

**Cálculos com Regularização Implícita em
teorias não massivas em ordens além de um laço**

Carlos Renato Pontes

Dezembro de 2008

Carlos Renato Pontes

**Cálculos com Regularização Implícita em teorias não
massivas em ordens além de um laço**

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS
GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de
DOUTOR EM CIÊNCIAS.

Área de concentração: Teoria Quântica de Campos
Orientador: Maria Carolina Nemes (UFMG)
Coorientador: Antônio P. Baêta Scarpelli (CEFET-MG)

Departamento de Física - ICEX - UFMG

Dezembro de 2008

Agradecimentos

A Professora Carolina pelo apoio, ensino, paciência e conselhos.

Ao Professor Marcos pelo ensino paciente sem o qual este trabalho não seria possível.

Ao Antônio pelo ensino, e paciência

Aos amigos da República Mário, Alexandre, Mól, Faissal, Marquinhos e Ará e outros, pela amizade

Aos meus pais

A Claudia e Samuel

Ao Edson, e ao Cleber pelo ensino e pela amizade.

Toda turma da física

CONTEÚDO

1	Introdução	6
2	A Regularização Implícita com massa	10
2.1	Cálculo com massa na ordem de um laço	12
3	A Regularização Implícita para a Teoria ϕ^3 em $6D$, sem massa.	16
3.1	A aplicação da Regularização Implícita a ordem de um laço a ϕ^3 sem massa.	16
3.1.1	Função de dois pontos	16
3.1.2	Função de três pontos	17
3.1.3	Funções de n-pontos a um laço	18
3.2	Cálculo para ordens mais altas	21
3.3	Cálculo das funções β e γ	26
4	A Regularização Diferencial Vinculada e sua relação com a Regularização Implícita	30
4.1	Introdução	30
4.1.1	As regras básicas da Regularização Diferencial Vinculada	31
4.1.2	A Regularização Implícita	33

CONTEÚDO	3
4.1.3 Mapeamento da Regularização Diferencial Vinculada na Regularização Implícita Vinculada	33
5 Conclusões	41
6 Apêndice A: O cálculo a 2 laços com Regularização Implícita	43
REFERÊNCIAS	46

Resumo

Uma das principais características da Regularização Implícita (RI) é que o conteúdo divergente ultravioleta de uma amplitude fica expresso em termos de integrais nos momentos internos, o que tem sido mostrado essencial para que esse procedimento respeite as simetrias vitais do modelo em questão. O presente trabalho faz uma generalização da RI a ordens superiores nos laços. Após a subtração das eventuais subdivergências aninhadas e sobrepostas de um diagrama de Feynman, o conteúdo divergente ultravioleta da amplitude é ainda expresso em termos de integrais divergentes básicas (IDB). Utilizamos a teoria escalar ϕ_6^3 para ilustrar o procedimento e calculamos as funções do grupo de renormalização até dois laços. Verificamos que apenas os coeficientes numéricos das IDB e suas derivadas, que são constantes ou IDB, são suficientes para o cálculo das funções do grupo de renormalização.

Na segunda parte deste trabalho comparamos a RI com um outro procedimento de renormalização que opera na dimensão física da teoria, porém atua no espaço das configurações, chamada renormalização diferencial. Esta possui regras que automaticamente preservam simetria de calibre a um laço. Concluimos que a um laço os dois métodos são equivalentes.

Abstract

One of the main features of Implicit Regularization (IR) is to display the ultraviolet divergent content of a Feynman amplitude as integrals in the loop momenta. This has been shown to be crucial to preserve vital symmetries of the underlying model.

One of the purposes of this work is to generalize IR to arbitrary loop order. After a judicious subtraction of nested and overlapping divergences in a Feynman diagram the remaining overall divergence may still be expressed as a basic divergent integral (BDI) in a loop momentum. We take ϕ_6^3 theory as a testing ground and calculate the renormalization group functions to two loop order. We show that only numerical coefficients of BDI as well as their derivatives with respect to a renormalization group scale (which is a constant or another BDI) is sufficient to this purpose.

Finally we compare IR with another renormalization procedure which operates in the physical dimension of the theory, namely differential renormalization. The latter uses a set of rules which, to one loop order, automatically deliver gauge invariant amplitudes. We demonstrate its equivalence to IR to one loop order.

Introdução

O estudo de técnicas de regularização que trabalhem na dimensão da própria teoria tem importância teórica atual. Os chamados “Electroweak Precision Observables”, como a massa do bóson W, o ângulo de mistura leptônico fraco efetivo $\sin^2 \theta_{ef}$, o momento magnético anômalo do múon e a massa mais leve do bóson de Higgs par em CP têm sido medidos com precisão experimental suficiente para indicar física além do modelo padrão. Por exemplo, em Brookhaven em 2006 [10] mediu-se $a_\mu = \frac{(g-2)_\mu}{2}$ para o múon

$$a_\mu^{exp} = (11.659.208 \pm 5,8) \times 10^{-10}.$$

O desvio deste valor com relação ao valor teórico no qual se levam em consideração contribuições eletromagnéticas, fracas e fortes do modelo padrão(MP) é

$$\Delta(a_\mu^{exp} - a_\mu^{MP}) = 23,9(9,9) \times 10^{-10}.$$

Argumenta-se que correções supersimétricas ao modelo padrão expliquem essa diferença [1]. Assim, cálculos teóricos a pelo menos dois laços, livres de ambiguidades, e feitos dentro de um esquema de regularização invariante são importantes.

Para teorias que possuem matriz γ^5 , incluindo as teorias supersimétricas, existem problemas quando não trabalhamos na dimensão da teoria. A simetria entre os parceiros supersimétricos é quebrada quando procedemos com uma continuação analítica na dimensão do espaço tempo, regularizando-se dimensionalmente. Para teorias quirais, a álgebra de Clifford não admite uma extensão não ambígua para dimensões que não sejam inteiras.

Em supersimetria os cálculos são feitos utilizando a redução dimensional, na qual os momentos são tratados na dimensão não inteira D , mas as matrizes γ e os campos de gauge permanecem na dimensão inteira da teoria. Estes cálculos apresentam problemas de inconsistência matemática em ordens superiores a um laço [2]. Neste contexto, duas regularizações que trabalham na própria dimensão da teoria e que têm sido mostradas fortes candidatas à regularizações invariantes são regularização diferencial (RD) e a Regularização Implícita (RI).

A Renormalização Diferencial consiste basicamente na substituição de expressões muito singulares para que tenham transformada de Fourier por derivadas de expressões menos singulares que têm transformada de Fourier bem como uma prescrição de integração por partes. Neste processo para cada expressão divergente, uma escala de massa é introduzida, sendo determinada uma relação entre as escalas posteriormente pelas simetrias da teoria. Como veremos no capítulo 4, a um laço existe um conjunto de regras para a RD que a tornam automaticamente invariante de gauge. A mais laços ainda não foi feita uma extensão consistente para este programa,[3].

A RI funciona na própria dimensão da teoria, no espaço dos momentos. Ela constitui-se na aplicação de uma identidade básica ao integrando, supondo que uma regularização foi empregada implicitamente, para que possamos manipulá-lo. Separa-se a parte divergente e a parte finita de modo que a parte divergente não dependa dos momentos externos, a qual fica representada como uma integral divergente básica. Como veremos no capítulo 3, esse procedimento é consistente em ordem superiores. A subtração consistente de subdivergência estabelecida pela fórmula das florestas garante-nos que os contratermos sejam locais, e que a divergência de ordem n laços possa sempre ser escrita em função de integrais (logaritmicamente divergentes) básicas, que chamaremos $I_{log}^{(i)}(\lambda^2)$, $i = 1 \dots n$. Uma escala de renormalização (λ), é introduzida através de uma identidade independente de regularização. No caso de uma teoria sem massa esse procedimento, de introdução de uma escala é essencial pois o procedimento de Regularização Implícita(RI), neste caso, resulta em uma divergência infravermelha que não existia antes da aplicação da RI. A relação de escala vai permitir o cancelamento da divergência infravermelha.

Um esquema de subtração mínimo e independente da massa dentro da RI,

implica em subtrair apenas as integrais divergentes básicas. Não é necessário calcular as integrais divergentes, somente suas derivadas serão necessárias para o cálculo das funções do grupo de renormalização. Outra característica da RI é que os termos violadores de simetrias são originários de diferença de integrais com o mesmo grau de divergência que podem ser escritas como termos de superfície, isto é, integrais de derivadas totais no espaço dos momentos. Estes termos estão relacionados à invariância por rotulação nos laços dos diagramas de Feynman. Em teorias de calibre eles devem ser zero para que a invariância de calibre seja preservada [11].

Um estudo sobre a conexão entre invariância de calibre e termos de superfície em RI é feito em [4, 5, 6]. O tratamento de anomalias quirais e gravitacionais, bem como um estudo sobre violação de simetria CPT numa versão estendida da eletrodinâmica quântica por meio da RI mostra que parâmetros arbitrários inerentes à teoria são preservados durante os cálculos para serem fixos somente sobre bases físicas [6, 7]. Em supersimetria, até três laços, foi mostrado que a RI é invariante no cálculo da função beta no modelo de Wess-Zumino supersimétrico [12]. Para teorias de calibre supersimétricas calculou-se as contribuições de um laço para o momento magnético anômalo do lépton em supergravidade usando-se RI [15]. Nos casos em que a RI foi aplicada em cálculos supersimétricos, a preservação das simetrias de calibre e super simetria credenciou a técnica como uma forte candidata a um procedimento invariante. O papel dos termos de superfície como parâmetros indeterminados a serem ajustados em modelos fenomenológicos efetivos para a cromodinâmica quântica a baixas energias foi estudado em [8, 9].

Na primeira parte deste trabalho, nós generalizamos a RI para ordens superiores nos laços e mostramos que ela é consistente com a fórmula das florestas, importante quando lidamos com diagramas sobrepostos. Para exemplificar esse mecanismo, usamos a teoria escalar ϕ^3 em seis dimensões, dimensão na qual ela é renormalizável, e restringimo-nos ao caso de massa nula, para o qual os contratermos assumem uma expressão particularmente simples em RI.

Para testar a generalização da RI para ordens superiores calculamos as funções γ e β do grupo de renormalização para teoria ϕ^3 até a ordem de dois laços, e mostramos explicitamente que somente os coeficientes numéricos das integrais divergentes básicas e as derivadas das mesmas com relação ao

parâmetro arbitrário λ são necessários [16].

Na segunda parte deste trabalho nos dedicamos a fazer uma comparação entre a RI e a RD a um laço. Embora ambas as técnicas sejam candidatas a regularizações invariantes e operem na dimensão física da teoria, elas têm natureza bastante diversa. Uma opera no espaço das posições e a outra no dos momentos. Na RI as integrais divergentes básicas são absorvidas ordem a ordem nos contratermos enquanto na RD não se faz menção a contratermos, já que uma identidade mapeia produtos de distribuições em distribuições de maneira mínima. É relevante estudar se as regras que tornam a RD invariante de calibre a um laço podem ser mapeadas no procedimento da RI. Verificamos que cada uma das regras da RD tem sua contrapartida no espaço dos momentos materializada em uma das regras da RI.

A Regularização Implícita com massa

Neste capítulo, fazemos revisão das regras da Regularização Implícita. Para maior clareza, apresentamos como exemplo um cálculo em ordem de uma laço. Abaixo as regras:

1. Cálculos com a RI não modificam a dimensão da teoria original. O tratamento de integrais divergentes via RI supõe que algum esquema de regularização é introduzido com o único intuito de justificar manipulações algébricas no integrando. Usaremos para isso a seguinte notação: \int^{Λ} .
2. O próximo passo consiste em separar o conteúdo divergente (e portanto dependente da regularização) da parte finita da amplitude. Isto é feito mediante o uso recursivo da identidade algébrica,

$$\frac{1}{(p-k)^2 - m^2} = \frac{1}{(k^2 - m^2)} - \frac{p^2 - 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]}, \quad (2.1)$$

até que a integral divergente contenha somente momento interno no laço. Nessa relação consideramos p como momento externo e k o momento de integração. Para que a integral divergente não contenha momentos externos no denominador devemos aplicar esta identidade um determinado número de vezes. Por exemplo, para o caso de integrais logaritmicamente divergente, aplicamos uma vez a identidade, e no caso de divergência linear aplicamos duas vezes. Para a divergência

quadrática, aplicamos a identidade três vezes, e assim sucessivamente. Desta forma a parte divergente dará origem a contratermos locais para a renormalização.

3. As integrais divergentes podem ser escritas na forma de integrais divergentes básicas. As integrais básicas não serão calculadas, no processo de renormalização, elas serão subtraída por um contratermo apropriado.

Considerando uma dimensão inteira 2ω , as integrais divergentes básicas em ordem de um laço são as seguintes:

Integral logicamente divergente:

$$I_{log}(m^2) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\omega}, \quad (2.2)$$

Integral quadraticamente divergente:

$$I_{quad}(m^2) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)^{\omega-1}}. \quad (2.3)$$

Para teorias não massivas, em ordem de n laços, teremos:

Integral logicamente divergente:

$$I_{log}^{(n)}(m^2, \lambda^2) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\omega} \ln^{n-1} \left(-\frac{(k^2 - m^2)}{\lambda^2} \right), \quad (2.4)$$

Integral quadraticamente divergente:

$$I_{quad}^{(n)}(m^2, \lambda^2) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - m^2)^{\omega-1}} \ln^{n-1} \left(-\frac{(k^2 - m^2)}{\lambda^2} \right). \quad (2.5)$$

Os possíveis termos violadores de simetria, os chamados termos de superfície, são identificados em divergências básicas com índices de Lorentz. Um exemplo em 4 dimensões:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} &= \frac{g_{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\ &- \frac{1}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k^\mu} \frac{k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

4. Um esquema de subtração mínima é definido pela substituição da massa m^2 por uma massa arbitrária λ^2 , usando uma relação de escala independente de regularização:

$$I_{log}^{(n)d}(m^2) = I_{log}^{(n)d}(\lambda^2) + \sum_{i=0}^n a_i^{(\omega)} \ln^i\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right). \quad (2.7)$$

A relação acima pode ser obtida, por exemplo, através do uso de um cutoff nas divergências básicas. Aqui d é a dimensão, n o número de laços e $2\omega = d$. A um laço a relação se reduz a

$$I_{log}(m^2) = I_{log}(\lambda^2) - (-1)^\omega b_{2\omega} \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right), \quad (2.8)$$

com $b_{2\omega} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{\Gamma(\omega)}$.

O objeto a ser subtraído nesse caso é o $I_{log}(\lambda^2)$, e não envolve a massa física da teoria. O parâmetro λ tem o papel da escala do grupo de renormalização e por isso essa relação é crucial em nosso método. Isto é ainda mais evidente em teorias não massivas, dado que em teorias massivas a própria massa física pode ser usada como escala do grupo de renormalização.

5. As integrais divergentes são subtraídas por contratermos apropriados e as integrais finitas são calculadas usando a parametrização de Feynman e extensa literatura no espaço dos momentos.

Vamos exemplificar agora com o uso da RI na teoria ϕ^3 massiva, em $6D$.

2.1 Cálculo com massa na ordem de um laço

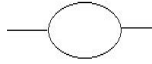


Figura 2.1: Gráfico de dois pontos

No espaço dos momentos em $6D$, este gráfico que representa a auto-energia nesta ordem resulta na expressão:

$$-i \sum(p^2) = \frac{g^2}{2} \int^\Lambda \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]}. \quad (2.9)$$

A aplicação da regularização implícita conduz ao seguinte procedimento:

1. Assumimos que uma regularização foi aplicada e utilizamos a identidade (2.1) para separarmos as divergências UV, obtendo assim:

$$-i \sum(p^2) = \frac{g^2}{2} \int^\Lambda \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \left[\frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - \frac{p^2}{(k^2 - m^2)^3} + \frac{4(p \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^4} - \frac{p^4}{(k^2 - m^2)^4} - \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^4 [(p - k)^2 - m^2]} \right]. \quad (2.10)$$

As três primeiras integrais, que não contêm momento externo nos denominadores, são denominadas integrais básicas. Estas integrais não são calculadas e serão subtraídas por contra-termos locais no processo de renormalização. Escrevemos:

$$I_{log}(m^2) = \int^\Lambda \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 - m^2)^3}, \quad (2.11)$$

$$I_{quad}(m^2) = \int^\Lambda \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}. \quad (2.12)$$

A primeira integral é logaritmicamente divergente. A segunda é quadraticamente divergente. Estas integrais terão suas "correspondentes" em ordens superiores nos laços.

2. A divergência quadrática básica merece um comentário em especial, já que ocorre uma particularidade importante no caso não massivo. É possível parametriza-la de uma maneira geral, tal que:

$$I_{quad}(m^2) = c\Lambda^2 - \frac{i}{(4\pi)^3} m^2 \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \alpha \right], \quad (2.13)$$

com c e α constante arbitrárias e Λ um cutoff. A constante c pode ser fixada nula e, assim, teremos essa divergência proporcional a m^2 . No caso não massivo, portanto, ela não contribui.

Voltando à amplitude, temos:

$$-i \sum(p^2) = \frac{g^2}{2} \int^\Lambda \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \left[\frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - \frac{p^2}{(k^2 - m^2)^3} + \frac{4p^\mu p^\nu k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^4} - \frac{p^4}{(k^2 - m^2)^4} - \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^4 [(p - k)^2 - m^2]} \right]. \quad (2.14)$$

A segunda e terceira integrais têm divergências logarítmicas. Estas integrais divergentes podem ser manipuladas para obtermos:

$$-i \sum(p^2) = g^2 \int^\Lambda \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \left[\frac{g^2}{2} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} + 2p^\mu p^\nu \left[-\frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \right) - \frac{1}{12} g_{\mu\nu} I_{\log}(m^2) \right] - \frac{1}{2} \frac{p^4}{(k^2 - m^2)^4} - \frac{1}{2} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^4 [(p - k)^2 - m^2]} \right] \quad (2.15)$$

3. Parametrizamos o termo de superfície, de forma que

$$\int^\Lambda \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \right) \equiv a g_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

Obtemos, por fim:

$$-i \sum(p^2) = \frac{g^2}{2} I_{quad}(m^2) - g^2 \frac{p^2}{6} I_{\log}(m^2) - \frac{g^2}{3} a p^2 + F, \quad (2.17)$$

sendo F a parte finita. Não há necessidade aqui de se utilizar as relações de escala, já que a própria massa pode servir como escala nas equações do grupo de renormalização.

Estes mesmos passos adotados acima vão ser sempre empregados para os cálculos de integrais divergentes a um laço usando a Regularização Implícita. Algumas características da RI devem ser enfatizadas: a) A aplicação da identidade para separar a parte divergente da finita não muda a dimensão do espaço tempo. Esta propriedade é importante

em teorias que têm problemas quando se trabalha em dimensões não inteiras. b) As divergências sempre podem ser escritas na forma de integrais divergentes básicas, o que é importante para a generalização do cálculo das funções do grupo de renormalização via RI, como será visto no próximo capítulo.

A Regularização Implícita para a Teoria ϕ^3 em $6D$, sem massa.

Neste capítulo, nós sistematizamos o procedimento de Regularização Implícita para teorias não massivas. Usamos a teoria ϕ^3 em $6D$ como exemplo. Os passos empregados são os mesmos do capítulo anterior, mas aqui o uso das relações de escala torna-se essencial para que o processo de separação das divergências no ultravioleta faça sentido.

No final do capítulo, fazemos os cálculos das funções gama e beta do grupo de renormalização até dois laços, por meio da sistematização desenvolvida em [16].

3.1 A aplicação da Regularização Implícita a ordem de um laço a ϕ^3 sem massa.

3.1.1 Função de dois pontos

Iniciamos os cálculos com a massa m mas tomamos o limite $m \rightarrow 0$ no final, para obtermos a teoria sem massa. Dizemos que m é a uma massa fictícia. Este procedimento pode ser seguido em teorias livres de divergências infravermelhas.

Voltamos novamente a nossa atenção para a função de dois pontos. Desta figura obtemos a expressão matemática:

$$-i \sum(p^2) = \frac{g^2}{2} \int^\Lambda \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]}. \quad (3.1)$$

Aplicamos agora a regularização implícita, com os mesmos passos do capítulo 1. Após o cálculo da parte finita com m^2 pequeno, obtemos:

$$-i \sum(p^2) = -g^2 \frac{p^2}{6} I_{\log}(m^2) + g^2 \frac{(-b)}{6} p^2 \ln\left(\frac{-p^2}{m^2}\right) + g^2 \frac{4b}{9} p^2, \quad (3.2)$$

em que o termo de superfície foi desprezado. A divergência quadrática não irá contribuir, conforme argumentamos no capítulo anterior. Devemos observar que quando tomamos o limite $m \rightarrow 0$ o termo $\ln(-\frac{p^2}{m^2})$ apresenta uma divergência infravermelha. Esta divergência será cancelada quando fizermos uso da relação de escala:

$$I_{\log}(m^2) = I_{\log}(\lambda^2) + b \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right). \quad (3.3)$$

Este resultado é importante, pois mostra como o procedimento de separação da divergência ultravioleta pode ser aplicado de maneira consistente em teorias sem massa. A relação de escala permite uma comunicação entre as partes ultravioleta finita e divergente, de modo a possibilitar o desaparecimento das divergências infravermelhas espúrias:

$$-i \sum(p^2) = -g^2 \frac{p^2}{6} [I_{\log}(\lambda^2) + b \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{8b}{3}]. \quad (3.4)$$

Devemos notar que não foram calculadas as integrais divergentes básicas.

3.1.2 Função de três pontos

Fazemos agora o cálculo da função de três pontos sem massa a um laço. Ele é importante para que calculemos as funções beta e gama do grupo de renormalização a dois laços, usando a RI.

A expressão matemática para este gráfico é:

$$(-ig)^3 \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2 [(p - k)^2 - m^2]^2 [(k - q)^2 - m^2]^2}. \quad (3.5)$$

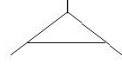


Figura 3.1: Função de três pontos

Novamente tomaremos o limite $m \rightarrow 0$ no final, para obtermos a teoria sem massa. Como o grau de divergência desta integral é logarítmica, precisamos aplicar a 2.1 uma vez para retirar a dependência da parte divergente em p e outra vez para retirar sua dependência em q (uma vez para cada momento externo). Obtemos

$$\begin{aligned}
 &= (-ig)^3 \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 - m^2)^3} - (-ig)^3 \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)}{(k^2 - m^2)^3 [(p - k)^2 - m^2]} + \\
 &\quad - (-ig)^3 \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{(q^2 - 2q \cdot k)}{(k^2 - m^2)^2 [(p - k)^2 - m^2][(q - k)^2 - m^2]} \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

A primeira integral tem divergência logarítmica e as restantes são finitas ultravioleta(UV). Usamos a parametrização de Feynman para o cálculo da parte finita, e ficamos com o resultado:

$$= (-ig)^3 \left[I_{log}(\lambda^2) + b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + F(p, q) \right]. \quad (3.7)$$

O termo $F(p, q)$ é finito UV. Os termos contendo divergência UV cancelam-se após o uso da relação de escala. Este cancelamento ocorre entre os termos provenientes das duas primeiras integrais.

3.1.3 Funções de n-pontos a um laço

Mostramos aqui que para funções de n pontos o procedimento permanece consistente. Para que tenhamos divergência ultravioleta consideramos uma dimensão d suficientemente alta. Para o caso geral da amplitude a um laço sem massa, em d dimensões, onde d é par, tem-se com frequência integrais com divergências ultravioleta do tipo:

$$I = \int^\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k + p_1)^2 - m^2]} \cdots \frac{1}{(k + p_n)^2 - m^2}. \quad (3.8)$$

Aqui $n = \omega - 1 = \frac{d}{2} - 1$, de forma que a integral é logaritmicamente divergente. Na integral acima, fazemos uso da identidade (2.1), aplicada aos termos com momentos externos $(\frac{1}{(k+p_i)^2 - m^2})$, obtendo assim:

$$I = \int^\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\omega [(k + p_n)^2 - m^2]} - \sum_{i=1}^{n-1} I_i. \quad (3.9)$$

Nesta expressão, o primeiro termo é logaritmicamente divergente UV, mas o segundo é finito UV. Os termos finitos têm a seguinte forma:

$$I_i = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{p_i^2 + 2p_i \cdot k}{(k^2 - m^2)^{i+1} [(k + p_i)^2 - m^2]} \cdots \frac{1}{[(k + p_n)^2 - m^2]}. \quad (3.10)$$

Aqui o valor do i vai de $i = 1$ até $i = n - 1$.

Devemos mostrar que a integral inicial (3.8) não apresenta problemas de divergências no infravermelho (IV), quando o limite de $m^2 \rightarrow 0$ é tomado. Fazemos isto em duas partes. Na primeira mostramos que a integral finita (I_i) UV, não apresenta problemas quando o limite $m^2 \rightarrow 0$ é tomado. Posteriormente trataremos da parte que é divergente.

Começemos pela integral finita (I_i). Aplicamos primeiro a parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{a_1 \cdots a_l^\alpha} = \frac{(l + \alpha - 2)!}{(\alpha - 1)!} \int dx \frac{(1 - x_1 - \cdots - x_{l-1})^{\alpha-1}}{[(a_1 - a_l)x_1 + (a_2 - a_l)x_2 + \cdots]^{l+\alpha-1}}, \quad (3.11)$$

sendo $\int dx = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{l-1}} dx_{l-1}$. Após algumas manipulações algébricas obtemos:

$$I_l = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{(-1)^\omega}{l!} \int dx (1 - x_l - \cdots - x_{\omega-l})^l \times (p_l^2 - 2p_l^2 x_{\omega-l} - 2(p_l \cdot p_{l+1})x_{\omega-l-1} \cdots - 2(p_l \cdot p_n)x_l) \frac{1}{Q^2} \quad (3.12)$$

com Q^2 dado por:

$$Q^2 = p_n^2 x_l (1 - x_l) + \cdots + p_i^2 x_{n-i+1} (1 - x_{n-i+1}) - 2 \sum_{l \neq t} (p_l \cdot p_t) x_{n-l+1} x_{n-t+1} - m^2. \quad (3.13)$$

Portanto, o limite $m^2 \rightarrow 0$ é bem definido para I_i .

Agora analisamos a parte divergente, que ainda depende do momento externo p_n :

$$I^\Lambda = \int^\Lambda \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - m^2)^n [(k + p_n)^2 - m^2]}. \quad (3.14)$$

Esta integral pode ainda ser separada em uma parte divergente e uma finita, assim podemos estudar o comportamento dela quando fazemos o limite $m^2 \rightarrow 0$. Vejamos:

$$I^\Lambda = I_{log}^d(m^2) - \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{p_n^2 - 2p_n \cdot k}{(k^2 - m^2)^\omega [(k + p_n)^2 - m^2]}, \quad (3.15)$$

onde $I_{log}^d(m^2)$ é a integral divergente básica logarítmica ($n = \omega - 1$). De forma semelhante aos cálculos anteriores, utilizamos a relação de escala para nos livrarmos da dependência na massa fictícia m^2 :

$$I_{log}^d(m^2) = I_{log}^d(\lambda^2) + b_d (-1)^{\frac{d}{2}} \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right), \quad (3.16)$$

com $b_d = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})}$. Como mencionamos anteriormente, a relação de escala acima é independente da regularização aplicada e pode ser obtida por meio de um cutoff nas integrais divergentes. De maneira alternativa, podemos utilizar a identidade abaixo para obtê-la sem a necessidade de se especificar uma regularização:

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)^\omega} = \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^\omega} - (\lambda^2 - m^2) \sum_{i=1}^{\omega} \frac{1}{(k^2 - m^2)^i (k^2 - \lambda^2)^{\omega-i+1}}. \quad (3.17)$$

Para o termo finito, temos:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{p_n^2 - 2p_n \cdot k}{(k^2 - m^2)^\omega [(k + p_n)^2 - m^2]} = \\ & (-1)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d}{2} - 1\right) b_d \int_0^1 dx (1-x)^{\frac{d}{2}-2} \times \ln\left(\frac{p_n^2 x(1-x) - m^2}{m^2}\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Com o termo $b_d(-1)^{\frac{d}{2}} \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right)$, proveniente da relação de escala, ocorre o cancelamento da dependência em m^2 quando o limite $m^2 \rightarrow 0$ é tomado.

Assim, a soma das duas partes nos fornece:

$$I^\Lambda = I_{log}^d(\lambda^2) - (-1)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d}{2} - 1\right) b_d \int_0^1 dx (1-x)^{\frac{d}{2}-2} \ln\left(\frac{p_n^2 x(1-x)}{-\lambda^2}\right)$$

Portanto, a amplitude completa,

$$I = I^\Lambda - \sum_{i=1}^{n-1} I_i, \quad (3.19)$$

fica livre da massa fictícia e a divergência ultravioleta é expressa em termos da divergência básica dependente apenas da escala de massa arbitrária, como desejávamos.

3.2 Cálculo para ordens mais altas

Uma vez estabelecidas as regras da Regularização Implícita a um laço, estamos em condições de avançar e estabelecer a RI para ordens superiores nos laços. O objetivo desta seção é ampliar as regras a um laço citadas acima para n laços, seja para o caso de gráficos sobrepostos ou não.

A implementação da RI é feita basicamente em quatro passos:

1) Iniciamos na ordem de um laço, assumindo que o gráfico é o irreduzível de uma partícula (*1IP*). Através do uso da identidade (2.1) obteremos as integrais divergentes básicas, funções da massa fictícia. Posteriormente, aplicamos a relação de escala a estas integrais básicas, fazendo com que elas fiquem como função somente do parâmetro λ .

2) A fórmula das florestas é descrita de uma forma equivalente a somar os contratermos [14]. Dado um diagrama de Feynman G , o operador de subtração tem o efeito de tornar a parte de renormalização H de G em

um ponto, o qual é multiplicado pela integral da ordem. Este processo é feito de forma recursiva, até que todas as florestas sejam levadas em conta. Somente partes disjuntas são necessárias.

3) Os contratermos são definidos ordem a ordem pelo processo de subtração mínima na RI, ou seja através da subtração das divergências como integrais básicas. Para o caso logarítmico a n laços temos a forma:

$$I_{log}^{(n)d}(m^2) = \int^{\Lambda} \frac{d^{2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\omega} \ln^{n-1}\left(\frac{-(k^2 - m^2)}{\lambda^2}\right) \quad (3.20)$$

4) Da mesma forma que ocorre na ordem de um laço, as divergências básicas com índices de Lorentz são escritas em função de integrais sem índices de Lorentz e de termos de superfície. Os termos de superfície serão negligenciados sempre que as anomalias estiverem ausentes.

Para cada ordem, novas relações de escala são utilizadas de forma que as divergências básicas dependam apenas da escala λ^2 . Esta escala fará o papel de parâmetro do grupo de renormalização. As integrais parametrizadas são então subtraídas através da definição da constante de renormalização. Como ilustração, calculamos aqui uma contribuição para a autoenergia do campo em ordem de dois laços. Consideremos o gráfico da figura (3.2), com subdivergência aninhada.

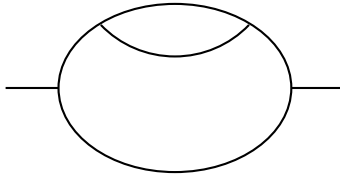


Figura 3.2: Contribuição de dois laços com subdivergência aninhada para a autoenergia da teoria ϕ_6^3

O gráfico da figura (3.2) pode ser calculado pela simples substituição do subdiagrama por sua parte finita. A integral que permanece em apenas um momento interno inclui apenas as divergências da ordem e a parte finita. A amplitude para este diagrama pode ser escrita:

$$-i\Sigma_1^{(2)}(p^2) = i\frac{g^4}{2} \int_k \frac{1}{k^4(k-p)^2} \int_l \frac{1}{l^2(l-k)^2}, \quad (3.21)$$

sendo que de agora em diante usaremos a seguinte notação: $\int_k \equiv \int \frac{d^6k}{(2\pi)^6}$. A integral interna foi calculada no capítulo 2 e é dada por:

$$I = -\frac{k^2}{3} \left\{ I_{\log}(\lambda^2) + b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - \frac{8}{3}b \right\}. \quad (3.22)$$

Tomando apenas a parte finita:

$$\begin{aligned} -i\bar{\Sigma}_1^{(2)}(p^2) &= -i\frac{g^4b}{6} \int_k \frac{1}{k^2(k-p)^2} \times \\ &\left(\ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - \frac{8}{3} \right) \\ &= -i\frac{g^4b}{6} \left(I^{(2)} - \frac{8}{3}I \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

em que

$$I^{(2)} = \int_k \frac{1}{k^2(k-p)^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right). \quad (3.24)$$

Note que

$$-i\bar{\Sigma}_1^{(2)}(p^2) = (1-t)(-i\Sigma_1^{(2)}(p^2)), \quad (3.25)$$

em que $-t$ corresponde ao operador subtração que produz o efeito de colapsar o subgráfico aninhado e multiplicar o contratérmo, que foi calculado na ordem anterior, pela integral de Feynman resultante.

Agora nós calculamos $I^{(2)}$. Introduzimos a massa fictícia m^2 , como fizemos anteriormente e a rescrevemos como:

$$I^{(2)} = \int_k \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \ln \left(\frac{k^2 - m^2}{-\lambda^2} \right), \quad (3.26)$$

que é ultravioleta quadraticamente divergente. A identidade eq. (2.1)

é aplicada três vezes para obtermos

$$I^{(2)} = \int_k^\Lambda \ln \left(\frac{k^2 - m^2}{-\lambda^2} \right) \left\{ \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} - \frac{p^2}{(k^2 - m^2)^3} + \frac{4(p \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^4} + \frac{p^4}{(k^2 - m^2)^4} - \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^4 [(p - k)^2 - m^2]} \right\}. \quad (3.27)$$

Nós definimos as divergências básicas de dois laços em 6 dimensões,

$$I_{log}^{(2)}(m^2) = \int_l^\Lambda \frac{1}{(l^2 - m^2)^3} \ln \left(-\frac{(l^2 - m^2)}{\lambda^2} \right) \quad (3.28)$$

e

$$I_{quad}^{(2)}(m^2) = \int_l^\Lambda \frac{1}{(l^2 - m^2)^2} \ln \left(-\frac{(l^2 - m^2)}{\lambda^2} \right). \quad (3.29)$$

Como discutido no caso de um laço, $I_{quad}^{(2)}(m^2)$ não contribuirá no caso não massivo. Ao passo que a divergência básica logarítmica com índices de Lorentz pode ser escrita em função de um termo de superfície:

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha\beta}(m^2) &= \int_k^\Lambda \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} \ln \left(-\frac{(k^2 - m^2)}{\lambda^2} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ g_{\alpha\beta} \left(I_{log}^{(2)}(m^2) + \frac{1}{3} I_{log}(m^2) \right) - \int_k \frac{\partial}{\partial k^\beta} \left(\frac{k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \ln \left(-\frac{(k^2 - m^2)}{\lambda^2} \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

O termo de superfície será desprezado como forma de preservar a invariância por roteamento nos laços. Então, temos:

$$I^{(2)} = -\frac{p^2}{3} I_{log}^{(2)}(m^2) + \frac{2}{9} p^2 I_{log}(m^2) + \tilde{I}^{(2)}, \quad (3.31)$$

$\tilde{I}^{(2)}$ sendo a parte finita dada por

$$\begin{aligned} \tilde{I}^{(2)} = & \int_k \frac{p^4}{(k^2 - m^2)^4} \ln \left(\frac{k^2 - m^2}{-\lambda^2} \right) - \\ & \int_k \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^4 [(p - k)^2 - m^2]} \ln \left(\frac{k^2 - m^2}{-\lambda^2} \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

As integrais finitas podem ser facilmente calculadas usando-se a identidade,

$$\ln a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (a^\epsilon - 1). \quad (3.33)$$

Depois da parametrização de Feynman, obteremos para a parte finita

$$\begin{aligned} \tilde{I}^{(2)} = & \frac{b}{18} p^2 \left\{ \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \left[6 \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - 16 \right] \right. \\ & \left. + 3 \ln^2 \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - 11 \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) + 11 \right\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Vemos que há uma divergência infravermelha parametrizada por m^2 na parte divergente e na parte finita. Para dar cabo dela, usamos a relação de escala em ordem de um laço e outra de dois laços, dada por

$$\begin{aligned} I_{log}^{(2)}(m^2) = & I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + b \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

tal que obtemos:

$$\begin{aligned} I^{(2)} = & \frac{p^2}{3} \left\{ -I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{2}{3} p^2 I_{log}(\lambda^2) \right. \\ & \left. - \frac{b}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{11}{6} b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{11}{6} b \right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Finalmente juntando os resultados anteriores obtemos

$$\begin{aligned} -i\bar{\Sigma}_1^{(2)}(p^2) = & \frac{ig^4 b p^2}{18} \left\{ I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{10}{3} I_{log}(\lambda^2) \right. \\ & \left. + \frac{b}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{27}{6} b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{95}{18} b \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Na próxima seção utilizaremos a RI no cálculo de funções do grupo de renormalização em ordem de dois laços. As outras amplitudes necessárias a este cálculo são tratadas no apêndice A.

3.3 Cálculo das funções β e γ

Voltamos nossa atenção agora para as funções do grupo de renormalização. As funções β e γ serão calculadas nesta seção utilizando a RI.

Utilizamos o procedimento desenvolvido em [16].

Para a teoria ϕ^3 , a lagrangeana é dada por:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_o)^2 - \frac{1}{2}m_o\phi_o^2 + \frac{g_o\phi_o^3}{3!}, \quad (3.38)$$

em que as grandezas na equação acima são as chamadas grandezas nuas. Introduzimos as constantes de renormalização por meio das relações abaixo:

$$\begin{aligned} \phi_o &= Z_\phi^{\frac{1}{2}}\phi \\ m_o^2 &= Z_n m^2 \\ g_o &= Z_g g. \end{aligned}$$

Com isso, a lagrangeana (3.38) fica, no caso sem massa:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{g\phi^3}{3!} + \frac{1}{2}(Z_\phi - 1)(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{g(Z_\phi^{\frac{3}{2}}Z_g - 1)\phi^3}{3!}. \quad (3.39)$$

Escrevemos

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{g\phi^3}{3!} + \frac{1}{2}A(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{Cg\phi^3}{3!}, \quad (3.40)$$

de forma que $Z_\phi = 1 + A$ e $Z_\phi^{\frac{3}{2}}Z_g = 1 + C$

O valor do Z_ϕ é obtido dos gráficos de dois pontos e o C de gráficos de três pontos, e o Z_g pode portanto ter uma contribuição dos dois gráficos.

Para calcularmos as funções β e γ , estas constantes serão necessárias. Veremos como estes termos entram no cálculo das funções do grupo de renormalização.

Sempre que se faz uma renormalização perturbativa são obtidas amplitudes divergentes que devem ser regularizadas através de algum procedimento. Esse processo naturalmente introduz uma escala arbitrária. Esta escala é usada no processo de cálculo das funções do grupo de renormalização, e aparece neste cálculo através das constantes Z_ϕ e Z_g referidas acima. A função de Green de n pontos depende da escala introduzida pela renormalização, mas a função de Green nua não depende, portanto temos a relação:

$$Z^{(-\frac{n}{2})}\Gamma_R^n(pi, g, m, \lambda) = \Gamma_o^n(pi, g_o, m_o).$$

Quando derivamos os dois lados da equação em relação a λ teremos, uma vez que o lado direito não depende de λ ,

$$\frac{d}{d\lambda} \left[Z^{-\frac{n}{2}} \Gamma_R^n \right] = 0.$$

Desta forma, tem-se

$$\left. \frac{\partial Z^{(-\frac{n}{2})}}{\partial \lambda} \right|_{g,m} \Gamma_n + Z^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial g}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial g} + \frac{\partial m}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial m} \right) \Gamma_n \Big|_g = 0, \quad (3.41)$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} - n\gamma \right) \Gamma_n = 0, \quad (3.42)$$

sendo as funções do grupo de renormalização:

$$\beta = \lambda \left. \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right|_{g,m}, \quad (3.43)$$

$$\gamma_m = - \left. \frac{\lambda}{m} \frac{\partial m}{\partial \lambda} \right|_{g,m}, \quad (3.44)$$

$$\gamma = \left. \frac{\lambda}{2Z} \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \right|_{g,m}. \quad (3.45)$$

Para teorias não massivas ($m = 0$), o termo γ_m naturalmente é nulo.

Vamos calcular a função γ . Ela pode ser expressa como:

$$\gamma = \frac{\lambda}{2Z_\phi} \frac{\partial Z_\phi}{\partial \lambda} = \frac{1}{2Z_\phi} 2\lambda^2 \frac{\partial Z_\phi}{\partial \lambda^2}. \quad (3.46)$$

Com os resultados do apêndice A , (3.23) e $Z_\phi = 1 + A$ obtemos o valor de Z_ϕ . Há um erro no coeficiente do I_{log} do gráfico da função de dois pontos sobreposta no artigo [13], o valor correto para ordem de dois laços para as funções de dois pontos é apresentado do apêndice A. Para o cálculo da função γ usamos a expressão (3.46) e obtemos até a ordem de dois laços:

$$\gamma = \frac{1}{12(4\pi)^3} g^2 + \frac{13}{24} \frac{1}{4(4\pi)^6} g^4 + \dots \quad (3.47)$$

Calcularemos agora a função beta até a ordem de dois laços. A função β é calculada a partir da expressão: $Z_\phi = 1 + A$ e $Z_\phi^{\frac{3}{2}} Z_g = 1 + C$. Com a primeira expressão calculamos a partir das funções de dois pontos o Z_ϕ , e a partir dele e dos cálculos das funções de três pontos do apêndice A o Z_g . Com o Z_g obtemos a função beta. Usamos as expansões para Z_g e Z_ϕ , elas são:

$$Z_\phi = 1 + \alpha_1 g^2 + \alpha_2 g^4 + \dots, \quad (3.48)$$

e também

$$Z_g = 1 + \rho_1 g^2 + \rho_2 g^4 + \dots \quad (3.49)$$

Para o cálculo da função β , nós colocamos (3.43) na forma a seguir:

$$\beta = 2\lambda^2 \frac{\partial g}{\partial \lambda^2} = -g \frac{2\lambda^2}{Z_g} \frac{\partial Z_g}{\partial \lambda^2}, \quad (3.50)$$

e usamos os resultados e expansões citadas. A função beta terá a forma:

$$\beta = \beta_1 g^3 + \beta_2 g^5 + \dots \quad (3.51)$$

Obtemos os valores para a função β a um e dois laços:

Em um laço temos:

$$\beta = -\frac{3}{4(4\pi)^3}. \quad (3.52)$$

A beta a dois laços:

$$\beta_2 = -\frac{125}{144} \frac{1}{(4\pi)^6}. \quad (3.53)$$

A Regularização Diferencial Vinculada e sua relação com a Regularização Implícita

4.1 Introdução

A Regularização Diferencial é uma técnica aplicada no espaço das posições. Ela baseia-se na aplicação das propriedades de expressões regulares a expressões regularizadas e tem se mostrado aplicável em várias situações [19, 20, 21, 22]. Ela é feita pela substituição das expressões singulares por derivadas de outras expressões menos singulares. Neste processo escalas arbitrárias com dimensão de massa são acrescentadas. Estas escalas carregam a ambiguidade da manipulação das expressões divergentes. Nas teorias simétricas elas são fixadas pelas simetrias da teoria, mas a cada laço precisa-se ajustar estas escalas. Seria desejável um procedimento que entregasse funções de Green simétricas sem que fosse necessário fazer ajustes em cada cálculo. Tal qualidade é alcançada pela Regularização Diferencial Vinculada (RDV), uma versão da RD [23] a um laço. Impõem-se um mínimo de regras para a manipulação das expressões divergentes de forma a obter uma expressão renormalizada que obedeça às simetrias originais das teorias, e as arbitrariedades e ambiguidades sejam fixadas. Isto foi mostrado para o caso de teorias de calibre-abeliana e para as teorias de calibre não abelianas. Em supersimetria os cálculos também foram bem sucedidos como no cálculo da correção em supergravidade para o momento magnético do lépton [24]. O problema que permanece é estender este método para ordens superiores a um laço, ainda

não solucionado.

A Regularização Implícita, por outro lado, satisfaz as exigências de simetria e tem sido aplicada também com sucesso para teorias de calibre abelianas e não abelianas a um laço como demonstrado em [25] e em supersimetria [15, 12]

Nesta parte do trabalho é feita a comparação entre a RI e a RDV na ordem um laço. É demonstrado que as regras da RDV no espaço das posições podem ser mapeadas em procedimentos da RI no espaço dos momentos.

4.1.1 As regras básicas da Regularização Diferencial Vinculada

As regras da Regularização Diferencial Vinculada são extensões de propriedades de distribuições bem definidas a distribuições singulares, de maneira a satisfazer as simetrias sem que precisemos fazer ajustes no final dos cálculos. Uma amplitude no espaço das posições é representada através de uma combinação linear de derivadas de funções básicas. As funções básicas são produtos de propagadores de Feynman em que um operador diferencial atua no último propagador. Vejamos um exemplo:

$$B_{m_1 m_2}[\mathcal{O}] = \Delta_{m_1}(x) \mathcal{O}_x \Delta_{m_2}(x), \quad (4.1)$$

onde $\Delta_m(x)$ é propagador de Feynman e \mathcal{O} um operador diferencial. As regras de Leibniz para as derivadas são fundamentais ao se escrever as amplitudes. Como veremos, ela tem um papel importante quando a relação com a Regularização Implícita é feita. As funções básicas são escritas de acordo as regras abaixo para que, quando substituídas na amplitude, as simetrias da teoria sejam preservadas.

Enumeraremos abaixo as regras básicas:

1. Redução diferencial: Expressões singulares são substituídas por derivadas de expressões regulares. Para isto dois passos são necessários
 - Primeiramente funções com singularidades piores do que logarítmicas são reduzidas a derivadas de funções logarimicamente singulares sem a introdução de qualquer constante dimensional.
 - Para expressões logaritmicamente singulares (em um loop) utilizamos a identidade seguinte:

$$\frac{1}{x^4} \equiv -\frac{1}{4} \square \frac{\ln x^2 M^2}{x^2} = \left(\frac{1}{x^4}\right)^R. \quad (4.2)$$

Aqui a única escala de massa do processo é introduzida. Ela faz o papel da escala do grupo de renormalização. O índice R indica que estamos tratando com uma função básica renormalizada.

2. Integração formal por partes: As derivadas agem formalmente por partes em funções teste. Para uma função básica geral

$$F[\mathcal{O}](x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \Delta_{m_1}(x_1) \dots \Delta_{m_n}(x_n) \mathcal{O}_{x_1} \Delta_{m_{n+1}}(x_1 + x_2 \dots + x_n), \quad (4.3)$$

sendo $\mathcal{O}_{(x_1)}$ é um operador diferencial com relação a x_1 . Nós teremos

$$[\partial F]^R = \partial[F^R]. \quad (4.4)$$

Esta regra estabelece que quando fazemos a transformada de Fourier de funções básicas, e a integração por partes é efetuada, o termo de superfície é descartado. Isto dá sentido ao termo R na primeira regra, pois a expressão que era muito singular para ter transformada de Fourier, foi substituída pela derivada de uma expressão que tem a transformada de Fourier.

3. Regra para Renormalização da função delta: Para a função básica eq.(4.3) da segunda regra, assumiremos que:

$$[F[\mathcal{O}](x, x_1, x_2, \dots, x_n) \delta(x - y)]^R = [F[\mathcal{O}](x, x_1, x_2, \dots, x_n)]^R \delta(x - y). \quad (4.5)$$

4. A quarta regra é a validade da equação para o propagador:

$$[F(x, x_1, \dots, x_n) (\square^x - m^2) \Delta_m(x)]^R = [F(x, x_1, \dots, x_n) (-\delta(x))]^R. \quad (4.6)$$

Com estas 4 regras é possível encontrar a relação entre as funções básicas, e uma tabela com as funções básicas renormalizadas para qualquer amplitude de um laço pode ser montada.

4.1.2 A Regularização Implícita

As regras da Regularização Implícita foram estabelecida no capítulo 1. Aqui, já de início, fazemos o termo de superfície igual a zero, e passamos a definir a RI como RIV (Regularização implícita vinculada). A idéia é escrever a amplitude no espaço dos momentos como uma combinação linear de integrais básicas multiplicadas por polinômios dos momentos externos. Como exemplo, temos

$$I, I_\mu, I_{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1, k_\mu, k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]}. \quad (4.7)$$

Os exemplos de integrais básicas acima são transformadas de Fourier das funções básicas no espaço das posições: $B_{mm}[1]$, $B_{mm}[\partial_\mu]$ e $B_{mm}[\partial_\mu \partial_\nu]$. Um conjunto de regras pode ser estabelecido para tratar integrais divergentes em RI, em RDV é estabelecida um conjunto de regras para tratar as funções básicas. Resta comentar os casos envolvendo anomalias. Nestes casos os termos de superfície não podem ser feitos iguais a zero, e o seu valor será determinado pelas condições físicas. Na regularização implícita existe uma democracia entre o setor axial e o setor vetorial da identidade de Ward, não sendo possível satisfazer os dois ao mesmo tempo. Este resultado esta estabelecido em [24, 25].

4.1.3 Mapeamento da Regularização Diferencial Vinculada na Regularização Implícita Vinculada

Aqui mostramos o mapeamento das regras da Regularização Implícita Vinculada (RIV) na Regularização Diferencial Vinculada (RDV). Assim, ficará evidente a relação de equivalência entre as duas regularizações.

4.1.3.1 As relações entre as regras 1 e 2 da RDV e a RIV

Vejamos a função básica de dois pontos sem massa $B[1]$. Na RDV a regularização desta expressão é muito importante pois outras expressões sempre podem ser colocadas em função desta função básica. A expressão para $B[1]$;

$$B[1] = \Delta(x)1\Delta(x) = \left(\frac{1}{4\pi^2 x^2} \right)^2, \quad (4.8)$$

aplicamos a regra 1 da RDV, de tal forma que

$$B^R[1] = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4\pi^2} \right)^2 \square \frac{\ln x^2 M^2}{x^2}. \quad (4.9)$$

Esta expressão renormalizada será comparada à que obteremos para a mesma função de dois pontos, no espaço dos momentos, utilizando a RIV. Para fazermos esta comparação, temos que fazer a transformada de Fourier da expressão (4.9), o que resulta:

$$\hat{B}^R[1] = -\frac{1}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{p^2}{\bar{M}^2} \right), \quad (4.10)$$

com $\bar{M}^2 = 4M^2/\gamma^2$, γ . Aqui aplicamos a regra 2 da RDV, para obtermos este resultado, ou seja, ignoramos os termos de superfície na transformada de Fourier. A expressão para a função básica de dois pontos no espaço euclidiano dos momentos é da forma:

$$\hat{B}[1] = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(p-k)^2} = I_E, \quad (4.11)$$

que após regularizada pela RIV fica:

$$\hat{B}[1] = -\frac{1}{4\pi^2} \ln \left(\frac{p^2}{e^2 \lambda^2} \right), \quad (4.12)$$

redefinindo o parâmetro de massa $e^2 \lambda^2 = \bar{M}^2$, notamos que é o mesmo resultado de (4.10) obtido pela RDV. O termo $I_{log}(\lambda^2)$ foi descartado.

Acrescentamos agora uma demonstração de que as regras 1 e 2 juntas são equivalentes a subtração do termo $I_{log}(\lambda^2)$ na Regularização Implícita Vinculada. Esta demonstração é feita em [27]. Consideremos a exclusão de uma pequena bola \mathcal{B}_ϵ , de raio ϵ :

$$\hat{B}[1] = \int_{R^4 - \mathcal{B}_\epsilon} d^4 x f(x) \left(\frac{1}{4\pi^2 x^2} \right)^2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4\pi^2} \right)^2 \int_{R^4 - \mathcal{B}_\epsilon} d^4 x f(x) \square \frac{\ln x^2 M^2}{x^2} \quad (4.13)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4\pi^2} \right)^2 \left\{ \int_{S_\epsilon} d\sigma_\mu f(x) \partial_\mu \frac{\ln x^2 M^2}{x^2} + \int_{R^4 - \mathcal{B}_\epsilon} d^4 x \partial_\mu f(x) \partial_\mu \frac{\ln x^2 M^2}{x^2} \right\} \quad (4.14)$$

O Resultado completo, após usar $f(x) = e^{ip \cdot x}$ é;

$$\hat{B}[1] = \frac{1}{4\pi^2} \left(1 - \ln \epsilon^2 M^2 - \ln \left(\frac{p^2}{\bar{M}^2} \right) \right) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\ln \left(\frac{\Lambda^2}{\bar{M}^2} \right) + 1 - \ln \left(\frac{p^2}{\bar{M}^2} \right) \right), \quad (4.15)$$

sendo o cut-off no momento definido como $\Lambda^2 = 4/(\gamma^2 \epsilon^2)$. Voltamos nossa atenção para a solução no caso da Regularização Implícita para com $m^2 = 0$:

$$\hat{B}[1] = -i \left\{ I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(\frac{p^2}{e^2 \lambda^2} \right) \right\}. \quad (4.16)$$

Usando um cut-off no momento, Λ^2 , calculamos $I_{log}(\lambda^2)$ e, assim, temos:

$$\hat{B}[1] = \frac{1}{4\pi^2} \left(\ln \left(\frac{\Lambda^2}{e^2 \lambda^2} \right) + 1 - \ln \left(\frac{p^2}{e^2 \lambda^2} \right) \right), \quad (4.17)$$

que depois de definirmos $e^2 \lambda^2 = \bar{M}^2$, apresenta justamente, o mesmo resultado da Regularização Diferencial. Vê-se que o termo subtraído pela regra 2 da Regularização Diferencial Vinculada é o mesmo termo $I_{log}(\lambda^2)$ da Regularização Implícita.

4.1.3.2 As relações entre as regras 3 e 4 da RDV e a RIV

Voltamos nossa atenção para as regras 3 e 4 da Regularização Diferencial Vinculada e sua relação com a Regularização Implícita Vinculada. As regras 3 e 4 da RDV relacionam funções básicas de n propagadores a funções básicas de $n-1$ propagadores. Assim, se a função básica de $n-1$ propagadores já está regularizada, a função de n propagadores não necessitará um outro parâmetro de massa para sua regularização. Há um procedimento equivalente a estas regras na Regularização Implícita, o qual equivale a fazer shift e cancelar termos do numerador com termos do denominador no integrando, lembrando que o shift para integrais com divergências piores do que logarítmicas resulta em termos de superfície. Como já mencionado, termos de superfície estragam simetrias, portanto devem ser eliminados.

Vejam como funcionam estas regras e sua relação com a RIV. Seja a

função básica:

$$F_n[\square - m_{n+1}^2] = \Delta_{m_1}(x_1) \cdots \Delta_{m_n}(x_n) (\square^{x_1} - m_{n+1}^2) \Delta_{m_{n+1}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \quad (4.18)$$

com $F[\mathcal{O}] \equiv F[\mathcal{O}](x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$. As variáveis x_1, x_2, \dots, x_n são diferenças entre pontos dos vértices nos loops. A regra 4 nos permite escrever

$$F_n^R[\square - m_{n+1}^2] = -(F_{n-1}[1] \delta(x_1 + x_2 + \cdots + x_n))^R, \quad (4.19)$$

que, com aplicação da regra 3, fica

$$F_n^R[\square - m_{n+1}^2] = -F_{n-1}^R[1] \delta(x_1 + x_2 + \cdots + x_n). \quad (4.20)$$

Para fazermos a comparação precisamos das expressões básicas no espaço dos momentos. A forma geral para as expressões básicas no espaço dos momentos é a seguinte:

$$\hat{F}_{n-1}^R[\mathcal{O}_k](p_1, \dots, p_{n-1}) = \int_k \frac{\mathcal{O}_k}{(k^2 + m_n^2)[(k - p_1)^2 + m_1^2] \cdots [(k - p_{n-1})^2 + m_{n-1}^2]}. \quad (4.21)$$

A forma particular para a eq(4.18) regularizada no espaço dos momentos é:

$$\begin{aligned} & \left(\int_k \frac{(k^2 + m_{n+1}^2)}{(k^2 + m_{n+1}^2)[(k - p_1)^2 + m_1^2] \cdots [(k - p_n)^2 + m_n^2]} \right)^R \\ &= \left(\int_k \frac{1}{(k^2 + m_n^2)[(k + p_n - p_1)^2 + m_1^2] \cdots [(k + p_n - p_{n-1})^2 + m_{n-1}^2]} \right)^R \end{aligned} \quad (4.22)$$

Devemos notar que fizemos um shift ($k \rightarrow k + p_n$), e cancelamos termos idênticos no numerador e no denominador. Na verdade, obtivemos a transformada de Fourier da eq(4.19). Convém lembrar que na Regularização Implícita Restringida fazemos shift e cancelamos termos no numerador com termos no denominador para que obtenhamos todas as integrais básicas em função de I_{\log} e I_{quad} , e os possíveis termos de superfície são descartados.

Vejam como as regras 3 e 4 são equivalentes a fazer shift no espaço

dos momentos. A eq.(4.19), pode ser escrita em termos da transformada de Fourier inversa:

$$F_n^R[\square - m_{n+1}^2] = - \left(\int_{p_1, \dots, p_{n-1}} \hat{F}_{n-1}[1](p_1, \dots, p_{n-1}) \times e^{ip_1 \cdot x_1} \dots e^{ip_{n-1} \cdot x_{n-1}} \delta(\sum x_i) \right)^R \quad (4.23)$$

$$= - \left(\int_{p_1, \dots, p_{n-1}} \int_k \frac{1}{(k^2 + m_n^2)[(k - p_1)^2 + m_1^2]} \times \frac{1}{[(k - p_{n-1})^2 + m_{n-1}^2]} e^{ip_1 \cdot x_1} \dots e^{ip_{n-1} \cdot x_{n-1}} \delta(\sum x_i) \right)^R \quad (4.24)$$

Calculamos a transformada de Fourier e aplicamos a regra 3 para obter

$$\hat{F}_n^R[-(k^2 + m_{n+1}^2)] = - \int_{x_1, \dots, x_n} \left(\int_{p_1, \dots, p_{n-1}} \int_k \frac{1}{(k^2 + m_n^2)[(k - p_1)^2 + m_1^2]} \dots \frac{1}{[(k - p_{n-1})^2 + m_{n-1}^2]} e^{i(p_1 - p'_1) \cdot x_1} \dots e^{i(p_{n-1} - p'_{n-1}) \cdot x_{n-1}} e^{-i p'_n \cdot x_n} \right)^R \delta(\sum x_i). \quad (4.25)$$

Após a integração em x:

$$\hat{F}_n^R[-(k^2 + m_{n+1}^2)] = - \left(\int_{p_1, \dots, p_{n-1}} \int_k \frac{1}{(k^2 + m_n^2)[(k - p_1)^2 + m_1^2]} \dots \times \frac{1}{[(k - p_{n-1})^2 + m_{n-1}^2]} \delta(p_1 - p'_1 + p'_n) \dots \delta(p_{n-1} - p'_{n-1} + p'_n) \right)^R, \quad (4.26)$$

ou seja o mesmo resultado da eq(4.23). Fica claro das expressões acima que a aplicação das regras 3 e 4 são equivalentes a cancelar o termo $k^2 + m_{n+1}^2$ no numerador com o idêntico no denominador e depois fazer o shift ($k \rightarrow k + p_n$) no integrando.

4.1.3.3 A regra de Leibniz no espaço das posições, ambiguidades na transformada de Fourier e shifts no espaço dos momentos

A validade da regra de Leibniz é uma ferramenta essencial quando relações são estabelecidas entre funções básicas com e sem índices de Lorentz. Esta validade dá origem a uma ambiguidade quando a transformada de Fourier é calculada.

Vejamos o exemplo abaixo:

$$F_n[\partial_\mu](x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta_{m_1}(x_1) \cdots \Delta_{m_n}(x_n) \partial_\mu^{x_1} \Delta_{m_{n+1}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \quad (4.27)$$

que sob a transformada de Fourier, nos dá

$$\hat{F}[k_\mu](p_1, \dots, p_n) = \int_{k_1, \dots, k_{n+1}} \frac{ik_\mu^{n+1}}{(k_1^2 + m_1^2)(k_2^2 + m_2^2) \cdots (k_{n+1}^2 + m_{n+1}^2)} \times \delta(k_1 + k_{n+1} - p_1) \cdots \delta(k_n + k_{n+1} - p_n) \quad (4.28)$$

Nota-se aqui que dependendo do momento escolhido para permanecer como variável de integração, teremos integrais com rotulações diferentes, ou seja integrais que serão diferentes por shifts. Para vermos mais claramente, escolhemos primeiramente k_{n+1} como o momento do loop. Assim:

$$\begin{aligned} \hat{F}[k_\mu](p_1, \dots, p_n) &= \int_k \frac{ik_\mu}{(k^2 + m_{n+1}^2)[(k - p_1)^2 + m_1] \cdots [(k - p_n)^2 + m_n]} \\ &= \int_k \frac{-ik_\mu}{(k^2 + m_{n+1}^2)[(k + p_1)^2 + m_1^2] \cdots [(k + p_n)^2 + m_n^2]}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Por outro lado se escolhermos k_1 como momento do loop, teremos:

$$\hat{F}[k_\mu](p_1, \dots, p_n) = \int_k \frac{i(p_1 - k)_\mu}{(k^2 + m_1^2)[(k - p_1)^2 + m_{n+1}^2] \cdots [(k + p_n - p_1)^2 + m_n^2]}. \quad (4.30)$$

A eq.(4.30) pode ser obtida fazendo-se o "shift($k \rightarrow k + p_1$)"no integrando eq.(4.29). Se a integral é no máximo logaritmicamente divergente não há problemas em fazer shifts, mas nem sempre temos integrais com este comportamento. Em uma integral linearmente divergente por exemplo, um termo de superfície deveria ser acrescentado para compensar o shift. Podemos evitar este problema definindo que um determinado momento, por exemplo o do último propagador, seja o momento da rotulação. Contudo, se a regra de Leibniz é usada em algumas situações, esta ambiguidade não pode ser removida. O próximo para remover este termo de superfície. O próximo exemplo mostra o acima citado. Seja a função básica sem massa:

$$B[\partial_\mu] = \Delta(x)\partial_\mu\Delta(x). \quad (4.31)$$

Aplicando a regra de Leibniz, fica:

$$B[\partial_\mu] = \frac{1}{2}\partial_\mu B[1]. \quad (4.32)$$

Regularizando:

$$B[\partial_\mu]^R = \frac{1}{2}\partial_\mu B[1]^R. \quad (4.33)$$

O equivalente no espaço dos momentos é

$$\left(\int_k \frac{k_\mu}{k^2(p-k)^2}\right)^R = \frac{1}{2}p_\mu \left(\int_k \frac{1}{k^2(p-k)^2}\right)^R, \quad (4.34)$$

ou em uma notação mais condensada, $I_\mu = \frac{1}{2}p_\mu I$. Podemos agora comparar com a expressão obtida diretamente no espaço dos momentos, fazendo uso de duas maneiras diferentes de cálculos. Na primeira, consideramos uma extensão das propriedades das integrais regulares para as regularizadas e fazemos o shift ($k \rightarrow k + p$) na integral I_μ . Obtemos:

$$I_\mu = \int_k \frac{(k+p)_\mu}{k^2(p+k)^2} = \int_k \frac{k_\mu}{k^2(p+k)^2} + p_\mu I = -I_\mu + p_\mu. \quad (4.35)$$

Observamos que foi usado no último passo que I_μ é ímpar em p . O resultado é portanto o mesmo resultado obtido pela RDV ($I_\mu = \frac{1}{2}p_\mu I$). No procedi-

mento que fizemos acima, realizamos um shift em uma integral linearmente divergente, o que resulta em um termo de superfície. Temos que acrescentar um contratermo para cancelar o termo de superfície. Este procedimento está de acordo com as regras da RIV: Eliminar termos de superfície através de contratermos restauradores de simetria. Tratemos novamente a integral I_μ com um cálculo explícito através da Regularização Implícita, o que nos permitirá identificar o termo de superfície. Como a integral I_μ é linearmente divergente, aplicamos a identidade (2.1) duas vezes ao integrando obtendo:

$$I_\mu = \int_k^\Lambda \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)} \left(\frac{1}{(k^2 - m^2)} - \frac{p^2 - 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)^2} + \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^2[(p - k)^2 - m^2]} \right) \quad (4.36)$$

Na integral acima, tomaremos o limite $m^2 \rightarrow 0$ no final dos cálculos. O resultado após manipulações:

$$I_\mu = \frac{p_\mu}{2} \left(I_{\log(\lambda^2)} - b \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2 e^2}\right) \right) - \frac{p^\alpha}{2} S_{\mu\alpha} = \frac{p_\mu}{2} I - \frac{p^\alpha}{2} S_{\mu\alpha}, \quad (4.37)$$

com

$$S_{\mu\alpha} = \int_k^\Lambda \frac{\partial}{\partial k^\nu} \left(\frac{k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} \right). \quad (4.38)$$

O termo de superfície que deve ser colocado igual a zero. Usamos aqui a relação de escala eq.(3.3). Nesta análise que fizemos vimos que a validade da regra de Leibniz no cálculo de $B[\partial_\mu]$ resulta na validade em se fazer "shift" em uma integral linearmente divergente, ou seja uma subtração do termo de superfície. Embora tenhamos demonstrado para um caso particular, esta relação também é válida para todas as funções básicas com índices de Lorentz superior.

Conclusões

Após quase 40 anos da demonstração que a regularização dimensional é invariante de gauge, coroando o modelo padrão das partículas elementares como uma teoria renormalizável, um tratamento perturbativo adequado para teorias de gauge supersimétricas, quirais e topológicas, consistente em todas as ordens, é um problema aberto.

Espera-se de um programa de regularização invariante que ele respeite as simetrias vitais da teoria (calibre e supersimetria, por exemplo) em todas as ordens de teoria de perturbação. Deve portanto atuar na dimensão física do modelo para evitar problemas da continuação analítica da álgebra dos tensores de Levi-Civita e respeitar a igualdade dos graus de liberdade bosônicos e fermiônicos para supersimetria. Deve ser prático do ponto de vista operacional e preferencialmente atuar no espaço dos momentos onde os elementos da matriz S são construídos. A regularização implícita tem-se mostrado uma boa candidata nesse sentido. As divergências ultravioletas ficam dispostas como integrais divergentes básicas nos momentos internos, processo esse que naturalmente origina termos de superfície. Tais termos de superfície estão associados à possibilidade de “shifts” nos momentos internos das integrais de Feynman e se impusermos que eles sejam zero (regularização implícita vinculada) a invariância de calibre é preservada a um laço. Este argumento encontra respaldo na prova diagramática geral de invariância de calibre abeliano [28].

A pergunta natural que respondemos positivamente nesse trabalho foi se a generalização para ordens superiores nos laços é possível dentro dos moldes da regularização implícita, sobretudo quando delicadas subtrações envolvendo subdivergências são necessárias. De fato mostrou-se posteriormente

para teorias de calibre abelianas que a regularização implícita é invariante em ordem arbitrária [11]. Esperamos que uma prova similar possa ser feita para o caso não-abeliano uma vez que verificou-se que é análogo ao caso abeliano a um laço.

Para supersimetria, os mesmos termos de superfície colocados iguais a zero parecem render o procedimento de regularização implícita invariante. Seria interessante e necessário estudar uma demonstração geral associando os termos de superfície às quebras de simetria em integrais de Feynman. O princípio da ação quântica que associa transformações gerais nas funções de Green às transformações no Lagrangiano vistas como inserções nestas funções de Green é um método útil neste sentido. Tal princípio foi usado na demonstração geral que o procedimento de regularização dimensional é invariante de gauge bem como na extensão da redução dimensional até dois laços em teorias supersimétricas.

Vale a pena mencionar que a imposição de invariância translacional das funções de Green livres [4] e interagentes implica que termos de superfície idênticos àqueles que surgem durante a aplicação da regularização implícita sejam nulos.

Finalmente a renormalização diferencial tem-se mostrado uma importante e eficaz ferramenta para cálculos perturbativos de maneira invariante. A um laço tal procedimento foi demonstrado invariante para simetrias de calibre se formalizado de acordo com regras básicas simples envolvendo prescrições mínimas que mapeiam produtos de distribuições em distribuições e escolha de escalas. Mostramos que tais regras apresentam uma contrapartida um a um no procedimento da regularização implícita, o que demonstra a equivalência entre os dois métodos, pelo menos a um laço. Isto é curioso uma vez que a renormalização diferencial sequer faz menção a contratermos. O procedimento atua de modo a produzir automaticamente funções de Green renormalizadas.

Finalmente esperamos que o cálculo preciso e não-ambíguo de observáveis dentro de extensões supersimétricas do modelo padrão, como por exemplo os “electroweak precision observables” possam ser realizados com regularização implícita, cálculos estes que são importantes nessa geração de aceleradores e laboratórios de Física de altas energias e nas gerações por vir.

Apêndice A: O cálculo a 2 laços com Regularização Implícita

Para o cálculo das funções do grupo de renormalização γ e β a parte divergente dos gráficos de dois e três laços são necessárias. Os resultados são:

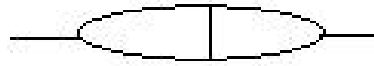


Figura 6.1: Função de dois pontos sobrepostas

Este gráfico com divergências sobrepostas e o gráfico (3.2) com divergências aninhadas são importantes para o cálculo das funções gama e beta do grupo de renormalização. A forma de fazer a separação da parte divergente deve ser observada com cuidado pois pode produzir resultados diferentes. O resultado para as divergências das funções de dois pontos na ordem de dois laços são:

$$= \frac{1}{6} \left[-I_{log}^2(\lambda^2) - \frac{1}{3} b I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{2}{9} b I_{log}(\lambda^2) \right] \quad (6.1)$$

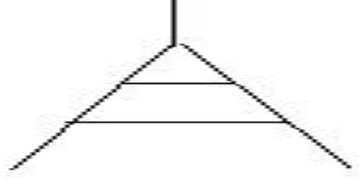


Figura 6.2: Função de três pontos na ordem dois laços

$$\Lambda_1 \propto g^5 \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \int \frac{d^6 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{k^2(p-k)^2(k-l)^2(p-k)^2(p-l)^2(p-l)^2}. \quad (6.2)$$

Para a parte divergente com $p = p' = 0$ teremos

$$\Lambda_1^\infty = F_1 g^5 \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{k^6} \int \frac{d^6 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{l^4(l-k)^2}, \quad (6.3)$$

A parte divergente de interesse fica

$$\Lambda_1^\infty = F_1 g^5 \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{k^6} \left[b \ln\left(\frac{-k^2}{\lambda^2}\right) - 2b \right]. \quad (6.4)$$

O resultado divergente é:

$$= -3ibg^5 \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - 2I_{log}(\lambda^2) \right]. \quad (6.5)$$

O gráfico seguinte é o Gráfico de três pontos a dois laços com subdivergência tipo bolha.

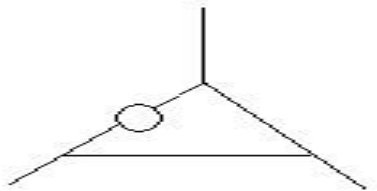


Figura 6.3: Função de três pontos a dois laços com subdivergência tipo bolha

$$\Lambda_2^\infty \propto F_2 g^5 \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{k^4 (p-k)^2 (k+p'-p)^2} \int \frac{d^6 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{l^2 (k-l)^2}. \quad (6.6)$$

Fazemo $p = p' = 0$, e chegamos ao resultado divergente:

$$= \frac{ib}{2} g^5 \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{8}{3} I_{log}(\lambda^2) \right]. \quad (6.7)$$

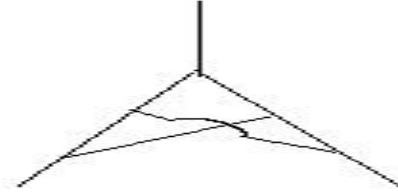


Figura 6.4: Função de três pontos com pernas cruzadas

$$\Lambda_3^\infty \propto g^5 \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(p-k)^2} \int \frac{d^6 k_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{(p-l^2)^2 (p'-l)^2 (l-k)^2 (p'+k-l)^2} \quad (6.8)$$

Fazemos $p = p' = 0$:

$$\Lambda_3^\infty = F_3 g^5 \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{k^4} \int \frac{d^6 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k-l)^4 (l^4)} \quad (6.9)$$

O resultado para a parte divergente:

$$\Lambda_3^\infty = ibg^5 I_{log}(\lambda^2) \quad (6.10)$$

REFERÊNCIAS

- [1] S Heinemeyer, et al *Phys. Rep.* **425** 265(2006)
- [2] Siegel W *Phys. Lett. B* **94**,37(1980).
- [3] Seijas C.,hep-th/0604071 (2006)
- [4] Batistel O A, Mota A L and Nemes M C *Mod. Phys. Lett. A* **13**, 1597(1998).
- [5] Baêta Scarpelli A P ,Sampaio M and Nemes M C *Phys. Rev. D* **63**, 046004(2001).
- [6] Baêta Scarpelli A P ,Sampaio M,Hiller B and Nemes M C *Phys. Rev. D* **64**, 046013(2001).
- [7] Souza L A M ,Sampaio M, and Nemes M C *Phys. Lett. B* **632**, 717(2006).
- [8] Dias E W,Hiller B, Nemes M C, Sampaio M and Osipov A A *Mod.Phys. Lett. A* **21**, 339(2006).
- [9] Hiller Brigitte,Mota A L,Nemes M C, Osipov A A andSampaio M, and Nemes M C *Nucl. Phys.A* **769**, 53(2006).
- [10] G. Bennett et al. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 161802(2004).
- [11] E W Dias, A P Baêta Scarpelli,L C Brito, Marcos Sampaio , M C Nemes *Eur. Phys. J. C* **55**, 667-681(2008).
- [12] Carneiro D., Baêta Scarpelli A P, Sampaio M and Nemes M C *jhep***12** 044(2003).
- [13] Carlos R Pontes A P Baêta Scarpelli, Marcos Sampaio and M C Nemes *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **34**, 2215-2234(2007).
- [14] Taizo Muta; *Foundations of quantum chromodynamics An introduction to Pertubative Methods in Gauge Theories*, World Scientific, (1987).

-
- [15] Ottoni J E, Scarpelli A P B, Sampaio M, Nemes M C, *Phys. Lett.B* **642** 253(2001).
- [16] L C T Brito, Marcos Sampaio, M C Nemes *Trabalho em andamento*
- [17] S R Gobira, *Tese de doutorado* Universidade Federal de Minas Gerais, (2001).
- [18] Stefan Pokorski, *Gauge Field Theories* Cambridge University Press, (1987).
- [19] P E Haagensen, *Mod.Phys.Lett.A* **7**, 893(1992); R Muñoz-Tapia, *Phys.Lett.B* **295**, 95(1992); D Z Freedman, G. Grignani, K Johnson and N Rius, *Ann. Phys.* **218**, 75(1992); P E Haagensen, J I Latorre, *Ann. Phys.* **221**, 77(1993); C Manuel, *Int.J.Mod.Phys.A* **8**, 3223(1993); D Z Freedman, G. Lozano and N Rius, *Phys.Rev.D* **49**, 1054(1994); J Comellas, P E Haagensen and J I Latorre, *Int.J.Mod.Phys.A* **10**, 2819(1995); M Chaichian, W F Chen, H C Lee, *Phys.Lett.B* **409** 325(1997), V A Smirnov, *Int.J.Mod.Phys.A* **12**, 4241(1997); Anselmi, D Z Freedman, M T Grisaru, A A Johansen, *hep-th/9708042*.
- [20] J I Latorre, C Manuel and X Vilasis-Cardona, *Ann. Phys.*, 231, 141(1994); G Dunne, N Rius, *Phys.Lett.B* **293**, 367(1992); V A Smirnov, *Nucl.Phys.B* **427**, 325(1994).
- [21] D Z Freedman, K Johnson, R Muñoz-Tapia and X Vilasis-Cordona, *Nucl.Phys.B* **395**, 454(1993).
- [22] P E Haagensen, J I Latorre, *Phys.Lett.B* **283**, 293(1992).
- [23] M Perez-Victoria, *Phys.Lett.B* **442**, 315(1998).
- [24] F P Del Aguila et al, *Nucl.Phys.B* **504**, 532(1997).
- [25] M Sampaio, et al, *Int. J. Theor. Phys.* **45** 436(2006).
- [26] Leonardo A M Souza, M Sampaio, M C Nemes *Phys. Lett.B* **632**, 717(2006); A P Baêta Scarpelli et al, *Phys. Rev.D* **64**, 46013(2001).
- [27] D Z Freedman, et al, *Nucl. Phys. B* **371** 353(1992).
- [28] M E Peskin, Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* The Advanced Book Program, (1995).