_\alpha + I_\alpha(p')) + 4p_\mu\gamma^\alpha(4m^2J_\alpha + I_\alpha(p')) - 24m^2\gamma^\alpha J_{\alpha\mu} \\ & \left. + 8m[2I_\mu(p, p') - I_\mu(p) - I_\mu(p')] - 8m(p+p')_\mu I(p, p') \right\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} = & \frac{i\kappa^2 e}{8} [-2m\gamma_\mu\cancel{p}' + 2mp'_\mu - \cancel{p}'_\mu + 2mp_\mu + 4m(p+p')_\mu - 8m(p+p')_\mu] I_{log} \\ = & \frac{i\kappa^2 e}{8} [-2m(p+p')_\mu] I_{log} \end{aligned} \quad (3.39)$$

E no cálculo de $\Lambda_\mu^{(1)(3)}$, integrando:

$$\Lambda_\mu^{(1)(3)} = \frac{i\kappa^2 e}{8} \left\{ 16m^3 J_\mu - 8m^2\gamma^\alpha J_{\mu\alpha} + 2m\gamma^\alpha I_\alpha(p')\gamma_\mu + 2m\gamma_\mu\gamma^\alpha I_\alpha(p) \right\} \quad (3.40)$$

No total:

$$\Lambda_\mu^{(1)} = \Lambda_\mu^{(1)(1)} + \Lambda_\mu^{(1)(2)} + \Lambda_\mu^{(1)(3)} \quad (3.41)$$

Nas expressões acima, o significado das integrais I , I_μ e J_μ etc... (apêndice C) e desprezando termos proporcionais a γ_μ :

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(1)} = & \frac{\kappa^2 e}{8} \left\{ 2(2p'_\mu - m\gamma_\mu)\gamma^\alpha(4m^2J_\alpha + I_\alpha(p)) + 2\gamma^\alpha(2p_\mu - m\gamma_\mu)(4m^2J_\alpha + I_\alpha(p')) \right. \\ & \left. - 24m^2\gamma^\alpha J_{\alpha\mu} + 8m(2I_\mu(p, p') - I_\mu(p) - I_\mu(p')) - 8m(p+p')_\mu I(p, p') \right\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

E substituindo o resultado dessas integrais, e dado que $\kappa^2 = 8\pi G_N$ e $b = i/(4\pi)^2$, e pela definição de F_2 , devemos multiplicar o coeficiente de $(p+p')_\mu$ nessa equação por $2m/(ie)$, que resulta:

$$F_2^{(1)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{b} I_{log}(\lambda^2) + \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) - \frac{29}{18} - 2i\pi^2 \left(\frac{2}{3} \alpha_3 + 6\alpha_2 \right) \right\} \quad (3.43)$$

3.2.2 Diagramas 2 e 3

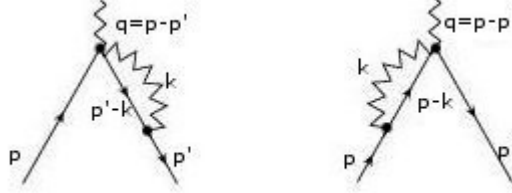


Figura 3.3: Diagramas 2 e 3

Ambos os diagramas, 2 e 3, referem-se à troca de um gráviton de um dos elétrons com ele mesmo. Segue o cálculo de $\Lambda_\mu^{(2)}$ e $\Lambda_\mu^{(3)}$ com as mesmas regras do apêndice D:

$$\Lambda_\mu^{(2)} = \int_k^\Lambda \frac{1}{D} \left(\frac{i\kappa}{2}\right) \gamma_\alpha (2p' - k)_\beta i(\not{p}' - \not{k} + m) \frac{i}{2} (g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} + g^{\beta\rho} g^{\alpha\sigma} - g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma}) (-ie\kappa g_{\rho\mu} \gamma_\sigma) \quad (3.44)$$

Onde $D = [(p' - k)^2 - m^2]k^2$ e, organizando as constantes fica:

$$= \frac{-e\kappa^2}{4} \int_k^\Lambda \frac{1}{D} \gamma_\alpha (\not{p}' - \not{k} + m) g_{\rho\mu} \gamma_\sigma (g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} + g^{\beta\rho} g^{\alpha\sigma} - g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma}) (2p' - k)_\beta \quad (3.45)$$

Sinteticamente,

$$\Lambda_\mu^{(2)} = \frac{-e\kappa^2}{4} \int_k^\Lambda \frac{N_\mu}{D} \quad (3.46)$$

Onde

$$N_\mu = \gamma_\mu (\not{p}' - \not{k} + m) (2p' - k)_\mu + \gamma_\alpha (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\alpha (2p' - k)_\mu - (2p' - k)_\mu (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma_\mu \quad (3.47)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 40

Utilizando inteligentemente a álgebra de Clifford e as condições on-shell, sempre que possível:

$$\begin{aligned}
&= m\gamma_\mu(2\mathbf{p}' - \mathbf{k}) + (\mathbf{p}' - \mathbf{k})(2\mathbf{p}' - \mathbf{k})\gamma_\mu + 2(2\mathbf{p}' - \mathbf{k})(p' - k)_\mu - 2(\mathbf{p}' - \mathbf{k})(2p' - k)_\mu \\
&\quad - 2(\mathbf{p}' - \mathbf{k})(2p' - k)_\mu + 4m(2p' - k)_\mu - (2\mathbf{p}' - \mathbf{k})(\mathbf{p}' - \mathbf{k})\gamma_\mu - m(2\mathbf{p}' - \mathbf{k})\gamma_\mu \\
&= -2m(2m - \mathbf{k})\gamma_\mu + 2m(2p' - k)_\mu + (2m^2 - m\mathbf{k} - \mathbf{k}\mathbf{p}' + k^2)\gamma_\mu + 2(2m - \mathbf{k})(p' - k)_\mu \\
&\quad - 4(m - \mathbf{k})(2p' - k)_\mu + 4m(2p' - k)_\mu - 2(2m^2 - (2m^2 + 2m\mathbf{k} - \mathbf{k}\mathbf{p}' + k^2)\gamma_\mu \\
&\quad = (-4m^2 + 2m\mathbf{k} + m\mathbf{k} + m\mathbf{k} - 2(p' \cdot k))\gamma_\mu + (4m + 4m)p'_\mu \\
&\quad \quad + (-2\mathbf{k} + 8\mathbf{k})p'_\mu + (-2m - 4m)k_\mu + (2\mathbf{k} - 4\mathbf{k})k_\mu
\end{aligned}$$

Por fim,

$$N_\mu = (-4m^2 + 4m\mathbf{k} - 2(p' \cdot k))\gamma_\mu + (8m + 6\mathbf{k})p'_\mu + (-6m - 2\mathbf{k})k_\mu \quad (3.48)$$

Que, substituindo na equação 3.46 e integrando dá:

$$\Lambda_\mu^{(2)} = \frac{-e\kappa^2}{4} \{ 8mp'_\mu I(p') + 6\gamma^\alpha p'_\mu I_\alpha(p') - 6mI_\mu(p') - 2m\gamma^\alpha I_{\alpha\mu}(p') + A\gamma_\mu \} \quad (3.49)$$

Na expressão acima, A representa todos os termos que multiplicam γ_μ que são irrelevantes para o problema em questão, e também encontramos os termos I , I_μ e $I_{\mu\nu}$ que são as integrais divergentes encontradas no apêndice C. Substituindo o valor dessas integrais (apêndice C) e ignorando os termos proporcionais a γ_μ :

$$\Lambda_\mu^{(2)} = \frac{-e\kappa^2}{4} \left\{ \frac{22}{3} I_{\log}(\lambda^2) + \frac{22}{3} b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + \frac{140}{9} b - \frac{2}{3} \alpha_3 \right\} mp'_\mu \quad (3.50)$$

Essa amplitude somada à amplitude $\Lambda_\mu^{(3)}$, obtida com a troca de $p \leftrightarrow p'$, resulta como fator multiplicante do termo $(p + p')_\mu$:

$$\frac{-e\kappa^2}{4} m \left\{ \frac{22}{3} I_{\log}(\lambda^2) + \frac{22}{3} b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + \frac{140}{9} b - \frac{2}{3} \alpha_3 \right\} \quad (3.51)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 41

De tal maneira que, dado que $\kappa^2 = 8\pi G_N$ e $b = i/(4\pi)^2$, e pela definição de F_2 , devemos multiplicar o coeficiente que multiplica $(p+p')_\mu$ (equação anterior) por $2m/(ie)$, e achamos:

$$F_2^{(2+3)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ -\frac{11}{6} \left(\frac{1}{b} I_{log}(\lambda^2) + \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) - \frac{35}{9} - \frac{8}{3} i\pi^2 \alpha_3 \right\} \quad (3.52)$$

3.2.3 Diagramas 4 e 5

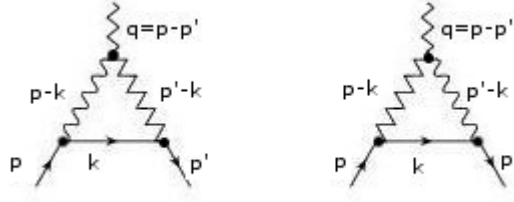


Figura 3.4: Diagramas 4 e 5

Os diagramas 4 e 5 contém um gráviton que aparece no vértice de cima, interagindo com o fóton. Segue o cálculo de $\Lambda_\mu^{(4)}$ e $\Lambda_\mu^{(5)}$ com as regras do apêndice D:

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(4)} = & \int_k^\Lambda \frac{1}{D} \left(\frac{i\kappa}{2} \right) \gamma_\alpha (p' - k)_\beta i(\not{k} + m) (-ie\gamma_\lambda) i g^{\lambda\nu} \frac{i}{2} (g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} + g^{\beta\rho} g^{\alpha\sigma} - g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma}) \\ & \times 2i\kappa [(p - p')_\sigma (p - k)_\rho g_{\mu\nu} - (p - p')_\sigma (p - k)_\mu g_{\rho\nu} - (p - p')_\nu (p - k)_\sigma g_{\rho\mu} \\ & + g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu} (p - p') \cdot (p - k) - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} ((p - p') \cdot (p - k) g_{\mu\nu} - (p - k)_\mu (p - p')_\nu)] \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\text{Onde } D = (k^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2][(p' - k)^2 - m^2]$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 42

Organizando:

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(4)} &= \frac{\kappa^2 e}{2} \int_k^\Lambda \frac{1}{D} \gamma_\alpha(\not{k} + m) \gamma^\nu (p' + k)_\beta (g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} + g^{\beta\rho} g^{\alpha\sigma} - g^{\alpha\beta} g^{\rho\sigma}) \\ &\times \left[(p - p')_\sigma (p - k)_\rho g_{\mu\nu} - (p - p')_\sigma (p - k)_\mu g_{\rho\nu} - (p - p')_\nu (p - k)_\sigma g_{\rho\mu} \right. \\ &\left. + g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu} (p - p') \cdot (p - k) - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} ((p - p') \cdot (p - k) g_{\mu\nu} - (p - k)_\mu (p - p')_\nu) \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

Sinteticamente,

$$\Lambda_\mu^{(4)} = \frac{\kappa^2 e}{2} \int_k^\Lambda \frac{N_\mu^{(4)}}{D} \quad (3.55)$$

O numerador fica, após a eliminação de algumas dessas métricas:

$$\begin{aligned} N_\mu^{(4)} &= \gamma_\alpha(\not{k} + m) \gamma^\nu (p' + k)_\beta \left\{ (p - k)^\alpha (p - p')^\beta g_{\mu\nu} - (p - p')^\beta (p - k)_\mu \delta_\nu^\alpha \right. \\ &- (p - p')_\nu (p - k)^\beta \delta_\mu^\alpha + \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta (p - p') \cdot (p - k) \\ &- g^{\alpha\beta} \left((p - p') \cdot (p - k) g_{\mu\nu} - (p - k)_\mu (p - p')_\nu \right) \\ &+ (p - k)^\beta (p - p')^\alpha g_{\mu\nu} - (p - p')^\alpha (p - k)_\mu \delta_\nu^\beta - (p - p')_\nu (p - k)^\alpha \delta_\mu^\beta \\ &+ \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha (p - p') \cdot (p - k) - g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} (p - p') \cdot (p - k) + g^{\alpha\beta} (p - p')_\nu (p - k)_\mu \\ &+ g^{\alpha\beta} (p - p')_\nu (p - k)_\mu - g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} (p - p') \cdot (p - k) + 2g^{\alpha\beta} \left((p - p') \cdot (p - k) g_{\mu\nu} \right. \\ &\left. - (p - k)_\mu (p - p')_\nu \right) \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Eliminando os últimos fatores de métrica:

$$\begin{aligned} N_\mu^{(4)} &= (\not{p} - \not{k})(\not{k} + m) \gamma_\mu (p' + k) \cdot (p - p') - \gamma_\nu (\not{k} + m) \gamma^\nu (p' + k) \cdot (p - p') (p - k)_\mu \\ &- \gamma_\mu (\not{k} + m) (\not{p} - \not{p}') (p' + k) \cdot (p - k) + \gamma_\nu (\not{k} + m) \gamma^\nu (p - p') \cdot (p - k) (p' + k)_\mu \\ &- (\not{p}' + \not{k})(\not{k} + m) \gamma_\mu (p - p') \cdot (p - k) + (\not{p}' + \not{k})(\not{k} + m) (\not{p} - \not{p}') (p - k)_\mu \\ &+ (\not{p} - \not{p}') (\not{k} + m) \gamma_\mu (p' + k) \cdot (p - k) - (\not{p} - \not{p}') (\not{k} + m) (\not{p}' + \not{k}) (p - k)_\mu \\ &- (\not{p} - \not{k})(\not{k} + m) (\not{p} - \not{p}') (p' + k)_\mu + \gamma_\mu (\not{k} + m) (\not{p}' + \not{k}) (p - p') \cdot (p - k) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 43

De maneira mais simplificada:

$$N_\mu^{(4)} = \sum_{j=1}^{10} N_\mu^{(4)(j)} \quad (3.58)$$

- $N_\mu^{(4)(1)} = (\not{p} - \not{k})(\not{k} + m)\gamma_\mu(p' + k) \cdot (p - p')$
- $N_\mu^{(4)(2)} = -\gamma_\nu(\not{k} + m)\gamma^\nu(p' + k) \cdot (p - p')(p - k)_\mu$
- $N_\mu^{(4)(3)} = -\gamma_\mu(\not{k} + m)(\not{p} - \not{p}')(p' + k) \cdot (p - k)$
- $N_\mu^{(4)(4)} = +\gamma_\nu(\not{k} + m)\gamma^\nu(p - p') \cdot (p - k)(p' + k)_\mu$
- $N_\mu^{(4)(5)} = -(\not{p}' + \not{k})(\not{k} + m)\gamma_\mu(p - p') \cdot (p - k)$
- $N_\mu^{(4)(6)} = +(\not{p}' + \not{k})(\not{k} + m)(\not{p} - \not{p}')(p - k)_\mu$
- $N_\mu^{(4)(7)} = +(\not{p} - \not{p}')(\not{k} + m)\gamma_\mu(p' + k) \cdot (p - k)$
- $N_\mu^{(4)(8)} = -(\not{p} - \not{p}')(\not{k} + m)(\not{p}' + \not{k})(p - k)_\mu$
- $N_\mu^{(4)(9)} = -(\not{p} - \not{k})(\not{k} + m)(\not{p} - \not{p}')(p' + k)_\mu$
- $N_\mu^{(4)(10)} = +\gamma_\mu(\not{k} + m)(\not{p}' + \not{k})(p - p') \cdot (p - k)$

Que, com auxílio da álgebra de Clifford, as condições *on-shell* e eliminando termos que não interessam (proporcionais a γ_μ):

$$\begin{aligned} \bullet N_\mu^{(4)(1)} &= \\ &= (\not{p} - \not{k})(\not{k} + m)\gamma_\mu k \cdot (p - p') \\ &= (\not{p}\not{k}\gamma_\mu + m\not{p}\gamma_\mu - k^2\gamma_\mu - m\not{k}\gamma_\mu)k \cdot (p - p') \\ &= (m\not{k}\gamma_\mu + 2p \cdot k\gamma_\mu - 2\not{k}p_\mu - m^2\gamma_\mu + 2mp_\mu - k^2\gamma_\mu - m\not{k}\gamma_\mu)(p - p') \cdot k \end{aligned}$$

Finalmente,

$$N_\mu^{(4)(1)} = -2(\not{k} + m)p_\mu(p - p') \cdot k \quad (3.59)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 44

• $N_\mu^{(4)(2)} =$

$$= -2(-2k + 4m)(p - p') \cdot k(p - k)_\mu$$

Finalmente,

$$N_\mu^{(4)(2)} = 2(k - 2m)(p - k)_\mu(p - p') \cdot k \quad (3.60)$$

• $N_\mu^{(4)(3)} =$

$$\begin{aligned} &= -\gamma_\mu(k+m)(m-p')(p'+k) \cdot (p-k) = [-m\gamma_\mu k + \gamma_\mu k p' - m^2\gamma_\mu + m\gamma_\mu p'](p'+k) \cdot (p-k) \\ &= [-m\gamma_\mu k + m\gamma_\mu k + 2p' \cdot k\gamma_\mu - 2k p'_\mu - m^2\gamma_\mu - m^2\gamma_\mu + 2m p'_\mu](p'+k) \cdot (p-k) \\ &= [(2p' \cdot k - 2m^2)\gamma_\mu - 2(k-m)p'_\mu](m^2 + (p-p') \cdot k - k^2) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$N_\mu^{(4)(3)} = -2(k-m)p'_\mu[(p-p') \cdot k - (k^2 - m^2)] \quad (3.61)$$

• $N_\mu^{(4)(4)} =$

$$= -2(-2k + 4m)(p' + k)_\mu(p - p') \cdot k$$

Finalmente,

$$N_\mu^{(4)(4)} = 2(k - 2m)(p' + k)_\mu(p - p') \cdot k \quad (3.62)$$

• $N_\mu^{(4)(5)} =$

$$= (m+k)(k+m)\gamma_\mu(p-p') \cdot k = (m^2\gamma_\mu + k^2\gamma_\mu + 2mk\gamma_\mu)(p-p') \cdot k$$

Finalmente,

$$N_\mu^{(4)(5)} = 2mk\gamma_\mu(p-p') \cdot k \quad (3.63)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 45

• $N_\mu^{(4)(6)} =$

$$\begin{aligned} &= (m+k)(k+m)(m-p')(p-k)_\mu = (m^2+k^2+2mk)(m-p')(p-k)_\mu \\ &= (m^3+mk^2+2m^2k-m^3-mk^2+2m^2k-4mp'\cdot k)(p-k)_\mu \end{aligned}$$

Finalmente,

$$N_\mu^{(4)(6)} = 4m(mk-p'\cdot k)(p-k)_\mu \quad (3.64)$$

• $N_\mu^{(4)(7)} =$

$$\begin{aligned} &= (p-m)(k+m)\gamma_\mu(p'+k)\cdot(p-k) = (pk\gamma_\mu+mp\gamma_\mu-mk\gamma_\mu-m^2\gamma_\mu)(p'+k)\cdot(p-k) \\ &= (mk\gamma_\mu+2p\cdot k\gamma_\mu-2kp_\mu-m^2\gamma_\mu+2mp_\mu-mk\gamma_\mu-m^2\gamma_\mu)(p'+k)\cdot(p-k) \\ &= [(2p\cdot k-2m^2)\gamma_\mu-2(k-m)p_\mu](p'+k)\cdot(p-k) \end{aligned}$$

Desconsiderando termos proporcionais a γ_μ chegamos em,

$$N_\mu^{(4)(7)} = -2(k-m)p_\mu[(p-p')\cdot k-(k^2-m^2)] \quad (3.65)$$

• $N_\mu^{(4)(8)} =$

$$\begin{aligned} &= -(p-m)(k+m)(p'+k)(p-k)_\mu = -[pk+mp-mk-m^2](p'+k)(p-k)_\mu \\ &= -[mpk+2mp'\cdot k-2m^2k-m^3+2m^3+m^2k-2mp'\cdot k-m^3+mk^2-m^2k+2mp\cdot k \\ &\quad -mk^2-mk](p-k)_\mu \end{aligned}$$

Finalmente,

$$N_\mu^{(4)(8)} = -[-4m^2k+4mp\cdot k](p-k)_\mu \quad (3.66)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 46

$$\begin{aligned}
 \bullet N_\mu^{(4)(9)} &= \\
 &= -(\not{p} - \not{k})(\not{k} + m)(m - \not{p}')(p' + k)_\mu = -[\not{p}\not{k} + m\not{p} - k^2 - m\not{k}](m - \not{p}')(p' + k)_\mu \\
 &= -[-m^2\not{k} + 2mp \cdot k + m^3 - mk^2 - m^2\not{k} - m\not{p}\not{k} - 2mp' \cdot k \\
 &\quad + 2m^2\not{k} + m^3 - 2m^3 + mk^2 - m^2\not{k} + 2mp' \cdot k](p' + k)_\mu
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$N_\mu^{(4)(9)} = 0 \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned}
 \bullet N_\mu^{(4)(10)} &= \\
 &= -\gamma_\mu(\not{k} + m)(\not{p}' + \not{k})(p - p') \cdot k = [-\gamma_\mu\not{k}\not{p}' - \gamma_\mu k^2 - m\gamma_\mu\not{p}' - m\gamma_\mu\not{k}](p - p') \cdot k \\
 &= [-m\gamma_\mu\not{k} - 2p' \cdot k\gamma_\mu + 2\not{k}p'_\mu - k^2\gamma_\mu + m^2\gamma_\mu - 2mp'_\mu - m\gamma_\mu\not{k}](p - p') \cdot k \\
 &= [(-2p' \cdot k - k^2 + m^2)\gamma_\mu - 2m\gamma_\mu\not{k} + 2(\not{k} - m)p'_\mu](p - p') \cdot k
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$N_\mu^{(4)(10)} = [2(\not{k} - m)p'_\mu - 2m\gamma_\mu\not{k}](p - p') \cdot k \quad (3.68)$$

Assim, o numerador $N_\mu^{(4)}$ totalizará:

$$\begin{aligned}
 N_\mu^{(4)} &= [-2(\not{k} - m)p_\mu + 2(\not{k} - 2m)(p - k)_\mu - 2(\not{k} - m)p'_\mu + 2(\not{k} - 2m)(p' + k)_\mu \\
 &\quad + 2m\not{k}\gamma_\mu - 2(\not{k} - m)p_\mu + 2(\not{k} - m)p'_\mu - 2m\gamma_\mu\not{k}](p - p') \cdot k \\
 &\quad + [2(\not{k} - m)p'_\mu + 2(\not{k} - m)p_\mu](k^2 - m^2) + [8m^2\not{k} - 4m(p + p') \cdot k](p - k)_\mu \\
 &= [-4(\not{k} - m)p_\mu + 2(\not{k} - 2m)(p + p')_\mu + 2m(\not{k}\gamma_\mu - \gamma_\mu\not{k})](p - p') \cdot k \\
 &\quad + [2(\not{k} - m)(p + p')_\mu](k^2 - m^2) + 8m^2\not{k}(p - k)_\mu - 4m(p + p') \cdot k(p - k)_\mu \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 47

Observando que

$$p \cdot k = \frac{1}{2}[-(p-k)^2 + m^2 + k^2] = \frac{1}{2}[-(p-k)^2 + (k^2 - m^2) + 2m^2] \quad (3.70)$$

$$(p+p') \cdot k = -\frac{1}{2}[(p-k)^2 + (p'-k)^2] + (k^2 - m^2) + 2m^2 \quad (3.71)$$

Que deve ser usado no valor de $N_\mu^{(4)}$ encontrado em 3.69. Substituindo esse valor na equação 3.55 e integrando:

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(4)} &= \frac{\kappa^2 e}{2} \left\{ -p_\mu \gamma^\alpha (I_\alpha(p) - I_\alpha(p')) + \gamma^\alpha p'_\mu (I_\alpha(p) - I_\alpha(p')) - 2m p'_\mu (I(p) - I(p')) \right. \\ &\quad + m(\gamma^\alpha \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma^\alpha)(I_\alpha(p) - I_\alpha(p')) + 2(p+p')_\mu (\gamma^\alpha I_\alpha(p, p') - mI(p, p')) \\ &\quad + 2p_\mu [I(p) + I(p')]m - 4p_\mu m I(p, p') - 8m^3 p_\mu J' - 2m[I_\mu(p) + I_\mu(p')] \\ &\quad \left. + 4m I_\mu(p, p') + 8m^3 J'_\mu + 8m^2 p_\mu \gamma^\alpha J'_\alpha - 8m^2 \gamma^\alpha J'_{\alpha\mu} \right\} \quad (3.72) \end{aligned}$$

O diagrama simétrico 5 resultará em uma expressão simétrica para a amplitude, apenas com $p \leftrightarrow p'$ trocados, e outra vez, desprezando termos proporcionais a γ_μ , substituindo o resultado das integrais, e dado que $\kappa^2 = 8\pi G_N$ e $b = i/(4\pi)^2$, e pela definição de F_2 :

$$F_2^{(4+5)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ 2 \left(\frac{1}{b} I_{\log}(\lambda^2) + \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) + 6 - 64i\pi^2 \alpha_2 \right\} \quad (3.73)$$

3.2.4 Diagrama 6

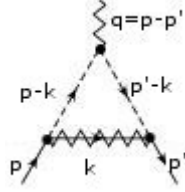


Figura 3.5: Diagrama 6

O diagrama 6 é a contraparte supersimétrica do diagrama 1, onde o gravitino toma o lugar do gráviton e o superelétron do elétron.

$$\Lambda_{\mu}^{(6)} = \int_k^{\Lambda} \frac{1}{D} \frac{-i\kappa}{\sqrt{2}} \gamma_{\alpha} (\not{k} - \not{p}' - m) P_L \left(-\frac{i}{2} \gamma^{\beta} \not{k} \gamma^{\alpha} \right) \left(\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} P_R (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_{\beta} \right) (i^2) i e (p + p' - 2k)_{\mu} \quad (3.74)$$

Onde $D = k^2[(p' - k)^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2]$ e, organizando:

$$= -\frac{\kappa^2 e}{4} \int_k^{\Lambda} \frac{1}{D} \gamma_{\alpha} (\not{k} - \not{p}' - m) \gamma^{\beta} \not{k} \gamma^{\alpha} (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_{\beta} (p + p' - 2k)_{\mu} \quad (3.75)$$

Sinteticamente,

$$\Lambda_{\mu}^{(6)} = \frac{-\kappa^2 e}{4} \int_k^{\Lambda} \frac{N_{\mu}^{(6)}}{D} \quad (3.76)$$

Se for observado que

$$\gamma^{\beta} \not{k} \gamma^{\alpha} (\not{p} - \not{k}) \gamma_{\beta} + 4mk^2 = -4(\not{p} - \not{k})k^2 + 2(\not{p} - \not{k})\not{k}\gamma^{\alpha} + 4mk^2 \quad (3.77)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 49

O numerador fica:

$$N_\mu^{(6)} = \{ -4\cancel{k}(\cancel{k} - \cancel{p}' - m)(\cancel{p} - \cancel{k}) + 2\gamma_\alpha(\cancel{k} - \cancel{p}' - m)(\cancel{p} - \cancel{k})\cancel{k}\gamma^\alpha + 4m\cancel{k}(\cancel{k} - \cancel{p}' - m) \} (p + p' - 2k)_\mu \quad (3.78)$$

Que podemos escrever, de maneira a clarear as contas

$$N_\mu^{(6)} = \{ N_\mu^{(6)(1)} + N_\mu^{(6)(2)} + N_\mu^{(6)(3)} \} (p + p' - 2k)_\mu \quad (3.79)$$

Calcula-se esses três fatores. Nos cálculos a seguir leva-se em consideração

$$(k-p') \cdot (p-k) = k \cdot p + p' \cdot k - k^2 - m^2 = -\frac{1}{2}[k^2 - 2p \cdot k + k^2 - 2p' \cdot k] - m^2 = -\frac{1}{2}[D(p) + D(p')] - m^2 \quad (3.80)$$

$$(p-k) \cdot k = p \cdot k - k^2 = -\frac{1}{2}(-2p \cdot k + k^2 + k^2 - m^2 + m^2) = -\frac{1}{2}[D(p) + D(0) + m^2] \quad (3.81)$$

- $N_\mu^{(6)(1)}$

$$= (-4k^2 + 4\cancel{k}\cancel{p}' + 4m\cancel{k})(m - \cancel{k}) = (-4k^2 + 8p' \cdot k)(m - \cancel{k})$$

$$N_\mu^{(6)(1)} = -4[(p' - k)^2 - m^2](m - \cancel{k}) \quad (3.82)$$

- $N_\mu^{(6)(2)}$

$$= 2\gamma_\alpha(\cancel{k} - \cancel{p}')(\cancel{p} - \cancel{k})\cancel{k}\gamma^\alpha - 8m(p-k) \cdot k = -8(k-p') \cdot (p-k)\cancel{k} + 4\cancel{k}(\cancel{k} - \cancel{p}')(m - \cancel{k}) - 8m(p-k) \cdot k$$

Usando,

$$4(k^2 + m\cancel{k} - 2p' \cdot k)(m - \cancel{k}) = 4[(p' - k)^2 - m^2](m - \cancel{k}) + 4m^2\cancel{k} \quad (3.83)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 50

$$N_{\mu}^{(6)(2)} = -8(k-p') \cdot (p-k)\not{k} - 8m(p-k) \cdot k + 4D(p')(m-\not{k}) + 4m^2\not{k} - 4m^2k \quad (3.84)$$

• $N_{\mu}^{(6)(3)}$

$$= 4m(k^2 + m\not{k} - 2p' \cdot k - m\not{k})$$

$$N_{\mu}^{(6)(3)} = 4mD(p') \quad (3.85)$$

De onde, por fim:

$$N_{\mu}^{(6)(1)} + N_{\mu}^{(6)(2)} + N_{\mu}^{(6)(3)} = 4mD(p') - 8(k-p') \cdot (p-k)\not{k} - 8m(p-k) \cdot k + 4m^2\not{k} - 4m^2k \quad (3.86)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & N_{\mu}^{(6)(1)} + N_{\mu}^{(6)(2)} + N_{\mu}^{(6)(3)} \\ &= 4mD(p') + 4m[D(p) + D(p')]\not{k} + 8m^2\not{k} + 4m[D(p) + D(0)] + 4m^3 + 4m^2\not{k} - 4m\not{k} \\ &= 4m[D(p') + D(p)] + 4[D(p) + D(p')]\not{k} + 12m^2\not{k} \end{aligned} \quad (3.87)$$

E pelas equações 3.79 e 3.76, finalmente chega-se após integração

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu}^{(6)} &= \frac{-\kappa^2 e}{4} \{ 4(p+p')_{\mu} [m(I(p) + I(p')) + 4\gamma^{\alpha}(I_{\alpha}(p) + I_{\alpha}(p'))] - 8[m(I_{\mu}(p) + I_{\mu}(p'))(p+p')_{\mu} \\ &+ \gamma^{\alpha}(I_{\mu\alpha}(p) + I_{\mu\alpha}(p'))] + 12m^2(p+p')_{\mu}\gamma^{\alpha}J_{\alpha} - 24m^2\gamma^{\alpha}J_{\alpha\mu} \} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Desprezando termos proporcionais a γ_{μ} , substituindo o resultado das integrais, e dado que $\kappa^2 = 8\pi G_N$ e $b = i/(4\pi)^2$, e outra vez, pela definição de F_2 :

$$F_2^{(6)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{b} I_{log}(\lambda^2) + \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) - \frac{37}{18} - \frac{32}{3} i\pi^2 \alpha_3 \right\} \quad (3.89)$$

3.2.5 Diagramas 7 e 8

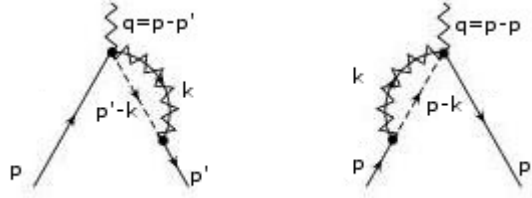


Figura 3.6: Diagramas 7 e 8

Os diagramas 7 e 8 são, por sua vez, as contrapartes supersimétricas dos diagramas 2 e 3, onde também o gravitino toma o lugar do gráviton e o superelétron a do elétron.

$$\Lambda_\mu^{(7)} = \int_k^\Lambda \frac{1}{D} \left(-\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \right) \gamma_\alpha (\not{k} - \not{p}' - m) P_L \left(-\frac{i}{2} \gamma^\beta \not{k} \gamma^\alpha \right) i \left(-\frac{ie\kappa}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \gamma_\beta P_R \right) \quad (3.90)$$

Onde $D = [(p' - k)^2 - m^2]k^2$ e, organizando:

$$= \frac{\kappa^2 e}{4} \int_k^\Lambda \frac{1}{D} \gamma_\alpha (\not{k} - \not{p}' - m) \gamma^\beta \not{k} \gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \quad (3.91)$$

De forma simples

$$\Lambda_\mu^{(7)} = \frac{\kappa^2 e}{4} \int_k^\Lambda \frac{N_\mu^{(7)}}{D} \quad (3.92)$$

$$N_\mu^{(7)} = -4\not{k}(\not{k} - \not{p}' - m)\gamma_\mu + 2\gamma_\alpha(\not{k} - \not{p}' - m)\gamma_\mu \not{k} \gamma^\alpha \quad (3.93)$$

E como o primeiro termo de N_μ , $-4\not{k}(\not{k} - \not{p}' - m)\gamma_\mu$, após alguma manipulação vê-se que é um fator multiplicando uma única matriz γ_μ , pode ser desprezado:

$$-4\not{k}(\not{k} - \not{p}' - m)\gamma_\mu = -4(k^2 + m\not{k} - 2p' \cdot k - m\not{k})\gamma_\mu = -4(k^2 - 2p' \cdot k)\gamma_\mu \quad (3.94)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 52

que não contribui.

Enquanto isso, o segundo termo $2\gamma_\alpha(\not{k} - \not{p}' - m)\gamma_\mu\not{k}\gamma^\alpha$, manipulado

$$2\gamma_\alpha(\not{k} - \not{p}' - m)\gamma_\mu\not{k}\gamma^\alpha = 2\gamma_\alpha(\not{k} - \not{p}')\gamma_\mu\not{k}\gamma^\alpha - 8mk_\mu = -8\not{k}(k - p')_\mu + 4\not{k}(\not{k} - \not{p}')\gamma_\mu - 8mk_\mu \quad (3.95)$$

Deixa apenas $-8\not{k}(k - p')_\mu - 8mk_\mu$ para ser levado em consideração, pois $4\not{k}(\not{k} - \not{p}')\gamma_\mu = 4(k^2 + m\not{k} - 2p' \cdot k)\gamma_\mu$ não contribui.

Então podemos escrever,

$$N_\mu^{(7)} = -8\not{k}(k - p')_\mu - 8mk_\mu \quad (3.96)$$

Substituindo esse valor na equação 3.92 e integrando:

$$\Lambda_\mu^{(7)} = \frac{\kappa^2 e}{4} (8p'_\mu \gamma^\alpha I_\alpha(p') - 8mI_\mu(p') - 8\gamma^\alpha I_{\alpha\mu}(p')) \quad (3.97)$$

O diagrama simétrico 8 resultará em uma expressão simétrica para a amplitude, apenas com $p \leftrightarrow p'$ trocados

$$\Lambda_\mu^{(7)} + \Lambda_\mu^{(8)} = 2\kappa^2 e \{ p'_\mu \gamma^\alpha I_\alpha(p') - mI_\mu(p') - \gamma^\alpha I_{\alpha\mu}(p') + p \leftrightarrow p' \} \quad (3.98)$$

Desprezando termos proporcionais a γ_μ , substituindo o resultado das integrais, e dado que $\kappa^2 = 8\pi G_N$ e $b = i/(4\pi)^2$, e pela definição de F_2 :

$$F_2^{(7+8)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{b} I_{\log}(\lambda^2) + \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) - \frac{4}{9} + \frac{32}{3} i\pi^2 \alpha_2 \right\} \quad (3.99)$$

3.2.6 Diagramas 9 e 10

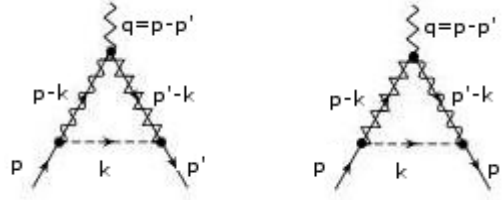


Figura 3.7: Diagramas 9 e 10

Por fim, os diagramas 9 e 10 são as contrapartes supersimétricas dos diagramas 4 e 5, onde mais uma vez o gravitino toma o lugar do gráviton e o superelétron a do elétron.

$$\Lambda_\mu^{(9)} = \int_k^\Lambda \frac{1}{D} \left(-\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \gamma_\alpha (\not{k} - m) P_L \right) \left(-\frac{i}{2} \gamma^\beta (\not{p}' - \not{k}) \gamma^\alpha \right) \left(\frac{i\kappa}{4} [\gamma_\mu, \not{q}] \gamma_\beta \right) i(\not{p} - \not{k}) (-i\sqrt{2}e P_R) i \quad (3.100)$$

Onde $D = (p' - k)^2 (p - k)^2 [k^2 - m^2]$ e, de forma organizada:

$$= \frac{\kappa^2 e}{8} \int_k^\Lambda \frac{1}{D} \gamma_\alpha (\not{k} - m) \gamma^\beta (\not{p}' - \not{k}) \gamma^\alpha [\gamma_\mu, \not{q}] \gamma_\beta (\not{p} - \not{k}) \quad (3.101)$$

Que, de maneira simplificada podemos escrever (p.s.: q é o momento do fóton, $q = p - p'$):

$$\Lambda_\mu^{(9)} = \frac{\kappa^2 e}{8} \int_k^\Lambda \frac{N_\mu^{(9)}}{D} \quad (3.102)$$

E note-se que

$$\gamma^\beta (\not{p}' - \not{k}) \gamma^\alpha [\gamma_\mu, \not{q}] \gamma_\beta = (\not{p}' - \not{k}) \gamma^\alpha \gamma^\beta [\gamma_\mu, \not{q}] \gamma_\beta + 2\gamma^\alpha [\gamma_\mu, \not{q}] (\not{p}' - \not{k}) - 2(\not{p}' - \not{k}) [\gamma_\mu, \not{q}] \gamma^\alpha \quad (3.103)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 54

Como o primeiro termo do lado direito da igualdade vai à zero, $N_\mu^{(9)}$ fica:

$$\begin{aligned}
 N_\mu^{(9)} &= 2\gamma_\alpha(\not{k} - m)\gamma^\alpha[\gamma_\mu, \not{q}](\not{p}' - \not{k})(m - \not{k}) \\
 &\quad - 2\gamma_\alpha(\not{k} - m)(\not{p}' - \not{k})[\gamma_\mu, \not{q}]\gamma^\alpha(m - \not{k}) \\
 &= 2(-2\not{k} - 4m)[\gamma_\mu, \not{q}](\not{p}' - \not{k})(m - \not{k}) \\
 &\quad - 2\gamma_\alpha\not{k}(\not{p}' - \not{k})[\gamma_\mu, \not{q}]\gamma^\alpha(m - \not{k}) + 2m\gamma_\alpha(\not{p}' - \not{k})[\gamma_\mu, \not{q}]\gamma^\alpha(m - \not{k}) \\
 &= -4(\not{k} + 2m)(-2\not{q}\gamma_\mu + 2q_\mu)(\not{p}' - \not{k})(m - \not{k}) - 4(\not{p}' - \not{k})[\gamma_\mu, \not{q}]\not{k}(m - \not{k}) \\
 &\quad + 4\not{k}[\gamma_\mu, \not{q}](\not{p}' - \not{k})(m - \not{k}) + 4m[\gamma_\mu, \not{q}](\not{p}' - \not{k})(m - \not{k})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_\mu^{(9)} &= -4m[\gamma_\mu, \not{q}](\not{p}' - \not{k})(m - \not{k}) - 4m(m - \not{k})[\gamma_\mu, \not{q}]\not{k}(m - \not{k}) \\
 &= -8m\gamma_\mu\not{q}(\not{p}' - \not{k})(m - \not{k}) - 8m(m - \not{k})(m - \not{k})(p - p')_\mu \\
 &\quad - 8(m - \not{k})\gamma_\mu\not{q}\not{k}(m - \not{k}) + 8(m - \not{k})\not{k}(m - \not{k})(p - p')_\mu \quad (3.104)
 \end{aligned}$$

De maneira que podemos escrever

$$N_\mu^{(9)} = N_\mu^{(9)(1)} + N_\mu^{(9)(2)} + N_\mu^{(9)(3)} + N_\mu^{(9)(4)} \quad (3.105)$$

- $N_\mu^{(9)(1)} = -8m\gamma_\mu\not{q}(\not{p}' - \not{k})(m - \not{k})$
- $N_\mu^{(9)(2)} = -8m(m - \not{k})(m - \not{k})(p - p')_\mu$
- $N_\mu^{(9)(3)} = -8(m - \not{k})\gamma_\mu\not{q}\not{k}(m - \not{k})$
- $N_\mu^{(9)(4)} = 8(m - \not{k})\not{k}(m - \not{k})(p - p')_\mu$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 55

Que podemos calcular, ignorando os fatores irrelevantes ao problema em questão, usando as condições on-shell e a álgebra de Clifford:

$$\begin{aligned}
 \bullet N_\mu^{(9)(1)} &= \\
 &= -8m\gamma_\mu(p-p')_\mu(\not{p}'m - \not{p}'\not{k} - \not{k}m + k^2) \\
 &= -8(m^2\gamma_\mu\not{p}\not{p}' - m\gamma_\mu\not{p}\not{p}'\not{k} - m^2\gamma_\mu\not{p}\not{k} + m\gamma_\mu\not{p}k^2 - m^4\gamma_\mu + m^3\gamma_\mu\not{k} + m^2\gamma_\mu\not{p}'\not{k} - m\gamma_\mu\not{p}'k^2) \\
 &= -8\left(m^4\gamma_\mu + m^4\gamma_\mu - 2m^3p'_\mu - m^2\gamma_\mu\not{p}'\not{k} - 2m^3\gamma_\mu\not{k}\not{k} \right. \\
 &\quad \left. + 2mp \cdot k\gamma_\mu\not{p}' + m^3\gamma_\mu\not{k} - 2m^2p \cdot k\gamma_\mu + m^2\gamma_\mu k^2 - m^4\gamma_\mu \right. \\
 &\quad \left. + m^3\gamma_\mu\not{k} - m^3\gamma_\mu\not{k} + 2m^2\not{k}p'_\mu + m^2k^2\gamma_\mu - 2mk^2p'_\mu\right) \\
 &= -8\left(2m^4\gamma_\mu - 2m^3p'_\mu - 2m^2p \cdot k\gamma_\mu + 4mp \cdot kp'_\mu - 2m^2p \cdot k\gamma_\mu - 2m^2k^2\gamma_\mu - 2mk^2p'_\mu \right. \\
 &\quad \left. = -8\left[(2m^4\gamma_\mu - 4m^2p \cdot k\gamma_\mu + 2m^2k^2\gamma_\mu) - 2m(k^2 - 2p \cdot k + m^2)p'_\mu\right] \right)
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$N_\mu^{(9)(1)} = -2m(p-k)^2p'_\mu \cdot 24 = 16m(p-k)^2p'_\mu \quad (3.106)$$

$$\bullet N_\mu^{(9)(2)} =$$

$$= 8m(m^2 - 2m\not{k} + k^2)(p-p')'_\mu = 8m(2m^2 + (k^2 - m^2) - 2m\not{k})(p-p')'_\mu$$

$$N_\mu^{(9)(2)} = 8m(2m^2 + (k^2 - m^2) - 2m\not{k})(p-p')_\mu \quad (3.107)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 56

$$\begin{aligned}
 \bullet N_\mu^{(9)(3)} &= \\
 &= -8(m - \not{k})\gamma_\mu(\not{p} - \not{p}')(\not{k}m - k^2) \\
 &= -8(m - \not{k})\gamma_\mu(\not{p}\not{k}m - mk^2 - \not{p}'\not{k}m + \not{p}'k^2) \\
 &= -8(m - \not{k})\gamma_\mu(-m^2\not{k} + 2mp \cdot k) - mk^2 - m\not{p}'\not{k} + \not{p}'k^2 \\
 &= -8\left(-m^3\gamma_\mu\not{k} + 2m^2p \cdot k\gamma_\mu - m^2k^2\gamma_\mu - m^2\gamma_\mu\not{p}'\not{k} + m\gamma_\mu\not{p}'k^2 \right. \\
 &\quad \left. + m^2\not{k}\gamma_\mu\not{k} - 2mp \cdot k\not{k}\gamma_\mu + mk^2\not{k}\gamma_\mu + m\not{k}\gamma_\mu\not{p}'\not{k} - \not{k}\gamma_\mu\not{p}'k^2\right) \\
 &= -8\left[-m^3\gamma_\mu\not{k} + 2m^2p \cdot k\gamma_\mu - m^2k^2\gamma_\mu + m^3\gamma_\mu\not{k} - 2m^2\not{k}p'_\mu - m^2k^2\gamma_\mu \right. \\
 &\quad \left. + 2mk^2p'_\mu - m^2k^2\gamma_\mu + 2m^2\not{k}k_\mu - 2mp \cdot k\not{k}\gamma_\mu + mk^2\not{k}\gamma_\mu + m^2\not{k}\gamma_\mu\not{k} \right. \\
 &\quad \left. + 2mk^2p'_\mu - 2mp' \cdot k\gamma_\mu\not{k} - mk^2\not{k}\gamma_\mu - 2\not{k}k^2p'_\mu + 2(p' \cdot k)k^2\gamma_\mu\right] \\
 &= -8\left[2m^2p \cdot k\gamma_\mu - 4m^2k^2\gamma_\mu + p' \cdot k k^2\gamma_\mu + 4m^2\not{k}k_\mu - 2mp \cdot k\not{k}\gamma_\mu \right. \\
 &\quad \left. - 2m^2\not{k}p'_\mu + 2mk^2p'_\mu + 2mk^2p'_\mu - 2\not{k}k^2p'_\mu - 2mp' \cdot k\gamma_\mu\not{k}\right]
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 N_\mu^{(9)(3)} &= -8\left[-2m(p - p') \cdot k\not{k}\gamma_\mu - 4mp' \cdot k k_\mu + 4m^2\not{k}k_\mu - 2\not{k}(k^2 + m^2)p'_\mu + 4mk^2p'_\mu\right] \\
 &= -8\left[-2m(p - p') \cdot k\not{k}\gamma_\mu - 4mp' \cdot k k_\mu + 4m^2\not{k}k_\mu \right. \\
 &\quad \left. - 2\not{k}(k^2 + m^2)p'_\mu - 4\not{k}m^2p'_\mu + 4m(k^2 - m^2)p'_\mu + 4m^3p'_\mu\right]
 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
 N_\mu^{(9)(3)} &= -8\left[-2m(p - p') \cdot k\not{k}\gamma_\mu - 4mp' \cdot k k_\mu \right. \\
 &\quad \left. + 4m^2\not{k}k_\mu(4m - 2\not{k})(k^2 - m^2)p'_\mu - 4m^2\not{k}p'_\mu + 4m^3p'_\mu\right] (3.108)
 \end{aligned}$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 57

• $N_\mu^{(9)(4)} =$

$$\begin{aligned}
 &= 8(m - \not{k})\not{k}(m - \not{k})(p - p')_\mu \\
 &= 8(m - \not{k})(\not{k}m - k^2)(p - p')_\mu \\
 &= 8(m^2\not{k} - mk^2 - k^2m + \not{k}k^2)(p - p')_\mu \\
 &= 8[\not{k}(k^2 - m^2) + 2m^2\not{k} - 2mk^2](p - p')_\mu \\
 &= 8[\not{k}(k^2 - m^2) - 2m(k^2 - m^2) + 2m^2\not{k} - 2m^3](p - p')_\mu
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_\mu^{(9)(4)} = & 16m(p - k)^2 p'_\mu + 8m[2m^2 + (k^2 - m^2) - 2m\not{k}](p - p')_\mu \\
 & + 8[\not{k}(k^2 - m^2) - 2m(k^2 - m^2) + 2m^2\not{k} - 2m^3](p - p')_\mu \\
 & + 16m(p - p') \cdot k\not{k}\gamma_\mu + 32mp' \cdot k k_\mu - 32m^2\not{k}k_\mu \\
 & - 8(4m - 2\not{k})(k^2 - m^2)p'_\mu + 32m^2\not{k}p'_\mu - 32m^3p'_\mu \quad (3.109)
 \end{aligned}$$

Finalmente, totalizando (equação 3.105)

$$\begin{aligned}
 N_\mu^{(9)} = & 16m(p - k)^2 p'_\mu + 8(\not{k} - m)(k^2 - m^2)(p - p')_\mu - 16(2m - \not{k})(k^2 - m^2)p'_\mu \\
 & + 8m[(p' - k)^2 - (p - k)^2]\not{k}\gamma_\mu + 16m(p' - k)^2 k_\mu + 16m(k^2 - m^2)k_\mu \\
 & + 32m^3 k_\mu - 32m^2\not{k}k_\mu + 32(\not{k} - m)m^2 p'_\mu \quad (3.110)
 \end{aligned}$$

Concluindo,

$$\begin{aligned}
 \Lambda_\mu^{(9)} = & \frac{\kappa^2 e}{8} \left[16mp'_\mu I(p') + 8\gamma^\alpha (p - p')_\mu I_\alpha(p, p') - 8m(p - p')_\mu I(p, p') \right. \\
 & - 32mp'_\mu I(p, p') + 16p'_\mu \gamma^\alpha I_\alpha(p, p') + 8m\gamma_\alpha [I_\alpha(p) - I_\alpha(p')] \gamma_\mu \\
 & - 16mI_\mu(p) + 16mI_\mu(p, p') + 32m^3 J_\mu - 32m^2 \gamma^\alpha J_{\mu\alpha} \\
 & \left. + 32m^2 p'_\mu \gamma^\alpha J_\alpha - 32m^3 p'_\mu J \right] \quad (3.111)
 \end{aligned}$$

Desprezando termos proporcionais a γ_μ , substituindo o resultado das integrais, e dado que $\kappa^2 = 8\pi G_N$ e $b = i/(4\pi)^2$, e pela definição de F_2 :

$$F_2^{(9+10)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ 2 \left(\frac{1}{b} I_{log}(\lambda^2) + \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) + 2 - 64i\pi^2 \alpha_2 \right\} \quad (3.112)$$

3.2.7 Conclusão

Os resultados dos diagramas, reunidos, em termos das integrais (apêndice C):

- $\Lambda_\mu^{(1)}$

$$\frac{\kappa^2 e}{8} \left\{ 2(2p'_\mu - m\gamma_\mu)\gamma^\alpha (4m^2 J_\alpha + I_\alpha(p)) + 2\gamma^\alpha (2p_\mu - m\gamma_\mu)(4m^2 J_\alpha + I_\alpha(p')) \right. \\ \left. - 24m^2 \gamma^\alpha J_{\alpha\mu} + 8m(2I_\mu(p, p') - I_\mu(p) - I_\mu(p')) - 8m(p + p')_\mu I(p, p') \right\}$$

- $\Lambda_\mu^{(2)} + \Lambda_\mu^{(3)}$

$$\frac{-e\kappa^2}{4} \left\{ \left(\frac{22}{3} I_{\log}(\lambda^2) + \frac{22}{3} b \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) + \frac{140}{9} b - \frac{2}{3} \alpha_3 \right) m p'_\mu + p \leftrightarrow p' \right\}$$

- $\Lambda_\mu^{(4)} + \Lambda_\mu^{(5)}$

$$\frac{\kappa^2 e}{2} \left\{ -p_\mu \gamma^\alpha (I_\alpha(p) - I_\alpha(p')) + \gamma^\alpha p'_\mu (I_\alpha(p) - I_\alpha(p')) - 2m p'_\mu (I(p) - I(p')) \right. \\ \left. + m(\gamma^\alpha \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma^\alpha)(I_\alpha(p) - I_\alpha(p')) + 2(p + p')_\mu (\gamma^\alpha I_\alpha(p, p') - m I(p, p')) \right. \\ \left. + 2p_\mu [I(p) + I(p')]m - 4p_\mu m I(p, p') - 8m^3 p_\mu J' - 2m [I_\mu(p) + I_\mu(p')] \right. \\ \left. + 4m I_\mu(p, p') + 8m^3 J'_\mu + 8m^2 p_\mu \gamma^\alpha J'_\alpha - 8m^2 \gamma^\alpha J'_{\alpha\mu} + p \leftrightarrow p' \right\}$$

- $\Lambda_\mu^{(6)}$

$$\frac{-\kappa^2 e}{4} \left\{ 4(p + p')_\mu [m(I(p) + I(p')) + 4\gamma^\alpha (I_\alpha(p) + I_\alpha(p'))] - 8[m(I_\mu(p) + I_\mu(p'))(p + p')_\mu \right. \\ \left. + \gamma^\alpha (I_{\mu\alpha}(p) + I_{\mu\alpha}(p'))] + 12m^2 (p + p')_\mu \gamma^\alpha J_\alpha - 24m^2 \gamma^\alpha J_{\alpha\mu} \right\}$$

- $\Lambda_\mu^{(7)} + \Lambda_\mu^{(8)}$

$$2\kappa^2 e \left\{ p'_\mu \gamma^\alpha I_\alpha(p') - m I_\mu(p') - \gamma^\alpha I_{\alpha\mu}(p') + p \leftrightarrow p' \right\}$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade 59

- $\Lambda_\mu^{(9)} + \Lambda_\mu^{(10)}$

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa^2 e}{8} \left[16m p'_\mu I(p') + 8\gamma^\alpha (p-p')_\mu I_\alpha(p, p') - 8m(p-p')_\mu I(p, p') \right. \\ & \quad - 32m p'_\mu I(p, p') + 16p'_\mu \gamma^\alpha I_\alpha(p, p') + 8m\gamma_\alpha [I_\alpha(p) - I_\alpha(p')] \gamma_{\mu\alpha} \\ & \quad - 16m I_\mu(p) + 16m I_\mu(p, p') + 32m^3 J_\mu - 32m^2 \gamma^\alpha J_{\mu\alpha} \\ & \quad \left. + 32m^2 p'_\mu \gamma^\alpha J_\alpha - 32m^3 p'_\mu J + p \leftrightarrow p' \right] \end{aligned}$$

E os resultados das contribuições de cada diagrama para os fatores de forma F_2 :

- $F_2^{(1)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{b} I_{log}(\lambda^2) + \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) - \frac{29}{18} - 2i\pi^2 \left(\frac{2}{3} \alpha_3 + 6\alpha_2 \right) \right\}$
- $F_2^{(2+3)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ -\frac{11}{6} \left(\frac{1}{b} I_{log}(\lambda^2) + \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) - \frac{35}{9} - \frac{8}{3} i\pi^2 \alpha_3 \right\}$
- $F_2^{(4+5)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ 2 \left(\frac{1}{b} I_{log}(\lambda^2) + \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) + 6 - 64i\pi^2 \alpha_2 \right\}$
- $F_2^{(6)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{b} I_{log}(\lambda^2) + \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) - \frac{37}{18} - \frac{32}{3} i\pi^2 \alpha_3 \right\}$
- $F_2^{(7+8)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{b} I_{log}(\lambda^2) + \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) - \frac{4}{9} + \frac{32}{3} i\pi^2 \alpha_2 \right\}$
- $F_2^{(9+10)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ 2 \left(\frac{1}{b} I_{log}(\lambda^2) + \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right) + 2 - 64i\pi^2 \alpha_2 \right\}$

De maneira que, temos no setor do gráviton:

$$F_2^{(1)} + F_2^{(2+3)} + F_2^{(4+5)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} - 4i\pi^2 (19\alpha_2 + \alpha_3) \right\}$$

E, no setor do gavitino:

$$F_2^{(6)} + F_2^{(7+8)} + F_2^{(9+10)} = \frac{G_N m^2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2} - 64i\pi^2 \alpha_2 \right\}$$

Para a correção total em ordem um *loop*, temos então:

$$\sum_{i=1}^{10} F_2^{(i)} = \frac{G_N m^2}{\pi} 0 - 4i\pi^2 (35\alpha_2 + \alpha_3)$$

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g - 2)_l$ em supergravidade⁶⁰

As contribuições dos dois setores se cancelam se fizermos $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, como esperado, por causa da supersimetria! É claro que esta não é a única opção para esse cálculo, por exemplo, $\alpha_3 = -35\alpha_2$ é também compatível com a supersimetria. Apesar de que, para qualquer valor dos α 's não termos termos proporcionais ao momento do fóton (isso violaria explicitamente a simetria de calibre) essa escolha ($\alpha_3 = -35\alpha_2$) violaria a invariância de calibre. Por outro lado, a escolha $\alpha_i = 0$ impõe invariância do roteamento dos momentos e, conseqüentemente, invariância de calibre, enquanto não tivermos anomalias.

Os resultados em IR podem ser comparados com os resultados obtidos com a regularização diferencial e com a redução dimensional na seguinte tabela 3.1.

Capítulo 3. Aplicação da IR ao cálculo do fator $(g-2)_l$ em supergravidade61

Diagrama	Regul. Dim.	Red. Dim.	Const. DR	IR
D1	$\frac{1}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{61}{36}$	$\frac{1}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{29}{18}$	$-\frac{1}{6} \log\left(\frac{\bar{M}^2}{m^2}\right) - \frac{25}{18}$	$-\frac{1}{6} \left(\frac{1}{b} I_{log}\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right)\right) - \frac{29}{18}$
D2 + D3	$\frac{11}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{32}{9}$	$\frac{11}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{35}{9}$	$-\frac{1}{6} \log\left(\frac{\bar{M}^2}{m^2}\right) - \frac{1}{9}$	$-\frac{11}{6} \left(\frac{1}{b} I_{log}\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right)\right) - \frac{35}{9}$
D4 + D5	$-4 \frac{1}{n-4} + 7$	$-4 \frac{1}{n-4} + 6$	$2 \log\left(\frac{\bar{M}^2}{m^2}\right) + 2$	$+2 \left(\frac{1}{b} I_{log}\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right)\right) + 6$
Gráviton (D1 + D2 + D3 + D4 + D5)	7/4	1/2	1/2	1/2
D6	$\frac{8}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{55}{18}$	$\frac{8}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{37}{18}$	$-\frac{4}{3} \log\left(\frac{\bar{M}^2}{m^2}\right) + \frac{19}{18}$	$-\frac{4}{3} \left(\frac{1}{b} I_{log}\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right)\right) - \frac{37}{18}$
D7 + D8	$\frac{4}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{13}{9}$	$\frac{4}{3} \frac{1}{n-4} - \frac{4}{9}$	$-\frac{2}{3} \log\left(\frac{\bar{M}^2}{m^2}\right) + \frac{4}{9}$	$-\frac{2}{3} \left(\frac{1}{b} I_{log}\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right)\right) - \frac{4}{9}$
D9 + D10	$-4 \frac{1}{n-4} + 4$	$-4 \frac{1}{n-4} + 2$	$2 \log\left(\frac{\bar{M}^2}{m^2}\right) - 2$	$2 \left(\frac{1}{b} I_{log}\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right)\right) + 2$
Gravitino (D6 + D7 + D8 + D9 + D10)	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
Total (Graviton + Gravitino)	5/4	0	0	0

Tabela 3.1: Contribuições dos diagramas a $\left(\frac{g-2}{2}\right)_l$ em unidades de $\frac{G_N m^2}{\pi}$, na IR e em diferentes outras técnicas de regularização/renormalização

Capítulo 4

Conclusões

No capítulo 2 aplicamos o método da Regularização Implícita à renormalização da QCD em ordem um *loop*. Mostramos, portanto, que ela preserva uma simetria de calibre não-abeliana e que não há necessidade de uma prescrição diferente para lidar com teorias massivas ou não-massivas. Uma versão vinculada da IR que implica numa invariância do rótulo do momento também implica em amplitudes invariantes de calibre para o caso não-abeliano.

Outro importante teste a que submetemos o método da IR foi feito na segunda parte deste trabalho. Usamos a técnica para obter um observável físico em uma teoria de calibre supersimétrica. Como esperado, o cancelamento entre as contribuições dos setores do gráviton e do gravitino no momento magnético anômalo do elétron na SUGRA-QED foi observado. Isso resulta de uma série de relações de consistência, que são diferenças entre integrais dependentes de regularização do mesmo grau de divergência, e vemos que devem ser anuladas. São devidas ao requerimento que a IR seja compatível com mudanças nos *momenta* dos *loops*. Portanto, a versão vinculada da regularização implícita ($\alpha_i = 0$) é a maneira direta e natural de se obter amplitudes invariantes por calibre e por supersimetria.

Espera-se que o chamado Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (Minimal Supersymmetric Standard Model - MSSM) possa ser detectado em experimentos a serem realizados em um futuro próximo no LHC, na escala da força fraca, da ordem de 1 TeV . Nessa escala efeitos quânticos são importantes. Ou seja, além da detecção direta de partículas previstas pela supersimetria, a supersimetria também

poderá ser evidenciada através de efeitos virtuais tais como observáveis em precisão eletrofraca no MSSM. Portanto, esquemas perturbativos confiáveis nesse contexto são inestimáveis.

A generalização da técnica para n -loops em teorias escalares já existe. Em teorias de calibre e em teorias supersimétricas, essa realização se processa estruturalmente da mesma forma e, de fato, cálculos a dois (e até mais) loops nessas teorias já estão sendo realizados, entretando o papel dos termos de superfície na efetivação desses cálculos, nesses modelos, é mais relevante.

Apêndice A

Identidade 1.9

Considere a bolha (ou uma parte de certa amplitude da QCD) :

$$I^d = \Lambda^{4-d} \int_k^d \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(k+p)^2 - \mu^2]}. \quad (\text{A.1})$$

O índice d vem da regularização dimensional. Apesar de a IR não usar um regularizador explícito, usaremos regularização dimensional aqui por razões de didática para mostrar como definir uma integral de *loop* irreduzível em uma teoria massiva livre de divergências infravermelhas através da equação (1.9). Relações similares podem ser derivadas para ordens mais altas [6].

Seguimos a prescrição da IR para separar as partes divergentes por meio da identidade dada pela equação (1.1). Como discutimos, podemos assumir rigorosamente um regulador implícito para manipular o integrando algebricamente. No entanto, como não calculamos de fato as integrais de *loops* irreduzíveis, não precisamos tornar o regulador explícito.

$$I^d = \Lambda^{2\epsilon} \left\{ \int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} - \int_k \frac{p^2 + 2p \cdot k}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k+p)^2 - \mu^2]} \right\}, \quad (\text{A.2})$$

com $\epsilon = 2-d/2$. Para ilustrar, pode-se calcular a primeira integral ($I_{log}(m^2)$) usando regularização dimensional para obter

$$\Lambda^{2\epsilon} I_{log}(\mu^2) = b \left[\frac{1}{\epsilon} + A + \ln \left(-\frac{4\Lambda^2}{\mu^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{A.3})$$

onde A é uma constante característica da regularização dimensional. A segunda integral é finita e dá

$$I_{fin}^d = -b \int_0^1 dz \ln \left(\frac{p^2 z(1-z) - \mu^2}{-\mu^2} \right). \quad (\text{A.4})$$

No limite onde $\mu^2 \rightarrow 0$, temos

$$I_{fin}^d = -b \ln \left(-\frac{p^2}{e^2 \mu^2} \right). \quad (\text{A.5})$$

Na IR escrevemos

$$I^d = I_{log}(\mu^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{e^2 \mu^2} \right). \quad (\text{A.6})$$

No entanto, porque

$$\Lambda^{2\epsilon} I_{log}(\lambda^2) = b \left[\frac{1}{\epsilon} + A + \ln \left(-\frac{4\Lambda^2}{\lambda^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{A.7})$$

$\lambda \neq 0$, temos

$$\Lambda^{2\epsilon} I_{log}(\mu^2) - \Lambda^{2\epsilon} I_{log}(\lambda^2) = b \ln \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} \right). \quad (\text{A.8})$$

que é justamente a equação (1.9) no limite $\epsilon \rightarrow 0$. Substituindo essa relação na expressão para I^d chega-se em

$$I^d = I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(\frac{p^2}{e^2 \lambda^2} \right). \quad (\text{A.9})$$

Agora pode-se subtrair um objeto genuinamente divergente no ultravioleta $I_{log}(\lambda^2)$ definindo-se o contratermo apropriado. O parâmetro arbitrário não-nulo λ faz o papel da escala do grupo de renormalização.

Apêndice B

Finitude no Infravermelho das Amplitudes a um *Loop*

Uma discussão importante surge quando se toma o limite $\mu^2 \rightarrow 0$. Deve-se assegurar que, quando se usa a relação de escala dada pela equação (1.9), o termo em $\ln(\mu^2/\lambda^2)$ será cancelado por uma contribuição que vem da parte finita ultravioleta. As integrais divergentes que estão presentes nos cálculos ao nível um *loop* para a renormalização da QCD são:

- $I(\mu^2, p^2)$

$$I(\mu^2, p^2) = \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(k+p)^2 - \mu^2]}$$

- $I_\mu(\mu^2, p^2)$

$$I_\mu(\mu^2, p^2) = \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 - \mu^2)[(k+p)^2 - \mu^2]}$$

- $I_{\mu\nu}(\mu^2, p^2, q^2)$

$$I_{\mu\nu}(\mu^2, p^2, q^2) = \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)[(k+p)^2 - \mu^2][(k+q)^2 - \mu^2]}$$

- $I_{\mu\nu\alpha}(\mu^2, p^2, q^2)$

$$I_{\mu\nu\alpha}(\mu^2, p^2, q^2) = \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha}{(k^2 - \mu^2)[(k+p)^2 - \mu^2][(k+q)^2 - \mu^2]}$$

Nas integrais acima introduzimos a massa μ , que será fixada em zero ao final. Desde que é assumido que as integrais estão regularizadas, pode-se seguir as prescrições da IR, e separar as partes divergentes por meio da identidade dada pela equação (1.1). A seguir são mostrados os cálculos

- $I(\mu^2, p^2)$

$$I(\mu^2, p^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + 2p \cdot k}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k+p)^2 - \mu^2]}$$

Agora usamos a identidade expressada pela equação (1.9) na primeira integral. A segunda, que é finita e não depende de nenhuma técnica específica, é dada por

$$I_{fin} = b \int_0^1 dz \ln \left(\frac{p^2 z(1-z) - \mu^2}{-\mu^2} \right). \quad (\text{B.1})$$

Para $\mu^2 \rightarrow 0$, temos

$$I_{fin} = b \ln \left(-\frac{p^2}{e^2 \mu^2} \right). \quad (\text{B.2})$$

Claramente vemos que μ^2 cancela quando as duas partes são ajuntadas, de tal forma que obtemos

$$I = I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{e^2 \lambda^2} \right). \quad (\text{B.3})$$

- $I_\mu(\mu^2, p^2)$

Após a expansão, algumas integrais desaparecem, dado que os integrandos são ímpares nas variáveis de integração. Após calcularem-se as partes finitas, tem-se

$$I_\mu = -2p^\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} + \frac{b}{2} p_\mu \ln \left(-\frac{p^2}{e^2 \mu^2} \right). \quad (\text{B.4})$$

A integral divergente é $\Theta_{\mu\nu}^{(0)}(\mu^2)$ (ver eq. (1.5)) e usa-se a equação (1.9) para escrever

$$\begin{aligned}
 \Theta_{\mu\nu}^{(0)}(\mu^2) &= \frac{g_{\mu\nu}}{4} (I_{log}(\mu^2) - \alpha_2) \\
 &= \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left(I_{log}(\lambda^2) + b \ln \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} \right) - \alpha_2 \right)
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

De novo vemos o cancelamento de μ^2 quando a parte finita é considerada. Fica-se com

$$I_\mu = -\frac{p_\mu}{2} \left(I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{e^2 \lambda^2} \right) - \alpha_2 \right). \tag{B.6}$$

É importante notar que a equação (1.9) é essencial no cancelamento de μ^2 .

- $I_{\mu\nu}(\mu^2, p^2)$

Após a expansão e cálculo da parte finita, obtém-se

$$\begin{aligned}
 I_{\mu\nu} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} - b \frac{g_{\mu\nu}}{4} \ln \left(-\frac{p^2}{e^2 \mu^2} \right) \\
 &+ b \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} + \mu^2 \eta_{00} \right) - \frac{q^2}{2} \eta_{10} - \frac{p^2}{2} \eta_{01} \right] \right. \\
 &+ \left. p_\mu p_\nu \eta_{02} + q_\mu q_\nu \eta_{20} + (p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu) \eta_{11} \right\},
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

onde

$$\eta_{mm} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z^n y^m}{Q(p, q, y, z)} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
 Q(p, q, y, z) &= p^2 y(1-y) + q^2 z(1-z) \\
 &- 2(p \cdot q)yz - \mu^2
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Pode-se ver facilmente que as funções η_{mm} não tem problemas quando $\mu^2 \rightarrow 0$. A integral divergente tem o resultado (B.5), de tal forma que

$$I_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left(I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{e^2 \lambda^2} \right) - \alpha_2 \right) + f(\eta_{mm}), \tag{B.10}$$

onde $f(\eta_{mm})$ representa a parte dependente de η .

- $I_{\mu\nu\alpha}(\mu^2, p^2)$

O mecanismo é o mesmo que nas outras integrais:

$$\begin{aligned}
 I_{\mu\nu\alpha} &= -2(p+q)^\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \mu^2)^4} \\
 &+ \frac{b}{12} [(p+q)_\mu g_{\nu\alpha} + (p+q)_\nu g_{\mu\alpha} \\
 &+ (p+q)_\alpha g_{\mu\nu}] \ln \left(-\frac{p^2}{e^2 \mu^2} \right) + g(\eta_{nm}). \quad (\text{B.11})
 \end{aligned}$$

O $g(\eta)$ representa a parte dependente de η . A integral divergente é $\Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2)$, como definido na equação (1.7). Usa-se a relação dada pela equação (1.5) para escrever

$$\begin{aligned}
 \Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)}(\mu^2) &= \frac{1}{24} g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}} (I_{\log}(\mu^2) - \alpha_4) \\
 &= \frac{1}{24} g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}} (I_{\log}(\lambda^2) \\
 &+ b \ln \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} \right) - \alpha_4) \quad (\text{B.12})
 \end{aligned}$$

A substituição desse resultado em $I_{\mu\nu\alpha}$ e a adoção dos mesmos procedimentos anteriores, leva ao cancelamento das divergências infravermelhas e tem-se a expressão final

$$\begin{aligned}
 I_{\mu\nu\alpha} &= -\frac{1}{12} [(p+q)_\mu g_{\nu\alpha} + (p+q)_\nu g_{\mu\alpha} \\
 &+ (p+q)_\alpha g_{\mu\nu}] (I_{\log}(\lambda^2) \\
 &- b \ln \left(-\frac{p^2}{e^2 \mu^2} \right) - \alpha_4) + g(\eta_{nm}). \quad (\text{B.13})
 \end{aligned}$$

Chama-se atenção ao fato que, no último cálculo, a equação (5) era obrigatória de maneira a cancelar μ^2 . É também interessante notar que as mesmas relações que são necessárias para se preservar a invariância de calibre são também essenciais para o cancelamento do *cut-off* infravermelho μ^2 .

Apêndice C

As integrais

$I, I_\mu, I_{\mu\nu}, J, J_\mu, J_{\mu\nu}, Z_n, \eta_{nm}, F$

Reunimos nesse apêndice, as definições e os resultados, *on-shell* ($p^2 = m^2$, $(p - p')^2 = 0$), de todas as integrais usadas em nossos cálculos.

C.1 Definições

- η_{mn}

$$\eta_{mn} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{x^m y^n}{H^2} \quad (\text{C.1})$$

- F

$$F = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln\left(\frac{H^2}{-m^2}\right) \quad (\text{C.2})$$

$$H^2 = p'^2 x(1-x) + p^2 y(1-y) + (\mu^2 - m^2)(x+y) - 2p \cdot p' xy - \mu^2$$

- Z

$$Z(p^2, \mu^2) = \int_0^1 dz \ln \left(\frac{p^2 z(1-z) - \mu^2}{-\mu^2} \right), \quad (\text{C.3})$$

- Z_n

$$Z_n(p^2, \mu^2) = \int_0^1 dz z^n \ln \left(\frac{p^2 z(1-z) - \mu^2}{-\mu^2} \right), \quad (\text{C.4})$$

- $I(p, p', m, \mu)$

$$I(p, p', m, \mu) = \int_k^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - \mu^2]} \quad (\text{C.5})$$

- $I_\mu(p, p', m, \mu)$

$$I_\mu(p, p', m, \mu) = \int_k^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - \mu^2]} \quad (\text{C.6})$$

- $I_{\mu\nu}(p, p', m, \mu)$

$$I_{\mu\nu}(p, p', m, \mu) = \int_k^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - \mu^2]} \quad (\text{C.7})$$

- $J(p, p', m, \mu)$

$$J(p, p', m, \mu) = \int_k^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - \mu^2]k^2} \quad (\text{C.8})$$

- $J_\mu(p, p', m, \mu)$

$$J_\mu(p, p', m, \mu) = \int_k^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - \mu^2]k^2} \quad (\text{C.9})$$

- $J_{\mu\nu}(p, p', m, \mu)$

$$J_{\mu\nu}(p, p', m, \mu) = \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - \mu^2]k^2} \quad (\text{C.10})$$

- $J'(p, p', m)$

$$J'(p, p', m) = \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2(p'-k)^2[k^2 - m^2]} \quad (\text{C.11})$$

- $J'_\mu(p, p', m)$

$$J'_\mu(p, p', m) = \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(p-k)^2(p'-k)^2[k^2 - m^2]} \quad (\text{C.12})$$

- $J'_{\mu\nu}(p, p', m)$

$$J'_{\mu\nu}(p, p', m) = \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(p-k)^2(p'-k)^2[k^2 - m^2]} \quad (\text{C.13})$$

C.2 Resultados gerais e específicos das integrais

Após definidas as integrais, apresentamos seus resultados, gerais - dois momenta diferentes, p e p' e duas massas diferentes, m e μ - e específicos; massas iguais e uma das massas nulas. Primeiro os resultados gerais das integrais I e J:

C.2.1 Caso geral: Dois momenta e duas massas diferentes

Resultado das integrais: $(p + k, p' + k)$,

- $I(p, p', m, \mu)$

$$I(p, p', m, \mu) = I_{\log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) - bZ_0(q^2, m^2, \mu^2) \quad (\text{C.14})$$

- $I_\mu(p, p', m, \mu)$

$$\begin{aligned} I_\mu(p, p', m, \mu) = & -\frac{(p+p')_\mu}{2} I_{\log}(\lambda^2) - b \frac{(p+p')_\mu}{2} \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) \\ & + b[(p-p')_\mu Z_1(q^2, m^2, \mu^2) + p'_\mu Z_0(q^2, m^2, \mu^2)] - a_1 \frac{(p+p')_\mu}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

onde $a_1 \frac{g_{\mu\nu}}{4} = \Theta_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{g_{\mu\nu}}{4} I_{\log}$

- $I_{\mu\nu}(p, p', m, \mu)$

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}(p, p', m, \mu) = & \frac{g_{\mu\nu}}{2} I_{quad}(m^2) + \left\{ -\frac{(p^2 + p'^2 + m^2 - \mu^2)}{4} g_{\mu\nu} \right. \\ & - \frac{1}{6} [2p_\mu p_\nu + 2p'_\mu p'_\nu + p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu + g_{\mu\nu}(p^2 + p'^2 + p \cdot p')] \left. \right\} \times (I_{\log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + a_2) \\ & + b \left\{ (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) [Z_2 - Z_1] + \frac{g_{\mu\nu}}{2} (q^2 + m^2 - \mu^2) [Z_0 - Z_1] \right. \\ & \left. - (p_\mu p_\nu - p'_\mu p'_\nu) Z_1 - p'_\mu p'_\nu Z_0 \right\} + a_3 \frac{g_{\mu\nu}}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

onde $\Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{24} g_{\mu\nu\alpha\beta} (I_{\log} + a_2)$ e $\Theta_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (I_{quad} + a_3)$

- $I(p)$

$$\begin{aligned} I(p) &= \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2]k^2} \\ &= I_{log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + 2b \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

- $I_\mu(p)$

$$\begin{aligned} I_\mu(p) &= \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(p-k)^2 - m^2]k^2} \\ &= \frac{p_\mu}{2} \left[I_{log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + b + \alpha_2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

- $I_{\mu\nu}(p)$

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}(p) &= \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{[(p-k)^2 - m^2]k^2} \\ &= \frac{1}{3} p_\mu p_\nu \left[I_{log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + \frac{2}{3}b + \alpha_3 \right] + \text{termos } g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

E, também

- $I(p, p')$

$$\begin{aligned} I(p, p') &= \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - m^2]} \\ &= I_{log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

- $I_\mu(p, p')$

$$\begin{aligned} I_\mu(p, p') &= \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - m^2]} \\ &= \frac{(p+p')_\mu}{2} \left[I_{log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + \alpha_2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

- $I_{\mu\nu}(p, p')$

$$\begin{aligned}
 I_{\mu\nu}(p, p') &= \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - m^2]} \\
 &= \frac{1}{6}(2p_\mu p_\nu + 2p'_\mu p'_\nu + p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu) \left[I_{\log}(\lambda^2) \right. \\
 &\quad \left. + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + \alpha_3 \right] + \text{termos } g_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{C.22}$$

Nas equações a seguir, os termos ϵ são devido às divergências infravermelhas em algumas integrais *on-shell*. Eles aparecem nos diagramas $\Lambda_\mu^{(4)}$, $\Lambda_\mu^{(5)}$, $\Lambda_\mu^{(9)}$ e $\Lambda_\mu^{(10)}$ e são cancelados aos pares.

- J

$$\begin{aligned}
 J &= \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - m^2]k^2} \\
 &= \frac{b}{m^2} [1 + \ln(\epsilon)]
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

- J_μ

$$\begin{aligned}
 J_\mu &= \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - m^2]k^2} \\
 &= -\frac{b}{m^2} (p + p')_\mu
 \end{aligned} \tag{C.24}$$

- $J_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
 J_{\mu\nu} &= \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - m^2]k^2} \\
 &= -\frac{b}{6m^2} \left[p_\mu p_\nu p'_\mu p'_\nu + \frac{1}{2}(p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu) \right] + \text{termos } g_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{C.25}$$

E, também

- J'

$$\begin{aligned}
 J' &= \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2(p'-k)^2[k^2-m^2]} \\
 &= \frac{b}{m^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - 1 - \ln(-\epsilon) \right]
 \end{aligned} \tag{C.26}$$

- J'_μ

$$\begin{aligned}
 J'_\mu &= \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(p-k)^2(p'-k)^2[k^2-m^2]} \\
 &= -\frac{b}{m^2} (p+p')_\mu \left[\frac{1}{2\epsilon} - 1 - \ln(-\epsilon) \right]
 \end{aligned} \tag{C.27}$$

- $J'_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
 J'_{\mu\nu} &= \int_k^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(p-k)^2(p'-k)^2[k^2-m^2]} \\
 &= \frac{b}{m^2} \left[(p_\mu p_\nu + p'_\mu p'_\nu) \left(\frac{1}{3\epsilon} - \ln(-\epsilon) - \frac{3}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu) \left(\frac{1}{3\epsilon} - \ln(-\epsilon) - \frac{1}{2} \right) \right] + \text{termos } g_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{C.28}$$

C.2.2 *On shell*, uma massa nula

Resultado das integrais (*on shell*) - uma massa nula

- $I(p, m, \mu \rightarrow 0)$

$$I(p, m, \mu \rightarrow 0) = I_{log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + 2b \quad (C.29)$$

- $I_\mu(p, m, \mu \rightarrow 0)$

$$I_\mu(p, m, \mu \rightarrow 0) = -\frac{p_\mu}{2} \left[I_{log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + a_1 \right] + b \left(-\frac{p_\mu}{2} \right)$$

chegamos em

$$I_\mu(p, m, \mu \rightarrow 0) = -\frac{p_\mu}{2} \left[I_{log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + b + a_1 \right] \quad (C.30)$$

- $I_{\mu\nu}(p, m, \mu \rightarrow 0)$

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}(p, m, \mu \rightarrow 0) &= \frac{g_{\mu\nu}}{2} (I_{quad}(m^2) + a_3) \\ &+ \left(-\frac{m^2}{2} g_{\mu\nu} + \frac{1}{3} p_\mu p_\nu + 3m^2 g_{\mu\nu} \right) \left(I_{log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + a_2 \right) \\ &+ b \left\{ (m^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \left(-\frac{2}{9} + \frac{1}{2} \right) + m^2 g_{\mu\nu} \left(-2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \right\} \end{aligned}$$

resultando,

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}(p, m, \mu \rightarrow 0) &= \frac{g_{\mu\nu}}{2} (I_{quad}(m^2) + a_3) \\ &+ \left(\frac{5}{2} m^2 g_{\mu\nu} + \frac{1}{3} p_\mu p_\nu \right) \left(I_{log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + a_2 \right) \\ &+ b \left(-\frac{11}{9} m^2 g_{\mu\nu} + \frac{2}{9} p_\mu p_\nu \right) \end{aligned} \quad (C.31)$$

C.2.3 *On shell*, massas iguais

Resultado das integrais (*on shell*) - massas iguais

- $I(p, p', m, m)$

$$I(p, p', m, m) = I_{\log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) \quad (\text{C.32})$$

- $I_\mu(p, p', m, m)$

$$I_\mu(p, p', m, m) = -\frac{(p+p')_\mu}{2} \left[I_{\log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + a_1 \right] \quad (\text{C.33})$$

- $I_{\mu\nu}(p, p', m, m)$

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}(p, p', m, m) &= \frac{g_{\mu\nu}}{2} (I_{quad}(m^2) + a_3) \\ &+ \left[-\frac{m^2}{2} g_{\mu\nu} + \frac{1}{6} (2p_\mu p_\nu + 2p'_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu + 3m^2 g_{\mu\nu}) \right] \\ &\times \left(I_{\log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + a_2 \right) \end{aligned}$$

resultando,

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}(p, p', m, m) &= g_{\mu\nu} (I_{quad}(m^2) + a_3) \\ &+ \left[\frac{5}{2} m^2 g_{\mu\nu} + \frac{1}{6} (2p_\mu p_\nu + 2p'_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu) \right] \\ &\times \left(I_{\log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + a_2 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

- $J(p, p', m, m)$

$$J = \frac{b}{m^2} [1 + \ln(\epsilon)] \quad (\text{C.35})$$

- $J_\mu(p, p', m, m)$

$$J_\mu = \frac{b}{2m^2}(p + p')_\mu \quad (\text{C.36})$$

- $J_{\mu\nu}(p, p', m, m)$

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} = & \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left(I_{\log}(\lambda^2) + b \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) + a_1 \right) \\ & - \frac{b}{6m^2} \left(p_\mu p_\nu + p'_\mu p'_\nu + \frac{1}{2}(p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu) \right) + b \frac{g_{\mu\nu}}{4} \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

Mais resultados,

$$J = b\eta_{00} \quad (\text{C.38})$$

$$J_\mu = -b(p'_\mu \eta_{10} + p_\mu \eta_{01}) \quad (\text{C.39})$$

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} = & \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left(I_{\log}(\lambda^2) + b \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) + a_1 \right) \\ & + b \left[p'_\mu p'_\nu \eta_{20} + p_\mu p_\nu \eta_{02} + (p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu) \eta_{11} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} F \right] \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

Resultado das integrais (*on shell*) - massa trocada nula D:

$$J = \frac{b}{m^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln \epsilon - 1 + i\pi \right] \quad (\text{C.41})$$

$$J_\mu = -\frac{b}{2m^2} \left[\frac{1}{2\epsilon} - \ln \epsilon - 1 + i\pi \right] (p + p')_\mu \quad (\text{C.42})$$

$$\begin{aligned}
 J_{\mu\nu} &= \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left(I_{\log}(\lambda^2) + b \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) + a_1 \right) \\
 &+ b \left[(p_\mu p_\nu + p'_\mu p'_\nu) \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{1}{3\epsilon} - \ln(\epsilon) - \frac{3}{2} + i\pi \right) \right. \\
 &\left. + \frac{1}{\mu^2} (p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu) \left(-\frac{\ln \epsilon}{2} + \frac{1}{6\epsilon} - \frac{1}{4} + \frac{i\pi}{2} - \frac{F}{2} g_{\mu\nu} \right) \right] \quad (C.43)
 \end{aligned}$$

$$J_{\mu\nu}(p^2, \mu^2) = \Theta_{\mu\nu}^{(2)} - p^2 \Theta_{\mu\nu}^{(0)} + 4p^\alpha p^\beta \Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)} \quad (C.44)$$

$$+ b \left\{ \frac{p_\mu p_\nu}{3} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{p^2} (p^2 - \mu^2) Z(p^2, \mu^2) \right] \right. \quad (C.45)$$

$$\left. - \frac{p^2 g_{\mu\nu}}{6} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2p^2} (-p^2 + 4\mu^2) Z(p^2, \mu^2) \right] \right\}, \quad (C.46)$$

$$J_\mu(p^2, \mu^2) = -2p^\alpha \Theta_{\alpha\mu}^{(0)} + \frac{b}{2} p_\mu Z(p^2, \mu^2), \quad (C.47)$$

$$J = I_{\log}(\mu^2) - bZ(p^2, \mu^2), \quad (C.48)$$

lembrando a definição

$$Z(p^2, \mu^2) = \int_0^1 dz \ln \left(\frac{p^2 z(1-z) - \mu^2}{-\mu^2} \right), \quad (C.49)$$

que, para $\mu^2 \rightarrow 0$, é dado por

$$\ln \left(-\frac{p^2}{e^2 \mu^2} \right). \quad (C.50)$$

C.2.4 Funções η

- η_{00}

$$\begin{aligned} H^2 &= m^2x(1-x) + m^2y(1-y) - m^2(x+y) - 2m^2xy \\ &= -m^2x^2 - m^2y^2 - 2m^2xy \\ &= -m^2(x+y)^2 \end{aligned}$$

$$\eta_{00} = -\frac{1}{m^2} \int_0^1 \int_0^{1-x} dx dy \frac{1}{(x+y)^2} \quad (\text{C.51})$$

Fazendo a substituição $u = x + y$, $du = dy$ fica:

$$\begin{aligned} \eta_{00} &= -\frac{1}{m^2} \int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{u^2} dx dy = +\frac{1}{m^2} \int_0^1 dx \left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ &= +\frac{1}{m^2} (x - \ln x) \Big|_0^1 = \frac{1}{m^2} (1 + \ln \epsilon) \end{aligned}$$

$$\eta_{00} = \frac{1}{m^2} (1 + \ln \epsilon) \quad (\text{C.52})$$

- η_{10} e η_{01}

$$\begin{aligned} \eta_{10} = \eta_{01} &= -\frac{1}{m^2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{x}{(x+y)^2} dx dy \\ &= -\frac{1}{m^2} \int_0^1 \int_x^1 \frac{x}{u^2} dx dy = +\frac{1}{m^2} \int_0^1 dx x \left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ &= +\frac{1}{m^2} \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{2m^2} \end{aligned}$$

$$\eta_{10} = \eta_{01} = -\frac{1}{2m^2} \quad (\text{C.53})$$

- η_{20} e η_{02}

Funções η (on Shell) 2:

$$\eta_{20} = \eta_{02} = +\frac{1}{m^2} \int_0^1 dx x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\frac{1}{m^2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{6m^2}$$

Logo,

$$\eta_{20} = \eta_{02} = -\frac{1}{6m^2} \quad (\text{C.54})$$

- η_{11}

$$\eta_{11} = -\frac{1}{m^2} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} \frac{y}{(x+y)^2} dy \quad (\text{C.55})$$

Fazendo a substituição $u = x + y$, $du = dy$ fica:

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= -\frac{1}{m^2} \int_0^1 \int_x^1 \frac{x(u-x)}{u^2} dx du = -\frac{1}{m^2} \int_0^1 x dx \left(\ln u + \frac{x}{u} \right)_x^1 \\ &= -\frac{1}{m^2} \int_0^1 x dx (x - \ln x - 1) \\ &= -\frac{1}{m^2} \int_0^1 dx (x^2 - x \ln x - x) = -\frac{1}{m^2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{12m^2} (3 + 4 - 6) \end{aligned}$$

Logo,

$$\eta_{11} = -\frac{1}{12m^2} \quad (\text{C.56})$$

- F

$$\begin{aligned}
 F &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln(x+y) = 2 \int_0^1 \int_x^1 \ln u du dx = 2 \int_0^1 \left[u(\ln u - 1) \right]_x^1 du \\
 &= 2 \int_0^1 \left[-1 - x(\ln x - 1) \right] dx = 2 \left[-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]_0^1 \\
 &= 2 \left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}(-4 + 2 + 1)
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$F = -\frac{1}{2} \quad (\text{C.57})$$

Mais:

- η_{00}

$$\eta_{00} = -\frac{1}{m^2} \int_\epsilon^1 dx \int_\epsilon^{1-x+\epsilon} dy \frac{1}{(x+y-1)^2} \quad (\text{C.58})$$

Fazendo a substituição $u = x + y - 1$, $du = dy$ fica:

$$\begin{aligned}
 \eta_{00} &= -\frac{1}{m^2} \int_\epsilon^1 dx \int_{x-1+\epsilon}^\epsilon du \frac{1}{u^2} = +\frac{1}{m^2} \int_\epsilon^1 dx \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{x-1+\epsilon} \right) \\
 &= +\frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 - \ln \epsilon + \ln(2\epsilon - 1) \right)
 \end{aligned}$$

$$\eta_{00} = +\frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 - \ln \epsilon + i\pi \right) \quad (\text{C.59})$$

- η_{10}

$$\eta_{10} = \frac{1}{m^2} \int_\epsilon^1 \left(\frac{x}{\epsilon} - \frac{x}{x-1+\epsilon} \right) dx = \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{2\epsilon} - \int_{2\epsilon-1}^\epsilon \frac{(u-1-\epsilon)}{u} du \right)$$

Fazendo a substituição $u = x - 1 + \epsilon$, $du = dx$ fica:

$$\eta_{10} = \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{2\epsilon} - [\epsilon - 2\epsilon + 1 + \ln \epsilon - \ln(2\epsilon - 1)] \right) = \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{2\epsilon} - \ln \epsilon - 1 + i\pi \right)$$

• η_{01}

$$\begin{aligned} \eta_{01} &= -\frac{1}{m^2} \int_\epsilon^1 dx \int_{x-1+\epsilon}^\epsilon \frac{(u+1-x)}{u^2} du = -\frac{1}{m^2} \int_\epsilon^1 dx \left(\ln u - \frac{(1-x)}{u} \right)_{x-1+\epsilon}^\epsilon \\ &= -\frac{1}{m^2} \int_\epsilon^1 dx \left(\ln \epsilon - \ln(x-1+\epsilon) - \frac{(1-x)}{\epsilon} + \frac{(1-x)}{x-1+\epsilon} \right) \\ &= -\frac{1}{m^2} \left(-\frac{1}{2\epsilon} + 1 + \ln \epsilon - 1 - \int_\epsilon^1 \ln(x-1+\epsilon) dx \right) \end{aligned}$$

Ora, e como sabemos que

$$\int_\epsilon^1 \ln(x-1+\epsilon) dx = [(x-1+\epsilon) \ln(x-1+\epsilon)]_\epsilon^1 = \ln(2\epsilon-1) - 1 \quad (\text{C.60})$$

• η_{20} e η_{02}

$$\begin{aligned} \eta_{20} = \eta_{02} &= \frac{1}{m^2} \int_\epsilon^1 dx \left(\frac{x^2}{\epsilon} - \frac{x^2}{x-1+\epsilon} \right) dx = \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{3\epsilon} - \int_{2\epsilon-1}^\epsilon \frac{(u-1+\epsilon)^2}{u} du \right) \\ &= \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{3\epsilon} - \left(\frac{u^2}{2} - 2u + \ln u \right)_{2\epsilon-1}^\epsilon \right] = \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{3\epsilon} - \left(-\frac{1}{2} + 2 + \ln \epsilon - i\pi \right) \right] \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\eta_{20} = \eta_{02} = \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{3\epsilon} - \ln \epsilon - \frac{3}{2} + i\pi \right] \quad (\text{C.61})$$

- η_{11}

$$\begin{aligned}
 \eta_{11} &= -\frac{1}{m^2} \int_\epsilon^1 dx x \left[-\frac{(1-x)}{\epsilon} - 1 + \ln \epsilon - \ln(x-1+\epsilon) \right] \\
 &= -\frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)_\epsilon^1 + (-1 + \ln \epsilon) \frac{x^2}{2} \Big|_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 dx x \ln(x-1+\epsilon) \right] \\
 &= -\frac{1}{m^2} \left[-\frac{1}{6\epsilon} - \frac{1}{2} + \frac{\ln \epsilon}{2} - I \right]
 \end{aligned}$$

E como, (e fazendo a substituição $u = x - 1 + \epsilon$, e $x = u + 1 - \epsilon$)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{2\epsilon-1}^\epsilon du (u+1) \ln u = \left[\frac{u^2}{2} \left(\ln u - \frac{1}{2} \right) + u(\ln u - 1) \right]_{2\epsilon-1}^\epsilon \\
 &= -\frac{1}{2} \left(i\pi - \frac{1}{2} \right) + i\pi - 1 = \frac{i\pi}{2} - \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Chegamos em,

$$\eta_{11} = \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{6\epsilon} - \frac{\ln \epsilon}{2} - \frac{1}{4} + \frac{i\pi}{2} \right] \quad (\text{C.62})$$

C.2.5 Funções Z_n

- Uma massa nula - um momentum:

$$Q^2 = m^2 x(1-x) + (\mu^2 - m^2)x - \mu^2$$

Fazendo $u^2 \rightarrow 0$ chegamos em $Q^2 = -m^2 x^2$ e

$$\ln \left(\frac{Q^2}{-m^2} \right) = \ln x^2 = 2 \ln x$$

$$Z_0 = \int_0^1 dx (2 \ln x) = 2x(\ln x - 1) \Big|_0^1 = -2$$

$$Z_1 = 2 \int_0^1 dx (x \ln x) = 2 \left[\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

$$Z_2 = 2 \int_0^1 dx (x^2 \ln x) = 2 \left[\frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) \right]_0^1 = -\frac{2}{9}$$

Portanto $Z_0 = -2, Z_1 = -\frac{1}{2}, Z_2 = -\frac{2}{9}$

- Duas massas nulas - dois momenta:

Idêntico ao caso com massas iguais e um momentum:

$$Q^2 = \mu^2 x(1-x) + (\mu^2 - \mu^2)x - \mu^2$$

$$\ln \left(\frac{Q^2}{-m^2} \right) = \ln 1 = 0$$

Portanto $Z_0 = Z_1 = Z_2 = 0$

- Duas massas iguais - um momentum:

$$Q^2 = m^2 x(1-x) - m^2 = -m^2(x^2 - x + 1)$$

$$\ln \left(\frac{Q^2}{-m^2} \right) = \ln (x^2 - x + 1)$$

$$Z_0 = \int_0^1 dx \ln (x^2 - x + 1)$$

$$Z_1 = \int_0^1 dx x \ln (x^2 - x + 1)$$

De onde, $Z_1 = \frac{Z_0}{2}$, e

$$Z_2 = \int_0^1 dx x^2 \ln (x^2 - x + 1)$$

De onde, $Z_2 = \frac{1}{3p^2}(p^2 - m^2)Z_0 - \frac{1}{18}$ e para $p^2 = m^2$: $Z_2 = -\frac{1}{18}$

- Duas massas iguais - dois *momenta*:

$$Q^2 = -m^2$$

$$\ln\left(\frac{Q^2}{-m^2}\right) = \ln 1 = 0$$

Portanto $Z_0 = Z_1 = Z_2 = 0$

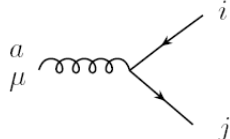
Apêndice D

Regras de Feynman

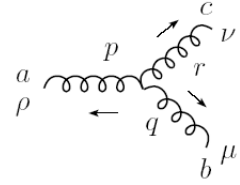
D.1 QCD

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c}
 i \xrightarrow{k} j \\
 i \delta_{ij} \frac{(k+m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}
 \end{array} &
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 a \xrightarrow[k]{\mu \text{ } \nu} b \\
 \text{wavy line}
 \end{array} \\
 \frac{-i \delta_{ab}}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1-\eta) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

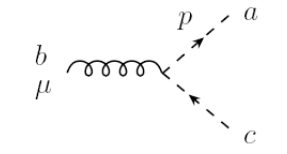
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 a \xrightarrow[k]{\text{dashed}} b \\
 \text{dashed line}
 \end{array} \\
 \frac{-i \delta_{ab}}{k^2 + i\epsilon}
 \end{array}$$



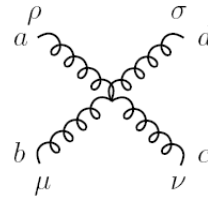
$$ig_s \gamma_\mu T_{ji}^a$$



$$-g_s f^{abc} [(p-q)_\nu g_{\rho\mu} + (q-r)_\rho g_{\mu\nu} + (r-p)_\mu g_{\nu\rho}]$$



$$g_s f^{abc} p_\mu \text{ (} p_\mu \text{ outgoing)}$$



$$\begin{aligned} & -ig_s^2 f^{abe} f^{cde} (g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} - g_{\rho\sigma} g_{\mu\nu}) \\ & -ig_s^2 f^{ace} f^{bde} (g_{\rho\mu} g_{\nu\sigma} - g_{\rho\sigma} g_{\mu\nu}) \\ & -ig_s^2 f^{ade} f^{cbe} (g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} - g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu}) \end{aligned}$$

D.2 Sugra

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ (\not{p} + m)\Delta_F(p^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \Delta_F(p^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mu \quad p \quad \nu \\ \text{~~~~~} \\ g_{\mu\nu}\Delta_F(p^2), \quad \mu^2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} p \\ \text{~~~~~} \\ \not{p}\Delta_F(p^2), \quad \mu^2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mu\nu \quad p \quad \rho\sigma \\ \text{~~~~~} \\ 1/2\{g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}\}\Delta_F(p^2), \quad \mu^2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mu \quad p \quad \nu \\ \text{~~~~~} \\ -1/2\gamma_\nu \not{p}\gamma_\mu\Delta_F(p^2), \quad \mu^2 = 0 \end{array}$$

$$\text{---} \xrightarrow{\text{---}} \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad -ie\gamma_\mu \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad ie(p+p')_\mu$$

$$\text{---} \xrightarrow{\text{---}} \text{---} \quad -ie\sqrt{2}P_{R,L} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad i\frac{\kappa}{2}\gamma_\alpha(p+p')_\beta$$

$$2i\kappa\{g_{\mu\nu}p_\alpha p'_\beta - g_{\alpha\nu}p_\mu p'_\beta - g_{\alpha\mu}p_\beta p'_\nu + g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}p \cdot p' - 1/2g_{\alpha\beta}(p \cdot p'g_{\mu\nu} - p_\mu p'_\nu)\}$$

$$-ie\kappa g_{\mu\alpha}\gamma_\beta \quad \bar{\gamma} \rightarrow \bar{g} : \frac{-i\kappa}{4}\gamma_\alpha[\not{p}, \gamma_\mu]$$

$$\bar{g} \rightarrow \bar{\gamma} : \frac{i\kappa}{4}[\gamma_\mu, \not{p}]\gamma_\alpha$$

$$\bar{g} \rightarrow e : i\frac{\kappa}{\sqrt{2}}P_{L,R}(\not{p}' + m)\gamma_\nu \quad \bar{g} \rightarrow e : \frac{i\kappa}{\sqrt{2}}P_{L,R}\gamma_\mu\gamma_\alpha$$

$$e \rightarrow \bar{g} : -i\frac{\kappa}{\sqrt{2}}\gamma_\nu(\not{p}' - m)P_{L,R} \quad e \rightarrow \bar{g} : \frac{i\kappa}{\sqrt{2}}\gamma_\alpha\gamma_\mu P_{L,R}$$

Apêndice E

Álgebra das matrizes Gama

Esse apêndice tem por objetivo apresentar as principais identidades envolvidas nos cálculos envolvendo a matrizes gama.

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad (\text{E.1})$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu = -2i\sigma_{\mu\nu} \quad (\text{E.2})$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} - i\sigma_{\mu,\nu} \quad (\text{E.3})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{E.4})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbf{I} \quad (\text{E.5})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{E.6})$$

$$\gamma^\mu \gamma^5 \gamma_\mu = -4\gamma^5 \quad (\text{E.7})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu = 4g^{\nu\lambda} \quad (\text{E.8})$$

$$\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\lambda \gamma_\mu = -2\gamma^5 \gamma^\lambda \quad (\text{E.9})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \quad (\text{E.10})$$

$$\gamma^\mu \sigma^{\nu\lambda} \gamma_\mu = 0 \quad (\text{E.11})$$

$$\gamma^\mu \sigma^{\nu\lambda} \gamma^\rho \gamma_\mu = 2\gamma^\rho \sigma^{\nu\lambda} \quad (\text{E.12})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma_\mu = 2(\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho) \quad (\text{E.13})$$

E identidades envolvendo o traço de matrizes gama:

$$\text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}) = 0, \quad n = \textit{impar} \quad (\text{E.14})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{E.15})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (\text{E.16})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = -4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{E.17})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = -4i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{E.18})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{2n}) = & a_1 \cdot a_2 \text{Tr}(\not{a}_3 \dots \not{a}_{2n}) - a_1 \cdot a_3 \text{Tr}(\not{a}_2 \not{a}_4 \dots \not{a}_{2n}) + \\ & \dots + a_1 \cdot a_{2n} \text{Tr}(\not{a}_2 \dots \not{a}_{(2n-1)}) \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Siegel. *Phys. Lett. B*, 84:153, 1979.
- [2] Siegel. *Phys. Lett. B*, 94:37, 1980.
- [3] I. Jack and D. R. T. Jones. Perspectives on supersymmetry. *hep-ph/9707278*, 1997. World Scientific, Ed. G. Kane.
- [4] Marcos Sampaio, A. Brizola M. C. Nemes A. P. Baêta Scarpelli, B. Hiller, and S. Gobira. *Phys. Rev. D*, 65:125023, 2002.
- [5] S. Gobira and M. C. Nemes. *Int. J. Theor. Phys.*, 42:2765, 2003.
- [6] Marcos Sampaio D. Carneiro, A. P. Baêta Scarpelli and M. C. Nemes. *JHEP*, 0312:044, 2003.
- [7] Marcos Sampaio A. P. Baêta Scarpelli and M. C. Nemes. 63:046004, 2001.
- [8] T. Muta. *Foundations of Quantum Chromodynamics*, volume 5. World Scientific Lecture Notes in Physics, 1987.
- [9] B. Hiller A. P. Baêta Scarpelli, Marcos Sampaio and M. C. Nemes. *Phys. Rev. D*, 64:046013, 2001.
- [10] W. Celmaster and R. J. Gonsalves. *Phys. Rev. D*, 20:1420, 1979.
- [11] P. Pascual and R. Tarrach. *Nucl. Phys. B*, 174:123, 1980.
- [12] J. Papavassiliou. *Phys. Rev. D*, 47:4728, 1993.
- [13] Marcos Sampaio, M. C. Nemes, and A. P. Baêta Scarpelli. Work in progress.

- [14] F. del Águila and M. Pérez-Victoria A. Culatti, R. Muñoz Tapia. *Nucl. Phys. B*, 537:561, 1999.
- [15] S. Ferrara and E. Remiddi. Absence of the anomalous magnetic moment in a supersymmetric abelian gauge theory. *Phys. Lett. B*, 53:347, 1974.
- [16] A. Méndez F. del Águila and F. X. Orteu. The electron anomalous magnetic moment in unbroken supergravity. *Phys. Lett. B*, 145:70, 1984.
- [17] Hai-Yang Cheng S. Bellucci and S. Deser. Finiteness of gravitational corrections to magnetic moments and supergravity embedding. *Nucl. Phys. B*, 252:389, 1985.
- [18] W. Wilcox. *Ann. Phys.*, 139:48, 1982.
- [19] M.T. Grisaru and D. Zanon. *Class. Quantum Grav.*, 2:477, 1985.
- [20] F. del Águila and M. Pérez-Victoria A. Culatti, R. Muñoz Tapia. *Nucl. Phys. B*, 504:532, 1997.
- [21] F. del Águila and M. Pérez-Victoria A. Culatti, R. Muñoz Tapia. *hep-ph/9711474*.
- [22] F. del Águila and M. Pérez Victoria. *hep-ph/9901291*.
- [23] G.'t Hooft and M. Veltman. *Nucl. Phys. B*, (44):189, 1972.
- [24] W. Siegel. *Phys. Lett. B*, 84:193, 1979.
- [25] D.R.T. Jones D.M. Capper and P. van Nieuwenhuizen. *Phys. Lett. B*, 167:479, 1980.
- [26] D. Z. Freedman, K. Johnson, and J. I. Latorre. *Nucl. Phys. B*, 371:353, 1992.
- [27] M. Pérez-Victoria. *Phys. Lett. B*, 442:315, 1998.
- [28] F. del Águila and M. Pérez-Victoria A. Culatti, R. Muñoz Tapia. *Phys. Lett. B*, 419:263, 1998.

- [29] F. del Águila and M. Pérez-Victoria A. Culatti, R. Muñoz Tapia. *Nucl. Phys. B*, 263:561, 1999.
- [30] D. Stöckinger. *hep-ph/0602005*.
- [31] A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, 2003.
- [32] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 1995.
- [33] David Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. WILEY VCH, 2004.
- [34] J. A. Mignaco R. Barbieri and E. Remiddi. Electron form factors up to fourth order - i. *Il Nuovo Cimento*, 11:824, 1972.
- [35] P. van Nieuwenhuizen S. Ferrara, J. Scherk. *Phys. Rev. Lett. B*, 37:1035, 1976.
- [36] et al. S. Ferrara. *Nucl. Phys. B*, 117:333, 1976.
- [37] M. Rocek A. Dass, M. Fischler. *Phys. Lett. B*, 69:1866, 1977.
- [38] J. H. Schwarz D. Z. Freeman. *Phys. Rev. D*, 15:1007, 1977.
- [39] et al. E. Cremmer. *Nucl. Phys. B*, 147:105, 1979.
- [40] et al. E. Cremmer. *Phys. Lett. B*, 116:231, 1982.