

Generalização do procedimento de Regularização Implícita para ordens superiores em teorias de calibre abelianas

Edson Wander Dias

Novembro de 2008

**Generalização do procedimento de regularização
implícita para ordens superiores em teorias de calibre
abelianas**

Edson Wander Dias

Orientadora: Profa. Maria Carolina Nemes

Co-orientador: Prof. Antônio Paulo Baêta Scarpelli

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para
a obtenção do grau de DOUTOR EM CIÊNCIAS.

Novembro de 2008

*Aos meus pais Vicente e Maria Lúcia
sem palavras...
e para quem, com muito amor, fez da minha vida
uma parte da sua
Mariza*

*Ando devagar porque já tive pressa
e levo esse sorriso porque já chorei demais...
Hoje me sinto mais forte, mais feliz, quem sabe
Eu só levo a certeza
de que muito pouco eu sei
Eu nada sei
Conhecer as manhas e as manhãs,
o sabor das massas e das maçãs
é preciso paz pra poder sorrir
É preciso chuva para florir
Penso que cumprir a vida seja simplesmente
Compreender a marcha
e ir tocando em frente
Como um velho boiadeiro levando a boiada
Eu vou tocando os dias
pela longa estrada eu vou
Estrada eu sou
Conhecer as manhas e as manhãs,
o sabor das massas e das maçãs
é preciso paz pra poder sorrir
É preciso chuva para florir
Todo mundo ama um dia, todo mundo chora
Um dia a gente chega, no outro vai embora
Cada um de nós compõe a sua história
E cada ser em si carrega o dom de ser capaz
De ser feliz
Conhecer as manhas e as manhãs,
o sabor das massas e das maçãs
é preciso paz pra poder sorrir
É preciso chuva para florir
Ando devagar porque já tive pressa
e levo esse sorriso porque já chorei demais...
Hoje me sinto mais forte, mais feliz, quem sabe
Eu só levo a certeza
de que muito pouco eu sei
Eu nada sei...*

Agradecimentos

*“ Amigo é coisa pra se guardar
do lado esquerdo do peito...”*

*Milton Nascimento*¹

Esta talvez seja a melhor parte desta tese. É, mais do que um espaço, um momento em que posso reverenciar e agradecer tantas pessoas que contribuíram para minha formação profissional e humana... tantas pessoas que fazem parte da minha vida. É um momento em que fico muito contente, em poder me relembrar de tantas pessoas que contribuíram para que esse trabalho pudesse ser concluído. Como não convém confiar na minha memória, antecipo minhas sinceras desculpas a quem porventura eu esqueça. No meu coração, entretanto, todos vocês sempre serão lembrados;

Agradeço a Profa. Maria Carolina Nemes, que acompanhou essa trajetória desde os tempos do mestrado, por todo esse período de orientação e trabalhos, por toda a paciência e aceitação de nossas dificuldades. ”Carol”, obrigado por toda a confiança em mim depositada, mesmo que no fundo, eu não a merecesse. Aproveito para pedir minhas sinceras desculpas por algo que eu não tenha feito a contento;

Agradeço ao meu co-orientador e acima de tudo grande amigo, Prof. Antônio Paulo Scarpelli (Tonhão, o mago das integrais de Feynman), pela grande parceria estabelecida durante a execução do trabalho e sua inestimável contribuição, sem a qual uma linha sequer deste trabalho teria sido produzida. Exemplo de humildade a ser seguido por qualquer ser humano;

Aos colaboradores, e acima de tudo, amigos, do grupo de Teoria Quântica de Campos: Marcos Sampaio, Magneto(Carlos) e Luiz Kléber, com os quais muito pude discutir e aprender ao longo dos últimos tempos. Em especial, agradeço ao Kléber, que foi uma banca diária para meu trabalho, com seus questionamentos sempre importantes.

Agradeço a todos os meus professores da Pós-Graduação na Física, por sua competência e dedicação e pela sólida formação que nos proporcionaram.

¹trecho inicial de ”Canção da América”, de Milton Nascimento

Em especial, agradeço aos professores João Antônio Plascak, Jafferson Kamphorst, Sebastião Pádua e Paulo Sérgio Guimarães. (*"If I have seen further, it is by standing on the shoulders of giants.- Sir Isaac Newton*)

Ao professor Luiz Paulo Vaz, com quem pude trabalhar enquanto professor substituto do Departamento de Física, na disciplina de Fundamentos de Mecânica. Um exemplo de dedicação, compromisso e seriedade no trabalho.

Agradeço aos funcionários de todos setores do Departamento de Física, que fazem com que tenhamos as melhores condições de trabalho possíveis. Registro meu agradecimento especial às secretarias da Pós-Graduação Marluce e Ieda, que muito me acalmaram nos momentos difíceis do trabalho. E à Shirley e Clarissa, nossas bibliotecárias, agradecimentos por tanta gentileza e presteza para com os alunos da pós-graduação;

Agradeço aos professores e funcionários do Departamento de Física da UFSJ, onde trabalhei na primeira parte do doutorado, e onde fiz diversas disciplinas da Física ainda na graduação. Agradecimento especial ao professor Heron Caldas, com quem comecei a desenvolver um primeiro projeto neste doutorado, e que muito me ensinou sobre a postura que um pesquisador precisa ter. Impossível não agradecer ao professor André Luiz Mota, grande amigo e orientador, com quem trabalhei durante muitos anos e que começou a abrir caminho para que eu ingressasse na Física.

Aos amigos da época de graduação, com quem adquiri boa parte do conhecimento que me serviu de suporte no mestrado e no doutorado. Agradecimentos especiais a Erivelton Nepomuceno (Cabeçudo), Alexandre Grossi (Ventania), Carlos Eduardo (Cadu), Rodrigo Peniche (Coitadinho) e Luciano Arruda; *"We are the champions, my friends..."*

A todos os companheiros da eterna República Selvagem, que fizeram toda essa caminhada mais prazerosa e, inegavelmente, divertida. Ser filho único, como no meu caso, não precisa ser sinônimo de não ter irmãos, e é assim que considero todos vocês: Edgar Furtado (Menino de Deus), Leonardo Bonato, Jean Venato, Dênis, Marcello Talarico, Geraldo Rocha, Eduardo (Tomelli), David (Bin Laden), Brenno (Picareta), Don Diego, Luellerson (Luciano), Marcos Flávio (Bililiu Kick Head) (Viva a Jumentada!!! *"...and I need you... and you need me..."*);

Aos grandes amigos que fiz na pós-graduação e com quem tanto aprendi

ao longo destes anos de mestrado e doutorado. Em especial, ao Humberto Lemos (companheiro de sofrimento com o Galo), aos "viçosenses" Damião, Mário, Magneto (Carlos) e Leonardo (Léo Diagonal), ao Róbson (Faxineiro do Conselho), com quem tive debates sempre equilibrados sobre a rivalidade do futebol mineiro, e ao grande amigo e irmão Márcio Rocha (Cearense, cabra bruto e Presidente de Honra do Conselho). Amigos, jamais chegaria aqui sem a parceria de vocês em tantos momentos... ("Você é meu amigo de fé, meu irmão camarada...")

Ao sr. Momofuku Ando (*in memoriam*), inventor do macarrão *nissin lamen*, o qual serviu de refeição saborosa em muitas madrugadas;

A todos os meus professores, de todas as épocas da minha vida. Do ensino primário ao ensino superior. Meus agradecimentos especiais à "Tia Lurdinha" (que me alfabetizou), aos professores de Matemática do ensino fundamental, Levi e Maria Carmem (o primeiro por acreditar em mim... a segunda por me reprovar na sexta série), ao prof. Ricardo Rossetti (a quem agradeço o razoável português que tenho); ao prof. Edson, profissional brilhante e ser humano fantástico, grande incentivador desta caminhada; e ao grande prof. José Antônio Bortoluz, meu professor de Física no segundo grau, que foi o primeiro a me despertar o interesse por essa ciência maravilhosa;

Aos amigos da Abadia São Francisco, companheiros de jornada e com quem consigo aprender muitas coisas novas, "Sultão" (José Maria), "Juca" (Hemerson) e "Barbudim" (Ronaldo Guimarães). Agradeço a vocês o bom humor constante e a amizade, que contribuíram para a finalização deste trabalho; ("*In nomini Christi, Amen...*")

Às minhas tias, Maria Aparecida e Maria Dolores, que tanto ajudaram com o zelo pela saúde de minha mãe nos últimos anos, proporcionando a tranquilidade necessária para o andamento do meu trabalho.

À coordenação do Pré-Vestibular Comunitário Dom Orione, especialmente para Marcolina e Élci, que me deram uma oportunidade ímpar de poder partilhar meu conhecimento e contribuir para a formação de jovens carentes.

Aos queridos amigos Átila, Sebastian, José, Wally, Elvis, Nick e sua família... é muita gente!! Vocês fazem o mundo mais lúdico e divertido. Obrigado a todos vocês, queridos amigos...

Aos meus sogros, Maria Auxiliadora e Antônio, aos quais tenho como novos pais, e que sempre me acolheram com tanto carinho. "Dona" Dora, "Mestre" Antônio, vocês moram no meu coração!!

Aos meus pais, Maria Lúcia e Vicente, que nunca mediram esforços para que eu atingisse meus objetivos. A vocês dois, sempre faltará palavras para expressar minha gratidão... Papai e Mamãe, amo vocês!!

À minha noiva, Mariza, com quem tentei compartilhar os momentos mais importantes da minha vida nos últimos anos (*"Eu nunca disse que iria ser a pessoa certa pra você mas sou eu quem te adora..."*). Que esteve sempre ao meu lado, principalmente nas horas difíceis. Que é a pessoa com quem mais discuto neste mundo, que é quem vive comigo os melhores momentos da minha vida... inegavelmente por ser a pessoa que mais amo neste mundo... (*"Eu não sei parar de te olhar... Eu não sei parar de te olhar..."*)

A Deus, o maior dos físicos, por me conceder força em todas as horas (mesmo quando eu insisti em não acreditar) e por criar o maravilhoso mundo das partículas elementares para que pudéssemos compreendê-lo...

Resumo

Neste trabalho, propomos uma generalização do procedimento de Regularização Implícita para ordens além da primeira ordem na expansão em loops, no contexto de teorias de calibre. Nesta extensão do procedimento, as divergências ultra-violeta são escritas em termos de integrais nos momentos internos aos loops, enquanto as identidades de Ward-Slavnov-Taylor são controladas pela eliminação dos chamados termos de superfície, que são obtidos através de integrais em momentos internos aos diagramas em que o integrando possui índices de Lorentz. Como exemplos de ilustração, aplicamos o procedimento de Regularização Implícita em duas teorias de calibre abelianas, não-massivas: a eletrodinâmica escalar e a eletrodinâmica espinorial, tratadas na ordem de dois loops. Na QED espinorial, calculamos a função β do grupo de renormalização a dois loops, um cálculo que serve como um teste para o procedimento de Regularização Implícita, visto que tal parâmetro depende do contra-termo da função de onda do campo eletromagnético.

Como uma segunda contribuição, estabelecemos uma sistematização do cálculo multiloop de amplitudes de probabilidade para teorias não-massivas, no contexto da Regularização Implícita. Determinamos uma estrutura geral para o conteúdo ultra-violeta da teoria e identificamos todos os termos potencialmente violadores da simetria de calibre. Em especial, desenvolvemos uma técnica para o cálculo da parte finita de integrais multiloop para teorias não-massivas, já que técnicas usuais (como os polinômios de Gegenbauer) para o cálculo em ordens superiores para teorias não-massivas não são adequadas na Regularização Implícita. Usando uma identidade matemática conhecida os integrandos podem ser colocados numa forma adequada para que possamos usar a Parametrização de Feynman. Isso torna o processo de cálculo simples e permite sua sistematização para integrais típicas de n -loops. A relevância das chamadas relações de escala é acentuada através do cancelamento direto dos termos que são dependentes de massas fictícias introduzidas para proteger a amplitude contra divergências infra-vermelhas.

Abstract

We extend a constrained version of Implicit Regularization (CIR) beyond one loop order for gauge field theories. In this framework, the ultraviolet content of the model is displayed in terms of momentum loop integrals order by order in perturbation theory for any Feynman diagram, while the Ward-Slavnov-Taylor identities are controlled by finite surface terms. To illustrate, we apply CIR to massless abelian Gauge Field Theories (scalar and spinorial QED) to two loop order and calculate the two-loop beta-function of the spinorial QED.

As a second contribution, we establish a systematization of the calculation of multiloop amplitudes of massless models with Implicit Regularization. We show that the ultraviolet content of such amplitudes have a simple structure and it permits as a byproduct the identification of all the potential symmetry violating terms, the surface terms. Moreover, we develop a technique for the calculation of the finite part of multiloop integrals coming from amplitudes of massless theories in connection with Implicit Regularization (IR). The usual techniques for calculation at a superior order in massless theories are not applicable in the context of IR. We use a well known mathematical identity to express the integrand in an adequate form to use Feynman parametrization. This renders the process of calculation simple and permits the systematization of the calculus for a typical n -loop integral, with a direct cancelation of the fictitious mass introduced by the procedure of IR.

CONTEÚDO

Agradecimentos	iii
Resumo	vii
Abstract	viii
1 Introdução	7
2 Identidades de Ward na QED	16
2.1 Introdução	16
2.2 Elementos básicos da Eletrodinâmica Quântica	16
2.2.1 Identidades de Ward	21
2.2.2 Primeiro caso	22
2.2.3 Segundo caso	24
2.3 Contratermos restauradores de simetria	28
3 O procedimento de Regularização Implícita	31
3.1 O procedimento de regularização implícita	32
3.1.1 Exemplo de aplicação	35

4	Transversalidade do tensor de polarização do vácuo na QED escalar	40
4.1	A eletrodinâmica quântica escalar não massiva	40
4.2	Tensor de polarização do vácuo na QED escalar a dois loops .	42
4.2.1	Contribuições nulas para $\Pi_{\mu\nu}$ na QED escalar	43
4.3	Contribuições não-nulas para o tensor de polarização do vácuo na QED escalar a dois loops	45
4.3.1	Cálculo do diagrama sobreposto	51
4.3.2	Verificação da transversalidade do tensor de polarização	53
5	Eletrodinâmica Quântica Espinorial a 2 loops	57
5.1	Introdução	57
5.2	Auto-energia do elétron	57
5.3	Correções de vértice a 2 loops para a QED espinorial	61
5.4	O tensor de polarização do vácuo	71
5.5	Cálculo da função beta do grupo de renormalização a dois loops	74
6	Extensão da Regularização Implícita para ordens arbitrárias em modelos não-massivos	80
6.1	Introdução	80
6.2	Obtenção da relação de escala a n-loops	80
6.3	Separação dos termos de superfície a n-loops e cálculo de uma integral com índice de Lorentz	82
6.3.1	Solução de uma integral com índices de Lorentz	85
7	Conclusões e Perspectivas	93
A	Apêndice 1: Propriedades das matrizes γ de Dirac	97

B	Apêndice 2: Cálculos radiativos a um loop na Eletrodinâmica Escalar e Espinorial	101
B.1	Cálculo de amplitudes de probabilidade a um loop na QED escalar	101
B.1.1	Tensor de polarização do vácuo na QED escalar, a um loop	101
B.1.2	Auto-energia escalar na QED escalar, a um loop	104
B.1.3	Diagrama de vértice para a eletrodinâmica quântica escalar	107
B.2	Eletrodinâmica Espinorial a um loop	108
B.2.1	Tensor de polarização do vácuo na QED espinorial não massiva, a um loop	108
B.2.2	Auto-energia do férmion na QED espinorial não massiva, a um loop	110
C	Apêndice 3: Cálculo explícito de integrais finitas de 2 loops em teorias não massivas	112
C.0.3	Cálculo de uma integral overlapada	133
C.1	Solução de uma integral básica a n loops	147
D	Apêndice 3: Tabela de integrais básicas para teorias não massivas a um e dois loops	152
D.1	Integrais características de diagramas a dois loops	152
D.1.1	Integrais características de diagramas com divergências overlapadas	153
D.2	Integrais características de cálculos em um loop	154
E	Apêndice 5: Cálculo explícito dos diagramas overlapados para a QED escalar e a QED espinorial	156

E.1 Diagrama overlapado para o tensor de polarização do vácuo na QED escalar	169
Bibliografia	178

LISTA DE FIGURAS

2.1	representação do propagador fermiônico	20
2.2	vértice elétron-fóton	20
2.3	propagador do fóton	20
2.4	diagrama de Feynman para a interação típica entre férmions e fótons	21
2.5	linha fermiônica típica com inserções de fótons	22
2.6	inserção de fóton genérica em linha fermiônica	22
2.7	expressão diagramática para uma identidade de Ward	24
2.8	um típico loop fermiônico para amplitudes da QED	24
2.9	inserção de fóton em um loop fermiônico	25
4.1	diagrama de Feynman para a interação quártica entre dois escalares e dois fótons	41
4.2	diagrama de Feynman para a interação entre um escalar e um fóton	42
4.3	correção diagramática do tipo <i>tadpole</i>	43
4.4	correções perturbativas proporcionais ao diagrama <i>tadpole</i>	44
4.5	correções radiativas não-nulas para o tensor de polarização a dois loops e respectivos contratermos na QED escalar	45

4.6	correção quântica para o propagador escalar a um loop	46
5.1	diagramas de auto-energia a dois loops na QED espinorial . .	58
5.2	correções radiativas para a função de vértice a dois loops na QED espinorial	62
5.3	contribuições radiativas para o tensor de polarização do vácuo na QED espinorial	71
5.4	primeira correção quântica para o tensor de polarização a um loop	75
B.1	diagrama de Feynman para o tensor de polarização do vácuo .	102
B.2	correção de vértice para a QED escalar a um loop	107
B.3	diagrama de Feynman para o tensor de polarização do vácuo .	108
B.4	diagrama de Feynman para a interação quártica entre dois escalares e dois fótons	111

Introdução

“Early attempts at constructing realistic models for the weak interaction were offset by the emergence of infinities, hence meaningless, expressions when one tried to derive the radiative corrections. When models based on gauge theories with Higgs mechanism were discovered to be renormalizable, the bothersome infinities disappeared - they cancelled out. If this success seemed to be due to mathematical sorcery, it may be of interest to explain the physical insights on which it is actually based.”

1

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é considerada uma das teorias de maior sucesso na Física. A precisão dos resultados na Eletrodinâmica Quântica, como o cálculo do momento magnético anômalo do elétron e do *Lamb shift* entre outros, proporcionou grande confiança nas ferramentas e interpretações da Teoria de Campos. Entre outros sucessos da TQC, podemos citar o Modelo Padrão de interações elementares, que unificou as interações fracas com o Eletromagnetismo, e com a Cromodinâmica Quântica (QCD), que descreve o setor das interações fortes.

Apesar desse grande sucesso, ela ainda sofre com alguns problemas no contexto de cálculos perturbativos: as correções radiativas, cujas amplitudes de probabilidade são normalmente divergentes no limite de altos valores do momento das partículas virtuais, ou ainda no caso de teorias não massi-

¹Nobel lecture de 1999 - A confrontation with infinity, de Gerard 'tHooft

vas, as chamadas divergências infravermelhas, peculiares no regime de baixos valores do momento. Para superar esse problema e extrair resultados físicos confiáveis, os chamados esquemas de regularização e renormalização são empregados. O primeiro pode ser compreendido, grosso modo, como uma forma de se redefinir as amplitudes de probabilidade, mudando a estrutura do integrando (como no esquema de regularização de Pauli-Villars) (55), a dimensão espaço-temporal (regularização dimensional)(33), (36), (34), (35) ou ainda usando um *cut-off* no limite superior das integrais. A regularização por *cut-off* é comumente usada no estudo perturbativo de processos em baixas energias em modelos efetivos, como no modelo de Nambu-Jona Lasínio, que é um protótipo da QCD em baixas energias. Outro problema no cálculo perturbativo em teorias quânticas de campo é o surgimento de quantidades finitas, porém arbitrárias, que são fruto do esquema de regularização adotado para se tratar amplitudes divergentes. Segundo Jackiw (48), ambiguidades são características do cálculo perturbativo em Teoria Quântica de Campos. Elas devem ser fixadas por critérios físicos, seja por alguma relação de simetria ou seja pelos valores experimentais de algum parâmetro físico.

Atualmente, as atenções da comunidade de Física de Partículas e de Teoria Quântica de Campos estão voltadas para os experimentos a serem realizados no LHC (Large Hadron Collider) e nos experimentos envolvendo colisões em altas energias do tipo e^+e^- , nos quais espera-se que sejam confirmadas a existência do bóson de Higgs e a existência de partículas supersimétricas. Teorias baseadas na supersimetria são largamente aceitas como a extensão natural do Modelo Padrão. As teorias supersimétricas prevêem a existência de um parceiro supersimétrico escalar para cada férmion quiral no Modelo Padrão, e parceiros supersimétricos fermiônicos para cada bóson de calibre e para cada escalar de Higgs. Além da detecção direta de partículas supersimétricas e bósons de Higgs, efeitos supersimétricos poderão ser visualizados por meio de efeitos virtuais de partículas adicionais, os chamados observáveis de precisão (6), que exigiriam uma grande precisão tanto dos resultados experimentais quanto das previsões teóricas. Os parâmetros de maior relevância nesse grupo são a massa do bóson W, M_W , o ângulo efetivo fraco leptônico, $\sin^2(\theta_{eff})$, o momento magnético anômalo do múon, $a_\mu = \frac{(g-2)_\mu}{2}$, a massa do bóson de Higgs mais leve, m_h .

A necessidade de alta precisão em tais previsões teóricas no Modelo Padrão e no Modelo Padrão Minimamente Supersimétrico nos exige então

o cálculo de correções radiativas de ordens mais elevadas. Como sabemos, o cálculo de tais correções é contaminado pelo aparecimento de divergências nas amplitudes de probabilidade para cada processo. Assim, o tratamento consistente de tais amplitudes exige o uso de um procedimento de regularização que dê sentido para tais expressões originalmente divergentes. A Regularização Dimensional (33) é um dos mais poderosos métodos de regularização, mas ela não deve ser usada quando estamos lidando com teorias cujo conteúdo de simetria depende da dimensão do espaço-tempo, em especial teorias com objetos violadores de paridade, tais como a matriz γ_5 ou o tensor totalmente anti-simétrico $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$. Essa situação ocorre, por exemplo, em teorias supersimétricas (que só são definidas estritamente em dimensões específicas), teorias quirais (nas quais a matriz γ_5 está presente nos operadores de projeção quiral) e teorias topológicas, como o modelo de Chern-Symons com geração topológica de massa. Em teorias supersimétricas, por exemplo, a extensão analítica de quatro para d dimensões conduz a um desajuste entre os graus de liberdade fermiônicos e bosônicos da teoria, originando uma quebra de simetria nas relações supersimétricas. Um tratamento mais pragmático para teorias supersimétricas foi desenvolvido por Siegel no final dos anos 70(1), (2), que é a Redução Dimensional (RedD) (3), (4), (5), (7), (20), (21), (22), (23), (24), (25), (26) onde a álgebra de Clifford é implementada na dimensão física da teoria, e as integrais em loops são estendidas analiticamente para d dimensões. Embora apresente certas inconsistências matemáticas e não possa ser estendida para ordens arbitrárias da expansão em loops, RedD tem sido aplicada com sucesso quando usada com o intuito de preservar as identidades de Slavnov-Taylor supersimétricas. Outra estratégia usualmente empregada é o uso das chamadas *high covariant derivatives* (10), juntamente com algum esquema de regularização, como Pauli-Villars ou mesmo Redução Dimensional. Embora qualquer procedimento de regularização possa ser utilizado, desde que alguns procedimentos sejam adotados, um esquema de regularização invariante e consistente, amigável do ponto de vista do cálculo das integrais e que seja capaz de preservar as simetrias de teorias que são bem definidas somente em dimensões específicas ainda não existe. Não há, por exemplo, um esquema que seja capaz de preservar a supersimetria e a invariância de calibre simultaneamente. Quando dizemos que *qualquer* esquema de regularização poderia ser empregado, devemos salientar que isso pode ser feito, desde que tenhamos domínio sobre os eventuais termos que quebram simetrias desejadas da teoria. Tais termos são, então, eliminados

pela adoção de contratermos restauradores de simetria, que são contratermos de natureza distinta daqueles utilizados para a remoção de divergências do cálculo perturbativo. Em teorias supersimétricas, por exemplo, a introdução de contratermos restauradores de simetria é empregada ordem a ordem na teoria de perturbação, com o objetivo de que sejam satisfeitas as identidades de Ward-Slavnov-Taylor, juntamente com o procedimento de renormalização algébrica (11), (12), (13), (14), (15). A idéia de se associar termos de superfície e variáveis de integração com a preservação das identidades de Ward-Slavnov-Taylor convencionais e supersimétricas não é nova. De fato, em um procedimento denominado *pré-regularização*(8), (9), verificou-se em alguns exemplos que uma escolha particular do shift nos momentos de integração em conjunto com a regularização dimensional poderia ser usada a fim de se preservar a invariância de gauge e a supersimetria. Em um certo sentido, a Regularização Implícita caminha em direção oposta: a eliminação dos termos de superfície, que também conduz à invariância por roteamento, é condição necessária para preservar a invariância de calibre.

Isso motiva a busca por um esquema de regularização e renormalização que, além de preservar as simetrias do modelo, seja amigável do ponto de vista de cálculo das amplitudes de probabilidade. Tal esquema de regularização deve possuir as seguintes características:

1. funcionar diretamente na dimensão física do modelo;
2. preservar todas as simetrias de maneira automática, para teorias sem conteúdo anômalo;
3. tratar as anomalias de maneira adequada;
4. ser aplicável a teorias não-massivas originalmente livres de divergências infravermelhas de maneira segura, mantendo a teoria livre de tais divergências;
5. não exigir a adoção de novas estruturas na lagrangeana da teoria;
6. não ser complicado do ponto de vista do cálculo das integrais de Feynman;

Há algum tempo, um procedimento de regularização no espaço dos momentos que compartilha algumas das características da Regularização Diferencial(47)

(que é executada com as amplitudes escritas como distribuições no espaço das configurações) foi proposto, tendo sido usado com grande sucesso em muitas teorias, procedimento este denominado *Regularização Implícita*(40). Entre vários testes para a Regularização Implícita, podemos citar diversos trabalhos com cálculos a um loop (colocar referências), o cálculo da função beta a três loops em uma teoria supersimétrica usando o calibre de Wess-Zumino (44), teorias de calibre abelianas e não-abelianas, o cálculo do momento magnético anômalo do elétron em uma lagrangeana com supergravidade (65). Foi também usada para tratar uma extensão bosonizada do modelo de Nambu-Jona Lasínio (56), (64) em que a fixação de ambiguidades resultantes do esquema de regularização foi ditada pela invocação da satisfação da simetria quiral, (66) em que obteve-se melhora significativa na precisão dos resultados fenomenológicos fornecidos pelo modelo, como o raio eletromagnético do pión. Recentemente, um trabalho que mostra a equivalência entre o procedimento de Regularização Implícita e a Regularização Diferencial *a um loop* foi publicado (42). A idéia básica do procedimento de Regularização Implícita é assumir, antes de manipular os integrandos e de uma forma implícita a presença de algum esquema ou função de regularização como parte das integrais originalmente divergentes com o objetivo de separar sua parte dependente da regularização da parte finita, que deve ser independente da regularização empregada. Tal esquema, por exemplo, pode ser um simples cut-off, como veremos mais tarde. Isso pode ser feito apenas aplicando uma simples identidade algébrica no integrando e é similar à aplicação de operadores de Taylor nos integrandos de amplitudes no formalismo de BPHZ (61), (62), (63) com a vantagem de não modificar a estrutura do integrando. As partes divergentes são escritas somente em termos do momento interno nos loops e não precisam ser avaliadas. A independência das integrais divergentes do momento externo é uma característica altamente desejável, já que somente precisaremos de contratermos *locais* na lagrangeana do modelo, a fim de se eliminar eventuais divergências que surgem no cálculo perturbativo. Além disso, essas integrais divergentes podem ser escritas como uma função de um parâmetro de massa arbitrário que toma o papel de escala na equação do grupo de renormalização.

Após separar esse conteúdo divergente, podemos adotar algum esquema de subtração, ao estilo subtração mínima, para definirmos os contratermos exigidos para eliminar quantidades divergentes e obtermos a lagrangeana

física da teoria.

Uma característica fundamental da Regularização Implícita, que surge quando separamos as integrais divergentes do restante da amplitude, é o surgimento de relações entre integrais do mesmo grau superficial de divergência, envolvendo divergências cujo integrando possui índices de Lorentz. Em geral, tais relações podem ser sempre obtidas a partir dos chamados termos de superfície, que guardam relação com a rotulação adotada nos Diagramas de Feynman. Tais relações são sempre números finitos, mas dependentes do esquema de regularização empregado. No próximo capítulo, mostramos uma prova diagramática geral para as identidades de Ward em teorias de calibre abelianas, e observaremos que uma translação (*shift*) nos momentos de integração, necessária para a satisfação de tais identidades, não é permitida em amplitudes que são pelo menos linearmente divergentes. Em tais casos, para que o *shift* possa ser realizado, é necessária a compensação pela adição de um *termo de superfície*, que, como veremos, é o responsável pela quebra da simetria de calibre. Mostra-se que (27), para integrais que são no máximo logaritmicamente divergentes, tais termos de superfície não existem, pois ao realizarmos uma translação nos momentos de integração os termos de superfície serão sempre nulos. Em integrais que são pelo menos linearmente divergentes, as ambiguidades serão expressas em função de *termos de superfície*. Em geral, ao adotarmos um roteamento arbitrário para os momentos internos no diagrama de Feynman e em seguida separarmos a parte divergente da parte finita da amplitude, ocorre o surgimento de diferenças entre integrais do mesmo grau de divergência (em princípio, já regularizadas), que são proporcionais a alguma função polinomial que é função do parâmetro α que estabelece o roteamento adotado no diagrama. Desta forma o resultado da amplitude seria dependente do rótulo adotado no diagrama respectivo. É possível mostrar que na Regularização Dimensional tais diferenças entre integrais com o mesmo grau de divergência são sempre nulas e assim, os termos de superfície também seriam nulos. Assim, *shifts* nos momentos de integração podem ser realizados livremente. Entretanto, há uma classe de teorias que são bem definidas somente na dimensão física da teoria, como teorias quirais, teorias topológicas com termo de Chern-Symons e modelos supersimétricos. Não existe esquema de regularização que, em quatro dimensões, seja capaz de fazer com que os termos de superfície sejam nulos. Essa indesejável dependência com o roteamento pode ser eliminada, quando pos-

sível, exigindo que tal diferença de integrais seja nula, ou ainda, através dos chamados contratermos *restauradores de simetria*, no caso a simetria a ser restaurada sendo a simetria por roteamento, e, por consequência, a simetria de calibre.

Convém ressaltar que a relação entre a invariância por roteamento e a invariância da representação de Fourier das funções de Green a um loop foi estudada nas referências (43), (51), onde é mostrado que tal invariância está relacionada com a liberdade na representação de Fourier adotada para as funções de Green. Tal possibilidade de se realizar um *shift* arbitrário nas integrais de Feynman pode ser interpretada como a possibilidade de se assumir um rótulo arbitrário nos momentos das linhas internas de diagramas que descrevem correções radiativas, o que é discutido nas referências (29), (32) e com detalhes no próximo capítulo. De fato, a preservação das identidades de Ward (que garantem a invariância de calibre e a renormalizabilidade da teoria) é uma consequência de tal liberdade. Desta forma, termos de superfície assumem um papel essencial na preservação de simetrias nos cálculos envolvendo diagramas de Feynman. Em modelos fenomenológicos, o papel assumido por tais termos de superfície foi estudado em (56), (64). Para uma revisão sobre a conexão entre termos de superfície e invariância de calibre, sugerimos a referência (57). Aplicações da regularização implícita em teorias com conteúdo anômalo, como anomalias quiral, gravitacional e violação da simetria CPT estão presentes em (58). Nesses trabalhos, a Regularização Implícita é apresentada como o cenário ideal para tratar de forma consistente a física de modelos que têm parâmetros finitos, mas indeterminados, como discutido por R. Jackiw (48). Os propósitos principais desse trabalho são os seguintes:

1. Mostrar que os potenciais termos violadores da simetria de calibre são os chamados termos de superfície. Criamos então um procedimento sistemático para identificação e eliminação de termos de superfície;
2. Generalizar o procedimento de Regularização Implícita para ordens além de um loop em teorias de calibre, mostrando que é possível apresentar as divergências em termos de integrais básicas características da ordem, dependentes de um momento interno, considerando também o caso de divergências overlapadas;
3. Mostrar que a Regularização Implícita é um procedimento capaz de

preservar a invariância de calibre, reforçando também o papel assumido pela invariância por roteamento;

4. Desenvolver um mecanismo sistemático de cálculo para as integrais de Feynman finitas, em ordens além de um loop.
5. Sistematizar a forma geral dos termos de superfície e relações de escala, para o caso de teorias não-massivas;

A fim de discutir esses tópicos, usamos duas teorias de gauge sem massa: a QED escalar, que é uma teoria de calibre abeliana que descreve os processos envolvendo partículas de spin zero (mésons π , por exemplo) e fótons, e a QED espinorial, em que avaliamos as correções radiativas para o tensor de polarização do vácuo a dois loops, mostrando que a transversalidade fisicamente exigida é satisfeita, desde que possamos eliminar eventuais termos de superfície. Outra identidade de Ward, que estabelece a relação entre funções de vértice e propagadores é estudada na QED espinorial a 2 loops. De posse do contratermo necessário para a renormalização do tensor de polarização do vácuo, calculamos a função β a dois loops, comparando o valor encontrado com aquele obtido em outras referências.

A divisão do trabalho é a seguinte: no capítulo 2, apresentamos a verificação da prova diagramática das identidades de Ward, constatando que para sua validade, é necessário um procedimento de regularização que admita a possibilidade de fazermos shifts nos momentos de integração, e quando isso não é possível devido ao grau de divergência da amplitude, é necessária a introdução de termos de superfície para compensar eventuais shifts. No capítulo 3, apresentamos o esquema geral de funcionamento da Regularização Implícita. Em especial, apresentamos suas regras e o esboço do cálculo de uma integral básica, dando destaque sobre como obtemos a parte divergente e os termos de superfície. Os capítulos 4 e 5 são destinados à verificação da transversalidade do tensor de polarização do vácuo na QED escalar (capítulo 4) e na QED espinorial (capítulo 5), a dois loops. Destaque é dado para a remoção dos termos de superfície e consequente preservação da simetria de calibre. Ainda no capítulo 5, trazemos a verificação da identidade de Ward que relaciona as funções de vértice e as auto-energias fermiônicas, a dois loops. No capítulo 6, trazemos a generalização do procedimento de cálculo de integrais finitas a n-loops, das divergências básicas, relações de escala

e termos de superfície a n -loops. O capítulo 7 é devotado às conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

Identidades de Ward na QED

“Conhecereis a verdade, e a verdade vos libertará.”

*João 8-32*¹

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos a tradicional prova diagramática das identidades de Ward para a QED espinorial (28), (29), (31). Em especial, veremos o papel fundamental desempenhado por "shifts" nos momentos de integração na preservação da simetria de calibre e na preservação das Identidades de Ward. Posteriormente, veremos as condições para que tais translações das variáveis de integração possam ser realizadas, sua relação com termos de superfície e a preservação da invariância de calibre.

2.2 Elementos básicos da Eletrodinâmica Quântica

A Eletrodinâmica Quântica é a teoria que rege as interações entre fótons e elétrons. Sua densidade lagrangeana (nua) é dada por

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}[i\cancel{\partial} - m - e\gamma_{\mu}A^{\mu}]\psi \quad (2.1)$$

em que m é a massa (nua) dos campos fermiônicos (ψ e $\bar{\psi}$), e é a constante de acoplamento entre o campo eletromagnético A_{μ} e os campos fermiônicos

¹extraído do Evangelho de São João, capítulo 8, versículo 32

e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Esta lagrangeana é invariante perante uma *transformação de calibre*, do tipo

$$A_\mu \Rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \quad ,$$

e do ponto de vista do campo fermiônico, temos:

$$\psi \Rightarrow e^{ia\Lambda(x)} \psi \quad .$$

No espaço dos momentos, a transformação de gauge do campo eletromagnético pode ser vista como uma transformação no vetor de polarização do fóton ϵ_μ :

$$\epsilon_\mu \Rightarrow \epsilon_\mu + \alpha k_\mu \quad ,$$

sendo, portanto, uma translação (*shift*) no vetor de polarização do fóton, em que α é uma constante (ou função de x) arbitrária. É interessante neste momento estabelecermos uma discussão a respeito do papel da simetria de calibre na QED. Tomando a parte cinética do campo eletromagnético

$$L_{EM} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

podemos obter, via princípio variacional, as equações de movimento para o campo eletromagnético, que nada mais são que as equações de Maxwell, na ausência de fontes:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0$$

ou ainda

$$(g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu = 0 \quad .$$

Em termos da ação, que é a integral no espaço tempo da densidade lagrangeana, podemos realizar uma integração por partes em tal termo, e desconsiderando eventuais integrais de quadridivergências, a lagrangeana livre do campo eletromagnético pode ser reescrita como

$$L = \frac{1}{2} A^\mu [g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu \equiv \frac{1}{2} A^\mu \Theta_{\mu\nu} A^\nu \quad . \quad (2.3)$$

O propagador do fóton será o inverso do operador na parte cinética da la-

grangeana. Assim, teremos

$$(g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta_\mu^\lambda\delta^4(x-y) \quad . \quad (2.4)$$

Se multiplicarmos a última equação por ∂_μ , verificaremos que o operador $D^{\nu\lambda}$ não tem inversa. Assim, não é possível obter, como de maneira usual, o propagador do fóton de maneira direta: é necessária a fixação de um *gauge*, a fim de obtermos tal propagador. Isso será feito a seguir com o auxílio do formalismo de integrais de caminho. Primeiramente, consideramos o funcional gerador

$$Z = \int DA_\mu e^{i\int Ldx} \quad .$$

É possível mostrar que, após uma transformação de calibre do tipo

$$A_\mu \Rightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda \quad ,$$

a lagrangeana permanece invariante. Entretanto, no funcional gerador a integração é realizada sobre *todos* os campos A_μ , incluindo aqueles que são relacionados por uma transformação de calibre. Isso dará uma contribuição infinita para Z , e portanto, para as funções de Green, uma vez que tais funções são obtidas por meio de derivadas do funcional gerador em relação às fontes dos campos. Claramente, é necessário obtermos um mecanismo que evite a integração sobre configurações de campo que são diferentes por uma transformação de calibre. Isso pode ser atingido por meio da *fixação* de um *gauge*. Podemos, por exemplo, impor uma restrição aos campos A_μ , como a condição de Lorentz, que nos diz que

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad ,$$

que nos permitirá escrever a lagrangeana livre do campo eletromagnético como

$$L = \frac{1}{2}A^\mu g_{\mu\nu}\square A^\nu \quad ,$$

com o operador $g_{\mu\nu}\square$ sendo inversível. O propagador obtido desta forma, conhecido como *propagador de Feynman*, é escrito como

$$D_F(x,y)_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\Delta_F(x,y; m=0) \quad (2.5)$$

e a lagrangeana pode ser escrita como

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.6)$$

De maneira mais geral, podemos escrever a lagrangeana como

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.7)$$

sendo a segunda parcela conhecida como "gauge fixing"(ou termo de fixação de gauge). A escolha de α corresponde à escolha de um calibre. A lagrangeana 2.7 poderá ser reescrita como

$$L = \frac{1}{2}A^\mu \left[g_{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu \quad . \quad (2.8)$$

O operador cinético, no espaço dos momentos, será dado por

$$\Theta_{\mu\nu} = -k^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) k_\mu k_\nu \quad .$$

que possui um inverso, dado por

$$D(k)_{\mu\nu} = -\frac{1}{k^2} \left[g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \quad . \quad (2.9)$$

Algumas escolhas usuais de α são:

$$\alpha = 1 \quad \text{calibre de Feynman e}$$

$$\alpha = 0 \quad \text{o calibre de Landau ,}$$

sendo que, obviamente, a Física descrita pelo modelo não deverá ser dependente do valor de α , e, portanto, deverá ser independente do valor de α , o que corresponde à simetria de calibre.

Discutido o papel do termo de fixação de gauge, o formalismo de integrais de caminho nos permite obter as Regras de Feynman para a Eletrodinâmica Quântica (54): 1) Propagador fermiônico:

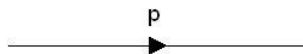


Figura 2.1: representação do propagador fermiônico

$$\frac{i}{\not{p} - m} = i \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} ;$$

2) Para cada vértice elétron-fóton, associamos um fator:

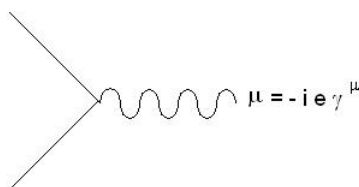


Figura 2.2: vértice elétron-fóton

3) Cada propagador fotônico é dado por

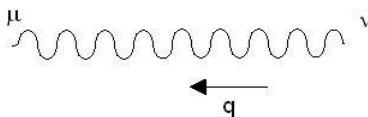


Figura 2.3: propagador do fóton

cuja expressão, no calibre de Feynman, é

$$-\frac{ig^{\mu\nu}}{q^2} .$$

4) Para cada loop de férmions, a amplitude recebe um fator -1 ;

5) Como usual, exigimos conservação do momento em cada vértice e integramos nos momentos dos loops. Na próxima seção, estudaremos a questão

da transversalidade de amplitudes de probabilidade, com destaque para a prova diagramática das identidades de Ward.

2.2.1 Identidades de Ward

Se $\mathcal{M}(k) = \epsilon_\mu M^\mu(k)$ é a amplitude para algum processo na eletrodinâmica quântica envolvendo um fóton externo com momento k , e se efetuarmos a seguinte transformação no vetor de polarização do campo de calibre

$$\epsilon_\mu \rightarrow \epsilon_\mu + \alpha k_\mu$$

então a seguinte contribuição é identicamente nula:

$$k_\mu M^\mu(k) = 0 \quad . \quad (2.10)$$

Como tal transformação é arbitrária, elementos da matriz de espalhamento não podem ser dependentes de α . Já que os momentos externos não estão necessariamente na camada de massa (*on-shell*), algumas das contribuições do lado esquerdo da última equação podem ser não-nulas, mas elas não contribuem para os elementos da matriz S. Podemos então iniciar por qualquer diagrama específico que contribua para a amplitude M. Se o fóton de momento externo k a um dado diagrama ou subdiagrama, $\gamma(k)$, é removido, nós obtemos um novo diagrama que contribui para uma amplitude mais simples M_o . Somando sobre todos os possíveis pontos de inserção em M_o , obteremos novamente a última expressão.

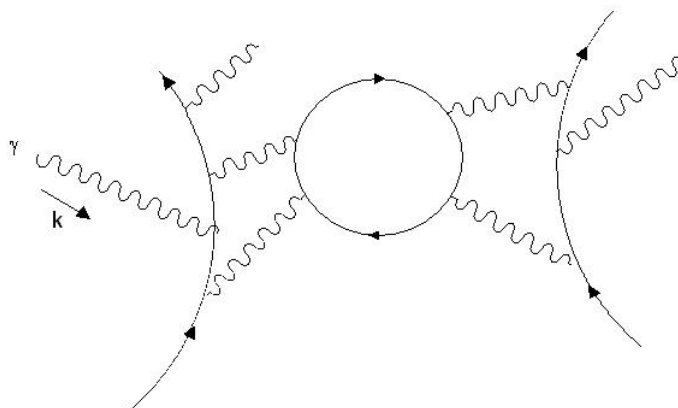


Figura 2.4: diagrama de Feynman para a interação típica entre férmions e fótons

2.2.2 Primeiro caso

Consideremos, primeiramente, que o fóton externo está conectado a uma linha de férmions aberta. Antes de fazermos a reinserção de nosso fóton $\gamma(k)$, a linha tem o seguinte aspecto

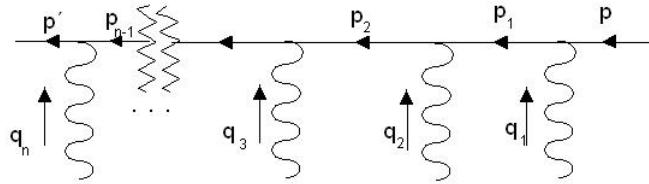


Figura 2.5: linha fermiônica típica com inserções de fótons

Da figura, verificamos que os propagadores do elétron terão momentos dados por

$$p_1 = p + q_1 \quad , p_2 = p_1 + q_2 \quad , p_3 = p_2 + q_3 \quad \dots p' = p_{n-1} + q_n \quad .$$

Se então existem n vértices, podemos inserir o fóton em $n + 1$ diferentes posições. Suponhamos então que o fóton é inserido após o i -ésimo vértice:

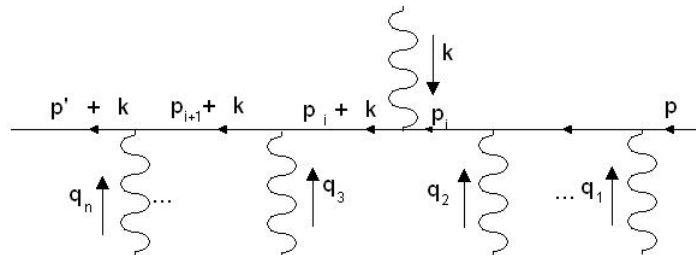


Figura 2.6: inserção de fóton genérica em linha fermiônica

Os propagadores do elétron à esquerda do novo fóton têm então seus momentos aumentados ("shiftados") por k , devido à conservação do momento. A contração de k_μ com o novo vértice (visto que no ponto de inserção passamos a ter uma interação do tipo elétron-fóton) é *convenientemente* escrita

como

$$-ie k_\mu \gamma^\mu = -ie [(\not{p}_i + \not{k} - m) - (\not{p}_i - m)] \quad , \quad (2.11)$$

sendo, por definição:

$$\not{k} = k_\mu \gamma^\mu \quad .$$

² Multipliquemos esse fator de vértice pelos propagadores adjacentes a tal vértice:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} (-ie \not{k}) \frac{i}{\not{p}_i - m} &= \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} [-ie [(\not{p}_i + \not{k} - m) - (\not{p}_i - m)]] \frac{i}{\not{p}_i - m} \\ &= e \left[\frac{i}{\not{p}_i - m} - \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

O diagrama com o fóton inserido na posição i tem portanto a seguinte estrutura

$$\cdots \left(\frac{i}{\not{p}_{i+1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{i}{\not{p}_i - m} - \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right) \gamma^i \left(\frac{i}{\not{p}_{i-1} - m} \right) \gamma^{i-1} \cdots \quad (2.13)$$

Similarmente, o diagrama com o fóton inserido na posição $i - 1$ tem a estrutura

$$\cdots \left(\frac{i}{\not{p}_{i+1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i+1}} \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \gamma^i \left(\frac{i}{\not{p}_{i-1} - m} - \frac{i}{\not{p}_{i-1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i-1}} \cdots \quad (2.14)$$

Podemos notar que o primeiro termo dessa última expressão cancela exatamente o segundo termo da equação anterior. Um cancelamento similar ocorre entre qualquer outro par de diagramas com inserções adjacentes. Quando somamos sobre *todos os possíveis pontos de inserção* ao longo da linha, todos os objetos se cancelam com exceção dos termos desemparelhados das extremidades. No fim, ficamos com a diferença entre dois termos que diferem por uma translação (*shift*) no momento dos propagadores:

²Esta identidade também é aplicada na prova das Identidades de Ward-Slavnov-Taylor na Cromodinâmica Quântica. Entretanto, identidades adicionais para a inserção do quadrimomento k_μ nos vértices de 3 e 4 glúons são necessárias. Para estender a identidade que estamos usando para a QCD também precisamos das relações da Álgebra de Lie entre os acoplamentos entre quark-glúon e glúon-glúon, que são os fatores de grupo $(T_i)_b^a$ e $-iC_{ijk}$. Os métodos diagramáticos para este caso foram desenvolvidos em (30).

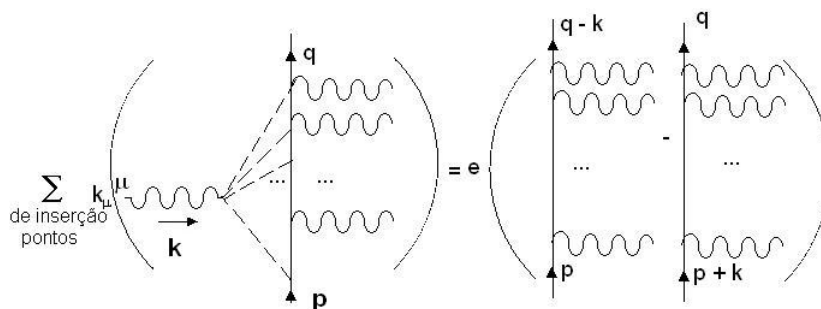


Figura 2.7: expressão diagramática para uma identidade de Ward

2.2.3 Segundo caso

Para completar a prova da Identidade de Ward-Takahashi, precisamos considerar o caso em que o fóton é inserido ao longo de um loop fermiônico interno. Antes da inserção de tal fóton, um loop de férmions típico tem o aspecto representado na próxima figura:

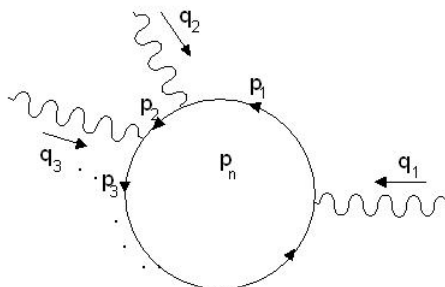


Figura 2.8: um típico loop fermiônico para amplitudes da QED

Os propagadores do elétron dentro do loop têm momentos dados por

$$p_1, \quad p_1 + q_2 = p_2, \quad p_2 + q_3 = p_3 \dots$$

e assim por diante, até o último momento, dado por p_n . Suponha que desejamos inserir um fóton com momento k , $\gamma(k)$, entre os vértices i e $i + 1$:

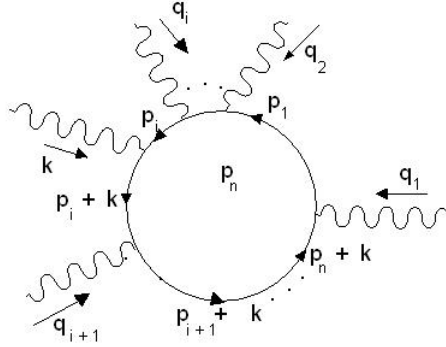


Figura 2.9: inserção de fóton em um loop fermiônico

Isso nos dá um momento adicional k que percorre todo o loop a partir do vértice de inserção. Para calcularmos a soma sobre todas as possíveis inserções, aplicamos novamente a identidade

$$-ie k_\mu \gamma^\mu = -ie[(\not{p} + \not{k} - m) - (\not{p} - m)]$$

para cada ponto de inserção. Para o diagrama em que o fóton é inserido entre os vértices 1 e 2, designamos a amplitude de probabilidade para o processo por (I) . Temos então como resultado:

$$\begin{aligned} (I) &= -e^{n+1} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\left(\frac{i}{\not{p}_n + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \dots \left(\frac{i}{\not{p}_2 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_2} \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k} - m} \right. \\ &\quad \left. (-i\not{k}) \frac{i}{\not{p}_1 - m} \gamma^{\lambda_1} \right] \\ &= -e \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\left(\frac{i}{\not{p}_n + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \dots \left(\frac{i}{\not{p}_2 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_2} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{i}{\not{p}_1 - m} - \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_1} \right] . \end{aligned} \quad (2.15)$$

O primeiro termo será cancelado por um dos termos do diagrama com o fóton inserido entre os vértices 2 e 3. Para essa inserção, teremos:

$$\begin{aligned} (II) &= -e^{n+1} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\left(\frac{i}{\not{p}_n + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \dots \left(\frac{i}{\not{p}_3 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_3} (-i\not{k}) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{i}{\not{p}_2 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_2} \frac{i}{\not{p}_2 - m} \frac{i}{\not{p}_1 - m} \gamma^{\lambda_1} \right] . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Novamente podemos escrever

$$-ie\cancel{k} = -ie[(\cancel{p}_2 + \cancel{k} - m) - (\cancel{p}_2 - m)]$$

e se efetuarmos a substituição de tal termo na equação (2.16), teremos

$$(II) = -ie^{n+1} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\frac{i}{\cancel{p}_n + \cancel{k} - m} \gamma^{\lambda_n} \dots \left(\frac{i}{\cancel{p}_3 + \cancel{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_3} \right. \\ \left. \left(\frac{i}{\cancel{p}_2 - m} - \frac{i}{\cancel{p}_2 + \cancel{k} - m} \right) \left(\frac{i}{\cancel{p}_1 - m} \right) \gamma^{\lambda_1} \right] . \quad (2.17)$$

O primeiro termo da equação (2.15) será cancelado pelo segundo termo da equação (2.16), proporcional a

$$\frac{i}{\cancel{p}_2 + \cancel{k} - m} .$$

De uma forma geral, cancelamentos similares acontecem entre termos originados de outros pares de inserções adjacentes, por exemplo, nas posições n e $n+1$. Quando somarmos sobre *todos* os n pontos de inserção, teremos como resultado

$$\Sigma = -e^{n+1} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\left(\frac{i}{\cancel{p}_n - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \left(\frac{i}{\cancel{p}_{n-1} - m} \right) \gamma^{\lambda_{n-1}} \dots \left(\frac{i}{\cancel{p}_1 - m} \right) \gamma^{\lambda_1} \right. \\ \left. + e^{n+1} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\left(\frac{i}{\cancel{p}_n + \cancel{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \left(\frac{i}{\cancel{p}_{n-1} + \cancel{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{n-1}} \dots \left(\frac{i}{\cancel{p}_1 + \cancel{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_1} \right] \right] \quad (2.18)$$

Desta forma, o que podemos perceber é que um *shift* na variável de integração de p_1 para $p_1 + k$ no segundo termo faz com que a soma dos dois termos restantes da soma sobre todas as inserções se anule. Assim, a amplitude em que um fóton é inserido ao longo de um loop fechado é nula, quando somamos sobre todas as possíveis contribuições para tal processo (soma sobre todos os possíveis pontos de inserção).

Neste ponto, um comentário sobre a translação no momento de integração é importante. Normalmente, as integrais em loops em teorias quânticas de campo são divergentes. Se o grau superficial de divergência é ao menos linear, tal translação (*shift*) só pode ser realizado se um *termo de superfície* é adicionado como compensação da translação (veja por exemplo (27)). As-

sim, é condição necessária, para o método de cálculo adotado, eliminar estes termos de simetria, que, como veremos, são violadores da simetria de gauge.

De fato, no contexto da regularização implícita sabemos que a invariância por roteamento nas amplitudes de Feynman conduz a um conjunto de relações conhecidas como *condições de consistência*, que são relações necessárias para que uma amplitude de probabilidade tenha seu valor independente do rótulo adotado para os momentos nas linhas internas do diagrama. Tais relações sempre podem ser escritas em função de termos de superfície, como veremos. Qualquer seja o esquema de regularização adotado, podemos remover termos violadores de simetrias por meio de *contratermos restauradores de simetria*. Isso, na prática, é automaticamente implementado se ajustamos *todos* os termos de superfície para zero logo no início do cálculo perturbativo. É necessário ter cuidado em situações onde quebras de simetria quânticas ocorrem. Nesse caso, os termos de superfície devem ser considerados como parâmetros finitos arbitrários, que serão fixados com base em critérios físicos. Isso ocorre porque anomalias são normalmente relacionadas à dependência com a rotulação dos momentos em gráficos de Feynman (59).

A remoção dos termos de superfície pode ser feita através da introdução de *contratermos restauradores de simetria*, introduzidos na lagrangeana para restaurar alguma simetria quebrada pelo esquema de regularização empregado. Verificaremos, a partir de então, que a eliminação dos termos de superfície conduzirá à preservação da simetria de gauge e preservação das identidades de Ward. O procedimento adotado para o cálculo a dois loops pode então ser estendido para ordens superiores. Apresentaremos aplicações desses resultados e da técnica para solução de integrais de Feynman para dois loops em duas teorias de calibre abelianas, não massivas: a Eletrodinâmica Quântica Escalar (QED escalar) e a eletrodinâmica quântica espinorial (QED convencional). Tais resultados também podem ser aplicados em teorias de calibre não-abelianas. É possível mostrar ainda que, para todas as ordens da teoria de perturbação, na QED, a invariância de calibre conduz à preservação da unitariedade, outro requisito de uma teoria para processos fundamentais (54).

2.3 Contratermos restauradores de simetria

Vimos que quando a inserção de linhas externas de fóton é realizada em todos os pontos ao longo de um loop e as contribuições destes novos diagramas são somadas, ocorrem inúmeros cancelamentos de termos e, no final, somente dois termos sobrevivem:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_n} = -i \int_{p_1}^{\Lambda} \text{tr} \left[\frac{i}{\not{p}_n - m} \gamma^{\mu_n} \dots \frac{i}{\not{p}_1 - m} \gamma^{\mu_1} - \frac{i}{\not{p}_n + \not{k} - m} \gamma^{\mu_n} \dots \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k} - m} \gamma^{\mu_1} \right]. \quad (2.19)$$

Como já discutido na seção anterior, estes dois termos diferem por um deslocamento na variável de integração de p_1 para $p_1 + k$. Se a integral é pelo menos linearmente divergente, uma regularização tipo cut-off não pode ser implementada sem a compensação por um termo de superfície. Após a realização da translação, ficamos com

$$T^{\mu_1 \dots \mu_n} = -i S^{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad (2.20)$$

sendo $S^{\mu_1 \dots \mu_n}$ o termo de superfície que provoca a violação da Identidade de Ward-Takahashi. Uma prescrição adequada seria a restauração da simetria de calibre por meio da adição de contratermos restauradores de simetria. Um procedimento que permita a identificação dos termos de superfície, possíveis violadores de simetria, é então desejável.

Tendo sido usado um procedimento que restaura a simetria de calibre, voltamos nossa atenção para a unitariedade. Convém ressaltar que, uma vez que as identidades de Ward-Takahashi são satisfeitas, as amplitudes podem ser escritas, após a eliminação dos termos de superfície, como

$$\mathcal{A}_{\mu_1 \dots \mu_2} = L_{\mu_1 \dots \mu_2} (\mathcal{A}^{\Lambda} + \bar{\mathcal{A}}). \quad (2.21)$$

Nesta equação, o tensor $L_{\mu_1 \dots \mu_2}$ tem a estrutura necessária para preservar a invariância de calibre, \mathcal{A}^{Λ} é a parte divergente (dependente de um cut-off), que deve exigir contratermos locais, e $\bar{\mathcal{A}}$ é a parte finita. De (2.21) é claro que os contratermos também têm a estrutura tensorial apropriada para que a invariância de calibre seja satisfeita. Satisfeitas estas duas condições, a

unitariedade é preservada.

É interessante um comentário sobre como são eliminados os termos violadores de simetria. Por exemplo, o tensor de polarização do vácuo deve possuir a seguinte estrutura tensorial a fim de manter a invariância de calibre:

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi(p^2)(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) \quad , \quad (2.22)$$

mas a existência de potenciais termos violadores de simetria, como os termos de superfície, faz com que ele seja expresso como

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi(p^2)(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) + c p_\mu p_\nu \quad , \quad (2.23)$$

sendo c uma constante arbitrária, que dependente do procedimento de regularização empregado no cálculo de $\Pi_{\mu\nu}$. Como o tensor de polarização é uma correção para o propagador do fóton, no espaço de configurações devemos escrevê-lo como

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = A^\mu \Pi(\square)(\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \square) A^\nu + c A^\mu \partial_\mu \partial_\nu A^\nu \quad , \quad (2.24)$$

sendo \square o operador d'alambertiano e a última parcela desempenha o papel do contratermo necessário a fim de eliminar o termo violador de simetria.

A lagrangeana da teoria, já levando-se em conta os contratermos para renormalização dos campos, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i Z_2 \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (m + A) \bar{\psi} \psi - \\ &- Z_1 e A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi - \frac{Z_3}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

em que Z_1 , Z_2 , Z_3 e A são contratermos que absorvem as divergências dos parâmetros da lagrangeana, como funções de onda (campos), massas e constantes de acoplamento. Obviamente, a forma de cada contratermo dependerá do esquema de regularização adotado, e deixaremos para os próximos capítulos a obtenção explícita de tais expressões, no contexto da Regularização Implícita.

Como o tensor de polarização do vácuo é uma correção para o propagador do fóton, sua contribuição na lagrangeana atua como uma correção para a

parte cinética do campo eletromagnético, e assim, teremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= iZ_2\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (m + A)\bar{\psi}\psi - \\
&- Z_1eA^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \frac{Z_3}{4}A^\mu(g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu \\
&+ A^\mu\Pi(\square)(\partial_\mu\partial_\nu - g_{\mu\nu}\square)A^\nu + cA^\mu\partial_\mu\partial_\nu A^\nu + [-cA^\mu\partial_\mu\partial_\nu A^\nu] \quad (2.26)
\end{aligned}$$

3

³Em teorias com conteúdo anômalo, tal tratamento não pode ser empregado. No caso da anomalia de Adler-Bell-Jackiw, por exemplo, o contratermo introduzido para restaurar a simetria axial viola a simetria vetorial.

O procedimento de Regularização Implícita

*“ No meio do caminho tinha uma pedra
tinha uma pedra no meio do caminho
tinha uma pedra
no meio do caminho tinha uma pedra.
Nunca me esquecerei desse acontecimento
na vida de minhas retinas tão fatigadas.
Nunca me esquecerei que no meio do caminho
tinha uma pedra
tinha uma pedra no meio do caminho
no meio do caminho tinha uma pedra.”*

*Carlos Drummond de Andrade*¹

No capítulo anterior, quando discutimos a simetria de calibre da QED, identificamos propriedades básicas que um procedimento de regularização deve incorporar. Entre as propriedades desejáveis, está a de separar os termos de superfície da amplitude física, os potenciais violadores da simetria de calibre e da unitariedade. Neste capítulo, apresentamos uma discussão geral sobre o procedimento de Regularização Implícita e as suas regras, construindo um algoritmo simples para identificar tais termos, ilustrando como é feita a separação da parte divergente e dos chamados termos de superfície, potenciais violadores da simetria de calibre.

¹No meio do caminho, extraído de *Alguma Poesia*, de Carlos Drummond de Andrade

3.1 O procedimento de regularização implícita

A Regularização Implícita (40), (41), (42), (43), (44), (56), (57), (58), (64), (65) é um procedimento implementado no espaço dos momentos, criado com o objetivo de separar a parte divergente das integrais de Feynman, sem a necessidade de se calcular explicitamente tais divergências, bem como calcular a parte finita das integrais de Feynman. As divergências características de cada ordem são escritas em termos de *divergências básicas*, que poderão ser absorvidas na renormalização dos campos, massas e acoplamentos da teoria. As principais propriedades da Regularização Implícita são apresentadas a seguir:

1. Funciona diretamente no espaço dos momentos, sem a necessidade de se fazer uma continuação analítica na dimensão espaço-temporal. Pode portanto ser aplicada em teorias supersimétricas, que só são definidas na própria dimensão do espaço-tempo;
2. A forma explícita de um regulador não é necessária para justificar os passos intermediários quando manipulamos os integrandos das integrais divergentes;
3. Tal regulador não deve modificar a estrutura dos integrandos. Um procedimento sistemático para o cálculo de integrais divergentes é estabelecido, sendo amigável do ponto de vista operacional. Dessa forma, uma regularização adequada (no fim dos cálculos) pode até mesmo ser um *cut-off*, visto que o procedimento de regularização implícita nos permite ter o controle de termos que podem quebrar alguma simetria da teoria.

2

²Há uma proposta sugerida por R. Jackiw (48), em que possíveis ambiguidades oriundas da separação da parte finita da parte divergente da amplitude são mantidas intocáveis até o final dos cálculos. Assim, lança-se mão de algum critério físico ou da obediência a alguma simetria para se fixar o valor dessas ambiguidades. Tais quantidades, portanto, não são influenciadas pela técnica de manipulação e cálculo das integrais divergentes. A Física é que dita qual deve ser o valor para tais ambiguidades; a Regularização Implícita torna-se então uma "arena" ideal para o tratamento de teorias cujo cálculo perturbativo pode trazer quantidades arbitrárias, uma vez que a regularização não é explícita e as ambiguidades são mantidas intactas, sem que a elas seja estabelecido algum valor, até o final do cálculo,

A seguir, discutimos os passos básicos para a implementação do procedimento de regularização implícita a n-loops. O objetivo é identificar as divergências características da n-ésima ordem e a parte finita de uma amplitude, uma vez que a renormalização já tenha sido efetuada até a ordem (n - 1):

1. Com o objetivo de fornecer sentido matemático a qualquer manipulação algébrica realizada no integrando de amplitudes divergentes, nós assumimos, implicitamente, que alguma regularização tenha sido aplicada na amplitude. Tal regularização pode ser mantida implícita ao longo dos cálculos, sendo que a única exigência que fazemos é a manutenção da dimensão espaço-temporal da integral e da estrutura do integrando. Dentro destes requisitos, uma boa escolha seria um esquema do tipo cut-off. Como veremos, as possíveis quebras de simetria serão restauradas por construção. Após realizar as operações dos grupos de simetria (álgebras das matrizes de Dirac, Gell-Mann por exemplo), apresentamos a amplitude como uma combinação de objetos que são as *integrais básicas*;
2. Uma vez que as integrais básicas são obtidas, a parte divergente de cada parcela é separada em *divergências básicas*, que são obtidas com o uso recursivo da identidade algébrica

$$\frac{1}{(p-k)^2 - m^2} = \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{p^2 - 2k \cdot p}{[(k-p)^2 - m^2](k^2 - m^2)} \quad (3.1)$$

no integrando, em todos os propagadores que dependam do momento externo, até que a parte divergente seja livre da dependência com momentos externos no denominador. Isso nos assegura que todas as divergências serão removidas com o uso de contratermos locais;

3. Integrais divergentes em que os momentos internos carreguem índices de Lorentz são expressas em função de *divergências básicas* sem índices de Lorentz e *termos de superfície* (integrais no volume n-dimensional de uma divergência total). Tais termos de superfície são dependentes do

quando então lançamos mão de algum critério físico que possa fixá-las. É uma proposta adotada com frequência no estudo de modelos fenomenológicos, como o modelo de Nambu-Jona Lasinio. Detalhes nas referências (56), (64).

esquema de regularização (por exemplo, eles se anulam em regularização dimensional) e são relacionados com a invariância por roteamento nos gráficos de Feynman. São então identificados a partir das divergências básicas com índices de Lorentz.

Os termos que caracterizam a dependência com a rotulação dos momentos na avaliação das amplitudes de Feynman são sempre multiplicados por *termos de superfície*, que podem quebrar a simetria de calibre.

4. As integrais básicas divergentes sem índices de Lorentz, que serão dependentes do esquema de regularização empregado, não precisam ser avaliadas. Após serem identificadas, elas poderão ser absorvidas nos contratermos de renormalização de campos e parâmetros da lagrangeana. Adotaremos a seguinte notação para integrais básicas divergente na n -ésima ordem:

$$I_{log}^{(n)}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} Z_0^{(n-1)}(k^2, m^2, \lambda^2) \quad ,$$

$$I_{quad}^{(n)}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} Z_0^{(n-1)}(k^2, m^2, \lambda^2) \quad \text{em que}$$

para integrais logaritmicamente e quadraticamente divergentes. O subscrito Λ indica a presença de algum regulador na amplitude e as funções $Z_0^{(n-1)}$ são termos finitos típicos da ordem $n - 1$. Para a primeira ordem em loops em teorias não massivas, é dada por

$$Z_0 = -b \left\{ \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - 2 \right\}$$

λ é um parâmetro não nulo, com dimensão de massa, que surge quando nós adotamos um esquema independente da massa física das partículas por meio das relações de escala;

5. A subtração das subdivergências é efetuada usando-se o método de contratermos, onde somos guiados pela Fórmula das Florestas para a identificação de cada subgráfico divergente. Os operadores de subtração (operadores de Taylor) usuais do esquema BPHZ são assim mapeados em contratermos, que, substituem os subgráficos. As divergências básicas são subtraídas na definição das constantes de renormalização dos campos. Um esquema independente de massas é definido, substituindo

m^2 por um parâmetro de massa arbitrário, λ^2 , usando um tipo de relação de escala que é independente do esquema de regularização. A obtenção das relações de escala a n -loops é apresentada no capítulo 6.

Para uma integral logicamente divergente, da primeira ordem em loops, tal relação de escala é:

$$I_{log}(m^2) = I_{log}(\lambda^2) + b \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \quad \text{em que}$$

$$b = \frac{\nu}{(4\pi)^2} \quad \text{e}$$

O objeto a ser subtraído na definição dos contratermos de renormalização é $I_{log}(\lambda^2)$, em que λ desempenha o papel de escala no grupo de renormalização. Para modelos sem massa livres de divergências infra-vermelhas, um cancelamento sistemático de termos do tipo $\ln(m^2)$ vindos da relação de escala e das partes finitas ultravioleta tornará a amplitude finita e bem definida no limite de $m^2 \rightarrow 0$.

6. As integrais finitas restantes podem ser avaliadas da maneira usual, via parametrização de Feynman ou por outros métodos no espaço dos momentos (60). Nesse trabalho, desenvolvemos um mecanismo sistemático para solução de integrais de Feynman com integrandos não-polinomiais na n -ésima ordem da teoria de perturbação, estendendo a parametrização de Feynman usual para tais casos.

3.1.1 Exemplo de aplicação

Consideremos uma integral de Feynman divergente típica de dois loops para uma teoria não-massiva, com integrando dependente de índices de Lorentz, e que portanto poderá ser escrita em função de termos de superfície:

$$I_{\mu}^{(2)} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}}{k^2(k-p)^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \quad , \quad (3.2)$$

que é linearmente divergente. Supondo a presença de algum regulador nesta integral (por exemplo, um cut-off), vamos aplicar a identidade 3.1 no integrando de 3.2. Embora a integral original seja livre de divergências infravermelhas o procedimento de expansão pelo uso da equação 3.2 divide a integral em duas partes com divergências infravermelhas. Para evitar esse problema,

utilizamos uma massa fictícia, m , que nos protege contra tais divergências infravermelhas. No final dos cálculos tal massa desaparecerá ao tomarmos o limite $m \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
I_\mu^{(2)} &= \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2 - m^2} \left\{ \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{2k \cdot p - p^2}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} \right\} \ln \left\{ -\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right\} \\
&= \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \ln \left\{ -\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right\} + \\
&+ \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu(2k \cdot p - p^2)}{(k^2 - m^2)^2[(k - p)^2 - m^2]} \ln \left\{ -\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Convém fazermos uma observação. A massa fictícia é também inserida nos termos logarítmicos de cada integrando para que sejamos capazes de calcular a integral finita usando a Parametrização de Feynman usual, podendo escrever o termo logarítmico como uma potência de $k^2 - m^2$, usando a seguinte identidade.

$$\ln(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{a^{\epsilon-1}}{\epsilon} \quad . \tag{3.4}$$

Os detalhes do cálculo das partes finitas a dois loops são deixados para o apêndice 2. Um exemplo de cálculo de integrais finitas a n-loops é apresentado no capítulo 6.

A primeira parcela é igual a zero, por se tratar de um integrando de paridade ímpar integrado num intervalo de integração simétrico. A segunda parcela é ainda logaritmicamente divergente, e portanto, aplicamos mais uma vez a identidade 3.1:

$$\begin{aligned}
I_\mu^{(2)} &= \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu(2k \cdot p - p^2)}{(k^2 - m^2)^2} \left\{ \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{2k \cdot p - p^2}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} \right\} \\
&\quad \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \\
&= 2p^\alpha \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) - \\
&\quad - p^2 \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) + \\
&\quad + \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu(2k \cdot p - p^2)^2}{(k^2 - m^2)^3[(k - p)^2 - m^2]} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

O segundo termo é zero, novamente pela paridade do integrando. A última integral é finita e sua solução não é relevante por enquanto. Já a primeira integral é logaritmicamente divergente, com integrando dependente de índices de Lorentz. Pelo exposto anteriormente na descrição do procedimento da RI, tais integrais poderão ser escritas em função de integrais básicas divergentes e *termos de superfície*.

Podemos escrever essa integral a partir da seguinte relação:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left\{ \frac{k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \right\} = \\
& g_{\mu\alpha} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) - 4 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) + \\
& + 2g_{\mu\alpha} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} = \\
& g_{\mu\alpha} I_{\log}^{(2)}(m^2) + \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} - 4 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \quad (3.6)
\end{aligned}$$

que nos permite reescrever a divergência com índices de Lorentz

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{4} g_{\mu\alpha} I_{\log}^{(2)}(m^2) + \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} - \\
& - \frac{1}{4} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left\{ \frac{k_\alpha}{(k^2 - m^2)^2} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \right\} \quad (3.7)
\end{aligned}$$

A última parcela é uma integral divergente típica da primeira ordem em loops. Como seu integrando possui índices de Lorentz, vamos usar o mesmo artifício anterior. De fato, temos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k^\alpha} \left(\frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \right) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\alpha}}{(k^2 - m^2)^2} - \\
& - 4 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} = \frac{1}{4} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\alpha}}{(k^2 - m^2)^2} - \\
& - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k^\alpha} \left(\frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \right) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Como os termos de superfície podem ser eliminados através de contratermos restauradores de simetria (ou ajustados a zero desde o início dos cálculos), teremos

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\alpha}}{(k^2 - m^2)^3} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{4} g_{\mu\alpha} \left\{ I_{log}^{(2)}(m^2) + \frac{1}{2} I_{log}(m^2) \right\} \quad (3.10)$$

em que adotamos a seguinte notação para divergências básicas logarítmicas

$$I_{log}^{(n)}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \ln^{n-1} \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \quad (3.11)$$

A integral $I_{\mu}^{(2)}$ é escrita, no final, como

$$\begin{aligned} I_{\mu}^{(2)}(m^2) &= \frac{1}{4} g_{\mu\alpha} 2p^{\alpha} \left\{ I_{log}^{(2)}(m^2) + \frac{1}{2} I_{log}(m^2) \right\} + \\ &+ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}(2k \cdot p - p^2)^2}{(k^2 - m^2)^3 [(k - p)^2 - m^2]} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Em teorias sem conteúdo anômalo, os termos de superfície sempre poderão ser tomados como zero já no princípio da separação da parte divergente das integrais de Feynman.

O cálculo das partes finitas a dois loops é reservado para o apêndice 2 deste trabalho. Após a solução da parte finita, devemos usar as *relações de escala* a dois loops, que são necessárias a fim de se evitar o surgimento de divergências infra-vermelhas. As relações de escala tornarão a expressão final independente da massa das partículas (no caso de uma teoria massiva) ou da massa fictícia, usada para proteger a parte finita e a parte ultra-violeta divergente de divergências infra-vermelhas. A dois loops, a relação de escala para integrais logaritmicamente divergentes é dada por

$$I_{log}^{(2)}(m^2) = I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - b \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right\} \quad (3.13)$$

O uso dessa relação juntamente com a solução da parte finita nos permitirá

escrever

$$I_{\mu}^{(2)} = \frac{p_{\mu}}{2} \left\{ \left\{ I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{log}(\lambda^2) \right\} - \right. \\ \left. - \frac{b}{2} \left[\ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 3 \right] \right\} . \quad (3.14)$$

As relações de escala podem ser introduzidas também em teorias massivas, se não quisermos usar a massa física das partículas como ponto de subtração, com λ tomando o papel de parâmetro arbitrário para a escala do grupo de renormalização. Em teorias não-massivas, entretanto, elas são fundamentais, uma vez que $m^2 \rightarrow 0$. No apêndice 3, além da solução das partes finitas, apresentamos a separação de divergências básicas e termos de superfície para outras integrais a dois loops típicas do procedimento de Regularização Implícita.

Transversalidade do tensor de polarização do vácuo na QED escalar

“I’m gonna live till I die! I’m gonna laugh ’stead of cry...”

*Frank Sinatra*¹

Neste capítulo, usamos a Regularização Implícita para calcular o tensor de polarização do vácuo da Eletrodinâmica Quântica Escalar a dois loops e mostramos que a transversalidade é obtida através da remoção dos termos de superfície. Mostramos como os resultados das correções radiativas a um loop são utilizadas no cálculo de diagramas com dois loops, técnica que pode ser estendida para ordens superiores. O método de contratermos (ou, analogamente, a fórmula das florestas) é empregado para a remoção de subdivergências, o que é necessário para a eliminação de divergências não-locais.

4.1 A eletrodinâmica quântica escalar não massiva

A eletrodinâmica quântica escalar não massiva (QED escalar sem massa) é uma teoria que descreve as interações entre partículas de spin zero eletricamente carregadas, como mésons (não massivos) e os fótons do campo

¹I’m gonna live till I die - Frank Sinatra

eletromagnético. A sua densidade lagrangeana é dada por

$$L = L_o + L_1 \quad (4.1)$$

em que temos

$$\begin{aligned} L_o &= -\partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ L_1 &= ie[\phi^\dagger \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^\dagger) \phi] A_\mu - e^2 \phi^\dagger \phi A^\mu A_\mu - \frac{1}{4} \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 + L_{ct} \quad , \quad (4.2) \end{aligned}$$

em que e é a carga da partícula escalar. L_{ct} representa a lagrangeana de contratermos utilizados para se eliminar as divergências que surgem no cálculo de correções radiativas. No espaço de Minkowsky, as regras de Feynman para a QED escalar podem ser escritas como

1) Interação quártica entre dois fótons e duas partículas escalares: Em um diagrama, para cada vértice dessa espécie devemos associar o fator

$$V_1 = 2ie^2 g_{\mu\nu} \quad (4.3)$$

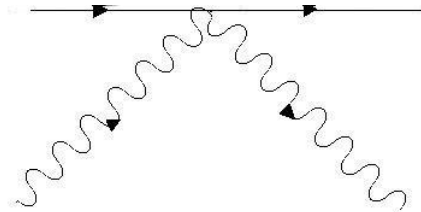


Figura 4.1: diagrama de Feynman para interações quárticas entre dois escalares e dois fótons

2) Interação de um escalar com um fóton

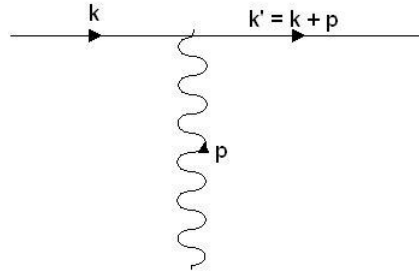


Figura 4.2: diagrama de Feynman para a interação entre um escalar e um fóton
 diagrama de Feynman para a interação entre um escalar e um fóton

Um vértice dessa espécie contribui, numa amplitude Feynman, com o seguinte fator:

$$V_2 = ie(k + k')_\mu \quad . \quad (4.4)$$

As regras para a implementação da regularização implícita além da ordem de um loop são enunciadas em consonância com as prescrições da fórmula das florestas (uma relação de recursão utilizada para a remoção de subdivergências em gráficos de ordem além de um loop divergentes)(38), (39), que é análoga ao método convencional da subtração de divergências por meio de contratermos. Contratermos locais que eliminam subdivergências podem ser mapeados nos chamados *operadores de subtração* do método BPHZ.

4.2 Tensor de polarização do vácuo na QED escalar a dois loops

O tensor de polarização do vácuo é uma correção para o propagador do campo de calibre, como é o caso do fóton na QED escalar e a QED espinorial ou o glúon na Cromodinâmica Quântica. A invariância de calibre exige que tal grandeza tenha a seguinte estrutura tensorial

$$\Pi_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu)\Pi(p^2), \quad (4.5)$$

em que $\Pi(p^2)$ é uma função quadrática dos momentos. De posse de cada contribuição diagramática, obtemos a expressão completa para $\Pi_{\mu\nu}$, verifi-

cando se sua estrutura é tal que preserva a invariância de calibre em teorias de calibre abelianas, como a QED escalar. No cálculo de todos os diagramas para um dado processo numa certa ordem da expansão perturbativa, devemos avaliar também qual o fator de simetria adequado para cada diagrama. Isso foi feito de acordo com os resultados da referência (46).

4.2.1 Contribuições nulas para $\Pi_{\mu\nu}$ na QED escalar

Há um grande número de diagramas na QED escalar que poderiam contribuir para o tensor de polarização do vácuo da teoria, mas que de fato, não dão nenhuma contribuição no caso de uma teoria massiva e no contexto da Regularização Implícita. Tais diagramas são construídos a partir do diagrama *tadpole*:

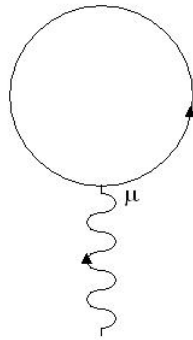


Figura 4.3: correção diagramática do tipo tadpole

A contagem superficial de potências nos indica que tal diagrama é quadraticamente divergente. A divergência típica desse diagrama seria dada pela integral divergente $I_{quad}(m^2)$, dada por

$$I_{quad}(m^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \quad . \quad (4.6)$$

Numa teoria sem massa sempre é possível escolher uma parametrização na qual podemos eliminar a dependência com divergências quadráticas (58). Uma análise dimensional na integral 4.6 seguida de uma simples mudança de variáveis nos mostra que a integral será proporcional a m^2 , a massa fictícia

dos campos de calibre. Como tais massas são tomadas como zero no final dos cálculos, teremos:

$$I_{quad}(m^2) = 0 \quad .$$

De fato, supondo a presença de algum regulador, podemos usar a seguinte mudança de variáveis

$$\bar{k} = \frac{k}{m}$$

e manipular o integrando da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I_{quad}(m^2) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m^4}{\bar{k}^2 m^2 - m^2} \\ &= m^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4 \bar{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\bar{k}^2 - 1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

que nos permite escrever

$$I_{quad}(m^2) = \alpha m^2 \quad , \quad (4.8)$$

e assim, todos os diagramas que tiverem o diagrama *tadpole* como subgráfico serão assumidos como identicamente nulos. Assim, diagramas do tipo

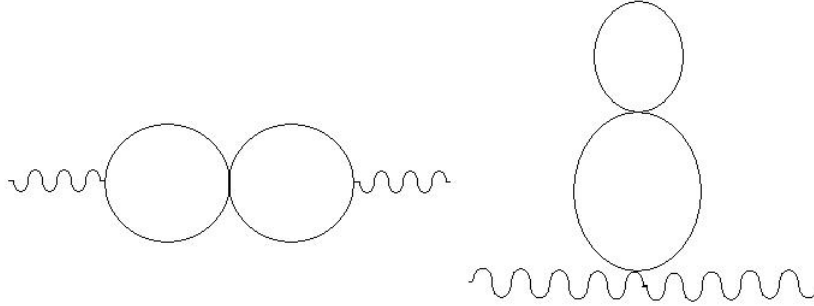


Figura 4.4: correções perturbativas proporcionais ao diagrama *tadpole*

serão identicamente nulos e não darão contribuição para o tensor de polarização do vácuo na QED escalar. A seguir, apresentamos em linhas gerais a metodologia empregada no tratamento de correções radiativas não nulas para $\pi_{\mu\nu}$.

4.3 Contribuições não-nulas para o tensor de polarização do vácuo na QED escalar a dois loops

Os gráficos de Feynman que contribuirão para o tensor de polarização do vácuo são listados abaixo. Cada gráfico é acompanhado do seu respectivo contratermo:

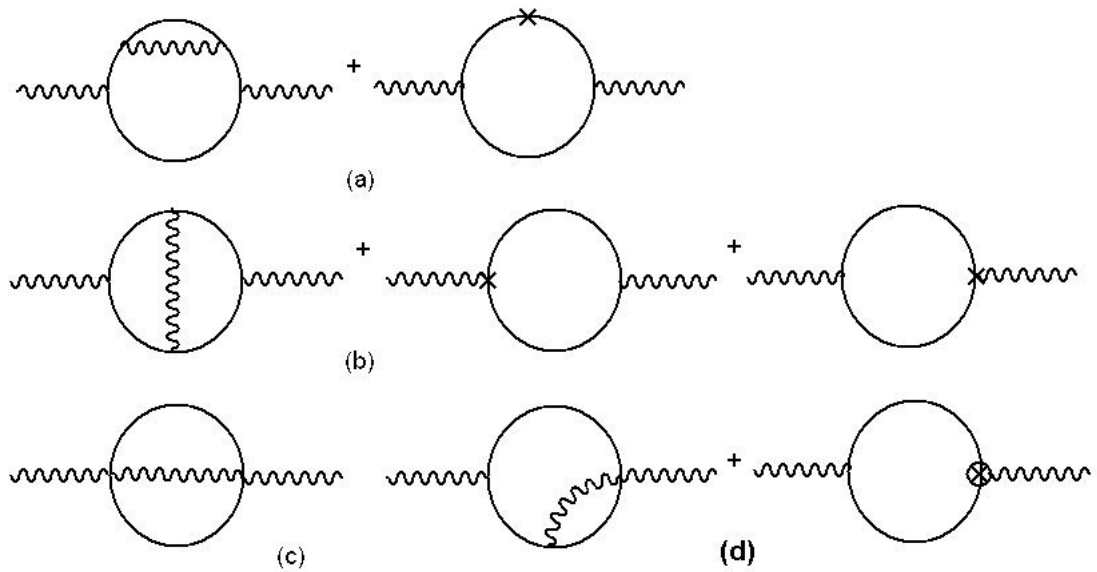


Figura 4.5: correções radiativas não nulas para o tensor de polarização a dois loops e respectivos contratermos na QED escalar

Há dois tipos de divergências nos gráficos da figura anterior. As chamadas divergências aninhadas e as divergências overlapadas. As primeiras são presentes nos diagramas das figuras (4.5-a, c e d). Nestes gráficos, podemos substituir o subdiagrama, já calculado em ordens anteriores, pelo resultado de sua parte finita, o que tornará o gráfico completo livre das subdivergências. Isso é equivalente ao cálculo do diagrama completo somado com o respectivo contratermo calculado com linhas ou vértices corrigidos em função da renormalização nas ordens anteriores. Já o gráfico da figura (4.5-b) é um diagrama overlapado, em que percebe-se a presença de uma linha comum aos subdiagramas, não sendo possível resolver de maneira separada as integrais nos

dois momentos internos que caracterizarão o diagrama. Neste caso, cada subdiagrama precisa ser identificado, e então calcularmos cada contratermo necessário para a remoção de subdivergências. Não é possível usar diretamente o resultado finito de cada subdiagrama.

O primeiro diagrama, figura (4.5-a), possui como subdiagrama uma correção para o propagador escalar, $\Sigma(p^2)$, que é divergente na primeira ordem em loops. Há duas formas de se tratar o problema. Podemos aplicar as regras de Feynman ao diagrama de segunda ordem completo e então, após aplicar o procedimento de regularização implícita, resolver duas integrais nos momentos internos, k e l do subdiagrama. Substituímos a parte finita da ordem anterior (primeira ordem em loops) no lugar do subdiagrama, o que equivale a calcular o diagrama completo é somar o respectivo contratermo, que é o segundo diagrama da figura (4.5). Assim, o papel do diagrama de contratermo é subtrair as subdivergências, evitando a ocorrência de divergências não-locais, representadas pelo produto de quantidades divergentes por funções não-polinomiais dos momentos externos (29). Para tais divergências, não há como adicionarmos contratermos na lagrangeana da teoria capazes de eliminar tais divergências, visto que a forma dos contratermos não possui termo correspondente na lagrangeana (que é escrita no espaço de configurações). Podemos também encarar as divergências não locais como escritas em termos de algum tipo de expansão em série (como uma série de Taylor) com infinitos termos. O caráter não local surge exatamente da existência de infinitas derivadas, resultantes de tal expansão em série. Isso nos exigiria infinitos contratermos para eliminarmos cada contribuição divergente oriunda de tal expansão em série. O subdiagrama com divergências aninhadas é representado por abaixo

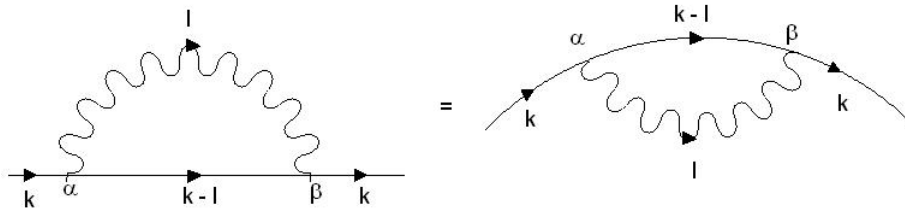


Figura 4.6: diagrama de Feynman para a auto-energia escalar

Aplicando as regras de Feynman para a QED escalar como vistas no capítulo anterior e usando o resultado para o subdiagrama a um loop já renormalizado podemos escrever que:

$$\Pi_{\mu\nu 1}(p^2) = (ie)^3 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p+2k)_\mu (p+2k)_\nu}{[(p+k)^2](k^2)^4} \left[-2e^2 k^2 b \ln \left(\frac{k^2}{\lambda^2 e^2} \right) \right], \quad (4.9)$$

Podemos então escrever

$$\Pi_{\mu\nu 1}(p^2) = 2ie^4 b \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p_\mu p_\nu + 4k_\mu k_\nu)(p+2k)_\nu + k_\mu p_\nu}{[(p+k)^2](k^2)^4} \left[\ln \left(\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - 2 \right], \quad (4.10)$$

em que a simetria nos índices de Lorentz, μ e ν , já foi considerada. Outra simplificação que ocorre é o cancelamento de termos proporcionais a k^2 , no numerador e denominador. A amplitude para o diagrama será escrita em termos de integrais básicas típicas de um e dois loops, sendo dada por:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu 1}(p^2) = & 2ie^4 b [p_\mu p_\nu I^{(2)}(p^2) - 4p_\nu I_\mu^{(2)}(p^2) + 4I_{\mu\nu}^{(2)}(p^2) \\ & - 2p_\mu p_\nu I(p^2) - 8p_\nu I_\mu(p^2) - 8I_{\mu\nu}(p^2)], \end{aligned} \quad (4.11)$$

em que definimos:

$$I_{1,\mu,\mu\nu}^{(2)} = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1, k_\mu, k_\mu k_\nu}{k^2 (k-p)^2} \ln -\frac{k^2}{\lambda^2} \quad e \quad (4.12)$$

$$I_{1,\mu,\mu\nu} = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1, k_\mu, k_\mu k_\nu}{k^2 (k-p)^2} \quad . \quad (4.13)$$

Usando ainda que

$$I_\mu(p^2) = -\frac{p_\mu}{2} I(p^2)$$

finalmente podemos escrever que

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu 1}(p^2) = & [p_\mu p_\nu I^{(2)}(p^2) - 4p_\mu I_\mu^{(2)}(p^2) + I_{\mu\nu}^{(2)}(p^2) + \\ & + 2p_\mu p_\nu I(p^2) - 8I_{\mu\nu}(p^2)] \quad . \end{aligned} \quad (4.14)$$

O cálculo explícito das diversas parcelas que surgem nesse e nos outros diagramas é apresentado em detalhes nos apêndices 2 (para cálculos a um loop) e 3 (para cálculos a dois loops). Vamos apresentar o resultado para o terceiro diagrama, (4.6-c), deixando o diagrama overlapado para o final. Usando as

regras de Feynman, a amplitude para esse diagrama é dada por

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu 2}(p^2) &= -4ie^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\rho}}{(p+k)^2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{g_{\nu\sigma}}{l^2} \frac{g^{\rho\sigma}}{(l-k)^2} \\
 &= -4ie^4 g_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2} \frac{1}{l^2} \frac{1}{(l-k)^2} \\
 &= -4ie^4 g_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2} \left(I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

em que usamos o resultado da integral básica típica de um loop, I. Admitindo a possibilidade da realização de shifts no momento de integração e no final eliminando as divergências quadráticas, aplicamos novamente o procedimento de Regularização Implícita para o momento l, e realizando a integral, obtemos:

$$\Pi_{\mu\nu 2}(p^2) = 8ie^4 b p^2 g_{\mu\nu} \left[-I_{\log}(\lambda^2) + b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 3b \right]. \tag{4.16}$$

O próximo diagrama é representado pela figura (4.5-d), acompanhado do seu respectivo contratermo

Com as regras de Feynman, obtemos a seguinte amplitude:

$$\Pi_{\mu\nu 3}(p^2) = 2ie^4 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(2k-p)_{\mu} (2k-l)_{\sigma}}{(k-p)^2 (k-l)^2} \frac{g_{\nu\rho} g^{\rho\sigma}}{k^2 l^2}. \tag{4.17}$$

Utilizando as propriedades das matrizes $g_{\mu\nu}$, o numerador da amplitude pode ser reescrito da seguinte forma:

$$g_{\nu\rho} g^{\rho\sigma} = \delta_{\nu}^{\sigma} \quad ,$$

o que nos permite escrever

$$(2k-l)_{\sigma} \delta_{\nu}^{\sigma} = (2k-l)_{\nu} \quad ,$$

e finalmente

$$(2k-p)_{\mu} (2k-l)_{\nu} = 4k_{\mu} k_{\nu} - 2p_{\mu} k_{\nu} - 2k_{\mu} l_{\nu} + p_{\mu} l_{\nu} \quad .$$

A amplitude $\Pi_{\mu\nu 3}$ será escrita em termos de quatro integrais básicas, que designamos por I_1 , I_2 , I_3 e I_4 :

$$\Pi_{\mu\nu 3}(p^2) = 2ie^4 \{I_1 + I_2 + I_3 + I_4\} \quad . \quad (4.18)$$

Para cada parcela, separamos a parte que deve ser integrada no momento interno l e o que deve ser integrado no momento interno k :

$$I_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{k^2(k-p)^2} \left[\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2(k-l)^2} \right]. \quad (4.19)$$

O resultado para a integral em l já nos é familiar de cálculos a um loop, sendo dado por

$$I_l = I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + 2b \quad , \quad (4.20)$$

Eliminando a parte divergente característica da primeira ordem em loops (por meio do gráfico de contratermos), temos

$$I_l^{ren} = -b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + 2b \quad , \quad (4.21)$$

em que ren indica que a renormalização a um loop foi efetuada. Podemos escrever:

$$I_1 = -4b \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k-p)^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + 8b \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k-p)^2} \quad . \quad (4.22)$$

Seguindo a notação e convenção adotadas no apêndice A desse trabalho, a parcela I_1 pode então ser escrita como

$$I_1 = -4bI_{\mu\nu}^{(2)}(p^2) + 8bI_{\mu\nu}(p^2) \quad . \quad (4.23)$$

Tratamento similar pode ser dado à segunda parcela, I_2 , dada por

$$I_2 = 2ie^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-2p_\mu k_\nu}{k^2(k-p)^2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2(k-l)^2} \quad , \quad (4.24)$$

e, como para a parcela anterior, temos que a integral no momento l é divergente, com divergência característica da primeira ordem em loops dada pela

equação 4.20. Removendo a subdivergência característica de primeira ordem, temos

$$\begin{aligned} I_2 &= 2ie^4 b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-2p_\mu k_\nu}{k^2(k-p)^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-4p_\mu k_\nu}{l^2(k-l)^2} \\ &= 2ie^4 b [2p_\mu I_\nu^{(2)}(p^2) - 4p_\mu I_\nu(p^2)] \end{aligned} \quad (4.25)$$

e considerando a relação entre $I_\nu(p^2)$ e $I(p^2)$, que é dada por

$$I_\nu = p_\nu \frac{I(p^2)}{2} \quad ,$$

temos

$$I_2 = 2ie^4 b [2p_\mu I_\nu^{(2)}(p^2) - 2p_\mu p_\nu I(p^2)]. \quad (4.26)$$

A terceira integral é

$$I_3 = 2ie^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-2k_\mu}{k^2(k-p)^2} \left[\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\nu}{l^2(k-l)^2} \right], \quad (4.27)$$

em que a subintegral em l é destacada. O resultado é dado por

$$\begin{aligned} I_\nu(k^2) &= \frac{k_\nu}{2} I(k^2) \\ &= \frac{k_\nu}{2} \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - b \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + 2b \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Subtraindo a subdivergência com o uso de um contratermo, substituímos a parte finita da integral no momento l em (4.27), obtemos:

$$\begin{aligned} I_3 &= b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) - 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \\ &= b [I_{\mu\nu}^{(2)}(p^2) - 2I_{\mu\nu}(p^2)], \end{aligned} \quad (4.29)$$

Após separarmos os dois momentos internos ao diagrama, a última integral que contribui para o diagrama analisado é dada por

$$I_4 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu}{k^2(k-p)^2} \left[\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\nu}{l^2(k-l)^2} \right]. \quad (4.30)$$

Realizando o mesmo procedimento de absorção de termos subdivergentes,

podemos escrever

$$I_4 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu}{k^2(k-p)^2} \frac{k_\nu}{2} \left[-b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right], \quad (4.31)$$

em que utilizamos a relação entre I_ν e I . Em termos de integrais básicas, essa parcela pode ser escrita como

$$\begin{aligned} I_4 &= b \frac{p_\mu}{2} [-I_\nu^{(2)}(p^2) + 2I_\nu(p^2)] \\ &= b \frac{p_\mu}{2} \left[-I_\nu^{(2)}(p^2) + 2 \frac{p_\nu}{2} I(p^2) \right] \\ &= b \frac{p_\mu}{2} [-I_\nu^{(2)}(p^2) + p_\nu I(p^2)] \quad . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Somando todas as parcelas, a amplitude para o diagrama $\Pi_{\mu\nu_1}$ é dada como uma soma de integrais básicas:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu_1} &= 2ie^4b[-4I_{\mu\nu}^{(2)} + 8I_{\mu\nu} + 2bp_\mu I_\nu^{(2)} - 2p_\mu p_\nu I + \\ &\quad + I_{\mu\nu}^{(2)} - 2I_{\mu\nu} - \frac{1}{2}p_\mu I_\nu^{(2)} + \frac{1}{2}p_\mu p_\nu I] \end{aligned} \quad (4.33)$$

que finalmente nos dá

$$\Pi_{\mu\nu_1} = 2ie^4b \left[-3I_{\mu\nu}^{(2)} + 6I_{\mu\nu} + \frac{3}{2}p_\mu I_\nu^{(2)} - \frac{3}{2}p_\mu p_\nu I \right] \quad (4.34)$$

4.3.1 Cálculo do diagrama sobreposto

A eliminação de subdivergências em diagramas sobrepostos não pode ser feita simplesmente substituindo-se o resultado finito do subdiagrama no diagrama de ordem superior. É necessário calcular explicitamente quais são os contratermos necessários a fim de se eliminar divergências não-locais originadas pelas subdivergências. A figura (4.5-b) nos traz a contribuição com "overlapping" para o tensor de polarização do vácuo na QED escalar com os respectivos contratermos. Os subdiagramas divergentes são correções para o vértice trilinear (fóton-escalar-escalar) Aplicando as regras de Feynman da QED escalar ao diagrama e escrevendo a amplitude em termos de integrais

básicas, teremos como resultado

$$\begin{aligned}\pi_{\mu\nu}^O &= -ie^4\{-2p^2[4I_{\mu\nu}^O - p_\mu p_\nu I^O] + \\ &+ [I_{log}(\lambda^2) + 2b][8I_{\mu\nu}(p^2) - 2p_\mu p_\nu I(p^2)] \\ &- 2b[4I_{\mu\nu}^{(2)} - 6p_\nu I^{(2)\mu}(p^2) + 2p_\mu p_\nu I^{(2)}(p^2)]\} \quad . \quad (4.35)\end{aligned}$$

em que I^O é uma integral típica de diagramas sobrepostos, dada por

$$I^O = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2 (p-k)^2} \quad . \quad (4.36)$$

O cálculo completo e detalhado do diagrama com divergências sobrepostas para o tensor de polarização do vácuo na QED escalar é apresentado no apêndice 5. Na segunda linha da equação (E.44), notamos o produto de uma divergência típica de primeira ordem por integrais básicas de primeira ordem, originando o aparecimento de divergências não locais, que podem ser eliminadas através do cálculo de contratermos. Aplicando as regras de Feynman ao diagrama de contratermos, com uma nova regra de Feynman para o vértice corrigido, teremos

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{CT} &= 2ie^4 I_{log}(\lambda^2)[4I_{\mu\nu} - 4p_\mu I_\nu + p_\mu p_\nu I] \\ &= 2ie^4 I_{log}(\lambda^2)[4I_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu I] \quad . \quad (4.37)\end{aligned}$$

Somando as equações (E.44) e (4.37), eliminamos as divergências não locais o resultado para o diagrama sobreposto é

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_{\mu\nu}^O &= \Pi_{\mu\nu}^O + 2\Pi_{\mu\nu}^{CT} \\ &= -ie^4\{-2p^2[4I_{\mu\nu}^{O_1} - p_\mu p_\nu I^O] \\ &= -2b[4I_{\mu\nu}^{(2)} - 6p_\nu I^{(2)\mu}(p^2) + 2p_\mu p_\nu I^{(2)}(p^2) - 8I_{\mu\nu} + 2p_\mu p_\nu I]\} \quad (4.38)\end{aligned}$$

em que

$$I_{\mu\nu}^{O_1} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2 (p-k)^2} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned}
 I_{\mu\nu}^{O(a,b)} &= g_{\mu\nu} \left\{ \frac{b}{4} I_{\log}(\lambda^2) - \frac{b^2}{4} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{p^2}{12} I^O + \frac{11}{12} b^2 - b^2 \frac{\pi^2}{36} \right\} + \\
 &+ \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left\{ \frac{p^2}{3} I^O - \frac{1}{6} b^2 + b^2 \frac{\pi^2}{36} \right\}, \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\mu\nu}^{O(a,b)} &= g_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{4} I_{\log}^2 \lambda^2 - \frac{b}{4} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{9}{8} b I_{\log}(\lambda^2) - \frac{b}{4} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{\log} \lambda^2 + \right. \\
 &+ \left. \frac{b^2}{8} \ln^2 \left(\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{8} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{p^2}{12} I^O + \frac{31}{24} b^2 \right\} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left\{ \frac{p^2}{3} I^O + \frac{b^2}{12} \right\}. \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

As integrais I^O e $I_{\mu\nu}^{O_1}$ são calculadas no apêndice destinado ao cálculo detalhado do tensor de polarização do vácuo.

4.3.2 Verificação da transversalidade do tensor de polarização

Para verificarmos a transversalidade do tensor de polarização do vácuo e conseqüente satisfação da invariância de calibre da teoria, somamos todas as contribuições não nulas para $\Pi_{\mu\nu}$. Desta forma, levando-se em conta os fatores de simetria, calculados de acordo com a referência (46), e as multiplicidades de cada diagrama, teremos:

$$\Pi_{\mu\nu} = 4\Pi_{\mu\nu_1} + \Pi_{\mu\nu_3} + 2\Pi_{\mu\nu_2} + \bar{\Pi}_{\mu\nu O} \quad , \tag{4.42}$$

em que as subdivergências de cada diagrama já foram eliminadas. Conhecidas as expressões para cada contribuição diagramática em termos de divergências e integrais finitas básicas e seus resultados, vamos mostrar que cada termo de $\Pi_{\mu\nu}$ é proporcional a

$$p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2 \quad .$$

Somando as contribuições de todos os diagramas escritas em termos de integrais básicas, temos

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu} &= 4 \cdot 2ie^4 b \left\{ -3I_{\mu\nu}^{(2)} + 6I_{\mu\nu} + \frac{3}{2}p_\mu I^{(2)\nu} - \frac{3}{2}p_\mu p_\nu I \right\} \\
&- 4ie^4 \frac{1}{2} g_{\mu\nu} b \frac{1}{2} \left\{ -I_{\log}(\lambda^2) + \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 3b \right\} + \\
&- 2 \cdot 2ie^4 b \left\{ 4I_{\mu\nu}^{(2)} + p_\mu p_\nu I^{(2)} + 2p_\mu p_\nu I - 8I_{\mu\nu} - 4p_\mu I^{(2)\nu} \right\} \\
&- ie^4 \left\{ -2p^2 [4I_{\mu\nu}^O - p_\mu p_\nu I^O] - \right. \\
&- \left. 2b [4I_{\mu\nu}^{(2)} - 6p_\nu I_\mu^{(2)} + 2p_\mu p_\nu I^{(2)} - 8I_{\mu\nu} + 2p_\mu p_\nu I] \right\} \quad , \quad (4.43)
\end{aligned}$$

em que, na última linha, estão presentes os contratermos que eliminam as subdivergências no diagrama sobreposto, calculados anteriormente. Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu} &= ie^4 b \left\{ 0 \cdot I_{\mu\nu}^{(2)} - 16p_\mu I^{(2)\nu} + 8p_\mu p_\nu I^{(2)} + 0 \cdot I_{\mu\nu} \right. \\
&- \left. 0p_\mu p_\nu I - 2p^2 g_{\mu\nu} \left\{ -I_{\log}(\lambda^2) + b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 3b \right\} + \right. \\
&+ \left. \frac{2p^2}{b} [4I_{\mu\nu}^O - p_\mu p_\nu I^O] \right\} \quad . \quad (4.44)
\end{aligned}$$

em que as integrais

$$I_{\mu\nu}^{(2)}, \quad I_\mu^{(2)}, \quad I^{(2)}, \quad I_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad I(p^2)$$

têm seus resultados apresentados no apêndice DB desse trabalho.

4.3.2.1 Soma dos termos proporcionais a $I_{\log}^{(2)}(\lambda^2)$

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}(I_{\log}^{(2)}(\lambda^2)) &= -16 \frac{p_\mu p_\nu}{2} + 8p_\mu p_\nu \\
&= 0
\end{aligned} \quad (4.45)$$

Logo, o tensor de polarização do vácuo a 2 loops não deve ser dependente da divergência característica de dois loops, $I_{\log}^{(2)}(\lambda^2)$.

4.3.2.2 *Soma dos termos proporcionais a $I_{log}(\lambda^2)$*

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(I_{log}(\lambda^2)) &= -16\frac{p_\mu p_\nu}{2}\frac{1}{2} + 8p_\mu p_\nu \cdot 0 + 2p^2 g_{\mu\nu} + \frac{2p^2}{b} \left[4\frac{g_{\mu\nu}b}{4} \right] \\ &= 4(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \quad ,\end{aligned}\tag{4.46}$$

assim, o termo proporcional a $I_{log}(\lambda)^2$ para o tensor de polarização do vácuo tem a estrutura tensorial apropriada.

4.3.2.3 *Soma dos termos proporcionais a $\ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right)$*

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}\left(\ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right)\right) &= -16\frac{p_\mu p_\nu}{2}\frac{-b}{2} + 4p_\mu p_\nu \frac{-b}{2} \\ &= 4p_\mu p_\nu - 4p_\mu p_\nu \\ &= 0 \quad .\end{aligned}\tag{4.47}$$

4.3.2.4 *Soma dos termos proporcionais a $\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right)$*

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}\left(\ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right)\right) &= -16\frac{p_\mu p_\nu}{2}\frac{b}{2} + 8p_\mu p_\nu - 2p^2 b_{\mu\nu}b + \frac{2p^2}{b} \left[\frac{-g_{\mu\nu}b^2}{4} 4 \right] \\ &= 4p_\mu p_\nu b - 4g_{\mu\nu}p^2 b = 4b(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}).\end{aligned}\tag{4.48}$$

4.3.2.5 *Soma dos termos constantes, independentes de p^2*

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(cte.) &= -16p_\mu \frac{p_\nu}{2} \left(\frac{3}{2}b\right) + 8p_\mu p_\nu 0 - 2p^2 g_{\mu\nu}(-3b) + \\ &+ \frac{2p^2}{b} \{4g_{\mu\nu} \left[-\frac{p^2}{12}I^O + \frac{11}{12}b^2 - \frac{b^2}{36}\frac{\pi^2}{9}\right] \\ &+ \frac{4p_\mu p_\nu}{p^2} \left[\frac{p^2}{3}I^O - \frac{1}{6}b^2 + \frac{\pi^2}{36}b^2\right] - p_\mu p_\nu I^O\}.\end{aligned}\tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}(cte.) &= -12p_\mu p_\nu b + 6bp^2 g_{\mu\nu} + \frac{2p^2}{b} \left\{ \frac{-1}{3} I^O [g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu] \right\} \\
 &+ \frac{2p^2}{b} \left\{ \frac{-b^2}{9} \pi^2 g_{\mu\nu} + \frac{b^2}{9} \pi^2 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right\} \\
 &+ \frac{2p^2}{b} \left\{ \frac{11}{3} b^2 g_{\mu\nu} - \frac{2}{3} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} b^2 \right\}
 \end{aligned}$$

que finalmente pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}(cte.) &= \frac{2p^2}{b} \left\{ [g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu] \left(\frac{1}{3} I^O - \frac{b^2 \pi^2}{9} \right) \right\} - \\
 &- 12p_\mu p_\nu b + 6bp^2 g_{\mu\nu} + \frac{22}{3} b g_{\mu\nu} p^2 - \frac{4}{3} b p_\mu p_\nu \\
 &= (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \frac{2}{b} \left[-\frac{1}{3} p^2 I^O - p^2 \frac{b^2 \pi^2}{9} \right] \\
 &+ (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \frac{40}{3} \quad . \tag{4.50}
 \end{aligned}$$

Assim, mostramos que $\Pi_{\mu\nu}$ é proporcional a $g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu$ e o procedimento de regularização implícita, em especial a remoção dos chamados termos de superfície, preserva o caráter transversal do tensor de polarização do vácuo, ou seja

$$p^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0 \quad .$$

A remoção dos termos de superfície pode ser interpretada através da introdução de contratermos restauradores de simetria, que tornaram válidas as condições de consistência a 2 loops. Desta forma, vemos que a exigência da invariância por roteamento em ordens superiores, que surge com a eliminação dos termos de superfície, nos conduz à invariância de calibre. Como tal vínculo é fruto da invariância por roteamento na teoria de campos em questão, mostramos que há uma íntima relação entre invariância de calibre e invariância por roteamento para ordens superiores na expansão em loops. No próximo capítulo, as identidades de Ward para a QED espinorial serão investigadas.

Eletrodinâmica Quântica Espinorial a 2 loops

5.1 Introdução

Neste capítulo, tratamos a QED espinorial a dois loops. Particular atenção é dada à verificação da identidade de Ward-Takahashi que relaciona a auto-energia do elétron e a correção para o vértice elétron-fóton, importante para a renormalização da QED. Para verificar a satisfação da identidade de Ward que relaciona as funções de vértice com as auto-energias fermiônicas a dois loops, vamos determinar todos os diagramas de vértice e de auto-energia a dois loops. Apresentamos o cálculo do tensor de polarização do vácuo e verificamos sua transversalidade. Finalmente, de posse do contratermo para o tensor de polarização do vácuo, calculamos a função *beta* para a QED a dois loops.

5.2 Auto-energia do elétron

As correções para auto-energia fermiônica a dois loops são dadas pelos seguintes diagramas

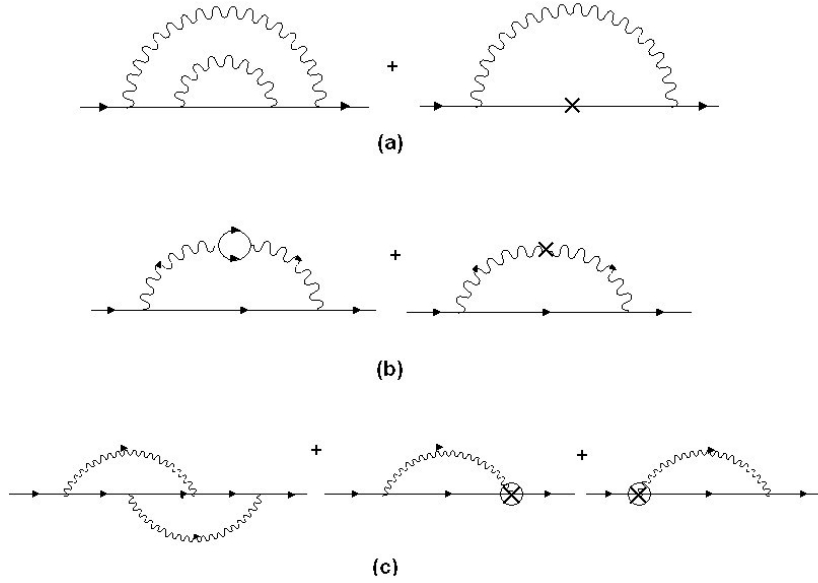


Figura 5.1: diagramas de auto-energia a dois loops na QED espinorial

O primeiro diagrama, figura (5.1-a), apresenta uma subdivergência aninhada e seu respectivo contratermo. O subgráfico é a auto-energia fermiônica a um loop, calculada no apêndice 2, cuja parte finita vale:

$$-i\Sigma^{(1)}(k) = e^2 b \not{k} \left\{ -\ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + 2 \right\} . \quad (5.1)$$

Usando as regras de Feynman e o resultado da auto-energia renormalizada na primeira ordem em loops:

$$-i\Sigma_a^{(2)}(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha \frac{i}{\not{k}} \left[e^2 b \not{k} \left\{ -\ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + 2 \right\} \right] \alpha_\beta \frac{-ig^{\alpha\beta}}{(p-k)^2} . \quad (5.2)$$

Racionalizando os denominadores dos propagadores fermiônicos e usando a

identidade (A.10), podemos escrever

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_a^{(2)}(\not{p}) &= -2ie^4b \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}}{k^2(p-k)^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + \\
&\quad + 4ie^4b \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}}{k^2(p-k)^2} \\
&= -2ie^4b\gamma^\mu \{I_\mu^{(2)}(p^2) - 2I_\mu(p^2)\} \\
&= -2ie^4b\gamma^\mu \{I_\mu^{(2)}(p^2) - p_\mu I(p^2)\}. \tag{5.3}
\end{aligned}$$

O segundo diagrama tem como subgráfico o tensor de polarização do vácuo em primeira ordem em loops, também calculado no apêndice 2, cuja parte finita é dada por

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)} = \left\{ -\frac{4}{3}e^2b[k_\alpha k_\beta - k^2 g_{\alpha\beta}] \left[\ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) - \frac{7}{3} \right] \right\} \tag{5.4}$$

Usando as regras de Feynman para o restante do diagrama e a parte finita para $\Pi_{\mu\nu}^{(1)}$, temos

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_b^{(2)}(\not{p}) &= (-1)(-ie)^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \gamma_\alpha \frac{i}{\not{p}-\not{k}} \gamma_\beta \frac{(-ig^{\beta\rho})}{k^2} \right. \\
&\quad \left. \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} Tr \left[\gamma_\rho \frac{i}{\not{k}-\not{l}} \gamma_\sigma \frac{i}{\not{l}} \right] \frac{-ig^{\sigma\alpha}}{k^2} \right\}. \tag{5.5}
\end{aligned}$$

As subdivergências do tensor de polarização do vácuo já foram eliminadas, considerando o contratermo para primeira ordem em loops.

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_b^{(2)}(\not{p}) &= \frac{4}{3}ie^4b \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{p}-\not{k})\not{k}}{k^4(p-k)^2} \left[\ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) - \frac{7}{3} \right] - \\
&\quad - \frac{4}{3}ie^4b \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-2(\not{p}-\not{k})}{k^2(p-k)^2} \left[\ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) - \frac{7}{3} \right] \\
&= \frac{4}{3}ie^4b \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{p}-\not{k})\not{k}}{k^4(p-k)^2} \left[\ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) - \frac{7}{3} \right] + \\
&\quad + \frac{8}{3}ie^4b\not{p}I^{(2)}(p^2) - \frac{8}{3}ie^4b\not{p}I_\mu^{(2)}(p^2) - \frac{28}{9}ie^4b\not{p}I(p^2) \tag{5.6}
\end{aligned}$$

A última contribuição é dada pelo diagrama overlapado, (5.1-c) e seus respectivos contratermos. No diagrama acima, não é possível isolar diretamente os

subgráficos com suas respectivas partes finitas, devido à ocorrência de divergências overlapadas. Como no caso do diagrama overlapado para o tensor de polarização do vácuo, a eliminação de divergências não-locais não é direta como no caso de gráficos de Feynman com subgráficos aninhados, onde podemos usar o resultado finito dos subdiagramas. Devemos calcular cada contratermo, separadamente, de onde obteremos diagramas típicos de um loop com o vértice elétron-fóton corrigido, procedimento que precisa ser realizado nos dois vértices. A amplitude para o gráfico é dada por

$$\begin{aligned} -i\Sigma_c^{(2)} &= (-ie)^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \gamma_\beta \frac{i}{\not{p}-\not{l}} \frac{i}{\not{k}-\not{l}} \gamma_\rho \frac{i}{\not{k}} \frac{-ig^{\rho\beta}}{l^2} \frac{-ig^{\alpha\sigma}}{(p-k)^2} \\ &= ie^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\rho(\not{p}-\not{l})\gamma^\sigma(\not{k}-\not{l})\gamma_\rho \not{k}\gamma_\sigma}{(p-l)^2(k-l)^2(p-k)^2 k^2 l^2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Apresentaremos o resultado final da amplitude, deixando os demais cálculos e manipulações envolvidos para o apêndice 5. Como resultado, temos

$$-i\Sigma_2^2 = 4ie^4 \gamma^\mu \left\{ -\frac{1}{2} [I_{\log}(\lambda^2) + 2b] p_\mu I(p^2) + b I_\mu^{(2)}(p^2) \right\}. \quad (5.8)$$

Vamos então analisar a remoção de divergências não-locais. Podemos identificar cada subdiagrama a um loop como a correção de vértice de primeira ordem. Como existem dois vértices de tal natureza, o resultado final deve ser multiplicado por dois. Assim, calculando o diagrama de contratermos, temos;

$$\begin{aligned} -i\Sigma^{(2)}_{ct} &= 2C(-ie)(i)(-i) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \frac{1}{\not{k}} \gamma_\alpha \frac{g^{\alpha\rho}}{(p-k)^2} \\ &= -2ieC \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-2\not{k}}{k^2(p-k)^2} \\ &= 4ieC \frac{\not{p}}{2} I(p^2) \\ &= 2ieC p I(p^2), \end{aligned} \quad (5.9)$$

em que usamos a identidade (A.10) e C é o fator de vértice associado ao subdiagrama de primeira ordem. Como determinado no apêndice 2, C é dado por

$$C = e^3 I_{\log}(\lambda^2) \quad \text{e assim escrevemos}$$

$$-i\Sigma_{ct_2}^{(2)} = 2ie^4 I_{log}(\lambda^2) \not{p} I(p^2) \quad . \quad (5.10)$$

que possui a mesma contribuição não local existente no diagrama de auto-energia overlapado. Realizando a subtração de subdivergências, obtemos:

$$\begin{aligned} -i\bar{\Sigma}_c^{(2)}(\not{p}) &= -i\Sigma_c^{(2)} - 2i\Sigma_{ct_2}^{(2)} \\ &= -4ie^4 \not{p} I(p^2) + 4ie^4 b\gamma^\mu I_\mu^{(2)}(p^2) \\ &= 4ie^4 b\gamma^\mu [-p_\mu I(p^2) + I_\mu^{(2)}(p^2)] \quad , \end{aligned} \quad (5.11)$$

e assim, vemos que as divergências não-locais são eliminadas do resultado final, restando apenas divergências locais, que podem ser removidas pela introdução de contratermos locais na lagrangeana. Com todas as contribuições não-nulas para a auto-energia fermiônica a dois loops calculadas, podemos escrever o segundo membro da identidade de Ward, (5.13). Somando as contribuições (5.3), (5.11) e (5.6) e calculando a diferença de tais quantidades calculadas para p e p' , temos:

$$\begin{aligned} \Sigma_{total}(p) - \Sigma_{total}(p') &= \\ &-4e^4 b\gamma^\mu \left[I_\mu^{(2)}(p^2) - I_\mu^{(2)}(p'^2) + p'_\mu I(p'^2) - p_\mu I(p^2) \right] - \\ &-\frac{4}{3}e^4 b\gamma^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{p} - \not{k})\not{k}}{k^4(p-k)^2} \left[\ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) - \frac{7}{3} \right] \\ &+\frac{4}{3}e^4 b\gamma^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{p}' - \not{k})\not{k}}{k^4(p'-k)^2} \left[\ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) - \frac{7}{3} \right] - \\ &-\frac{8}{3}e^4 b\gamma^\mu \left\{ p_\mu I^{(2)}(p^2) - p'_\mu I^{(2)}(p'^2) \right\} + \frac{8}{3}e^4 b\gamma^\mu \left\{ I_\mu^{(2)}(p^2) - I_\mu^{(2)}(p'^2) \right\} + \\ &+\frac{28}{9}e^4 b\gamma^\mu \left\{ p_\mu I(p^2) - p'_\mu I(p'^2) \right\} \quad . \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.3 Correções de vértice a 2 loops para a QED espinorial

As identidades de Ward são relações existentes entre funções de Green de diferentes ordens na constante de acoplamento. Elas refletem a preservação de alguma simetria (que quer dizer a conservação de alguma quantidade, genericamente chamada de corrente). A seguir, vamos estudar as relações existentes entre as funções de vértice e diagramas de auto-energia a dois

loops. A identidade de Ward decorrente de tais diagramas é de fundamental importância na prova da renormalizabilidade da Eletrodinâmica Quântica. Em segunda ordem em loops, tal relação deve ser dada por:

$$q^\mu \Gamma_\mu^{(2)} = \Sigma^{(2)}(p) - \Sigma^{(2)}(p') \quad , \quad (5.13)$$

sendo q o momento do fóton emitido pelo elétron, p é o momento inicial de tal elétron, antes da emissão do fóton, e p' é o momento do elétron após a emissão do fóton. As correções diagramáticas não nulas para a função de vértice a dois loops na QED e seus respectivos contratermos para remoção de subdivergências são apresentadas na próxima figura:

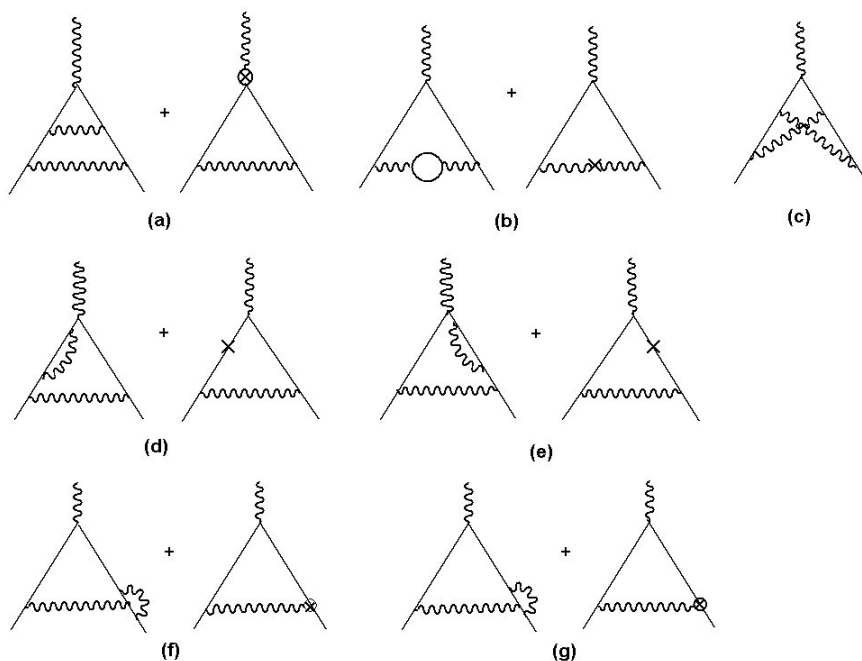


Figura 5.2: correções radiativas para a função de vértice a dois loops na QED espinorial

A função de vértice, $-ie\Gamma_\mu^{(2)}$, representa uma correção quântica para a interação elétron-fóton na QED. Em nível árvore, essa interação é representada pelo seguinte fator

$$-ie.$$

Para a avaliação das funções de vértice, devemos ressaltar o fato de que,

embora a Regularização Implícita não comuta com a contração da amplitude com a métrica, processo em que perderíamos controle dos termos de superfície que são os possíveis termos violadores de simetria, ela comuta com a contração da amplitude com um momento externo. Por essa razão, com o propósito de verificarmos as Identidades de Ward, devemos avaliar as correções de vértice *contraídas* com o momento do fóton externo aos diagramas,

$$q = p - p'$$

. Começamos tal análise com o primeiro gráfico da figura (5.2). Aplicando as regras de Feynman temos:

$$\begin{aligned} -ie\Gamma_{\mu_1}^{(2)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} (-ie\gamma_\rho) \frac{i}{\not{p}' - \not{k}} (-ie\gamma_\sigma) \frac{i}{\not{p}' - \not{l}} (-ie\gamma_\mu) \frac{i}{\not{p} - \not{l}} \\ &\quad (-ie\gamma_\beta) \frac{i}{\not{p} - \not{k}} (-ie\gamma_\alpha) \\ &\quad \frac{-ig^{\alpha\rho}}{k^2} \frac{-ig^{\beta\sigma}}{(l-k)^2} . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Nesse diagrama, é possível isolar como subdiagrama a função de vértice a um loop (parte superior do diagrama). Podemos reescrever a amplitude a dois loops isolando a amplitude do subdiagrama, o que será justificável no próximo passo. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} -ie\Gamma_{\mu_1}^{(2)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie\gamma^\alpha) \frac{i}{\not{p}' - \not{k}} \left[\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} (-ie\gamma^\beta) \frac{i}{\not{p}' - \not{l}} (-ie\gamma_\mu) \frac{i}{\not{p} - \not{l}} \frac{-i}{(l-k)^2} \right] \\ &\quad \frac{i}{\not{p} - \not{k}} (-ie\gamma_\alpha) \frac{-i}{k^2} . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Entretanto, estamos interessados em verificar a validade da Identidade de Ward que relaciona a função de vértice com a auto-energia dos férmions, dada pela relação (5.13). Assim sendo, vamos contrair o quadri-momento do fóton emitido, q^μ , com a correção a um loop para a função de vértice. Sabemos, entretanto, que essa identidade de Ward é válida na primeira ordem em loops, ou seja

$$q^\mu \Gamma_\mu^{(1)} = \Sigma^{(1)}(p) - \Sigma^{(1)}(p') \quad ,$$

e então podemos escrever

$$\begin{aligned} -ieq^\mu \Gamma_{\mu_1}^{(2)} &= -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k}} (-ie) [\Sigma^{(1)}(p - k) - \Sigma^{(1)}(p' - k)] \\ &\quad \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \gamma^\alpha \frac{1}{k^2}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

A parte finita da auto-energia do elétron a um loop é calculada no apêndice 2 e é dada por:

$$\Sigma^{(1)}(p) = -ie^2 b \not{p} \left\{ \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2 \right\}, \quad (5.17)$$

e, quando substituída na última expressão para a função de vértice, após algumas manipulações, nos fornece:

$$\begin{aligned} -ieq^\mu \Gamma_{\mu_1}^{(2)} &= 2ie^5 b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{p}' - \not{k}}{(p' - k)^2 k^2} \left[\ln \left(-\frac{(p' - k)^2}{\lambda^2} \right) - 2 \right] - \\ &\quad - 2ie^5 b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} - \not{k}}{(p - k)^2 k^2} \left[\ln \left(-\frac{(p - k)^2}{\lambda^2} \right) - 2 \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

As duas parcelas são escritas em termos de integrais ainda não calculadas. Mostraremos, entretanto, que essas duas contribuições são canceladas por contribuições vindas dos diagramas (5.2-d) e (5.2-e), e assim, seu resultado não precisa ser conhecido para fins de verificação da identidade de Ward. Na correção radiativa dada pela figura (5.2-b) o subdiagrama é uma correção para o propagador do fóton a um loop, já calculado no apêndice 2. A amplitude de probabilidade do gráfico é dada por

$$\begin{aligned} -ie\Gamma_{\mu_4}^{(2)} &= (-ie)^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \frac{i}{\not{p}' - \not{k}} \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k}} \gamma_\sigma \frac{-ig^{\alpha\sigma}}{k^2} \\ &\quad \left[(-ie)^2 (-1) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\alpha \frac{i}{\not{l}} \gamma_\beta \frac{i}{\not{l} - \not{k}} \right\} \right] \frac{-ig^{\beta\rho}}{k^2}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

em que notamos, no termo entre colchetes, a expressão para a correção para o propagador do fóton em primeira ordem. Removendo as subdivergências com o auxílio do contratermo correspondente, e usando o resultado do apêndice 2 para o tensor de polarização do vácuo em primeira ordem (para a QED

espinorial), temos

$$\begin{aligned}
-i e \Gamma_{\mu_4}^{(2)} &= i e^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\beta \frac{1}{\not{p}' - \not{k}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \gamma^\alpha \frac{1}{k^2} \\
&\quad \left\{ -\frac{4}{3} e^2 b [k_\alpha k_\beta - k^2 g_{\alpha\beta}] \left[\ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{3} \right] \right\} \frac{1}{k^2}. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Contraímos tal amplitude com o momento do fóton emitido, q^μ , e em seguida aplicamos a identidade

$$\not{q} = \not{p} - \not{p}' = [\not{p} - \not{k}] - [\not{p}' - \not{k}].$$

O uso de propriedades operatórias das matrizes γ^μ e algumas simplificações nos permitem escrever

$$\begin{aligned}
-i e q^\mu \Gamma_{\mu_4}^{(2)} &= -4 i e^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{p}' - \not{k})\not{k}}{k^4(p' - k)^2} \frac{b}{3} \left[\ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{3} \right] \\
&\quad + 4 i e^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{p} - \not{k})\not{k}}{k^4(p - k)^2} \frac{b}{3} \left[\ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{3} \right] \\
&\quad - 4 i e^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2(\not{p}' - \not{k})}{k^2(p' - k)^2} \frac{b}{3} \left[\ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{3} \right] \\
&\quad + 4 i e^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2(\not{p} - \not{k})}{k^2(p - k)^2} \frac{b}{3} \left[\ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{3} \right], \quad (5.21)
\end{aligned}$$

em que as duas primeiras parcelas são dadas por integrais que não conhecemos o resultado. Assim como antes, visto que não estamos interessados no valor da amplitude, mas sim na satisfação da identidade de Ward, o cálculo de tais integrais não é necessário, pois termos idênticos surgirão nas contribuições para a auto-energia a dois loops. Escrevendo a última equação em termos de integrais básicas, podemos finalmente escrever

$$\begin{aligned}
-i e q^\mu \Gamma_{\mu_4}^{(2)} &= -4 i e^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{p}' - \not{k})\not{k}}{k^4(p' - k)^2} \frac{b}{3} \left[\ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{3} \right] \\
&\quad + 4 i e^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{p} - \not{k})\not{k}}{k^4(p - k)^2} \frac{b}{3} \left[\ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{3} \right] \\
&\quad + \frac{8}{3} i e^5 b [\not{p} I^{(2)}(p^2) - \not{p}' I^{(2)}(p'^2)] - \frac{8}{3} i e^5 b [I_\mu^{(2)}(p^2) - I_\mu^{(2)}(p'^2)] \\
&\quad - \frac{28}{9} i e^5 b [\not{p} I(p^2) - \not{p}' I(p'^2)]. \quad (5.22)
\end{aligned}$$

Agora, consideremos os diagramas da figura (5.2-d) e (5.2-e), onde os subdiagramas são auto-energias fermiônicas na primeira ordem em loops. A estratégia usada para escrever os dois diagramas em termos de integrais básicas é similar à anterior. Faremos explicitamente o procedimento para o segundo diagrama e então para o terceiro diagrama apenas apresentaremos o resultado. Eliminamos as subdivergências com o uso dos contratermos correspondentes e usamos o resultado para a parte finita do subdiagrama obtido no apêndice 2. Para o diagrama (5.2-d), a correção de vértice é dada por

$$\begin{aligned}
-i e \Gamma_{\mu_3}^{(2)} &= (-i e)^3 (i)^3 (-i) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \frac{1}{\not{p}' - \not{k}} \gamma_\mu [-i \Sigma^{(1)}(p - k)] \\
&\quad \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \gamma_\sigma \frac{g^{(\sigma\rho)}}{k^2} \\
&= (-i e^3) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\rho \frac{1}{\not{p}' - \not{k}} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \\
&\quad \left[-e^2 b (\not{p} - \not{k}) \left(\ln \left(-\frac{(p - k)^2}{\lambda^2} \right) - 2 \right) \right] \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \gamma_\rho \frac{1}{k^2} \quad (5.23)
\end{aligned}$$

Como feito na prova diagramática das Identidades de Ward, algumas simplificações podem ser efetuadas se contraírmos tal amplitude com o momento externo do fóton, q^μ , e fizermos uso da identidade

$$\not{q} = \not{p} - \not{p}' = (\not{p} - \not{k}) - (\not{p}' - \not{k}) \quad (5.24)$$

Teremos então:

$$\begin{aligned}
-i e q^\mu \Gamma_{\mu_3}^{(2)} &= i e^5 b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\rho \frac{1}{\not{p}' - \not{k}} [(\not{p} - \not{k}) - (\not{p}' - \not{k})] \\
&\quad \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \gamma_\rho \frac{1}{k^2} \left\{ \ln \left(-\frac{(p - k)^2}{\lambda^2} \right) - 2 \right\} \quad , \quad (5.25)
\end{aligned}$$

e assim, após algumas simplificações e o uso da identidade

$$\gamma^\rho \not{p} \gamma_\rho = -2 \not{p},$$

sendo \not{p} um quadri-vetor qualquer, podemos escrever:

$$\begin{aligned} -ieq^\mu \Gamma_{\mu_3}^{(2)} &= ie^5 b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-2(\not{p}' - \not{k})}{(p' - k)^2 k^2} \left[\ln \left(-\frac{(p - k)^2}{\lambda^2} \right) - 2 \right] - \\ &- ie^5 b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-2(\not{p} - \not{k})}{(p - k)^2 k^2} \left[\ln \left(-\frac{(p - k)^2}{\lambda^2} \right) - 2 \right] . \end{aligned} \quad (5.26)$$

Seguindo os mesmos procedimentos, vamos obter para o outro diagrama

$$\begin{aligned} -ieq^\mu \Gamma_{\mu_2}^{(2)} &= -2ie^5 b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p}' - \not{k})}{(p' - k)^2 k^2} \left[\ln \left(-\frac{(p' - k)^2}{\lambda^2} \right) - 2 \right] - \\ &+ 2ie^5 b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p} - \not{k})}{(p - k)^2 k^2} \left[\ln \left(-\frac{(p' - k)^2}{\lambda^2} \right) - 2 \right] . \end{aligned} \quad (5.27)$$

Assim, ao somarmos as correções dadas pelos diagramas (5.2-a), (5.2-d) e (5.2-e), vemos que as parcelas da primeira contribuição são canceladas por parcelas da segunda e terceira contribuições, e isso justifica o porquê de não fazermos o cálculo explícito de tais integrais. Consideramos agora o diagrama da figura (5.2-b). Realizando a álgebra das matrizes γ_μ com o tensor métrico $g^{\mu\nu}$, poderemos escrever

$$\begin{aligned} -ie\Gamma_{\mu_5}^{(2)} &= ie^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma^\rho \frac{1}{\not{p}' - \not{l}} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - \not{l}} \\ &\quad \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{l}} \gamma_\rho \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \gamma_\alpha \frac{1}{k^2} \frac{1}{l^2} . \end{aligned} \quad (5.28)$$

Fazendo a contração com o momento do fóton emitido e usando a identidade

$$\not{q} = \not{p} - \not{p}' = (\not{p} - \not{k} - \not{l}) - (\not{p}' - \not{k} - \not{l}) .$$

Teremos

$$\begin{aligned} -ieq^\mu \Gamma_{\mu_5}^{(2)} &= ie^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma^\rho \frac{1}{\not{p}' - \not{l}} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - \not{l}} [(\not{p} - \not{k} - \not{l}) - (\not{p}' - \not{k} - \not{l})] \\ &\quad \gamma_\rho \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \gamma_\alpha \frac{1}{k^2} \frac{1}{l^2} \\ &= A + B. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Para manipular o integrando da parcela A, racionalizamos os denominadores

e usamos a identidade

$$\gamma^\mu \not{k} \gamma_\mu = -2\not{k} \quad .$$

Além disso, a fim de evitarmos termos denominadores que dependam de três momentos lineares, realizamos o seguinte deslocamento no momento de integração, l :

$$l \Rightarrow l + p' \quad .$$

Se realizarmos a contagem superficial de potências para cada momento de integração, veremos que tal shift é permitido, pois a integral é logaritmicamente divergente. Assim, não há preocupação com o aparecimento de termos de superfície. Se N é o numerador do integrando, pode ser escrito como

$$N = -2(\not{k} + \not{l})\gamma^\alpha \not{l}(\not{p} - \not{k})\gamma_\alpha = -8(\not{k} + \not{l})l \cdot (p - k),$$

e o denominador é dado por

$$\begin{aligned} D &= (p - l)^2(p' - k - l)^2(p - k)^2 l^2 k^2 \quad l \rightarrow l + p' \\ &= l^2(k + l)^2(p - k)^2(l + p')^2 k^2, \end{aligned}$$

e então poderemos escrever

$$A = ie^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-8(\not{k} + \not{l})l \cdot (p - k)}{l^2(k + l)^2(p - k)^2(l + p')^2 k^2} \quad . \quad (5.30)$$

A parcela designada por B pode ser obtida de forma similar, com o shift no momento de integração sendo

$$k \Rightarrow k + p$$

. O numerador será dado por

$$\begin{aligned} N &= \gamma^\rho(\not{p}' - l)\gamma^\alpha(\not{k} + \not{l})\gamma_\rho \not{k} \gamma_\alpha \\ &= -2(\not{k} + \not{l})\gamma^\alpha(\not{p}' - \not{l})\not{k} \gamma_\alpha \\ &= -8(\not{k} + \not{l})k \cdot (p' - l), \end{aligned} \quad (5.31)$$

enquanto o denominador será dado por

$$D = (p' - l)^2(k + l)^2(p + k)^2 l^2 k^2 \quad .$$

Desta forma, teremos

$$\begin{aligned} -ieq^\mu \Gamma_{\mu_5}^{(2)} &= ie^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-8(\not{k} + \not{l})l \cdot (p - k)}{l^2(k+l)^2(p-k)^2(l+p')^2k^2} \\ &\quad + ie^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{8(\not{k} + \not{l})l \cdot (p' - k)}{l^2(k+l)^2(p+k)^2(p'-l)^2k^2} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Na primeira parcela, fazemos a mudança de variáveis global $l \leftrightarrow k$ e na segunda parcela, fazemos a troca $k \leftrightarrow l$. Isso nos permite escrever

$$\begin{aligned} -ieq^\mu \Gamma_{\mu_5}^{(2)} &= ie^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-8(\not{k} + \not{l})k \cdot (p - l)}{l^2(k+l)^2(p-l)^2(k+p')^2k^2} \\ &\quad + ie^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{8(\not{k} + \not{l})k \cdot (p' - l)}{l^2(k+l)^2(p+k)^2(p'+l)^2k^2}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Finalmente, as duas últimas contribuições, dadas pelos diagramas (5.2-f) e (5.2-g), com seus respectivos contratermos. O tratamento para ambos é completamente similar. O resultado para a sexta contribuição para a identidade de Ward é dado por

$$\begin{aligned} -ieq^\mu \Gamma_{\mu_6}^{(2)} &= -8ie^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + \not{l})l \cdot (p' - k)}{l^2(k+l)^2(p+k)^2(p'+l)^2k^2} \\ &\quad + 8ie^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + \not{l})l \cdot (p - k)}{l^2(k+l)^2(p-k)^2(p'+l)^2k^2}, \end{aligned}$$

enquanto para o sétimo diagrama, o resultado é dado por

$$\begin{aligned} -ieq^\mu \Gamma_{\mu_7}^{(2)} &= -8ie^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + \not{l})l \cdot (p' - k)}{l^2(k+l)^2(p+l)^2(p'-k)^2k^2} \\ &\quad + 8ie^5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + \not{l})l \cdot (p - k)}{l^2(k+l)^2(p+l)^2(p-k)^2k^2}. \end{aligned}$$

O que podemos observar é que a segunda parcela da contribuição ($-ieq^\mu \mu \Gamma_{\mu_6}^{(2)}$) e a primeira parcela da contribuição ($-ieq^\mu \mu \Gamma_{\mu_7}^{(2)}$), quando somadas, cancelam por completo a contribuição $-ieq^\mu \mu \Gamma_{\mu_5}^{(2)}$. Somando então as três amplitudes,

teremos como resultado

$$\begin{aligned}
& -ieq^\mu (\Gamma_{\mu_5}^{(2)} + \Gamma_{\mu_6}^{(2)} + \Gamma_{\mu_7}^{(2)}) = \\
& -8ie^5 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + \not{l})l \cdot (p' - k)}{l^2(k+l)^2(p' - k)^2(p' + l)^2k^2} \\
& + 8ie^5 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + \not{l})l \cdot (p - k)}{l^2(k+l)^2(p - k)^2(p + l)^2k^2}.
\end{aligned}$$

Podemos então observar que a soma dos três diagramas é função de duas integrais que são absolutamente iguais, excetuando-se que a primeira é função de p' e a segunda é função de p .

Agora devemos somar todas as contribuições para a função de vértice a dois loops, contraída com o momento do fóton emitido pelo férmion. Podemos escrever que

$$q^\mu \Gamma_{\mu_{total}} = q^\mu \Gamma_{\mu_1} + q^\mu \Gamma_{\mu_2} + q^\mu \Gamma_{\mu_3} + q^\mu \Gamma_{\mu_4} + q^\mu \Gamma_{\mu_5} + q^\mu \Gamma_{\mu_6} + q^\mu \Gamma_{\mu_7} \quad .$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
& q^\mu \Gamma_{\mu_{total}}(p, p') = \\
& -4e^4 b \gamma^\mu \left[I_\mu^{(2)}(p^2) - I_\mu^{(2)}(p'^2) + p'_\mu I^{(2)}(p'^2) - p_\mu I^{(2)}(p^2) \right] - \\
& -\frac{4}{3} e^4 b \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{p} - \not{k})\not{k}}{k^4(p - k)^2} \left[\ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{3} \right] \\
& +\frac{4}{3} e^4 b \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}(\not{p}' - \not{k})\not{k}}{k^4(p' - k)^2} \left[\ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{3} \right] - \\
& -\frac{8}{3} \left\{ p_\mu I^{(2)}(p^2) - p'_\mu I^{(2)}(p'^2) \right\} + \frac{8}{3} \left\{ I_\mu^{(2)}(p^2) - I_\mu^{(2)}(p'^2) \right\} + \\
& +\frac{28}{9} e^4 b \gamma^\mu \left\{ p_\mu I(p^2) - p'_\mu I(p'^2) \right\} \quad , \tag{5.34}
\end{aligned}$$

proporcionando portanto o mesmo resultado que a diferença de auto-energias a dois loops satisfaz a identidade de Ward entre a função de vértice e a autoenergia. O cálculo que acabamos de apresentar com a contração do momento do fóton externo com o vértice elétron-fóton segue a tradicional prova diagramática das Identidades de Ward e da invariância de calibre, como vimos no capítulo 2, e assim, não é surpreendente que tenhamos atingido o resultado esperado. Entretanto, é importante destacar uma característica

da Regularização Implícita: o método foi desenvolvido de forma a conter todas as características que são necessárias a fim de preservar a invariância de calibre e simetrias que são sensíveis à dimensão da teoria. A possibilidade de fazermos shifts nos momentos de integração é implementada com todo cuidado em relação ao aparecimento de eventuais termos de superfície, e sua posterior eliminação. A manutenção da dimensão específica da teoria e o fato de que o integrando não é modificado garante a preservação da álgebra vetorial (álgebra de Clifford). Desta forma, a Regularização Implícita pode ser implementada até mesmo por meio de um simples *cutoff*, já que todas as suas indesejáveis características estão sob controle.

5.4 O tensor de polarização do vácuo

Seguindo a proposta desenvolvida para a eletrodinâmica quântica escalar no capítulo anterior, vamos verificar a transversalidade do tensor de polarização do vácuo em ordem dois loops. Para uma teoria sem massa, as contribuições radiativas não nulas são

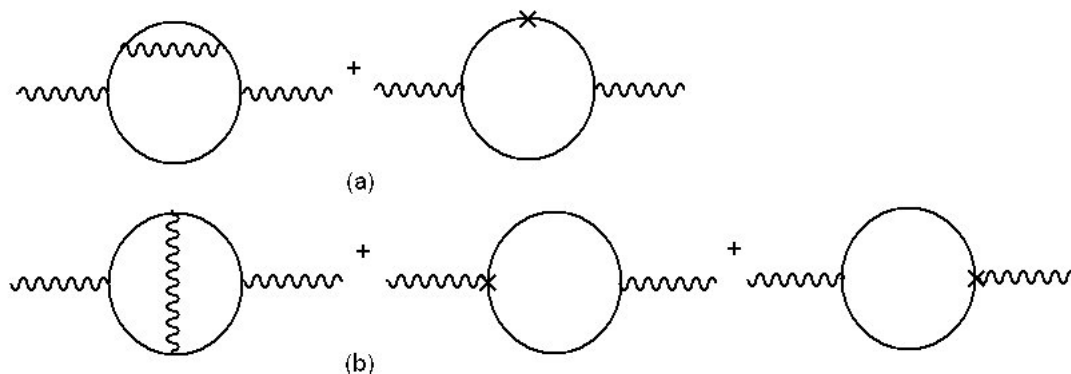


Figura 5.3: contribuições radiativas para o tensor de polarização do vácuo na QED espinorial

Começamos pelo gráfico aninhado da figura (5.4-a) Após aplicarmos as regras de Feynman, listadas no capítulo 2, e realizarmos a álgebra das matrizes γ obtemos a seguinte amplitude

$$(5.35)$$

O subgráfico aninhado é a auto-energia do elétron a um loop, cujo resultado é calculado no apêndice 2 e dado por

$$\Sigma^{(1)}(k) = -e^2 \not{k} \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right\} . \quad (5.36)$$

Aplicadas as Regras de Feynman no primeiro diagrama da figura (5.4-a) e identificando a divergência aninhada como a autoenergia do férmion a um loop, temos:

$$\Pi_{\mu\nu a}^{(2)} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ie^4 \text{tr} \{ \not{k} \Sigma(\not{k}) \not{k} \gamma_\mu (\not{k} - \not{p}) \gamma_\nu \}}{k^4 (k-p)^2} \quad (5.37)$$

em que

$$\begin{aligned} \Sigma &= \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\lambda \not{l} \gamma_\lambda}{l^2 (l-k)^2} \\ &= -2\gamma^\alpha I_\alpha = -\not{k} \left(I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right) . \end{aligned} \quad (5.38)$$

é o resultado para a autoenergia do férmion, a menos de fatores de vértice, já incluídos no diagrama completo. Eliminando as subdivergências do subgráfico, podemos escrever

$$\Pi_{\mu\nu a}^{(2)} = ie^4 b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\left[-\ln \left(\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + 2 \right] \text{tr} \{ \underbrace{k^2 \not{k} \gamma_\mu (\not{k} - \not{p}) \gamma_\nu}_{\text{tr} \{ k^2 \not{k} \gamma_\mu (\not{k} - \not{p}) \gamma_\nu \}} \}}{k^4 (k-p)^2} \quad (5.39)$$

O traço dentro do integrando é avaliado de maneira usual, e seu resultado é dado por

$$4k^2 \left[2k_\mu k_\nu - 2p_\nu k_\mu - \frac{1}{2}(k^2 + (p-k)^2 - p^2) g_{\mu\nu} \right]$$

em que o truque usual para eliminação de produtos escalares do tipo $k \cdot p$ em favor de termos quadráticos nos momentos foi usado. Se substituirmos o resultado do traço no numerador de 5.39, teremos:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu a}^{(2)} &= 4ie^4 b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 \left[2k_\mu k_\nu - 2p_\nu k_\mu - \frac{1}{2}(k^2 + (p-k)^2 - p^2) g_{\mu\nu} \right]}{k^4 (k-p)^2} \\ &\quad \left[2 - \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.40)$$

e que em termos de integrais básicas, é dada por

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu a}^{(2)} &= 4ie^4 b \left\{ 4I_{\mu\nu} - 4p_\nu I_\mu + p^2 g_{\mu\nu} I - 2I_{\mu\nu}^{(2)} \right. \\ &\quad \left. + 2p_\nu I_\mu^{(2)} + \frac{g_{\mu\nu}}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} - \frac{p^2 g_{\mu\nu}}{2} I^{(2)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.41)$$

que nos permite escrever

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu a}^{(2)} &= 4ie^4 b \left\{ 4I_{\mu\nu} - 4p_\nu I_\mu + p^2 g_{\mu\nu} I - 2I_{\mu\nu}^{(2)} \right. \\ &\quad \left. + 2p_\nu I_\mu^{(2)} + \frac{g_{\mu\nu}}{4} p^2 \left(I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 3b \right) - \frac{p^2 g_{\mu\nu}}{2} I^{(2)} \right\} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Usando os resultados para as integrais básicas de um e dois loops, e já eliminados os termos de superfície característicos, teremos: de dois loops, temos

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu a}^{(2)} &= \frac{4}{3} ie^4 b \left\{ p_\mu p_\nu \left[I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{13}{6} I_{\log}(\lambda^2) - \frac{5}{2} b \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{25}{6} b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{17}{6} b \right] + g_{\mu\nu} p^2 \left[-I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{8}{3} I_{\log}(\lambda^2) + \frac{1}{2} b \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{10}{3} b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 6b \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

A segunda contribuição é dada pelo diagrama da figura (5.4-b) e possui subdiagramas overlapados, que são correções a um loop para a função de vértice. Assim, precisamos calcular separadamente os subdiagramas da figura (5.4-b) Após aplicarmos as regras de Feynman ao diagrama e a seus contratermos, usamos o procedimento de regularização implícita para separarmos as divergências típicas da ordem. Termos de superfície são eliminados com o auxílio de contratermos restauradores de simetria no nível do lagrangeano. Após removermos os termos de superfície, potenciais violadores da simetria

de calibre, temos

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{8}{3}ie^4 \{p_\mu p_\nu [-4bI_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{3}{2}I_{log}^2(\lambda^2) + \frac{22}{3}bI_{log}(\lambda^2) + \frac{5}{2}b^2 \ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \\
 & \frac{17}{3}b^2 \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{4}{3}b^2 - p^2 I^O] \\
 & + g_{\mu\nu} p^2 [4bI_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{3}{2}I_{log}^2(\lambda^2) - \frac{47}{6}bI_{log}(\lambda^2) - \frac{1}{2}b^2 \ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + \\
 & \frac{29}{6}b^2 \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{15}{2}b^2 + p^2 I^O]\}, \tag{5.44}
 \end{aligned}$$

em que I^O é uma integral característica de diagramas overlapados, cujo resultado é apresentado no apêndice específico para o cálculo dos diagramas overlapados. De posse das duas contribuições diagramáticas, somamos os resultados de (5.43) e (5.44), obtendo:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{8}{3}ie^4 b(p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}) p^2 \left\{ \frac{3}{2}I_{log}^2(\lambda^2) - 3bI_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{31}{6}bI_{log}(\lambda^2) - \right. \\
 & \left. - \frac{3}{2}b \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + \frac{3}{2}b - p^2 I^O \right\}, \tag{5.45}
 \end{aligned}$$

5.5 Cálculo da função beta do grupo de renormalização a dois loops

A função beta do grupo de renormalização mostra como a constante de acoplamento de uma teoria de campos varia com a escala de energia. Até a ordem de dois loops, ela é um parâmetro universal, e portanto independente do esquema de regularização empregado. Desta forma, o cálculo da função β a dois loops será um bom teste para o procedimento de Regularização Implícita, sendo um bom teste para a definição de contratermos em termos de nossas divergências básicas.

Para a eletrodinâmica quântica, a função beta é obtida através do contratermo necessário à renormalização do tensor de polarização do vácuo, que aqui designaremos por Z_3 (54). Z_3 é o contratermo para a carga "nua" do elétron, a carga que a partícula possuiria se estivesse isolada, no vácuo, sem interagir com outras partículas. Das identidades de Ward, é possível mostrar

que tal contratermo será igual ao contratermo para a renormalização do campo do fóton. O cálculo de correções radiativas para o propagador do fóton nos fornece correções de ordem superior para o respectivo contratermo. Inicialmente, vamos apresentar o cálculo do contratermo necessário à renormalização do tensor de polarização do vácuo a um loop, cujo diagrama é exibido a seguir

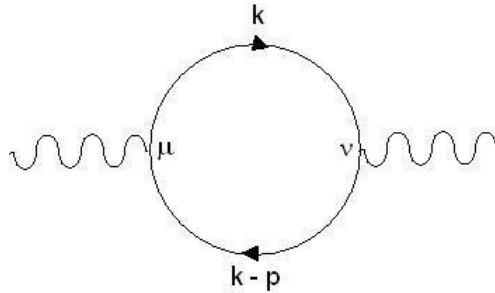


Figura 5.4: diagrama de Feynman para o tensor de polarização a um loop

Como visto no apêndice 1, tal diagrama possui divergências quadráticas e logarítmicas. As primeiras são eliminadas por serem proporcionais à massa das partículas da teoria, conforme discutido no capítulo 4. Desta forma, divergências quadráticas são automaticamente eliminadas. A divergência do tensor de polarização do vácuo para a QED espinorial é, então, dada por

$$-i\Pi_{\mu\nu_{div}} = \frac{4}{3} \{ -p_\mu p_\nu + p^2 g_{\mu\nu} \} I_{log}(\lambda^2) \quad . \quad (5.46)$$

Desta forma, o contratermo necessário para subtrair a divergência do tensor de polarização do vácuo, dentro do esquema de subtração mínima, é dado por

$$\Pi_{\mu\nu_{ct}} = \frac{4}{3} i e^2 I_{log}(\lambda^2) \quad , \quad (5.47)$$

o que modifica Z_3 para

$$Z_3 = 1 + \frac{4}{3} i e^2 I_{log}(\lambda^2) \quad . \quad (5.48)$$

A parcela divergente para o tensor de polarização do vácuo para segunda ordem em loops é dada por (detalhes no apêndice 5)

$$\frac{8}{3}e^4 \left\{ \frac{3}{2}I_{log}^2(\lambda^2) - 3bI_{log(\lambda^2)}^{(2)} + \frac{31}{6}bI_{log}(\lambda^2) \right\} .$$

E o contratermo para a carga do férmion é corrigido para

$$Z_3 = 1 + \frac{4}{3}ie^2I_{log}(\lambda^2) - \frac{8}{3}e^4 \left\{ \frac{3}{2}I_{log}^2(\lambda^2) - 3bI_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{31}{6}bI_{log}(\lambda^2) \right\} . \quad (5.49)$$

Tal carga, que seria infinita, se relaciona com a carga física do elétron por meio da seguinte relação (54), (29):

$$e_B = eZ_3^{-\frac{1}{2}} .$$

Se elevarmos os dois membros ao quadrado e em seguida dividirmos os dois lados por 4π , podemos reescrever a última relação como

$$\alpha_B = Z_3^{-1}\alpha , \quad (5.50)$$

em que α é a constante de estrutura fina da QED, parâmetro que desempenha o papel de constante de acoplamento na teoria. Z_3^{-1} pode agora ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} Z_3^{-1} &= \frac{1}{1+x} \\ &= 1 - \frac{4}{3}ie^2I_{log}(\lambda^2) - \frac{16}{9}e^4I_{log}^2(\lambda^2) + \frac{8}{3}e^4 \left\{ \frac{3}{2}I_{log}^2(\lambda^2) - 3bI_{log(\lambda^2)}^{(2)} + \frac{31}{6}bI_{log}(\lambda^2) \right\} \\ &= 1 - \frac{4}{3}ie^2I_{log}(\lambda^2) + \frac{8}{3} \left\{ \frac{5}{6}I_{log}^2(\lambda^2) - 3bI_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{9}{2}I_{log}(\lambda^2) \right\} , \end{aligned} \quad (5.51)$$

em que usamos (e assumimos que seja válida) uma expansão em série geométrica para a equação que define Z_3 . Escrevendo a expressão para o contratermo em função da constante de acoplamento, ao invés de escrevê-la em termos da carga física, teremos, após multiplicarmos e dividirmos a última

equação por 4π :

$$\begin{aligned} Z_3^{-1} &= 1 - \frac{16\pi}{3}i\alpha I_{log}(\lambda^2) + \frac{8}{3}(4\pi)^2\alpha^2 \left(\frac{5}{6}I_{log}^2(\lambda^2) - 3bI_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{9}{2}bI_{log}(\lambda^2) \right) \\ &= 1 - c_1\alpha + c_2\alpha^2 \dots \quad . \end{aligned} \quad (5.52)$$

A constante de acoplamento nua, α_B , não depende da escala de energia, λ^2 . Portanto, derivando a equação (5.50) em relação a λ^2 , o resultado deve ser identicamente nulo. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha_B}{\partial\lambda^2} &= 0 \\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda^2}Z_3^{-1} + \alpha\frac{\partial Z_3^{-1}}{\partial\lambda^2} \quad . \end{aligned} \quad (5.53)$$

Calculamos agora cada parcela, separadamente

$$\frac{\partial Z_3^{-1}}{\partial\lambda^2} = -\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda^2}c_1 - \frac{\partial c_1}{\partial\lambda^2}\alpha + +2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda^2}c_2 + \alpha^2\frac{\partial c_2}{\partial\lambda^2} \quad (5.54)$$

Multipliquemos a última expressão por

$$\frac{2\lambda^2\alpha}{\alpha} \quad \text{o que nos permite escrever}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda^2\alpha}{\alpha}\frac{\partial Z_3^{-1}}{\partial\lambda^2} &= -\alpha\frac{2\lambda^2}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda^2}c_1 + -\frac{2\lambda^2\alpha}{\alpha}\frac{\partial c_1}{\partial\lambda^2}\alpha + 2\alpha c_2\frac{2\lambda^2\alpha}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda^2} \\ &\quad + \frac{2\lambda^2\alpha}{\alpha}\alpha^2\frac{\partial c_2}{\partial\lambda^2} \\ &= -\alpha\beta c_1 - 2\lambda^2\frac{\partial c_1}{\partial\lambda^2} + 2c_2\alpha^2\beta + 2\lambda^2\alpha^2\frac{\partial c_2}{\partial\lambda^2} \\ &= \beta(-\alpha c_1 + 2c_2\alpha^2) - 2\lambda^2\alpha\frac{\partial c_1}{\partial\lambda^2} + 2\lambda^2\alpha^2\frac{\partial c_2}{\partial\lambda^2} \end{aligned} \quad (5.55)$$

Juntamente com a equação diferencial (5.54), temos

$$0 = \beta[1 - 2\alpha c_1 + 3c_2\alpha^2] - 2\lambda^2\alpha\frac{\partial c_1}{\partial\lambda^2} + 2\lambda^2\alpha^2\frac{\partial c_2}{\partial\lambda^2} \quad (5.56)$$

e então

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{[1 - 2\alpha c_1 + 3\alpha^2 c^2]} \left(2\lambda^2 \alpha \frac{\partial c_1}{\partial \lambda^2} - 2\lambda^2 \alpha^2 \frac{\partial c_2}{\partial \lambda^2} \right) \\ &= 2\lambda^2 \alpha \frac{\partial c_1}{\partial \lambda^2} - 2\lambda^2 \alpha^2 \frac{\partial c_2}{\partial \lambda^2} + 4\alpha^2 \lambda^2 c_1 \frac{\partial c_1}{\partial \lambda^2} \quad , \end{aligned} \quad (5.57)$$

em que no último passo utilizamos a aproximação binomial

$$\frac{1}{1-x} \cong 1+x \quad ,$$

e na sequência desprezamos termos de ordem $O(\alpha^3)$, já que nesta ordem outros diagramas devem ser levados em conta. Podemos então escrever

$$\beta = 2\lambda^2 \alpha \frac{\partial c_1}{\partial \lambda^2} - 2\lambda^2 \alpha^2 \left[\frac{\partial c_2}{\partial \lambda^2} - 2c_1 \frac{\partial c_1}{\partial \lambda^2} \right] \quad . \quad (5.58)$$

Substituindo a expressão para c_1 e derivando em relação a λ^2 temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_1}{\partial \lambda^2} &= \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \left[-\frac{16}{3\pi i I_{log}(\lambda^2)} \right] \\ &= -\frac{16}{3} \pi i \frac{b}{\lambda^2} = -\frac{16}{3} \pi i \frac{i}{(4\pi)^2 \lambda^2} \\ &= \frac{1}{3\pi \lambda^2} \quad . \end{aligned} \quad (5.59)$$

Apresentamos em seguida o resultado da segunda parcela da expressão para a função beta (detalhes se encontram em um dos apêndices)

$$\frac{\partial c_2}{\partial \lambda^2} = \frac{8}{3} 16\pi^2 \left\{ \frac{i}{12\pi^2 \lambda^2} I_{log}(\lambda^2) + \frac{3}{2\pi^4 \lambda^2 (16)^2} \right\}$$

que nos conduz a

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_2}{\partial \lambda^2} - 2c_1 \frac{\partial c_1}{\partial \lambda^2} &= \frac{8}{3} 16\pi^2 \left\{ \frac{i}{12\pi^2 \lambda^2} I_{log}(\lambda^2) + \frac{3}{2\pi^4 \lambda^2 (16)^2} \right\} - \frac{32i}{9\lambda^2} I_{log}(\lambda^2) \\ &= \frac{1}{4\pi \lambda^2} \quad . \end{aligned} \quad (5.60)$$

A dois loops, já vimos que a função β da eletrodinâmica quântica é dada pela equação (5.58). Portanto, substituindo os dois últimos resultados em (5.58)

teremos

$$\begin{aligned}\beta &= 2\lambda^2\alpha\frac{1}{3\pi\lambda^2} + \frac{2\alpha^2}{4\pi^2} \\ &= \frac{2\alpha}{3\pi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2, \end{aligned} \tag{5.61}$$

que é o resultado correto para a função β a dois loops, confirmando que a função β é independente do esquema de regularização empregado até essa ordem da expansão perturbativa. O primeiro termo representa o valor para a função β a um loop, escrito em termos de α , que também é compatível com o resultado conhecido.

Extensão da Regularização Implícita para ordens arbitrárias em modelos não-massivos

“Don’t panic “

1

6.1 Introdução

Neste capítulo, inspirados nos resultados que obtivemos para o cálculo perturbativo a dois loops, propomos uma extensão do procedimento de Regularização Implícita para ordens arbitrárias na expansão em loops. Em particular, obtemos a relação de escala a n-loops, assim como exemplificamos uma solução para integrais básicas com índices de Lorentz a n-loops.

6.2 Obtenção da relação de escala a n-loops

Uma divergência básica logarítmica a n-loops em teorias sem massa pode ser escrita, usando um regulador tipo cut-off, como

$$I_{log}^{(n+1)} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \ln^n \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \quad (6.1)$$

¹Extraído de "O guia do mochileiro das galáxias"(The Hitchhiker's Guide to the Galaxy), de Douglas Adam.

e por meio de uma mudança de variáveis, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} I_{log}^{(n+1)} &= b \int d(k^2) \frac{k^2}{k^2 + m^2} \ln^n \left\{ \frac{k^2 + m^2}{\lambda^2} \right\} = \int_{m^2}^{\infty} dx \frac{x - m^2}{x^2} \ln^n \left(\frac{x}{\lambda^2} \right) \\ &= b \int_{m^2}^{\Lambda^2} \frac{dx}{x} \ln^n \left(\frac{x}{\lambda^2} \right) - m^2 b \int_{m^2}^{\Lambda^2} \frac{1}{x^2} \ln^n \left(\frac{x}{\lambda^2} \right) dx \quad . \end{aligned} \quad (6.2)$$

A relação de escala pode ser obtida a partir da seguinte diferença:

$$\begin{aligned} I_{log}^{(n+1)}(m^2) - I_{log}^{(n+1)}(\lambda^2) &= b \int_{m^2}^{\lambda^2} \frac{dx}{x} \ln^n \left(\frac{x}{\lambda^2} \right) - b m^2 \left\{ \frac{1}{m^2} n! \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right\} \\ &\quad + b \lambda^2 \left\{ \frac{1}{\lambda^2} n! \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2} \right) \right\} \\ &= b \left\{ -\frac{1}{n+1} \ln^{n+1} \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) - b n! \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right\} \\ &= -b \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n!}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

A um loop ($n = 0$), por exemplo, teremos:

$$I_{log}(m^2) = I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \quad (6.4)$$

E para dois loops ($n = 1$), temos:

$$I_{log}^{(2)}(m^2) = I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - b \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right\} \quad . \quad (6.5)$$

Como já discutido, a relação de escala é essencial para a aplicação do procedimento de Regularização Implícita em teorias não-massivas. É ela que introduz um parâmetro que funcionará como escala para o grupo de renormalização, e, principalmente, permite a eliminação da massa fictícia, através de um cancelamento entre termos provenientes da parte divergente com termos da parte finita.

6.3 Separação dos termos de superfície a n-loops e cálculo de uma integral com índice de Lorentz

Nesta seção, apresentamos o procedimento utilizado para separação e identificação dos termos de superfície de uma integral típica a n-loops e também exibimos uma generalização para o procedimento de solução de integrais multi-loop para teorias não-massivas. O exemplo apresentado contém os ingredientes mais importantes da Regularização Implícita, como a presença de termos de superfície e o uso explícito das relações de escala para a eliminação da massa fictícia, e portanto, é suficiente para uma compreensão geral do método de cálculo da parte finita de integrais de Feynman no contexto da RI.

Vimos ao longo dos primeiros capítulos do trabalho que os termos de superfície, potenciais violadores da simetria de calibre, são obtidos a partir de divergências básicas com índices de Lorentz. Um exemplo é a integral abaixo:

$$\theta_{\mu\nu}^{(n+1)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \ln^n \left(\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \quad . \quad (6.6)$$

Para eliminarmos o termo de superfície a n-loops escrito em termos de divergências básicas, usamos a mesma estratégia empregada no cálculo de um e dois loops.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial k^\nu} \left\{ \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \ln^n \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \right\} = \\ & \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \ln^n \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) - 4 \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \ln^n \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \\ & + \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \ln^n \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

A derivada do termo logarítmico é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \ln^n \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) &= n \ln^{n-1} \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \frac{-\lambda^2}{k^2 - m^2} \frac{2k_\nu}{-\lambda^2} \\ &= \frac{2n}{k^2 - m^2} \ln^{n-1} \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \end{aligned}$$

Usando os dois últimos resultados na equação C.57

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k^\nu} \left\{ \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \ln^n \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \right\} = \\
 & g_{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \ln^n \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) - 4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \ln^n \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \\
 & 2n \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \ln^{n-1} \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

Eliminando os termos de superfícies de todas as ordens anteriores, temos

$$\begin{aligned}
 \theta_{\mu\nu}^{(n+1)} &= \frac{1}{4} \left\{ g_{\mu\nu} I_{log}^{(n+1)}(\lambda^2) + 2n\theta_{\mu\nu}^{(n-1)} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ g_{\mu\nu} I_{log}^{(n+1)}(\lambda^2) + \frac{2n}{4} \left[g_{\mu\nu} I_{log}^{(n)}(\lambda^2) + n(n-1)\theta^{(n-1)\mu\nu} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ g_{\mu\nu} I_{log}^{(n+1)}(\lambda^2) + \frac{n}{2} g_{\mu\nu} I_{log}^{(n)}(\lambda^2) + \right. \\
 & \left. + \frac{n(n-1)}{4} \left(g_{\mu\nu} I_{log}^{(n-1)}(\lambda^2) + 2(n-2)\theta_{\mu\nu}^{(n-2)} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ g_{\mu\nu} I_{log}^{(n+1)}(\lambda^2) + \frac{n}{2} g_{\mu\nu} I_{log}^{(n)}(\lambda^2) \right. \\
 & \left. + \frac{n(n-1)}{4} g_{\mu\nu} I_{log}^{(n-1)}(\lambda^2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{8} g_{\mu\nu} I_{log}^{(n-2)}(\lambda^2) + \frac{n!}{2^n} g_{\mu\nu} I_{log}(\lambda^2) \right\} \\
 &= \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n-k}} I_{log}^{(k+1)}(m^2) \right\} \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

Obtemos então:

$$\theta_{\mu\nu}^{(n+1)} = \frac{g_{\mu\nu}}{4} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{1}{2^{n-k}} I_{log}^{(k+1)}(m^2) \quad (6.10)$$

As divergências logarítmicas a n-loops podem ser escritas através das relações de escala:

$$I_{log}^{(k+1)}(m^2) = I_{log}^{(k+1)}(\lambda^2) - b \sum_{i=1}^{k+1} \frac{k!}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \quad (6.11)$$

Se substituirmos a relação de escala na equação acima 6.11 em 6.10 e sepa-

rarmos a parte divergente, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\theta_{\mu\nu}^{(n+1)} &= Div - \frac{b}{4} \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^{k+1} \frac{n!}{k!} \frac{1}{2^{n-k}} \frac{k!}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \\ &= Div - \frac{b}{4} \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k \underbrace{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right)}\end{aligned}\quad (6.12)$$

onde *Div* indica contribuições divergentes para o termo de superfície. Vamos analisar o termo sublinhado separadamente. Designando-o por δ , temos

$$\begin{aligned}\delta &= 2^0 \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + 2^1 \left[\ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right] \\ &+ 2^2 \left[\ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{3!} \ln^3 \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right] \\ &+ \dots \\ &+ 2^n \left[\ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \ln^{n+1} \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right] \\ &= \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) [2^0 + 2^1 + \dots + 2^n] + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) [2^1 + \dots + 2^n] + \dots \\ &+ \dots + \frac{1}{(n+1)!} \ln^{n+1} \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) 2^n\end{aligned}\quad (6.13)$$

O i -ésimo termo da série é caracterizado pela seguinte soma:

$$\begin{aligned}2^{i-1} + 2^i + \dots + 2^n &= 2^{i-1} [1 + 2 + \dots + 2^{n-i+1}] \\ &= 2^{i-1} S_{n-i+1} \\ &= 2^{i-1} [2^{n-i+1} 2 - 1] \\ &= 2^{n+1} - 2^{i-1}\end{aligned}\quad (6.14)$$

em que, na segunda linha, notamos a soma dos n termos de um progressão geométrica, de razão 2, cuja expressão geral é dada por

$$S_n = \frac{a_n r - a_0}{r - 1}$$

em que a_n é o termo de ordem n da série, a_0 é o primeiro termo da série e r

a razão da progressão geométrica. Assim, podemos escrever

$$\theta_{\mu\nu}^{(n+1)}(\lambda^2) = Div - \frac{b}{4} g_{\mu\nu} \sum_{i=1}^{n+1} (2 - 2^{i-n-1}) \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) . \quad (6.15)$$

6.3.1 Solução de uma integral com índices de Lorentz

Com os resultados anteriores, vamos resolver uma integral típica com índice de Lorentz

$$I_{\alpha}^{(n+1)} = p^{\alpha} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\alpha}}{k^2(k-p)^2} \ln^n \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \quad (6.16)$$

e separando a parte divergente e os termos de superfície da parte finita, teremos

$$I_{\alpha}^{(n+1)} = 2p^{\mu} \theta_{\mu\alpha}^{(n+1)} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\alpha} (2p \cdot k - p^2)^2}{k^6 (p-k)^2} \ln^n \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \quad (6.17)$$

Com a identidade que usamos para tratar o termo logarítmico,

$$\ln a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{a^{\epsilon} - 1}{\epsilon} ,$$

a parte finita, que passamos a designar por $\tilde{I}_{\alpha}^{(n+1)}$ poderá ser escrita como

$$\tilde{I}_{\alpha}^{(n+1)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} I_{\alpha}^{(k)} \quad (6.18)$$

e fazendo uso da massa fictícia, $I_{\alpha}^{(k)}$ é dada por:

$$\begin{aligned} I_{\alpha}^{(k)} &= \frac{1}{(-\lambda^2)^{k\epsilon}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\alpha} (p^2 - 2p \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^{3-k\epsilon} [(p-k)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{(-\lambda^2)^{k\epsilon}} (A + B + C) . \end{aligned} \quad (6.19)$$

A, B e C, após fazermos a parametrização de Feynman e realizarmos algumas

integrações por partes, para m^2 pequeno, podem ser reescritos como:

$$A = \frac{b}{2 - k\epsilon} \frac{(-m^2)^{k\epsilon}}{(k\epsilon - 1)} p_\alpha \left\{ \frac{1}{k\epsilon} + \int_0^1 dx \left[2(1-x) - \frac{2 - k\epsilon}{k\epsilon} (1-x) + (2 - k\epsilon)(1 - 2x) \right] \left(-\frac{p^2 x}{m^2} \right)^{k\epsilon} \right\}, \quad (6.20)$$

$$B = \frac{b}{(2 - k\epsilon)} \frac{2(-m^2)^{k\epsilon}}{(1 - k\epsilon)} p_\alpha \int_0^1 dx (1-x) \left(-\frac{p^2 x}{m^2} \right)^{k\epsilon} \quad e \quad (6.21)$$

$$C = \frac{b}{2 - k\epsilon} \frac{-2(-m^2)^{k\epsilon}}{k\epsilon(1 - k\epsilon)} p_\alpha \left\{ -1 + (2 - k\epsilon) \int_0^1 dx (1-x) \left(-\frac{p^2 x}{m^2} \right)^{k\epsilon} \right\}. \quad (6.22)$$

Somando A, B e C, temos

$$A + B + C = \frac{b}{2 - k\epsilon} \frac{(-m^2)^{k\epsilon}}{(k\epsilon - 1)} p_\alpha \left\{ -\frac{1}{k\epsilon} + \int_0^1 dx \left[\frac{(2 - k\epsilon)}{k\epsilon} (1-x) + (2 - k\epsilon)(1 - 2x) \right] \left(-\frac{p^2 x}{m^2} \right)^{k\epsilon} \right\} \quad (6.23)$$

e então podemos escrever

$$\begin{aligned} I_\alpha^{(k)} &= -b \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right)^{k\epsilon} p_\alpha \left\{ -\frac{1}{k\epsilon(2 - k\epsilon)} + \int_0^1 dx \left\{ \frac{1}{k\epsilon} (1-x) + (1 - 2x) \right\} \left(-\frac{p^2 x}{\lambda^2} \right)^{k\epsilon} \right\} \\ &= \underbrace{-b \left[-\frac{1}{1 - k\epsilon} \right] p_\alpha \left\{ -\frac{1}{k\epsilon(2 - k\epsilon)} \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right)^{k\epsilon} + \int_0^1 dx \left[\frac{(1-x)}{k\epsilon} + (1 - 2x) \right] \left(-\frac{p^2 x}{\lambda^2} \right)^{k\epsilon} \right\}}_{(6.24)} \end{aligned}$$

Consideremos primeiramente a parcela sublinhada, que passamos a designar

por ξ . A segunda parcela será designada por ζ e tratada na sequência:

$$\xi = -b \frac{1}{2k\epsilon} \frac{1}{1-k\epsilon} \frac{1}{1-\frac{k\epsilon}{2}} \left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right)^{k\epsilon} p_\alpha \quad (6.25)$$

Com o limite de $\epsilon \rightarrow 0$, podemos tomar a expansão binomial e reescrever os termos dependentes de ϵ . Por exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-k\epsilon} &= 1 + k\epsilon + (k\epsilon)^2 + \dots \\ \frac{1}{1-\frac{k\epsilon}{2}} &= 1 + \frac{k\epsilon}{2} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \dots \end{aligned}$$

E então, identificamos todas as potências possíveis de $k\epsilon$, multiplicadas pelos respectivos coeficientes:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2k\epsilon} \frac{1}{1-k\epsilon} \frac{1}{1-\frac{k\epsilon}{2}} &= -\frac{1}{2k\epsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (k\epsilon)^i \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^j \\ &= -\frac{1}{2k\epsilon} \sum_{i,j} \frac{(k\epsilon)^{i+j}}{2^j} = -\sum_{i,j} \frac{(k\epsilon)^{i+j-1}}{2^j} \\ &= -\left\{ \frac{1}{2k\epsilon} + \frac{3}{2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) k\epsilon + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) (k\epsilon)^2 + \dots \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^i \right] (k\epsilon)^{i-1} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Realizamos agora a expansão do termo $\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right)^{k\epsilon}$, para $\epsilon \rightarrow 0$, o que nos permite escrever:

$$\begin{aligned} \xi &= -bp_\alpha \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^i \right] (k\epsilon)^{i-1} \\ &\quad \left[1 + k\epsilon \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \frac{1}{2}(k\epsilon)^2 \ln^2\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (6.27)$$

Para obter uma expressão geral para o coeficiente de $(k\epsilon)^n$, destacamos os seguintes termos:

i = 0:

$$\left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^0\right] (k\epsilon)^{0-1} \left\{1 + k\epsilon \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \frac{(k\epsilon)^2}{2} \ln^2\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right)\right\} + \dots$$

i=1

$$\left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^1\right] (k\epsilon)^{1-1} \left\{1 + k\epsilon \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \frac{(k\epsilon)^2}{2} \ln^2\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \dots\right\}$$

i = 2:

$$\left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] (k\epsilon)^{2-1} \left\{1 + k\epsilon \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \frac{(k\epsilon)^2}{2} \ln^2\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \dots\right\}$$

Isso nos permite identificar o coeficiente de $k\epsilon$, que será

$$\left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)\right] \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^0\right] \ln^2\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right)$$

Já o coeficiente de $(k\epsilon)^2$ é dado por

$$\begin{aligned} & \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^1\right] \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \\ & + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^0\right] \frac{1}{3} \ln^3\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \end{aligned}$$

E se estendermos o desenvolvimento acima para outras potências de $k\epsilon$, deduzimos que o termo de ordem n (coeficiente de $(k\epsilon)^n$) é dado por

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left\{ \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \right. \\ & + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) + \dots + \left[2 - \frac{1}{2}\right] \frac{1}{n!} \ln^n\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \\ & \left. + 2 \frac{1}{(n+1)!} \ln^{n+1}\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \right\} . \end{aligned} \tag{6.28}$$

Com isso, ξ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\xi &= -bp_\alpha \sum_{i=0}^{n+1} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-i+2} \right] \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) (k\epsilon)^n \\ &= -bp_\alpha \sum_{i=0}^{n+1} [1 - (2)^{i-n-2}] \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) (k\epsilon)^n\end{aligned}\quad (6.29)$$

Para ζ , temos

$$\zeta = -bp_\alpha \int_0^1 dx \frac{1}{1 - k\epsilon} \left[\frac{1-x}{k\epsilon} + (1-2x) \right] \left(-\frac{p^2 x}{\lambda^2} \right)^{k\epsilon} \quad (6.30)$$

que na n-ésima ordem, pode ser escrita como

$$\zeta = -bp_\alpha \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n-i+1} \frac{1}{2^{n-i+1}} \frac{1}{i!} \ln^i \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) (k\epsilon)^n \quad (6.31)$$

Lembrando que a integral $I_\alpha^{(n+1)}$ é escrita como

$$\begin{aligned}I_\alpha^{(n+1)} &= 2p^\mu \theta_{\mu\alpha}^{(n+1)} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha (2p \cdot k - p^2)^2}{k^6 (p-k)^2} \ln^n \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \\ &= 2p^\mu \theta_{\mu\alpha}^{(n+1)} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} I_\alpha^{(k)}\end{aligned}\quad (6.32)$$

com $\theta_{\mu\alpha}^{(n+1)}$ dado por

$$\theta_{\mu\alpha}^{(n+1)} = \frac{1}{4} g_{\mu\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{1}{2^{n-k}} I_{\log}^{(k+1)}(\lambda^2) - \frac{b}{4} g_{\mu\alpha} n! \sum_{i=1}^{n+1} (2 - 2^{i-n-1}) \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \quad \text{e} \quad (6.33)$$

Convém ressaltar que a parcela dependente da parte fictícia, vinda da relação de escala a n-loops, desempenhará papel fundamental no cancelamento de contribuições da integral que dependam da massa fictícia.

$I_\alpha^{(k)}$ é uma integral finita, dada por

$$\begin{aligned}
 I_\alpha^{(k)} &= \frac{1}{(-\lambda^2)^{k\epsilon}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha (p^2 - 2p \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^{3-k\epsilon} [(p-k)^2 - m^2]} \\
 &= -b \left[\frac{1}{1-k\epsilon} \right] p_\alpha \left\{ -\frac{1}{k\epsilon(2-k\epsilon)} \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right)^{k\epsilon} + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^1 dx \left[\frac{1-x}{k\epsilon} + (1-2x) \right] \left(-\frac{p^2 x}{\lambda^2} \right)^{k\epsilon} \right\} \tag{6.34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_\alpha^{(n+1)} &= \frac{1}{4} g_{\mu\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{1}{2^{n-k}} I_{log}^{(k+1)}(\lambda^2) + \\
 &\quad + 2p^\mu \frac{b}{4} n! g_{\mu\alpha} \sum_{i=1}^{n+1} (2-2^{i-n-1}) \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) - \\
 &\quad - bp_\alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} [1-(2)^{i-n-2}] \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) (k\epsilon)^n \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n-i+1} \frac{1}{2^{n-i+1}} \frac{1}{i!} \ln^i \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) (k\epsilon)^n \right\} \\
 &= \frac{1}{4} g_{\mu\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{1}{2^{n-k}} I_{log}^{(k+1)}(\lambda^2) + \\
 &\quad + p_\alpha \frac{b}{2} \sum_{i=1}^{n+1} (2-2^{i-n-1}) \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) - \\
 &\quad - bp_\alpha \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!(k)^n}{k!(n-k)!} \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} [1-(2)^{i-n-2}] \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - b p_\alpha \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n-i+1} \frac{1}{2^{n-i+1}} \frac{1}{i!} \ln^i \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right\} \tag{6.35}
 \end{aligned}$$

Note como podemos tomar o limite $\epsilon \rightarrow 0$ com segurança, visto que há o cancelamento de ϵ^n no denominador com o correspondente termo no numerador, dentro dos somatórios. Por sua vez, o somatório na variável k pode

ser eliminado, sabendo que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{(n-k)} \frac{k^n}{k!(n-k)!} = 1 \quad . \quad (6.36)$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} I_\alpha^{(n+1)} &= \frac{1}{4} g_{\mu\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{1}{2^{n-k}} I_{log}^{(k+1)}(\lambda^2) + \\ &+ p_\alpha \frac{b}{2} n! \sum_{i=1}^{n+1} (2 - 2^{i-n-1}) \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) - \\ &- b p_\alpha n! \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} [1 - (2)^{i-n-2}] \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) - \right. \\ &- \left. b p_\alpha \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n-i+1} \frac{1}{2^{n-i+1}} \frac{1}{i!} \ln^i \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) (\epsilon)^n \right\} \\ &= \frac{1}{4} g_{\mu\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{1}{2^{n-k}} I_{log}^{(k+1)}(\lambda^2) + \\ &+ p_\alpha b n! \sum_{i=1}^{n+1} (1 - 2^{i-n-2}) \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) - \\ &- b p_\alpha n! \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} [1 - (2)^{i-n-2}] \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n-i+1} \frac{1}{2^{n-i+1}} \frac{1}{i!} \ln^i \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.37)$$

No último resultado, notamos que as duas primeiras parcelas são iguais, com exceção do fato de os somatórios começarem em 1 e em 0, respectivamente. Desta forma, é garantida a eliminação dos termos dependentes da massa fictícia, presentes somente nestas duas parcelas. É importante perceber como os termos que vêm das relações de escala são importantíssimos para a eliminação da massa fictícia, e isso realça o papel tomado pelas relações de escala no procedimento de Regularização Implícita.

Eliminando os termos que dependem da massa fictícia e escrevendo ex-

plicitamente os termos em que $i = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha}^{(n+1)} &= \frac{1}{4}g_{\mu\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{1}{2^{n-k}} I_{log}^{(k+1)}(\lambda^2) + \\
 &+ p_{\alpha}b \left\{ n![1 - (-2)^{-n-2}] - \frac{1}{2}n!(-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2}n! \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n-i+1} \frac{1}{2^{n-i+1}} \frac{1}{i!} \ln^i \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4}g_{\mu\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{1}{2^{n-k}} I_{log}^{(k+1)}(\lambda^2) + \\
 &+ p_{\alpha}b \left\{ b\{n!(1 - (-1)^{n+1})2^{-(n+2)}\} + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2}n! \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n-i+1} \frac{1}{2^{n-i+1}} \frac{1}{i!} \ln^i \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right\} \quad (6.38)
 \end{aligned}$$

E finalmente, obtemos:

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha}^{(n+1)} &= p_{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{1}{2^{n-k}} I_{log}^{(k+1)}(\lambda^2) + \right. \\
 &+ b [n!(1 - [1 + (-i)^{n+1}]2^{-(n+2)})] + \\
 &- \left. \frac{1}{2}n! \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n-1+1} \frac{1}{2^{n-i+1}} \frac{1}{i!} \ln^i \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right\} . \quad (6.39)
 \end{aligned}$$

Conclusões e Perspectivas

“Clara manhã, obrigado. O essencial é viver.”

1

Neste trabalho, propusemos uma generalização do procedimento de Regularização Implícita aplicada a ordens arbitrárias da expansão em loops, com aplicações em duas teorias de calibre abelianas: a eletrodinâmica quântica espinorial e a eletrodinâmica quântica escalar, considerando o caso de teorias não massivas, já que o caso massivo não apresenta novas características, sendo apenas o cálculo da parte finita das amplitudes de probabilidade um pouco mais complicado. Além da generalização do procedimento, propusemos um novo mecanismo para avaliação de integrais de Feynman finitas, estendendo a usual parametrização de Feynman para situações onde o integrando não é constituído por funções racionais, o que é típico além da ordem 1 loop na expansão perturbativa. Concluimos que o que torna o procedimento de Regularização Implícita consistente do ponto de vista da preservação da simetria de calibre é a eliminação dos chamados termos de superfície no espaço dos momentos, seja pela adoção de contratermos restauradores de simetria ou assumindo-os como sendo nulos a priori. Determinamos um procedimento geral para a eliminação dos termos de superfície, sendo uma prescrição para teorias com conteúdo anômalo discutida na referência (58). A remoção dos termos de superfície traz como consequência a possibilidade de se realizar translações (*shifts*) nos momentos de integração já em quatro dimensões, desde que amplitudes que contenham conteúdo anômalo não estejam presentes (16), (17), (18). Desta forma, uma das principais exigências para a

¹Extraído de “Passagem da noite”, de Carlos Drummond de Andrade (A Rosa do Povo)

satisfação das identidades de Ward, como visto na prova diagramática de tais identidades, é cumprida, sendo esta a razão pela qual a regularização dimensional é invariante de calibre.

No caso de anomalias, a eliminação dos termos de superfície por meio de contratermos restauradores de simetria não é adequada. A razão é que o contratermo necessário para restaurar, por exemplo, a identidade de Ward vetorial causa a violação da identidade de Ward axial e vice versa, não sendo possível (como sabemos) preservar essas duas simetrias simultaneamente. De fato, isso ocorre porque, em nível diagramático, tal anomalia é refletida como uma violação da invariância por roteamento dos momentos nos diagramas de Feynman, e como já mencionado, a Regularização Implícita possui uma prescrição adequada para o tratamento de anomalias. Para métodos como Regularização Dimensional, que automaticamente elimina os termos de superfície, a ambiguidade é manifesta pela forma como a matriz γ_5 é inserida no cálculo dos traços das amplitudes.

Para o caso não-abeliano, a Regularização Implícita foi aplicada na renormalização da Cromodinâmica Quântica na primeira ordem em loops (45). Nós acreditamos que ela também seja adequada para cálculos em ordens mais elevadas no contexto de teorias não-abelianas. De fato, as chamadas identidades de t'Hooft, que são um conjunto de identidades diagramáticas que se traduzem em relações entre momentos nos diagramas exigem um procedimento de regularização que admita shifts nos momentos de integração. Desta forma, a Regularização Implícita contém todos os ingredientes necessários para preservar as identidades de Ward-Slavnov-Taylor e assim esperamos que ela também seja aplicada com êxito para cálculos de correções radiativas a n loops. De fato, no caso de teorias não abelianas, as principais diferenças são fatores de grupo, como o grupo de cor e o grupo de sabor no caso da QCD. Quando tais fatores são avaliados, ficamos com uma amplitude obtida em termos das mesmas integrais básicas obtidas para o caso de teorias abelianas.

A principal utilização da Regularização Implícita é seu emprego em teorias de dimensões específicas, como teorias supersimétricas. É também importante a sistematização do cálculo de integrais finitas a n -loops para teorias massivas, tema que não foi abordado neste trabalho, e que pode ser levado a cabo tanto do ponto de vista computacional quanto do ponto de vista

algébrico. Também é interessante checar se em teorias supersimétricas os potenciais termos violares de simetrias são somente os termos de superfície, ou se em teorias supersimétricas tratadas dentro do contexto da Regularização Implícita haverá algum ingrediente novo em termos de violações de simetria. O fato de que até hoje não existe um esquema de regularização que preserve a supersimetria e a invariância de calibre simultaneamente é um forte indicador da necessidade da aplicação da Regularização Implícita em teorias supersimétricas. De um ponto de vista fenomenológico, espera-se que o Modelo Padrão Minimamente Supersimétrico (MSSM) possa ser provado nos experimentos do LHC com grande precisão nas medidas dos chamados observáveis de precisão. A avaliação teórica de tais observáveis precisa ser realizada pelo menos até a segunda ordem em loops tanto no caso do Modelo Padrão quanto no MSSM. Desta forma, um esquema de regularização e renormalização invariante, ou em que tenhamos total controle sobre os potenciais termos violadores de simetria é importante, a fim de eliminarmos inconsistências e assim reduzir o número de parâmetros ajustáveis no modelo. Assim, como principais perspectivas para os próximos trabalhos, está a aplicação da Regularização Implícita além da primeira ordem em loops em teorias de dimensões específicas, com ênfase para aplicações em teorias supersimétricas. Assim, a aplicação da Regularização Implícita no contexto supersimétrico além da primeira ordem em loops para o cálculo de parâmetros como a massa do bóson W , o momento magnético anômado do múon, as massas dos bósons de Higgs mais leves, m_h , a ocorrência ou não de anoamias em teorias supersimétricas, é plenamente justificável, e os próximos trabalhos devem lançar luz sobre o tema. Em especial, esperamos estender nosso procedimento para o tratamento de teorias massivas e assim, a estrutura geral de divergências, termos de superfície e o cálculo da parte finita deverá ser estendida para tais teorias.

Como primeiro fruto dos resultados do nosso trabalho, foi desenvolvido um procedimento geral para cálculos de parâmetros do grupo de renormalização(67), como a função β e a dimensão anômala para qualquer teoria. Tal procedimento tem sido testado com sucesso em diversas teorias, como o modelo $\lambda - \phi^4$, o modelo de Yukawa e a Eletrodinâmica Quântica a dois loops e a Cromodinâmica Quântica, a um loop. Para a aplicação de tal método em teorias de Yang Mills a dois ou mais loops para o cálculo da função β , é conveniente o conhecimento do Método de Campo de Fundo (Background

Field Method - BFM) (68) e este trabalho está em andamento.

Apêndice 1: Propriedades das matrizes γ de Dirac

Neste apêndice, vamos apresentar algumas propriedades operatórias das matrizes γ de Dirac, bem como apresentar convenções que foram utilizadas ao longo do texto principal.

Começamos por definir a métrica do espaço de Minkowsky:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

O quadrivetor covariante é dado por

$$a^\mu = [a^0 \quad a^1 \quad a^2 \quad a^3] \quad (\text{A.2})$$

Com o tensor métrico $g^{\mu\nu}$ definido por (A.1), podemos obter:

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu.$$

A convenção para a derivada parcial é a seguinte:

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial^0, -\nabla) \quad (\text{A.3})$$

As matrizes γ de Dirac seguem a convenção de Bjorken-Drell:

$$\gamma^\mu = \{\gamma^0, \vec{\gamma}\}, \quad \text{com} \quad \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

em que $\vec{\sigma}$ representa as matrizes σ de Pauli. Estas, por sua vez, são escritas como:

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

A matriz γ^5 é definida em termos das matrizes γ^μ . Ela é dada por:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

As matrizes γ obedecem ainda às seguintes relações de comutação:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \{\gamma^0, \gamma^5\} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Para as matrizes γ^5 ainda se verifica que

$$\gamma^5\gamma^5 = I \quad .$$

Para as matrizes de Pauli, as relações de comutação e anti-comutação são as seguintes:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (\text{A.8})$$

e

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (\text{A.9})$$

em que ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita, totalmente anti-simétrico. Assim como para as matrizes γ^5 , para as matrizes σ de Pauli observa-se a igualdade:

$$\vec{\sigma}\vec{\sigma} = I \quad .$$

Quando estivermos nos referindo ao spin de uma partícula, as matrizes associadas serão denotadas por σ_i . Quando estivermos nos referindo a alguma simetria interna que tenha a mesma descrição matemática que o spin, es-

tas matrizes serão denotadas por τ_i , como por exemplo, para as matrizes de isospin.

A obtenção das amplitudes de probabilidade é feita tomando-se o traço nos espaços de cor, sabor e spin. Para tanto, é indispensável o uso das propriedades do traço das matrizes γ de Dirac, enumeradas a seguir:

1.

$$\text{tr} I = 4$$

2.

$$\text{tr} \gamma_\mu = 0$$

3.

$$\text{tr} \gamma^5 = 0$$

4.

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma^5) = 0$$

5.

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma^\nu) = 0$$

6.

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^5) = 0$$

7.

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$$

8.

$$\text{tr}(\gamma^5 \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = -4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Outra importante propriedade é que o traço do produto de um número ímpar de matrizes γ^μ sempre dá zero. Utilizando as propriedades de anti-comutação das matrizes γ^μ , podemos ainda escrever que

$$\gamma^\mu \not{x} \gamma_\mu = \gamma_\mu \not{x} \gamma^\mu = -2\not{x} \quad , \quad (\text{A.10})$$

e ainda

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \not{a}_1 \gamma^\sigma \not{a}_2 \gamma_\mu \not{a}_3 \gamma_\sigma &= -2 \not{a}_2 \gamma^\sigma \not{a}_1 \not{a}_3 \gamma_\sigma \\ &= -8 \not{a}_2 a_1 \cdot a_3.\end{aligned}$$

Apêndice 2: Cálculos radiativos a um loop na Eletrodinâmica Escalar e Espinorial

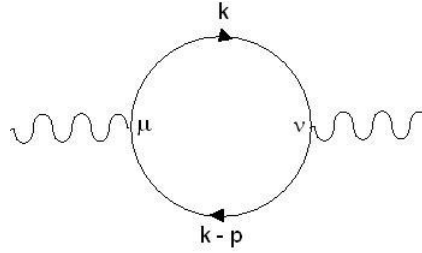
Neste apêndice, apresentamos os cálculos a um loop que foram necessários na obtenção de correções radiativas de ordens mais elevadas.

B.1 Cálculo de amplitudes de probabilidade a um loop na QED escalar

Começaremos obtendo resultados para a eletrodinâmica quântica escalar, calculando a auto-energia para um elétron não massivo e o tensor de polarização do vácuo para o fóton. Além de exibirmos a técnica, o procedimento nos fornecerá as amplitudes dos subdiagramas que serão posteriormente utilizados.

B.1.1 Tensor de polarização do vácuo na QED escalar, a um loop

A correção radiativa a um loop para $\Pi_{\mu\nu}$ na QED escalar é representada pelo seguinte diagrama:



vacuum tensor 1loop.jpg

Figura B.1: diagrama de Feynman para o tensor de polarização do vácuo a um loop na QED escalar

Aplicando as regras de Feynman a cada um desses diagramas e somando as respectivas contribuições, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 i\Pi_{\mu\nu}(k) &= (ie)^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(2l+k)^\mu ((2l+k)^\nu)}{[(l+k)^2](l^2)} \\
 &+ (2ie^2 g^{\mu\nu}) \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2} .
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

O tensor de polarização do vácuo é uma quantidade que mostra como a carga de uma partícula se comporta devido ao efeito das interações de uma carga com seu próprio campo. A invariância de calibre exige que a forma tensorial do tensor de polarização do vácuo deve ser a seguinte (54):

$$\Pi_{\mu\nu} = (p^2 g^{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \Pi(p^2) .$$

O tensor de polarização do vácuo é uma quantidade transversal, o que remete ao fato de que ondas eletromagnéticas são ondas transversais:

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0 \tag{B.2}$$

Se efetuamos a contagem superficial de potências nas duas parcelas, vemos que as duas integrais são divergentes: a primeira é logaritmicamente divergente e a segunda é quadraticamente divergente. É necessário então que lancemos mão de algum esquema de regularização que seja capaz de tornar as integrais tratáveis do ponto de vista matemático e de algum procedimento de renormalização que consiga eliminar as indesejáveis divergências resul-

tantes do cálculo perturbativo. Tal esquema de regularização, entretanto, deve ser invariante de calibre, e então é necessário encontrar um esquema que preserve a forma tensorial correta para $\Pi_{\mu\nu}$.

A fim de ilustrar o papel dos termos de superfície na preservação de simetrias of symmetries, escrevemos a expressão do tensor de polarização do vácuo obtida pelo procedimento de regularização implícita, como obtido em (40), com momentos das linhas internas arbitrários, k_1 e k_2 , sendo então escrito como:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu} &= \Pi(p^2)(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) \\
 &+ 4 \left(\alpha_1 g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2) \alpha_2 g_{\mu\nu} \right. \\
 &+ \frac{1}{3}(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta + k_1^\alpha k_2^\beta) \alpha_3 g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}} \\
 &- (k_1 + k_2)^\alpha (k_1 + k_2)_\mu \alpha_2 g_{\nu\alpha} \\
 &\left. - \frac{1}{2}(k_1^\alpha k_1^\beta + k_2^\alpha k_2^\beta) g_{\mu\nu} \alpha_2 g_{\alpha\beta} \right). \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

Na equação acima, $p = k_1 - k_2$ é o momento externo ao diagrama e

$$\Pi(p^2) = \frac{4}{3} \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{5}{3} b \right],$$

com $b = i/(4\pi)^2$, e já escrito em termos de divergências básicas (em que nós já usamos as relações de escala). Os termos dependentes do roteamento no diagrama e que conduzem à violação da simetria de calibre são proporcionais aos diversos α 's, dados por

$$\alpha_1 g_{\mu\nu} \equiv \int_k^\Lambda \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2} - 2 \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2}, \tag{B.4}$$

$$\alpha_2 g_{\mu\nu} \equiv \int_k^\Lambda \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} - 4 \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \tag{B.5}$$

e

$$\begin{aligned}
 \alpha_3 g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}} &\equiv g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}} \int_k^\Lambda \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\
 &- 24 \int_k^\Lambda \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4}. \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

Esses parâmetros são os termos de superfície. Pode ser mostrado facilmente que

$$\alpha_2 g_{\mu\nu} = \int_k^\Lambda \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \right), \quad (\text{B.7})$$

$$\alpha_1 g_{\mu\nu} = \int_k^\Lambda \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{k_\nu}{(k^2 - m^2)} \right) \quad (\text{B.8})$$

e

$$\int_k^\Lambda \frac{\partial}{\partial k^\beta} \left[\frac{4k_\mu k_\nu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \right] = g_{\{\mu\nu} g_{\alpha\beta\}} (\alpha_3 - \alpha_2). \quad (\text{B.9})$$

Estes termos devem então ser removidos pela adoção de contratermos restauradores de simetria, ou assumidos como nulos desde o início do cálculo, a fim de se preservar a invariância de gauge.

B.1.2 Auto-energia escalar na QED escalar, a um loop

O diagrama de Feynman para a auto energia escalar é similar àquele da QED espinorial, havendo obviamente mudanças nos fatores de vértice do diagrama. Tal amplitude é dada por

$$\begin{aligned} \Sigma_s(p^2) &= e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p+k)_\mu (p+k)_\nu}{(p-k)^2 k^2} \\ &= e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p+k) \cdot (p+k)}{k^2 (k-p)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

em que, após assumirmos a presença (implícita) de um esquema de regularização, podemos usar a seguinte identidade

$$(p+k)^2 = (p-k)^2 + 4p \cdot k \quad .$$

Poderemos então escrever

$$\Sigma_s = e^2 \left\{ \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} + 4p^\alpha \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{(k^2)(p-k)^2} \right\} \quad . \quad (\text{B.11})$$

Podemos perceber que as amplitudes originais, tanto na QED escalar como na QED espinorial são *apenas* divergentes no regime ultra-violeta. Mas após a separação da parte divergente da amplitude, tanto a parte divergente quanto a parte finita tornam-se divergentes *também* no regime infra-vermelho. Dessa

forma, é necessária a introdução de massa fictícia, tanto para o fóton quanto para partículas escalares ou fermiônicas. O que importa é que no final dos cálculos a dependência da amplitude com tal regulador deve desaparecer. Assumimos, então, por enquanto a presença de uma massa m nos propagadores das partículas, e assim escrevemos:

$$\Sigma_s = e^2 \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} + 4p^\alpha \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{(k^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]} \right\} . \quad (\text{B.12})$$

A primeira integral é quadraticamente divergente. Se resolvermos tal integral (usando um esquema como regularização dimensional), ela será proporcional à massa das partículas escalares, e no nosso caso, será igual a zero. Para a integral I_α é lícito escrever que

$$\begin{aligned} I_\alpha(p^2) &= \frac{p_\alpha}{2} I(p^2) \\ &= \frac{p_\alpha}{2} \{ I_{log}(m^2) - bZ_0 \} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

em que Z_0 é dada por

$$Z_0 = \int_0^1 dx \ln \left\{ -\frac{p^2 x(1-x) - m^2}{m^2} \right\} , \quad (\text{B.14})$$

e como já discutido anteriormente m^2 , é uma massa fictícia para a partícula escalar. Em teorias notoriamente livres de divergências infravermelhas, como as duas teorias que estamos analisando, o aparecimento de tais divergências é ocasionado pelo modo como efetuamos a separação da parte divergente da amplitude. A integral I_{log} sem massa é divergente tanto no regime infravermelho(IR) quanto no ultra-violeta(UV). A parte finita sem massa, Z_0 é divergente no regime IR. Assim sendo, uma massa fictícia também seria exigida para nos proteger de divergências infravermelhas, e como queremos mostrar a independência do cálculo com esquemas de regularização, precisamos mostrar que nada depende disso. Isso pode ser obtido pelo uso das *relações de escala* a um loop, e como veremos posteriormente, também a dois ou mais loops. A relação de escala estabelece um vínculo entre a integral divergente dependente da massa e a integral escrita em termos de um parâmetro arbitrário, λ . Tais relações funcionam de forma a estabelecer um vínculo entre a parte finita e a parte divergente, uma espécie de conspiração matemática entre as duas partes, visto que as partes finitas também têm comportamento logarít-

mico. Isso faz com que possamos eliminar a massa reguladora em função de um parâmetro de escala arbitrário que posteriormente toma o papel de escala no grupo de renormalização da teoria. Assim, para eliminarmos a dependência com a massa fictícia m^2 , utilizamos a relação de escala para integrais logaritmicamente divergentes a um loop:

$$I_{log}(m^2) = I_{log}(\lambda^2) - \ln\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) \quad .$$

$$Z_0 = \int_0^1 dx \ln\left\{-\frac{p^2 x(1-x) - m^2}{m^2}\right\} \quad , \quad (\text{B.15})$$

onde m^2 é a massa fictícia para as partículas da teoria. No limite quando tal regulador vai para zero, temos

$$\begin{aligned} Z_0(p^2, \lambda^2) &= \int_1^0 dx \ln\left\{-\frac{p^2 x(1-x)}{\lambda^2}\right\} \\ &= \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + \int_0^1 dx [\ln(x) + \ln(1-x)] \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Na última integral, lançamos mão do seguinte artifício

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 dx \ln(x) &= 2[x(\ln(x) - 1)]_0^1 = 2(-1) = -2 \\ &= -2 \ln(e) = \ln(e^{-2}) \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

para finalmente podermos escrever

$$Z_0(p^2, \lambda^2) = \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2 e^2}\right) \quad . \quad (\text{B.18})$$

Finalmente

$$\Sigma_s(p^2, \lambda^2) = 2e^2 p^2 \left\{ I_{log}(\lambda^2) - b \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2 e^2}\right) \right\} \quad . \quad (\text{B.19})$$

Dessa forma, mostramos que o resultado é independente do regulador utilizado e as relações de escala a um loop então eliminam a dependência com a massa fictícia, assim como sua generalização a dois ou mais loops, o que será visto em capítulos posteriores. Tal cancelamento de divergências infravermelhas acontece para qualquer função de N pontos, tanto na ordem de

um loop quanto em ordens mais elevadas (44).¹

B.1.3 Diagrama de vértice para a eletrodinâmica quântica escalar

A correção de vértice para a QED escalar é dada pelo seguinte diagrama

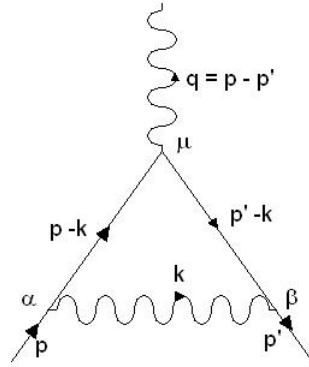


Figura B.2: correção de vértice para a QED escalar a um loop

cuja amplitude de probabilidade é dada por

$$i\Lambda_\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e(p + p' - 2k)_\mu e(2p' - k)_\beta e(2p - k)_\alpha - ig^{\alpha\beta}}{(p - k)^2 (p' - k)^2} \frac{1}{k^2} \quad (\text{B.20})$$

Assumindo a presença implícita de alguma função reguladora, e usando a identidade

$$\begin{aligned} (2p - k) \cdot (2p' - k) &= 4p' \cdot p - 2p' \cdot k - 2p \cdot k + k^2 \\ &= 4p' \cdot p - p'^2 - p^2 + (p' - k)^2 + (p - k)^2 - k^2 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

¹O número "e" que aparece no argumento do logaritmo natural na equação (B.19) é o número de Euler. Não confundir com a carga da partícula escalar.

a função de vértice pode ser escrita em termos de integrais básicas como

$$\begin{aligned}
i\Lambda_\mu &= e^3 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p+p'-2k)_\mu}{(p-k)^2 k^2} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p+p'-2k)_\mu}{(p'-k)^2 k^2} - \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p+p'-2k)_\mu}{(p'-k)^2 (p-k)^2} \right\} + \Lambda_{\mu_1} \\
&= e^3 \{ (p+p')_\mu I(p) - 2I_\mu(p) + (p+p')_\mu I(p') - \\
&\quad - 2I_\mu(p') - (p+p')_\mu I(p, p') + 2I_\mu(p, p') \} + \Lambda_{\mu_1} \quad (\text{B.22})
\end{aligned}$$

em que Λ_{μ_1} é uma integral finita, cujo resultado não é importante para o momento. Escrevendo explicitamente a parte divergente de cada integral básica, e de acordo com a tabela de integrais básicas do apêndice C, temos

$$i\Lambda_\mu = e^3 (p+p') I_{log}(\lambda^2) + \text{parcelas finitas} \quad (\text{B.23})$$

A parte divergente foi escrita de forma explícita porque precisaremos dela posteriormente, ao empregarmos a fórmula das florestas em diagramas a dois loops para a QED escalar.

B.2 Eletrodinâmica Espinorial a um loop

B.2.1 Tensor de polarização do vácuo na QED espinorial não massiva, a um loop

A correção a um loop para o propagador do fóton, $i\Pi_{\mu\nu}$, é dada por

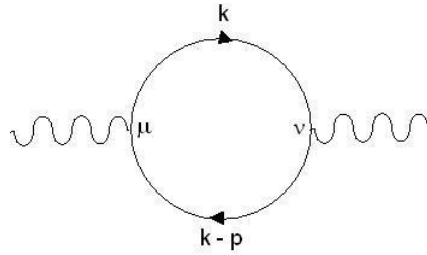


Figura B.3: diagrama de Feynman para o tensor de polarização do vácuo a um loop na QED

Aplicando-se as regras de Feynman no diagrama acima, temos

$$i\Pi_{\mu\nu} = (-1)(-ie)^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \frac{i}{\not{l}} \gamma_\beta \frac{i}{\not{l} - \not{k}} \right\} . \quad (\text{B.24})$$

Assim, podemos escrever

$$i\Pi_{\mu\nu} = -e^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \frac{\not{l}}{l^2} \gamma_\beta \frac{(\not{l} - \not{k})}{(k-l)^2} \right\} . \quad (\text{B.25})$$

O traço no numerador da amplitude é calculado utilizando-se a anticomutatividade das matrizes γ . O resultado, encontrado em diversos livros texto (49) é dado por

$$\text{Tr}\{\gamma_\alpha \gamma_\eta \gamma_\beta \gamma_\xi\} = 4(g_{\alpha\eta}g_{\beta\xi} - g_{\alpha\beta}g_{\eta\xi} + g_{\alpha\xi}g_{\eta\beta}), \quad (\text{B.26})$$

que nos dá

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(k) &= -e^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\eta (l-k)^\xi}{l^2 (k-l)^2} 4(g_{\alpha\eta}g_{\beta\xi} - g_{\alpha\beta}g_{\eta\xi} + g_{\alpha\xi}g_{\eta\beta}) \\ &= -e^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4[l^\alpha (l-k)^\beta + l^\beta (l-k)^\alpha - g_{\alpha\beta} l \cdot (l-k)]}{l^2 (l-k)^2} \\ &= -e^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4[-2k^{\beta\alpha} + 2l^\alpha l^\beta + g_{\alpha\beta} l \cdot (k-l)]}{l^2 (k-l)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Como já supomos que tal amplitude está regularizada, usamos a seguinte identidade ao manipular o integrando:

$$l \cdot k = \frac{k^2}{2} + \frac{l^2}{2} - \frac{1}{2}(k-l)^2.$$

Isso nos conduz ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(k) &= 8e^2 k^\beta \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\alpha}{l^2 (k-l)^2} - 8e^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\alpha}{l^2 (k-l)^2} \\ &- 2g_{\alpha\beta} e^2 k^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 (k-l)^2} - 2g_{\alpha\beta} e^2 k^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-l)^2} \\ &+ 2g_{\alpha\beta} e^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2} + 4g_{\alpha\beta} e^2 k^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-l)^2} . \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Em termos de integrais básicas a um loop, a amplitude pode ser escrita como:

$$i\Pi_{\alpha\beta}^{(1)} = -4e^2\{2I_{\alpha\beta}(k^2) - 2k_\beta I_\alpha(k^2) + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}k^2 I(k^2)\} \quad , \quad (\text{B.29})$$

em que os resultados para as integrais $I(k^2)$, $I_\beta(k^2)$, $I_{\alpha\beta}(k^2)$ regularizadas são apresentadas no apêndice C desse trabalho e *todos os termos de superfície já foram removidos*. Cada integral é definida a seguir:

$$I_{\alpha\beta} = \int_\Lambda \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l_\alpha l_\beta}{l^2(k-l)^2}; \quad (\text{B.30})$$

$$I_\alpha = \int_\Lambda \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l_\alpha}{l^2(k-l)^2} = \frac{k_\alpha}{2} I(k^2); \quad (\text{B.31})$$

e finalmente

$$I = \int_\Lambda \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2(k-l)^2} \quad . \quad (\text{B.32})$$

Convém ressaltar que se a substituição das integrais básicas a um loop for efetuada, usando-se os resultados do apêndice C, o tensor de polarização do vácuo a um loop para a QED espinorial terá a forma geral

$$\Pi_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)\Pi(k^2) \quad ,$$

tendo portanto a estrutura tensorial desejada, e assim mostrando que a invariância de calibre da QED espinorial está sendo preservada. Quanto a integrais quadraticamente divergentes, adotamos uma parametrização particular que elimina a dependência com integrais quadraticamente divergentes. Tais integrais teriam um resultado proporcional à massa do férmion (ou de bósons escalares no caso da QED escalar), e por estarmos tratando teorias não massivas ($m=0$) tais integrais são automaticamente nulas.

B.2.2 Auto-energia do férmion na QED espinorial não massiva, a um loop

A auto-energia de uma partícula fornece uma correção para o propagador da teoria. Essa correção se divide em uma parte que corrige a parte cinética do propagador e outra parte que servirá como correção para a massa da partícula. O diagrama de auto-energia para um férmion na QED espinorial é dado por

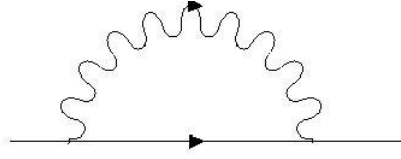


Figura B.4: diagrama de Feynman para a auto-energia de um férmion na QED espinorial a um loop

e aplicando as regras de Feynman, teremos

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p^2) &= (-ie)^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^{\nu} \frac{i}{\not{p} - \not{k}} \gamma^{\mu} g_{\mu\nu} \frac{-i}{k^2} \\
 &= (-ie)^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^{\mu} \frac{\not{p} - \not{k}}{(p-k)^2} \gamma^{\mu} \frac{1}{k^2}.
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

Das identidades do apêndice A, temos

$$\gamma_{\mu} \not{p} \gamma^{\mu} = -2\not{p} \quad ,$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p^2) &= (-ie)^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-2p_{\mu} + 2k_{\mu})\gamma^{\mu}}{(p-k)^2 k^2} \\
 &= 2e^2 \not{p} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 k^2} - 2e^2 \gamma^{\mu} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}}{(p-k)^2 k^2}
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

que em termos de integrais básicas pode ser escrita como

$$-i\Sigma(p) = 2e^2 \{ \gamma^{\mu} p_{\mu} I(p^2) - \gamma^{\mu} I_{\mu}(p^2) \} \quad . \tag{B.35}$$

Apêndice 3: Cálculo explícito de integrais finitas de 2 loops em teorias não massivas

Neste apêndice, mostraremos em detalhes a técnica que desenvolvemos para avaliar integrais de Feynman finitas a 2 loops, para teorias não massivas, o que corresponde a uma generalização da Parametrização de Feynman usual. Usualmente, integrais análogas às que vamos apresentar o cálculo são calculadas por meio dos Polinômios de Chebyshev, mas tal técnica, entretanto, não é adequada para tratar teorias não massivas. Os resultados encontrados são utilizados nos diversos diagramas estudados nesse trabalho.

A primeira integral característica da segunda ordem em loops que iremos resolver é dada por

$$I^{(2)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2](k^2 - m^2)} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) , \quad (\text{C.1})$$

cuja parte finita é dada por

$$I_{fin}^{(2)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + 2p \cdot k}{[(p+k)^2 - m^2](k^2 - m^2)^2} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) , \quad (\text{C.2})$$

que pode ser escrita como

$$I_{fin}^{(2)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + 2p \cdot k}{[(p+k)^2 - m^2](k^2 - m^2)^2} (\ln(k^2 - m^2) - b \ln(\lambda^2) Z_0) , \quad (\text{C.3})$$

em que, para teorias não massivas, Z_0 é dada por

$$Z_0 = -b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + 2b \quad (\text{C.4})$$

e o que percebemos é que o integrando não é uma função racional dos momentos, como usualmente é encontrado em diagramas de Feynman, devido à contribuição que surge de diagramas de primeira ordem em loops, dada por

$$\ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) .$$

O problema pode então ser contornado da seguinte maneira: seja a uma variável qualquer e ϵ algum parâmetro real. No limite em que ϵ tende a zero, é correto escrever a seguinte expansão:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} a^\epsilon = 1 + \epsilon \ln a + \frac{1}{2} \epsilon^2 (\ln a)^2 + \dots \quad (\text{C.5})$$

Da equação (C.5), podemos então isolar a contribuição dependente do logaritmo natural, obtendo:

$$\ln a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{a^\epsilon - 1 - O(\epsilon \geq 2)}{\epsilon} . \quad (\text{C.6})$$

Pode-se observar que quando tomamos o limite de ϵ tendendo a zero, não temos como resultado uma aproximação, mas sim uma identidade, porque o termo a^ϵ contém todas as contribuições em ϵ . Ao tomarmos tal limite, constatamos que o resultado é dado por

$$\ln a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{a^\epsilon - 1}{\epsilon} , \quad (\text{C.7})$$

já que termos de ordem igual ou superior a ϵ^2 se anulam quando o limite $\epsilon \rightarrow 0$ é tomado. Outro comentário é digno de nota: num primeiro momento, somos levados a crer que o resultado da última equação pode ser divergente, quando consideramos o termo $\frac{1}{\epsilon}$. Na verdade, o que se observa é que tal contribuição sempre é cancelada pela contribuição de ordem zero em ϵ ao expandirmos o termo a^ϵ . Com o uso de tal identidade, podemos então resolver as integrais no momento k usando a parametrização de Feynman usual. Já as integrais no parâmetro de Feynman x devem ser tratadas de uma forma diferente da

usual.

Como primeiro passo, vamos substituir a identidade (C.7) no integrando da equação (C.2) e com isso podemos escrever

$$I_{fin}^{(2)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + 2p \cdot k}{[(p+k)^2 - m^2](k^2 - m^2)^2} \frac{(k^2 - m^2)^\epsilon - 1}{\epsilon} \quad , \quad (C.8)$$

que pode então ser reescrita como

$$I_{fin}^{(2)} = \frac{1}{\epsilon} (I_1 - I_2) \quad \text{em que} \quad (C.9)$$

$$I_1 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)^{2-\epsilon} [(k-p)^2 - m^2]} \quad . \quad (C.10)$$

Convém ressaltar que o limite no parâmetro ϵ está subentendido, e será tomado no final dos cálculos. A integral I_2 é característica de cálculos a um loop, sendo dada por

$$I_2 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)^2 [(k-p)^2 - m^2]} = bZ_0 \quad . \quad (C.11)$$

Passemos então à solução da integral no momento interno k . Usando a parametrização de Feynman usual, temos

$$\frac{1}{ab^\alpha} = \alpha \int_0^1 \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{[(a-b)x + b]^{\alpha+1}} \quad .$$

Podemos então identificar

$$\alpha = 2 - \epsilon \quad , \quad \alpha - 1 = 1 - \epsilon \quad \text{e} \quad \alpha + 1 = 3 - \epsilon \quad ,$$

em que a e b são designados por

$$a = (k+p)^2 - m^2 \quad \text{e} \quad b = k^2 - m^2 \quad .$$

A subtração de a e b nos dá

$$\begin{aligned} a - b &= (k-p)^2 - m^2 - (k^2 - m^2) \\ &= -2k \cdot p + p^2 \end{aligned} \quad (C.12)$$

$$\begin{aligned}
(a-b)x + b &= -2k \cdot px + p^2x + k^2 - m^2 \\
&= -2k \cdot px + p^2x + k^2 - m^2 + p^2x^2 - p^2x^2 \\
&= (k - px)^2 + p^2x(1-x)
\end{aligned} \tag{C.13}$$

em que, por se tratar de uma integral finita, o seguinte shift no momento interno pode ser realizado

$$k \rightarrow k + px \quad .$$

A integral pode então ser reescrita como

$$I_1 = (2 - \epsilon) \int_0^1 (1-x)^{(1-\epsilon)} p^2 (1-2x) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + H^2)^{3-\epsilon}} \quad , \tag{C.14}$$

sendo que o shift mencionado foi realizado no numerador do integrando original. Por sua vez, H^2 é dado por

$$H^2 = p^2x(1-x) - m^2 \quad . \tag{C.15}$$

O resultado da integral em k é tabelado em diversas referências, como por exemplo em (53). Designando a integral em k por I_{1k} , temos

$$I_{1k} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(3-\epsilon)} \frac{1}{(H^2)^{(1-\epsilon)}} \quad ,$$

e então a integral restante é escrita como

$$I_1 = (2 - \epsilon) b \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(3-\epsilon)} \int_0^1 dx \frac{(1-x)^{1-\epsilon}}{(p^2x(1-x) - m^2)^{1-\epsilon}} p^2 (1-2x).$$

A integral em x pode ser resolvida por meio de integração por partes. De fato, multiplicando e dividindo a equação C.15 por $(m^2)^{\epsilon-1}$ podemos escrever que

$$(H^2)^{\epsilon-1} p^2 (1-2x) = (-m^2)^\epsilon \left(\frac{p^2x(1-x) - m^2}{(-m^2)} \right)^{\epsilon-1} \frac{p^2(1-2x)}{(-m^2)} \quad ,$$

e por outro lado, podemos escrever a seguinte relação

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p^2x(1-x) - m^2}{(-m^2)} \right)^\epsilon = \epsilon \left(\frac{p^2x(1-x) - m^2}{(-m^2)} \right)^{\epsilon-1} \frac{p^2(1-2x)}{(-m)^2} \quad , \tag{C.16}$$

ou seja

$$(H^2)^{\epsilon-1} p^2 (1-2x) = \frac{(-m^2)^\epsilon}{\epsilon} \frac{d}{dx} \left(\frac{p^2 x(1-x) - m^2}{(-m^2)} \right)^\epsilon. \quad (\text{C.17})$$

A equação (C.5) pode então ser substituída na integral em x original, e então uma integração por partes é efetuada. Então, I_1 poderá ser escrita como

$$\begin{aligned} I_1 &= (2-\epsilon)b \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(3-\epsilon)} \frac{(-m^2)^\epsilon}{\epsilon} \int_0^1 (1-x)^{1-\epsilon} \frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^\epsilon dx \\ &= (2-\epsilon)b \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(3-\epsilon)} I' \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

cujos resultados são

$$I' = \frac{(-m^2)^\epsilon}{\epsilon} \left\{ \left[(1-x)^{1-\epsilon} \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^\epsilon \right]_0^1 + (1-\epsilon) \underbrace{\int_0^1 dx \left(\frac{H^2}{(-m^2)(1-x)} \right)^\epsilon}_{\text{C.19}} \right\}. \quad (\text{C.19})$$

Agora, chamamos atenção para a segunda parcela, ainda integrada. O termo H^2 é dado por

$$p^2 x(1-x) - m^2.$$

Um artifício que nos permite algumas simplificações e reduz o número de integrações por partes a ser realizado é o seguinte: eliminamos a dependência de H^2 com o termo m^2 , lembrando que tal termo será eliminado no fim do cálculo, por se tratar de uma massa introduzida de forma artificial, meramente como uma massa fictícia o propagador de cada partícula. Com tal simplificação, podemos escrever a integral sublinhada, agora designada por A, como

$$A = \int_0^1 dx \left(-\frac{p^2 x}{m^2} \right)^\epsilon \quad (\text{C.20})$$

Para resolver essa integral, devemos, antes de tomar o limite $m^2 \rightarrow 0$, realizar uma expansão em torno de ϵ tendendo a zero. Após resolvermos as integrais em x, usaremos as relações de escala e poderemos tomar o limite $m^2 \rightarrow 0$ com segurança. Assim, realizando a expansão para $\epsilon \rightarrow 0$, e na sequência

realizando as integrações em x , temos:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 dx \left\{ 1 + \epsilon \ln \left(-\frac{p^2 x}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \ln^2 \left(-\frac{p^2 x}{m^2} \right) \dots \right\} \\
 &= 1 + \epsilon \left(\ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - 1 \right) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left(\ln^2 \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - 2 \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) + 2 \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{C.21}$$

O resultado para I' fica então dado por

$$\begin{aligned}
 I' &= \frac{(-m^2)^\epsilon}{\epsilon} \left\{ -1 + 1 - \epsilon + \epsilon \left[\ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - 1 \right] - \epsilon^2 \left[\ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - 1 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left[\ln^2 \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - 2 \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) + 2 \right] \right\} \\
 &= \frac{(-m^2)^\epsilon}{\epsilon} \left\{ -2\epsilon + \epsilon \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - 2\epsilon^2 \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - 2\epsilon^2 \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\epsilon^2 + \frac{1}{2} \epsilon^2 \ln^2 \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{C.22}$$

No limite em que m^2 tende a zero, podemos tomar a seguinte expansão

$$(-m^2)^\epsilon =$$

finalmente podemos escrever

$$\begin{aligned}
 I' &= \frac{1}{\epsilon} \left\{ -2\epsilon + \epsilon \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) + \epsilon^2 \left[2 - 2 \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - 2\epsilon^2 \ln(-m^2) + \epsilon^2 \ln(-m^2) \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) \right\} ,
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

que nos permite finalmente escrever

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{2-\epsilon}{2} b I' + \frac{3}{4} \epsilon (2-\epsilon) b I' \\
 &= b \left\{ Z_0 + \epsilon \left[2 - 2 \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) + \ln(-m^2) Z_0 \right] - \frac{\epsilon}{2} Z_0 + \frac{3}{2} \epsilon Z_0 \right\}
 \end{aligned} \tag{C.24}$$

Vale lembrar que essa é somente a primeira parcela da integral finita a dois loops para a qual desejamos o resultado:

$$\begin{aligned}
I^{(2)} &= \frac{I_1 - I_2}{\epsilon} \\
&= \frac{b}{\epsilon} \left\{ Z_0 - Z_0 + \epsilon \left[2 - 2 \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right)^2 + \ln(-m^2) Z_0 + Z_0 \right] \right\} \\
&= b \left[Z_0 (\ln(-m^2) - 1) + \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right)^2 - 2 \right]. \tag{C.25}
\end{aligned}$$

Então, teremos:

$$\begin{aligned}
I^{(2)} &= I^{(2)} - b \ln(-\lambda^2) Z_0 \\
&= b \left\{ Z_0 \left[\ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) - 1 \right] + \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right)^2 - 2 \right\}. \tag{C.26}
\end{aligned}$$

Após eliminarmos a dependência de $I^{(2)}$ com a massa fictícia m^2 pelo uso das relações de escala a dois loops, podemos finalmente escrever integral completa, levando-se em conta também a parte divergente

$$I_{tot}^{(2)} = I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + b \left\{ -\frac{1}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right\}. \tag{C.27}$$

Passemos agora à obtenção da segunda integral finita, característica de dois loops

$$I_{\mu_{fin}}^{(2)} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k)^2 k_\mu}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right), \tag{C.28}$$

que pode ser escrita como

$$I_{\mu_{fin}}^{(2)} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k)^2 k_\mu}{(k^2 - m^2)^3 [(k+p)^2 - m^2]} \left(\ln \frac{(k^2 - m^2)}{-} \ln(-\lambda^2) \right). \tag{C.29}$$

Na primeira integral, aplicamos novamente a identidade (C.7), e então podemos escrever

$$I_{\mu_{fin}}^{(2)} = \frac{1}{\epsilon} \{ I_{\mu_1} - I_{\mu_2} \}, \tag{C.30}$$

sendo

$$I_{\mu_1} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k)^2 k_\mu}{(k^2 - m^2)^{3-\epsilon} [(k+p)^2 - m^2]} .$$

Nesta integral, podemos utilizar a parametrização de Feynman usual

$$\frac{1}{ab^\alpha} = \alpha \int_0^1 dx \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{[(a-b)x + b]^{\alpha+1}} ,$$

em que podemos identificar

$$\alpha = 3 - \epsilon \quad , \quad \alpha - 1 = 2 - \epsilon \quad \text{e} \quad \alpha + 1 = 4 - \epsilon \quad ,$$

em que a e b são designados por

$$a = (k+p)^2 - m^2 \quad \text{e} \quad b = k^2 - m^2 .$$

Manipulando o integrando e realizando o deslocamento na variável de integração

$$k \Rightarrow k - px \quad \text{teremos}$$

$$\begin{aligned} I_{\mu_1} &= (3 - \epsilon) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1-x)^{2-\epsilon} \frac{[p^2(1-2x) + 2p \cdot k]^2 (k_\mu - p_\mu x)}{(k^2 + H^2)^{4-\epsilon}} \\ &= (3 - \epsilon) \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (1-x)^{2-\epsilon} \{ 4p^2(1-2x)p^\nu k_\mu k_\nu - (p^2(1-2x))^2 p_\mu x - \\ &\quad - 4p^\alpha p^\beta p_\mu x k_\alpha k_\beta \} , \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

em que vamos calcular separadamente três parcelas, a primeira delas dada por

$$I_{\mu_{1*}} = 4(3 - \epsilon) \int_0^1 dx (1-x)^{2-\epsilon} 4p^2(1-2x)p^\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + H^2)^{4-\epsilon}} . \quad (\text{C.32})$$

O resultado para a integração em k é encontrado em diversos textos (((53)), ((29))) e é dado por

$$I_{k_1} = \frac{i}{4\pi^2} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(4-\epsilon)} \frac{g_{\mu\nu}}{2} \frac{1}{(H^2)^{1-\epsilon}} . \quad (\text{C.33})$$

Designemos temporariamente os termos constantes por α . Assim

$$\alpha = \frac{i \Gamma(1 - \epsilon)}{4\pi^2 \Gamma(4 - \epsilon)},$$

e então poderemos escrever

$$I_{\mu_{1*}} = \alpha p_\mu \int_0^1 dx (1-x)^{2-\epsilon} p^2 (1-2x) (H^2)^{\epsilon-1}. \quad (\text{C.34})$$

Podemos utilizar a seguinte manipulação

$$p^2 (1-2x) (H^2)^{\epsilon-1} = \frac{p^2 (1-2x)}{(-m^2)} \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^{\epsilon-1} (-m^2)^\epsilon,$$

seguida de

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^\epsilon = \epsilon \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^{\epsilon-1} \frac{p^2 (1-2x)}{(-m^2)},$$

que nos permite escrever

$$p^2 (1-2x) (H^2)^{\epsilon-1} = \frac{(-m^2)^\epsilon}{\epsilon} \frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^\epsilon.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} I_{\mu_{1*}} &= \alpha p_\mu \frac{(-m^2)^\epsilon}{\epsilon} \int_0^1 dx (1-x)^{2-\epsilon} \frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^\epsilon \\ &= \alpha p_\mu \frac{(-m^2)^\epsilon}{\epsilon} \left\{ \left[(1-x)^{2-\epsilon} \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^\epsilon \right]_0^1 + (2-\epsilon) \int_0^1 dx (1-x)^{1-\epsilon} \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^\epsilon \right\} \\ &= \alpha p_\mu \frac{(-m^2)^\epsilon}{\epsilon} \{-1 + (2-\epsilon)A\}, \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

em que temos

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 (1-x)^{1-\epsilon} \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^\epsilon \\
&= \int_0^1 (1-x)^{1-\epsilon} \left(\frac{p^2 x(1-x) - m^2}{(-m^2)} \right)^\epsilon \\
&= \int_0^1 (1-x) \left(\frac{p^2 x}{(-m^2)} \right)^\epsilon \\
&= \int_0^1 (1-x) \left\{ 1 + \epsilon \ln \left(-\frac{p^2 x}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \ln^2 \left(-\frac{p^2 x}{m^2} \right) \dots \right\} \quad (C.36)
\end{aligned}$$

Resolvendo as integrações e agrupando termos com mesma potência em ϵ , teremos

$$A = \frac{1}{2} + \epsilon \left[\frac{1}{2} \ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - \frac{3}{4} \right] + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - \frac{3}{2} + \frac{7}{4} \right] \dots \quad (C.37)$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
I_{\mu_{1*}} &= \alpha \frac{(-m^2)^\epsilon}{\epsilon} \left\{ -\frac{\epsilon}{2} + \epsilon \left[-\frac{3}{2} \right] - \epsilon^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right] \right. \\
&\quad \left. + \epsilon^2 \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - \frac{3}{2} \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) + \frac{7}{4} \right] \right\} \\
&= \left\{ Z_0 + \epsilon \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - 2Z_0 - \frac{3}{2} + \ln(-m^2)Z_0 \right] \right\} \quad (C.38)
\end{aligned}$$

em que

$$Z_0(p^2, m^2) = -b \left(\ln \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) - 2 \right) \quad .$$

Passemos ao cálculo da segunda parcela, dada por

$$I_{\mu_{2*}} = -(3-\epsilon)p_\mu \int_0^1 dx (1-x)^{2-\epsilon} [p^2(1-2x)]^2 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + H^2]^{4-\epsilon}} \quad (C.39)$$

A integral no momento interno terá como resultado (53)

$$I_k = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(4-\epsilon)} \frac{1}{(H^2)^{2-\epsilon}} \quad .$$

O coeficiente dependente de ϵ pode ser expandido e escrito como

$$\begin{aligned}
 (3 - \epsilon) \frac{\Gamma(2 - \epsilon)}{\Gamma(4 - \epsilon)} &= \frac{\Gamma(2 - \epsilon)}{\Gamma(3 - \epsilon)} \\
 &= \frac{1}{(2 - \epsilon)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon \right) \tag{C.40}
 \end{aligned}$$

e assim, temos

$$I_{\mu_{2*}} = -\frac{b}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon \right) p_\mu \int_0^1 dx (1-x)^{2-\epsilon} [p^2(1-2x)]^2 x \frac{1}{(H^2)^{2-\epsilon}} \quad . \tag{C.41}$$

Podemos escrever uma parcela do integrando da seguinte forma

$$(H^2)^{\epsilon-2} p^2(1-2x) = (-m^2)^{\epsilon-1} \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^{\epsilon-2} \frac{p^2(1-2x)}{(-m^2)} \quad ,$$

o que nos permite escrever a seguinte relação

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^{\epsilon-1} = (\epsilon-1) \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^{\epsilon-2} \frac{p^2(1-2x)}{(-m^2)}$$

e daí temos

$$(H^2)^{\epsilon-2} p^2(1-2x) = (-m^2)^{\epsilon-1} (1 + \epsilon) \frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{(-m^2)} \right)^{\epsilon-1} \quad ,$$

sendo que novamente uma expansão binomial do tipo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x \quad \text{foi utilizada.}$$

Assim, após substituirmos o último resultado, realizamos uma integração por

partes que nos permite escrever:

$$\begin{aligned}
I_{\mu_{2*}} &= \frac{b}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon\right) p_\mu (1 + \epsilon) (-m^2)^{\epsilon-1} \int_0^1 dx x (1-x)^{2-\epsilon} p^2 (1-2x) \frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{(-m^2)}\right)^{\epsilon-1} \\
&= \frac{b}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon\right) p_\mu (1 + \epsilon) (-m^2)^{\epsilon-1} \\
&\quad \left\{ \left[x (1-x)^{2-\epsilon} p^2 (1-2x) \left(\frac{H^2}{(-m^2)}\right)^{\epsilon-1} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{H^2}{(-m^2)}\right)^{\epsilon-1} du \right\} , \quad (C.42)
\end{aligned}$$

em que

$$du = [(1-2x)^{2-\epsilon} p^2 (1-2x) - (2-\epsilon)x(1-x)^{1-\epsilon} p^2 (1-2x) - 2p^2 x(1-x)^{2-\epsilon}] dx \quad .$$

A primeira parcela da integral $I_{\mu_{2*}}$ é igual a zero, e o termo restante nos fornece mais três parcelas, que devem ser integradas por partes mais duas vezes cada. Omitimos os detalhes do cálculo e apresentamos somente o resultado final para $I_{\mu_{2*}}$, que é dado por

$$I_{\mu_{2*}} = b \frac{p_\mu}{2} \left\{ 1 - Z_0 + \epsilon \left[-\frac{1}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{m^2} \right) + \frac{3}{2} Z_0 + (1 - Z_0) \ln(-m^2) \right] \right\} \quad . \quad (C.43)$$

A última parcela de $I_\mu^{(2)}$ é dada por

$$I_{\mu_{3*}} = -4(3 - \epsilon) p_\mu \int_0^1 dx (1-x)^{2-\epsilon} x p^\alpha p^\beta \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{[k^2 + H^2]^{4-\epsilon}} \quad . \quad (C.44)$$

A integral em k dá como resultado

$$I_k = \frac{i}{(4\pi^2)} \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(4-\epsilon)} \frac{g_{\alpha\beta}}{2} \frac{1}{(H^2)^{1-\epsilon}} \quad .$$

Utilizando a expansão binomial para o coeficiente dependente de ϵ podemos escrever

$$I_{\mu_{3*}} = -b \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon\right) p_\mu \int_0^1 dx p^2 x (1-x)^{2-\epsilon} \frac{1}{H^2}^{1-\epsilon} \quad . \quad (C.45)$$

O integrando pode ser manipulado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
p^2 x(1-x)^{2-\epsilon} \left(\frac{1}{H^2}\right)^{1-\epsilon} &= \frac{p^2 x(1-x)}{(-m^2)} (1-x)^{1-\epsilon} \left(\frac{H^2}{-m^2}\right)^{\epsilon-1} (-m^2)^\epsilon \\
&= (-m^2)(1-x) \left(\frac{p^2 x}{-m^2}\right)^\epsilon \\
&= (-m^2)(1-x) \left[1 + \epsilon \ln\left(-\frac{p^2 x}{m^2}\right)\right] \quad , \quad (\text{C.46})
\end{aligned}$$

em que, após desprezarmos a contribuição de m^2 em H^2 (o que nos poupa uma integração por partes), utilizamos novamente a expansão binomial para ϵ tendendo a zero. Resolvendo as integrações no parâmetro de Feynman x , teremos:

$$I_{\mu_{3*}} = -bp_\mu \left\{ \frac{1}{2} + \epsilon \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(-m^2) \right] \right\} \quad . \quad (\text{C.47})$$

Quando somamos as três parcelas que compõem o primeiro termo de $I_{\mu_{fin}}^{(2)}$, temos

$$I_{\mu_{1*}} + I_{\mu_{2*}} + I_{\mu_{3*}} = bp_\mu \left\{ \frac{Z_0}{2} + \epsilon \left[\frac{1}{4} \ln^2\left(-\frac{p^2}{m^2}\right) - \frac{1}{4} Z_0 + \frac{Z_0}{2} \ln(-m^2) - \frac{1}{4} \right] \right\} \quad . \quad (\text{C.48})$$

Devemos ainda nos lembrar que a integral completa é dada por

$$\begin{aligned}
I_{\mu_{fin}}^{(2)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{I_\mu^1 - I_\mu^2}{\epsilon} \right) \\
&= bp_\mu \left[\frac{1}{4} \ln^2\left(-\frac{p^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) Z_0 - \frac{1}{4} Z_0 - \frac{1}{4} \right] \quad . \quad (\text{C.49})
\end{aligned}$$

já que temos

$$I_\mu^2 = bp_\mu \frac{Z_0}{2} \quad ,$$

e então podemos tomar o limite $\epsilon \rightarrow 0$ com segurança. A dependência com a massa fictícia m^2 introduzida artificialmente é eliminada quando usamos as relações de escala a dois loops. Considerando-se a parte divergente da

integral, temos

$$\begin{aligned}
I_{\mu_{total}}^{(2)} &= -\frac{p_\mu}{2} \left[I_{log}^{(2)}(m^2) + \frac{1}{2} I_{log}(m^2) \right] + I_{\mu_{fin}}^{(2)} \\
&= -\frac{p_\mu}{2} \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{log}(\lambda^2) \right] + b \frac{p_\mu}{4} \ln^2 \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + b \frac{p_\mu}{2} \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + \\
&\quad + b \frac{p_\mu}{4} \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + I_{\mu_{fin}}^{(2)} .
\end{aligned} \tag{C.50}$$

Com algumas manipulações envolvendo os termos dependentes de λ^2 e m^2 (na parte finita), finalmente temos

$$I_{\mu_{total}}^{(2)} = \frac{p_\mu}{2} \left\{ I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{log}(\lambda^2) - \frac{b}{2} \left[\ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 3 \right] \right\} . \tag{C.51}$$

Tomemos agora a última integral básica de dois loops:

$$I_{\mu\nu}^{(2)} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)[(k-p)^2]} \ln \left(-\frac{k^2}{\tilde{\lambda}^2} \right) , \tag{C.52}$$

A contagem superficial de potências nos revela que tal integral é quadraticamente divergente. Dessa forma, uma translação na variável de integração causará o aparecimento dos chamados termos de superfície. O procedimento de Regularização Implícita nos permite aplicar a identidade (3.1) no integrando, para então escrevermos:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^{(2)} &= \\
&\int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)} \left\{ \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{2k \cdot p - p^2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \right\} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \\
&= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\tilde{\lambda}^2} \right) + \\
&+ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k \cdot p - p^2) k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2 [(k-p)^2 - m^2]} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right)
\end{aligned} \tag{C.53}$$

em que, para efetuar a separação, adotamos uma massa fictícia m para cada parcela. Podemos notar que a segunda parcela é ainda linearmente divergente. Devemos ainda aplicar a identidade (3.1) duas vezes nas partes diver-

gentes, e então, finalmente obtemos

$$I_{\mu\nu}^{(2)} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \left\{ \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{p^2 + 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)^2} + \frac{(p^2 + 2p \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^3} - \frac{(p^2 + 2p \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^3[(p - k)^2 - m^2]} \right\}. \quad (\text{C.54})$$

O segundo termo da segunda parcela é nulo, por se tratar de um integrando ímpar integrado em um domínio de integração simétrico, assim como o segundo termo na terceira parcela. Temos

$$I_{\mu\nu}^{(2)} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) - p^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k)^3 k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4[(p - k)^2 - m^2]} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) + 4p_{\alpha}p_{\beta} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - m^2)^4} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \quad (\text{C.55})$$

que escrevemos como

$$I_{\mu\nu}^{(2)} = \Theta_{\mu\nu}^{(2,2)} - p^2 \Theta_{\mu\nu}^{(0,2)} + 4p_{\alpha}p_{\beta} \Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0,2)} + p^4 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k)^3 k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4[(p - k)^2 - m^2]} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right), \quad (\text{C.56})$$

em que nas integrais $\Theta^{(i,j)}$ o primeiro índice designa o grau de divergência e o segundo índice representa uma divergência típica da segunda ordem da expansão em loops. O momento é oportuno para que comentemos a respeito dos termos de superfície e o estabelecimento das condições de consistência, que são relações entre integrais com o mesmo grau de divergência. Seja $S_{\mu\nu}$

o seguinte termo de superfície

$$\begin{aligned}
S_{\mu\nu} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k^\nu} \left\{ \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \right\} \\
&= g_{\mu\nu} I_{log}^2(\lambda^2) - 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) + \\
&+ 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3},
\end{aligned} \tag{C.57}$$

em que

$$I_{log}^{(2)}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right).$$

Desta forma, podemos escrever

$$\Theta_{\mu\nu}^{(0,2)} = \frac{1}{4} \left\{ S + g_{\mu\nu} I_{log}^2(\lambda^2) + 2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \right\}. \tag{C.58}$$

De forma geral, como mencionado na introdução, os termos de superfície estão relacionados com eventuais shifts realizados nas variáveis de integração, que aparecem em integrais que são pelo menos linearmente divergentes. Trazem consigo, então, a influência com o roteamento adotado nas amplitudes de Feynman. Para que tais amplitudes sejam independentes do roteamento adotado, (visto que um dado roteamento pode ser visto como um shift na variável de integração) contratermos finitos e *restauradores de simetria* podem ser introduzidos na lagrangeana, eliminando a dependência com o termo de superfície $S_{\mu\nu}$. Isso então nos permite escrever

$$\Theta_{\mu\nu}^{(0,2)} = \frac{1}{4} \left\{ I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{log}(\lambda^2) \right\}, \tag{C.59}$$

em que contratermos restauradores de simetria são utilizados para remover o termo de superfície típico de um loop, originado da integral de um loop com índices de Lorentz divergente. A satisfação das relações de consistência garante a invariância por roteamento para as amplitudes de Feynman da teoria em questão. A eliminação dos termos de superfície será então condição suficiente para a satisfação das identidades de Ward para teorias de calibre abelianas, preservando, por consequência, a simetria de calibre. Considere-

mos agora o seguinte termo de superfície:

$$S_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k^\alpha} \left\{ \frac{k_\mu k_\nu k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \right\} \quad (\text{C.60})$$

do qual podemos obter

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\alpha} k_\nu k_\beta + g_{\nu\alpha} k_\mu k_\beta + g_{\alpha\beta} k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) - \\ &\quad - \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{6k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) + \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} \\ &= g_{\mu\alpha} \Theta_{\nu\beta}^{(0,2)} + g_{\nu\alpha} \Theta_{\mu\beta}^{(0,2)} + g_{\alpha\beta} \Theta_{\mu\nu}^{(0,2)} - 6\Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0,2)} + 2\Theta_{\mu\nu\alpha\beta} \quad , \quad (\text{C.61}) \end{aligned}$$

em que definimos

$$\Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0,2)} = \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \quad \text{e} \quad (\text{C.62})$$

$$\Theta_{\mu\nu\alpha\beta} = \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} \quad , \quad (\text{C.63})$$

cuja solução é ((29))

$$\Theta_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{24} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu\alpha\beta}}{(k^2 - m^2)^2} \quad . \quad (\text{C.64})$$

Utilizando a primeira condição de consistência a dois loops (C.59) e a último resultado de (C.61), podemos escrever

$$\Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0,2)} = \frac{g_{\mu\nu\alpha\beta}}{24} \left\{ I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{5}{6} I_{\log}(\lambda^2) + S_1 \right\} \quad . \quad (\text{C.65})$$

A introdução de um contratermo restaurador de simetria elimina a dependência com S_1 e assim podemos escrever:

$$\Theta_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0,2)} = \frac{g_{\mu\nu\alpha\beta}}{24} \left\{ I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{5}{6} I_{\log}(\lambda^2) \right\} \quad , \quad (\text{C.66})$$

em que as relações de escala a um e dois loops serão utilizadas, no final dos cálculos, para a eliminação da massa fictícia, m . Essa então é a outra condição de consistência a dois loops, necessária para que seja preservada a invariância

por roteamento das amplitudes de Feynman. O uso simultâneo das duas condições de consistência, (C.59) e (C.66), faz com que o procedimento de regularização implícita preserve a simetria por roteamento em gráficos de Feynman e por consequência, a invariância de calibre.

Apresentamos a solução da integral finita, usando o procedimento de Regularização Implícita. Ela é dada por

$$I_{\mu\nu}^{(2)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu (p^2 + 2p \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^{4-\epsilon} [(p+k)^2 - m^2]} \quad , \quad (\text{C.67})$$

que após a parametrização de Feynman pode ser reescrita como

$$I_{\mu\nu}^{(2)} = (4-\epsilon) \int_1^0 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1-x)^{3-\epsilon} (k-px)_\mu (k-px)_\nu [p^2(1-2x) + 2p \cdot k]^3}{(k^2 + H^2)^{5-\epsilon}} dx \quad .$$

Expandindo o segundo termo no numerador, temos

$$[p^2(1-2x) + 2p \cdot k]^3 = [p^2(1-2x)]^3 + 6[p^2(1-2x)]^2 p \cdot k + 12p^2(1-2x)(p \cdot k)^2 + 8(p \cdot k)^3 \quad ,$$

enquanto o primeiro termo nos dá o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} (k-px)_\mu (k-px)_\nu &= k_\mu k_\nu - (k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu)x + p_\mu p_\nu x^2 \\ &= k_\mu k_\nu - 2xp_\mu k_\nu + p_\mu p_\nu x^2 \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

que é obtido após explorarmos a simetria nos índices de Lorentz. Se chamamos o numerador do integrando de $I_{\mu\nu}^{(2)}$ por $N_{\mu\nu}$, podemos então escrever

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu} &= -12[p^2(1-2x)]^2 xp_\mu (p \cdot k) k_\nu - 16x(p \cdot k)^3 p_\mu k_\nu + [p^2(1-2x)]^3 k_\mu k_\nu + \\ &+ 12p^2(1-2x)(p \cdot k) k_\mu k_\nu + [p^2(1-2x)]^3 p_\mu p_\nu x^2 + \\ &+ 12p^2(1-2x)(p \cdot k)^2 p_\mu p_\nu x^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.69})$$

e isso nos permite escrever

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^{(2)} &= (4 - \epsilon) \int_0^1 (1 - x)^{3-\epsilon} [p^2(1 - 2x)]^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + H^2)^{5-\epsilon}} dx + \\
&+ (4 - \epsilon) \int_0^1 (1 - x)^{3-\epsilon} [p^2(1 - 2x)]^3 x^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu p_\nu}{(k^2 + H^2)^{5-\epsilon}} dx - \\
&- (4 - \epsilon) \int_0^1 (1 - x)^{3-\epsilon} 6[p^2(1 - 2x)]^2 x 2p^\alpha p_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\mu}{[k^2 + H^2]^{5-\epsilon}} dx + \\
&+ (4 - \epsilon) \int_0^1 (1 - x)^{3-\epsilon} 3p^2(1 - 2x) 4p^\alpha p^\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta k_\mu k_\nu}{[k^2 + H^2]^{5-\epsilon}} dx \\
&+ (4 - \epsilon) \int_0^1 (1 - x)^{3-\epsilon} 12p^\alpha p^\beta p^2(1 - 2x) x^2 p_\mu p_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{[k^2 + H^2]^{5-\epsilon}} dx \\
&- (4 - \epsilon) \int_0^1 (1 - x)^{3-\epsilon} 16x p^\alpha p^\beta p^\gamma p_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\nu}{[k^2 + H^2]^{5-\epsilon}} dx \quad . \quad (C.70)
\end{aligned}$$

Ao realizarmos a integração na variável k , podemos efetuar a seguinte simplificação nos coeficientes proporcionais a ϵ :

$$\frac{(4 - \epsilon)\Gamma(2 - \epsilon)}{\Gamma(5 - \epsilon)} = \frac{(4 - \epsilon)\Gamma(2 - \epsilon)}{(4 - \epsilon)(3 - \epsilon)(2 - \epsilon)\Gamma(2 - \epsilon)} = \frac{1}{(3 - \epsilon)(2 - \epsilon)}$$

e após expandirmos o último resultado numa expansão binomial, retendo no máximo termos de ordem ϵ^2 teremos:

$$\frac{(4 - \epsilon)\Gamma(2 - \epsilon)}{\Gamma(5 - \epsilon)} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{5}{6}\epsilon + \frac{19}{36}\epsilon^2 \right) \quad .$$

O próximo passo é a resolução de cada uma das parcelas obtidas em D.1. Tomemos a primeira parcela, após resolver a integral em k . A menos do coeficiente envolvendo potências de ϵ , podemos escrever:

$$I' = \int_0^1 (1 - x)^{3-\epsilon} [p^2(1 - 2x)]^3 \left(\frac{1}{H^2} \right)^{2-\epsilon} \quad , \quad (C.71)$$

que, ao ser multiplicada por

$$\frac{-m^2 (-m^2)^{\epsilon-2}}{-m^2 (-m^2)^{\epsilon-2}} \quad \text{nos dá}$$

$$I' = (-m^2) \int_0^1 dx (1-x)^{3-\epsilon} \frac{-[p^2(1-2x)]^3}{m^2} \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{\epsilon-2} . \quad (\text{C.72})$$

Por outro lado, podemos usar a seguinte identidade

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{\epsilon-1} = (\epsilon-1) \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{\epsilon-2} \frac{p^2(1-2x)}{-m^2} ,$$

que nos permite obter

$$I' = \frac{(-m^2)^{\epsilon-1}}{\epsilon-1} \int_0^1 dx (1-x)^{3-\epsilon} [p^2(1-2x)]^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{\epsilon-1} \quad (\text{C.73})$$

Realizando uma primeira integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} I' &= \frac{(-m^2)^{\epsilon-1}}{\epsilon-1} \left\{ (1-x)^{3-\epsilon} [p^2(1-2x)]^2 \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{\epsilon-1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{\epsilon-1} du \right\} \\ &= \frac{(-m^2)^{\epsilon-1}}{\epsilon-1} \left\{ -p^4 - \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{H^2}{m^2} \right)^{\epsilon-1} du}_{I''} \right\} \\ &= \frac{(-m^2)^{\epsilon-1}}{\epsilon-1} \left\{ -p^4 - I'' \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.74})$$

em que

$$du = \{(\epsilon-3)(1-x)^{2-\epsilon} [p^2(1-2x)]^2 - 4(1-x)^{3-\epsilon} p^2 [p^2(1-2x)]\} dx .$$

Passemos então à solução de cada parcela de I'' , designadas por I''_A e I''_B :

$$\begin{aligned} I''_A &= (\epsilon-3) \int_0^1 (1-x)^{2-\epsilon} [p^2(1-2x)]^2 \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{\epsilon-1} \frac{-m^2}{-m^2} \\ &= (\epsilon-3)(-m^2) \int_0^1 (1-x)^{2-\epsilon} p^2(1-2x) \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{\epsilon-1} \frac{dH^2}{dx} dx \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

Usando que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{\epsilon} = \epsilon \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{\epsilon-1} \frac{dH^2}{dx}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
I_A'' &= \frac{\epsilon - 3}{\epsilon}(-m^2) \int_0^1 (1-x)^{2-\epsilon} p^2(1-2x) \frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^\epsilon \\
&= \frac{\epsilon - 3}{\epsilon}(-m^2) \left\{ (1-x)^{2-\epsilon} p^2(1-2x) \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^\epsilon \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^\epsilon \right\} du \\
&= \frac{\epsilon - 3}{\epsilon}(-m^2) \left\{ -p^2 - \int_0^1 \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^\epsilon du \right\} \tag{C.76}
\end{aligned}$$

sendo

$$du = [(\epsilon - 2)(1-x)^{1-\epsilon} p^2(1-2x) - 2p^2(1-x)^{2-\epsilon}] dx$$

que pode novamente ser resolvida via integração por partes, e assim obtemos

$$I_A'' = \frac{\epsilon - 3}{\epsilon}(-m^2)p^2 \left\{ -1 + \int_0^1 [(2-\epsilon)(1-x)(1-2x) + 2(1-x)^2] \left(-\frac{p^2 x}{m^2} \right)^\epsilon dx \right\} \tag{C.77}$$

Passemos à solução da segunda parcela de I'' :

$$\begin{aligned}
I_B'' &= -4p^2 \int_0^1 (1-x)^{3-\epsilon} \frac{p^2(1-2x)}{-m^2} ()^{\epsilon-1} (-m^2) dx \\
&= -\frac{4p^2(-m^2)}{\epsilon} \int_0^1 (1-x)^{3-\epsilon} \frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^\epsilon dx \tag{C.78}
\end{aligned}$$

Após realizarmos uma primeira integração por partes, temos:

$$\begin{aligned}
I_B'' &= -\frac{4p^2(-m^2)}{\epsilon} \left\{ (1-x)^{3-\epsilon} \left(\frac{H^2}{m^2} \right)^\epsilon + (3-\epsilon) \int_0^1 (1-x)^{2-\epsilon} \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^\epsilon dx \right\} \\
&= -\frac{4p^2(-m^2)}{\epsilon} \left\{ -1 + (3-\epsilon) \int_0^1 (1-x)^2 \left(-\frac{p^2 x}{m^2} \right)^\epsilon dx \right\} \tag{C.79}
\end{aligned}$$

Somando I_A'' e I_B'' , temos

$$I'' = \frac{(-m^2)p^2}{\epsilon} \left\{ 7 - \epsilon - (3-\epsilon) \int_0^1 dx \{ 6(1-x)^2 + (2-\epsilon)(1-x)(1-2x) \} \left(-\frac{p^2 x}{m^2} \right)^\epsilon \right\} \tag{C.80}$$

E assim, poderemos escrever

$$\begin{aligned}
I' &= \frac{(-m^2)^{\epsilon-1}}{\epsilon-1} \left\{ -p^4 + \frac{(-m^2)p^2}{\epsilon} [\epsilon - 7 + (3 - \epsilon) \int_0^1 dx \{6(1-x)^2 + \right. \\
&\quad \left. + (2 - \epsilon)(1-x)(1-2x)\} \left(-\frac{p^2x}{m^2}\right)^\epsilon] \right\} \\
&= \frac{(-m^2)^\epsilon}{\epsilon-1} \left\{ -\frac{p^4}{m^2} + \frac{p^2}{\epsilon} [\epsilon - 7 + \right. \\
&\quad \left. + (3 - \epsilon) \int_0^1 dx \{6(1-x)^2 + (2 - \epsilon)(1-x)(1-2x)\} \left(-\frac{p^2x}{m^2}\right)^\epsilon] \right\} \quad (C.81)
\end{aligned}$$

C.0.3 Cálculo de uma integral overlapada

Uma integral overlapada típica do procedimento de Regularização Implícita, característica de diagramas como o tensor de polarização do vácuo, é dada por

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^{(O)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu l_\nu}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu l_\nu}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} \left\{ \frac{1}{k^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{p^2 - 2p \cdot k}{k^2 (k-p)^2} \right\} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu l_\nu}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} - \\
&\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu l_\nu (p^2 - 2p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (k-p)^2 (p-l)^2} \quad (C.82)
\end{aligned}$$

Passamos a designar as duas parcelas por α e β , respectivamente. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu l_\nu}{k^4 (k-l)^2 l^2 (p-l)^2} \\
&= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l_\nu}{l^2 (p-l)^2} \underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^4 (k-l)^2}}_{\quad} \quad (C.83)
\end{aligned}$$

Em todos os cálculos apresentados neste apêndice, omitimos, por comodidade, a presença de uma massa fictícia em cada propagador em quase todas as passagens. Esta integral pode ser resolvida pelas técnicas usuais empregadas para qualquer integral de Feynman, visto que podemos resolver a integral em cada momento interno *separadamente*. O resultado da integral em k , sublinhada, é

$$b \frac{l^\mu}{l^2} \quad ,$$

o que nos permite escrever a parcela α como

$$\begin{aligned} \alpha &= b \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\mu l_\nu}{l^4 (p-l)^2} \\ &= b \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\mu l_\nu}{l^4} \left\{ \frac{1}{l^2} - \frac{p^2 - 2p \cdot l}{l^2 (p-l)^2} \right\} \\ &= b \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\mu l_\nu}{(l^2 - m^2)^3} - b \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\mu l_\nu}{l^6} \frac{p^2 - 2p \cdot l}{(p-l)^2} \\ &= b \frac{g_{\mu\nu}}{4} I_{\log}(m^2) - b \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\mu l_\nu}{(l^2 - m^2)^3} \frac{p^2 - 2p \cdot l}{[(p-l)^2 - m^2]} \quad (C.84) \end{aligned}$$

E agora, na segunda parcela designada por β , podemos usar a parametrização de Feynman usual e resolver a contribuição finita. O resultado é dado por

$$\alpha = b \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] + \frac{b p_\mu p_\nu}{2 p^2} \right\} \quad (C.85)$$

A segunda parcela de C.82 merece maior atenção, visto que não é possível realizar a integração em cada momento separadamente:

$$\beta = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu l_\nu (p^2 - 2p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \quad (C.86)$$

De acordo com a estrutura tensorial de β , podemos escrever

$$\beta = A p_\mu p_\nu + B p^2 g_{\mu\nu} \quad , \quad (C.87)$$

Multiplicando β por $p^\mu p^\nu$, temos:

$$\begin{aligned} p^\mu p^\nu \beta &= A p^\mu p_\nu p^\mu p_\nu + B p^2 g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \\ &= (A + B) p^4 \quad (C.88) \end{aligned}$$

e então deveremos determinar os valores de A e B.

$$p^\mu p^\nu \beta = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu k_\mu p^\nu l_\nu (p^2 - 2p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \quad (\text{C.89})$$

e no integrando, podemos utilizar o seguinte artifício

$$p^\nu l_\nu = p \cdot l = -\frac{1}{2} [(p-l)^2 - p^2 - l^2]$$

o que nos permite efetuar algumas simplificações de termos no numerador e no denominador. Temos então:

$$\begin{aligned} p^\mu p^\nu \beta &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k) p \cdot k [(p-l)^2 - p^2 - l^2]}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2} + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)(p \cdot k)}{k^4 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} + \\ &+ \frac{1}{2} p^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \quad , \quad (\text{C.90}) \end{aligned}$$

em que cada parcela será designada por C, D e E, respectivamente. Começemos pela parcela E, onde, no numerador, somamos e subtraímos o termo k^2 :

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k + k^2 - k^2)(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\ &= \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{((p-k)^2 - k^2)(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\ &= \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} - \\ &- \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^2 l^2 (k-l)^2 (k-p)^2 (p-l)^2} \\ &= \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} - \frac{p^2}{2} p^\alpha I_\alpha^O \quad (\text{C.91}) \end{aligned}$$

em que

$$I_\alpha^O = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2 (k-p)^2} \quad ,$$

sendo uma integral onde não é possível separar as integrações nos momentos k e l . Por outro lado, na primeira parcela de E podemos ser separada em duas integrais finitas típicas de um loop:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{p^2}{2} p^\alpha \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 (p-l)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} k_\alpha k^4 (k-l)^2 - \frac{p^2}{2} p^\alpha I_\alpha^O \\
&= \frac{p^2}{2} p^\alpha \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{b l_\alpha}{l^2} \frac{1}{l^2 (p-l)^2} - \frac{p^2}{2} p^\alpha I_\alpha^O \\
&= \frac{b}{2} p^2 p^\alpha p_\alpha \frac{b}{p^2} - \frac{p^2}{2} p^\alpha I_\alpha^O
\end{aligned} \tag{C.92}$$

usando que

$$I_\alpha^O = \frac{p_\alpha}{2} I^O$$

temos

$$E = b^2 \frac{p^2}{2} - \frac{p^4}{4} I^O \quad . \tag{C.93}$$

Na sequência, calculamos C :

$$\begin{aligned}
C &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)(p^2 - 2p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2} \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)[p^2 - 2p \cdot k + k^2 - k^2]}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2} \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{p \cdot k}{k^4 l^2 (k-l)^2} + \\
&+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2} \\
&= \frac{p^2}{2} p^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{k^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 (k-l)^2} + \\
&+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2}
\end{aligned} \tag{C.94}$$

em que a primeira parcela é nula, pela paridade do integrando em k . Já a segunda contribuição pode ser reescrita, separando-se as integrais em k e em l :

$$C = \frac{1}{2} p^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{k^2 (p-k)^2} \underbrace{\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 (k-l)^2}} \tag{C.95}$$

A integral sublinhada, no momento l, é uma integral típica do cálculo de um loop, cujo resultado é

$$I = I_{log}(\lambda^2) - 2b + b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \quad .$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} p^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{k^2 (p-k)^2} [I_{log} + 2b] + \\ &+ \frac{1}{2} p^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{k^2 (p-k)^2} \left[-b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} p^\alpha [I_{log} + 2b] \frac{p_\alpha}{2} I - \frac{b}{2} p^\alpha I_\alpha^{(2)} \\ &= \frac{p^2}{4} [I_{log} + 2b] I - \frac{b}{2} p^\alpha I_\alpha^{(2)} \end{aligned} \quad (C.96)$$

em que I e $I^{(2)}$ são integrais características do cálculo de um e dois loops, respectivamente, cujas expressões foram obtidas no texto principal. Finalmente, calculamos D:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)(p^2 - 2p \cdot k + k^2 - k^2)}{k^4 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^4 (k-l)^2 (p-l)^2} - \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{p \cdot k}{k^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\ &= \frac{1}{2} p^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-l)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{k^4 (k-l)^2} - \\ &- \frac{1}{2} p^\alpha \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{k^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\ &= \frac{1}{2} p^\alpha \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-l)^2} b \frac{l_\alpha}{l^2} - \\ &- \frac{1}{2} p^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{k^2 (p-k)^2} \left\{ I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{(p-k)^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right\} \\ &= \frac{1}{2} p^\alpha b I_\alpha - \frac{1}{2} p^\alpha [I_{log} \lambda^2 + 2b] I_\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} p^2 b \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{k^2 (k-p)^2} \ln \left(-\frac{(p-k)^2}{\lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (C.97)$$

Na terceira contribuição, é necessário fazer um shift no momento de integração:

$$k \rightarrow k + p \quad ,$$

e, em seguida, eliminarmos os termos de superfície resultantes, por se tratar de uma integral linearmente divergente. Se assim procedermos, D será reescrito como;

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}p^\alpha b \frac{p_\alpha}{2} I - \frac{1}{2}[I_{log}(\lambda^2) + 2b]p^\alpha \frac{p_\alpha}{2} I + \\ &+ \frac{1}{2}p^\alpha b \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{(k+p)^2 k^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}p^\alpha b p_\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+p)^2 k^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \\ &= \frac{b}{4}p^2 I - \frac{p^2}{4}[I_{log} + 2b]I + \frac{b}{2}p^2 I^{(2)} - \frac{b}{2}p^\alpha I_\alpha^{(2)} \end{aligned} \quad (C.98)$$

em que usamos a seguinte propriedade:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+p)^2 k^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-p)^2 k^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right)$$

Devemos notar que as contribuições não locais em $I_{\mu\nu}^O$, dadas por

$$\frac{p^2}{4}[I_{log}(\lambda^2) + 2b]I$$

presentes em C e D se anula quando somamos C e D. Substituindo os resultados para as integrais básicas, e somando C e D, temos que

$$C + D = -b^2 \frac{p^2}{4} \quad .$$

Agora, contraímos β com $g^{\mu\nu}$, usando novamente que β pode ser escrito como

$$\beta = A p_\mu p_\nu + b p^2 g^{\mu\nu} \quad .$$

Assim:

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\beta &= Ap_\mu p_\nu g^{\mu\nu} + Bp^2 g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \\
&= Ap_\mu p^\mu + Bp^2 4 \\
&= (A + 4B)p^2 \quad , \tag{C.99}
\end{aligned}$$

E então, montaremos um sistema de duas equações e duas incógnitas, A e B, que nos permitirá obter o resultado completo de $I_{\mu\nu}^O$.

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\beta &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu} k_\mu l_\nu (p^2 - 2p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k \cdot l (p^2 - 2p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{[(k-l)^2 - k^2 - l^2] (p^2 - 2p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{p^2 - 2p \cdot k}{k^4 l^2 (p-k)^2 (p-l)^2} + \\
&+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{p^2 - 2p \cdot k}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} + \\
&+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{p^2 - 2p \cdot k}{k^4 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \quad , \tag{C.100}
\end{aligned}$$

em que cada contribuição será designada por F, G e H, respectivamente. A estratégia para a solução de F e G é similar às soluções de C e D, expostas anteriormente. Deixamos ao leitor interessado a obtenção dos resultados para F e G. Quando somamos os resultados de F e G, teremos

$$F + G = \frac{b^2}{2} \left[\frac{\pi^2}{6} - 2 \right] \quad .$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\beta &= (A + 4B)p^2 = F + G \\
&= \frac{b^2}{2} \left[\frac{\pi^2}{6} - 2 \right] \tag{C.101}
\end{aligned}$$

Por outro lado, obtivemos anteriormente que

$$\begin{aligned}
 p^\mu p^\nu \beta = (A + B)p^4 &= \frac{b^2}{2}p^2 - \frac{p^4}{4}I^O - \frac{b^2}{4}p^2 \\
 A + B &= \frac{b^2}{2p^2} - \frac{1}{4}I^O - \frac{b^2}{4p^2} \\
 &= \frac{b^2}{4p^2} - \frac{1}{4}I^O
 \end{aligned} \tag{C.102}$$

Montamos então um sistema formado pelas duas equações

$$\begin{aligned}
 A + B &= \frac{b^2}{4p^2} - \frac{1}{4}I^O \quad \text{e} \\
 A + 4B &= \frac{b^2}{2p^2} - \left[\frac{\pi^2}{6} - 2 \right] \quad \text{e}
 \end{aligned}$$

e resolvendo este sistema obtemos

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{b^2\pi^2}{36p^2} + \frac{1}{12}I^O - \frac{5}{12}\frac{b^2}{p^2} \quad \text{e para A, temos} \\
 A &= -\frac{b^2}{36p^2}\pi^2 - \frac{1}{3}I^O + \frac{2}{3}\frac{b^2}{p^2} \quad .
 \end{aligned}$$

Desta forma, como escrevemos β como

$$\beta = Ap_\mu p_\nu + B^2 g_{\mu\nu} \quad ,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \beta &= \left[-\frac{b^2}{36p^2}\pi^2 - \frac{1}{3}I^O + \frac{2}{3}\frac{b^2}{p^2} \right] p_\mu p_\nu + \\
 &+ \left[-\frac{5}{12}\frac{b^2}{p^2} + \frac{b^2\pi^2}{36p^2} + \frac{1}{12}I^O \right] p^2 g_{\mu\nu} \quad .
 \end{aligned} \tag{C.103}$$

Desta forma, a integral overlapada $I_{\mu\nu}^O$, que é dada por $I_{\mu\nu}^O = \alpha - \beta$ em que

$$\alpha = b \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] + \frac{b}{2} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right\}$$

pode ser escrita como

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^O &= g_{\mu\nu} \left\{ \frac{b}{4} I_{\log}(\lambda^2) - \frac{b^2}{4} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{p^2}{12} I^O + \right. \\ &= \left. \frac{11b^2}{12} - \frac{b^2}{36} \pi^2 \right\} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left\{ -\frac{1}{6} b^2 + \frac{1}{3} p^2 I^O + \frac{b^2}{36} \pi^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.104})$$

em que I^O é uma integral finita típica de diagramas overlapados, dada por

$$I^O = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 l^2 (p-k)^2 (k-l)^2 (p-l)^2} \quad . \quad (\text{C.105})$$

Procedimento similar pode ser aplicado na solução de outra integral de diagramas overlapados a dois loops:

$$I_{\mu\nu}^{O_1} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2 (p-k)^2} \quad , \quad (\text{C.106})$$

que aparece no diagrama overlapado para o tensor de polarização do vácuo na QED escalar, que tem grau superficial de divergência logarítmico. Aplicando a identidade algébrica que faz a separação da parte divergente no procedimento de Regularização Implícita, dada por

$$\frac{1}{(p-k)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{p^2 - 2p \cdot k}{k^2 (k-p)^2}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^{O_1} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} - \\ &- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu (p^2 - 2p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.107})$$

em que omitimos a presença de uma massa fictícia em cada termo do integrando. Vamos designar a primeira parcela por α e a segunda por β . Assim, separando as integrações em k e em l , teremos:

$$\alpha = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 (l-p)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^4 (k-l)^2}$$

Se resolvermos a integral no momento k , teremos

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2(l-p)^2} \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] + \frac{b}{2} \frac{l_\mu l_\nu}{l^2} \right\} \\
&= \frac{g_{\mu\nu}}{4} I_{\log}(\lambda^2) \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right\} - b \frac{g_{\mu\nu}}{4} I^{(2)} + \\
&+ \frac{b}{8} g_{\mu\nu} \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] + \frac{b^2}{4} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} . \quad (C.108)
\end{aligned}$$

A segunda parcela é finita, e pela sua estrutura tensorial, pode ser escrita como

$$\beta = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k) k_\mu k_\nu}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} = A p_\mu p_\nu + B p^2 g_{\mu\nu} \quad (C.109)$$

e se pudermos determinar quem são A e B , teremos o resultado da integral.

Contraindo $p^\mu p^\nu$ com β , teremos:

$$p^\mu p^\nu \beta = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)(p \cdot k)^2}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \quad (C.110)$$

e como usual, o produto escalar é eliminado por através da seguinte identidade

$$p \cdot k = -\frac{1}{2} [(p-k)^2 - k^2 - p^2] ,$$

que nos permite escrever

$$\begin{aligned}
p^\mu p^\nu \beta &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)(p \cdot k)[(p-k)^2 - k^2 - p^2]}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} + \\
&+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)(p \cdot k)}{k^2 l^2 (p-k)^2 (k-l)^2 (p-l)^2} + \\
&+ \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \quad (C.111)
\end{aligned}$$

Passamos então a designar cada parcela por F , E e C , respectivamente.

Começemos pela parcela E , em que, no numerador, podemos somar e

subtrair k^2 , de forma que

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)(p \cdot k)}{k^2 l^2 (p-k)^2 (k-l)^2 (p-l)^2} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k + k^2 - k^2)(p \cdot k)}{k^2 l^2 (p-k)^2 (k-l)^2 (p-l)^2} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{(p-k)^2 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} \\
&= \frac{1}{2} \{B_1 - B_2\} \tag{C.112}
\end{aligned}$$

em que temos

$$\begin{aligned}
B_1 &= p^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} \\
&= p^\alpha \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 (l-p)^2} \left\{ \frac{l_\alpha}{2} \left[I_{\log}(\lambda^2) - \ln \left(-\frac{l^2}{\tilde{\lambda}^2} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{p^2}{4} I_{\log}(\lambda^2) \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{l^2}{\tilde{\lambda}^2} \right) \right] - \frac{p^\alpha}{2} I_\alpha^{(2)} \tag{C.113}
\end{aligned}$$

em que

$$\ln \left(-\frac{l^2}{\tilde{\lambda}^2} \right) = \ln \left(-\frac{l^2}{e\lambda^2} \right) = \ln \left(-\frac{l^2}{\lambda^2} \right) - 2 \quad .$$

Por sua vez

$$\begin{aligned}
B_2 &= p^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\
&= p^\alpha \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 (l-p)^2} \left\{ \frac{(l+p)_\alpha}{2} \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{(p-l)^2}{\tilde{\lambda}^2} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Resolvendo a integração no momento l e usando que

$$I_\alpha = \frac{p_\alpha}{2} I$$

, teremos

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{3}{4}p^2 I_{\log}(\lambda^2) \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\tilde{\lambda}^2} \right) \right] + \\
&+ b \frac{p^2}{2} I_{\alpha}^{(2)} - bp^2 I^{(2)} \quad (C.114)
\end{aligned}$$

E portanto, podemos escrever

$$E = -\frac{p^2}{4} \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] - \frac{b}{2} p^{\alpha} I_{\alpha}^{(2)} + \frac{b}{2} p^2 I^{(2)} \quad (C.115)$$

Na parcela C, temos

$$\begin{aligned}
C &= \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\
&= \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k + k^2 - k^2)(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\
&= \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} - \\
&- \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^2 l^2 (p-k)^2 (k-l)^2 (p-l)^2} \\
&= \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} - \frac{p^2}{2} p^{\alpha} I_{\alpha}^O \quad (C.116)
\end{aligned}$$

em que

$$I_{\alpha}^O = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{k_{\alpha}}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} = \frac{p_{\alpha}}{2} I^O .$$

E com isso, teremos:

$$C = \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} - \frac{p^4}{4} I^O \quad (C.117)$$

Se somarmos a parcela C com a parcela F, podemos obter

$$\begin{aligned}
F + C &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} + \\
&+ \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} - \frac{p^4}{4} I^O \\
&= -\frac{p^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} + \\
&- \frac{2p^\alpha p^\beta}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} \\
&+ \frac{p^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(p \cdot k)}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} - \frac{p^4}{4} I^O \\
&= -\frac{p^4}{4} I^O + p^\alpha p^\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} \\
&= -\frac{p^4}{4} I^O + \frac{p^2}{4} I_{\log}(\lambda^2) - \frac{bp^2}{4} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) I_{\log}(\lambda^2) - b\frac{p^2}{4} I^{(2)} + \\
&+ \frac{b}{8} p^2 I_{\log}(\lambda^2) - \frac{b^2}{8} p^2 \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + \frac{b^2}{4} p^2 \tag{C.118}
\end{aligned}$$

Somando E, F e C, teremos:

$$\begin{aligned}
E + F + C &= -\frac{p^4}{4} I^O + \frac{b}{4} p^2 I^{(2)} - \frac{b}{2} p^\alpha I^{(2)}_\alpha + \frac{5}{8} b p^2 I_{\log}(\lambda^2) - \\
&- \frac{5}{8} b^2 p^2 \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + \frac{b^2}{4} p^2 \tag{C.119}
\end{aligned}$$

E substituindo os resultados de cada integral, temos:

$$\begin{aligned}
E + F + C = (A + B)p^4 &= -\frac{p^4}{4} I^O + \frac{3}{8} b^2 p^2 \\
A + B &= -\frac{1}{4} I^O + \frac{3}{8} \frac{b^2}{p^2} \tag{C.120}
\end{aligned}$$

Agora, contraímos β com $g^{\mu\nu}$, e teremos:

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\beta &= g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)k_\mu k_\nu}{k^4 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\
&= p^2 I^O - 2p^\alpha I_\alpha^O
\end{aligned} \tag{C.121}$$

E como

$$I_\alpha^O = \frac{p_\alpha}{2} I^O \quad ,$$

teremos

$$g^{\mu\nu}\beta = 0 \tag{C.122}$$

Por outro lado, tendo em vista a estrutura tensorial de β , também podemos escrever

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\beta &= g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu A + g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} p^2 B = p^2 (A + 4B) \\
A + 4B &= 0
\end{aligned} \tag{C.123}$$

Assim, temos um sistema formado por duas equações, C.120 e C.123, cuja solução é dada por

$$B = \frac{1}{12} I^O - \frac{1}{8} \frac{b^2}{p^2} \quad \text{e} \tag{C.124}$$

$$A = -\frac{1}{3} I^O + \frac{1}{2} \frac{b^2}{p^2} \quad . \tag{C.125}$$

Portanto, temos

$$\beta = \left(-\frac{1}{3} I^O + \frac{1}{2} \frac{b^2}{p^2} \right) p_\mu p_\nu + \left(\frac{1}{12} I^O - \frac{1}{8} \frac{b^2}{p^2} \right) p^2 g_{\mu\nu} \quad . \tag{C.126}$$

Substituindo os resultados de α e β na equação C.107, teremos:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^{O_1} &= g_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{4} I_{log}^2(\lambda^2) - \frac{b}{4} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2 e^2} \right) - \frac{b}{4} I_{log}^{(2)}(\tilde{\lambda}^2) + \right. \\
&+ \frac{b^2}{8} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2 e^2} \right) - \frac{b^2}{4} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2 e^2} \right) + \frac{b}{8} I_{log}(\lambda^2) - \\
&- \left. \frac{b^2}{8} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2 e^2} \right) - \frac{p^2}{12} I^O + \frac{b^2}{8} \right\} + \\
&+ \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left\{ \frac{b^2}{4} + \frac{p^2}{3} I^O - \frac{b^2}{2} \right\} \quad (C.127)
\end{aligned}$$

em que e é o número de Euler. Finalmente, podemos escrever

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^{O_1} &= g_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{4} I_{log}^2(\lambda^2) - \frac{b}{4} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{9}{8} I_{log}(\lambda^2) - \right. \\
&- \frac{b}{4} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{log}(\lambda^2) + \frac{b^2}{8} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{8} b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{11}{8} b^2 - \\
&- \left. \frac{p^2}{12} I^O \right\} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left\{ -\frac{b^2}{4} + \frac{p^2}{3} I^O \right\} \quad , \quad (C.128)
\end{aligned}$$

C.1 Solução de uma integral básica a n loops

Como complemento do apêndice, vamos resolver mais uma integral básica típica de n-loops. Consideremos uma integral básica típica do procedimento de Regularização Implícita:

$$I^{(n+1)} = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-p)^2} \ln^n \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \quad (C.129)$$

que após aplicarmos a identidade de separação das divergências básicas, ??, será escrita como

$$\begin{aligned}
I^{(n+1)} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \ln^n \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) - \\
&- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 - 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)^2 [(k - p)^2 - m^2]} \ln^n \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \\
&= I_{log}^{(n+1)}(m^2) - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 - 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)^2 [(k - p)^2 - m^2]} \ln^n \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right)
\end{aligned} \tag{C.130}$$

Usando a identidade

$$\ln a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{a^\epsilon - 1}{\epsilon} \tag{C.131}$$

teremos (o limite com $\epsilon \rightarrow 0$ é subentendido):

$$I_{fin}^{(n+1)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 - 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)^{2-n\epsilon} [(p - k)^2 - m^2]} \tag{C.132}$$

e agora temos condições de usar a parametrização de Feynman usual

$$\frac{1}{ab^\alpha} = \alpha \int_0^1 \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{[(a-b)x + b]^{\alpha+1}} \tag{C.133}$$

Teremos então:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx p^2 (1-2x)(1-x)^{1-n\epsilon} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + H^2]^{3-n\epsilon}} (2-n\epsilon) \\
&= \int_0^1 dx p^2 (1-2x)(1-x)^{1-n\epsilon} b^{\frac{\Gamma(1-n\epsilon)}{3-n\epsilon}} \frac{1}{(H^2)^{1-n\epsilon}} \\
&= \frac{(2-n\epsilon)b(-m^2)^{n\epsilon-1}}{(2-n\epsilon)(1-n\epsilon)} \int_0^1 \frac{p^2(1-2x)(1-x)^{1-n\epsilon}}{(H^2)^{1-n\epsilon}} (-m^2)^{1-n\epsilon} \tag{C.134}
\end{aligned}$$

Agora, usamos o seguinte artifício:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{n\epsilon} = n\epsilon \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{n\epsilon-1} \frac{p^2(1-2x)}{-m^2} \tag{C.135}$$

que nos permite escrever a parte finita como

$$\begin{aligned}
I_{fin}^{(n+1)} &= \frac{b(-m^2)^{n\epsilon}}{n\epsilon(1-n\epsilon)} \int_0^1 dx (1-x)^{1-n\epsilon} \frac{d}{dx} \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{n\epsilon} \\
&= \frac{b(-m^2)^{n\epsilon}}{n\epsilon(1-n\epsilon)} \left\{ -1 + \int_0^1 dx (1-n\epsilon)(1-x)^{-n\epsilon} \left(\frac{H^2}{-m^2} \right)^{n\epsilon} \right\} \\
&= \frac{b(-m^2)^{n\epsilon}}{n\epsilon(1-n\epsilon)} \left\{ -1 + (1-n\epsilon) \int_0^1 dx \left(-\frac{p^2 x}{m^2} \right)^{n\epsilon} \right\} \quad (C.136)
\end{aligned}$$

A segunda parte da integral finita é dada por

$$\tilde{I} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{1}{(-\lambda^2)^{k-\epsilon}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 - 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)^{2-k\epsilon} [(p-k)^2 - m^2]} \quad (C.137)$$

Fazendo $n - k = l$ e resolvendo a integral em k (designada por I_l), temos

$$I_l = \frac{b}{l\epsilon(1-l\epsilon)} \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right)^{l\epsilon} \left\{ -1 + (1-l\epsilon) \int_0^1 dx \left(-\frac{p^2 x}{\lambda^2} \right)^{l\epsilon} \right\} \quad (C.138)$$

e se expandirmos as potências de $l\epsilon$, teremos:

$$I_l = \frac{b}{l\epsilon(1-l\epsilon)} \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right)^{l\epsilon} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(l\epsilon)^i}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + (1-l\epsilon) \int_0^1 dx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(l\epsilon)^i}{i!} \ln^i \left(-\frac{p^2 x}{\lambda^2} \right)^{l\epsilon} \right\} \quad (C.139)$$

Para $i = 0$, temos:

$$i = 0 \rightarrow \frac{b}{l\epsilon(1-l\epsilon)} \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right)^{l\epsilon} \left\{ -1 + (1-l\epsilon) \int_0^1 dx \right\}$$

$$i = 0 \rightarrow \frac{b}{l\epsilon(1-l\epsilon)} \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right)^{l\epsilon} \{-l\epsilon\} \quad .$$

E assim, podemos escrever:

$$I_l = \frac{b}{(1-l\epsilon)} \left\{ -1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(l\epsilon)^{i-1}}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + (1-l\epsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(l\epsilon)^{i-1}}{i!} \int_0^1 dx \ln^i \left(-\frac{p^2 x}{\lambda^2} \right) \right\} \quad (C.140)$$

Escreveremos I_k como

$$I_k = b(A + B + C) \quad ,$$

sendo

$$A = \frac{1}{1 - k\epsilon} = - \sum_{i=0}^{\infty} (k\epsilon)^i$$

Neste somatório, apenas o termo para o qual $i = n$ contribuirá. Aqueles para os quais $i > n$ serão todos nulos, e quando $i < n$ todos são cancelados. Assim, teremos

$$\tilde{A} = -k^n \epsilon^n \quad .$$

B é dado por

$$B = - \sum_{m=0}^{\infty} (k\epsilon)^m \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(k\epsilon)^{i-1}}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right)$$

Na ordem n , o termo que sobrevive é $m + i - 1 = n$. E assim, o termo que sobrevive é dado por

$$\tilde{B} = -k^n \epsilon^n \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \quad .$$

E finalmente

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k\epsilon)^{i-1}}{i!} \int_0^1 dx \ln^i \left(-\frac{p^2 x}{\lambda^2} \right)$$

e para a ordem n da expansão em loops, ficaremos com

$$\tilde{C} = \frac{k^n \epsilon^n}{(n+1)!} \int_0^1 dx \ln^{n+1} \left(-\frac{p^2 x}{\lambda^2} \right)$$

ou ainda

$$\tilde{C} = k^n \epsilon^n \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n+1-i} \frac{1}{i!} \ln^i \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \quad .$$

Finalmente, somando \tilde{A} , \tilde{B} e \tilde{C} , temos:

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} I_k^n \\ &= b \left\{ -n! - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{n!}{i!} \ln^i \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n-i+1} \frac{n!}{i!} \ln^i \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right\} \quad (\text{C.141}) \end{aligned}$$

E a integral completa será escrita como

$$I^{(n+1)} = I_{log}^{(n+1)}(\lambda^2) + b \left\{ n! - \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n-i+1} \frac{n!}{i!} \ln^i \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right\} \quad (\text{C.142})$$

Apêndice 3: Tabela de integrais básicas para teorias não massivas a um e dois loops

Neste apêndice, apresentamos expressões para integrais básicas a um e dois loops que foram utilizadas ao longo desse trabalho. Todas as expressões já estão escritas em função do parâmetro de escala λ , regularizando os resultados no regime ultra-violeta e indicando que as relações de escala a um e dois loops já foram aplicadas, para que a dependência com a massa fictícia que nos protege de divergências infravermelhas seja eliminada.

D.1 Integrais características de diagramas a dois loops

$$\begin{aligned}
 I_{\mu\nu}^{(2)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^3 k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^4 [(p - k)^2 - m^2]} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \\
 &= \frac{1}{3} p_\mu p_\nu \left\{ I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{5}{6} I_{log}(\lambda^2) - b \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{3} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{9}{4} \right] \right\} \\
 &+ \frac{p^2 g_{\mu\nu}}{12} \left\{ -I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{6} I_{log}(\lambda^2) + \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{11}{6} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{11}{6} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

$$\begin{aligned}
I_\mu^{(2)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^2 k_\mu}{(k^2 - m^2)^3 [(p-k)^2 - m^2]} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \\
&= \frac{p_\nu}{2} \left\{ I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{log}(\lambda^2) - \frac{b}{2} \left[\ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 3 \right] \right\} \quad (D.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^{(2)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 - 2p \cdot k}{(k^2 - m^2)^2 [(p-k)^2 - m^2]} \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \\
&= I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + b \left\{ \frac{-1}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right\} \quad (D.3)
\end{aligned}$$

D.1.1 Integrais características de diagramas com divergências overladas

Como vimos ao longo do texto principal, os diagramas com divergências overladas têm amplitudes que são escritas em termos de integrais cujos integrandos possuem numeradores proporcionais a $k_\mu l_\nu$ (que ocorre na QED escalar) ou $k_\mu k_\nu$ (que ocorre na QED spinorial). Vamos designar a integral para a primeira teoria como $I_{\mu\nu}^{O(a,b)}$ e para o segundo caso escreveremos $I_{\mu\nu}^{O(a,a)}$. As expressões para tais integrais encontram-se no texto principal. Os resultados são então os seguintes:

$$I^O = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 l^2 (p-k)^2 (k-l)^2 (p-l)^2} \quad (D.4)$$

$$I_\mu^O = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2 l^2 (p-k)^2 (k-l)^2 (p-l)^2} \quad (D.5)$$

em que temos a seguinte propriedade

$$I_\mu^O = \frac{p_\mu}{2} I^O \quad ,$$

e

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^{O(a,a)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu l_\nu}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\
&= g_{\mu\nu} \left\{ \frac{b}{4} I_{\log}(\lambda^2) - \frac{b^2}{4} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{p^2}{12} I^O + \frac{11}{12} b^2 - b^2 \frac{\pi^2}{36} \right\} + \\
&+ \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left\{ \frac{p^2}{3} I^O - \frac{1}{6} b^2 + b^2 \frac{\pi^2}{36} \right\}, \tag{D.6}
\end{aligned}$$

em que I^O é apresentada acima.

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}^{O(a,a)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\
&= g_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{4} I_{\log}^2 \lambda^2 - \frac{b}{4} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{9}{8} b I_{\log}(\lambda^2) - \frac{b}{4} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{\log} \lambda^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{b^2}{8} \ln^2 \left(\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{8} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{p^2}{12} I^O + \frac{31}{24} b^2 \right\} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left\{ \frac{p^2}{3} I^O + \frac{b^2}{12} \right\}. \tag{D.7}
\end{aligned}$$

D.2 Integrais características de cálculos em um loop

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \\
&= I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b; \tag{D.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_\mu &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} \\
&= \frac{p_\mu}{2} \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right\}; \tag{D.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} \\
&= \frac{1}{3} p_\mu p_\nu \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \left(\ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 2 \right) - \frac{1}{6} b \right] - \\
&\quad - \frac{1}{6} p^2 g_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2} I_{\log}(\lambda^2) - \frac{1}{2} b \left[\ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 2 \right] - \frac{b}{3} \right\}. \quad (\text{D.10})
\end{aligned}$$

Apêndice 5: Cálculo explícito dos diagramas sobrepostos para a QED escalar e a QED espinorial

Neste apêndice, apresentamos o cálculo explícito das contribuições advindas de diagramas sobrepostos para o tensor de polarização do vácuo ($\Pi_{\mu\nu}(p^2)$), tanto na QED escalar quanto na QED espinorial. Começamos com o diagrama para a eletrodinâmica espinorial, cujo diagrama é dado por Aplicando as regras de Feynman, a amplitude para esse diagrama é escrita como

$$i\Pi_{\mu\nu}^O = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{i}{l-m} (-ie\gamma^\alpha) \frac{i}{k-m} (-ie\gamma^\mu) \frac{i}{k-p-m} (-ie\gamma^\beta) \frac{i}{l-p-m} (-ie\gamma^\nu) \frac{-i}{(l-k)^2 - m^2} \right\} . \quad (\text{E.1})$$

Usando os truques de Casimir para manipulação das matrizes γ , o numerador ($N_{\mu\nu}$) e o denominador (D) do integrando serão escritos como

$$D = k^2(k-p)^2 l^2(l-p)^2(l-k)^2 \quad \text{e}$$

$$N_{\mu\nu} = ie^4 \text{tr} \{ (l-p)\gamma_\nu l\gamma^\lambda k\gamma_\mu (k-p)\gamma_\lambda \} .$$

Aplicando novamente os truques de Casimir no numerador e usando as propriedades de anti-comutação das matrizes γ , temos

$$N_{\mu\nu} = -ie^4 tr\{\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma^\lambda\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\lambda\}(l-p)^\alpha l^\beta k^\rho (k-p)^\sigma \quad ,$$

que nos permite escrever

$$\begin{aligned} \gamma^\lambda\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\lambda &= -\gamma^\lambda\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma_\mu \\ &= -\gamma^\lambda\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\sigma - 2\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma + 2\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma_\mu \\ &= -2\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\sigma + 2\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma + 2\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma_\mu \\ &= -4g_{\mu\nu}\gamma_\sigma + 2\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma_\mu \\ &= -2\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\rho \quad \text{e assim} \end{aligned} \tag{E.2}$$

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu} &= 2ie^4 tr\{\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\rho\}(l-p)^\alpha l^\beta k^\rho (k-p)^\sigma \\ &= 32ie^4\{g_{\alpha\nu}(g_{\beta\sigma}g_{\mu\rho} - g_{\beta\mu}g_{\rho\sigma} + g_{\beta\rho}g_{\mu\sigma}) - \\ &\quad - g_{\alpha\beta}(g_{\nu\sigma}g_{\mu\rho} - g_{\nu\mu}g_{\rho\sigma} + g_{\nu\rho}g_{\sigma\mu}) + g_{\alpha\sigma}(g_{\nu\beta}g_{\mu\rho} - g_{\nu\mu}g_{\beta\rho} + g_{\nu\rho}g_{\beta\mu}) - \\ &\quad - g_{\alpha\mu}(g_{\nu\beta}g_{\sigma\rho} - g_{\nu\sigma}g_{\beta\rho} + g_{\nu\rho}g_{\beta\sigma}) + g_{\alpha\rho}(g_{\nu\beta}g_{\sigma\mu} - g_{\nu\sigma}g_{\beta\mu} + g_{\nu\mu}g_{\beta\sigma})\} \\ &\quad (l-p)^\alpha l^\beta k^\rho (k-p)^\sigma \\ &= 32ie^4\{(l-p)_\nu[k_\mu l \cdot (k-p) - l_\mu k \cdot (k-p) + (k-p)_\mu l \cdot k] \\ &\quad - l \cdot (l-p)[k_\mu(k-p)_\nu + (k-p)_\mu k_\nu - k \cdot (k-p)g_{\mu\nu}] \\ &\quad + (l-p) \cdot (k-p)[l_\mu k_\nu + l_\nu k_\mu - l \cdot k g_{\mu\nu}] \\ &\quad - (l-p)_\mu[l_\nu k \cdot (k-p) - (k-p)_\nu l \cdot k + k_\nu l \cdot (k-p)] \\ &\quad + (l-p) \cdot k[l_\nu(k-p)_\mu - (k-p)_\nu l_\mu + g_{\mu\nu} l \cdot (k-p)]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu} &= 32ie^4\{k_\mu l_\nu[l \cdot (k-p) + 2l \cdot k + 2(l-p) \cdot (k-p) - \\ &\quad - k \cdot (l-p) + k \cdot (l-p) - l \cdot (k-p)] \\ &\quad + k_\mu k_\nu[-2l \cdot (l-p) - 2l \cdot (l-p)] + \\ &\quad + p_\mu l_\nu[-k \cdot (l-p) + k \cdot (k-p) - 2l \cdot k + 2k \cdot (k-p) - \\ &\quad - 2l \cdot k + k \cdot (k-p) + k \cdot (l-p)] \\ &\quad + p_\mu p_\nu 2l \cdot k + \\ &\quad + g_{\mu\nu}[l \cdot (l-p)k \cdot (k-p) - (l \cdot k)(l-p) \cdot (k-p) + [l \cdot (k-p)][k \cdot (l-p)]]\} \end{aligned}$$

Se manipularmos todos as parcelas, veremos que boa parte dos termos na última expressão se cancelam, e os produtos escalares entre quadri-vetores podem ser reescritos usando as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} l \cdot (l - p) &= l^2 - l \cdot p = l^2 + \frac{1}{2}[(l - p)^2 - l^2 - p^2] \\ &= \frac{1}{2}[l^2 + (l - p)^2 - p^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (l - p) \cdot (k - p) &= l \cdot k - p \cdot k - p \cdot l + p^2 \\ &= -\frac{1}{2}[(l - k)^2 - l^2 - k^2] + \frac{1}{2}[(p - k)^2 - k^2 - p^2] + \\ &\quad + \frac{1}{2}[(p - l)^2 - l^2 - p^2] + p^2 \\ &= \frac{1}{2}[(p - l)^2 + (p - k)^2 - (l - k)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l \cdot (k - p) &= l \cdot k - l \cdot p - \frac{1}{2}[(l - k)^2 - k^2 - l^2] + \frac{1}{2}[(p - l)^2 - p^2 - l^2] \\ &= \frac{1}{2}[(p - l)^2 - (l - k)^2 + k^2 - p^2] \quad . \end{aligned}$$

Os últimos resultados podem então ser substituídos em E.3, em que obtemos cada parcela de $N_{\mu\nu}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu 1} &= 32ie^4 \frac{2}{2} k_\mu l_\nu [(p - l)^2 + (p - k)^2 - (l - k)^2 + l^2 + k^2] \\ &= 32ie^4 2k_\mu l_\nu [(p - l)^2 - (l - k)^2 + l^2] \end{aligned}$$

em que a última simplificação ocorre perante a simetria na integração em l ou k nos quatro últimos termos, já que se fizermos a troca de l por k , o integrando resultante dessa parcela permanece inalterado.

$$N_{\mu\nu 2} = -32ie^4 2k_\mu k_\nu [l^2 + (l - p)^2 - p^2]$$

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu 3} &= 32ie^4 p_\mu l_\nu [2k^2 + 2(k - p)^2 - 2p^2 + 2(l - k)^2 - 2l^2 - 2k^2] \\ &= 32ie^4 p_\mu l_\nu 2[(p - k)^2 + (l - k)^2 - l^2 - p^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\mu\nu 4} &= 32ie^4 p_\mu p_\nu [2l^2 - (l-k)^2] \\
N_{\mu\nu 5} &= 32ie^4 2g_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{4} [l^2 + (l-p)^2 - p^2] [k^2 + (k-p)^2 - p^2] + \right. \\
&+ \frac{1}{4} [(l-k)^2 + l^2 - k^2] [(p-l)^2 + (p-k)^2 - (l-k)^2] + \\
&+ \left. \frac{1}{4} [(p-l)^2 - (l-k)^2 + k^2 - p^2] [(p-k)^2 + (l-k)^2 + l^2 - p^2] \right\} \\
&= 32ie^4 \frac{g_{\mu\nu}}{4} \{ 2l^2 k^2 - 4p^2 k^2 - 4p^2 (p-k)^2 + 2(p-k)^2 (p-l)^2 + 2p^4 + \\
&2p^2 (l-k)^2 \} \\
&= 32ie^4 \frac{g_{\mu\nu}}{2} \{ p^4 + p^2 (l-k)^2 + (p-k)^2 (p-l)^2 + l^2 k^2 - 2p^2 k^2 - \\
&- 2p^2 (p-k)^2 \}
\end{aligned} \tag{E.3}$$

e o denominador do integrando é dado por

$$D = k^2 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2 \quad . \tag{E.4}$$

Passamos agora à resolução de cada uma das integrais obtidas a partir das parcelas anteriores. Assim, temos:

$$N_{\mu\nu 1} = 32ie^4 2k_\mu l_\nu [(p-l)^2 - (l-k)^2 + l^2] \tag{E.5}$$

em que podemos calcular três parcelas

$$\begin{aligned}
A &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu l_\nu (p-l)^2}{k^2 (p-k)^2 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2 (p-k)^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\nu}{l^2 (k-l)^2}
\end{aligned}$$

Podemos resolver a integral típica de um loop, no momento l , obtendo:

$$\begin{aligned}
A &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2 (k-p)^2} \frac{k_\nu}{2} \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right\} \\
&= \frac{1}{2} \{ I_{\log}(\lambda^2) + 2b \} I_{\mu\nu} - \frac{b}{2} I_{\mu\nu}^{(2)}
\end{aligned} \tag{E.6}$$

em que $I_{\mu\nu}$ e $I_{\mu\nu}^{(2)}$ são integrais típicas de um e dois loops, tabeladas no apêndice D. Da mesma forma, podemos escrever

$$\begin{aligned}
B &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu l_\nu (l-k)^2}{k^2(p-k)^2(l-k)^2 l^2 (p-l)^2} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu l_\nu}{k^2(p-k)^2 l^2 (p-l)^2} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2(p-k)^2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l_\nu}{l^2(p-l)^2} \\
&= I_\mu I_\nu = \frac{p_\mu}{2} I \frac{p_\nu}{2} I \\
&= \frac{p_\mu p_\nu}{4} I^2, \tag{E.7}
\end{aligned}$$

em que I é uma integral típica de um loop, também já tabelada anteriormente. Finalmente

$$\begin{aligned}
C &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu l_\nu l^2}{k^2(p-k)^2(l-k)^2(p-l)^2 l^2} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu l_\nu}{k^2(p-k)^2(l-k)^2(p-l)^2} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2(k-p)^2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l_\nu}{(l-k)^2(p-l)^2} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2(k-p)^2} \frac{(k+p)_\mu}{2} \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{(k-p)^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ I_{\log}(\lambda^2) + 2b \right\} I_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{4} (I_{\log}(\lambda^2) + 2b) I \\
&\quad - \frac{b}{2} I_{\mu\nu}^{(2)} + \frac{3b}{2} p_\mu I^{(2)} - b p_\mu p_\nu I^{(2)} \tag{E.8}
\end{aligned}$$

Somando as três parcelas, A, B e C, finalmente obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha &= A - B + C \\
&= 32ie^4 2 \left\{ [I_{\log}(\lambda^2) + 2b] I_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{4} b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) I - b I_{\mu\nu}^{(2)} + \frac{3}{2} b p_\mu I_\nu^{(2)} - b p_\mu p_\nu I^{(2)} \right\} \\
&\quad - \frac{p_\mu p_\nu}{4} \left\{ I_{\log}^2(\lambda^2) - 2b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{\log}(\lambda^2) + 4b I_{\log}(\lambda^2) + b^2 \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 4b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 4b^2 \right\} \tag{E.9}
\end{aligned}$$

A seguir, temos

$$N_{\mu\nu 2} = -32ie^4 2k_\mu k_\nu [l^2 + (l-p)^2 - p^2] \quad (\text{E.10})$$

que também nos proporciona três parcelas:

$$\begin{aligned} D &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu l^2}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 (p-k)^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 (p-l)^2} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 (k-p)^2} [(I_{\log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{(p-k)^2}{\lambda^2} \right))] \\ &= (I_{\log}(\lambda^2) + 2b) I_{\mu\nu} - b [I_{\mu\nu}^{(2)} - 2p_\mu I_{\nu}^{(2)} + p_\mu p_\nu I^{(2)}] \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

A seguir, temos

$$\begin{aligned} E &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu (l-p)^2}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 (p-k)^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 (k-l)^2} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 (p-k)^2} [(I_{\log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right))] \\ &= (I_{\log}(\lambda^2) + 2b) I_{\mu\nu} - b I_{\mu\nu}^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Finalmente, para a última parcela, temos

$$\begin{aligned} F &= -p^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\ &= -p^2 I_{\mu\nu}^{O1} \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

que é uma integral overlapada finita, típica do cálculo a dois loops no procedimento de regularização implícita. Agora, somamos as três parcelas, D, E

e F:

$$\beta = -32ie^4 2[2(I_{\log}(\lambda^2) + 2b)I_{\mu\nu} - 2bI_{\mu\nu}^{(2)} + 2bp_\mu I_\nu^{(2)} - bp_\mu p_\nu I_{\mu\nu}^{(2)} - p^2 I_{\mu\nu}^{O_1}] \quad (\text{E.14})$$

Terceira parcela:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu 3}^O &= 2ie^4 p_\mu \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\nu}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} + \right. \\ &+ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\nu}{k^2 (k-l)^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\ &\left. + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\nu}{k^2 l^2 (p-k)^2 (p-l)^2} - p^2 I_\nu^O \right\} \end{aligned}$$

Isolando as integrais em k ou em l e resolvendo-as, temos

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu 3}^O &= 2ie^4 \left\{ \frac{l_\nu}{l^2 (p-l)^2} [I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{l^2}{\lambda^2} \right) + 2b] - \right. \\ &- \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 (p-k)^2} \frac{(p+k)_\nu}{2} [I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{l^2}{\lambda^2} \right) + 2b] + \\ &+ \frac{p_\nu}{2} \left[I_{\log}^2(\lambda^2) - 2b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{\log}(\lambda^2) + 4b I_{\log}(\lambda^2) \right. \\ &\left. + b^2 \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 4b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 4b^2 - \frac{p^2}{2} p_\nu I^O \right] \right\} \quad (\text{E.15}) \end{aligned}$$

que poderemos escrever como

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu 3}^O &= 2ie^4 p_\mu \left\{ -\frac{p_\nu}{4} (I_{\log}(\lambda^2) + 2b) I + b \left(p_\nu I^2 - \frac{3}{2} I_\nu^{(2)} \right) + \right. \\ &+ \frac{p_\nu}{2} \left[I_{\log}^2(\lambda^2) - 2b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{\log}(\lambda^2) + 4b I_{\log}(\lambda^2) \right. \\ &\left. + b^2 \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 4b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 4b^2 \right] - \frac{p^2}{2} p_\nu I^O \left. \right\} \quad (\text{E.16}) \end{aligned}$$

A próxima contribuição é dada por

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu 4}^O &= ie^4 p_\mu \left\{ 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-l)^2(p-l)^2(p-k)^2} - \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 l^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \right\} \\
&= ie^4 p_\mu p_\nu \left\{ 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-p)^2} [I_{\log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{(p-k)^2}{\lambda^2} \right)] - I^2 \right\} \\
&= ie^4 p_\mu p_\nu \left\{ (I_{\log}(\lambda^2) + 2b)I - 2bI^{(2)} + b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I \right\} \\
&= ie^4 p_\mu p_\nu \left\{ (I_{\log}(\lambda^2) + 2b + b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right))I - 2bI^{(2)} \right\} .
\end{aligned} \tag{E.17}$$

E finalmente, a última parcela, que podemos escrever como

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu 5}^O &= \frac{ie^4 g_{\mu\nu}}{2} \left\{ p^4 I^O + p^2 I^2 + 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 l^2 (k-l)^2} - \right. \\
&\quad - 2p^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-l)^2 l^2 (p-k)^2 (p-l)^2} \\
&\quad \left. - 2p^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 l^2 (k-l)^2 (p-l)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{E.18}$$

A primeira integral é identicamente nula. Na segunda integral, se resolvermos a integração em k , podemos obter

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 (p-l)^2} \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{(p-l)^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] = \\
&(I_{\log}(\lambda^2) + 2b)I - bI^{(2)}
\end{aligned}$$

E a terceira integral, após resolvermos a integração em k , temos

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 (l-p)^2} \left\{ I_{\log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{l^2}{\lambda^2} \right) \right\} \tag{E.19}$$

que é exatamente igual à segunda integral. Finalmente, podemos escrever

$$\Pi_{\mu\nu 5}^O = \frac{ie^4 g_{\mu\nu}}{2} \left\{ p^4 I^O + p^2 [-3I_{log}(\lambda^2) - 6b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right)] I + 4bp^2 I^{(2)} \right\} \quad (\text{E.20})$$

Com cada contribuição calculada individualmente, no final podemos escrever a expressão final para a contribuição diagramática com *overlapping* do tensor de polarização do vácuo. Substituindo as integrais básicas em cada parcela, temos

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu 1}^O = & 2ie^4 \left\{ \frac{1}{2} (I_{log}(\lambda^2) + 2b) \left[\frac{2}{3} p_\mu p_\nu \left(I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{11}{6} b \right) + \right. \right. \\ & + \frac{2}{3} g_{\mu\nu} p^2 \left(-\frac{1}{4} I_{log}(\lambda^2) + \frac{b}{4} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{b}{3} \right) + \\ & + \left. \frac{p_\mu p_\nu}{2} \left(I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right) \right] - \\ & - b \frac{p_\mu p_\nu}{3} \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{5}{6} I_{log}(\lambda^2) + \frac{b}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{b}{3} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{9}{4} b \right] \\ & - b \frac{p^2 g_{\mu\nu}}{12} \left[-I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{6} I_{log}(\lambda^2) + \frac{b}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{11}{6} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{11}{6} b \right] \\ & + \frac{3}{4} p_\mu p_\nu \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{log}(\lambda^2) - \frac{b}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{b}{2} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + b \right] \\ & - b p_\mu p_\nu \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{b}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] \\ & - \frac{p_\mu p_\nu}{4} \left[I_{log}^2(\lambda^2) - 2b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{log}(\lambda^2) + 4b I_{log}(\lambda^2) \right. \\ & \left. + b^2 \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 4b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 4b^2 \right] \left. \right\} \quad (\text{E.21}) \end{aligned}$$

Reagrupando todos os termos, temos:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu 1}^O &= 2ie^4 \left\{ p_\mu p_\nu \left[\frac{1}{3} I_{log}^2(\lambda^2) - \frac{7}{12} b I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{11}{8} b I_{log}(\lambda^2) - \right. \right. \\
&\quad - \left. \frac{b}{12} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{log}(\lambda^2) - \frac{7}{24} b^2 \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{49}{72} b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{49}{18} b^2 \right] \\
&\quad + g_{\mu\nu} p^2 \left[-\frac{1}{12} I_{log}^2(\lambda^2) + \frac{1}{12} b I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{7}{24} b I_{log}(\lambda^2) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{b}{12} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{log}(\lambda^2) - \frac{b^2}{24} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{23}{7} b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{3}{8} b^2 \right] \right\} \\
&\hspace{15em} (E.22)
\end{aligned}$$

Finalmente, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu 1}^O &= -2ie^4 \left\{ 2(I_{log}(\lambda^2) + 2b) \left[\frac{p_\mu p_\nu}{3} \left(I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{11}{6} b \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{g_{\mu\nu}}{3} p^2 \left(-\frac{1}{4} I_{log}(\lambda^2) + \frac{b}{4} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{b}{3} \right) \right] \right\} \\
&\hspace{15em} (E.23)
\end{aligned}$$

Passemos então para a segunda parcela

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu 2}^O &= -2ie^4 \left\{ 2(I_{log}(\lambda^2) + 2b) \left[\frac{p_\mu p_\nu}{3} \left(I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{11}{6}b \right) \right] \right. \\
&+ \frac{g_{\mu\nu} p^2}{3} \left(-\frac{1}{4} I_{log}(\lambda^2) + \frac{b}{4} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{b}{3} \right) \\
&- \frac{2}{3} b p_\mu p_\nu \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{5}{6} I_{log}(\lambda^2) + \frac{b}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{b}{3} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{9}{4} b \right] \\
&- \frac{g_{\mu\nu} p^2}{6} \left[-I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{6} I_{log}(\lambda^2) + \frac{b}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{11}{6} b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{11}{6} b \right] \\
&+ b p_\mu p_\nu \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{log}(\lambda^2) - \frac{b}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{b}{2} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + b \right] \\
&- b p_\mu p_\nu \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{b}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] \\
&- p^2 g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{4} I_{log}^2(\lambda^2) - \frac{b}{4} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{9}{8} b I_{log}(\lambda^2) - \frac{b}{4} \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{log}(\lambda^2) \right. \\
&+ \left. \frac{b^2}{8} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{7}{8} b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{11}{8} b^2 - \frac{p^2}{12} I^O \right] - \\
&\left. - p_\mu p_\nu \left[\frac{p^2}{3} I^O - \frac{b^2}{4} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{E.24}$$

E reagrupando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu 2}^O &= -2ie^4 \left\{ p_\mu p_\nu \left[\frac{2}{3} I_{log}^2(\lambda^2) - \frac{2}{3} b I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{5}{2} I_{log}(\lambda^2) - \frac{2}{3} b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{log}(\lambda^2) \right. \right. \\
&- \left. \frac{b^2}{3} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{29}{18} b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{p^2}{3} I^O + \frac{187}{36} b^2 \right] \\
&+ g_{\mu\nu} p^2 \left[-\frac{5}{12} I_{log}^2(\lambda^2) + \frac{5}{12} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{41}{24} b I_{log}(\lambda^2) + \frac{5}{12} b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{log}(\lambda^2) - \right. \\
&\left. - \frac{b^2}{24} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{109}{72} b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{p^2}{12} I^O - \frac{17}{8} b^2 \right] \left. \right\} .
\end{aligned} \tag{E.25}$$

Para a terceira parcela, temos

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu 3}^O &= 2ie^4 p_\mu p_\nu \left[-\frac{1}{4}(I_{log}(\lambda^2) + 2b)[I_{log}(\lambda^2) - b \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + 2b] \right. \\
&+ b \left(I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{b}{2} \ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + b \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) \right) - \\
&- \frac{3}{4}b \left(I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2}I_{log}(\lambda^2) - \frac{b}{2} \ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + \frac{b}{2} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + b \right) \\
&+ \frac{1}{2}I_{log}^2(\lambda^2) + 2bI_{log}(\lambda^2) - b \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) I_{log}(\lambda^2) + \frac{b^2}{2} \ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \\
&- 2b^2 \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + 2b^2 - \frac{p^2}{2}I^O \quad \quad \quad (E.26)
\end{aligned}$$

E reagrupando os termos, teremos

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu 3}^O &= 2ie^4 p_\mu p_\nu \left[\frac{1}{4}I_{log}^2(\lambda^2) + \frac{b}{4}I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{5}{8}I_{log}(\lambda^2) - \right. \\
&- \frac{3}{4}b \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) I_{log}(\lambda^2) + \frac{3}{8}b^2 \ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{7}{8}b^2 \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{p^2}{2}I^O + \frac{1}{4}b^2 \quad \quad \quad (E.27)
\end{aligned}$$

Para a quarta parcela, temos

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu 4}^O &= ie^4 p_\mu p_\nu \left[I_{log}^2(\lambda^2) + 4bI_{log}(\lambda^2) + 4b^2 - b^2 \ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) \right. \\
&- \left. 2b \left(I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{b}{2} \ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + b \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) \right) \right] \\
&= ie^4 p_\mu p_\nu \left[I_{log}^2(\lambda^2) - 2bI_{log}^{(2)}(\lambda^2) + 4bI_{log}(\lambda^2) \right. \\
&- \left. 2b^2 \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + 4b^2 \right] \quad \quad \quad (E.28)
\end{aligned}$$

Finalmente, temos a última parcela para o diagrama overlapado:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu 5}^O &= ie^4 g_{\mu\nu} p^2 \left[\frac{1}{2} \left(-3I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 6b \right) \left[I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 12b \right] + \frac{p^2}{2} I^O + 2b \left(I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{b}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) \right] \\
&= ie^4 g_{\mu\nu} p^2 \left[-\frac{3}{2} I_{log}^2(\lambda^2) + 2b I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - 6b I_{log}(\lambda^2) \right. \\
&\quad \left. + b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{log}(\lambda^2) - \frac{b^2}{2} \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 4b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{p^2}{2} I^O - 6b^2 \right]
\end{aligned} \tag{E.29}$$

Se somarmos todas as parcelas teremos:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^O &= \frac{8}{3} ie^4 \left\{ p_\mu p_\nu \left[\frac{5}{2} I_{log}^2(\lambda^2) - 4b I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + 9b I_{log}(\lambda^2) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{log}(\lambda^2) + \frac{5}{2} b^2 \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{17}{3} b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{4}{3} b^2 - p^2 I^O \right] + \right. \\
&\quad \left. + g_{\mu\nu} p^2 \left[-\frac{5}{2} I_{log}^2(\lambda^2) + 4b I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{19}{2} b I_{log}(\lambda^2) + b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) I_{log}(\lambda^2) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} b^2 \ln^2 \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{29}{6} b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{15}{2} b^2 + p^2 I^O \right] \right\}
\end{aligned} \tag{E.30}$$

em que notamos a ocorrência de divergências não locais. Entretanto, precisamos somar o resultado do diagrama com o respectivo gráfico de contratermo, que é uma correção para o tensor de polarização do vácuo a um loop, com o vértice elétron fóton corrigido. Com este procedimento eliminamos as divergências não locais e mantém somente as divergências típicas

da ordem. Assim, teremos:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}^O + \Pi_{\mu\nu}^{CT} &= \frac{8}{3}ie^4 \left\{ p_\mu p_\nu \left[-\frac{3}{2}I_{log}^2(\lambda^2) - 4bI_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{22}{3}bI_{log}(\lambda^2) \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{5}{2}b^2 \ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{17}{3}b^2 \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{4}{3}b^2 - p^2 I^O \right] \\
 &+ g_{\mu\nu} p^2 \left[-\frac{3}{2}I_{log}^2(\lambda^2) + 4bI_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{47}{6}bI_{log}(\lambda^2) - \right. \\
 &\left. \left. - \frac{1}{2} \ln^2\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + \frac{29}{6}b^2 \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) - \frac{15b^2}{2} + p^2 I^O \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{E.31}$$

Se somarmos este resultado com o resultado do diagrama a dois loops com divergências aninhadas, teremos

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{8}{3}ie^4 b(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) \left\{ \frac{3}{2}I_{log}^2(\lambda^2) - 3bI_{log}^{(2)}(\lambda^2) \right. \\
 &\left. + \frac{31}{6}bI_{log}(\lambda^2) - \frac{3}{2} \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) + \frac{3}{2} - p^2 I^O \right\} ,
 \end{aligned} \tag{E.32}$$

que possui a estrutura transversal desejada. Como vimos, ao longo do texto principal, a partir do contratermo que escrevemos no contexto da Regularização Implícita para o tensor de polarização do vácuo a dois loops, podemos obter o resultado correto para a função β do grupo de renormalização da QED, sendo este um bom teste para nossa metodologia.

E.1 Diagrama sobreposto para o tensor de polarização do vácuo na QED escalar

Aplicando as regras de Feynman no diagrama sobreposto para o tensor de polarização do vácuo na QED escalar, obtemos a seguinte amplitude

$$\Pi_{\mu\nu}^O = -ie^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(2k-p)_\mu (2l-p)_\nu (k+l) \cdot (k+l-2p)}{k^2 l^2 (k-p)^2 (l-k)^2 (l-p)^2} , \tag{E.33}$$

O produto escalar pode ser dividido em duas parcelas, que podemos escrever como

$$(k+l) \cdot (k-p) = k^2 - k \cdot p + l \cdot k - l \cdot p$$

$$(k + l) \cdot (l - p) = l^2 - l \cdot p + l \cdot k - k \cdot p$$

e se somamos e subtraímos termos como k^2 e l^2 , podemos somar as duas últimas parcelas e obter

$$(k - p)^2 - p^2 + (l - p)^2 - p^2 + l^2 + k^2 - (l - k)^2 \quad .$$

A outra parte do denominador nos dá

$$(2k - p)_\mu (2l - p)_\nu = 4k_\mu l_\nu - 2p_\mu l_\nu - 2p_\nu k_\mu + p_\mu p_\nu \quad .$$

E então, podemos reescrever $\Pi_{\mu\nu}^O$ como

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^O &= -ie^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(4k_\mu l_\nu - 2p_\mu l_\nu - 2p_\nu k_\mu + p_\mu p_\nu)}{k^2 l^2 (k - p)^2 (l - k)^2 (l - p)^2} \\ &\quad \left((k - p)^2 - 2p^2 + (l - p)^2 + l^2 + k^2 - (l - k)^2 \right) \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

e podemos constatar, por simetria nas variáveis de integração que fatores como $2p_\mu l_\nu$ e $2p_\nu k_\mu$ darão a mesma contribuição para a amplitude. O mesmo fato ocorre com os termos l^2 e k^2 e $(k - p)^2$ e $(l - p)^2$. Desta forma, podemos somar estas contribuições e reescrever o numerador do integrando como

$$N_{\mu\nu} = (4k_\mu l_\nu - 2p_\mu k_\nu + p_\mu p_\nu)(-2p^2 + 2k^2 + 2(p - k)^2 - (k - l)^2) \quad .$$

E assim, obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^O &= -ie^4 \left\{ -2p^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(4k_\mu l_\nu - 2p_\mu k_\nu + p_\mu p_\nu)}{k^2 l^2 (k - p)^2 (l - k)^2 (l - p)^2} \right. \\ &\quad + 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(4k_\mu l_\nu - 2p_\mu k_\nu + p_\mu p_\nu) k^2}{k^2 l^2 (k - p)^2 (l - k)^2 (l - p)^2} \\ &\quad + 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(4k_\mu l_\nu - 2p_\mu k_\nu + p_\mu p_\nu) (p - k)^2}{k^2 l^2 (k - p)^2 (l - k)^2 (l - p)^2} \\ &\quad \left. - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(4k_\mu l_\nu - 2p_\mu k_\nu + p_\mu p_\nu) (k - l)^2}{k^2 l^2 (k - p)^2 (l - k)^2 (l - p)^2} \right\} \\ &= -ie^4 \left\{ -2p^2 I_{\mu\nu}^A + 2I_{\mu\nu}^B + 2I_{\mu\nu}^C - I_{\mu\nu}^D \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

em que cada parcela é definida como

$$\begin{aligned}
 I_{\mu\nu}^A &= 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu l_\nu}{k^2 l^2 (k-p)^2 (l-k)^2 (l-p)^2} - \\
 &- 4p_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{k^2 l^2 (k-p)^2 (l-k)^2 (l-p)^2} + \\
 &+ p_\mu p_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 l^2 (k-p)^2 (l-k)^2 (l-p)^2} \\
 &= 4I_{\mu\nu}^O - 4p_\mu I_\nu^O + 4p_\mu p_\nu I^O \\
 &= 4I_{\mu\nu}^O - p_\mu p_\nu I^O
 \end{aligned} \tag{E.36}$$

e usando a seguinte propriedade

$$I_\nu^O = \frac{p_\nu}{2} I^O \quad .$$

Usando o resultado para $I_{\mu\nu}^O$, calculado no apêndice 3, chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 I_{\mu\nu}^A &= g_{\mu\nu} \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - \frac{11}{3} b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{11}{3} b^2 + \frac{\pi^2}{9} - \frac{p^2}{3} I^O \right\} \\
 &+ \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left\{ \frac{8}{3} b^2 \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{2}{3} b^2 - \frac{\pi^2}{9} b^2 + \frac{p^2}{3} I^O \right\} \quad .
 \end{aligned} \tag{E.37}$$

A parcela $I_{\mu\nu}^B$ será dada por

$$\begin{aligned}
 I_{\mu\nu}^B &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu l_\nu - 4p_\mu l_\nu - p_\mu p_\nu}{l^2 (k-p)^2 (l-k)^2 (l-p)^2} \\
 &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4l_\nu - 2p_\nu}{l^2 (l-p)^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(p-k)^2 (p-l)^2} + \\
 &+ \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{-2p_\mu l_\nu + p_\mu p_\nu}{l^2 (l-p)^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 (p-l)^2}
 \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais no momento k , teremos:

$$\begin{aligned}
 I_{\mu\nu}^B &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4l_\nu - 2p_\nu}{l^2 (l-p)^2} \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{(p-l)^2}{\lambda^2} \right) \right\} \frac{(l+p)_\mu}{2} + \\
 &+ \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{-2p_\mu l_\nu + p_\mu p_\nu}{l^2 (l-p)^2} \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{(p-l)^2}{\lambda^2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

que podemos reescrever como

$$I_{\mu\nu}^B = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{2l_\mu l_\nu - p_\mu l_\nu}{l^2(l-p)^2} \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{(p-l)^2}{\lambda^2} \right) \right\} \quad (\text{E.38})$$

Para empregar o método que implementamos para o cálculo de integrais além da ordem de um loop, é conveniente que façamos um *shift* no momento de integração para o termo que carrega a dependência logarítmica, de forma que

$$l \rightarrow l + p$$

$$2l_\mu l_\nu - p_\mu l_\nu \rightarrow 2(l+p)_\mu(l+p)_\nu - p_\mu(l+p)_\nu = 2l_\mu l_\nu + 3p_\mu p_\nu + p_\mu l_\nu$$

que nos permite escrever $I_{\mu\nu}^B$ como

$$I_{\mu\nu}^B = I_{\log}(\lambda^2)[2I_{\mu\nu} - p_\mu I_\nu] - b\{2I_{\mu\nu}^{(2)} - 3p_\nu I_\mu^{(2)} + p_\mu \nu I^{(2)}\} \quad , \quad (\text{E.39})$$

sendo $I_{\mu\nu}$, I_ν , $I_{\mu\nu}^{(2)}$, $I_\mu^{(2)}$ e $I^{(2)}$, integrais típicas do cálculo a um e dois loops, já definidas anteriormente. Usamos ainda a seguinte identidade:

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l_\mu}{l^2(l-p)^2} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{l_\mu}{l^2(l+p)^2} \quad ,$$

que ocorre no momento em que fazemos o *shift* no momento de integração

$$l \rightarrow l + p \quad .$$

Passemos à parcela $I_{\mu\nu}^C$, dada por

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^C &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu l_\nu - 2p_\mu l_\nu - 2p_\nu k_\mu + p_\mu p_\nu}{(l^2(l-p)^2 k^2(k-l)^2)} \\ &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4l_\nu - 2p_\nu}{l^2(l-p)^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2(k-l)^2} + \\ &+ \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu p_\nu - 2p_\mu l_\nu}{l^2(l-p)^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-l)^2} \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

Resolvendo as integrais em k , características da ordem 1 loop, obtemos

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^C &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4l_\nu - 2p_\nu l_\mu}{l^2(l-p)^2} \frac{1}{2} \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] \\ &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu p_\nu - 2p_\mu l_\nu}{l^2(l-p)^2} \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] \end{aligned} \quad (\text{E.41})$$

que podemos agora escrever em termos de integrais básicas como

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^C &= I_{\log}(\lambda^2) [2I_{\mu\nu} - p_\nu I_\mu] - 2bI_{\mu\nu}^{(2)} + bp_\nu I_\mu^{(2)} \\ &= p_\mu p_\nu I_{\log}(\lambda^2) I - bp_\mu p_\nu I^{(2)} - 2p_\mu I_{\log}(\lambda^2) I_\nu + 2bp_\mu I_\nu^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{E.42})$$

Finalmente, vamos escrever $I_{\mu\nu}^D$ em termos de integrais básicas:

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^D &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu - 4p_\mu l_\nu + p_\mu p_\nu}{l^2(l-p)^2 k^2(k-p)^2} \\ &= 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2(k-p)^2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l_\nu}{l^2(l-p)^2} - \\ &\quad - 4p_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-p)^2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l_\nu}{l^2(l-p)^2} + \\ &\quad + p_\mu p_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-p)^2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2(l-p)^2} \\ &= 4 \frac{p_\mu}{2} \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] 4 \frac{p_\nu}{2} \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] - \\ &\quad - 4p_\mu \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] \frac{p_\nu}{2} \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] \\ &\quad + p_\mu \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] p_\nu \left[I_{\log}(\lambda^2) - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + 2b \right] \\ &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.43})$$

Se somarmos todas as parcelas, iremos obter

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^O &= -ie^4 \{ -2p^2 [4I_{\mu\nu}^O - p_\mu p_\nu I^O] + \\ &\quad + [I_{\log}(\lambda^2) + 2b] [8I_{\mu\nu}(p^2) - 2p_\mu p_\nu I(p^2)] \\ &\quad - 2b [4I_{\mu\nu}^{(2)} - 6p_\nu I^{(2)\mu}(p^2) + 2p_\mu p_\nu I^{(2)}(p^2)] \} \quad , \end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

sendo que a remoção de divergências não locais foi apresentada no capítulo 4, no texto principal.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Siegel, W. , Phys. Lett.**B84**, 193(1979).
- [2] Siegel, W. , Phys. Lett.**B94**, 37(1980).
- [3] Capper, D.M., Jones, D. R. T., Nieuwenhuizen, P. van, , Nucl.Phys**B167**, 479(1981).
- [4] Jaele, I., Jones, D. R. T., Roberts, K. L. , Z. Phys.**C63**, 157(1994).
- [5] Stockinger, D. *Regularization of supersymmetric theories - recent progress*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **160**, 136(2006).
- [6] Heynemeyer, S., Hollik, W., Weiglein, G. *Eletroweak precision observables in the minimal supersymmetric standard model*, Phys. Rep. **425**, 265(2006).
- [7] Saavedra, J. A. Aguilar et al., , Eur. Phys. J. **C46**, 43(2006).
- [8] Elias, V., Mackeon, G., Mann, R. B., Phys. Rev. **D28**, 1978(1983).
- [9] Elias, V., Mackeon, G., Mann, R. B., Philipps, S. B., Phys. Lett. **B133**, 83(1983).
- [10] Asorey, M., Falceto, F., *Consistency of the Regularization of Gauge Theories by High Covariant Derivatives* Phys. Rev. D **54** 5290(1996).
- [11] Grassi, P. A., Hurth, T., Steinhauser, M. *Practical Algebraic Renormalization*, Annals Phys. **288**, 197(2001).
- [12] Piguet, O., Rouet, A., Phys. Rep. **76**, (1981).
- [13] Piguet, O., Sorella, S. P., *Algebraic Renormalization Lecture Notes in Physics*, 28(1995), Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

-
- [14] Maggiore, N., Piguet, O. Wolf, Sylvain, Nucl.Phys. **B476**, *Algebraic Renormalization of $N = 1$ Supersymmetric Gauge Theories with Supersymmetry Breaking Masses* 329(1996).
- [15] Maggiore, N., Piguet, O., Ribordy, M., *Algebraic Renormalization of $N = 2$ Supersymmetric Yang-Mills Chern-Simons Theory in the Wess-Zumino Gauge* Helv.Phys.Acta **68** 264(1995).
- [16] Becchi, C., Rouet, A., Stora, R., Comm. Math. Phys. **42**(1975);
- [17] Becchi, C., Rouet, A., Stora, R., Ann. Phys. **98**, 287(1976);
- [18] Becchi, C., *Lectures on Renormalization of Gauge Theories in Relativity, group and topology II*, Les Houches (1983).
- [19] Gomes, M., *Teoria Quântica dos Campos*, Editora da Universidade de São Paulo - EDUSP, São Paulo (2002). Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge(1955).
- [20] Freedman, D. Z., Johnson, K., Latorre, J. I., Nucl. Phys. **B371** 353(1992).
- [21] Pérez Victoria, M., *Phys. Lett. B* **442** 315(1998).
- [22] del Aguila, F., Culatti, A., Tapia, R. Muñoz, Pérez Victoria, M. , *Nucl. Phys. B* **504** 532(1997).
- [23] del Aguila, F., Culatti, A., Tapia, R. Muñoz, Pérez Victoria, M. , *Phys. Lett. B* **419** 263(1998).
- [24] del Aguila, F., Culatti, A., Tapia, R. Muñoz, Pérez Victoria, M. , *Nucl. Phys. B* **537** 561(1999) .
- [25] Mas, J., Perez-Victoria, M., Seijas, C., *JHEP* **0203** 49(2002).
- [26] Seijas, C., *Two loop divergences studied with one loop Constrained Differential Renormalization*, *Annals Phys.* **322** (2007) 1972.
- [27] Jauch, J. M, Rohrlich, F, *The Theory of photons and electrons*, Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge(1955).
- [28] Cvitanović, P. , *Nucl. Phys. B* **130** 114(1977).

-
- [29] Peskin, E.M., Schroeder, D.V., *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1996.
- [30] Cvitanović, P. , *Phys. Rev. D* **14** 1536(1976).
- [31] Taylor, J. C., *Ward Identities and charge renormalization of the Yang-Mills Field*Nucl. Phys.**B 33** 436(1971) .
- [32] Zee, E.M.*Quantum Field Theory in a nutsch*, Addison-Wesley Publishing Company, 1996.
- [33] t'Hooft, G., *Renormalization of massless Yang-Mills fields*, Nucl. Phys. **B33**, 173(1971).
- [34] t'Hooft, G., Veltman, M., *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*Nucl. Phys. **B44**, 1891972.
- [35] Breitenlohner, P., Maison, D., Commun. Math. Phys. **52**, 111977.
- [36] Bollini, C., Giambiagi, J., Nuovo Cimento **B12**, 201972.
- [37] Ashmore, J., Nuovo Cimento Lett. **4**, 2891972
- [38] Bogoliubov, N.N., Shirkov, D. V. *Introduction to the theory of quantized fields*(3rd edition), John Wiley and Sons, 1980.
- [39] Muta, T., *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific Lectures Notes in Physics, 1998.
- [40] Battistel, O., *Tese de Doutorado*, Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, (1999).
- [41] Baêta Scarpelli, A.P., Battistel, O., Nemes, M.C.*Testing a New Strategy to Treat Divergent Amplitudes in QED*, Braz. Jour. Physics, 161(1998).
- [42] Pontes, C.R., Baêta Scarpelli, A. P., Sampaio, M., Acebal, J. L., Nemes, M. C.,*On the equivalence between Implicit Regularization and Constrained Differential Regularization*, arxiv: hep-th/0706.1210 v1 (2007).
- [43] Battistel, O. A., Mota, A. L., Nemes, M. C., Mod. Phys. Lett. **A 13** 1597(1998).

-
- [44] Carneiro, D., Baêta Scarpelli, A. P., Sampaio, M., Nemes, M. C., JHEP **12** 044(2003).
- [45] Sampaio, M., Baêta Scarpelli, A. P., Otonni, J. E., Nemes, M. C., Int. J. Theor. Phys. **45**, 4362006.
- [46] Palmer, C. D., Carrington, M. E., *A General Expression for Symmetry Factors of Feynman Diagrams*, arxiv: hep-th/01080088 v1, (2001).
- [47] Freedman, D. Z., Johnson, K., Lattorre, J. I. *Nucl. Phys.*, **B371**, 353 (1992).
- [48] Jackiw, R., *When radiative corrections are finite but indetermined*, hep-th/9903044 (1999).
- [49] Griffiths, D., "Introduction to Elementary Particles", John Wiley Sons, Inc. (1987).
- [50] 't Hooft, G, *Nucl. Phys B*, **74**, 491(1974).
- [51] Mota, A.L., *Tese de Doutorado*, Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, (1999).
- [52] Hatfield, B., *Quantum field theory of point particles and strings*, Addison Wesley Company, Massachussets, 1998.
- [53] Ramond, P., *Field Theory: a modern primer*, Addison-Wesley Publishing Company 1990.
- [54] Ryder, L. H., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1987.
- [55] Pauli, W., Villars, F., *On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory*, Rev. Mod. Phys. **21**, 434(1949).
- [56] Dias,E.W., Hiller, B., Mota A. L., Nemes, M.C., Sampaio, M., Mod. Phys. Lett. **A21**, 339(2006).
- [57] Sampaio, M, Baêta Scarpelli, A. P., Hiller, B., Brizola, A., Nemes, M. C., Gobira, S. *Comparing implicit, differential, dimensional and Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann renormalization*, Phys. Rev. **D65**, 125023(2002).

-
- [58] Baêta Scarpelli, A. P., Sampaio, Nemes, M. C., Hiller, B. *Chiral anomaly and CPT invariance in an implicit momentum space regularization framework*, Phys. Rev. **D64**, 046013(2001).
- [59] Treiman, S.B., Witten, E., Jackiw, R., Zumino, B. (Eds.) *Currente Algebra and anomalies* (World Scientific, Singapore, 1985)
- [60] Smirnov, V. A., *Evaluating Feynman Integrals*, Berlin (Springer), 2005.
- [61] N. N. Bogoliubov, O. S. Parasiuk, *Acta Math.* **97** 227(1957).
- [62] Hepp, K. *Comm. Math. Phys.* **2** 301(1966)
- [63] Zimmermann, W. *Comm. Math. Phys.* **15** (1969) 208.
- [64] Hiller, B., Mota A. L., Nemes, M.C., Sampaio, M., Osipov, A. A., Nucl. Phys. **A769**, 53(2006).
- [65] Ottoni, J. E., Scarpelli, A. P. B., Sampaio, M., Nemes, M. C., Phys. Lett. **B642**, 253(2006).
- [66] Mota, A.L., Hiller, B., Nemes, M.C., Walliser, H., *Meson Properties in a Renormalizable Version of the NJL Model*, *Nuc. Phys. A*, **A652**, 73 (1999).
- [67] Tavares de Brito, L. K., Fargnolli, H., Baêta Scarpelli, A. P., Sampaio, M., Nemes, M. C., *trabalho em andamento*.
- [68] Abbott, L. F., Nucl. Phys. **B185**, 189(1981).

