

**DINÂMICA DE FORMAÇÃO DE PADRÕES:  
PRECURSORES, MORFOLOGIA E SELEÇÃO DE MODOS EM UM  
SISTEMA PERTURBADO**

Robson Luiz Santos

Novembro / 2008

Robson Luiz Santos

*Dinâmica de formação de padrões:  
precursores, morfologia e seleção de modos  
em um sistema perturbado*

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor EM CIÊNCIAS (Física).

Orientador:

Prof. Dr. José Marcos Andrade Figueiredo

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Belo Horizonte – MG

Novembro / 2008

# *Agradecimentos*

Ao José Marcos, que sempre me incentivou a vencer os obstáculos que apareceram durante este trabalho. Por me ensinar muito, do pouco que sei hoje e por me dar a liberdade para eu organizasse meu tempo à minha maneira.

À Silvana, Maria Luiza e João Pedro, minha companheira e meus filhos, pelo excelente convívio durante este tempo.

Aos meus pais, irmãos e parentes pela atenção e apoio que me deram durante a realização deste trabalho. À Arlete, devo um agradecimento especial, por ser quem, em algumas vezes, me substitui em meus deveres como pai.

Aos meus amigos e colegas da UFMG, com os quais me relaciono no dia-a-dia. Também aos professores e funcionários do departamento de Física que, de alguma forma, contribuíram para a minha formação e para o meu trabalho.

Ao Édson e ao Márcio, meus maiores amigos durante o doutorado. Com eles, os áridos momentos durante os estudos, puderam ser intercalados por momentos de diversão. Aos demais colegas com os quais convivi durante os estudos.

À Laís, pela ajuda na revisão e, Claudio e Aurélio, pela sólida amizade.

Às instituições financiadoras: CNPq e Finep, pela concessão de bolsas, investimentos nos materiais de consumo e na estrutura do laboratório através do *PRONEX*.

A todos aqueles que contribuíram, da sua forma, e torceram para o sucesso deste trabalho.

# *Resumo*

Neste trabalho, foi feito e analisado um estudo experimental de um sistema formador de padrão espaço-temporal. O padrão gerado nesse sistema foi submetido a uma perturbação determinística. Esta perturbação controlada muda dinamicamente um importante parâmetro de controle do sistema e, por causa disto, muitos efeitos não-triviais surgiram em seus ramos pré e pós-bifurcação. O sistema que estudamos, que é uma interface hidrodinâmica unidimensional, pode ser monitorado com grande precisão no laboratório. Usando técnicas de processamento de imagens, fomos capazes de captar a dinâmica do padrão na presença dessa perturbação. Os dados foram tratados com análises de Fourier e estatísticas, as quais nos permitiram obter medidas dessa interface fluido-fluido. No ramo pré-bifurcação, os efeitos da perturbação foram percebidos como amplificação crítica das oscilações na posição da interface. Elas apresentam as mesmas características de um precursor, o qual é um tipo de instabilidade observada em um sistema fora do equilíbrio antes de uma bifurcação. Após a bifurcação, a perturbação imposta ao sistema afetou a evolução dos modos do padrão e seus efeitos persistiram mesmo quando houve uma saturação da amplitude do padrão. Nossas observações também indicam que a morfologia do padrão está associada com um processo de seleção do vetor de onda. Fomos capazes de fazer medidas detalhadas da forma do padrão e de seus modos de Fourier associados. Elas asseguraram a detecção de uma transição entre dois regimes diferentes da evolução do padrão. Deste modo, a interação entre o domínio no tempo, consistindo das atividades precursoras, e o domínio espacial, quando um padrão periódico está presente, foi explorada e ela foi responsável pelos efeitos espaço-temporais observados no sistema que estudamos.

# *Abstract*

In this work, an experimental study of a spatial-temporal pattern forming system, was performed and analyzed. The pattern generated in that system was subject to a deterministic perturbation. This controlled perturbation changes dynamically an important control parameter of the system and because of this many nontrivial effects arose in its pre and post-bifurcation branches. The system we studied, a one-dimensional hydrodynamic interface, can be monitored with great precision in the laboratory. Using image processing techniques we were able to capture the pattern dynamics in the presence of that perturbation. The data were treated with Fourier and statistical analysis which allowed us to obtain measurements of that fluid-fluid interface. In the prebifurcation branch, the effects of the perturbation were perceived as a critical amplification of the oscillations in the interface position. They present the same features of a precursor which is a kind of instability in a nonequilibrium system observed prior to a bifurcation. After the bifurcation, the imposed perturbation affected the evolution of pattern modes and its effects persisted even when there was a saturation of mode amplitudes. Our observations also indicate that pattern morphology is associated with a wave vector selection process. We were able to make detailed measurement of pattern shape and its associated Fourier modes. They assured the detection of a crossover between two different regimes of the pattern evolution. This way, the interaction between time domain, consisting of precursor activities, and spatial domain, when a periodic pattern is present, was explored and it was responsible for the spatiotemporal effects observed in the system we have studied.

# *Sumário*

<b>Lista de Figuras</b>	p. 8
<b>Lista de Figuras</b>	p. 8
<b>Lista de Tabelas</b>	p. 13
<b>Lista de Tabelas</b>	p. 13
<b>1 Introdução</b>	p. 14
1.1 Sistemas Complexos . . . . .	p. 14
1.2 Termodinâmica de não-equilíbrio e Sistemas dinâmicos . . . . .	p. 15
1.3 Formação de padrões . . . . .	p. 16
1.4 As instabilidades e os padrões . . . . .	p. 17
1.5 Formação de padrões em alguns sistemas . . . . .	p. 18
1.5.1 Instabilidade de Rayleigh-Bénard . . . . .	p. 18
1.5.2 Instabilidade de Taylor-Couette . . . . .	p. 20
1.5.3 Instabilidade de Saffman-Taylor . . . . .	p. 21
1.5.4 Instabilidade morfológica em cristais líquidos . . . . .	p. 24
1.5.5 Instabilidade do impressor . . . . .	p. 24
1.6 Precursores . . . . .	p. 26
1.7 Mudanças morfológicas no padrão . . . . .	p. 28
1.8 Motivação para o trabalho . . . . .	p. 28
<b>2 Fundamentos Teóricos</b>	p. 30

2.1	Teoria de bifurcação . . . . .	p. 30
2.1.1	Equação de Ginzburg-Landau - A equação modelo para a bifurcação do sistema estudado . . . . .	p. 32
2.2	Análise de Estabilidade Linear . . . . .	p. 33
2.3	Hidrodinâmica . . . . .	p. 36
2.3.1	Descrições de movimento de um fluido . . . . .	p. 36
2.3.2	Aceleração de uma partícula de fluido . . . . .	p. 37
2.3.3	A conservação de massa em um fluxo . . . . .	p. 38
2.3.4	O fluido incompressível . . . . .	p. 40
2.3.5	Forças superficiais sobre um elemento de fluido . . . . .	p. 40
2.3.6	Deformações em um fluido em movimento . . . . .	p. 42
2.3.7	O tensor viscoso de cisalhamento para um fluido Newtoniano . . . . .	p. 43
2.3.8	A equação de movimento para um fluido . . . . .	p. 44
2.3.9	Número de Reynolds . . . . .	p. 46
2.3.10	Equilíbrio local e o regime linear . . . . .	p. 47
2.4	Equações hidrodinâmicas aplicadas ao sistema estudado . . . . .	p. 49
2.4.1	Estado estacionário em um fluxo laminar . . . . .	p. 50
2.5	Estudo da interface plana . . . . .	p. 52
2.6	Estudo do padrão periódico . . . . .	p. 55
2.6.1	Análise de estabilidade linear para a instabilidade do impressor . . . . .	p. 55
<b>3</b>	<b>Experimento e obtenção dos dados</b>	p. 62
3.1	Montagem experimental . . . . .	p. 63
3.2	Aquisição das imagens do padrão . . . . .	p. 64
3.3	Procedimentos experimentais . . . . .	p. 66
3.4	Tratamento das imagens e obtenção dos dados . . . . .	p. 69
<b>4</b>	<b>Resultados - Precursores</b>	p. 74

<b>5 Resultados - Dinâmica do padrão espacial</b>	p. 83
5.1 Posição da interface . . . . .	p. 83
5.2 Seleção dos modos espaciais . . . . .	p. 86
5.3 Regime transiente do crescimento do padrão . . . . .	p. 88
5.4 Regime de saturação do crescimento do padrão . . . . .	p. 90
5.5 Efeitos morfológicos no ramo pós bifurcação . . . . .	p. 92
5.6 Oscilação da posição da interface média e da amplitude do padrão . . . . .	p. 95
5.7 Mudanças morfológicas no padrão e competição entre os modos espaciais	p. 98
<b>6 Conclusões e perspectivas</b>	p. 101
<b>Apêndice A – Artigos publicados</b>	p. 103
Revista <i>Physical Review E</i> . . . . .	p. 103
Revista <i>Physical Review E</i> . . . . .	p. 109
<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 117
<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 117

## *Lista de Figuras*

- 1 Rolos convectivos em uma instabilidade de Rayleigh-Bénard. (Fonte: [1], 1977.) . . . . . p. 19
- 2 Rolos toroidais existentes em um experimento de Taylor-Couette. Em (a) observa-se os rolos para o regime após a primeira bifurcação e em (b) os rolos passam a exibir oscilações espaço-temporais o que caracteriza uma transição para movimentos turbulentos. (Fonte: [2], 2001, p. 456.) . p. 20
- 3 Interfaces fluido-fluido em experimentos de Saffman-Taylor. A instabilidade faz aparecer as corrugações (a) na interface entre os dois fluidos. O crescimento desigual dessas irregularidades permite que uma estrutura desponte como dominante (b) após um determinado tempo. Ramificações laterais na interface (c) surgem como conseqüência de bolhas na ponta das estruturas de um sistema diferente dos dois primeiros. (Fonte: [3], 1997, p. 299-300.) . . . . . p. 22
- 4 Mecanismo da instabilidade de Saffman-Taylor. Em (a) mostra-se uma configuração estável, na qual o fluido mais viscoso ( $\mu_1$ ) desloca o fluido menos viscoso ( $\mu_2$ ), e qualquer irregularidade na interface é duplamente atenuada pela tensão superficial e pela diferença de pressão. Em (b), o fluido de menor viscosidade empurra o fluido mais viscoso. Nesta configuração, vemos que as forças se opõem, e as irregularidades na interface entre os dois fluidos podem ser amplificadas quando a diferença de pressão se torna maior que a tensão superficial. Isto acontece quando se atinge o valor crítico para a velocidade  $U$  da interface. . . . . p. 22
- 5 Evolução de um padrão celular em um experimento de solidificação direcional de um cristal líquido dopado com impurezas. (Fonte: [4], 1999, p. 6.) . . . . . p. 24
- 6 Padrão espacial existente na interface ar-óleo. Nota-se que a camada de óleo que recobre o cilindro apresenta uma “assinatura”, na forma de relevos periódicos, indicadora da presença deste padrão no sistema. . . . p. 26

- 7 Análise qualitativa do mecanismo da instabilidade do impressor. Quando a velocidade angular do cilindro está abaixo de seu valor crítico ( $\omega_c$ ), as flutuações na posição (a) decaem rapidamente e a interface permanece uma linha estreita (plana). Para velocidades do cilindro iguais ou maiores que  $\omega_c$ , as flutuações são amplificadas e o padrão periódico emerge (b). . . p. 26
- 8 Bifurcação das soluções  $A_k$  como função do parâmetro  $\lambda$ . A linha pontilhada representa a solução que é instável no ramo pós-bifurcação. . . . p. 33
- 9 Uma partícula de fluido sujeita a um fluxo não estacionário pode ter sua velocidade alterada no espaço e no tempo. (Fonte: [2], 2001, p. 92.) . . . p. 37
- 10 Fluxo de massa que atravessa um elemento de superfície  $dS$  de um volume arbitrário  $V$ . A normal a esse elemento de superfície está representada por  $\mathbf{n}$  e a velocidade do fluido é  $\mathbf{v}$ . . . . . p. 38
- 11 Representação dos tensores atuando sobre uma das superfícies do fluido. p. 41
- 12 Representação das condições de contorno usadas na análise do fluxo. As dimensões  $b_o$  e  $b(x_m)$  foram aumentadas para que fossem facilmente observadas . . . . . p. 49
- 13 Geometria usada para descrever a perturbação na interface ar-óleo do sistema. . . . . p. 56
- 14 Esboço da configuração experimental. Foram ajustadas três distâncias do cilindro até o plano horizontal,  $b_o = 300 \mu m (\omega_c = 2.53 \text{ rad/s})$ ,  $b_o = 400 \mu m (\omega_c = 4.87 \text{ rad/s})$  e  $b_o = 800 \mu m (\omega_c = 11.58 \text{ rad/s})$ . . . . . p. 63
- 15 Imagens da morfologia plana da interface (a) observada no ramo pré-bifurcação e do padrão espacial periódico (b) presente no ramo pós-bifurcação. Em ambas imagens, o ar está localizado acima da interface e o óleo de silicone está localizado abaixo da interface. Estas imagens correspondem ao experimento configurado para a distância  $b_o = 400 \mu m$  e frequências angulares  $\omega = 4.85 \text{ rad/s}$  (a) e  $\omega = 5.39 \text{ rad/s}$  (b). Obs.: Imagens com contraste invertido. . . . . p. 64
- 16 Interface detectada e tratada pelo programa, correspondente à imagem exibida na Fig. 15-b. Obs.: Imagens com escala de níveis de cinza invertida. p. 71

- 17 Transformada de Fourier da imagem mostrada na Fig. 16. A linha representa a transformada do harmônico (função seno puro) e os pontos a transformada dos dados experimentais. . . . . p. 72
- 18 Espectro de Fourier das oscilações da interface. A presença de um forte pico na mesma frequência angular do cilindro ( $\omega_o$ ) revela que a excentricidade é a causa das oscilações da interface observadas. Os dados são para a distância  $b_o = 300 \mu m$  e frequência angular  $\omega_o = 2.53 \text{ rad/s}$ . . . . p. 75
- 19 Modo de Fourier fundamental das oscilações da interface (plana para  $\xi < 0$  e periódica para  $\xi \geq 0$ ) medido para as diferentes frequências angulares do experimento cuja a distância é  $b_o = 300 \mu m$ . As linhas servem somente como guia para o olho. . . . . p. 76
- 20 Amplitude do Modo de Fourier fundamental das oscilações da interface medido para as diferentes frequências angulares do experimento para as duas outras distâncias usadas,  $b_o = 400 \mu m$  e  $b_o = 800 \mu m$ . As linhas servem somente como guia para o olho. . . . . p. 77
- 21 Amplitude de oscilação da interface, após o procedimento de alisamento dos dados experimentais originalmente exibidos na Fig. 19, para o experimento com  $b_o = 300 \mu m$ . Observa-se dois comportamentos das oscilações da interface: crescimento das oscilações na região pré-bifurcação ( $\xi < 0$ ) e supressão dessas oscilações após a bifurcação ( $\xi \geq 0$ ). As linhas servem somente como guia para o olho. . . . . p. 78
- 22 Amplitude de oscilação da interface (plana para  $\xi < 0$  e periódica para  $\xi \geq 0$ ). Os dados para o modo de Fourier fundamental, foram filtrados com o uso de um procedimento de alisamento e são mostrados aqui para as três distâncias usadas, ajustados com uma lei de potência no ramo pré-bifurcação e com uma exponencial no ramo pós-bifurcação. A legenda para esse gráfico é: ( $\circ$ ),  $b_o = 300 \mu m$ ; ( $\Delta$ ),  $b_o = 400 \mu m$ ; ( $\times$ ),  $b_o = 800 \mu m$ . p. 79
- 23 Esboço do configuração experimental. . . . . p. 84
- 24 Recuo da interface em função do parâmetro de controle para ( $\circ$ )  $b_o = 300 \mu m$ , ( $\Delta$ )  $b_o = 400 \mu m$  and ( $\times$ )  $b_o = 800 \mu m$ , ajustadas com o uso da aproximação estacionária (linha). . . . . p. 85

- 25 Evolução temporal dos modos dominantes, modo- $\mathbf{k}$ . No tempo  $t_o$  surge o vetor de onda referente ao padrão periódico emergente para  $b_o = 300\mu m$  e  $\xi = 0.21$ . . . . . p. 87
- 26 Evolução temporal da amplitude do modo dominante na história inicial do padrão espacial cujo vetor de onda é  $\mathbf{k} = 0.500mm^{-1}$  para  $b_o = 300\mu m$  e  $\xi = 0.21$ . Os dados experimentais estão representados por ( $\circ$ ) e a linha contínua é um ajuste da equação de Ginzburg-Landau (Eq. 5.2) a esses dados, com valores obtidos para os parâmetros  $\lambda(k) = (3.8 \pm 0.8)s^{-1}$  e  $\sigma(k) = (0.47 \pm 0.09)mm^{-2}s^{-1}$ . . . . . p. 88
- 27 Os valores das taxas de crescimento, obtidas com o ajuste da solução da equação de Ginzburg-Landau (Eq. 5.3) aos dados experimentais, são representados no gráfico contra o parâmetro de controle para as três distâncias usadas ( $b_o = 300\mu m$  ( $\circ$ ) -  $b_o = 400\mu m$  ( $\Delta$ ) -  $b_o = 800\mu m$  ( $\times$ )). As linhas servem somente como guia para os olhos. . . . . p. 90
- 28 Evolução temporal de dois modos diferentes do padrão espacial para  $b_o = 300\mu m$  e  $\xi = 0.21$ . O modo dominante inicial ( $\mathbf{k} = 0.500mm^{-1}$ ( $\circ$ )) cresce mais rápido que o modo dominante final ( $\mathbf{k} = 0.575mm^{-1}$  ( $\square$ )). Após esse crescimento, a amplitude do modo inicial decresce para pequenos valores enquanto o modo final tem sua amplitude aumentada e ela exhibe um valor de saturação comparável à amplitude máxima do modo inicial. As linhas servem somente como guia para os olhos. . . . . p. 91
- 29 A equação de Ginzburg-Landau modela a amplitude de crescimento do padrão. Seu termo não-linear prediz um valor constante, não observado, para a saturação da amplitude. O modo oscilatório presente na amplitude após o padrão ter sido estabelecido vem de mudanças na morfologia do padrão proveniente da perturbação determinística imposto ao sistema. Dados para a distância  $b_o = 300\mu m$  e  $\xi = 0.05$ . . . . . p. 92
- 30 Solução numérica da equação de Ginzburg-Landau modificada aplicada para  $b_o = 300\mu m$  e  $\xi = 0.05$ . A linha pontilhada representa os resultados da solução numérica e a linha sólida representa os dados experimentais. Este resultado mostra que as características da evolução da amplitude na fase de crescimento e na fase de saturação oscilatória podem ser, qualitativamente, reproduzidas pela GLE modificada dada pela Eq. 5.4. . . . . p. 93

- 31 Os três diferentes tipos de morfologia apresentados pelo padrão periódico espacial. Em (a) é mostrado um padrão com cristas mais largas que os vales. Em (b) é exibido uma padrão quase simétrico. Em (c) é mostrado um outro padrão que apresenta os vales mais largos que suas cristas. Todas as figuras se referem a experimentos com distância  $b_o = 300\mu m$  e valores do parâmetro de controle  $\xi = 0.05$  (a),  $\xi = 0.13$  (b) e  $\xi = 0.29$  (c). p. 94
- 32 Valores da razão de aspecto  $\Gamma$  ( $\circ$ ) obtidos através do uso da Eq. 5.5, e da amplitude das oscilações da posição da interface média ( $\Delta$ ) (o lado direito da Fig. 22) contra o parâmetro de controle para as três distâncias  $b_o$  usadas nos experimentos. As linhas pontilhadas servem somente como guia para os olhos. . . . . p. 95
- 33 Resposta temporal do sistema sujeito a uma perturbação determinística. Esta figura mostra as oscilações temporais da amplitude do padrão (superior) e da posição da interface média (inferior) para um experimento ajustado para  $b_o = 300\mu m$  e  $\xi = 0.05$ . A diferença de fase entre essas oscilações não obedecia a nenhuma regra, tendo valores aleatórios. . . . . p. 96
- 34 Diferença normalizada média entre os vetores de onda  $\Delta \mathbf{k}_{\text{médio}}$  ( $\circ$ ) e a razão de aspecto média  $\Gamma_{\text{médio}}$  ( $\Delta$ ) dos padrões selecionados para o conjunto dos três experimentos realizados. . . . . p. 99

## *Lista de Tabelas*

- 1    Valores dos parâmetros usados em cada configuração experimental. . . . . p. 69
  
- 2    Valores dos parâmetros obtidos por ajuste dos dados experimentais no ramo pré-bifurcação com uma lei de potência (Eq. 4.3). São mostrados também os erros para o expoente  $\beta$  e o coeficiente de correlação  $R$  de cada ajuste. Os valores marcados com um (\*) foram mantidos constantes no procedimento de ajuste. . . . . p. 78
  
- 3    Valores dos parâmetros da função  $F(\text{Ca}(\xi))$  (Eq. 2.71) obtidos por ajuste da Eq. 5.1 aos dados experimentais. O parâmetro empírico  $C_3$  é o valor base para a frequência angular do cilindro na qual a função  $F(\text{Ca}(\xi))$  é válida. Os demais valores obtidos para os parâmetros empíricos desta função,  $C_1$  e  $C_2$ , estão de acordo com os valores reportados na Ref. [5]. . . . . p. 86
  
- 4    Valores referentes à razão entre oscilações da amplitude do padrão ( $\langle A_k \rangle$ ) e oscilações da posição da interface média ( $\langle \Delta x \rangle$ ). Os dados  $\langle A_k \rangle$  e  $\langle \Delta x \rangle$  são resultados de médias feitas sobre todos os valores do parâmetro de controle para cada distância  $b_0$  usada nos experimentos. Na segunda coluna são mostrados os coeficientes de correlação entre os dois tipos de oscilação. . . . . p. 98
  
- 5    Valores estatísticos comparando morfologia da interface e seleção do padrão.  $\Delta \mathbf{k}_{\text{médio}}$  representa a média da diferença normalizada dos vetores de onda e  $\sigma_{\Delta \mathbf{k}_{\text{médio}}}$  é o seu desvio padrão correspondente.  $\Gamma_{\text{médio}}$  é a média dos valores da razão de aspecto e  $\sigma_{\Gamma_{\text{médio}}}$  é o desvio padrão para esta medida. São definidas duas regiões com comportamento distintos para estas grandezas. . . . . p. 100

# 1 *Introdução*

A formação de padrões espaço-temporais é o tema desta tese de doutorado. Nela, descrevemos alguns sistemas formadores de padrão e as instabilidades dinâmicas responsáveis pela origem desses padrões. Relatamos a instabilidade que dá origem ao padrão que estudamos e a motivação para o trabalho desenvolvido. Apresentamos algumas importantes técnicas usadas para o estudo de sistemas fora do equilíbrio termodinâmico, particularmente, para a compreensão de padrões. A pesquisa que realizamos centraliza em efeitos de uma perturbação determinística sobre a dinâmica do padrão e a discussão dos resultados desses estudos é o foco principal desta tese.

## 1.1 **Sistemas Complexos**

Sistemas complexos têm muitas definições por causa das várias áreas nas quais eles estão presentes. Eles existem na Física, na Química, na Biologia, nas engenharias, na meteorologia, nas ciências econômicas, nas ciências e organizações sociais e nos produtos resultantes da tecnologia, em particular o computador e a internet. Um sistema pode ser complexo não somente como consequência de ser composto de muitas partes mas também por ter comportamento complexo. Neste sentido, são complexas as várias manifestações do comportamento humano, como as estudadas nas ciências humanas (psicologia, sociologia, etc.). Então, percebemos que qualquer ramo do conhecimento é capaz de apresentar exemplos de sistemas complexos. Descrevemos aqui uma definição mais apropriada de sistemas complexos para a área de formação de padrões. Eles são sistemas dinâmicos, abertos, fora do equilíbrio e, por isso, sujeitos a gradientes de campos termodinâmicos. Esses campos interagem por relações não lineares e definem, dessa forma, um estado. A emergência de novos estados depende de mudanças em um ou mais parâmetros de controle. Em alguns casos, esses novos estados apresentam, no nível macroscópico, estruturas auto-organizadas. Efeitos importantes podem ocorrer nestas estruturas quando pequenas perturbações, externas ou internas, determinísticas ou estocásticas, são amplifi-

cadadas na presença de não linearidades e em razão disto é necessário um rigoroso controle de seus parâmetros para que se possa diferenciar a sua dinâmica intrínseca daquela devida às influências externas.

## 1.2 Termodinâmica de não-equilíbrio e Sistemas dinâmicos

A teoria Termodinâmica de equilíbrio, desenvolvida basicamente nos séculos XVIII e XIX, foi extremamente relevante para o entendimento de fenômenos, cuja origem se relaciona com as grandezas termodinâmicas. Mais que isso, ela serviu como base teórica para grande parte do conhecimento que despontou a partir desse período. Juntamente com o Eletromagnetismo, a Termodinâmica de equilíbrio permitiu um vertiginoso crescimento da economia baseada no capital, cujo maior expoente inicial foi o desenvolvimento industrial na Europa em meados do século XIX. A partir daí, a civilização passou a ter mecanismos de geração de riqueza com uma eficiência até então desconhecidos. Assim, a sociedade passou por transformações que melhoraram bastante os índices de seu desenvolvimento e fortaleceram as bases da democracia ainda muito frágeis àquela época. Muitos dos fenômenos que estão dentro do alcance da Termodinâmica de equilíbrio foram parcialmente ou completamente compreendidos. No entanto, fenômenos como auto-organização, permaneciam completamente incompreendidos e para entendê-los seria necessário avançar para o domínio da Termodinâmica de não-equilíbrio.

No século XX, a Ciência continuou passando por grandes avanços que solidificaram o desenvolvimento que a humanidade experimentava desde o século anterior. Relatividade e Física Quântica foram dois dos expoentes da grande revolução que a Ciência passou no início do século XX. Enquanto isso, a Termodinâmica passava por uma transformação mais silenciosa. Os primeiros resultados teóricos vieram com os trabalhos de Onsager [6,7], em 1931. Nesses trabalhos foram estabelecidas algumas relações entre variáveis termodinâmicas fora do equilíbrio, válidas para o regime linear. Elas são conhecidas como *relações recíprocas de Onsager* e referem-se aos fenômenos de efeito cruzado [8]. No regime não-linear da Termodinâmica de não-equilíbrio, não existe um princípio geral para determinar o estado de um sistema, como os princípios da minimização da energia ou da maximização da entropia. No entanto, a teoria de sistemas dinâmicos fornece ferramentas de análise importantes para o entendimento de sistemas não lineares. O método direto de Lyapunov, a teoria de estabilidade estrutural (bifurcação) e as análises de estabilidade linear e não-linear são algumas das técnicas de análise largamente utilizadas para caracterizar

o tipo de instabilidade e seu comportamento, frente a pequenas flutuações em torno de seus pontos fixos, permitindo identificar se a instabilidade presente pode fazer o sistema evoluir para um estado estacionário estável ou não. A teoria de estabilidade estrutural e a análise de estabilidade linear foram usadas no nosso trabalho e serão apresentadas no Cap. 2.

### 1.3 Formação de padrões

Um sistema macroscópico operando fora do seu estado de equilíbrio pode existir em uma variedade de estados chamados **ramos termodinâmicos**. As interações não-lineares dos campos termodinâmicos que definem um ramo podem produzir mudanças qualitativas em suas propriedades e podem levar à emergência das estruturas auto-organizadas. Em tais situações, podem ser alcançados outros regimes estáveis, no regime não-linear, apresentando padrões espaço-temporais. Este é o caso quando uma quebra espontânea de simetria, no ponto de bifurcação, dirige o sistema de um ramo com alta simetria (espaço uniforme), para outro ramo com baixa simetria, por exemplo, apresentando uma estrutura periódica. Podemos dizer que padrões consistem na “forma sem a fôrma”. Nós, os seres vivos, somos uma amostra dessa auto-organização. Somos o resultado de interações microscópicas em um sistema com simetria inicial esférica e que se reorganiza em uma estrutura ramificada, portanto nada semelhante à forma original. Desse modo, a informação sobre a forma que o ser vivo adquire durante seu desenvolvimento no útero (a evolução do padrão) está nas interações microscópicas das partes desse ser e entre esse ser e o meio que o cerca. Enxergar um ser vivo como padrão é apenas uma maneira diferente de abordar o fenômeno vida. Contudo, essa abordagem pode trazer novas informações para a vasta coleção de conhecimentos que possuímos sobre os seres vivos.

A capacidade de auto-organização é um importante fenômeno e seu estudo é cercado de dificuldades que exigem extensivo uso dos conhecimentos e técnicas de que a Ciência dispõe. Uma maneira de contornar parte da dificuldade consiste no estudo de sistemas de menor dimensionalidade, com o objetivo de entender relações fundamentais para a compreensão de sistemas de maior dimensionalidade. A despeito da aparente simplicidade exibida por sistemas unidimensionais, eles nos permitem obter informações detalhadas da dinâmica de formação de padrões, bem como explorar aspectos dessa dinâmica na presença de efeitos perturbativos. Um fenômeno cuja emergência se dá em condições muito distantes do equilíbrio termodinâmico necessita de rigorosos cuidados experimentais e um sistema mais simples torna menos árdua a obtenção do grau de precisão exigido no

controle dos parâmetros experimentais. Alguns sistemas físicos, que se estendem em somente uma dimensão espacial, podem exibir uma variedade de padrões espaço-temporais que são muito úteis para o entendimento de padrões que surgem em sistemas de maior dimensionalidade. Assim, Couillet e Iooss [9], tendo como referência alguns experimentos e baseando-se em argumentos de simetria, reportaram a existência de dez modos de instabilidades em padrões celulares uni-dimensionais em alguns experimentos. Esta diversidade em sistemas que são, fisicamente, os mais simples que podemos tratar, nos motiva a estudá-los para a busca de novas instabilidades. Experimentalmente, a dimensionalidade de um sistema que está sujeito a algum tipo de instabilidade dinâmica, está relacionada com a quantidade de parâmetros cujos valores precisam ser variados a fim de se produzir a bifurcação em questão. Dizemos que um sistema exibe uma bifurcação de codimensão um, quando é necessário mudar o valor de um único parâmetro para que a instabilidade ocorra. Assim, essa uni-dimensionalidade não significa olhar para instabilidades em um meio uni-dimensional mas, sim, estudar instabilidades que dão origem a uma série de estruturas (células de convecção, vórtices, dendritas, etc.), em geometrias tais que o acoplamento e a dinâmica dessas estruturas possam ser considerados uni-dimensionais. Como exemplo de sistemas unidimensionais, podemos citar experimentos nos quais ocorrem a instabilidade de Rayleigh-Bénard e a instabilidade de Saffman-Taylor. Outro recurso consiste em tratar analiticamente uma equação, retirando dela termos não lineares. Um exemplo é a Equação de Navier-Stokes sem o seu termo não-linear. Mesmo que, com esta simplificação, se tenha perdido algumas manifestações mais gerais, isto ainda permite entender o sistema com boa aproximação. Uma terceira maneira de avançar no entendimento de sistemas formadores de padrão se baseia no estudo de equações modelos. Exemplos são as Equações de Ginzburg-Landau e de Swift-Hohenberg que podem ser usadas para modelar a dinâmica de uma variável importante em alguns sistemas. Algumas vezes, elas precisam ser modificadas para que possam representar a evolução de um sistema com alguma característica particular [10]. Neste trabalho, usamos a equação de Ginzburg-Landau como modelo para a dinâmica da amplitude do padrão. Mostraremos, no Cap. 5, que ela precisou ser modificada para que representasse qualitativamente a evolução da amplitude em seu regime estacionário.

## 1.4 As instabilidades e os padrões

Usamos o termo instabilidade com sentido dado pela teoria de sistemas dinâmicos. A instabilidade é um mecanismo responsável por provocar mudanças em um sistema,

suficientes para que ele apresente novas características definidas pela sua dinâmica intrínseca. Sistemas fora do equilíbrio termodinâmico podem estar sujeitos a um ou mais tipos de instabilidades. A existência de uma instabilidade é condição necessária para que um sistema possa formar um padrão, porque ela é capaz de induzir alterações significativas nesse sistema quando algum parâmetro deste passa por um valor crítico (ponto de bifurcação). Fisicamente, a transição ocorre porque há uma competição entre dois ou mais efeitos provenientes de campos físicos que são importantes para o sistema. Na presença da instabilidade, um pequeno desvio nos valores de equilíbrio desses campos leva o sistema de um estado de não-equilíbrio instável, para aquele valor crítico do parâmetro de controle, para outro estado de não-equilíbrio estável. A construção de uma teoria dinâmica sobre formação de padrões precisa obedecer a alguns objetivos. Primeiro, é necessário o reconhecimento das instabilidades a que um sistema esteja submetido e a seqüência delas durante a evolução do padrão. Segundo, a investigação das mudanças que ocorrem no padrão quando algum parâmetro de controle é variado. É desejável, ainda, saber sobre a transformação do padrão quando se implementa uma variação no parâmetro de controle no sentido inverso, ou seja, reconhecer se o sistema está sujeito a efeitos de histerese. É muito importante, também, a distinção entre fatores intrínsecos do sistema e aqueles externos que podem forçar mudanças nele. As condições de fronteira, a existência de ruído e a alteração nos valores dos parâmetros do sistema devido à influências externas estão entre os principais fatores que podem acarretar mudanças no padrão. Nos capítulos 4 e 5 mostraremos a diferença na dinâmica do padrão como consequência de efeitos de uma perturbação externa. A seguir descreveremos alguns exemplos clássicos de padrões.

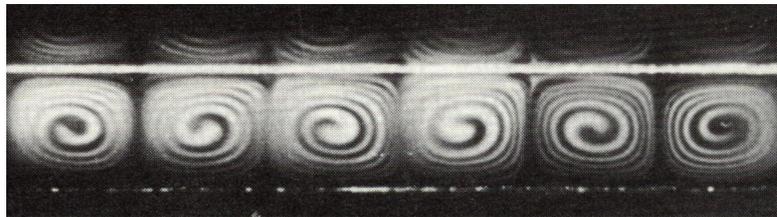
## 1.5 Formação de padrões em alguns sistemas

Em minha dissertação de mestrado [11] mencionei alguns tipos de sistemas formadores de padrão abrangendo convecção, reações químicas e morfogênese biológica. Nesta tese, fornecerei exemplos de padrões focalizando em sistemas cuja origem do padrão esteja relacionada com alguma instabilidade hidrodinâmica.

### 1.5.1 Instabilidade de Rayleigh-Bénard

Na Ref. [11] foi relatado a instabilidade de Rayleigh-Bénard. Ela está presente em um sistema formador de padrão muito estudado e, provavelmente, o mais compreendido atualmente. Pela sua importância, a revisitamos agora. A instabilidade de Rayleigh-

Bénard surge em um fluido colocado entre duas placas horizontais, mantidas com uma diferença fixa de temperatura entre elas, sendo que a placa inferior tem temperatura maior do que a placa superior. Esta configuração é instável porque haverá fluido mais frio, portanto mais denso, ocupando a parte de cima enquanto que o fluido mais quente (menos denso) ocupará a parte de baixo do sistema. Esta diferença de densidade, na presença da força gravitacional, implica em que o fluido estará sujeito a um empuxo. A diferença de temperatura entre as duas placas estabelece um gradiente vertical de temperatura para o fluido. Quando essa diferença de temperatura  $\Delta T$  é pequena, a condução de calor entre uma molécula do fluido e as moléculas adjacentes, no sentido vertical, é capaz de manter o equilíbrio. Porém, quando  $\Delta T$  excede um valor crítico ( $\Delta T_c$ ) a condução passa a ser acompanhada por movimento do fluido (convecção) na forma de rolos cilíndricos paralelos, girando em direções opostas como mostrados na Fig. 1. Os diâmetros desses rolos são da ordem do espaçamento entre as placas. A velocidade do fluido nos rolos aumenta continuamente com o aumento da diferença de temperatura,  $\Delta T - \Delta T_c$ . Quando esta diferença atinge valores muito maiores que  $\Delta T_c$ , surgem outras bifurcações que levam a regimes não estacionários e podem servir de rota para o caos [2].



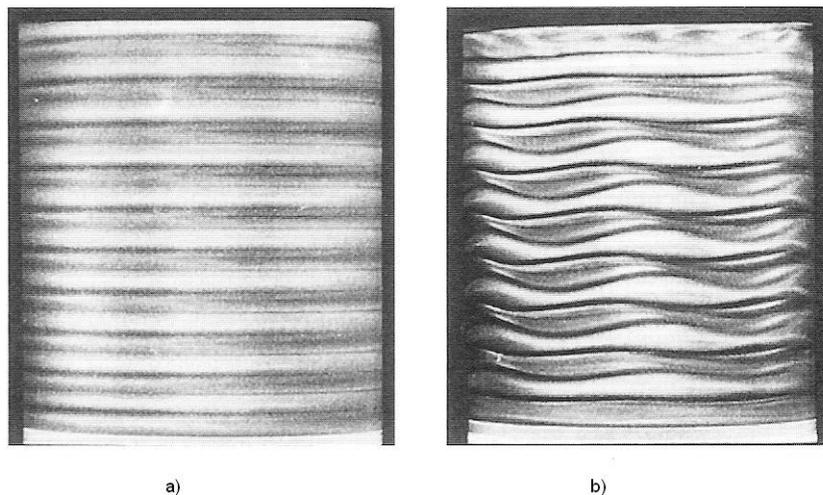
**Figura 1:** Rolos convectivos em uma instabilidade de Rayleigh-Bénard. (Fonte: [1], 1977.)

Para entender o mecanismo desta instabilidade, partimos da suposição de que o fluido seja incompressível e que a única força externa seja a gravitacional. Um elemento do fluido sujeito a uma flutuação da temperatura,  $T = T_o + \delta T$ , tem sua densidade local diminuída e conseqüentemente, ele se move para cima, gerando espontaneamente uma irregularidade. Este efeito é amplificado porque ao sofrer pequenos desvios para cima, o elemento de fluido (quente) encontra uma parcela de fluido ainda mais fria e portanto com maior densidade. Assim, o elemento do fluido fica sujeito a um empuxo que aparece como força que favorece a instabilidade. Os fatores que inibem a instabilidade são devidos à difusividade térmica, porque tende a homogeneizar a temperatura do fluido, e à viscosidade, cuja força de arrasto diminui a velocidade de movimento do elemento de fluido. Esse processo é auto-sustentado quando o gradiente de temperatura é suficiente para superar os efeitos estabilizadores da viscosidade e da condução térmica. A organização, que consiste em um reordenamento

do fluido como resultado de um gradiente de temperatura adverso, aparece porque há a tentativa do sistema de estabelecer uma configuração de equilíbrio na temperatura e na densidade do fluido. A instabilidade leva à perda da homogeneidade do fluido e essa quebra de simetria surge espontaneamente acima de  $\Delta T_c$  e leva à formação de um padrão espacial ordenado em rolos convectivos contra-rotativos.

### 1.5.2 Instabilidade de Taylor-Couette

A instabilidade de Taylor-Couette surge em um fluido confinado entre dois cilindros concêntricos. Várias configurações para o movimento dos cilindros fazem com que o fluxo tenha estruturas regulares. Abordamos o caso em que o cilindro interno gira com velocidade angular ( $\omega_{\text{int}}$ ) e o cilindro externo está em repouso. Nessa configuração, a velocidade angular do fluido decresce com o aumento do raio. Quando  $\omega_{\text{int}}$  é menor que um certo valor crítico  $\omega_c$ , o gradiente radial de pressão (que é o gerador da força centrípeta) é suficiente para manter o movimento circular do fluxo com velocidade puramente tangencial. Quando o valor de  $\omega_c$  é ultrapassado, a circulação do fluido se modifica para a forma de rolos toroidais, conhecidos como células ou vórtices de Taylor, cuja largura é igual ao espaçamento entre os cilindros. Nesse regime, a velocidade do fluxo tem componente radial não nula devido à existência dos vórtices. O regime para essa primeira bifurcação é mostrado na Fig. 2-*a*. Quando  $\omega_{\text{int}}$  atinge valores ainda maiores, o sistema passa a exibir

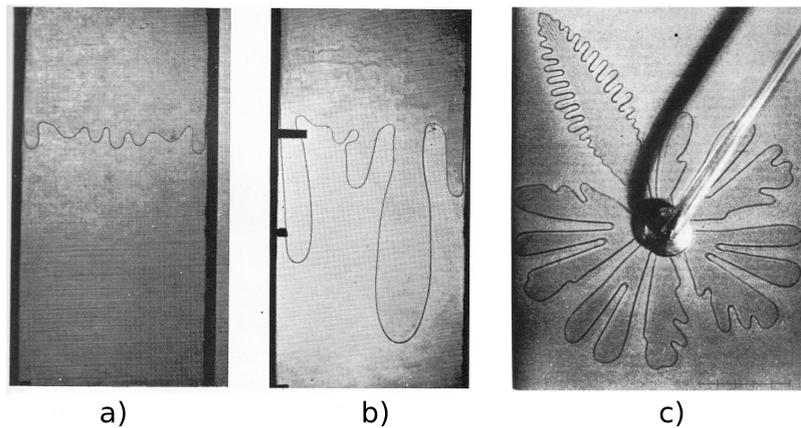


**Figura 2:** Rolos toroidais existentes em um experimento de Taylor-Couette. Em (a) observa-se os rolos para o regime após a primeira bifurcação e em (b) os rolos passam a exibir oscilações espaço-temporais o que caracteriza uma transição para movimentos turbulentos. (Fonte: [2], 2001, p. 456.)

outras instabilidades que modificam novamente o fluxo e os rolos passam a exibir oscilações espaço-temporais, aparecendo na forma de ondas e caracterizando uma transição para um movimento turbulento. Esse segundo regime é mostrado na Fig. 2-*b*. Para entender o mecanismo dessa instabilidade, considere um elemento de fluido sujeito a uma flutuação que o afaste de sua posição de equilíbrio  $\mathbf{r}_o$ , indo para uma posição  $\mathbf{r}_o + \delta\mathbf{r}$ . Esse elemento de fluido terá velocidade tangencial maior do que a parcela de fluido que já ocupava essa linha de corrente circular (de raio  $\mathbf{r}_o + \delta\mathbf{r}$ ) e estará submetido a uma força centrífuga maior que os demais elementos do fluido. Caso o gradiente radial de pressão, que é responsável pela força centrípeta, seja insuficiente para compensar esse aumento (o que ocorre quando  $\omega_{\text{int}} \geq \omega_c$ ), o elemento de fluido tenderá a se afastar ainda mais de sua posição inicial e se moverá para fora. Em outras palavras, é gerado, também, um movimento radial do fluido porque o gradiente de pressão não é suficiente para sustentar o movimento puramente circular, que é dado pela componente tangencial da velocidade do fluido. A organização ocorre como resposta do fluido ao movimento combinado nas direções tangencial e radial, que resulta em uma componente vertical da vorticidade ( $\Omega = \nabla \times \mathbf{v}$ ) para o fluxo, originando os rolos convectivos toroidais. Podemos estabelecer um paralelo entre a instabilidade de Taylor-Couette e a instabilidade de Rayleigh-Bénard, comparando o papel do gradiente da força centrífuga sobre um elemento de fluido com o empuxo na instabilidade de Rayleigh-Bénard, o gradiente radial de velocidade sendo equivalente ao gradiente vertical de temperatura e os efeitos estabilizadores da viscosidade, que fazem com que o elemento de fluido tenha a mesma velocidade que a sua vizinhança, se relacionando com os efeitos estabilizadores da difusividade térmica.

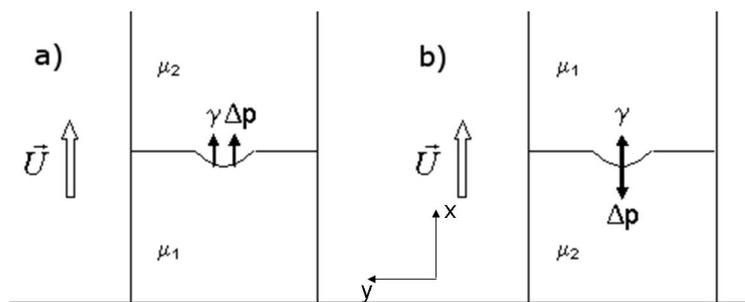
### 1.5.3 Instabilidade de Saffman-Taylor

A instabilidade de Saffman-Taylor surge na interface entre dois fluidos com viscosidades diferentes e confinados entre duas placas planas paralelas e separadas por uma distância  $d$ , conhecidas como células de Hele-Shaw. Quando o fluido de menor viscosidade, submetido a um gradiente de pressão, é forçado a fluir nesse canal contra o outro fluido de maior viscosidade, a interface entre esses dois fluidos passa a ser instável na presença de pequenas perturbações e uma instabilidade pode ocorrer quando a velocidade dessa interface atinge um valor crítico. A Fig. 3 mostra três regimes da estrutura em forma de dedo (“*finger*”) formada nesse sistema. Para valores da velocidade do fluido não muito elevados, surgem corrugações na interface (Fig. 3-*a*) que crescem com taxas diferentes e após certo tempo, uma estrutura de maior amplitude e largura passa a ter domínio sobre as outras (Fig. 3-*b*) e o sistema passa a exibir um único dedo. Com o aumento da velocidade



**Figura 3:** Interfaces fluido-fluido em experimentos de Saffman-Taylor. A instabilidade faz aparecer as corrugações (a) na interface entre os dois fluidos. O crescimento desigual dessas irregularidades permite que uma estrutura desponte como dominante (b) após um determinado tempo. Ramificações laterais na interface (c) surgem como consequência de bolhas na ponta das estruturas de um sistema diferente dos dois primeiros. (Fonte: [3], 1997, p. 299-300.)

da interface, a largura desse dedo tende a ocupar metade do valor da largura do canal. É exibido na Fig. 3-c, para um experimento diferente dos dois primeiros, que essa estrutura fica ainda mais rica quando uma bolha está presente na ponta dos dedos e aparecem as ramificações laterais (“sidebranches”). O mecanismo dessa instabilidade está relacionado com a competição entre o gradiente de pressão e a tensão superficial. Para entendermos essa instabilidade, considere a Fig. 4. Dois fluidos com viscosidades diferentes ( $\mu_1 > \mu_2$ )



**Figura 4:** Mecanismo da instabilidade de Saffman-Taylor. Em (a) mostra-se uma configuração estável, na qual o fluido mais viscoso ( $\mu_1$ ) desloca o fluido menos viscoso ( $\mu_2$ ), e qualquer irregularidade na interface é duplamente atenuada pela tensão superficial e pela diferença de pressão. Em (b), o fluido de menor viscosidade empurra o fluido mais viscoso. Nesta configuração, vemos que as forças se opõem, e as irregularidades na interface entre os dois fluidos podem ser amplificadas quando a diferença de pressão se torna maior que a tensão superficial. Isto acontece quando se atinge o valor crítico para a velocidade  $U$  da interface.

são forçados a escoar em movimento estacionário e uniforme com velocidade constante  $\vec{U}$

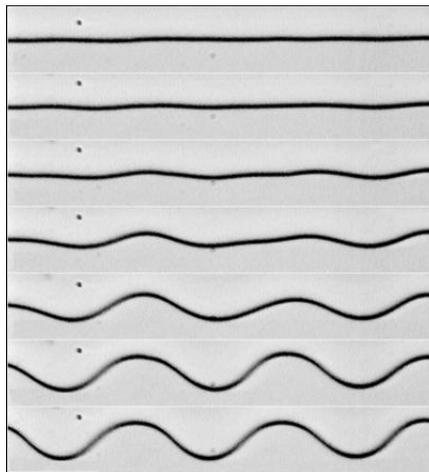
devido a uma força externa. Consideramos que a curvatura da interface na direção  $z$  seja constante e que não há presença de efeitos gravitacionais. Resultados da dinâmica dos fluidos [3] mostram que para o perfil de velocidade que estamos tratando, são necessários os gradientes de pressão:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dx} &= -\frac{12\mu_1 U}{d^2} \\ \frac{dp_2}{dx} &= -\frac{12\mu_2 U}{d^2}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Devido a diferença entre as viscosidades,  $dp_1/dx > dp_2/dx$  e a interface fica sujeita a uma força que é resultado da diferença entre as pressões ( $\Delta p$ ) em cada lado da interface. Assim, vemos que há duas forças na interface entre os dois fluidos e elas são devidas à tensão superficial ( $\gamma$ ) e à diferença de pressão. Enquanto a tensão superficial exerce um papel estabilizador, se opondo ao crescimento de qualquer irregularidade na interface entre os dois fluidos, a diferença de pressão pode atenuar ou amplificar a irregularidade, dependendo da configuração. Na Fig. 4-a, o fluido mais viscoso ( $\mu_1$ ) empurra o fluido menos viscoso ( $\mu_2$ ). Enquanto a interface se movimenta, considere que uma pequena região dessa interface fique para trás. Observamos que as duas forças, tensão superficial e diferença de pressão, exercem papel estabilizador, levando aquela região da interface para a posição de equilíbrio. Esta é uma configuração estável na qual o crescimento das irregularidades não se sustenta e a interface não exhibe nenhuma estrutura. Na Fig. 4-b, o fluido menos viscoso empurra o fluido de maior viscosidade. Na existência de uma irregularidade, a interface fica sujeita à força estabilizadora da tensão superficial e à força da diferença de pressão que agora pode amplificar a instabilidade. Quando o valor da velocidade da interface,  $U$  atinge um valor crítico  $U_c$ , a força devido à diferença de pressão supera a tensão superficial. Na bifurcação, as pequenas irregularidades na interface são amplificadas e um novo estado de equilíbrio no regime instável é atingido no sistema. Saffman e Taylor [12] chegaram ao valor relativo limite de  $1/2$  para a largura do dedo quando a velocidade da interface aumenta. O estudo desta instabilidade tem apelo tecnológico porque ela está relacionada com fluxos em meios porosos, cujo análogo matemático são as células de Hele-Shaw. Um problema muito conhecido em engenharia e que se relaciona com a instabilidade de Saffman-Taylor é o deslocamento de óleo por água pressurizada em dutos de petróleo.

### 1.5.4 Instabilidade morfológica em cristais líquidos

Padrões em solidificação direcional fazem parte de uma ampla classe de padrões nos quais o crescimento da interface e a difusão são os processos dominantes. Neles, o fenômeno físico básico é o crescimento de uma fase ordenada estável em um material, normalmente preparada por super-resfriamento. Isto pode acontecer em uma transição sólido-líquido ou em uma transição de fase nemático-isotrópico em um cristal líquido. O processo que limita o crescimento é a difusão completa do calor latente liberado pela solidificação ou, no caso da solidificação de misturas, a difusão completa do componente da mistura que tem uma baixa concentração no soluto. Numa solidificação direcional de uma amostra de cristal líquido, dopado com uma pequena quantidade de impureza e submetida a um gradiente de temperatura, podem ocorrer instabilidades morfológicas, formando um padrão na interface nemático-isotrópico dessa mistura binária. Na Fig. 5, mostramos o padrão periódico em uma interface de um cristal líquido tipo *8CB*, obtido num experimento realizado por Gomes [4].



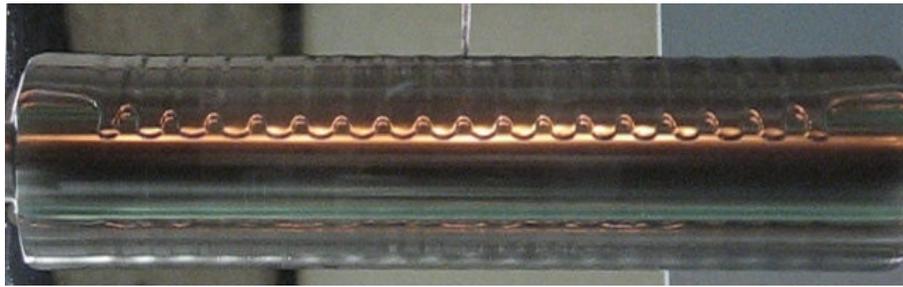
**Figura 5:** Evolução de um padrão celular em um experimento de solidificação direcional de um cristal líquido dopado com impurezas. (Fonte: [4], 1999, p. 6.)

### 1.5.5 Instabilidade do impressor

A instabilidade do impressor é outro exemplo de um sistema no qual uma instabilidade em uma interface fluido-fluido leva à formação de um padrão celular. Ela foi inicialmente observada como defeitos de impressão em sistemas tipográficos que usavam cilindros. Com a necessidade de maiores tiragens, o aumento na velocidade de rotação dos cilindros de impressão fez com que uma instabilidade modificasse, espacialmente, a interface entre tinta

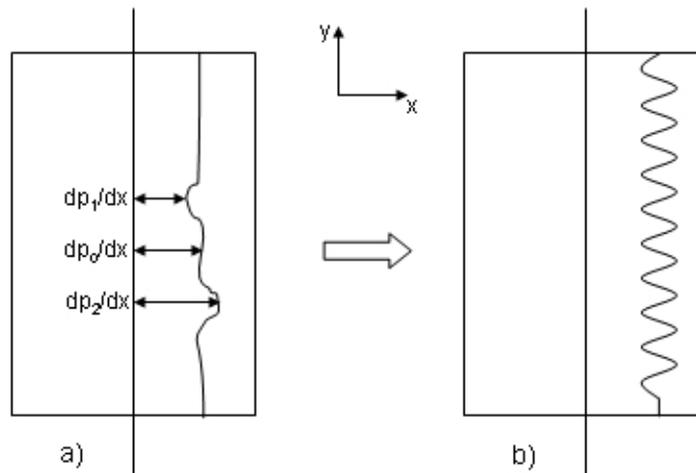
e ar. Isto fazia com que o texto que era impresso no papel alternasse faixas mais escuras (mais tinta) e mais claras (menos tinta) perpendiculares ao eixo do cilindro. Isto explica o nome dado a esta instabilidade que foi teoricamente descrita por Pitts e Greiller [13] e por Taylor [14]. Um sistema típico para a ocorrência desta instabilidade compõe-se de um cilindro parcialmente em contato com uma camada de um fluido de grande viscosidade, distribuído sobre um plano horizontal [15]. Quando o cilindro gira, esse fluido fica sujeito a um gradiente de pressão devido a diminuição do espaço existente entre o cilindro e o plano e, empurrado pelo ar (o outro fluido menos viscoso), ele é forçado a fluir na direção do estreitamento. Uma variação experimental bastante encontrada consiste no uso de dois cilindros, montados um dentro do outro, cujos eixos de rotação são paralelos, mas deslocados verticalmente um do outro, de modo a formar um estreitamento entre eles [16–19]. Assim como na instabilidade de Saffman-Taylor, na instabilidade do impressor, a tensão superficial e o gradiente de pressão são os fatores de estabilização. Como resultado da dinâmica interna, a interface experimenta um recuo para a região próxima do cilindro e um padrão espacial periódico surge espontaneamente quando o parâmetro de controle passa pelo valor crítico (*bifurcação*). Este tipo de instabilidade é também muito conhecida pelo termo em inglês “*Directional Viscous Fingering*” devida à sua semelhança com a estrutura surgida em um experimento de Saffman-Taylor.

Neste trabalho, estudamos o padrão formado na interface entre um fluido de baixa viscosidade (ar) e outro fluido de alta viscosidade (óleo de silicone). Para gerar esse padrão, montamos uma configuração experimental cilindro-plano horizontal, cujos parâmetros podem ser controlados com grande precisão. As variáveis termodinâmicas deste sistema evoluem no tempo e no espaço, e dessa forma, é gerado dinamicamente o padrão periódico espacial que é exibido na Fig. 6. Devido às dimensões do padrão, é possível notar como ele afeta a camada de óleo que acompanha o cilindro, fazendo-a ter regiões com menos óleo e regiões com maior presença de óleo, como vales e cristas de uma estrutura com comprimento de onda bem definido. O mecanismo responsável pela formação deste padrão pode ser entendido qualitativamente em termos de flutuações locais na interface. Devido a essas flutuações internas, a todo momento partes da interface apresentam desvios para mais próximo e para mais distante do centro do cilindro como mostra a Fig. 7-a. Como a interface está submetida a um gradiente de pressão positivo na direção do estreitamento entre o cilindro e o plano, estas partes estarão submetidas a forças de valores diferentes, já que  $dp_1/dx > dp_0/dx > dp_2/dx$ . Para velocidades angulares do cilindro abaixo da crítica, essas flutuações na interface não se sustentam e decaem rapidamente, mantendo a interface plana que corresponde ao estado estacionário para aquela configura-



**Figura 6:** Padrão espacial existente na interface ar-óleo. Nota-se que a camada de óleo que recobre o cilindro apresenta uma “assinatura”, na forma de relevos periódicos, indicadora da presença deste padrão no sistema.

ção do sistema. Quando o cilindro atinge a velocidade angular crítica ( $\omega_c$ ), a instabilidade amplifica aquelas flutuações e um novo estado estacionário de não-equilíbrio é alcançado. Ele corresponde à existência do padrão periódico exibido na Fig. 7-b. Este padrão surge como resposta do sistema ao desequilíbrio gerado pelo gradiente de pressão e se sustenta com os efeitos da tensão superficial.



**Figura 7:** Análise qualitativa do mecanismo da instabilidade do impressor. Quando a velocidade angular do cilindro está abaixo de seu valor crítico ( $\omega_c$ ), as flutuações na posição (a) decaem rapidamente e a interface permanece uma linha estreita (plana). Para velocidades do cilindro iguais ou maiores que  $\omega_c$ , as flutuações são amplificadas e o padrão periódico emerge (b).

## 1.6 Precursores

Um desafio importante no estudo de sistemas dinâmicos não-lineares é a detecção de uma futura bifurcação em um ramo estável específico. A este respeito, efeitos não-triviais

podem aparecer em um sistema quando um ramo estável, sujeito a uma perturbação, apresenta estruturas dinâmicas não observadas quando há inexistência dessa perturbação. Conseqüentemente, o estudo de um ramo perturbado pode ser importante na antecipação de informações referentes à existência de uma bifurcação futura. Quando isto acontece, dizemos que um **precursor** é observado. Como um precursor é um tipo de instabilidade que surge em sistemas no regime de não-equilíbrio e eles podem antecipar a emergência de alguma atividade crítica, o seu estudo tem atraído a atenção de pesquisadores em várias áreas da Ciência. Um trabalho pioneiro nessa área foi relatado por Wiesenfeld [20]. Ele estudou sistemas não-lineares nos seus ramos estáveis (estado periódico) e sujeitos a uma fonte externa de ruído e ele mostrou que, antes da ocorrência de uma instabilidade, é possível obter informações do espectro de potência do sinal primário que podem antecipar o tipo de bifurcação que um dado sistema sofrerá. Desde então, vários relatos na literatura mostraram evidências experimentais de precursores em diversos campos de estudo. Na área da geofísica, Wyss [21,22] tem organizado e desenvolvido métodos que possam ser usados na predição de terremotos. Nessa mesma linha, Eftaxias *et al.* [23] usaram uma correlação de dados obtidos diretamente de atividades sísmicas e de anomalias eletromagnéticas de modo a demonstrarem a viabilidade de predições de terremotos através de métodos de análise de dados. Na área médica, a importância da detecção de precursores de ataques epiléticos tem levado cientistas a travar calorosos debates sobre a viabilidade da predição desse distúrbio [24]. Resultados alcançados por alguns pesquisadores têm demonstrado alguma confiabilidade em suas predições. A respeito disso, Martinerie *et al.* [25], usando sinais de Eletroencefalograma (EEG) de vários pacientes, demonstraram, através de análise multidimensional de dados a possibilidade de antecipar em mais que 10 minutos as informações do início de ataques epiléticos nesses pacientes. Estudos similares realizados por Lehnertz e Elger [26], mostraram que uma análise temporal não-linear é capaz de extrair características relevantes de atividades cerebrais, as quais são preditivas de ataques epiléticos. Também foram observados precursores ruidosos do tipo descrito por Wiesenfeld em estudos experimentais em junções semi-condutoras [27], em instabilidades de raios laser [28] e em junções tipo Josephson [29,30]. Outros estudos teóricos de sistemas dirigidos por ruído foram feitos por Surovyatkina e Kravtsov [31,32]. No Cap. 4 desta tese detalharemos o estudo publicado sobre precursores (Ref. [33]) no sistema formador de padrão que usamos em nossas pesquisas.

## 1.7 Mudanças morfológicas no padrão

Além de serem sensíveis às flutuações internas, os padrões são influenciados por condições de fronteira e por perturbações externas. Essas fontes de mudanças podem gerar novas instabilidades, como o precursor, e podem modificar também as características espaço-temporais do padrão. Alguns trabalhos indicam modificações na morfologia em vários tipos de padrões quando uma perturbação está presente [19,34–41]. Apresentamos nossos resultados sobre a interação precursor-padrão, os quais revelam diversos efeitos na dinâmica do padrão, principalmente na seleção de modos e transições morfológicas. Usando técnicas de análise estatísticas, pudemos estabelecer a existência de dois regimes bem distintos da evolução do padrão. Este estudo foi publicado e consta na Ref. [42] e os resultados serão bastante discutidos no Cap. 5.

## 1.8 Motivação para o trabalho

As pesquisas em formação de padrões desenvolvidas no departamento de Física da UFMG tiveram início com o trabalho de doutorado do Prof. José Marcos Andrade Figueiredo [43] defendido em 1993. Neste trabalho foi feita uma análise quantitativa da instabilidade celular em um cristal líquido durante a solidificação direcional e o acompanhamento da evolução temporal do padrão instável durante a bifurcação supercrítica. Posteriormente, Gomes em seu trabalho de doutorado [4], estendeu o modelo vigente, à época, para a evolução da interface nemático-isotrópica plana de um cristal líquido durante a solidificação direcional. Também, ele estudou a evolução temporal da instabilidade celular no cristal líquido dopado com impurezas e mostrou a existência de instabilidades secundárias nesse sistema. A formação de padrões em interfaces continuou com o trabalho de mestrado [44] de Agero. Ele estudou a formação de padrões na interface ar-óleo em uma instabilidade do impressor usando uma configuração experimental semelhante àquela usada por Hakim *et al.* [15]. Neste trabalho, ele propôs modificações na teoria, perturbando as equações para o campo de velocidades e para o campo de pressão. Desenvolvi meu trabalho de mestrado [11] durante o período 2002-2004. Nele, estudei a instabilidade do impressor focando a atenção no crescimento da amplitude do padrão próximo à bifurcação e na seleção do modo dominante.

Uma parcela significativa do conhecimento que aplicamos no trabalho de doutorado foi aprendido no período do mestrado. Mas, talvez o fato mais importante, ocorrido naquele trabalho inicial, foi a percepção de que havia algo ainda não explorado nesse sistema, e

que poderia render um bom trabalho de pesquisa. O cilindro que usamos possui uma excentricidade que muda parâmetros relevantes do sistema estudado. Essa excentricidade atua como uma perturbação determinística e devido a ela uma nova instabilidade, cujo domínio se dá no tempo, é gerada no sistema. Notamos que os efeitos temporais são amplificados quando o sistema está próximo do ponto de bifurcação. Nossos dados revelaram que a informação sobre a bifurcação pôde ser antecipada pelos efeitos dessa perturbação e esses efeitos são característicos de um **precursor**. Como dito na seção 1.6, sua importância em algumas áreas do conhecimento, especialmente relacionadas com as atividades humanas, tem levado a importantes resultados. Em sua maioria, os precursores relatados na literatura estão relacionados com atividades ruidosas. Da interação ruído-resposta é possível extrair informações que antecipam algum fenômeno crítico. Aqui, fomos capazes de caracterizar um novo tipo de precursor, não relacionado com ruído, mas proveniente da amplificação dos efeitos da perturbação determinística presente no sistema. Percebemos que a presença desta perturbação também induzia à mudanças na morfologia do padrão espacial periódico. Assim, ficou evidente para nós que poderia existir alguma interação entre os dois tipos de fenômeno que estávamos estudando: um fenômeno que ocorre no domínio espacial e que leva à formação do padrão periódico e outro que ocorre no domínio do tempo e que leva ao precursor. Para entender essa interação, desenvolvemos estudos relativos à dinâmica do padrão na presença desse precursor e procuramos correlacionar esses dois tipos de instabilidade. Também fizemos estudos sobre competição de modos no domínio espacial e indicamos a necessidade de uma teoria para esse sistema, que leve em conta a presença de uma perturbação determinística do tipo que esteve presente nele.

Esta tese está organizada da seguinte maneira. No Cap. 2 mostramos alguns fundamentos teóricos usados em nosso trabalho. Em particular, estamos interessados em algumas das técnicas de análise da teoria de sistemas dinâmicos e nos princípios da hidrodinâmica. No Cap. 3 descrevemos a configuração experimental que usamos para gerar o padrão formado numa instabilidade do impressor. Também, detalhamos os materiais e métodos empregados na coleta das informações que usamos no trabalho. Nos capítulos (4) e (5) mostramos e fazemos a análise dos resultados obtidos em cada um dos diferentes estudos que desenvolvemos.

## 2 *Fundamentos Teóricos*

Neste capítulo trataremos dos fundamentos teóricos do trabalho descrito nesta tese de Doutorado. O sistema que estudamos consiste em um experimento que envolve dinâmica de fluidos e que está fora do equilíbrio termodinâmico. A teoria de bifurcação e a análise de estabilidade linear são duas importantes técnicas disponíveis para estudos sobre formação de padrões. A primeira porque auxilia no entendimento da estabilidade do sistema em função de mudanças no parâmetro de controle e a segunda porque permite estudar a estabilidade das soluções estacionárias do sistema na presença de alguma flutuação interna. Optamos por fazer uma revisão dos conceitos da hidrodinâmica que é, por excelência, um ramo da termodinâmica fora do equilíbrio e, através de suas equações fundamentais chegamos às equações de movimento para o sistema que estudamos.

### 2.1 Teoria de bifurcação

Vimos no Cap. 1, que a estabilidade do ramo termodinâmico não é assegurada por muito tempo quando um sistema é dirigido para muito distante do equilíbrio e esse sistema pode mudar significativamente sua forma e exibir uma variedade de padrões espaço-temporais. O espaço de fases gerado por uma ou mais equações do sistema pode ser modificado quando se varia o valor de um parâmetro dessas equações. Em linguagem de sistemas dinâmicos, ocorre a perda de estabilidade estrutural de um sistema quando a topologia de seu espaço de fases não é preservada após mudanças nos valores dos parâmetros de suas equações. A mudança topológica que ocorre no espaço de fases de um sistema, quando algum parâmetro desse passa por um valor crítico, é chamada de bifurcação. Uma maneira de entender o comportamento de um sistema seria usar suas características específicas, tratando diretamente suas equações hidrodinâmicas. Já sabemos que, devido ao caráter fortemente não-linear dessas equações, somente em poucos casos isto é possível. Também pode existir uma quantidade enorme de variáveis, de tal modo que conhecer com boa precisão os valores de todas essas variáveis é praticamente inexequível. No entanto, a

perda de estabilidade de um estado no regime de não-equilíbrio pode ser analisada usando a *teoria de bifurcação*. Esta técnica consiste em analisar a estabilidade dos pontos fixos de uma equação diferencial modelo e conhecer em que ponto do sistema o estado estacionário se torna instável. Em sistemas fora do equilíbrio, a perda de estabilidade e a transição para novos estados pode ser pensada como função de um parâmetro de controle,  $\mu$ , que é característico do sistema. São exemplos de parâmetros de controle: a diferença de temperatura em uma instabilidade de Rayleigh-Bénard e a velocidade angular em uma instabilidade de Taylor-Couette, citadas no Cap. 1. Quando esse parâmetro alcança um valor particular de não-equilíbrio, o ramo termodinâmico se torna instável e surgem novas soluções para o sistema.

Um sistema dinâmico pode ser descrito por

$$\dot{x}_k = f_\mu(x_k) \quad (2.1)$$

na qual os  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) representam as variáveis de estado desse sistema, que no caso mais geral são funções da posição  $\mathbf{r}$  e do tempo  $t$ , e  $f_\mu$  é uma função dessas variáveis. Os pontos fixos do sistema ( $x^*$ ) são as soluções estacionárias da Eq. 2.1. A evolução espaço-temporal deste sistema depende também de  $\mu$ , que é o seu parâmetro de controle. Ao variar  $\mu$ , pode-se alterar a estabilidade de seus pontos fixos. A teoria de bifurcação estabelece que se pode analisar a estabilidade das soluções de equilíbrio avaliando o sinal do autovalor  $\alpha = (df/dx)$  para cada  $x^*$ . Aqueles valores de  $\mu$  para os quais as derivadas  $(df/dx)|_{x=x^*}$  são negativas estabelecem o ramo no qual as soluções  $x^*$  são assintoticamente estáveis. Já os valores de  $\mu$  para os quais  $(df/dx)|_{x=x^*}$  são positivas definem o ramo instável para aquelas soluções  $x^*$ . Em outras palavras, dada uma solução estacionária de um sistema, a estabilidade desse estado dependerá do valor do parâmetro de controle. Para uma determinada faixa de valor deste, uma das soluções estacionárias será estável e a outra instável. No ponto de bifurcação ( $\mu$  crítico), a primeira solução estacionária fica instável e a segunda passa a ser estável, e neste ponto de bifurcação o sistema muda suas características. A bifurcação para novas soluções, no exato ponto no qual uma solução perde estabilidade, é uma propriedade geral das soluções de equações não-lineares. A não analiticidade dessas equações frente ao parâmetro de controle  $\mu$  reflete a mudança qualitativa do comportamento do sistema no ponto de bifurcação.

### 2.1.1 Equação de Ginzburg-Landau - A equação modelo para a bifurcação do sistema estudado

A interface fluido-fluido do sistema que estudamos apresenta-se como uma linha reta (interface plana) no regime pré-bifurcação. No ponto de bifurcação, a linha reta para a interface passa a ser um estado instável e, a partir deste ponto, ela passa a exibir uma estrutura periódica. Este padrão surge com amplitude muito pequena quando o parâmetro de controle atinge seu valor crítico, e sua amplitude cresce suavemente quando esse parâmetro se afasta de seu ponto de bifurcação. Este tipo de bifurcação é conhecida por *bifurcação de forquilha supercrítica*. Uma equação muito conhecida e que tem as características deste tipo de bifurcação é a equação de Ginzburg-Landau. Em sua forma completa, ela possui termos complexos e termos que dão conta das variações espaciais (o termo laplaciano  $\nabla^2$ ). O sistema que estudamos é modelado por uma equação de Ginzburg-Landau escrita na forma

$$\frac{dA_k}{dt} = \lambda(k)A_k - \sigma(k)|A_k|^2 A_k \equiv f_\omega(A_k), \quad (2.2)$$

na qual  $A_k$  representa a amplitude dos modos do padrão espacial,  $\lambda(k)$  representa uma taxa de crescimento da amplitude e  $\sigma(k)$ , que é o coeficiente que acompanha o termo não-linear de saturação da amplitude, assume valor positivo para a bifurcação supercrítica. Seus pontos fixos são

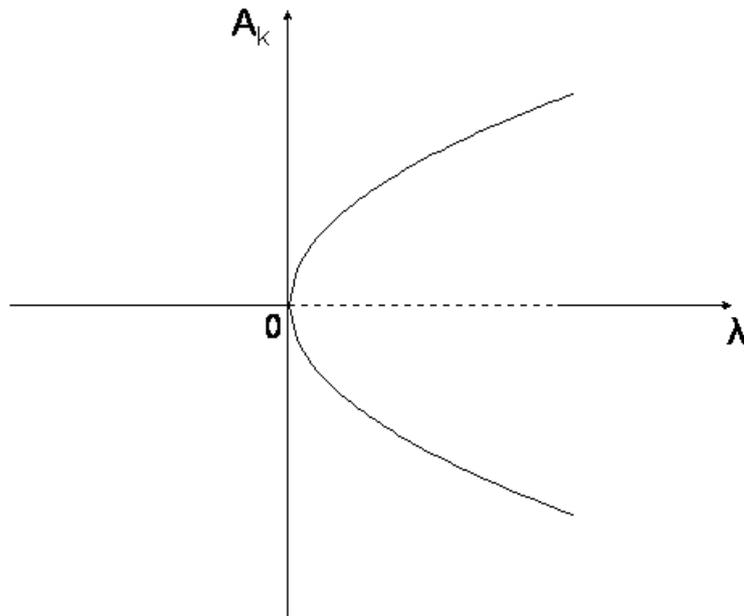
$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_{2,3} &= \pm \sqrt{\frac{\lambda}{\sigma}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

na qual omitimos o subscrito  $k$  para não sobrecarregar demais a notação. A Eq. 2.2 revela uma simetria. Uma troca de  $A_k$  por  $-A_k$  não altera as suas soluções, e isto revela que o padrão espacial é invariante por mudança na fase ou, equivalentemente, por translação ao longo do eixo  $y$  (paralelo ao eixo do cilindro). Como estamos interessados em soluções reais da Eq. 2.2, o par  $A_{2,3}$  só existe para  $\lambda > 0$ . De acordo com o que foi estabelecido na seção 2.1, devemos avaliar a estabilidade de cada solução estacionária substituindo seus valores na expressão dos autovalores  $\alpha = \frac{df}{dA}$ . Dessa forma, temos

$$\alpha = \frac{df}{dA} = \lambda - 3\sigma A^2. \quad (2.4)$$

A interface plana corresponde ao ponto de equilíbrio  $A_1 = 0$ . O valor de  $\alpha = \lambda$  estabelece que esta solução estacionária do sistema é assintoticamente estável para  $\lambda < 0$  e instável

para  $\lambda > 0$ . Os pontos fixos  $A_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{\sigma}}$  se referem ao padrão periódico. O valor de  $\alpha = -2\lambda$  mostra que esse par de soluções estacionárias, que só existe a partir de  $\lambda > 0$ , é assintoticamente estável. O comportamento para essas três soluções estacionárias pode ser representado em um gráfico, como mostrado na Fig. 8. Neste diagrama de bifurcação mostramos que o par de soluções  $A_{2,3}$  surge a partir da origem ( $A_1 = 0; \lambda_c = 0$ ), quando o parâmetro passa pelo seu valor crítico  $\lambda_c$  que é o **ponto de bifurcação**. Neste tipo de bifurcação, um par de soluções estacionárias de mesma estabilidade aparece ou desaparece simultaneamente e ocorre em sistemas que apresentam algum tipo de simetria. Quando o sinal de  $\sigma$  na Eq. 2.2 é positivo, a bifurcação é supercrítica o que implica que o ramo termodinâmico acima do ponto de bifurcação é estável apenas para os pontos fixos  $A_{2,3}$ .



**Figura 8:** Bifurcação das soluções  $A_k$  como função do parâmetro  $\lambda$ . A linha pontilhada representa a solução que é instável no ramo pós-bifurcação.

## 2.2 Análise de Estabilidade Linear

A análise de estabilidade linear é uma técnica empregada para estudar a dinâmica de um sistema fora do equilíbrio termodinâmico na presença de instabilidades. Essas instabilidades dão origem a uma grande variedade de estruturas e a análise de estabilidade linear nos permite determinar a taxa de crescimento dessas instabilidades. Ela consiste em perturbar infinitesimalmente as soluções estacionárias (pontos fixos) das equações diferenciais e, mantendo-se apenas termos de primeira ordem da perturbação nas equações

de movimento do sistema, obtém-se uma equação dinâmica que permite chegar a uma relação tipo dispersão para a perturbação. Como estamos tratando de equações de movimento do sistema, o resultado obtido com uma análise de estabilidade leva em conta muitos dos fatores físicos importantes para o problema.

Nesta seção, estudaremos o comportamento de um sistema sob a influência de uma pequena perturbação. Fazemos isto acrescentando um desvio nas soluções homogêneas do estado estacionário,  $x_1^*, \dots, x_i^*$ , do sistema descrito pela Eq. 2.1. Já sabemos que a evolução espaço-temporal deste sistema depende também dos parâmetros de controle  $\mu$ . Considere a presença de uma pequena perturbação,  $\epsilon(t)$ , nas soluções estacionárias de modo que a nova solução na vizinhança dos pontos fixos fica sendo

$$x(t) = x^* + \epsilon(t). \quad (2.5)$$

Derivando a Eq. 2.5 em relação ao tempo, chegamos a expressão

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} = f_\mu(x(t)) = f_\mu(x^* + \epsilon(t)). \quad (2.6)$$

Como estamos tratando de uma perturbação infinitesimal, ou seja  $\frac{|\epsilon|}{|x^*|} \ll 1$ , podemos expandir a função  $f_\mu$  em uma série de potências em torno do ponto fixo  $x^*$  e truncar essa série em uma ordem finita. Este método é de grande utilidade quando estamos estudando desvios muito pequenos, pois caso um ponto fixo seja instável para uma perturbação pequena ele será instável também para maiores valores daquela perturbação. A expansão de  $f_\mu$  pode ser representada como

$$f_\mu(x^* + \epsilon(t)) = f_\mu(x^*) + \left( \frac{df_\mu}{dx} \right)_{x=x^*} \epsilon(t) + O(\epsilon^2). \quad (2.7)$$

Mantendo apenas o termo linear na expressão (2.7), sabendo que  $f_\mu(x^*) = 0$  e substituindo este resultado na Eq. 2.6 para  $\epsilon(t)$ , ficamos com

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \left( \frac{df_\mu}{dx} \right)_{x=x^*} \epsilon(t). \quad (2.8)$$

Considerando que as variáveis de estado podem depender da posição e do tempo, representaremos o desvio do equilíbrio,  $\epsilon$ , por um vetor coluna  $\vec{\epsilon}$ . Com isto, a derivada espacial da função das variáveis de estado pode ser escrita como uma matriz Jacobiana  $\mathbf{M}$  que, em duas dimensões, é

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{f}_1 / \partial x_1 & \partial \mathbf{f}_1 / \partial x_2 \\ \partial \mathbf{f}_2 / \partial x_1 & \partial \mathbf{f}_2 / \partial x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Então, podemos reescrever a Eq. 2.8 de uma maneira mais geral como

$$\dot{\vec{e}} = \mathbf{M}\vec{e}(t). \quad (2.10)$$

Em geral, a solução da Eq. 2.10 pode ser escrita se os autovalores e os autovetores da matriz  $\mathbf{M}$  são conhecidos. Fazendo  $\alpha$  serem os autovalores e  $\vec{\varphi}$  os correspondentes autovetores

$$\mathbf{M}\vec{\varphi} = \alpha\vec{\varphi}, \quad (2.11)$$

a solução da Eq. 2.10 é

$$\vec{e} = e^{\alpha t}\vec{\varphi}. \quad (2.12)$$

A questão da estabilidade do estado estacionário está relacionada com os autovalores de  $\mathbf{M}$ , ou seja, as raízes da equação  $|\mathbf{M} - \alpha\mathbf{I}| = 0$ . Assim os autovalores  $\alpha$  determinarão o tipo de estabilidade desses estados e podemos sintetizar as possibilidades assim:

- Se um ou mais autovalores tiver uma parte real positiva, as soluções associadas da Eq. 2.12 crescerão exponencialmente. Os autovetores correspondentes são chamados de modos instáveis;
- Se todos os autovalores têm parte real negativa, qualquer pequena perturbação  $\epsilon$  na vizinhança da solução estacionária decairá exponencialmente. (Isto não é válido para grandes perturbações já que, nesse caso, a aproximação dada pela Eq. 2.8 não é válida.)

Da análise dessas possibilidades concluímos que a condição necessária e suficiente para a estabilidade de um estado estacionário é que todos os autovalores da matriz Jacobiana associada,  $\mathbf{M}$ , tenham parte real negativa. Um único autovalor com parte real positiva resulta em instabilidade para o modo correspondente. Porém, o crescimento exponencial da perturbação é limitado pelos efeitos não-lineares e as imperfeições do próprio sistema que o fazem passar por uma transição de um estado instável para um novo estado estacionário estável. Assim, a instabilidade presente pode levar um sistema para esse novo estado, que em alguns casos, apresenta auto-organização. A análise de estabilidade linear não fornece um meio de determinar como o sistema evoluirá quando ele se torna instável. Sua importância consiste em mostrar que uma mudança qualitativa no comportamento do sistema pode acontecer quando se atinge um valor crítico de um dado parâmetro de controle do sistema. A análise de estabilidade linear para o sistema que estudamos foi desenvolvida por Hakim *et al.* [15] e na seção 2.6.1, desenvolveremos esta análise.

## 2.3 Hidrodinâmica

Mais adiante neste capítulo, obteremos as equações de movimento para o sistema que estudamos. Como elas são resultados obtidos das equações fundamentais da hidrodinâmica, adotamos o critério de fazer uma revisão de dinâmica de fluidos seguindo a formulação dada nas Refs. [2,45]. Começamos por definir uma partícula de fluido como um elemento de volume de fluido  $V$  tal que seu tamanho  $a \approx V^{1/3}$  é muito pequeno comparado com a escala de comprimento  $L$  que é característico do fluxo (o espaçamento ( $b_o$ ) entre o cilindro e o plano do sistema que estudamos, por exemplo) e também é muito grande comparado com o livre caminho médio  $\ell$  de uma molécula para que assim possa haver mudança na energia ou no momento das moléculas quando estas atravessarem o volume de uma partícula de fluido. A grosso modo, podemos dizer que a partícula de fluido deve conter um número grande de moléculas. Quando a definição acima for aplicável, o fluido pode ser tratado como um meio contínuo. Desse modo, a velocidade local de um fluido é o valor médio das velocidades das moléculas localizadas dentro de uma partícula de fluido. O campo vetorial de velocidade do fluido,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , é definido por um conjunto de velocidades  $\mathbf{v}$  das partículas desse fluido em cada posição  $\mathbf{r}$  e em cada tempo  $t$ .

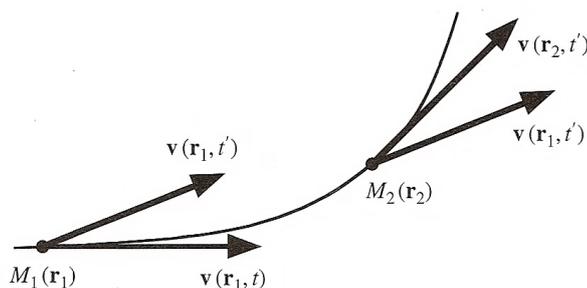
### 2.3.1 Descrições de movimento de um fluido

Há duas descrições possíveis para o movimento de um fluido. Na descrição de Lagrange, uma partícula do fluido é acompanhada enquanto ela se move. Para isto é necessário especificar sua posição inicial  $\mathbf{r}_o$  num dado tempo inicial  $t_o$ . A velocidade do fluido é dada pelo vetor  $\mathbf{V}(\mathbf{r}_o, t)$  que é uma função das variáveis  $\mathbf{r}_o$  e  $t$ . Nessa descrição, cada partícula de fluido carrega a informação sobre suas propriedades como densidade, pressão, momento e essas propriedades mudam no tempo quando a partícula de fluido avança. Um dispositivo de medida Lagrangeano consistiria de uma partícula neutra que fosse levada pelo fluido. Esse procedimento de descrever o fluido completamente gravando a história de cada partícula é computacionalmente dispendioso e se limita a algumas simulações numéricas. Já na descrição de Euler, estamos interessados na velocidade  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  de uma partícula de fluido que está localizada em um ponto específico do espaço e no tempo  $t$  cuja posição é dada pelo vetor  $\mathbf{r}$ . Em cada instante de tempo, o vetor  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  descreve a velocidade de partículas diferentes. E num tempo  $t'$  posterior, a velocidade naquele mesmo ponto dado pelo vetor  $\mathbf{r}$  terá se tornado  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t')$ . Nessa descrição, estamos medindo a evolução das propriedades do fluido num dado ponto no espaço quando o tempo varia. Isto seria equivalente a termos um sensor medindo a velocidade num mesmo

ponto do fluido a cada instante. A descrição de Euler é uma típica descrição de campo já que as propriedades do fluido em uma determinada localização dependem da posição e do tempo. Isto a torna operacionalmente mais fácil de ser aplicada e por esta razão ela é extensamente usada na hidrodinâmica. Há, contudo, a inconveniência de se introduzir termos não lineares na expressão para a aceleração, o que a torna mais difícil de ser tratada matematicamente.

### 2.3.2 Aceleração de uma partícula de fluido

Considere uma partícula de fluido localizada no tempo  $t$  em um ponto  $M_1(\mathbf{r}_1)$ , cuja velocidade nesse instante seja  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)$  como mostrado na Fig. 9. Em um tempo  $t' = t + \delta t$ , essa partícula está num ponto  $M_2(\mathbf{r}_2)$ , tal que  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t)\delta t$ , levando em conta apenas o termo linear em  $\delta t$ . Assim, a sua velocidade passa a ser  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t')$ . Dessa forma,



**Figura 9:** Uma partícula de fluido sujeita a um fluxo não estacionário pode ter sua velocidade alterada no espaço e no tempo. (Fonte: [2], 2001, p. 92.)

a mudança na velocidade  $\delta \mathbf{v}$  numa aproximação em 1ª ordem é

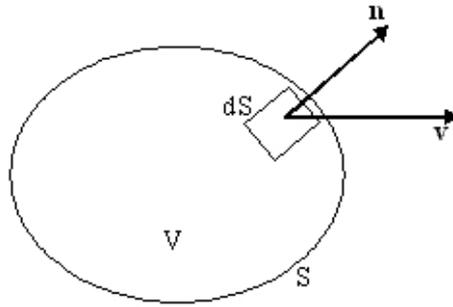
$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t') - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \delta z, \quad (2.13)$$

sendo  $\delta x$ ,  $\delta y$  e  $\delta z$  as componentes do vetor  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Dividindo a equação acima por  $\delta t$  e tomando o limite  $\delta t \rightarrow 0$  ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta t} \right) \Rightarrow \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Sabendo que

$$v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \underbrace{(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)}_{\mathbf{v} \cdot \nabla} \mathbf{v},$$



**Figura 10:** Fluxo de massa que atravessa um elemento de superfície  $dS$  de um volume arbitrário  $V$ . A normal a esse elemento de superfície está representada por  $\mathbf{n}$  e a velocidade do fluido é  $\mathbf{v}$ .

podemos escrever a equação para a aceleração da partícula em uma forma mais compacta dada por

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \quad (2.15)$$

Esta forma vetorial independe do sistema de coordenadas que está sendo usado e ela é conhecida como derivada convectiva. Essa expressão revela, em seu lado direito, as duas maneiras nas quais o campo de velocidade de uma partícula pode mudar. Uma mudança em seu valor pode ocorrer como reflexo da variação explícita no tempo, o termo  $\partial\mathbf{v}/\partial t$ . A outra forma de mudança é devido ao movimento da partícula de uma posição para outra e isto pode implicar em condições espaciais diferentes, determinando alteração no valor da velocidade. O termo que envolve a velocidade e o operador gradiente,  $\mathbf{v} \cdot \nabla$  dá conta dessas variações espaciais.

### 2.3.3 A conservação de massa em um fluxo

Para obter uma equação local para a conservação de massa de um fluido escrevemos o balanço global para sua massa dentro de um volume arbitrário  $V$ , fixo em relação a um sistema de referência usado para descrever o fluido. Esse volume é envolvido por uma superfície fechada  $S$  e pode ser visto na Fig. 10. Quando não existe qualquer fonte ou sumidouro de massa no sistema, a taxa temporal de mudança de massa  $m$  contida dentro do volume devido a entrada e saída de fluido, é igual e oposta ao fluxo que deixa a superfície de contorno. Podemos escrever dessa forma

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int \int \int_V \rho dV = - \int \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.16)$$

na qual  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal ao elemento de superfície  $dS$ . Como o volume  $V$  não muda no tempo, podemos mudar a ordem entre integração e diferenciação com relação ao tempo e ficamos com

$$\frac{dm}{dt} = \int \int \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.17)$$

Aplicando o teorema da divergência no segundo termo da Eq. 2.17 ele fica como

$$\int \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int \int \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV. \quad (2.18)$$

Com essa forma para o segundo termo, a expressão para o balanço de massa fica como

$$\frac{dm}{dt} = \int \int \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0. \quad (2.19)$$

O integrando na Eq. 2.19 deve ser igual a zero pois esta equação vale para qualquer volume arbitrário  $V$ . Desta forma, obtemos a equação da continuidade que é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.20)$$

Esta equação envolve a derivada parcial no tempo da densidade do fluido e o divergente da quantidade  $\rho \mathbf{v}$ . Podemos derivar esse último termo explicitamente

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$$

e substituí-lo na Eq. 2.20 que fica como

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Observamos que a expressão dentro dos parênteses tem a forma da derivada convectiva como aquela dada pela Eq. 2.15 e que ela pode ser escrita como  $\frac{d\rho}{dt}$ , o que representa a variação temporal da densidade do fluido para um elemento desse fluido que é seguido ao longo do fluxo e que corresponde à descrição Lagrangeana explicada na seção 2.3.1. Nesta formulação, a equação da continuidade tem a forma dada por

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.21)$$

A equação da continuidade, dada pela Eq. 2.20 ou pela Eq. 2.21, leva em conta variações na densidade e na velocidade do fluido e é uma das equações básicas da hidrodinâmica.

### 2.3.4 O fluido incompressível

Um fluido cuja densidade de cada um de seus elementos permanece constante durante o movimento é chamado de fluido incompressível. Esta condição implica que  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  e com isto a Eq. 2.21 assume uma forma mais simples dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.22)$$

Existe uma condição para que um fluido possa ser considerado incompressível. Quando um fluido é colocado para se movimentar, ele provoca mudanças na pressão que, para altas velocidades, é proporcional a  $v^2$ . Sendo  $\chi$  a compressibilidade de um fluido, podem existir flutuações relativas na densidade do fluido  $\frac{\delta\rho}{\rho}$  que serão

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \chi\rho v^2. \quad (2.23)$$

A compressibilidade de um fluido pode ser desprezada quando

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1 \rightarrow v \ll \frac{1}{\sqrt{\chi\rho}} \rightarrow v \ll v_{\text{som}} \quad (2.24)$$

na qual  $v_{\text{som}} = \frac{1}{\sqrt{\chi\rho}}$  representa a velocidade das ondas de pressão nesse fluido. Desse modo, quando o fluido tem baixas velocidades, ele não fica sujeito às variações de densidade provocadas pela propagação das ondas de choque que viajam à sua frente e assim pode ser considerado como um fluido incompressível.

### 2.3.5 Forças superficiais sobre um elemento de fluido

Considere um elemento superficial de área  $dS$  em um fluido cuja orientação no espaço pode ser representada pelo vetor  $d\mathbf{S}$  que é um vetor de magnitude  $dS$  com direção ao longo do vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ . A força por unidade de área desse fluido é chamada de tensão. Considere a força exercida por uma porção de fluido localizada em um lado deste elemento  $dS$  sobre a porção de fluido localizada no outro lado de  $dS$ . Em um fluido em repouso, esta força atua numa direção normal ao elemento de superfície  $dS$  e sua magnitude é independente da orientação deste elemento. Como essa tensão é isotrópica, basta um número para caracterizá-la em cada ponto e este número é a pressão hidrostática  $p$ . Quando um fluido está em movimento, surgem também forças tangenciais ao elemento superficial de área  $dS$  que são indicativas de forças de fricção entre as camadas do fluido, que escorregam umas em relação às outras. Estas forças de fricção são devidas à vis-

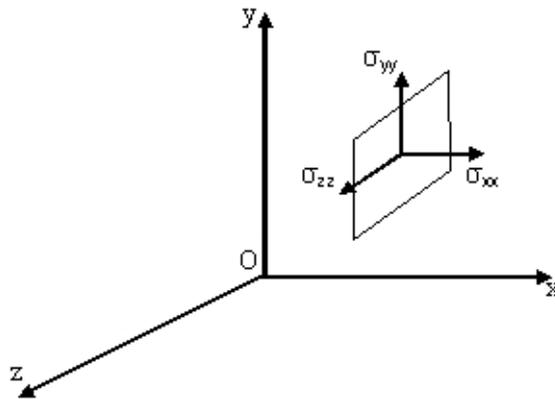
cosidade do fluido e compõem o que se chama de tensão tangencial ou de cisalhamento. A viscosidade é um coeficiente de transporte que mede a transferência de momento, de regiões de maior velocidade para outras de menor velocidade. Teremos desse modo três forças superficiais para cada uma das orientações do vetor normal unitário

$$\sigma_{ij} = \frac{df_i}{n_j dS} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.25)$$

Isto nos dá nove coeficientes  $\sigma_{ij}$  que representam a componente na direção  $i$  da tensão exercida sobre uma superfície com o vetor normal unitário na direção  $j$ . Estes coeficientes podem ser escritos como uma matriz  $3 \times 3$  que representa o tensor de tensão no fluido

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Os elementos com  $i=j$  ( $\sigma_{xx}$ , por exemplo) compõem o que é chamado de tensão normal. Os elementos com  $i \neq j$  ( $\sigma_{xy}$ , por exemplo) representam o que se denomina de tensão tangencial ou de cisalhamento. Para uma melhor compreensão, a Fig. 11 mostra três desses coeficientes do tensor tensão atuando sobre uma superfície com normal orientada na direção  $x$ . Caso tenhamos uma direção normal  $\mathbf{n}$  arbitrária, as componentes do tensor



**Figura 11:** Representação dos tensores atuando sobre uma das superfícies do fluido.

tensão nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  serão dadas por

$$\boldsymbol{\sigma}_n = [\sigma] \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Podemos escrever a força sobre um elemento superficial de área com normal em uma direção arbitrária, na forma vetorial como

$$\frac{d\mathbf{f}}{dS} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}. \quad (2.28)$$

O tensor de tensão  $[\sigma]$  tem uma parte que corresponde às tensões tangenciais e outra que corresponde às tensões normais. As primeiras estão relacionadas com gradientes transversais da velocidade do fluido e as últimas com gradientes na mesma direção da velocidade do fluido. Na ausência de gradientes de velocidade, o fluido estará submetido apenas à pressão hidrostática. Desse modo, para que o tensor de tensão  $[\sigma]$  contenha este componente, que é totalmente diagonal e isotrópico, precisamos reescrevê-lo na forma

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij} \quad (2.29)$$

na qual o termo  $p$  é a pressão e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  se  $i=j$  e  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ ). O sinal negativo associado com  $p$  indica que um fluido em repouso está sobre compressão. O termo  $\sigma'_{ij}$  é a expressão geral para o tensor de tensão viscosa. Ele está relacionado com as deformações do fluido que por sua vez depende do gradiente da velocidade do fluido. O tensor  $\sigma'_{ij}$  conterà os elementos diagonais,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$ , quando houver movimento relativo entre as diferentes partes do fluido.

### 2.3.6 Deformações em um fluido em movimento

Há uma relação entre a viscosidade de um fluido e as deformações a que ele está sujeito quando flui. Considere, em um dado instante de tempo  $t$ , uma partícula de fluido localizada num ponto  $\mathbf{r}$  com velocidade  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ . Considere que em um ponto próximo desse, ou seja,  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ , a velocidade de uma outra partícula de fluido seja  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . O aumento na velocidade para cada componente  $dv_i$  de  $d\mathbf{v}$  pode ser escrito, em primeira ordem relativo ao deslocamento  $dx_i$ , como

$$dv_i = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx_j. \quad (2.30)$$

Podemos escrever  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  como os elementos de um tensor gradiente de velocidade  $[G]$  para um fluido. Este tensor de segunda ordem pode ser escrito como uma matriz 3x3 quando consideramos casos tridimensionais. Ele pode ser decomposto em suas componentes si-

métrica e anti-simétrica da seguinte maneira

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{e_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{w_{ij}} \quad (2.31)$$

na qual o tensor  $e_{ij}$  compreende os efeitos de expansão (ou contração) no elemento de volume, dado pelos seus termos diagonais, e as deformações nesse elemento de volume dadas pelos seus termos fora da diagonal. Já o tensor  $w_{ij}$ , cujos termos na diagonal são nulos, representa as rotações de corpo rígido do elemento de volume do fluido, ou seja, seus deslocamentos angulares sem qualquer deformação. Consideremos agora as características do tensor de tensão viscosa  $[\sigma']$ . Seus elementos são simétricos, o que implica que  $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$ . Essa simetria reflete o fato que o torque resultante sobre um elemento de volume infinitesimal deve provocar uma aceleração finita sobre ele. Como o tensor de tensão viscosa  $[\sigma']$  é simétrico, há uma relação entre ele e as componentes  $e_{ij}$  do tensor simétrico  $[e]$  do tensor gradiente da velocidade  $[G]$ .

### 2.3.7 O tensor viscoso de cisalhamento para um fluido Newtoniano

Um fluido é considerado Newtoniano quando as componentes do seu tensor de tensão viscosa dependem linearmente dos valores instantâneos de suas deformações. Em primeira ordem, as componentes do tensor  $[\sigma']$  se relacionam com o tensor simétrico  $[e]$ . Para obter essa relação partimos do fato que o tensor  $[\sigma']$  pode ser escrito na forma

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl} e_{kl} \quad (2.32)$$

na qual  $A_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem para um meio isotrópico. Há uma forma mais extensa para  $A_{ijkl}$  que é

$$A_{ijkl} = A\delta_{ik}\delta_{jl} + A'\delta_{il}\delta_{jk} + B\delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (2.33)$$

Sabemos da seção anterior que o tensor  $[\sigma']$  é simétrico, ou seja  $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$ . Então, podemos permutar o índice  $i$  com o  $j$  do termo  $A'$  da expressão acima, resultando que  $A = A'$ . Dessa forma, a expressão para o tensor  $[\sigma']$  fica com a forma

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= A(\delta_{ik}\delta_{jl}e_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}e_{kl}) + B\delta_{ij}\delta_{kl}e_{kl} \\ &= A(e_{ij} + e_{ji}) + B\delta_{ij}e_{ll} \\ &= 2Ae_{ij} + B\delta_{ij}e_{ll}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

na qual o fator 2 no último termo está de acordo com o fato que o tensor  $[e]$  é simétrico. Podemos expressar o tensor  $[e]$  como a soma de duas contribuições. A primeira delas corresponde às deformações do elemento do fluido sem mudança no seu volume e são dadas pelos componentes fora da diagonal principal do tensor simétrico  $[e]$ . A segunda contribuição representa as mudanças volumétricas (expansão e contração) do elemento do fluido e são representadas pelos componentes da diagonal principal do tensor  $[e]$ . Assim, escrevemos o tensor  $[e]$  na forma:

$$e_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{\parallel} + \left( e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{\parallel} \right). \quad (2.35)$$

Substituindo a expressão 2.35 na 2.34, obtemos

$$\sigma'_{ij} = A \left( 2e_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}e_{\parallel} \right) + \left( \frac{2A}{3} + B \right) \delta_{ij}e_{\parallel}. \quad (2.36)$$

Denominando  $A = \mu$  e  $\left( \frac{2A}{3} + B \right) = \zeta$ , o tensor de tensão viscosa fica sendo

$$\sigma'_{ij} = 2\mu \left( e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{\parallel} \right) + \zeta \delta_{ij}e_{\parallel} \quad (2.37)$$

no qual se encontram separadas as contribuições com gradientes transversais da velocidade (deformação por cisalhamento) e as contribuições devido ao divergente da velocidade (mudanças volumétricas do fluido), que são dadas pelo traço do tensor  $[e]$ . O símbolo  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade de cisalhamento e  $\zeta$  é o segundo coeficiente de viscosidade chamado *bulk*. Quando tratamos de fluidos incompressíveis, o termo das forças superficiais no qual aparece o coeficiente de viscosidade *bulk* se anula porque  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

### 2.3.8 A equação de movimento para um fluido

Considere um fluido em movimento cujo volume  $V$  seja constituído de matéria que se move com ele e permanece dentro de  $V$ , e esteja submetido a forças volumétricas e forças superficiais. Para obter a equação geral da hidrodinâmica usamos a 2ª lei de Newton na forma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \sum (f_{\text{volumétricas}} + f_{\text{superficiais}}) \\ \frac{d}{dt} \int \int \int_{V'} \rho \mathbf{v} dV' &= \int \int \int_{V'} \rho \mathbf{f} dV' + \int \int_{S'} [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n} dS' \end{aligned} \quad (2.38)$$

na qual  $\mathbf{f}$  representa as forças volumétricas por unidade de massa do fluido, por exemplo a força gravitacional e a eletromagnética, e  $[\boldsymbol{\sigma}]$  é o tensor das forças superficiais que atuam

na superfície  $dS'$ , que são a pressão e as tensões tangenciais devido à viscosidade. O movimento desse fluido é descrito pela derivada Lagrangeana  $d/dt$ , o que implica que o produto  $\rho dV'$  é constante. Usando este fato, e aplicando o teorema da divergência na integral de superfície da Eq. 2.38, podemos reescrevê-la como

$$\int \int \int_{V'} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV' = \int \int \int_{V'} \rho \mathbf{f} dV' + \int \int \int_{V'} \nabla \cdot [\sigma] dV'. \quad (2.39)$$

A integral acima é avaliada para um volume  $V'$  que se move com o fluido. Tomando o limite quando este volume tende a zero e dividindo pelo valor do elemento de volume  $dV$ , chegamos à forma local da equação de movimento para uma partícula do fluido, que na verdade é composta por muitos componentes

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot [\sigma]. \quad (2.40)$$

Na seção 2.3.6 vimos que o tensor de tensão  $[\sigma]$  pode ser separado em duas contribuições, uma devida à pressão normal e outra devida às forças viscosas. Desse modo, o termo  $\nabla \cdot [\sigma]$  fica como  $\nabla \cdot [\sigma'] - \nabla p$ . Substituindo este resultado na Eq. 2.40 temos

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot [\sigma']. \quad (2.41)$$

Substituindo a derivada total pelo sua forma convectiva, a Eq. 2.41 passa a ter a forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\sigma'] \quad (2.42)$$

na qual fica explícita a dependência temporal e espacial da velocidade do fluido. Esta é a equação que representa o movimento para qualquer fluido. Usando a forma explícita para o tensor de tensão  $[\sigma']$  dada pela Eq. 2.37, o termo  $\nabla \cdot [\sigma']$  para o  $i$ -ésimo componente das forças viscosas fica como

$$\left( \nabla \cdot [\sigma'] \right)_i = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right). \quad (2.43)$$

Na expressão acima, assumimos que a variação espacial dos dois coeficientes de viscosidade são desprezíveis. Substituindo este resultado na Eq. 2.42 chegamos à equação de movimento para um fluido Newtoniano incompressível ou compressível

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (2.44)$$

Para fluidos incompressíveis, ou seja quando  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , a equação acima fica sem o último termo e ela toma a forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.45)$$

Ela recebe o nome de equação de Navier-Stokes e, juntamente com a equação da continuidade, descrevem o comportamento macroscópico de um fluido isotrópico fora do equilíbrio. Mais adiante, neste capítulo, usaremos estas duas equações para obter informações sobre a dinâmica do sistema que estudamos.

### 2.3.9 Número de Reynolds

O *número de Reynolds* é um parâmetro adimensional que caracteriza a velocidade do fluido e o tamanho do sistema. Quando um fluido está em movimento, aparecem dois mecanismos básicos de transferência de momento que são a convecção e a difusão. O fluxo de momento por unidade de volume para o mecanismo de convecção quando o fluido avança uma distância característica do fluxo,  $L$ , é

$$\left(\frac{m}{V}\right) U \frac{\delta L}{\delta t} = \rho U^2. \quad (2.46)$$

Já o mecanismo de difusão leva em conta o fluxo de momento transversal do fluido associado à presença da viscosidade. Ele é dado pelo produto da viscosidade com as derivadas de primeira ordem das componentes da velocidade (as deformações) do elemento de fluido

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\mu U}{L}. \quad (2.47)$$

A razão entre esses dois mecanismos pelos quais o momento é transferido quando um fluido se move é chamado de *número de Reynolds*,  $Re$ .

$$Re \equiv \frac{\rho U L}{\mu} \quad (2.48)$$

Ele mede a importância relativa do transporte de momento por convecção e difusão.

O número de Reynolds aparece naturalmente quando consideramos a solução estacionária (escoamento permanente) da equação de Navier-Stokes na ausência de forças volumétricas,

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.49)$$

e a reescrevemos em sua forma adimensional. Especificando os valores típicos para a velocidade como  $U$ , para o comprimento como  $L$  e para a pressão, de acordo com o

teorema de Bernoulli, como  $\sim \rho U^2$ , definimos as grandezas adimensionais

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{U} \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L} \quad p' = \frac{p}{\rho U^2}. \quad (2.50)$$

Substituindo estas expressões na Eq. 2.49, obtemos

$$\frac{\rho U^2}{L} (\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' = -\frac{\rho U^2}{L} \nabla' p' + \frac{\mu U}{L^2} \nabla'^2 \mathbf{v}'. \quad (2.51)$$

Dividindo ambos os lados da expressão acima por  $\frac{\rho U^2}{L}$ , obtemos uma forma compacta da equação de Navier-Stokes em sua forma adimensional

$$(\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' = -\nabla' p' + \frac{\mu}{\rho U L} \nabla'^2 \mathbf{v}'. \quad (2.52)$$

Observamos que o termo  $\frac{\mu}{\rho U L}$  engloba todas as escalas características do sistema estudado, e ele é exatamente o inverso do número de Reynolds, definido anteriormente através da Eq. 2.48. Uma inspeção na forma adimensional da equação de Navier-Stokes (Eq. 2.52) mostra que, através do valor de  $Re$ , podemos avaliar a importância dos dois termos que envolvem derivadas da velocidade: o termo não-linear,  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ , e o termo viscoso,  $\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}$ . Então, podemos estabelecer dois regimes: um para baixos valores do *número de Reynolds* e outro para grandes valores do *número de Reynolds*. Valor de  $Re$  muito pequeno significa que as forças viscosas e o transporte difusivo dominam e o fluxo é bastante estável. Isto é observado quando um ou mais dos seguintes fatores estão presentes: velocidades baixas, sistemas de tamanho reduzido e fluido muito viscoso. Quando  $Re$  é elevado (grandes velocidades, viscosidade baixa e comprimento característico do sistema muito grande), os processos convectivos dominam e o fluxo é mais instável.

### 2.3.10 Equilíbrio local e o regime linear

Em um fluido sempre ocorrem processos de colisão no seu nível microscópico. Nesses processos, se o fluido for isotrópico, grandezas como número de partículas, momento e energia são conservadas na ausência de fontes ou sumidouros. As equações (2.21) e (2.45) são equações de balanço para massa e momento, respectivamente. Podemos obter equações de balanço para a energia e a entropia. Na presença de força externa conservativa, ou seja, na forma  $\mathbf{f} = -\nabla \phi$  (com  $\phi$  sendo a energia potencial por unidade de volume), podemos escrever a equação de balanço para a densidade de energia, de acordo com [10], como

$$\rho \frac{de}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_e = 0 \quad (2.53)$$

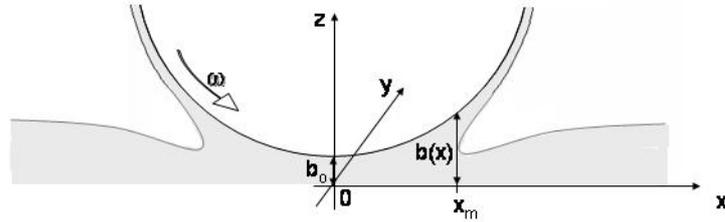
na qual  $J_e$  é o fluxo de densidade de energia que entra ou deixa o volume  $V$ . A entropia, por outro lado, é uma grandeza que não se conserva e, quando ocorrem processos irreversíveis, a equação de balanço da entropia conterà um termo de fonte e ela pode ser escrita, de acordo com a Ref. [10], como

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \Sigma_s \quad (2.54)$$

na qual  $s$  é a entropia por unidade de volume do fluido,  $\mathbf{J}_s$  é o fluxo de densidade de entropia devido às trocas externas. O termo de fonte de densidade de entropia  $\Sigma_s$  representa os processos dissipativos que ocorrem dentro de  $V$ . Este termo contém coeficientes de transporte como o coeficiente de condutividade térmica  $K$  e os coeficientes de viscosidade  $\mu$  e  $\zeta$ . Processos que tendem a restabelecer o equilíbrio são processos irreversíveis e neles  $\Sigma_s > 0$ . Para processos reversíveis,  $\Sigma_s$  é nulo.

Processos hidrodinâmicos são caracterizados pela presença de não homogeneidades na densidade de grandezas e por relaxações para o estado de equilíbrio. Quando um sistema é tirado de seu estado de equilíbrio por qualquer perturbação lenta e de pequena amplitude, suas variáveis que não se conservam durante colisões ou que não são parâmetros de ordem do sistema, decaem rapidamente para o estado de equilíbrio, geralmente através de processos de transporte. As equações hidrodinâmicas (2.21), (2.45) e (2.54) formam um conjunto de 5 equações (1 para a conservação de massa, 3 para as velocidades e 1 para a entropia) que descrevem o comportamento de uma partícula de fluido isotrópico Newtoniano. Em geral, é muito difícil obter uma solução exata para a equação de Navier-Stokes (Eq. 2.45). Ainda assim, é possível obter informações importantes através de soluções numéricas que valem para uma faixa restrita de valores das variáveis que aparecem nela. Em hidrodinâmica, é possível tratar um sistema fora do equilíbrio usando a propriedade de equilíbrio local. Ela consiste em assumir a validade das relações termodinâmicas de equilíbrio para um dado elemento de volume  $\delta V$  desse sistema. Isto é possível quando as variações espaciais dos desvios do equilíbrio ocorrem em uma escala de comprimento muito grande comparada com as distâncias microscópicas. Dessa maneira, quando o desvio do equilíbrio for pequeno, é possível encontrar uma versão linearizada para essas equações que são muito úteis para descrever as flutuações de um fluido em torno do equilíbrio. A hipótese que permite tratar as equações em sua forma linear é chamada de *equilíbrio local*. Na seção 2.6.1 perturbaremos as soluções das equações hidrodinâmicas até a ordem linear com o objetivo de obter informações sobre a estabilidade do sistema na presença de pequenos desvios a partir do equilíbrio.

## 2.4 Equações hidrodinâmicas aplicadas ao sistema estudado



**Figura 12:** Representação das condições de contorno usadas na análise do fluxo. As dimensões  $b_0$  e  $b(x_m)$  foram aumentadas para que fossem facilmente observadas

Usamos as equações hidrodinâmicas obtidas nas seções 2.3.3 e 2.3.8 para estudar a dinâmica da interface ar-óleo mostrada no lado direito da Fig. 12. As condições de incompressibilidade se aplicam a esse sistema, portanto valem a equação da continuidade escrita na forma (Eq. 2.22)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

e a equação de Navier-Stokes (Eq. 2.45)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}.$$

A aceleração da gravidade pode ser desprezada e com isso a equação de Navier-Stokes perde o termo de força volumétrica externa. Estamos interessados nas soluções de estado estacionário dessa equação, logo, a derivada temporal se anula e ficamos com

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.55)$$

O termo não-linear na equação acima faz com que ela apresente soluções analíticas somente para pouquíssimos casos. Mas existem situações em que seu termo não-linear pode ser desprezado ou ele é nulo. Para  $Re \ll 1$  podemos desprezar o termo não-linear  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  já que o termo viscoso  $\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}$  é dominante. Já quando o fluxo é unidimensional, também conhecido como fluxo laminar, somente uma componente da velocidade é não-nula e o termo não-linear se anula. No caso estudado aqui, o fluxo de óleo obedece à aproximação de lubrificação que consiste em uma simplificação de um problema de escoamento, quando o fluido passa por um estreitamento entre duas superfícies. Esta aproximação, válida quando o fluxo é quase paralelo, permite considerar o fluxo como localmente unidimensional com componentes da velocidade diferente de zero apenas em

uma direção. Para o nosso caso, esta direção é  $x$ . Dessa forma temos  $v_y(x, y, z) = v_z(x, y, z) = 0$ , que combinada com a condição de incompressibilidade (Eq. 2.22) resulta que  $\partial v_x / \partial x = 0$ . Assim, a velocidade fica com as componentes  $(v_x(x, z), 0, 0)$  e o termo convectivo é nulo já que

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v} = 0.$$

Com este resultado, a equação que deve ser resolvida para a obtenção da dinâmica da interface fica com a forma mais simples, conhecida por equação de Stokes

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.56)$$

### 2.4.1 Estado estacionário em um fluxo laminar

Nesta seção, usando as devidas condições de contorno, obteremos as equações de movimento para o sistema estudado, que consiste de um cilindro e um plano. Usando a aproximação de lubrificação para o fluxo de óleo, podemos supor que o gradiente de pressão localiza-se no plano  $(x, y)$ . Então, a Eq. 2.56, fica sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} &= \mu \nabla^2 \mathbf{v} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Para um gradiente de pressão constante, a Eq. 2.57 admite solução do tipo:

$$\mathbf{v} = \left( az + \frac{b}{2} z^2 \right) \hat{i} + \left( cz + \frac{d}{2} z^2 \right) \hat{j}. \quad (2.58)$$

Derivando duas vezes a expressão acima e substituindo na Eq. 2.57, chegamos ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \\ d &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

Como as condições de fronteira são:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(z = 0) &= 0 \\ \mathbf{v}(z = h) &= V_o \hat{i}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

na qual  $h$  é altura da placa até a superfície do cilindro e  $V_o$  é a velocidade tangencial do cilindro. Em  $z = h$  ficamos com

$$\mathbf{v} = \left( ah + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 \right) \hat{i} + \left( ch + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} h^2 \right) \hat{j} = V_o \hat{i}, \quad (2.60)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} a &= \left( \frac{V_o}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h \right) \\ c &= \left( -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} h \right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Como  $h$  é função de  $x$ , definimos  $h \equiv b(x)$ , e assim chegamos a

$$\mathbf{v}(x, y, z) = z \left( \frac{V_o}{b(x)} \hat{i} + \frac{z - b(x)}{2\mu} \nabla_{\text{h}p} \right) \quad (2.62)$$

no qual  $\nabla_{\text{h}p}$  representa o gradiente da pressão no plano  $(x, y)$ . O campo de velocidades obtido acima é uma superposição de dois tipos de fluxos: um fluxo de *Poiseuille*, dado pelo perfil parabólico em  $z$  e um fluxo tipo *Couette*, dado pelo perfil linear em  $z$ . Para obtermos a velocidade média local do fluido, integramos em  $z$  e dividimos por  $b(x)$ . Assim:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y) &= \frac{1}{b(x)} \int_0^{b(x)} \left( \frac{V_o}{b(x)} \hat{i} + \frac{z - b(x)}{2\mu} \nabla_{\text{h}p} \right) z dz \\ &= \frac{1}{b(x)} \left( \frac{V_o}{2b(x)} z^2 \Big|_0^{b(x)} \hat{i} + \frac{z^3}{6\mu} \nabla_{\text{h}p} \Big|_0^{b(x)} - \frac{b(x)}{4\mu} z^2 \nabla_{\text{h}p} \Big|_0^{b(x)} \right) \Rightarrow \\ \mathbf{v}(x, y) &= \frac{V_o}{2} \hat{i} - \frac{b^2(x)}{12\mu} \nabla_{\text{h}p} \end{aligned} \quad (2.63)$$

A equação da continuidade para fluidos incompressíveis (Eq. 2.22) é modificada para levar em conta a velocidade média do fluido e a recomposição do fluxo. Desse modo, ela se torna

$$\nabla \cdot [b(x)\mathbf{v}(x, y)] = 0. \quad (2.64)$$

Usando a expressão para  $\mathbf{v}(x)$  obtida na Eq. 2.63 e sabendo que  $dv_x/dx = 0$ , a Eq. 2.64 mostra que

$$\begin{aligned} \frac{db}{dx} \mathbf{v}(x, y) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{V_o}{2} \hat{i} &= \frac{b^2(x)}{12\mu} \left( \frac{dp}{dx} \hat{i} + \frac{dp}{dy} \hat{j} \right) \Rightarrow \\ \frac{dp}{dy} &= 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Agora, determinamos o fluxo  $Q$  através do espaço entre o plano e o cilindro através de

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{b(x)} (\mathbf{v}(x) \cdot \hat{i}) dz \\ &= \int_0^{b(x)} \left( \frac{V_o}{2} - \frac{b^2(x)}{12\mu} \frac{dp}{dx} \right) dz \Rightarrow \\ Q &= \frac{V_o b(x)}{2} - \frac{b^3(x)}{12\mu} \frac{dp}{dx}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Desse modo, encontramos uma expressão para a distribuição de pressão para o problema que estamos tratando e ela é dada por

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu V_o}{b^2(x)} - \frac{12\mu Q}{b^3(x)}. \quad (2.67)$$

Já que estamos lidando com valores pequenos de  $x$ , o perfil do cilindro é aproximado por uma parábola e esta equação diferencial pode ser resolvida fazendo  $b(x) \simeq x^2/2R + b_o$ , no qual  $R$  é o raio do cilindro, e introduzindo  $x = (2Rb_o)^{1/2} \tan \theta$ . Desse modo, a expressão para  $p(x, Q)$  fica sendo:

$$\begin{aligned} p(x, Q) - p_o &= \frac{12\mu V_o R^2}{(2Rb_o)^{3/2}} \left[ \left( \theta(x) + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right] \\ &- \frac{48\mu Q R^3}{(2Rb_o)^{5/2}} \left[ \frac{3}{4} \left( \theta(x) + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \frac{1}{16} \sin(4\theta) \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

no qual  $p_o$  é a pressão atmosférica em  $x = -\infty$ . Como a pressão na saída é a pressão atmosférica, teremos  $p(\infty) = p_o$ , sendo que  $x \rightarrow \infty \Rightarrow \theta \rightarrow \pi/2$ , e essas condições aplicadas na Eq. 2.68 determinam o fluxo  $Q$ :

$$Q = \frac{2}{3} b_o V_o \quad (2.69)$$

## 2.5 Estudo da interface plana

Nesta seção, usando os resultados das equações hidrodinâmicas devidamente especificadas para o sistema que estudamos, obteremos uma expressão para a posição final de recuo da interface ar-óleo. Os resultados desta seção foram originalmente reportados no artigo de Hakim *et al.* [15]. Uma expressão para a posição da interface plana pode ser obtida usando conservação do fluxo: O fluxo de óleo que passa entre o cilindro e a placa,  $Q_{\text{en}}$ , deve ser igual ao fluxo de óleo que sai pela película que reveste o cilindro,  $Q_{\text{ex}}$ . Este fluxo é igual à velocidade do cilindro multiplicada pela espessura do filme de óleo que recobre o cilindro, que é dada por  $b(x_m)F(\text{Ca})$ , onde  $\text{Ca} \equiv \frac{\mu V_o}{T}$  é o número de capilaridade

e  $T$  é a tensão superficial entre o ar e o óleo. Então a expressão para o fluxo  $Q_{\text{ex}}$  fica sendo

$$Q_{\text{ex}} = V_o b(x_m) F(\text{Ca}), \quad (2.70)$$

na qual  $b(x_m)$  é a medida da altura no início do menisco e  $x_m$  é uma posição estável para a interface plana. A função empírica  $F(\text{Ca})$  é necessária para que seja levado em conta a presença do menisco. Ela deve ter um valor menor que 1 para que se mantenha a conservação do fluxo e, de acordo com Tabeling *et al.* [5], é dada por

$$F(\text{Ca}) = C_1 \left[ 1 - \exp \left( -C_2 \left( \frac{\mu V_o}{T} \right)^{2/3} \right) \right]. \quad (2.71)$$

Como não fizemos medidas da espessura do filme de óleo, obtivemos os valores para os parâmetros  $C_1$  e  $C_2$  através de ajuste dos nossos dados experimentais. Para obtermos  $Q_{\text{en}}$ , precisamos considerar o menisco. A diferença de pressão entre dois fluidos separados por uma interface, é dada aproximadamente pela lei de Young-Laplace:

$$p(x_m) = p_o - T \left( \frac{2}{b(x_m)} + \frac{1}{\rho} \right), \quad (2.72)$$

na qual  $\rho$  é o raio de curvatura do menisco no plano horizontal ( $xy$ ). Para interface plana o termo  $1/\rho$  vale zero. Aplicando a conservação do fluxo usando  $Q_{\text{en}} = Q_{\text{ex}}$ , com  $Q_{\text{ex}}$  dado pela Eq. 2.70, e igualando a Eq. 2.72 (com  $\rho \rightarrow \infty$ ) a Eq. 2.68, temos o sistema de equações abaixo que nos permite obter uma expressão para a posição da interface plana:

$$\begin{cases} Q_{\text{en}} = V_o b(x_m) F(\text{Ca}) \\ p(x_m, Q_{\text{en}}) = p_o - T \left( \frac{2}{b(x_m)} \right). \end{cases} \quad (2.73)$$

Expressando  $Q_{\text{en}}$  como  $\alpha b_o V_o$  e usando a expressão para  $p(x_m, Q_{\text{en}})$  dada pela Eq. 2.68, o sistema (2.73) fica na forma

$$\begin{cases} \alpha b_o V_o = V_o b(x_m) F(\text{Ca}) \\ p_o - T \left( \frac{2}{b(x_m)} \right) = p_o + \frac{12\mu V_o R^2}{(2Rb_o)^{3/2}} \left[ \left( \theta_m + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin(2\theta_m) \right] \\ - \frac{48\mu\alpha b_o V_o R^3}{(2Rb_o)^{5/2}} \left[ \frac{3}{4} \left( \theta_m + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin(2\theta_m) + \frac{1}{16} \sin(4\theta_m) \right]. \end{cases} \quad (2.74)$$

Usando  $b(x_m) = b_o \left( 1 + \frac{x_m^2}{2Rb_o} \right)$  e sabendo que  $\frac{x_m^2}{2Rb_o} = \tan^2 \theta$ , temos

$$b(x_m) = b_o (1 + \tan^2 \theta) = \frac{b_o}{\cos^2 \theta}. \quad (2.75)$$

Substituindo o resultado dado pela Eq. 2.75 na segunda expressão do sistema (2.74), temos:

$$\begin{aligned}
T \left( \frac{2}{\frac{b_o}{\cos^2 \theta}} \right) &= \frac{12\mu V_o R^2}{(2Rb_o)^{3/2}} \left( 2\alpha \left[ \frac{3}{4} \left( \theta_m + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin(2\theta_m) + \frac{1}{16} \sin(4\theta_m) \right] \right) \\
&- \frac{12\mu V_o R^2}{(2Rb_o)^{3/2}} \left( \left[ \left( \theta_m + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin(2\theta_m) \right] \right) \Rightarrow \\
\frac{T}{6\mu V_o} \sqrt{\frac{2b_o}{R}} &= \frac{1}{\cos^2(\theta_m)} \left( 2\alpha \left[ \frac{3}{4} \left( \theta_m + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin(2\theta_m) + \frac{1}{16} \sin(4\theta_m) \right] \right) \\
&- \frac{1}{\cos^2(\theta_m)} \left( \left[ \left( \theta_m + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin(2\theta_m) \right] \right). \tag{2.76}
\end{aligned}$$

Em nossos experimentos, os valores para o termo  $\frac{T}{6\mu V_o} \sqrt{\frac{2b_o}{R}}$  ficaram em torno de  $10^{-1}$ , o que nos permite usar a aproximação

$$2\alpha \approx \frac{\left[ \left( \theta_m + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin(2\theta_m) \right]}{\left[ \frac{3}{4} \left( \theta_m + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin(2\theta_m) + \frac{1}{16} \sin(4\theta_m) \right]}. \tag{2.77}$$

Como  $\theta_m \ll \pi$ , a expressão acima leva ao seguinte resultado

$$\begin{aligned}
2\alpha &\approx \frac{\left[ \left( \theta_m + \frac{\pi}{2} \right) + \theta_m \right]}{\left[ \frac{3}{4} \left( \theta_m + \frac{\pi}{2} \right) + \theta_m + \frac{\theta_m}{4} \right]} \Rightarrow \\
2\alpha &\approx \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{3\pi}{8}} \Rightarrow \\
\alpha &\approx \frac{2}{3} \tag{2.78}
\end{aligned}$$

Este resultado já havia sido obtido na Eq. 2.69, o que demonstra que o fluxo é aproximadamente o mesmo com ou sem o menisco. Usamos a primeira expressão do sistema (2.74) para obtermos a expressão para a posição da interface plana, fazendo  $\alpha = 2/3$  e substituindo  $b(x)$  por  $(x^2/2R) + b_o$ . Dessa forma, obtemos

$$x = \sqrt{2Rb_o \left( \frac{2}{3F(\text{Ca})} - 1 \right)}. \tag{2.79}$$

Hakim *et al.* [15] mostraram com seus resultados experimentais, usando  $C_1 = 0.12$  e  $C_2 = 8.6$  como valores para os parâmetros da função empírica  $F(\text{Ca})$ , que a expressão para a posição da interface plana obtida na Eq. 2.79 se ajustou bem aos seus dados experimentais. Usando os mesmos valores para os parâmetros daquela função, também conseguimos um bom acordo entre teoria e experimento para os nossos dados. Porém, como mostraremos no Cap. 5, preferimos fazer um ajuste para obter novos valores dos parâmetros da função  $F(\text{Ca})$  que se adequassem ao tipo de fluxo existente em nosso

experimento que consiste de um cilindro e um plano (fluxo tipo *Poiseuille-Couette*) e não um fluxo existente entre dois cilindros como aquele para o qual os valores acima foram obtidos. Na próxima seção, analisaremos a dinâmica da interface quando a instabilidade está presente, fazendo a análise de estabilidade linear na qual os campos hidrodinâmicos do problema e a posição da interface serão modificados para o estudo da instabilidade. É importante salientar que a Eq. 2.79 prediz o recuo final da interface plana, e também é usada por nós para o recuo da interface média do padrão periódico. Por isso, neste trabalho usamos indistintamente o termo posição da interface média para a posição de recuo da interface, seja no regime planar ou no regime periódico do padrão espacial.

## 2.6 Estudo do padrão periódico

### 2.6.1 Análise de estabilidade linear para a instabilidade do impressor

Nesta seção, detalharemos a análise de estabilidade linear para a instabilidade do impressor feita por Hakim *et al.* [15]. Com esta técnica, avaliaremos a estabilidade das soluções estacionárias das equações hidrodinâmicas, obtidas nas seções 2.4.1 e 2.5, frente a perturbações de pequena amplitude que aparecem na forma de irregularidades na interface ar-óleo, como mostrada na Fig. 7. Desse modo, para estudarmos o surgimento de instabilidades na interface, será necessário perturbar a sua posição  $x(y)$  e o campo de pressão  $p(r)$  do sistema, que ficam com a forma:

$$\begin{aligned} x(y) &= [x_m + \alpha(t) \sin(ky)] \rightarrow \\ \mathbf{r} &= [x_m + \alpha(t) \sin(ky)]\hat{i} + y\hat{j}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

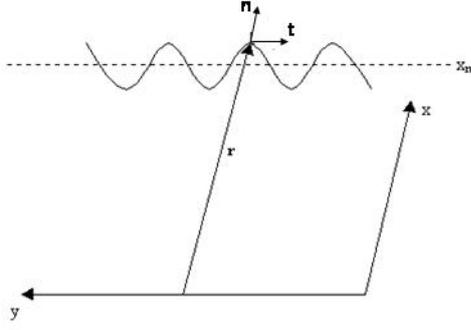
$$p(r) = [p^0(x) + \eta(t)q_k(x) \sin(ky)], \quad (2.81)$$

na qual  $x_m$  é a expressão para a posição de equilíbrio da interface dada pela Eq. 2.79 e  $p^0(x)$  é o campo de pressão determinado pela Eq. 2.68. A Fig. 13 nos mostra a geometria do problema do qual estamos tratando. O vetor unitário normal à interface é representado por  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}$  é o vetor unitário tangencial e  $\mathbf{r}$  é o vetor que localiza um ponto  $r$  na interface. Obtemos o vetor unitário tangencial,  $\mathbf{t}$ , através de

$$\mathbf{r} = x(y)\hat{i} + y\hat{j} \quad (2.82)$$

$$d\mathbf{r} = (x'\hat{i} + \hat{j})dy \quad (2.83)$$

$$\mathbf{t} = \frac{1}{|d\mathbf{r}/dy|} \frac{d\mathbf{r}}{dy} = \frac{x'\hat{i} + \hat{j}}{[x'^2 + 1]^{1/2}}. \quad (2.84)$$



**Figura 13:** Geometria usada para descrever a perturbação na interface ar-óleo do sistema.

Como  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{t}$  são ortogonais, a normal é obtida de

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0 \\ \mathbf{n}^2 = 1. \end{cases}$$

O que resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\hat{i} - x'\hat{j}}{[x'^2 + 1]^{1/2}} \Rightarrow \\ \mathbf{n} &= \frac{\hat{i} - (k\alpha \cos(ky))\hat{j}}{\sqrt{1 + k^2\alpha^2 \cos^2 ky}}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

A equação de movimento para a interface pode ser obtida através da conservação do fluxo que, de acordo com a Ref. [15], é dada por

$$u_n b(x_m) \left[ 1 - F\left(\frac{\mu V_o}{T}\right) \right] = b(x_m) \left[ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(r_m) - V_o F\left(\frac{\mu V_o}{T}\right) \right] \quad (2.86)$$

na qual  $u_n$  é a velocidade no ponto  $r_m$  em uma direção normal à interface,  $V_o$  é velocidade do cilindro e  $\mathbf{v}(r_m)$  é a velocidade de entrada do fluido no espaçamento entre o cilindro e a placa horizontal (lado esquerdo da Fig. 12). Esta equação iguala o fluxo de matéria através do movimento da interface e do fluido, subtraindo o fluxo de matéria que sai pela película de fluido que recobre o cilindro. Para obtermos o termo  $u_n$ , derivamos a Eq. 2.80 em relação ao tempo e fazemos o produto com a normal (Eq. 2.85)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= [\dot{\alpha}(t) \sin(ky)]\hat{i} \\ u_n = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n} &= [\dot{\alpha}(t) \sin(ky)]\hat{i} \cdot \frac{\hat{i} - (k\alpha \cos(ky))\hat{j}}{\sqrt{1 + k^2\alpha^2 \cos^2 ky}} \\ u_n &= \dot{\alpha}(t) \sin(ky) + O(\alpha^2). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Obtemos a expressão para o termo  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(r_m)$  da Eq. 2.86, a partir da Eq. 2.63 que é

modificada para levar em conta a perturbação na posição e na pressão e, desse modo, ela fica na forma

$$\mathbf{v}(x) = \frac{V_o}{2} \hat{i} - \frac{b^2(x_m + \alpha(t) \sin(ky))}{12\mu} \nabla_h [p^0(x_m + \alpha(t) \sin(ky)) + \eta(t) q_k(x_m + \alpha(t) \sin(ky)) \sin(ky)]. \quad (2.88)$$

Devemos agora expandir os termos que possuem a perturbação e eles ficam sendo

$$b^2(x_m + \alpha(t) \sin(ky)) = b^2(x_m) + 2b(x_m) \left( \frac{db(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m} \alpha(t) \sin(ky) + O(\alpha)^2$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_h [p^0(x_m + \alpha(t) \sin(ky)) + \eta(t) q_k(x_m + \alpha(t) \sin(ky)) \sin(ky)] = \\ \hat{i} \left( \frac{dp^0(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m} + \hat{i} \left( \frac{dq_k(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m} \eta(t) \sin(ky) + \\ \hat{i} \left( \frac{d^2 p^0(x_m)}{dx^2} \right)_{x=x_m} \alpha(t) \sin(ky) + \hat{j} (\eta(t) q_k(x_m) k \cos(ky)) + O(\alpha \eta). \end{aligned}$$

Mantendo até ordem  $\alpha$  e  $\eta$  nas expressões acima, ficamos com:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x) = & \left[ \frac{V_o}{2} - \frac{b^2(x_m)}{12\mu} \left( \frac{dp^0(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m} \right] \hat{i} \\ & - \frac{b^2(x_m)}{12\mu} \left[ \alpha(t) \left( \frac{d^2 p^0(x_m)}{dx^2} \right)_{x=x_m} + \eta(t) \left( \frac{dq_k(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m} \right] \sin(ky) \hat{i} \\ & - \frac{b(x_m)}{6\mu} \left[ \alpha(t) \left( \frac{db(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m} \left( \frac{dp^0(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m} \right] \sin(ky) \hat{i} \\ & - \frac{b^2(x_m)}{12\mu} [\eta(t) q_k(x_m) k] \cos(ky) \hat{j}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Tomando o produto com a normal, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(x) = & v_o(x_m) \\ & - \frac{b^2(x_m)}{12\mu} \left[ \alpha(t) \left( \frac{d^2 p^0(x_m)}{dx^2} \right)_{x=x_m} + \eta(t) \left( \frac{dq_k(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m} \right] \sin(ky) \\ & - \frac{b(x_m)}{6\mu} \left[ \alpha(t) \left( \frac{db(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m} \left( \frac{dp^0(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m} \right] \sin(ky), \end{aligned} \quad (2.90)$$

na qual

$$v_o(x_m) = \frac{V_o}{2} - \frac{b^2(x_m)}{12\mu} \left( \frac{dp^0(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m}. \quad (2.91)$$

O termo  $\cos(ky)$  após o produto com a normal fica da ordem  $\alpha\eta$  e é desprezado. Da

Eq. 2.73, obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{Q_{en}}{b(x_m)} = v_o(x_m) = V_o F(Ca) \quad (2.92)$$

Para não carregar muito no desenvolvimento daqui para frente, vamos tirar a dependência em  $t$  e em  $x_m$  e adotar a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dp^0(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m} &\equiv d_x p^0 \\ \left( \frac{d^2 p^0(x_m)}{dx^2} \right)_{x=x_m} &\equiv d_x^2 p^0 \\ \left( \frac{db(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m} &\equiv b' \\ \left( \frac{dq_k(x_m)}{dx} \right)_{x=x_m} &\equiv d_x q. \end{aligned}$$

Então, usando esta notação e substituindo os resultados obtidos nas equações 2.87, 2.90, 2.91 e 2.92, na equação de conservação de fluido (Eq. 2.86), temos

$$\alpha[1 - F(Ca)] = -\frac{b^2}{12\mu} [\alpha d_x^2 p^0 + \eta d_x q] - \frac{b}{6\mu} [\alpha b' d_x p^0]. \quad (2.93)$$

A solução desta equação nos fornece a taxa de crescimento da instabilidade e, para que ela seja resolvida precisamos de expressões para  $d_x^2 p^0$ ,  $d_x q$  e  $\eta$ . Para cumprir este objetivo, usamos a equação da continuidade (Eq. 2.64):

$$\nabla b(x) \cdot \mathbf{v} + b(x) \cdot \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (2.94)$$

Substituindo na Eq. 2.94, a velocidade dada pela Eq. 2.63 e a pressão perturbada dada pela Eq. 2.81, ficamos com:

$$b' \cdot \left[ \frac{V_o}{2} \hat{i} - \frac{b^2}{12\mu} \nabla_h [p^0 + \Phi] \right] + b \nabla \left[ \frac{V_o}{2} \hat{i} - \frac{b^2}{12\mu} \nabla_h [p^0 + \Phi] \right] = 0, \quad (2.95)$$

na qual  $\Phi \equiv \eta(t) q_k(x) \sin(ky)$ . Desenvolvendo a Eq. 2.95, temos

$$\begin{aligned} b' \frac{V_o}{2} - \frac{b'b^2}{12\mu} d_x [p^0 + \Phi] - \frac{b^3}{12\mu} (d_x^2 + d_y^2) [p^0 + \Phi] - \frac{b'2b^2}{12\mu} d_x [p^0 + \Phi] = 0 \Rightarrow \\ \left( b' \frac{V_o}{2} - \frac{b'b^2}{4\mu} d_x p^0 - \frac{b^3}{12\mu} d_x^2 p^0 \right) - \left( \frac{b'b^2}{4\mu} d_x \Phi + \frac{b^3}{12\mu} (d_x^2 + d_y^2) \Phi \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.96)$$

A expressão no primeiro parenteses é identicamente nula, já que ela satisfaz  $\nabla \cdot [b(x) \mathbf{v}(x)] = 0$  quando usamos  $\mathbf{v}(x)$  dada pela Eq. 2.63 com a pressão não perturbada que é  $p^0$ . Logo,

temos

$$\begin{aligned} \left( b' \frac{V_o}{2} - \frac{b'b^2}{4\mu} d_x p^0 - \frac{b^3}{12\mu} d_x^2 p^0 \right) = 0 \Rightarrow \\ \frac{b^2}{12\mu} d_x^2 p^0 = \left( \frac{b'V_o}{2b} - \frac{b'b}{4\mu} d_x p^0 \right), \end{aligned} \quad (2.97)$$

e desse modo obtivemos uma expressão para  $d_x^2 p^0$ . Já a expressão no segundo parênteses da Eq. 2.96 nos fornece

$$\begin{aligned} \frac{b'b^2}{4\mu} \partial_x \Phi + \frac{b^3}{12\mu} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \Phi = 0 \\ 3b' \partial_x \Phi + b(\partial_x^2 + \partial_y^2) \Phi = 0. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Como  $\Phi = \eta(t)q_k(x) \sin(ky)$ , temos

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi &= \eta(t) \partial_x q_k(x) \sin(ky) \\ \partial_x^2 \Phi &= \eta(t) \partial_x^2 q_k(x) \sin(ky) \\ \partial_y^2 \Phi &= -\eta(t) q_k(x) k^2 \sin(ky). \end{aligned}$$

Assim, chegamos a

$$\frac{d^2 q_k}{dx^2} + \frac{3}{b} \frac{db}{dx} \frac{dq_k}{dx} - k^2 q_k = 0 \quad (2.99)$$

Agora, avaliamos o termo  $\left( \frac{1}{b} \frac{db(x)}{dx} \right)$  e obtemos

$$\frac{1}{b} \frac{db}{dx_m} = \frac{1}{\frac{x_m^2}{2R} + b_o} \frac{x_m}{R} = \frac{2x_m}{x_m^2 + 2Rb_o}.$$

Substituindo  $x_m$ , por sua expressão dada pela Eq. 2.79, chegamos a

$$\frac{1}{b} \frac{db}{dx_m} = \sqrt{\frac{2}{Rb_o} \left[ \frac{2}{3F(\text{Ca})} - 1 \right]}. \quad (2.100)$$

Isto mostra que o termo  $\left( \frac{1}{b} \frac{db(x)}{dx} \right)$  é constante para cada velocidade do cilindro. Usando a definição

$$\frac{1}{h} \equiv \left( \frac{3}{2b} \frac{db(x)}{dx} \right), \quad (2.101)$$

podemos supor que a solução para  $q_k(x)$  na Eq. 2.99 seja  $q_k(x) \sim \exp(m_k x)$  e obtemos

$$m_k = \frac{1}{h} \left[ \sqrt{1 + h^2 k^2} - 1 \right]. \quad (2.102)$$

Precisamos considerar na condição de contorno dada pela lei de Young-Laplace (Eq. 2.72), a perturbação na pressão,  $p(r) = p^0 + \Phi$ , e a perturbação na posição, substituindo o valor da curvatura  $\rho$  até ordem  $\alpha$ , o que resulta em  $\frac{1}{\rho} \approx -k^2\alpha(t) \sin(ky)$ . Então, a Eq. 2.72 fica com a forma

$$(p^0(x_m + \alpha \sin(ky)) + \Phi(x_m + \alpha \sin(ky))) = p_o - T \left( \frac{2}{b(x_m + \alpha \sin(ky))} - k^2\alpha \sin(ky) \right) \quad (2.103)$$

Agora, expandimos os dois lados da equação acima até termos de primeira ordem em  $\alpha$  e  $\eta$ :

$$\begin{aligned} p^0(x_m + \alpha \sin(ky)) + \Phi(x_m + \alpha \sin(ky)) &= p^0(x_m) + \Phi(x_m) \\ &+ \left[ \frac{dp^0}{dx_m} \right] \alpha \sin(ky) \\ &+ O(\alpha^2), \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{b(x_m + \alpha \sin(ky))} &= \frac{1}{b(x_m)} \left[ \frac{1}{1 + \frac{\alpha \sin(ky)}{b(x_m)} \frac{db}{dx_m} + O(\alpha^2)} \right] \\ &\approx \frac{1}{b(x_m)} \left( 1 + \frac{\alpha \sin(ky)}{b(x_m)} \frac{db}{dx_m} \right)^{-1} \\ &\approx \frac{1}{b(x_m)} - \frac{\alpha \sin(ky)}{b^2(x_m)} \frac{db}{dx_m}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Substituindo estes resultados na Eq. 2.103, temos

$$\begin{aligned} p^0(x_m) + \Phi(x_m) + \alpha \sin(ky) \frac{dp^0}{dx_m} &= \\ p_o(x_m) - T \left[ \frac{2}{b(x_m)} - \frac{2\alpha \sin(ky)}{b^2(x_m)} \frac{db}{dx_m} - k^2\alpha \sin(ky) \right]. \end{aligned} \quad (2.106)$$

De acordo com a segunda expressão do sistema (2.73), observamos que  $p_o(x_m) - 2T/b(x_m)$  satisfaz a  $p^0(x_m)$  e, desse modo, chegamos a

$$\begin{aligned} \Phi(x_m) + \alpha \sin(ky) \frac{dp^0}{dx_m} &= T \left[ \frac{2\alpha \sin(ky)}{b^2(x_m)} \frac{db}{dx_m} + k^2\alpha \sin(ky) \right] \Rightarrow \\ \eta(t)q_k(x_m) &= \alpha \left[ -\frac{dp^0}{dx_m} + \frac{2T}{b^2(x_m)} \frac{db}{dx_m} + Tk^2 \right] \Rightarrow \\ \eta(t) &= \frac{\alpha}{q_k(x_m)} \left[ -d_x p^0 + \frac{2T}{b^2(x_m)} b' + Tk^2 \right], \end{aligned} \quad (2.107)$$

na qual substituímos  $\Phi(x_m)$  por  $\eta(t)q_k(x_m) \sin(ky)$ . Substituindo na Eq. 2.93, as ex-

pressões para  $d_x^2 p^0$  (Eq. 2.97),  $d_x q/q$  (Eq. 2.102) e  $\eta(t)$  (Eq. 2.107), chegamos a

$$\dot{\alpha}[1 - F(\text{Ca})] = \alpha \left( \frac{-b'V_o}{2b} + \frac{b'b}{12\mu} d_x p^0 + \frac{b^2}{12\mu} \frac{d_x q}{q_k(x_m)} \left[ d_x p^0 - \frac{2Tb'}{b^2(x_m)} - Tk^2 \right] \right). \quad (2.108)$$

Podemos eliminar  $d_x p^0$  acima usando a Eq. 2.67. Assim, mostramos que  $\alpha \propto \exp(\lambda_{\text{LS}} t)$ , ou seja, a amplitude da perturbação na interface varia exponencialmente no tempo com taxa de crescimento da instabilidade,  $\lambda_{\text{LS}}$ , dada por:

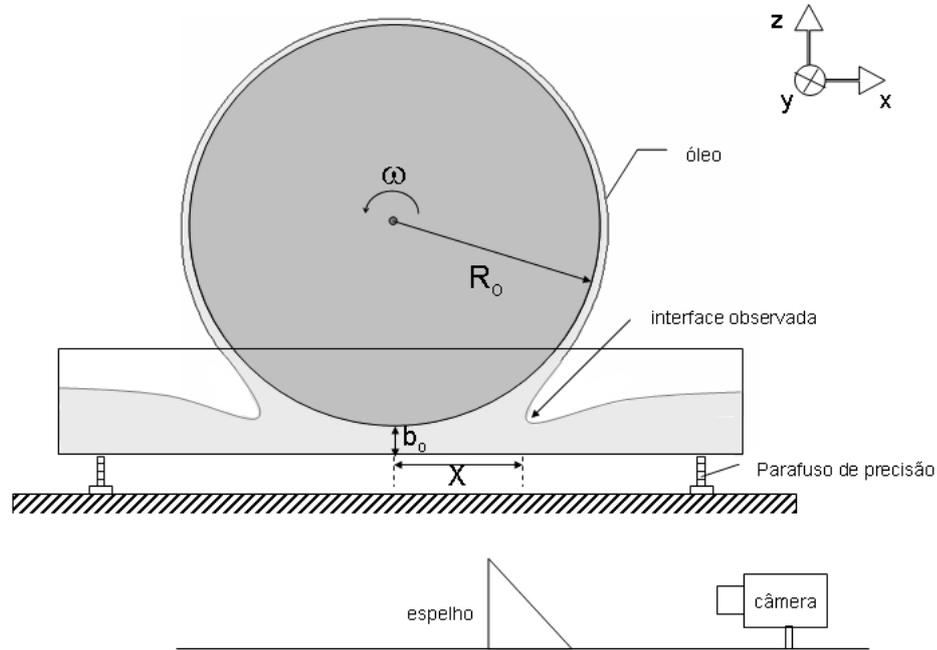
$$\begin{aligned} \lambda_{\text{LS}} = & \frac{1}{[1 - F(\text{Ca})]} \left\{ -\frac{Q}{b} \left[ \frac{1}{b} \frac{db}{dx} \right]_{x_m} \right\} \\ & + \frac{1}{[1 - F(\text{Ca})]} \left\{ \frac{b^2}{12\mu} \left[ \frac{1}{q_k} \frac{dq_k}{dx} \right]_{x_m} \left( \frac{6\mu V_o}{b^2} - \frac{12\mu Q}{b^3} - \frac{2T}{b} \left[ \frac{1}{b} \frac{db}{dx} \right]_{x_m} - Tk^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Devemos substituir na expressão acima, os termos  $Q$ ,  $\frac{1}{b} \frac{db}{dx}$  e  $\frac{1}{q_k} \frac{dq_k}{dx}$  pelas expressões dadas pelas equações (2.70), (2.100) e (2.102), respectivamente. A Eq. 2.109 nos fornece a taxa de crescimento da instabilidade e para resolvê-la precisamos conhecer o valor do modo  $k$  cujo crescimento seja mais intenso (o modo mais instável). A instabilidade faz surgir o padrão, portanto, a relação de dispersão para o crescimento da instabilidade (Eq. 2.109), conseguida através da análise de estabilidade linear, pode ser confrontada com a taxa de crescimento da amplitude do padrão dada pela equação de Ginzburg-Landau (Eq. 2.2). Discutiremos no Cap. 5 os resultados encontrados para os parâmetros da instabilidade através destas equações bem como os efeitos da perturbação no cilindro sobre a instabilidade na interface.

### *3 Experimento e obtenção dos dados*

Já dissemos na introdução que sistemas físicos unidimensionais podem servir como protótipos para o estudo de padrões espaço-temporais e com isso auxiliar no entendimento de sistemas complexos de mais alta dimensionalidade. Nossa investigação em formação de padrões foi realizada tendo como base experimental um arranjo em que um fluido de alta viscosidade é forçado a passar por um estreitamento entre um cilindro e uma placa horizontal e cuja dinâmica é considerada unidimensional. Como qualquer sistema formador de padrão é muito sensível aos artefatos mecânicos e por isso eles requerem muita precisão, constantes refinamentos experimentais foram implementados no sistema que usamos ao longo do trabalho anterior [11]. Neste trabalho montamos a configuração experimental atualmente usada, a adequação do conjunto óptico-eletrônico de aquisição de imagens, que passou de analógico para digital, e a reformulação dos programas de tratamento e processamento das imagens que são capturadas pelo conjunto lente-*CCD*-placa de captura. Também, estabelecemos um melhor controle sobre a temperatura do ambiente para evitar que ela modifique a viscosidade do óleo. Com esse aparato experimental já bem estabelecido, desenvolvemos estudos sobre a dinâmica de padrões com os quais aprendemos vários aspectos da formação de padrões. Apesar da preocupação e do esforço em evitar qualquer assimetria no experimento, o sistema que estudamos apresenta uma perturbação intrínseca. Como dito no Cap. 1, essa perturbação consiste em uma excentricidade no conjunto cilindro-mancais-rolamentos que é responsável por induzir oscilações na posição da interface fluido-fluido. Esta tese aborda os efeitos dessa perturbação sobre a interface ar-óleo no regime pré-bifurcação e pós-bifurcação. Para isto organizamos e fizemos um conjunto de muitos experimentos abrangendo um amplo espectro de velocidades de rotação do cilindro e de distâncias  $b_0$  que fossem suficientes para caracterizar a dinâmica da formação do padrão na presença dessa perturbação determinística.

### 3.1 Montagem experimental



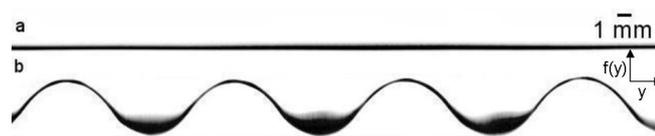
**Figura 14:** Esboço da configuração experimental. Foram ajustadas três distâncias do cilindro até o plano horizontal,  $b_0 = 300 \mu m$  ( $\omega_c = 2.53 \text{ rad/s}$ ),  $b_0 = 400 \mu m$  ( $\omega_c = 4.87 \text{ rad/s}$ ) e  $b_0 = 800 \mu m$  ( $\omega_c = 11.58 \text{ rad/s}$ ).

O diagrama da configuração experimental usada em nosso trabalho é mostrado na Fig. 14. O arranjo consiste de um cilindro de comprimento  $L = (250.0 \pm 0.5) \text{ mm}$  e raio  $R_0 = (31.3 \pm 0.5) \text{ mm}$  feito de aço inoxidável e retificado com precisão aproximada de  $1 \mu m$ . O cilindro está montado sobre mancais tipo *Burger SN 506* com rolamentos *SKF* auto-compensadores de esfera dupla, que dão mais estabilidade ao cilindro quando este gira. O conjunto cilindro-mancal-rolamento possui uma excentricidade, cujo valor  $\epsilon \simeq 10 \mu m$ , foi medido com um relógio comparador digital de precisão igual a  $1 \mu m$ . Sob o cilindro, fica uma cuba de vidro onde colocamos óleo de silicone que é usado como fluido de alta viscosidade nos experimentos. Para variar a distância entre o plano horizontal e o cilindro, podemos mover a cuba de vidro usando parafusos micrométricos *AJS 0.5* da *Newport* que têm um passo de  $320 \mu m$ . O ajuste da altura é feito usando dois relógios comparadores com precisão de  $5 \mu m$ , que são apoiados sobre a cuba, um em cada lado. O cilindro é movido por um motor de corrente contínua da *Minimotor*, tipo *2233 F 030 S*, ao qual acoplamos um transdutor de movimento (“encoder”) *Minimotor* modelo *09A2*, que nos permite obter a frequência de rotação através de um osciloscópio *Tektronix* modelo *TDS 220*. A esse motor acoplamos, de modo conveniente, reduções tipo *22/2* da

*Minimotor* com taxas de redução de 54.6:1, 173:1 e 548:1, o que nos permite ampliar o espectro de velocidades de acordo com a faixa de valores que se deseja para o parâmetro de controle do experimento. Usamos uma fonte de corrente contínua bastante estável (precisão melhor que  $10^{-2}V$ ) modelo *Minipa MPS 3006D* que fornece até 6A numa faixa de tensão de 0 a 30V. A velocidade desejada é conseguida controlando-se diretamente a tensão nessa fonte de alimentação do motor.

## 3.2 Aquisição das imagens do padrão

Imediatamente abaixo da cuba de vidro, é colocado um espelho que forma um ângulo de  $45^\circ$  com o plano horizontal. Esse espelho permite que a imagem da interface ar-óleo no cilindro seja levada até a câmera. Para a iluminação usamos quatro lâmpadas dicróicas com potência regulada eletronicamente, situadas abaixo do conjunto. A aquisição das imagens é feita por uma câmera de vídeo digital assíncrono da *Kodak* modelo *Megaplus ES-310* com resolução máxima de 648x484 *pixels*, que pode capturar a taxas que variam entre 15 e 300 quadros por segundo. Nessas câmeras de vídeo digital assíncrono, não só as propriedades físicas de captura, como o tempo de varredura horizontal e a região de captura no *CCD*, podem ser controladas por “*hardware*” e “*software*”, mas também as características da própria imagem como brilho e contraste podem ser pré determinadas. Isso permite que adequemos as características da aquisição de imagens de acordo com o fenômeno que se quer observar e estudar, o que evita posteriores processamentos como, por exemplo, o uso de filtros. Uma lente *Nikkor*, modelo *60 mm f/2.8D AF* é acoplada à câmera. O sinal digital na saída da câmera alimenta a placa de captura de imagens no computador. A câmera também possui uma saída analógica que é conectada a um monitor *Sony PVM 137* para ajudar no monitoramento. Uma amostra da imagem capturada é mostrada na Fig. 15. As seqüências de imagens capturadas pelo conjunto lente-câmera,



**Figura 15:** Imagens da morfologia plana da interface (a) observada no ramo pré-bifurcação e do padrão espacial periódico (b) presente no ramo pós-bifurcação. Em ambas imagens, o ar está localizado acima da interface e o óleo de silicone está localizado abaixo da interface. Estas imagens correspondem ao experimento configurado para a distância  $b_o = 400 \mu m$  e frequências angulares  $\omega = 4.85 \text{ rad/s}$  (a) e  $\omega = 5.39 \text{ rad/s}$  (b). Obs.: Imagens com contraste invertido.

são descarregadas em uma placa de captura de imagens (*frame grabber*) da fabricante

*Epix*, modelo *PIXCI D*, que serve como *buffer* de dados no barramento do computador, controlando e protocolando o envio das imagens à memória em disco. Acompanha essa placa o software de captura e análise de imagens *XCAP* da própria *Epix* que serve também para monitorar o *buffer* de memória da placa e nos permite salvar toda a seqüência de imagens em diversos formatos de arquivos\*. Usamos o formato *tiff* com 8 bits em escala de níveis de cinza e escolhemos salvar a seqüência de imagens em um só arquivo. Esse arquivo é então gravado em disco rígido para posterior tratamento.

O sistema que estudamos apresenta uma dinâmica mais rápida quando levamos em conta o crescimento inicial dos modos espaciais do padrão e uma dinâmica mais lenta quando consideramos o estabelecimento de seu regime estacionário. Desse modo, taxas de captura muito elevadas demandariam muitos quadros na seqüência de imagens para cobrir a evolução lenta do padrão até seu regime estacionário e isso faria com que cada filme tivesse um tamanho em *bytes* muito grande, impondo forte demanda computacional (espaço em disco e capacidade de processamento) na gravação dos arquivos da seqüência e na posterior utilização desses arquivos quando do tratamento das imagens. Assim, tínhamos que ajustar uma taxa de captura que servisse ao propósito da dinâmica rápida do sistema, mas também que permitisse que o padrão fosse filmado por um tempo longo para cobrir sua evolução lenta até o regime estacionário, dentro da disponibilidade de memória *RAM*. Como podemos variar a taxa de captura das imagens, após usar alguns valores, percebemos que com valores em torno de 17 quadros por segundo (*FPS*), conseguíamos uma coleta de dados com resolução temporal suficiente para estudar a dinâmica do sistema e concomitantemente com um menor *buffer* de memória, o que diminuiu o espaço necessário em disco e o tempo para gravação de cada seqüência de imagens, pois a transferência dessas imagens do *buffer* que usa memória *RAM* para o disco rígido é demorada (cerca de 30 minutos para um arquivo com 300 *MegaBytes*)<sup>†</sup>. A região de captura, que também pode ser definida convenientemente, ficou com o tamanho horizontal de 644 *pixels* e tamanho vertical entre 60 e 100 *pixels*. Essa variação se justificou porque a dinâmica espacial (o recuo da interface e a amplitude do padrão) é dependente da velocidade do cilindro. A resolução espacial, tanto para a posição da interface, o comprimento de onda e a amplitude dos modos foi de 68  $\mu\text{m}/\text{pixel}$ . A teoria desenvolvida para esse sistema [15] estabelece que o comprimento do cilindro deve ser grande quando comparado às dimensões típicas do padrão. A este respeito, Bellon *et al.* [35], usando um experimento onde o comprimento

---

\*O custo de todos equipamentos usados neste trabalho é de aproximadamente 12000 dólares

<sup>†</sup>Recentemente, descobrimos que é possível reduzir este tempo em aproximadamente 20 vezes, apenas com a mudança de sistema operacional (Windows NT por Windows XP)! Presumimos que isto esteja relacionado com gerenciamento de memória *RAM* pelo sistema operacional.

da interface fluido-fluido pôde ser variado com o auxílio de tiras de plástico, mostraram que os efeitos do tamanho finito do cilindro não são determinantes no comprimento de onda do padrão quando o número de células existente no sistema é maior que 5 ou 10 unidades. Assim, para valores do comprimento da interface  $L \geq 6 \text{ cm}$ , eles observaram que o número de onda do padrão é proporcional a frequência angular do cilindro e ao tamanho da interface. Em outro experimento com dois cilindros, no qual a interface estava livre de obstáculos, Rabaud *et al.* [18] não observaram nenhum efeito aparente de discretização do número de onda em função da fronteira do cilindro. Eles também mostraram que, quando o óleo é colocado em quantidade acima daquela suficiente para preencher o espaço entre os dois cilindros, surgem regiões de recirculação de óleo nas extremidades dos cilindros e isto é capaz de afetar somente uma ou duas das últimas células. Observamos este efeito em nossos experimentos. De fato, a Fig. 6 mostra que as células nas extremidades do cilindro são ligeiramente afetadas pela quantidade de óleo que recircula nessa região. Dessa forma, o comprimento do cilindro foi escolhido de modo que os efeitos de borda não interferissem na dinâmica do padrão e esse comprimento é comparável ao de outros experimentos semelhantes [15,17,19,46]. Filmamos sempre na região central do cilindro, dividindo a “janela” de captura que foi de  $\sim 4 \text{ cm}$ , simetricamente em relação à metade do seu comprimento. Desse modo, nos concentramos na região do cilindro, onde as condições de contorno, devido a quantidade de óleo usada, não tem influência sobre as características espaciais do padrão.

### 3.3 Procedimentos experimentais

A preparação do experimento obedece a um protocolo que envolve os seguintes passos:

1. Termalização do ambiente em  $(25.0 \pm 0.5)^\circ\text{C}$ . Para isso foi usado um aparelho de ar condicionado com constante monitoramento da temperatura;
2. Retirada do óleo usado em um experimento anterior e lavagem da cuba de vidro e do cilindro para remoção de resíduos desse óleo;
3. Ajuste da altura  $b_0$  entre o cilindro e o plano horizontal da cuba de vidro;
4. Distribuição do óleo sobre toda a extensão longitudinal do cilindro, aguardando o tempo necessário para que ele se espalhasse sobre toda a cuba de vidro. Em geral, esse tempo foi de 20 minutos;

5. Remoção de qualquer impureza e das bolhas de ar que, eventualmente, surgiam no óleo;
6. Cobertura do conjunto cilindro-cuba, para evitar que impurezas caíssem no óleo e que houvesse incidência de luz por cima. Esse procedimento também melhorou bastante a qualidade das imagens;
7. Ajuste dos parâmetros de captura da câmera digital usando o programa de captura *XCAP*. Em nossos experimentos usamos uma taxa de 16.7 quadros por segundo *FPS* que foi suficiente para capturar a dinâmica do fenômeno estudado. A resolução na posição do menisco e no comprimento de onda da instabilidade foi de  $68 \mu\text{m}/\text{pixel}$  e a região de captura variou de  $644 \times 60$  a  $644 \times 100$  *pixels*;

Como fluido de alta viscosidade, usamos um óleo de silicone da *Dow Corning*© 200, um polímero dimetil siloxano na viscosidade  $\mu$  igual a  $4.80 \times 10^{-2} \text{Kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ . A densidade para essa amostra do fluido é de  $960 \text{Kg m}^{-3}$  e sua tensão superficial é de  $2.08 \times 10^{-2} \text{N m}^{-1}$ . Essas especificações foram obtidas do próprio fabricante e são válidas para a temperatura de  $25^\circ\text{C}$ . Para a viscosidade, os valores tabelados foram confrontados com medidas feitas por nós com o uso de um viscosímetro que usa inércia rotacional para obter os resultados. Sendo a temperatura um dos fatores que pode alterar a viscosidade, a tensão superficial e a densidade do óleo, ela deve ser estável durante todo o experimento, que consiste na captura de imagens para cerca de 45 velocidades diferentes para cada distância  $b_o$ . Assim, a termalização do ambiente permitiu que a temperatura se mantivesse estável em  $(25.0 \pm 0.5)^\circ\text{C}$  durante o tempo gasto para fazer os experimentos para todas as velocidades selecionadas. Sempre usamos uma quantidade de óleo suficiente para cobrir toda a área da cuba e que fosse compatível com a altura do cilindro ao plano. Para as distâncias de 300 e 400  $\mu\text{m}$ , o volume colocado foi de 90 *ml* e para a distância de 800  $\mu\text{m}$  o volume foi de 140 *ml*.

Para cada configuração dos parâmetros experimentais fixos, que são a altura entre o cilindro e a cuba ( $b_o$ ) e a viscosidade do óleo ( $\mu$ ), os experimentos destinados a obter as seqüências de imagens da interface seguiram o protocolo descrito a seguir:

1. Para a obtenção da velocidade crítica (ponto de bifurcação), primeiramente determinamos uma estreita faixa de valores da velocidade angular do cilindro dentro da qual ocorria a bifurcação. Para cada uma dessas velocidades e na ordem crescente de seus valores, o cilindro foi colocado a girar e a interface foi observada por aproximadamente 5 minutos. O valor mais baixo da velocidade, na qual foram observadas

ondulações regulares na interface, foi considerado como o valor da velocidade angular crítica para aquele valor da distância  $b_o$  ajustado. A confirmação da existência de um padrão foi dada pelo tratamento dessas imagens como descrito na próxima seção.

2. Captura das seqüências de imagens, iniciando sempre da menor velocidade (muito abaixo da velocidade crítica), onde a interface se mantinha na sua forma planar, acompanhando a superfície do cilindro. Durante a aquisição de uma seqüência de imagens, a velocidade foi mantida constante. O tempo aproximado de captura de uma seqüência típica foi de 100 segundos no regime pré-bifurcação e de 300 segundos quando o padrão periódico estava presente;
3. Após o término da captura de uma seqüência de imagens, elas foram descarregadas do *buffer* de memória da placa de captura de imagens diretamente para o disco rígido do computador;
4. Quando completado o processo anterior, se iniciava uma nova captura de imagens para uma velocidade maior que a anterior, sendo que o intervalo entre as velocidades dependia da dinâmica numa determinada faixa. Para a região distante da bifurcação, o intervalo entre as velocidades tinha valores típicos de  $\sim 0.5 \text{ mm/s}$ . O cilindro sempre partiu do repouso em cada experimento;
5. Nas dez velocidades imediatamente antes e após a velocidade crítica (ponto de bifurcação), o intervalo entre as velocidades foi diminuído para  $0.2 \text{ mm/s}$  para melhor caracterização da interação precursor-padrão.

Um único experimento para uma certa velocidade demandou um tempo médio de 50 minutos. Esse tempo foi gasto para fazer os ajustes da velocidade, a captura de imagens e a gravação do arquivo das imagens no disco rígido. Levando em conta que para uma dada configuração experimental foram realizados experimentos para cerca de 45 velocidades diferentes, notamos que para obter os dados como aqueles usados para fazer o gráfico mostrado na Fig. 24, foram necessárias cerca de 38 horas para a realização dos experimentos de uma única configuração dos parâmetros fixos, que são a distância  $b_o$  e a viscosidade do óleo  $\mu$ . A tabela 1 mostra os valores para a freqüência angular crítica e a faixa de freqüências usadas para cada um dos três valores da altura  $b_o$ .

**Tabela 1:** Valores dos parâmetros usados em cada configuração experimental.

Distância $b_o(\mu m)$	Freq. crítica $\omega_c(rad\ s^{-1})$	intervalo de $\omega_o(rad\ s^{-1})$
300	2.53	1.30-5.38
400	4.87	1.10-8.71
800	11.58	2.61-16.67

### 3.4 Tratamento das imagens e obtenção dos dados

Para descrever o padrão, fizemos o processamento e o tratamento das seqüências de imagens capturadas, que foram armazenadas em um só arquivo, usando um programa desenvolvido em C pelos professores José Marcos Andrade Figueiredo e Oscar Nassif Mesquita, e que passou por algumas alterações desde sua versão original, que foram realizadas por alunos do departamento de Física da UFMG que o usaram em suas pesquisas [4,44]. Coube a mim adaptar toda a estrutura desse programa para trabalhar com um arquivo de imagens do tipo mencionado acima e também fazer as alterações exigidas pelo tipo de compilador que passamos a usar, já que migramos de sistema operacional e haviam algumas declarações nos programas que mudavam de acordo com o compilador em uso. Implantei uma rotina para o cálculo da transformada de Fourier no tempo. Também, aperfeiçoei as rotinas de reconhecimento do padrão, que passaram de um algoritmo que detectava a interface, fazendo a média dos *pixels* mais claros para cada linha vertical, para outro algoritmo que obtém um único ponto correspondente à interface real para cada linha vertical. O critério de escolher *pixels* mais claros define uma largura para a interface. Como a interface real é uma linha, para que a média desses pixels represente de fato a interface, a largura deles deve contê-la em seu centro. A parte óptica, num experimento como esse, apresenta certos desafios. Isso porque é muito difícil ter uma iluminação que seja homogênea na sua distribuição espacial e na sua amplitude. Desse modo, algumas regiões da interface recebem e, conseqüentemente, espalham mais luz. A luz espalhada apresenta um máximo na interface entre dois meios com índices de refração diferentes e por causa das variações na direção e na intensidade da iluminação, esse ponto de máximo da luz espalhada pode ficar deslocado em relação ao centro dos pixels mais claros. Também, a curvatura da interface induz diferenças na captação da imagem porque faz com que a luz seja espalhada, ponto a ponto, em diferentes direções. Outro fator está relacionado com a dinâmica do padrão, porque a curvatura da interface muda com o tempo e com a velocidade do cilindro, e isso acentua as variações na luz espalhada. O resultado de todos esses fatores é que a luz recebida pela câmera não é homogênea nem em sua intensidade e nem na largura de seu feixe, definindo dessa forma uma interface

com espessura variável em função de sua coordenada horizontal, como visto na Fig. 15. Percebi que, tomando a média dos *pixels* mais claros, poderíamos deslocar a curvatura da interface para cima e por isso desenvolvi uma rotina inspirada na técnica de detecção de bordas. A técnica de detecção de bordas (“*edge detection*”) se vale de operações gradiente (e, em alguns casos, de derivadas de segunda ordem também) aplicadas às funções que representam o nível de cinza de uma imagem em busca de descontinuidades na intensidade dos *pixels* [47]. Como a descontinuidade é maior perto das bordas, a variação espacial dos valores dos *pixels* da imagem capturada pela operação gradiente é suficiente para detectar os pontos que representam a interface.

O algoritmo que desenvolvi varre uma linha vertical à procura de um nível de cinza que ultrapasse um valor limiar que é considerado como sendo luz espalhada pela interface. Esse valor limiar depende das características do padrão para uma dada velocidade angular do cilindro. A varredura na linha vertical continua e, geralmente, a partir desse primeiro ponto que atende ao critério de relevância para o valor do nível de cinza do pixel, os primeiros pontos vizinhos também têm valores acima daquele limiar. O programa faz a varredura do próximo ponto e compara com o atual. Aquele ponto, cujo nível de cinza tenha maior valor, é o representante temporário da interface. Uma vez que o próximo ponto tenha valor para o nível de cinza menor que o atual, faz-se uma varredura para os 3 ou 5 vizinhos posteriores. Caso haja uma descontinuidade muito acentuada nos valores dos *pixels*, aquele ponto de maior nível de cinza representa a interface. Em alguns casos, a interface tem curvatura negativa (como pode ser visto na Fig. 31-c) e, desse modo, mais um ou dois pontos da interface estarão na mesma linha vertical. Assim, o mesmo procedimento aplicado para o primeiro ponto é realizado para a localização dos demais pontos. Tudo isto torna o tratamento das imagens um tarefa que exige criteriosa inspeção em cada seqüência de imagens anteriormente ao seu processamento. Porém, ela é necessária para que os dados extraídos contenham informações que representem, de maneira fidedigna, as variadas formas exibidas pelo padrão que estudamos. Após o reconhecimento da interface, os valores dos *pixels* da imagem original são transformados de modo que os *pixels* da interface tenham o valor que represente branco (absoluto) e os demais tenham o outro valor extremo que representa preto. Chamamos esse procedimento de “pintar a imagem”. O resultado desta rotina pode ser visto na Fig. 16\*. A rotina de reconhecimento da interface é a parte mais importante do programa já que desse procedimento extraímos a informação usada nas demais rotinas. Usando os pontos que determinam a interface,

---

\*Esta imagem está com a escala de níveis de cinza invertida. Na imagem original, a interface entre os dois fluidos é representada pelos *pixels* mais claros e o restante dos dois fluidos é representado pelos *pixels* mais escuros.



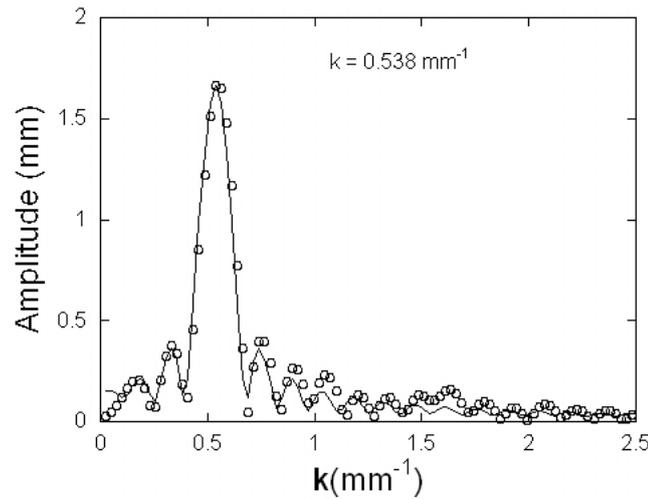
**Figura 16:** Interface detectada e tratada pelo programa, correspondente à imagem exibida na Fig. 15-b. Obs.: Imagens com escala de níveis de cinza invertida.

o programa calcula a posição da interface após o recuo final desta para a região próxima do centro do cilindro, tanto para o regime com interface plana quanto para o regime com o padrão periódico, usando neste caso a posição da interface média. Usando as equações hidrodinâmicas com as condições de contorno apropriadas para esse problema, mostramos na seção 2.5 a expressão para o valor desse recuo da interface em função da velocidade do cilindro. A interface apresenta uma oscilação devido à excentricidade existente no cilindro, como mencionado anteriormente. Essa oscilação foi capturada através da evolução temporal dos pontos que representam a posição da interface. Uma rotina que calcula a transformada de Fourier no tempo nos traz informações sobre esse comportamento oscilatório do padrão. Informações sobre o padrão periódico são capturadas através de uma transformada de Fourier espacial. Ambas as transformadas de Fourier, no tempo e no espaço, são transformadas de Fourier discretas (DFT). O cálculo numérico da transformada de Fourier é baseado na definição dada por

$$\bar{A}_k = \frac{1}{2L} \left| \sum_{j=0}^L f(y_j) \exp(-iky_j) \right| \quad (3.1)$$

na qual  $f(y_j)$  são os pontos da interface e  $L$  é o comprimento horizontal da imagem (que é a largura da “janela” de observação). Dessa forma obtemos o espectro de modos de Fourier  $\bar{A}_k$ , onde  $\bar{A}$  é o coeficiente de Fourier para o vetor de onda  $k$ . Uma rotina localiza, neste espectro, o valor máximo da amplitude,  $\bar{A}_{\max}$ , e o seu vetor de onda correspondente,  $k_{\max}$ . Como a interface é bem aproximada por um harmônico, temos  $\bar{A}_{\max} \simeq A$ , na qual  $A$  é a amplitude real do modo Fourier dominante,  $k_{\max}$ . A evolução temporal desses parâmetros é armazenada para posterior análise. A Fig. 17 mostra a transformada de Fourier para a imagem apresentada na Fig. 16. Os pontos representam o módulo do espectro de Fourier da interface,  $\bar{A}_k$ , as linhas representam a transformada de Fourier do harmônico simples dado por  $\bar{A}_{\max} \sin(k_{\max}y)$ , na qual  $\bar{A}_{\max}$  é o módulo da amplitude máxima do espectro experimental e  $k_{\max}$  é o vetor de onda correspondente.

Essa rotina para o cálculo da transformada de Fourier já foi usada em trabalhos anteriores desenvolvidos no departamento de Física da UFMG [4,11,43,44]. O problema em usar um método de transformada de Fourier rápida (*FFT*) como aqueles existentes



**Figura 17:** Transformada de Fourier da imagem mostrada na Fig. 16. A linha representa a transformada do harmônico (função seno puro) e os pontos a transformada dos dados experimentais.

em muitos programas comerciais como, por exemplo, o *Kaleidagraph* ou o *MathCad*, seria a restrição de se trabalhar com vetores de onda múltiplos da janela de observação ( $k = 2\pi/NL$ ). Isto levaria a uma perda de precisão na determinação do vetor de onda do padrão. Além do mais, podemos levar em conta no cálculo analítico da transformada a difração devido à janela. Deste modo, a resolução do vetor de onda foi calculada com uma precisão muito maior que a definida pelos modos normais da janela de observação (usada nos algoritmos *FFT*) e consistente com a incerteza induzida por essa janela que é da ordem de  $(\pi/L) \sim 0.079 \text{ mm}^{-1}$ . Assim, a resolução em  $k$  foi ajustada em  $0.025 \text{ mm}^{-1}$  de modo a descrever numericamente os efeitos dessa incerteza. Dessa forma, o espectro de potência é compartilhado por um modo e seus vizinhos adjacentes e com isso podemos comparar o que representa a difração da janela finita utilizada para a transformada de Fourier e o que, realmente, representa um outro harmônico no sistema. Em nosso trabalho, a amplitude dos modos, tanto espacial quanto temporal, é informação de grande valia e por isso, as amplitudes do espectro  $A_k$  tinham que representar de fato a informação contida no espaço real. Portanto o fator de normalização escolhido para a transformada de Fourier foi aquele que dava a amplitude real do padrão. A rotina para a transformada de Fourier foi calibrada com o uso de padrões artificialmente gerados. Eles são resultados de funções seno mono e multi modos com diferentes amplitudes. Para garantir que o espectro do modo no espaço recíproco representa de fato a amplitude da interface, usamos o teorema de Parseval (Eq. 3.2) que mostrou que essa amplitude está calibrada em relação ao padrão,

no espaço real.

$$\int f(y, t)^2 dy = \int |A_k(t)|^2 dk \quad (3.2)$$

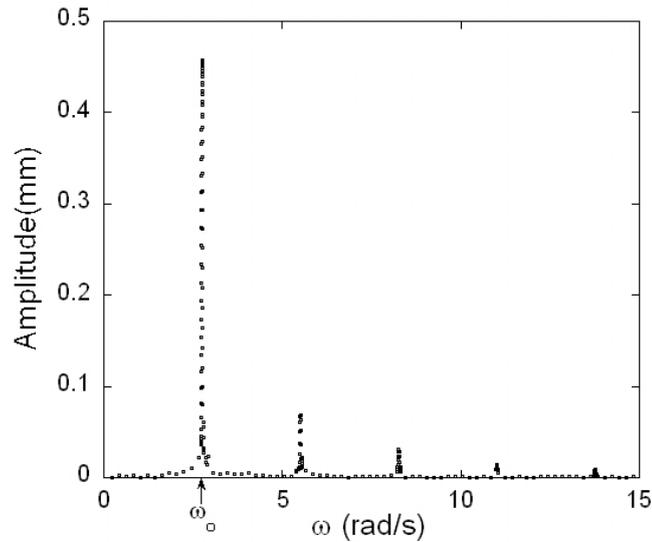
Como saída do programa que trata e processa as imagens, obtivemos para nossas análises a transformada de Fourier da oscilação temporal da posição da interface média, a transformada de Fourier do padrão espacial, a evolução temporal dos modos dominantes, a evolução temporal da amplitude dos modos dominantes do padrão e o recuo da posição da interface média para todas as velocidades do cilindro. Com esses dados, fomos capazes de descrever a dinâmica do padrão, nos ramos pré e pós-bifurcação, sob a influência dos efeitos da perturbação determinística existente no sistema. Esses estudos nos permitiram caracterizar comportamentos no sistema típicos de precursores e diagnosticar mudanças morfológicas no padrão.

## 4 *Resultados - Precursores*

Mencionamos na introdução (seção 1.6) que um desafio importante no estudo de um sistema não-linear consiste na detecção de alguma futura bifurcação quando esse sistema ainda está em seu ramo estável. Sujeito a alguma perturbação, um sistema em seu ramo estável pode apresentar novas estruturas dinâmicas não observadas anteriormente à existência da perturbação. Esse fenômeno é conhecido como “precursor” e tem sido observado principalmente em decorrência de interação de alguma instabilidade inerente ao sistema com algum ruído presente nele [20]. A importância de precursores tem sido verificada em contextos de grande relevância como em terremotos [21,23] e ataques epilépticos [25,26]. Neste capítulo mostraremos os resultados relativos à existência de um precursor no sistema que estudamos e que constam na Ref. [33]. Nele, relatamos a observação direta de um tipo de precursor não relacionado ao acoplamento ruído-resposta, mas induzido pelo acoplamento da dinâmica intrínseca de um sistema controlado, com os efeitos de uma perturbação determinística imposta a ele. Como relatado no Cap. 3, essa perturbação consiste em uma excentricidade existente no conjunto cilindro-mancal-rolamento da montagem experimental. Devido à essa excentricidade, a distância entre o cilindro e a placa horizontal, que é dada pelo termo  $b_o$ , varia no tempo como

$$b_o(t) = b_o - \epsilon \sin(\omega t), \quad (4.1)$$

na qual  $\epsilon$  é o valor nominal da excentricidade ( $\epsilon \simeq 10 \mu m$ ) e  $\omega$  é a frequência angular do cilindro. Esta excentricidade altera os campos de pressão e de velocidade do fluido em regiões próximas do cilindro. Assim, como esperado, a interface sofre influência dessa perturbação e passa a oscilar na mesma frequência que ela. Este efeito é capturado pela transformada de Fourier no tempo da posição da interface média mostrada na Fig. 18, a qual mostra um pico pronunciado na mesma frequência angular do cilindro. A intensidade pico-a-pico desta oscilação mede  $\sim 920 \mu m$  e é maior que o valor da excentricidade por duas ordens de grandeza! De modo a caracterizar e analisar este fenômeno, foi medida com bastante critério a amplitude deste modo fundamental nos ramos pré e pós-bifurcação.

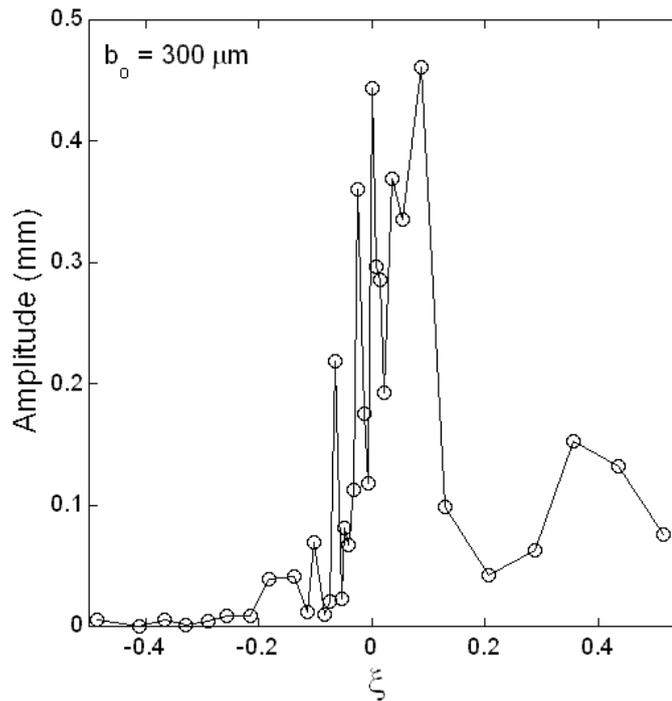


**Figura 18:** Espectro de Fourier das oscilações da interface. A presença de um forte pico na mesma frequência angular do cilindro ( $\omega_0$ ) revela que a excentricidade é a causa das oscilações da interface observadas. Os dados são para a distância  $b_0 = 300 \mu m$  e frequência angular  $\omega_0 = 2.53 \text{ rad/s}$ .

Nossas medidas mostraram que o movimento oscilatório do valor médio do perfil da interface  $f(y)$  tem um comportamento não trivial já que essa oscilação é amplificada quando o parâmetro de controle se aproxima de zero ou, em outras palavras, quando a bifurcação está próxima de ocorrer e o padrão espacial periódico emerge no sistema por meio de uma quebra espontânea de simetria. Os dados obtidos indicam que esta amplitude cresce criticamente com a aproximação da bifurcação. Isto é mostrado no lado esquerdo da Fig. 19, para  $b_0 = 300 \mu m$ , onde a amplitude do espectro de Fourier da oscilação do padrão é mostrada como função do parâmetro de controle reduzido,

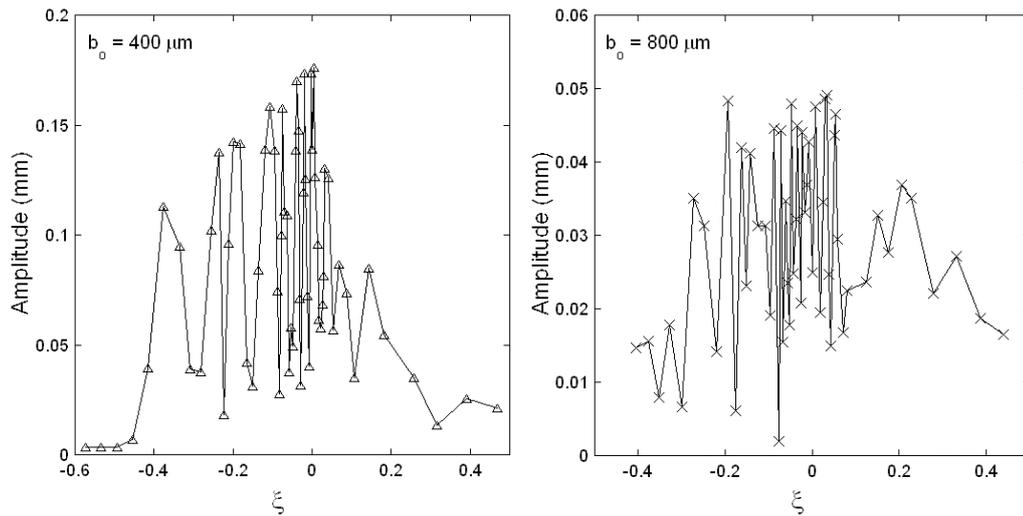
$$\xi = \frac{\omega - \omega_c}{\omega_c}. \quad (4.2)$$

Após a emergência do padrão espacial periódico, a posição da interface média foi calculada como a média aritmética dos valores da ordenada,  $f(y)$ , dos *pixels* que representam a interface. As observações mostraram que o mesmo modo oscilatório para esta posição da interface média ainda persistiu. Contudo, para grandes valores positivos do parâmetro de controle, quando os modos espaciais instáveis do padrão são fortemente não-lineares, as oscilações se tornaram suprimidas. Isto presumivelmente indicaria que efeitos de curvatura poderiam ser um importante mecanismo de estabilização destas oscilações. O efeito completo, englobando as regiões pré e pós-bifurcação é mostrado na Fig. 19. É notório salientar que, embora obtido em um contexto muito diferente, um perfil similar a esse, observado por nós no ramo pré-bifurcação, foi reportado por Martinerie *et al.* [25] e por



**Figura 19:** Modo de Fourier fundamental das oscilações da interface (plana para  $\xi < 0$  e periódica para  $\xi \geq 0$ ) medido para as diferentes frequências angulares do experimento cuja a distância é  $b_0 = 300 \mu m$ . As linhas servem somente como guia para o olho.

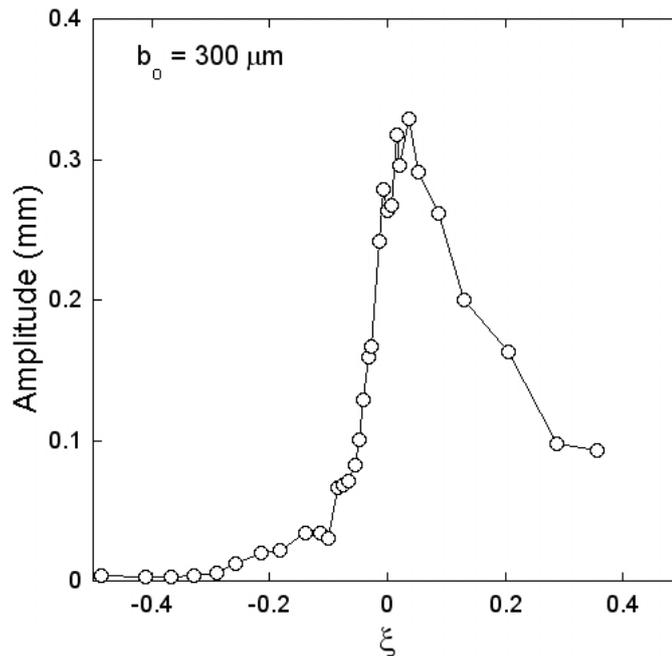
Lehnertz e Elger [26], ambos para dados de eletroencefalograma (*EEG*), mostrando a existência de precursores em ataques epiléticos. Estes precursores foram verificados em uma análise temporal não-linear de sinais de *EEG* em diferentes estados cerebrais, porém nenhuma caracterização detalhada dessa análise foi relatada. É importante ressaltar que a principal característica desta análise está centrada na amplificação de alguma variável relevante desse sistema em seu regime pré-bifurcação. Este resultado é considerado como um precursor para o tipo de fenômeno analisado. O tipo de fenômeno estudado em nosso trabalho tem uma origem completamente diferente, já que ele resulta de uma perturbação determinística em um experimento controlável. Contudo, o perfil da curva mostrada na Fig. 19, mostrando amplificação de uma variável experimental relevante em momentos anteriores a uma bifurcação, é uma indicação de que realmente observamos um precursor em nossos experimentos. Na Fig. 20 são mostrados os valores das oscilações para as outras duas distâncias ajustadas nos experimentos em função do parâmetro de controle. De fato, para todos os valores de  $b_0$  que usamos, observa-se a existência do mesmo perfil exibindo amplificação das oscilações na região próxima à bifurcação, embora essas oscilações foram menos pronunciadas quando a distância  $b_0$  se tornou maior. Comparadas com o caso mais crítico ( $b_0 = 300 \mu m$ ), verifica-se que a intensidade pico-a-pico destas oscilações são 3 vezes menores para  $b_0 = 400 \mu m$  e 10 vezes menores para  $b_0 = 800 \mu m$ . Recentemente, fizemos



**Figura 20:** Amplitude do Modo de Fourier fundamental das oscilações da interface medido para as diferentes freqüências angulares do experimento para as duas outras distâncias usadas,  $b_0 = 400 \mu m$  e  $b_0 = 800 \mu m$ . As linhas servem somente como guia para o olho.

uma inspeção para alturas maiores que  $800 \mu m$  e ela revelou que este é o valor máximo para a distância  $b_0$  no qual a interface fica submetida aos efeitos da perturbação, tanto no domínio do tempo, no qual ocorre a amplificação das oscilações da interface, quanto no domínio espacial, no qual ocorre as mudanças morfológicas no padrão que veremos no Cap. 5.

Para que pudéssemos obter um perfil que indicasse a tendência do comportamento irregular das oscilações, aplicamos aos dados um procedimento de alisamento, que consistiu na substituição de cada ponto experimental pela média aritmética dos cinco pontos adjacentes, centrado no ponto de observação. Este tipo de filtro [47] corta os modos de Fourier de altas freqüências da curva experimental. Para selecionar o número de pontos adjacentes a entrar no filtro, usamos como critério a freqüência de Nyquist que corresponde ao comprimento das flutuações observadas. Esse comprimento, na maioria dos casos, não ultrapassou três pontos. Isto determina a “janela” a ser filtrada que é medida como duas vezes esse comprimento. O efeito resultante deste filtro é a redução na intensidade de variação entre um dado experimental e seus vizinhos adjacentes, como exibido na Fig. 21. Assim, com este procedimento foi possível observar uma evidente tendência na evolução do perfil para os conjuntos de experimentos realizados. Essa tendência é localmente monotônica e as curvas resultantes são mostradas na Fig. 22 para os três diferentes valores de  $b_0$ . É importante observar que a amplitude mínima do modo de Fourier fundamental pode ser menor que metade da resolução espacial já que a potência do espectro pode estar distribuída em seus harmônicos. Da análise desses dados filtrados surgem características importantes que se refere à maneira crítica como se dá a aproximação até o ponto de



**Figura 21:** Amplitude de oscilação da interface, após o procedimento de alisamento dos dados experimentais originalmente exibidos na Fig. 19, para o experimento com  $b_o = 300 \mu m$ . Observa-se dois comportamentos das oscilações da interface: crescimento das oscilações na região pré-bifurcação ( $\xi < 0$ ) e supressão dessas oscilações após a bifurcação ( $\xi \geq 0$ ). As linhas servem somente como guia para o olho.

bifurcação. No regime pré-bifurcação, as curvas se ajustam muito bem com uma lei de potência do tipo

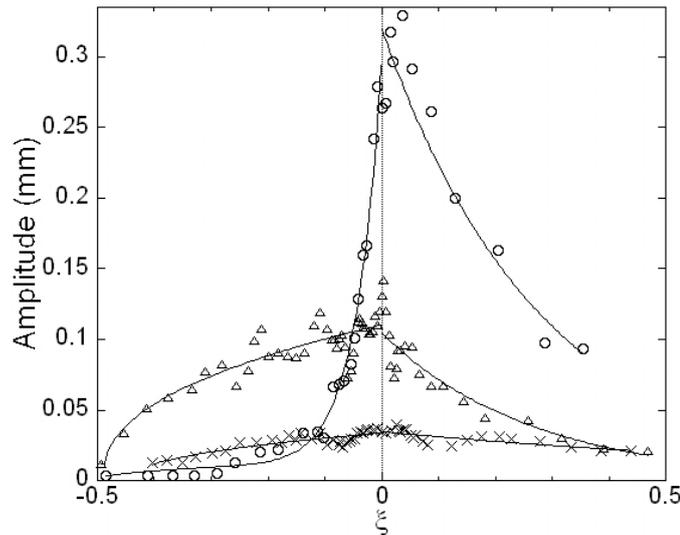
$$A = \alpha(\xi - \xi_a)^\beta. \quad (4.3)$$

Após a bifurcação planar-periódica, esta tendência ainda persiste numa pequena faixa do parâmetro de controle. Então, ela experimenta um decrescimento exponencial até que as oscilações se aproximam dos valores iniciais observados para grandes valores negativos do parâmetro de controle. O melhor ajuste entre a Eq. 4.3 e os dados de cada experimento está representado no lado esquerdo da Fig. 22.

**Tabela 2:** Valores dos parâmetros obtidos por ajuste dos dados experimentais no ramo pré-bifurcação com uma lei de potência (Eq. 4.3). São mostrados também os erros para o expoente  $\beta$  e o coeficiente de correlação  $R$  de cada ajuste. Os valores marcados com um (\*) foram mantidos constantes no procedimento de ajuste.

$b_o(\mu m)$	$\alpha$	$\xi_a$	$\beta$	$R$
800	0.05	-0.44	$0.45 \pm 0.14$	0.88
400	0.15	-0.49	$0.42 \pm 0.05$	0.90
300	0.25	-1.01	$21 \pm 1$	0.99
	0.02*	-0.50*	0.43*	

Na tabela (2) é mostrado o conjunto dos parâmetros dos ajustes dos dados experimen-



**Figura 22:** Amplitude de oscilação da interface (plana para  $\xi < 0$  e periódica para  $\xi \geq 0$ ). Os dados para o modo de Fourier fundamental, foram filtrados com o uso de um procedimento de alisamento e são mostrados aqui para as três distâncias usadas, ajustados com uma lei de potência no ramo pré-bifurcação e com uma exponencial no ramo pós-bifurcação. A legenda para esse gráfico é: ( $\circ$ ),  $b_o = 300 \mu m$ ; ( $\Delta$ ),  $b_o = 400 \mu m$ ; ( $\times$ ),  $b_o = 800 \mu m$ .

tais no ramo pré-bifurcação usando a lei de potência. Como já revelado anteriormente, aqui observamos que a amplitude das oscilações da posição da interface média é maior que a excentricidade do cilindro. Mas, o que é mais interessante e claramente evidente é o caráter não-analítico desse perfil próximo da bifurcação, na qual uma cúspide está presente e é definida por uma transição de uma lei de potência para um decrescimento exponencial. A existência de uma cúspide como a exibida na Fig. 22 tanto quanto a persistente amplificação das oscilações logo após a bifurcação foi relatado por Bryant *et al.* [48] no estudo de amplificadores paramétricos em junções semicondutoras tipo Josephson, nas quais uma bifurcação supercrítica é também observada. Mais ainda, em um extenso intervalo do parâmetro de controle, localizado no ramo pré-bifurcação, dois tipos diferentes de aproximação crítica até o ponto de bifurcação foram observados. Para o maior valor da distância do cilindro até o plano horizontal, que corresponde a  $b_o = 800 \mu m$ , o expoente crítico  $\beta$  é menor que 1. De modo a ajustar os dados correspondentes ao menor valor dessa distância,  $b_o = 300 \mu m$ , usamos uma combinação de duas funções do tipo representada na Eq. 4.3. Em uma delas, nós usamos os mesmos parâmetros do ajuste feito para  $b_o = 800 \mu m$ , que descreve uma tendência inicial de pequena amplitude nas oscilações. A outra função descreve a forte amplificação observada próxima do ponto de bifurcação, apresentando um expoente muito elevado que foi 21. Os dados do ajuste aparecem na tabela (2). Parece que ambos os casos são também representados pelo valor intermediário de  $b_o = 400 \mu m$ , no qual uma cúspide ascendente localizada muito próxima do ponto de bifurcação, pa-

rece impor-se sobre o extenso e plano perfil dominante no ramo pré-bifurcação. Outra característica importante, que está claramente presente no tipo de lei de potência usada na Eq. 4.3, é a existência de um ponto, definido pelo parâmetro  $\xi_a$ , chamado por nós de “parâmetro de controle de antecipação”, acima do qual a interface se torna oscilatória no tempo. Conseqüentemente, um intervalo fechado do parâmetro de controle  $\xi \in [\xi_a, \xi_c]$  localizado dentro do ramo de alta simetria (o ramo pré-bifurcação) e adjacente ao ponto de bifurcação do sistema pôde ser definido. A existência deste intervalo, que chamamos de “**ramo precursor**”, determina se a dinâmica do estado homogêneo é sensível ou não à bifurcação que ainda não aconteceu. Portanto, através dessa análise, conseguimos descrever um novo ramo no sistema de um modo completamente diferente comparado ao método usual de obter pontos críticos através da teoria de bifurcação ou por meio da análise de estabilidade linear, a qual também mostra a emergência da formação de um padrão.

Agora, é importante determinar se os modelos teóricos disponíveis podem dar indícios da existência deste ramo precursor como conseqüência de uma resposta trivial do sistema ao tipo de perturbação imposta a ele. A esse respeito, o efeito imediato que demanda explicação é o ganho hidrodinâmico observado, definido pela razão entre a oscilação pico-a-pico da interface e a excentricidade do cilindro. Uma possível explicação para este efeito poderia ser o ajuste passivo dos campos hidrodinâmicos, calculado pela aproximação quase-estacionária em relação à excentricidade do cilindro. De modo a verificar esta possibilidade, nós introduzimos na equação para a posição da interface média (Eq. 2.79) os valores máximo e mínimo da perturbação descrita pela Eq. 4.1 que corresponde a

$$b = b_o \pm \epsilon. \quad (4.4)$$

Inserindo esta expressão na Eq. 2.79 ficamos com

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2R(b_o \pm \epsilon) \left( \frac{2}{3F(Ca)} - 1 \right)} \\ &= \underbrace{\sqrt{2Rb_o \left( \frac{2}{3F(Ca)} - 1 \right)}}_{x_o} \left( 1 \pm \frac{\epsilon}{b_o} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como  $\frac{\epsilon}{b_o} \ll 1$  para todos os valores de  $b_o$  que usamos nos experimentos, podemos fazer a expansão desse termo que então fica sendo

$$\left( 1 \pm \frac{\epsilon}{b_o} \right)^{1/2} \simeq \left( 1 \pm \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{b_o} \right),$$

o que nos permite escrever a posição  $x$  como

$$x = x_o \left( 1 \pm \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{b_o} \right).$$

Agora calculando  $\Delta x = (x_+ - x_-)$ , obtemos a variação máxima da posição da interface média, cuja equação é

$$\Delta x = \epsilon \sqrt{\frac{2R}{b_o} \left( \frac{2}{3F(\text{Ca})} - 1 \right)}. \quad (4.5)$$

A fórmula mostrada na Eq. 4.5 prediz corretamente uma interface oscilatória na mesma frequência angular do cilindro e um ganho hidrodinâmico dado por  $\sqrt{\frac{2R}{b_o}}$ , o qual explica qualitativamente os valores medidos que obtivemos, já que observamos que a amplitude de oscilação da posição da interface média decresce com o aumento de  $b_o$ . Contudo, esta fórmula é incapaz de descrever a observada tendência das oscilações pré-bifurcação com relação ao parâmetro de controle, porque ela prediz um decréscimo na intensidade dos picos como função da frequência angular do cilindro o que não ocorre, já que observamos, no ramo pré-bifurcação, uma amplificação das oscilações da posição da interface média com o aumento da velocidade do cilindro. Isto indica que a perturbação acopla com os campos hidrodinâmicos através de efeitos que não são trivialmente respondidos pelo modelo hidrodinâmico estacionário. A possibilidade de uma bifurcação tipo Hopf para valores do vetor de onda  $\mathbf{k}$  também precisa ser considerada. Este tipo de bifurcação requer pares de autovalores puramente imaginários no ponto de bifurcação. Contudo, a taxa de crescimento dos modos espaciais (Eq. 2.109), obtida através da análise de estabilidade linear da morfologia da interface [15], não prediz valores imaginários para qualquer  $\mathbf{k}$ . Conseqüentemente, não pode existir uma bifurcação de Hopf para valores de  $\mathbf{k} = 0$ , ou seja, para estados do sistema no ramo pré-bifurcação. Assim, a ausência de uma bifurcação de Hopf e a falha da teoria hidrodinâmica estacionária, para explicar o perfil pré-bifurcação perturbado, implica em que as oscilações da interface são determinadas pelo conjunto de interações dinâmicas nos campos termodinâmicos no não-equilíbrio e as variáveis relevantes para o experimento. Esta conclusão sustenta nosso argumento de que a excentricidade induz efeitos dinâmicos no ramo pré-bifurcação, sendo que esses efeitos se manifestam na dinâmica da interface como oscilações pré-bifurcação críticas da posição da interface média. Como conseqüência deste resultado, podemos afirmar que um **precursor** foi observado em nosso sistema. A existência desse precursor não é prevista na teoria estacionária (Eq. 2.79), que nos permite calcular a posição da interface média usando a geometria de um cilindro perfeito e consistente com quaisquer valores constantes de  $b_o$  e  $R$ . Mesmo na forma modificada, esta teoria não foi capaz de indicar

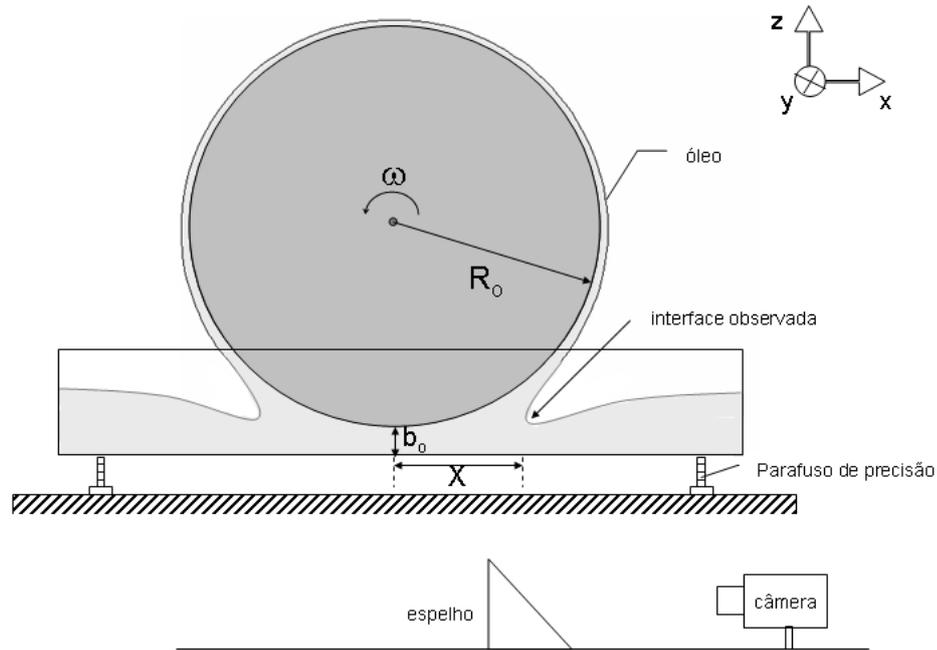
qualquer dinâmica adicional induzida por uma perturbação dependente do tempo, gerada pela excentricidade. Como discutido na Ref. [33], até agora não há nenhuma explicação simples para esses efeitos. Contudo, os resultados obtidos revelam a existência de um novo fenômeno no sistema formador de padrão que estudamos e que ainda não estivera presente no caso do sistema não perturbado. Assim, relatamos neste trabalho, um sistema sujeito a um tipo de instabilidade, cujo domínio no tempo é capaz de assinalar a existência de um ramo pós-bifurcação que apresenta um padrão espacial. É importante salientar que os resultados experimentais alcançados não são explicados pelas teorias de sistemas dinâmicos que estudamos e as equações fundamentais da hidrodinâmica que aplicamos neste trabalho.

## 5 *Resultados - Dinâmica do padrão espacial*

Nas seções 2.1 e 2.2, mostramos como a teoria de bifurcação e a análise de estabilidade linear podem nos auxiliar no entendimento de sistemas no ramo do não-equilíbrio termodinâmico. Nele, usando as equações básicas que governam o sistema, deduzimos uma expressão para a taxa de crescimento da instabilidade e ela é dada pela Eq. 2.109. O sistema que estudamos apresenta um tipo de instabilidade que é responsável, no ponto de bifurcação, por uma quebra espontânea da morfologia simétrica da interface. Assim, há uma mudança espacial de uma forma plana da interface para um padrão periódico. No presente capítulo, mostraremos os estudos sobre as propriedades dinâmicas associadas com esse padrão, na presença da perturbação determinística existente no sistema que usamos. Analisaremos como essa perturbação pôde afetar a evolução dos modos espaciais do padrão periódico durante a desestabilização da interface e durante o regime de saturação do crescimento da amplitude do padrão. Nossas observações indicam a interação dos modos precursores e a morfologia do padrão e mostraremos adiante como esta interação está associada com o processo de seleção do vetor de onda do padrão. Os resultados deste capítulo foram publicados e constam na Ref. [42].

### 5.1 Posição da interface

A variação nos campos de pressão e de velocidade, devido ao movimento do cilindro, somado aos efeitos de recobrimento do cilindro pelo óleo e os efeitos da tensão superficial, impõem à interface ar-óleo um recuo da sua posição inicial de equilíbrio (velocidade zero do cilindro) para uma região próxima do centro do cilindro, quando este gira. O modelo hidrodinâmico estacionário desenvolvido por Hakim *et al.* [15] para um cilindro perfeito mostrado no Cap. 2, prediz a posição da interface média  $x$  (ver Fig. 23) no ramo pré-

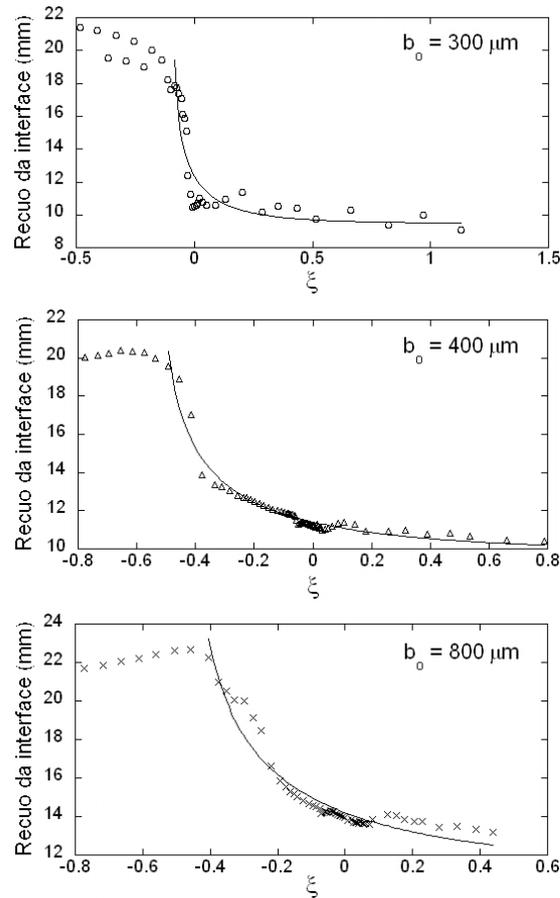


**Figura 23:** Esboço da configuração experimental.

bifurcação, como função do parâmetro de controle e é dada por

$$x = \sqrt{2Rb_0 \left( \frac{2}{3F(\text{Ca}(\xi))} - 1 \right)}. \quad (5.1)$$

De modo a testar esta teoria em nosso sistema perturbado, obtivemos a posição da interface média através da média dos valores da ordenada  $f(y)$  e os avaliamos, em um gráfico, contra o parâmetro de controle para todas as distâncias  $b_0$ , usadas nos experimentos. Ajustamos nossos dados do recuo da interface com a Eq. 5.1, de modo a obter os parâmetros empíricos,  $C_1$  e  $C_2$ , da função de capilaridade  $F(\text{Ca}(\xi))$  que também serão usados quando compararmos os nossos resultados para a taxa de crescimento da instabilidade, com as previsões dadas pela análise de estabilidade linear (Eq. 2.109). Os ajustes da Eq. 5.1 aos dados do recuo da interface são mostrados na Fig. 24. Vemos que há um bom acordo entre teoria e experimento, exceto para frequências muito baixas (valores de  $\xi$  muito negativos) nas quais o recobrimento irregular do cilindro afeta o estabelecimento de um fluxo estacionário e impede o uso desse modelo hidrodinâmico (parte da camada de óleo “escorrega” pela superfície do cilindro deixando de obedecer a condição de camada limite, ou seja, a superfície do óleo passa a não ter a mesma velocidade da superfície do cilindro). Mesmo além do ponto de bifurcação, a Eq. 5.1 se ajusta perfeitamente bem à posição da interface média. O procedimento de ajuste desta equação aos dados do recuo da interface nos permitiu, além de obter os parâmetros da função  $F(\text{Ca}(\xi))$ , obter o valor



**Figura 24:** Recuo da interface em função do parâmetro de controle para (o)  $b_0 = 300\mu m$ , ( $\Delta$ )  $b_0 = 400\mu m$  and ( $\times$ )  $b_0 = 800\mu m$ , ajustadas com o uso da aproximação estacionária (linha).

da frequência angular do cilindro que descreve a região de validade para esta equação. Os parâmetros obtidos são mostrados na tabela (3) e são consistentes com os valores empíricos relatados na Ref. [5], bem como com os valores nominais de  $b_0$  usados nos experimentos.

A presença da perturbação no sistema não foi capaz de afetar significativamente a posição da interface média como mostram os resultados obtidos acima. Uma argumentação favorável à ausência de efeitos sobre a posição da interface vindos da perturbação no cilindro seria que as oscilações da interface ocorrem em torno de um ponto médio que seria o mesmo ponto estacionário de recuo da interface na ausência da perturbação. Em outras palavras, a interface perturbada oscilaria simetricamente em relação ao ponto de recuo da interface não perturbada. Veremos adiante que esse argumento não se sustenta porque o padrão tem comportamento oscilatório assimétrico em relação à interface média e esse comportamento nada trivial será mostrado como consequência de mudanças morfológicas no padrão.

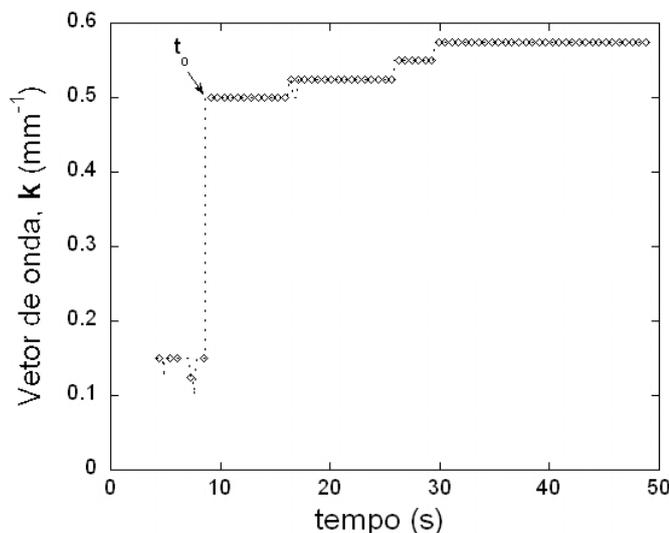
**Tabela 3:** Valores dos parâmetros da função  $F(Ca(\xi))$  (Eq. 2.71) obtidos por ajuste da Eq. 5.1 aos dados experimentais. O parâmetro empírico  $C_3$  é o valor base para a frequência angular do cilindro na qual a função  $F(Ca(\xi))$  é válida. Os demais valores obtidos para os parâmetros empíricos desta função,  $C_1$  e  $C_2$ , estão de acordo com os valores reportados na Ref. [5].

Distância $b_o(\mu m)$	$C_1$	$C_2$	$C_3(rad\ s^{-1})$
300	0.12	53	2.27
400	0.14	9.6	2.21
800	0.20	2.9	5.97

## 5.2 Seleção dos modos espaciais

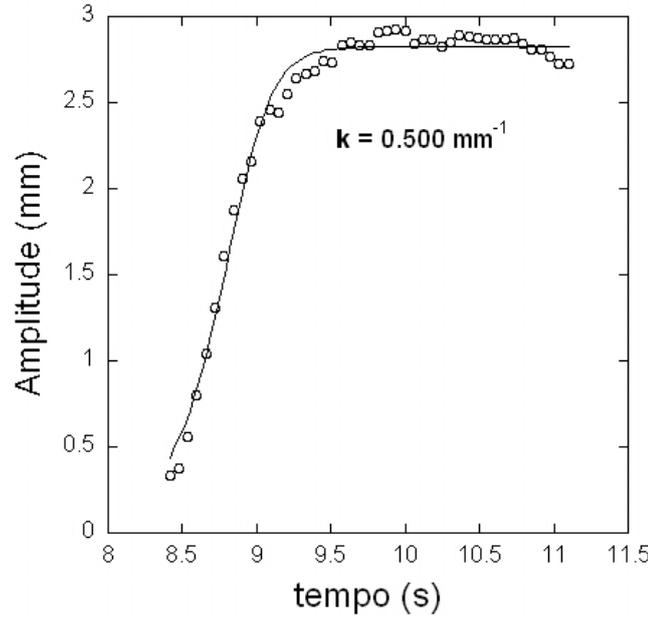
A expressão para a taxa de crescimento da instabilidade no sistema que estudamos, que é dada pela Eq. 2.109, apresenta dependência de parâmetros experimentais que estão presentes no sistema como viscosidade, tensão superficial e velocidade do cilindro, e também do vetor de onda do modo instável. Desse modo, para usá-la, devemos cumprir a tarefa não trivial de conhecer o valor desse vetor de onda do sistema. O sistema que estudamos apresenta uma dinâmica para os modos dominantes cuja evolução temporal determina uma história para o padrão periódico. Assim, existem diferentes modos instáveis durante a evolução do padrão, cada um dos quais domina uma determinada fase da história desse padrão. Estudamos a sua história em duas fases distintas e importantes de sua evolução: a fase inicial, durante a qual muitos modos crescem e alguns poucos desses, cujas taxas de crescimento são as mais elevadas, dominam e a fase final na qual, geralmente, algum modo de crescimento inicial mais lento tende a ser o modo dominante. O programa que trata as imagens e obtém as informações do padrão, nos fornece a evolução dos vetores de onda dominantes. Desse modo, um vetor de onda dominante é especificado para cada momento da evolução do padrão e esses dados mostram que, geralmente, há diferença entre o modo dominante no início e no final da história do padrão. Então, usamos como critério para definir o vetor  $\mathbf{k}_{\max}$  do modo dominante, aquele cuja amplitude do espectro de Fourier é máxima,  $\bar{A}_{\max}$ . Como o nosso programa de processamento das imagens fornece um arquivo com a evolução temporal dos modos com maior amplitude para cada imagem, fizemos os gráficos dessas evoluções para cada seqüência de imagens e obtivemos os vetores de onda dominantes nas fases inicial e final do padrão. A dependência temporal do vetor de onda  $\mathbf{k}$  apresentando uma amplitude máxima mostra claramente que um regime transiente é estabelecido logo após o cilindro começar a girar e os modos dominantes seguem este regime inicial, indicando que um forte mecanismo de seleção de padrão existe neste sistema. Dados típicos mostrando este processo para um

experimento com  $b_o = 300\mu m$  e  $\xi = 0.21$  são exibidos na Fig. 25. Observe o apareci-



**Figura 25:** Evolução temporal dos modos dominantes, modo- $\mathbf{k}$ . No tempo  $t_o$  surge o vetor de onda referente ao padrão periódico emergente para  $b_o = 300\mu m$  e  $\xi = 0.21$ .

mento de um vetor de onda que representa o padrão emergente no tempo inicial de sua história. Com esses dados foi possível obter o vetor de onda (modo- $\mathbf{k}$ ) correspondente ao modo dominante no padrão espacial e o tempo inicial ( $t_o$ ) no qual esse padrão emerge. Havia poucos casos em que mais de um modo dominava, nos quais ocorria uma troca cíclica de modos dominantes num intervalo de tempo curto ( $t < 5s$ ). Essa competição mais intensa entre modos impedia a escolha unívoca, entre eles, daquele modo dominante. Para situações como esta, fizemos a média dos valores desses vetores de onda e a média das amplitudes correspondentes a cada um desses modos. O conhecimento do padrão selecionado nos permitiu seguir a evolução de sua amplitude no tempo. Nossos dados sugerem, em geral, que a evolução inicial do padrão, no regime transiente, apresenta um perfil universal que é comum para todas as frequências angulares e todas as distâncias  $b_o$  usadas. Após esse regime inicial, o seu módulo tende a estabilizar mas pode apresentar ainda nesse regime, uma rica dinâmica caracterizando competição e supressão de modos, ondas viajantes e uma variedade de defeitos topológicos. De fato, essa riqueza dinâmica, após o transiente da evolução do padrão para este sistema, tem sido relatada em muitos trabalhos [16–19,35,49]. Mostramos na Fig. 26, a evolução inicial da amplitude do modo dominante do padrão, selecionado através de inspeção da Fig. 25. Essencialmente, em todos os casos que estudamos, nenhum efeito perceptível devido à excentricidade foi observado no regime transiente, o que pode ser entendido, já que a dinâmica de crescimento do padrão é, quase sempre, mais rápida que o tempo característico da perturbação.



**Figura 26:** Evolução temporal da amplitude do modo dominante na história inicial do padrão espacial cujo vetor de onda é  $\mathbf{k} = 0.500\text{mm}^{-1}$  para  $b_o = 300\mu\text{m}$  e  $\xi = 0.21$ . Os dados experimentais estão representados por ( $\circ$ ) e a linha contínua é um ajuste da equação de Ginzburg-Landau (Eq. 5.2) a esses dados, com valores obtidos para os parâmetros  $\lambda(k) = (3.8 \pm 0.8)\text{s}^{-1}$  e  $\sigma(k) = (0.47 \pm 0.09)\text{mm}^{-2}\text{s}^{-1}$ .

### 5.3 Regime transiente do crescimento do padrão

A análise de estabilidade linear desenvolvida para este sistema [15] prediz um crescimento exponencial para os modos espaciais instáveis (Eq. 2.108). A conseqüente evolução nos estágios iniciais do regime não-linear pode ser descrita por uma análise não-linear fraca (WNL-Weak NonLinear). Porém, nenhuma teoria foi ainda desenvolvida para este sistema no regime não-linear. Para alguns sistemas formadores de padrão [50–52], a análise não-linear fraca prediz uma equação do tipo Ginzburg-Landau (GLE) para os modos com vetor de onda  $\mathbf{k}$ , válido para valores suficientemente pequenos do parâmetro de controle:

$$\frac{dA_{\mathbf{k}}}{dt} = \lambda(k)A_{\mathbf{k}} - \sigma(k)|A_{\mathbf{k}}|^2A_{\mathbf{k}} \quad (5.2)$$

na qual  $\lambda(k)$  é a taxa de crescimento linear e  $\sigma(k)$  o coeficiente do termo não-linear. Esta equação admite uma solução analítica dada por

$$A_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\lambda} - \left(\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{1}{A_0^2}\right) e^{-2\lambda t}}} \quad (5.3)$$

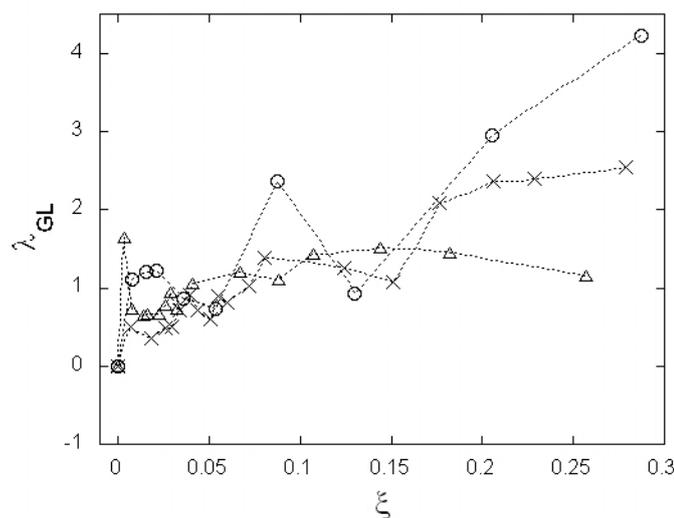
que descreve o regime transiente da evolução do padrão. Uma observação direta da análise não-linear fraca no contexto de formação de padrões foi feita por Figueiredo *et al.* [53] no

crescimento direcional de uma interface nemático-isotrópica de um cristal líquido termotrópico. Nesse trabalho, eles foram capazes de obter ambos os parâmetros  $\lambda(k)$  e  $\sigma(k)$ , ajustando a Eq. 5.3 às suas curvas experimentais. O mesmo procedimento foi aplicado em nosso trabalho, embora não esteja claro que a Eq. 5.2 seja completamente satisfeita, considerando que existem efeitos da excentricidade no sistema que estudamos. Verificamos que a solução da Eq. 5.2 se ajusta muito bem aos nossos dados no regime transiente. Contudo, os valores obtidos para a taxa de crescimento linear podem incluir alguns efeitos da perturbação. Para os casos  $b_o = 300\mu m$  e  $b_o = 400\mu m$ , e em grandes velocidades do cilindro, as taxas de crescimento obtidas usando a GLE são maiores que as frequências do cilindro. Portanto, a dinâmica do padrão é mais rápida que o tempo característico da perturbação. Isto justifica o bom acordo entre dados experimentais e o regime transiente da GLE. Para a distância em que os efeitos da perturbação foram menores,  $b_o = 800\mu m$ , usando a GLE obtivemos, em quase todos os casos, uma taxa de crescimento menor que a frequência do cilindro mas ainda apresentando um ajuste satisfatório entre dados experimentais e o regime transiente dessa equação. Este efeito foi esperado porque, como mostrado na Fig. 22, a excentricidade tem uma menor influência no ramo pós-bifurcação para esse valor de  $b_o$ . Numa tentativa de obter uma expressão que pudesse ser uma candidata para descrever os efeitos da excentricidade sobre a dinâmica do padrão, resolvemos numericamente uma versão modificada da GLE, dada por

$$\frac{dA_k}{dt} = [\lambda(k) + \epsilon \sin(\omega t)]A_k - \sigma(k)|A_k|^2 A_k. \quad (5.4)$$

Os resultados dessas soluções numéricas confirmaram nossas observações feitas para todas as distâncias  $b_o$  configuradas nos experimentos, mostrando a ausência de oscilações quando o padrão está na fase de crescimento de sua amplitude. Portanto, parece que o regime transiente observado é compatível com a perturbação dependente do tempo, imposta ao sistema, e a equação de Ginzburg-Landau, mesmo sem levar em conta os efeitos da excentricidade, é um bom modelo para descrever o sistema nesse regime. Os valores ajustados para a taxa de crescimento linear,  $\lambda_{GL}$ , obtidos por ajuste da GLE aos dados experimentais são mostrados na Fig. 27.

As tentativas de obter valores para a taxa de crescimento, previstos pela análise de estabilidade linear ( $\lambda_{LS}$ ) através da Eq. 2.109, não foram satisfatórias mesmo para pequenos valores do parâmetro de controle, nos quais se espera que a análise linear seja válida. No entanto, as curvas obtidas, para todas as distâncias  $b_o$ , tiveram o mesmo perfil côncavo previsto através dessa relação de dispersão (Eq. 2.109). Isto pode indicar que a perturbação de fato afeta os valores das taxas de crescimento embora esses valores

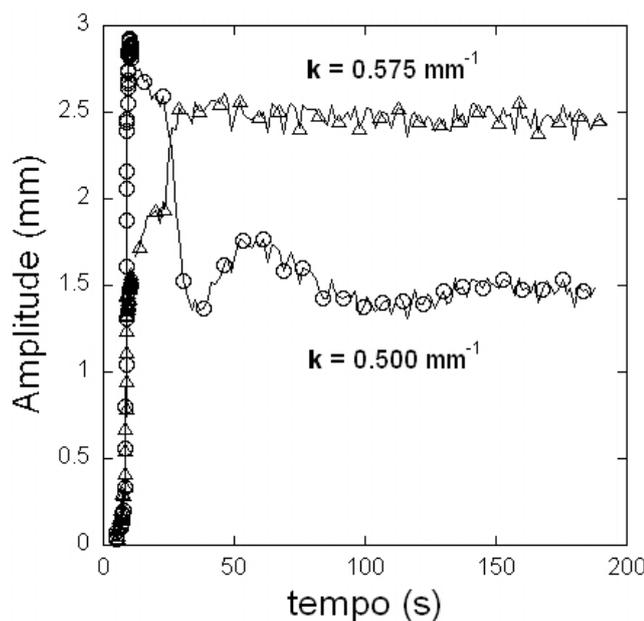


**Figura 27:** Os valores das taxas de crescimento, obtidas com o ajuste da solução da equação de Ginzburg-Landau (Eq. 5.3) aos dados experimentais, são representados no gráfico contra o parâmetro de controle para as três distâncias usadas ( $b_o = 300\mu m$  ( $\circ$ ) -  $b_o = 400\mu m$  ( $\Delta$ ) -  $b_o = 800\mu m$  ( $\times$ )). As linhas servem somente como guia para os olhos.

ainda apresentem o perfil previsto pela GLE. Motivados por essa hipótese, substituímos no desenvolvimento da análise de estabilidade linear, o termo da distância  $b_o$  pela sua expressão perturbada dada pela Eq. 4.1. Porém, levando em conta apenas termos lineares nas expansões, o que é um pressuposto da técnica de análise de estabilidade linear, o resultado final foi uma expressão incapaz de modificar os resultados conseguidos sem a perturbação (Eq. 2.109). Desta forma, esses resultados reforçam a necessidade do desenvolvimento de uma análise de estabilidade não-linear, que leve em conta a perturbação existente neste sistema e que possa apresentar uma expressão mais bem sucedida para a taxa de crescimento dos modos instáveis.

## 5.4 Regime de saturação do crescimento do padrão

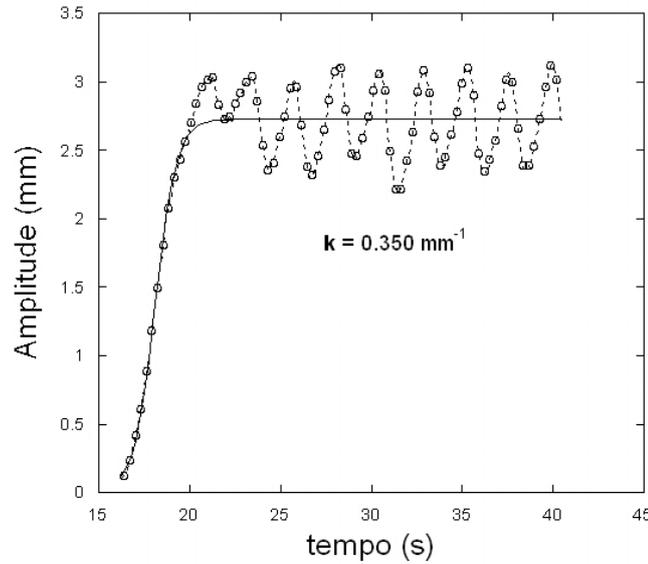
Outra característica interessante do crescimento do padrão se refere à competição entre os vários modos espaciais presentes em vários momentos da evolução do padrão. Para caracterizar esta competição, a amplitude de Fourier dos modos é seguida no tempo, para o modo dominante no início e no final da história do padrão espacial. Como citado acima, é observado que estes dois modos dominantes têm um crescimento exponencial. Contudo, para tempos suficientemente longos, comparado com a escala de tempo característica, que define seus crescimentos iniciais, a amplitude para o modo dominante inicial decresce para pequenos valores (curva com  $\mathbf{k} = 0.500mm^{-1}$  na Fig. 28). Enquanto isso, o modo do padrão final evolui, em geral, com menor taxa de crescimento comparado ao modo



**Figura 28:** Evolução temporal de dois modos diferentes do padrão espacial para  $b_o = 300\mu m$  e  $\xi = 0.21$ . O modo dominante inicial ( $k = 0.500mm^{-1}$  (o)) cresce mais rápido que o modo dominante final ( $k = 0.575mm^{-1}$  (□)). Após esse crescimento, a amplitude do modo inicial decresce para pequenos valores enquanto o modo final tem sua amplitude aumentada e ela exibe um valor de saturação comparável à amplitude máxima do modo inicial. As linhas servem somente como guia para os olhos.

dominante inicial e alcança um grande valor para sua amplitude na história final do padrão. Mas, os valores para a amplitude máxima na fase de saturação do crescimento do padrão para os dois modos dominantes, o padrão inicial e o padrão final, são comparáveis e eles são descritos pelo termo não-linear presente na equação de Ginzburg-Landau (Eq. 5.2). A Fig. 28 mostra uma evolução típica para os modos dominantes presentes na história inicial e final do padrão periódico espacial. Verificamos que o segundo modo tem uma taxa de crescimento que equivale à metade do primeiro. Quando o tempo atinge  $t = 25 s$ , há o cruzamento dos valores das amplitudes destes dois modos, o que estabelece a troca de domínio entre eles, tornando o segundo modo aquele dominante na história final do padrão.

No regime saturado, no qual a equação GLE prediz um padrão estacionário, observamos uma amplitude oscilatória (com o mesmo período do movimento do cilindro) em torno de um valor de saturação constante, como exibido na Fig. 29. O mesmo tipo de perfil é exibido pelas soluções numéricas da Eq. 5.4. Contudo, as tentativas de ajustar essas soluções à dinâmica mais complexa no regime saturado, nos forneceu somente uma aproximação qualitativa geral para a descrição do padrão perturbado no regime saturado. A Fig. 30 mostra os resultados para  $b_o = 300\mu m$  e  $\xi = 0.05$ .

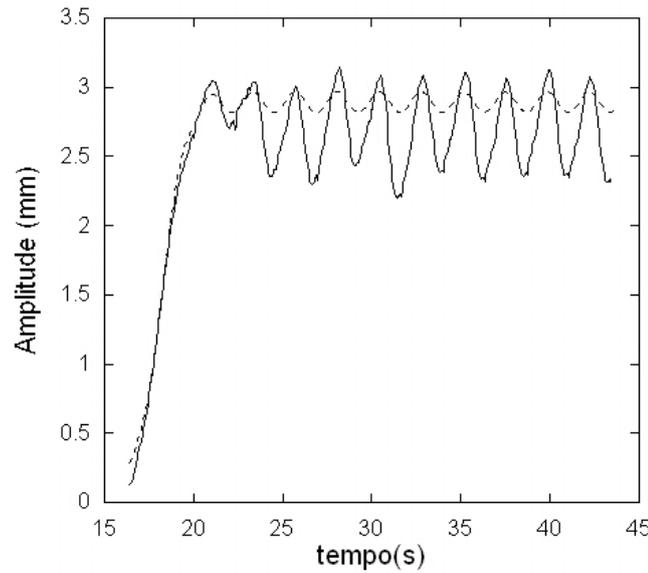


**Figura 29:** A equação de Ginzburg-Landau modela a amplitude de crescimento do padrão. Seu termo não-linear prediz um valor constante, não observado, para a saturação da amplitude. O modo oscilatório presente na amplitude após o padrão ter sido estabelecido vem de mudanças na morfologia do padrão proveniente da perturbação determinística imposto ao sistema. Dados para a distância  $b_o = 300\mu m$  e  $\xi = 0.05$ .

A evolução da amplitude da interface mostra a existência de uma interação complexa entre os modos do padrão espacial e os modos do precursor. Assim, é interessante notar que a inserção de um termo (justificável) de perturbação na equação de Ginzburg-Landau pôde capturar alguns aspectos desta evolução. Um estudo mais completo sobre os efeitos de uma perturbação determinística neste sistema poderia explicar algumas das características apresentadas pelo acoplamento entre os modos espaciais do padrão e o modo precursor. Nas próximas seções, descreveremos o acoplamento entre estas oscilações do padrão espacial e os efeitos da perturbação imposta ao sistema.

## 5.5 Efeitos morfológicos no ramo pós bifurcação

Observações cuidadosas do padrão, em todos os valores do parâmetro de controle e todas as distâncias  $b_o$ , revelaram que o padrão passou por transformações em sua morfologia. Percebemos que essas mudanças tinham uma regularidade. Para pequenos valores de  $\xi$  ele tinha uma forma que era mais larga na crista do que nos vales. Aumentando os valores do parâmetro de controle, o padrão exibia uma morfologia que apresentava uma quase simetria entre crista e vale e isso acontecia para uma estreita faixa de valores de  $\xi$ . Para grandes valores de  $\xi$ , o padrão voltava a ser assimétrico em sua morfologia, exibindo vales mais largos que as cristas. A Fig. 31 mostra claramente que a morfologia do padrão



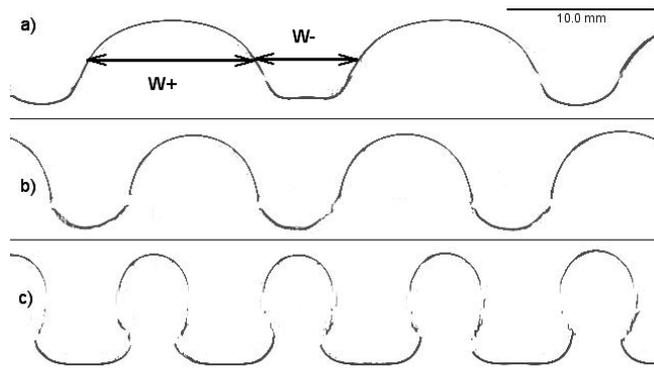
**Figura 30:** Solução numérica da equação de Ginzburg-Landau modificada aplicada para  $b_o = 300\mu\text{m}$  e  $\xi = 0.05$ . A linha pontilhada representa os resultados da solução numérica e a linha sólida representa os dados experimentais. Este resultado mostra que as características da evolução da amplitude na fase de crescimento e na fase de saturação oscilatória podem ser, qualitativamente, reproduzidas pela GLE modificada dada pela Eq. 5.4.

tem aspectos diferentes para cada faixa de valores do parâmetro de controle. Pareceu-nos que este efeito pudesse ser responsável pela supressão observada nas oscilações da posição da interface média mostradas no lado direito da Fig. 22. Para verificar esta possibilidade, fizemos estudos sobre a evolução da forma do padrão quando o parâmetro de controle variava. O desafio foi tirar dessas observações algo que pudesse ser mensurável. Assim, para todas as distâncias  $b_o$  usadas, selecionamos um conjunto de imagens que eram provenientes de experimentos que abrangiam desde pequenos valores positivos do parâmetro de controle até os valores grandes de  $\xi$ . Dessa forma, o espectro de dados percorria todos os regimes morfológicos que o padrão espacial apresentava.

Para realizar as medidas, primeiramente calculamos a interface média, que é basicamente uma linha horizontal que divide a interface em duas partes de mesma altura. Isto define, sem qualquer ambigüidade, as regiões onde estão as cristas e os vales do padrão. Nesta linha, situada a meia altura do padrão, medimos a largura de suas cristas e de seus vales. Usando estes valores, fomos capazes de obter informações sobre a transformação morfológica pela qual o padrão espacial passou. Para isto, definimos uma grandeza chamada de *razão de aspecto do padrão* denotada por  $\Gamma$ , que é dada por

$$\Gamma = \frac{W_+ - W_-}{W_+ + W_-}. \quad (5.5)$$

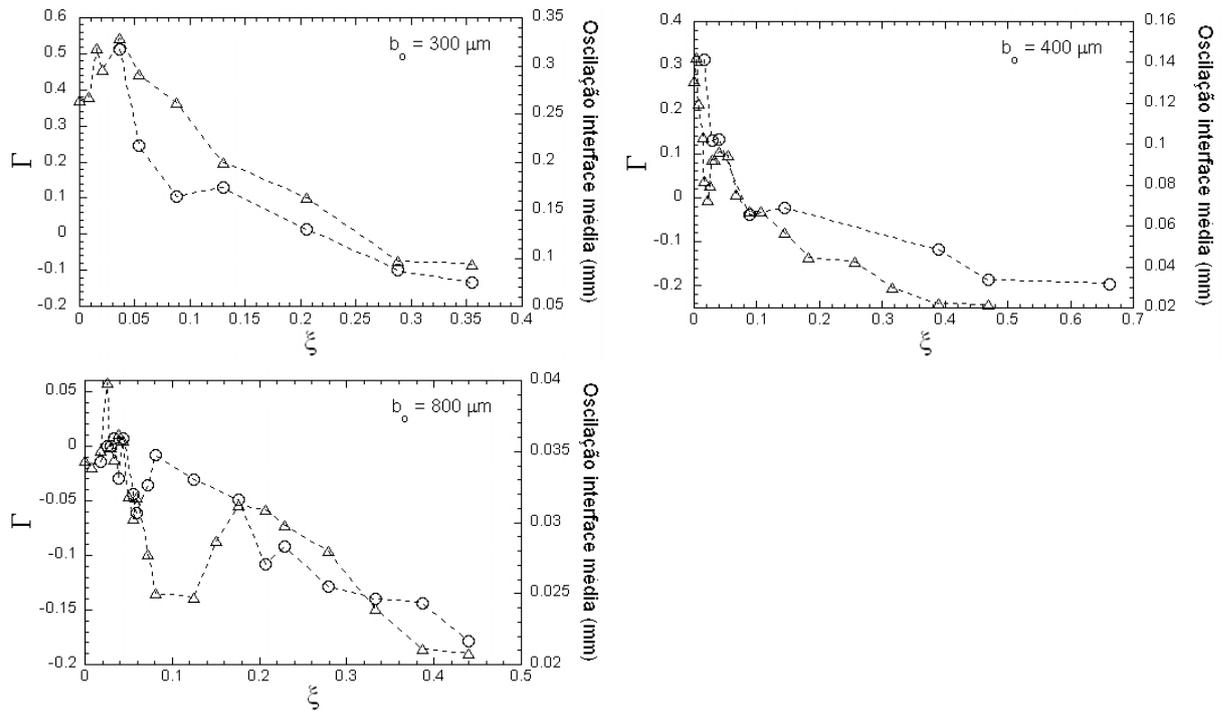
Aqui,  $W_+$  é a largura média das cristas e  $W_-$  é a largura média dos vales do padrão.



**Figura 31:** Os três diferentes tipos de morfologia apresentados pelo padrão periódico espacial. Em (a) é mostrado um padrão com cristas mais largas que os vales. Em (b) é exibido uma padrão quase simétrico. Em (c) é mostrado um outro padrão que apresenta os vales mais largos que suas cristas. Todas as figuras se referem a experimentos com distância  $b_o = 300\mu m$  e valores do parâmetro de controle  $\xi = 0.05$  (a),  $\xi = 0.13$  (b) e  $\xi = 0.29$  (c).

Calculamos  $\Gamma$  para vários valores do parâmetro de controle e os resultados são mostrados na Fig. 32 para todas as distâncias  $b_o$  usadas. No mesmo gráfico mostramos os valores da amplitude das oscilações da posição da interface média (os mesmos valores exibidos no lado direito da Fig. 22).

Nos dois casos mais críticos, ( $b_o = 300\mu m$  e  $b_o = 400\mu m$ ), uma mudança no sinal de  $\Gamma$  foi observada. Em ambos os casos,  $\Gamma$  é positivo para pequenos valores (positivos) do parâmetro de controle, significando que a largura das cristas é maior que a largura dos vales do padrão. Para valores mais elevados do parâmetro de controle, aproximadamente entre  $0.10 - 0.20$ ,  $\Gamma$  se torna negativo. Para a maior distância  $b_o$ , não importa qual seja a velocidade do cilindro,  $\Gamma$  é sempre negativo. Novamente, caracterizamos esse resultado para  $b_o = 800\mu m$  como revelador da influência muito pequena que a perturbação teve sobre a dinâmica da interface nesta altura do cilindro. Foi observado que a mudança no caráter da morfologia do padrão, que é dado pelo sinal de  $\Gamma$ , coincide aproximadamente com a forte supressão dos modos oscilatórios induzidos pela perturbação dependente do tempo imposta ao sistema. Portanto, temos uma medida que confirma a existência de uma influência mútua entre estes fenômenos diferentes. Estes resultados sugerem que a supressão de modos precursores no domínio do tempo poderiam estar relacionados aos efeitos de curvatura que necessariamente controlam as mudanças morfológicas do padrão. Resultados similares a estes foram reportados por Rabaud *et al.* [41] em um experimento com instabilidade de Saffman-Taylor. Eles mostraram que ramificações laterais (“*lateral sidebranches*”) foram geradas em uma estrutura tipo dedo (“*finger*”) como resposta dada por esse sistema devido à aplicação de uma excitação periódica externa nele. Os efeitos



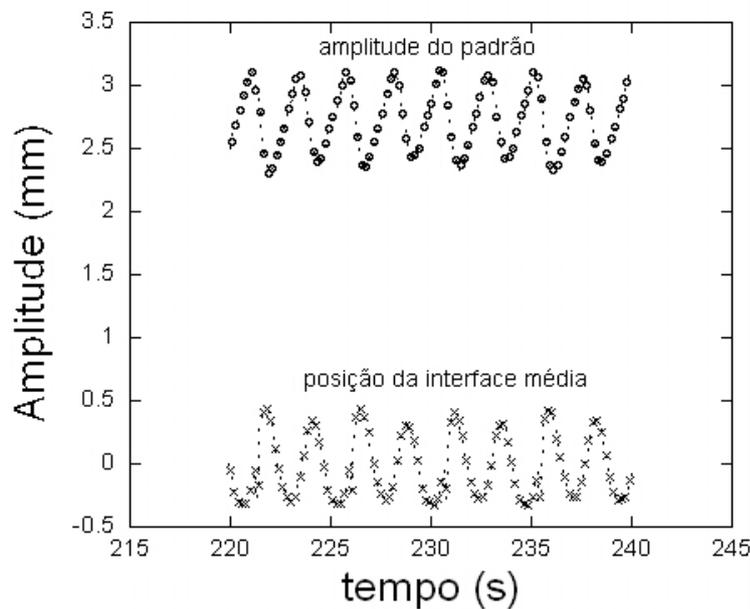
**Figura 32:** Valores da razão de aspecto  $\Gamma$  ( $\circ$ ) obtidos através do uso da Eq. 5.5, e da amplitude das oscilações da posição da interface média ( $\Delta$ ) (o lado direito da Fig. 22) contra o parâmetro de controle para as três distâncias  $b_o$  usadas nos experimentos. As linhas pontilhadas servem somente como guia para os olhos.

desta perturbação foram amplificados em valores de frequência baixos e suprimidos em valores de frequência elevados. Eles argumentaram que o amortecimento da amplitude em comprimentos de onda curtos são causados por efeitos de tensão superficial. Embora nenhuma relação direta entre a instabilidade do impressor e a instabilidade de Saffman-Taylor tenha sido desenvolvida até agora, os resultados de Rabaud *et al.* [41] reforçam nossos argumentos de que a tensão superficial poderia ser crucial para a supressão das oscilações da posição da interface média, observadas em frequências elevadas.

## 5.6 Oscilação da posição da interface média e da amplitude do padrão

Já dissemos que em nossos experimentos foi observada a evolução do padrão em seu regime transiente e de saturação. Na seção 5.4, vimos que a amplitude do padrão apresenta em seu regime de saturação a mesma característica oscilatória observada para a posição da interface média e isto revela claramente que a excentricidade também afeta a dinâmica do padrão formado. Como já discutido na seção 5.5, as oscilações da posição da interface média persistiram no ramo pós-bifurcação mas foram influenciadas por as-

simetrias que ocorreram nas cristas e nos vales do padrão formado. Uma consequência imediata desse efeito morfológico foi percebida como oscilações na amplitude dos modos de Fourier espaciais (amplitude do padrão periódico espacial). Na Fig. 33 é mostrada a dependência temporal da amplitude do padrão e da posição da interface média para um experimento ajustado para  $b_o = 300\mu m$  e  $\xi = 0.05$ . Uma observação dessas duas oscilações revela que há uma diferença de fase entre elas de  $180^\circ$ . No entanto, fizemos observações em vários desses pares de oscilações e concluimos que a diferença de fase entre elas variava aleatoriamente, não sendo possível definir qualquer regra para a fase dessas oscilações.



**Figura 33:** Resposta temporal do sistema sujeito a uma perturbação determinística. Esta figura mostra as oscilações temporais da amplitude do padrão (superior) e da posição da interface média (inferior) para um experimento ajustado para  $b_o = 300\mu m$  e  $\xi = 0.05$ . A diferença de fase entre essas oscilações não obedecia a nenhuma regra, tendo valores aleatórios.

Procedemos a uma inspeção minuciosa de todos os filmes dos experimentos realizados. Com isto, pudemos observar que próximo à bifurcação, para pequenos valores positivos do parâmetro de controle  $\xi$ , as oscilações no padrão se davam com maior amplitude nos seus vales (pequenos valores da posição  $x$  na Fig. 23) do que em suas cristas. Para grandes valores de  $\xi$ , estas oscilações se tornaram mais pronunciadas nas cristas do que nos vales do padrão. Para pequenos valores positivos do parâmetro de controle, quando a amplitude dos modos do padrão espacial é pequena e o crescimento da instabilidade é lento, as oscilações da posição da interface média mantém os grandes valores observados antes do ponto de bifurcação. Parece-nos que o padrão espacial reforça as oscilações logo após

o surgimento dos modos espaciais. Mas, para grandes valores do parâmetro de controle, quando os modos espaciais são muito não-lineares, as oscilações são suprimidas. Assim, estas oscilações, nas amplitudes dos modos do padrão espacial, têm as mesmas características observadas no ramo pós-bifurcação do domínio no tempo que gerou o precursor. Isto, provavelmente, indica que efeitos de curvatura da interface poderiam atuar como um importante mecanismo de estabilização desses modos espaciais oscilatórios. Conseqüentemente, os modos do padrão espacial não-linear acoplam com os modos precursores do domínio no tempo, gerando a supressão observada nos modos precursores, quando o parâmetro de controle se torna grande. Com o objetivo de verificar se estas oscilações em duas variáveis diferentes do sistema, posição da interface e amplitude do padrão, poderiam estar relacionadas, fizemos a análise de Fourier no domínio do tempo dos dois tipos de oscilações,  $\Delta x$  e  $A_k$ . Todos os espectros de Fourier para estas oscilações mostram um pico pronunciado na mesma frequência de rotação do cilindro. No entanto, as amplitudes destes picos não se correlacionam de uma maneira simples. Para mostrar isto, fizemos medidas de correlação entre estas duas oscilações usando a correlação de Pearson que é dada por

$$\langle \Delta x A_k \rangle = \frac{\frac{1}{m} \sum_{m=0}^{m-1} (\Delta x_m - \langle \Delta x \rangle)(A_{km} - \langle A_k \rangle)}{\left( \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{m=0}^{m-1} |\Delta x_m - \langle \Delta x \rangle|^2} \right) \left( \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{m=0}^{m-1} |A_{km} - \langle A_k \rangle|^2} \right)} \quad (5.6)$$

na qual a expressão no numerador é a covariância entre  $\Delta x$  e  $A_k$  e cada termo dentro da raiz quadrada, no denominador, é o desvio padrão para estas variáveis. A tabela (4) mostra os valores dos coeficientes da correlação de Pearson entre os dois conjuntos de dados para cada distância  $b_o$  ajustada. Ela também contém, para cada  $b_o$ , a razão  $\frac{\langle A_k \rangle}{\langle \Delta x \rangle}$  de seus valores médios. Estes valores médios são calculados para o conjunto de valores dos parâmetros de controle. Fica claro que, analisando os valores desta tabela para o caso mais crítico, no qual  $b_o = 300\mu m$ , as oscilações dos modos espaciais praticamente seguem as oscilações da posição da interface média. Para o maior  $b_o$ , a razão das oscilações tem o menor valor e uma correlação negativa foi obtida. De certo modo, isto confirma que os efeitos da perturbação, neste caso, tiveram menor influência sobre a dinâmica do padrão mas o coeficiente de correlação calculado indica que eles ainda favorecem a presença de assimetrias na morfologia do padrão. Estes resultados sugerem que o acoplamento entre a perturbação e a dinâmica intrínseca do padrão neste sistema não pode ser simplesmente relacionado com as propriedades de seu ramo instável que são determinadas principalmente pelo valor de  $b_o$  e da velocidade do cilindro. Portanto, uma compreensão teórica melhor deste sistema, no regime não-linear, incluindo sua versão perturbada, é necessária

de modo a capturar a complexa estrutura do seu padrão e confirmar a hipótese levantada, de que a curvatura seja responsável pelos diferentes modos de oscilação nas cristas e nos vales do padrão periódico espacial.

**Tabela 4:** Valores referentes à razão entre oscilações da amplitude do padrão ( $\langle A_k \rangle$ ) e oscilações da posição da interface média ( $\langle \Delta x \rangle$ ). Os dados  $\langle A_k \rangle$  e  $\langle \Delta x \rangle$  são resultados de médias feitas sobre todos os valores do parâmetro de controle para cada distância  $b_o$  usada nos experimentos. Na segunda coluna são mostrados os coeficientes de correlação entre os dois tipos de oscilação.

Distância $b_o$ ( $\mu m$ )	Correlação	Razão entre as oscilações médias
300	0.90	0.85
400	0.16	0.29
800	-0.30	0.20

## 5.7 Mudanças morfológicas no padrão e competição entre os modos espaciais

Na seção 5.2 vimos que podemos atribuir ao padrão duas fases distintas para sua evolução. Cada uma dessas fases é caracterizada por um modo espacial dominante. Na atual seção, mostraremos nossos estudos sobre a interação entre a seleção desses modos espaciais dada pela dinâmica evolutiva do padrão e as mudanças morfológicas pelas quais esse padrão passa, ambas as grandezas avaliadas em função do parâmetro de controle. De posse dos valores dos vetores de onda nas duas fases da história do padrão e usando uma expressão similar a Eq. 5.5, nós calculamos a diferença normalizada  $\Delta \mathbf{k}$  entre eles para cada parâmetro de controle e cada distância  $b_o$  selecionados. Esta expressão tem a forma

$$\Delta \mathbf{k} = \frac{\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i}{\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_i} \quad (5.7)$$

na qual os índices  $f$  e  $i$  se referem às fases final e inicial da evolução do padrão, respectivamente. Então, para um determinado valor do parâmetro de controle  $\xi$ , fizemos a média dos  $\Delta \mathbf{k}$  referente a cada uma das três distâncias  $b_o$ . Este procedimento nos forneceu o valor médio da diferença normalizada  $\Delta \mathbf{k}$  para um determinado valor do parâmetro de controle e essa grandeza foi atribuída como sendo o  $\Delta \mathbf{k}_{\text{médio}}$ . Um procedimento semelhante foi realizado para os valores da razão de aspecto  $\Gamma$  obtidos da seção 5.5. Fixando um valor para o parâmetro de controle  $\xi$ , obtivemos valores médios para  $\Gamma$  das três distâncias  $b_o$ . Esta grandeza foi denotada por  $\Gamma_{\text{médio}}$ . Com estas novas informações foi possível confrontar as mudanças morfológicas no padrão com a competição de modos, quando variamos o parâmetro de controle. Estes procedimentos revelaram tendências gerais para os

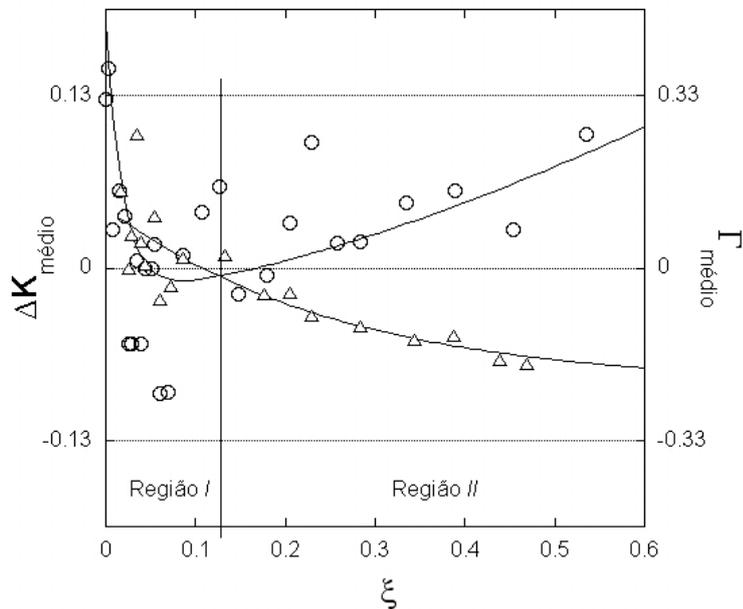
conjuntos de dados destas duas grandezas. De modo a mostrar a tendência destes dados, eles foram ajustados com duas funções empíricas. O conjunto de valores de  $\Delta \mathbf{k}_{\text{médio}}$  foi ajustado com o uso de

$$a + b \cdot e^{(-c\xi)} + d\xi^{1.5} \quad (5.8)$$

e o conjunto de valores de  $\Gamma_{\text{médio}}$  foi ajustado com

$$a + b \cdot e^{(c(\xi-d))}. \quad (5.9)$$

Mostramos na Fig. 34 o conjunto dos dados medidos e as curvas ajustadas correspondentes a estas equações. Esta figura mostra a existência de duas regiões distintas com claras dife-



**Figura 34:** Diferença normalizada média entre os vetores de onda  $\Delta \mathbf{k}_{\text{médio}}$  ( $\circ$ ) e a razão de aspecto média  $\Gamma_{\text{médio}}$  ( $\Delta$ ) dos padrões selecionados para o conjunto dos três experimentos realizados.

renças qualitativas. Para pequenos valores do parâmetro de controle, na região assinalada como *I*, o valor de  $\Delta \mathbf{k}_{\text{médio}}$  decresce quando o parâmetro de controle aumenta. Os valores de  $\Gamma_{\text{médio}}$  são positivos para quase todos os valores do parâmetro de controle. A respeito dos efeitos de seleção de padrão, podemos notar que não há, nessa região, uma definição clara de qual modo, o inicial ou o final, tem maior valor para o seu vetor de onda, porque  $\Delta \mathbf{k}_{\text{médio}}$  (representado pelo símbolo ( $\circ$ )) alterna entre valores positivos e negativos com grande dispersão nessa região, que está mais próxima do ponto de bifurcação. Simultaneamente, é observado que a razão de aspecto do padrão também apresenta uma dispersão significativa em seus valores, mas essa dispersão diminui à medida que se aproxima do final da região *I*. Assim, é possível especificar o início de uma outra região (*II*), na qual

podemos observar uma transição no comportamento daquelas duas variáveis que representam propriedades espaciais do padrão. Vemos que, quando o parâmetro de controle tem valores elevados, a dispersão nos valores dos vetores de onda aumenta e o vetor de onda final é (quase) sempre maior que o vetor de onda inicial. Quanto aos valores de  $\Gamma_{\text{médio}}$ , à medida que  $\xi$  aumenta eles se tornam sempre mais negativos (monotonicamente), o que indica o caráter geral, pois estamos tratando de valores médios para as três distâncias  $b_o$ , para a forma do padrão periódico espacial que fica com a forma assimétrica exibida na Fig. 31-c. Os dados dessa região (II) nos mostram que há, não somente uma mudança no sinal da razão de aspecto mas, também, uma persistente característica para a seleção do modo do padrão já que  $\Delta\mathbf{k}_{\text{médio}}$  praticamente só assume valores positivos.

A dispersão estatística dos dados mostrados na Fig. 34 é exibida na tabela (5). Esta tabela também contém os valores dos coeficientes de correlação de Pearson entre o conjunto de dados  $\Delta\mathbf{k}_{\text{médio}}$  e  $\Gamma_{\text{médio}}$  calculados para cada região. Obtivemos sinais opostos para os valores deste coeficiente. Os valores entre parênteses foram calculados usando os dados do ajuste obtidos através das equações 5.8 e 5.9. Eles confirmam a tendência geral, mostrada pelos dados experimentais e, em particular, revelam a mudança marcante nos valores do coeficiente de correlação. Com isso, há indicação de que as propriedades estatísticas da morfologia do padrão e dos processos de seleção do padrão podem estar muito relacionadas. Como ainda não existe um modelo teórico que descreva este sistema sob fortes condições de não equilíbrio, como é o caso do sistema, submetido à uma perturbação determinística, que estudamos, nossas medidas somente podem fornecer um cenário descritivo e, talvez, motivar futuros estudos teóricos que poderiam confirmar muitas das evidências levantadas neste trabalho.

**Tabela 5:** Valores estatísticos comparando morfologia da interface e seleção do padrão.  $\Delta\mathbf{k}_{\text{médio}}$  representa a média da diferença normalizada dos vetores de onda e  $\sigma_{\Delta\mathbf{k}_{\text{médio}}}$  é o seu desvio padrão correspondente.  $\Gamma_{\text{médio}}$  é a média dos valores da razão de aspecto e  $\sigma_{\Gamma_{\text{médio}}}$  é o desvio padrão para esta medida. São definidas duas regiões com comportamento distintos para estas grandezas.

Quantidade	Região I	Região II
$\Delta\mathbf{k}_{\text{médio}}$	0.04 (0.02)	0.06 (0.07)
$\sigma_{\Delta\mathbf{k}_{\text{médio}}}$	0.13 (0.06)	0.05 (0.05)
$\Gamma_{\text{médio}}$	0.03 (0.04)	-0.09 (-0.14)
$\sigma_{\Gamma_{\text{médio}}}$	0.08 (0.03)	0.08 (0.05)
Coeficiente de correlação	0.67 (0.80)	-0.20 (-0.94)

## 6 *Conclusões e perspectivas*

Neste trabalho, fizemos estudos experimentais sobre a dinâmica de formação de padrões em um sistema submetido a uma instabilidade morfológica na presença de uma perturbação dependente do tempo, do tipo determinística. Este sistema está sujeito a uma quebra espontânea de simetria, em uma bifurcação supercrítica, tipo forquilha, e passa então a exibir um padrão periódico espacial. Em nosso experimento foi possível acompanhar os efeitos espaço-temporais gerados pela perturbação durante toda a evolução do padrão. As técnicas de processamento de imagens, as análises de Fourier numéricas implementadas e os procedimentos estatísticos que empregamos, permitiram a obtenção da dinâmica do padrão observado em diversas fases de sua evolução. Assim, foi possível observar os seguintes efeitos:

- A existência de um ramo precursor neste sistema, caracterizado pela amplificação das oscilações induzidas pela perturbação. Essa amplificação apresenta um comportamento crítico (definido por uma cúspide na bifurcação), e foi bem descrito por uma lei de potência.
- Um forte acoplamento dessas oscilações com a seleção e com a morfologia do padrão formado após a bifurcação.
- Mudanças ocorridas na estrutura não linear do padrão estão associadas com a diminuição dos efeitos da perturbação no ramo pós-bifurcação.
- O padrão não foi afetado pela perturbação em seu regime transiente de crescimento mas passou a exibir comportamento oscilatório, o que motivou mudanças na equação de amplitude que modela o sistema.
- A existência de duas regiões distintas na evolução do padrão. A transição entre elas estabelece mudanças qualitativas para a competição entre os modos espaciais e as mudanças morfológicas no padrão. Foi observado que, para grandes valores do

parâmetro de controle do sistema, o vetor de onda final do padrão é maior que o inicialmente selecionado.

- Existe a necessidade de implementação de modelos teóricos mais elaborados, a fim de se explicar os efeitos complexos observados em nossos experimentos, tanto no regime linear quanto no não linear.

Nossos estudos abrem a possibilidade para o uso da dinâmica de padrões, sob condições controladas, em experimentos e dispositivos de transporte não convencionais, como em microfluídica, por exemplo. Consideramos também importante que estudos relacionados aos efeitos da curvatura e da tensão superficial, na seleção e na morfologia, sejam realizados com mais detalhes em sistemas sob condições extremas de não-equilíbrio, principalmente quando sujeitos a efeitos de perturbações determinísticas.

## *APÊNDICE A – Artigos publicados*

Neste apêndice apresentamos os dois artigos publicados durante o período de doutorado do autor desta tese (Março de 2004 a Agosto de 2008) em ordem cronológica.

- Revista *Physical Review E*

**R. L. Santos and J. M. A. Figueiredo**, “Direct observation of a precursor in a complex system”. *Phys. Rev. E* 74 (4), 041104(5) (2006).

- Revista *Physical Review E*

**R. L. Santos, U. Agero and J. M. A. Figueiredo**, “Pattern dynamics in a perturbed printer’s instability experiment”. *Phys. Rev. E* 77 (6), 066310(8) (2008).

## Direct observation of a precursor in a complex system

R. L. Santos and J. M. A. Figueiredo\*

*Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Caixa Postal 702, Belo Horizonte, CEP 31.270-901, Brazil*

(Received 23 March 2006; published 3 October 2006)

A precursor is a kind of instability in a nonequilibrium system observed prior to a bifurcation. It has been observed in important natural phenomena such as earthquakes and epileptic seizures. In most cases just qualitative results were reported, with the exception of some quantitative observations of noisy precursors. We report the observation of precursors excited by a deterministic perturbation. Quantitative characterization of this type of precursor is important in predicting a bifurcation in advance. This predicting ability comes from a dynamical structure present on the perturbed system.

DOI: [10.1103/PhysRevE.74.041104](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.041104)

PACS number(s): 05.70.Ln, 47.20.Ky, 47.54.-r

A macroscopic system operating out of its equilibrium state may exist in a variety of states called branches. Nonlinear interactions of the thermodynamic fields that define a branch may produce qualitative changes on its properties and may lead to the emergence of self-organized structures. In such cases other stable regimes may be attained which present spatiotemporal patterns. This is the case when a spontaneous symmetry breaking, at a bifurcation point, drives a high symmetric state, like a uniform pattern, into a branch with lower symmetry presenting, for example, a periodic structure. An important challenge in the study of these nonlinear dynamic systems is the detection of whether a bifurcation belongs to a specific stable branch. In this respect, nontrivial effects may appear in a system when a stable branch, subject to a perturbation, presents dynamical structure not observed before the perturbation is set on. Therefore, the study of a perturbed branch may be of importance in providing in advance information concerning the existence of a bifurcation in that branch. When this happens, a precursor is observed. Pioneering work on this matter was reported by Wiesenfeld [1]. He studied a nonlinear system existing in a periodic state and subject to an external noise source and predicted that, prior to an instability, the power spectra of the primary signal may anticipate the kind of bifurcation that will be triggered.

Since then experimental evidence of precursors was reported in widely different fields. A program using geophysical data to predict earthquakes has been implemented by Wyss [2,3] and correlation of direct data on seismic activity and electromagnetic anomalies were used by Eftaxias *et al.* [4] in order to demonstrate that existing methods of data analysis are quite reliable in making predictions. The importance of reliable and robust detection of precursors of epileptic seizures has been recognized as a factor of life improvement in epilepsy sufferers [5]. In this respect, analysis of electroencephalogram (EEG) signals was used by Martinerie *et al.* [6], who performed multidimensional data analysis in order to predict the onset of epileptic seizures. Similar conclusions were reported by Lehnertz and Elger [7] showing that nonlinear time-series analysis are capable of extracting relevant features of brain activity which are predictive of

epileptic seizures. Noise precursors of the type predicted by Wiesenfeld were observed in semiconductor junctions [8], laser instabilities [9] and Josephson junctions [10,11]. Prebifurcation studies of noise-driven systems were also performed by Surovyatkina and Kravtsov [12,13].

In this work, we report a direct observation of a kind of precursor, not related to noise coupling excitations but induced by coupling of the intrinsic dynamics of a controlled system with a deterministic perturbation. More specifically, our system exhibits a spatial pattern formation by means of a spontaneous symmetry breaking of a uniform pattern, after a supercritical pitchfork bifurcation. The imposed perturbation changes a parameter that affects this stable branch. We were able to detect the presence of precursor in this case. Detailed observations of the evolution of precursor modes across a wide range of the control parameter were made, including those values that were very close to the bifurcation point. Our data suggest that a precursor regime may be defined through the existence of an interval of control parameter values where precursors are present. In this sense, two kinds of regimes were observed and characterized. In addition, post-bifurcation effects were also observed and they showed that a strong interaction of precursor modes with spatial pattern modes, set after the bifurcation point, is present. Our data also shows a suppression of these excited precursor modes whenever the system operates far from the bifurcation point.

The experimental setup for the kind of pattern instability we worked out consists of a rotating cylinder, partially immersed in a fluid, and placed over a horizontal plate, as used by Hakim *et al.* in Ref. [14] and shown in Fig. 1. Within these conditions, a one-dimensional straight interface (the uniform prebifurcation pattern) between the fluid and the open atmosphere is formed. When the angular frequency of the cylinder reaches a critical value,  $\omega_c$ , the interface presents a periodic spatial pattern. This instability was originally described by Pitts and Greiller [15] in a journal-bearing geometry. Linear stability analysis for this bifurcation was performed by Hakim *et al.* [14] and phase space domains reported by Rabaud *et al.* [16] for an experiment in a similar geometry. Secondary instabilities were reported by Cummins *et al.* [17]. In our experiment, the cylinder is a stainless steel shaft driven by a precision dc motor and mounted on aligned bearings. The shaft rotates immersed in a flat reservoir containing silicon oil. Parallelism between the cylinder axis and the horizontal base of the reservoir is adjusted by supporting

\*Electronic address: josef@fisica.ufmg.br

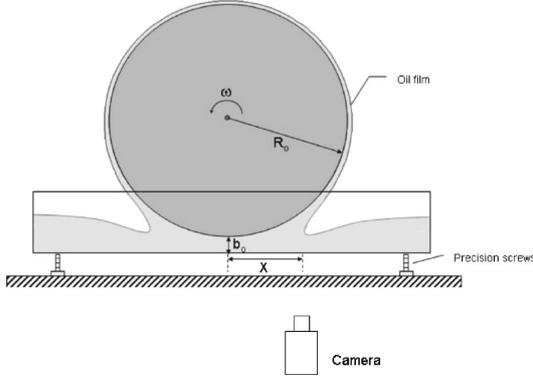


FIG. 1. Sketch of the experimental setup. The cylinder was adjusted at three distances to the plate,  $b_o=300\ \mu\text{m}$  ( $\omega_c=2.53\ \text{rad/s}$ ),  $b_o=400\ \mu\text{m}$  ( $\omega_c=4.8\ \text{rad/s}$ ), and  $b_o=800\ \mu\text{m}$  ( $\omega_c=11.58\ \text{rad/s}$ ).

precision screws. The cylinder has a radius of 31.3 mm, length of 250.0 mm and eccentricity,  $\epsilon=10\ \mu\text{m}$ . In the experiments, variations in the control parameter were achieved by changing the angular frequency of the cylinder at three different distances ( $b_o$ ) between the cylinder and the plate. Liquid fluid used is a silicon oil (Dow Corning 200) of viscosity,  $\mu$ , equal to  $4.80 \times 10^{-2}\ \text{K g m}^{-1}\ \text{s}^{-1}$  and having surface tension,  $T$ , equal to  $2.08 \times 10^{-2}\ \text{N m}^{-1}$ , both specified at  $25\ ^\circ\text{C}$ . For better stability of these parameters, room temperature was constantly maintained within  $\pm 0.5\ ^\circ\text{C}$ .

For a given set of parameters, several sequences of images of the interface were obtained by using an asynchronous mode digital CCD camera. This technique allows a better compromise between pixel window and scan rate, with maximum time resolution. In all experiments we set the frame rate to  $16.4\ \text{s}^{-1}$ . Interface motion was recorded during a time interval covering not less than 50 times the period of one turn. A spatial resolution of  $68\ \mu\text{m}$  was adjusted in order to permit a spatial window sufficient for observation of the interface instability. Acquired digital images were processed by using a computer program we developed employing edge detection techniques. The arithmetic mean of pixel data extracted from a specific frame was used to define interface position. We also wrote a computer code that calculated the Fourier transform of the obtained interface positions in time. The range of angular frequencies of the rotating cylinder was chosen in order to get a clear observation of the interface dynamics at both pre- and post-bifurcation branches. A typical image of the interface in these two cases is displayed in Fig. 2. In the prebifurcation branch, shown in Fig. 2(a), the interface is in a state that possesses high spatial symmetry, presenting the observed straight morphology. In Fig. 2(b), the interface is observed in a lower spatial symmetry branch, presenting a periodic morphology. For a given distance  $b_o$  and angular frequency,  $\omega$ , the interface experiences a recoil due to wetting effects as well as to the hydrodynamic equilibrium involving pressure and velocity fields. In order to determine specific parameters for this system, the mean position of the interface obtained from an average of its pixel



FIG. 2. Images of the straight morphology (a) observed in the prebifurcation branch and pattern-forming (b) present in the post-bifurcation branch. In both images the air is located above the interface and silicon oil is located below the interface. Experiment running at  $b_o=400\ \mu\text{m}$  and  $\omega=4.85\ \text{rad/s}$  (a) and  $\omega=5.39\ \text{rad/s}$  (b).

position was plotted against the angular frequency of the cylinder, for a given distance  $b_o$ , as shown in Fig. 3. This may be compared to a steady hydrodynamic model for this experiment developed in Ref. [14], which predicts the interface position in the straight morphology. It gives the interface recoil as a function of the angular frequency of the rotating cylinder as

$$x = \sqrt{2R_o b_o \left( \frac{2}{3F(\text{Ca})} - 1 \right)}, \quad (1)$$

where  $R_o$  is the cylinder radius and  $\text{Ca}$  is the capillarity number ( $\text{Ca} = \frac{\rho V}{T}$ ). The function  $F(\text{Ca})$  was used originally by Tabeling *et al.* [18] for the planar-to-planar geometry in order to describe wetting effects at the plates and it is given by

$$F(\text{Ca}) = c(1 - \exp\{-[d\mu R_o(\omega - \omega_o)/T]^{2/3}\}).$$

Except for very low frequencies, we obtained a good fit of Eq. (1) to our data of interface recoil. Typical data, for  $b_o=300\ \mu\text{m}$ , is shown in Fig. 3. Even beyond the bifurcation point, Eq. (1) adjusts perfectly well to the mean interface position. At very low frequencies, insufficient wetting affects the establishment of a steady flow close to the cylinder and prevents the use of this hydrodynamic model. The parameters obtained are consistent with reported empirical values

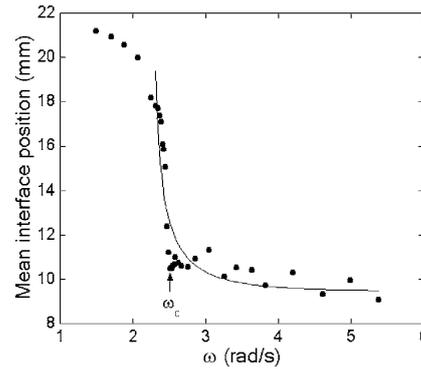


FIG. 3. Measured interface recoil ( $\bullet$ ) at various angular frequency for  $b_o=300\ \mu\text{m}$ . Curve (line) adjusted by using the steady approximation [Eq. (1)]. The critical angular frequency is  $\omega_c$ . Obtained values for parameters of the function  $F(\text{Ca})$  at various distances  $b_o$  are  $b_o=300\ \mu\text{m}$  ( $c=0.12$  and  $d=14.1$ ),  $b_o=400\ \mu\text{m}$  ( $c=0.16$  and  $d=3.1$ ) and  $b_o=800\ \mu\text{m}$  ( $c=0.20$  and  $d=2.1$ ).

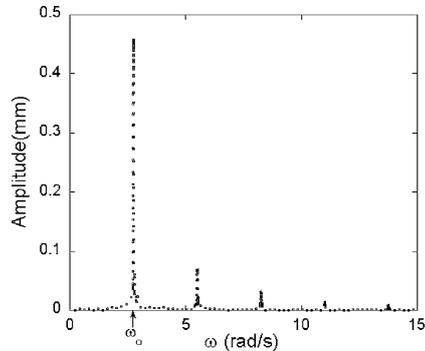


FIG. 4. Fourier spectrum of the interface oscillations. The presence of a strong peak at the angular frequency of the cylinder ( $\omega_0$ ) reveals that the eccentricity is the cause of observed interface oscillations. Data for  $b_o=300 \mu\text{m}$  and  $\omega=2.53 \text{ rad/s}$ .

and with the prescribed nominal values of  $b_o$  used in each experiment.

Due to cylinder eccentricity the distances  $b_o$  and the radius  $R_o$  vary in time as

$$\begin{aligned} b_o(t) &= b_o - \epsilon \sin(\omega t), \\ R_o(t) &= R_o + \epsilon \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (2)$$

This eccentricity changes pressure and velocity fields of the fluid close to the cylinder. Consequently, the interface position oscillates at the same frequency of the cylinder. The effect is captured by the temporal Fourier transform of the mean interface position, which shows a strong peak at the angular frequency of the cylinder, as displayed in Fig. 4. The peak-to-peak intensity of this oscillation ( $\sim 920 \mu\text{m}$ ) is bigger than the eccentricity by two orders of magnitude. In order to characterize and analyze this phenomenon, careful measurements of the amplitude of this fundamental mode in both pre- and post-bifurcation branches were made. The data obtained shows that this amplitude grows critically as the bifurcation approaches. This is shown on the left-hand side of Fig. 5, for  $b_o=300 \mu\text{m}$ , where the Fourier amplitude is displayed as a function of the reduced control parameter,

$$\xi = \frac{\omega - \omega_c}{\omega_c}.$$

After the onset of periodic pattern mean interface position was still calculated as the arithmetic mean of extracted pixel data. The observations showed that the same oscillatory mode for this mean interface position still persisted. However, for large values of the control parameter, when the unstable spatial modes are nonlinear, the oscillations get suppressed. This may indicate that curvature effects could be important as a stabilizing mechanism of these oscillations. The overall effect, encompassing both pre- and post-bifurcation regions is displayed in Fig. 5. Although obtained in a different context, it is worthwhile to stress that a profile, similar to the one we observed in the prebifurcation branch,

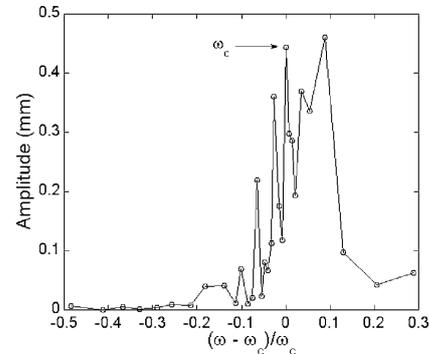


FIG. 5. Fundamental Fourier mode of the interface oscillations measured at different angular frequencies for  $b_o=300 \mu\text{m}$ . Lines are for a guide to the eye only and  $\omega_c$  is the critical angular frequency.

was reported by Martinerie *et al.* [6] and by Lehnertz and Elger [7], both for EEG data, showing the existence of precursors in epileptic seizures. These precursors were verified in nonlinear time-series analysis of EEG signal in different brain states but no detailed characterization was reported. The main feature of this analysis is centered on the amplification of a relevant variable before a bifurcation happens. This result is considered as a precursor for the type of phenomenon analyzed. The kind of phenomena studied in our work has a completely different origin since it comes from a deterministic perturbation in a controllable experiment. However, the profile of both curves, showing amplification of a relevant experimental variable prior to a bifurcation is an indication that really we observed a precursor in our experiments. In fact, for all values of  $b_o$ , strong variations of the fundamental Fourier peak were observed for small values of the control parameter at both pre- and post-bifurcation points. In order to obtain the profile of this set of data we applied a smoothing procedure by replacing each experimental point by an average of five adjacent points centered on the point under observation. This mean filter [19] cuts high frequency Fourier modes of the curve. The criteria used to select the number of adjacent points entered in the filter is the visual length of the fluctuations (the Nyquist frequency), which in almost all cases covers no more than three points. This determines the filtering window, measured as 2 times this length. The resulting effect of this mean filter is a reduction in the intensity variation between one experimental data and its adjacent neighbors. So, with this procedure it was possible to observe that an evident trend (locally monotonic) is always present in these profiles. The resulting curves are shown in Fig. 6 for different values of  $b_o$ . Notice that minimum amplitude of the fundamental Fourier mode may be smaller than one-half of the spatial resolution because some power is delivered to its harmonics.

Interesting features, concerning the character of the critical approach to the bifurcation point, result from the analysis of these filtered data. In the prebifurcation regime, the curves fit very well to a power law of the type

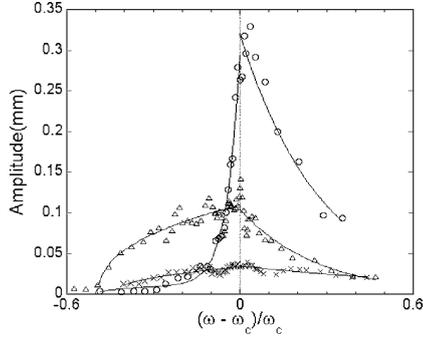


FIG. 6. Filtered data of the fundamental Fourier mode adjusted to a power law in the prebifurcation branch and to an exponential in the post-bifurcation branch. [( $\circ$ )  $b_o=300 \mu\text{m}$ ; ( $\Delta$ )  $b_o=400 \mu\text{m}$ ; ( $\times$ )  $b_o=800 \mu\text{m}$ ].

$$A = \alpha(\xi - \xi_a)^\beta. \quad (3)$$

After the bifurcation, this trend still persists in a small range of the control parameter. Then, it experiences an exponential decrease until the oscillations come close to the initial values observed in large negative values of the control parameter. The best fit between Eq. (3) and each experiment is depicted in Fig. 6 and the set of adjusted parameters is displayed in Table I. As already noticed, it is clear that the amplitude of interface oscillations is bigger than the eccentricity. But, what is more interesting and clearly evident is the nonanalytical character of the overall amplitude profile close to the bifurcation, where a cuspid is present and defined by a transition of the power law to an exponential trend. The existence of this cuspid as well as the persistent amplification after the bifurcation has been reported by Bryant *et al.* [20] in the study of Josephson junction parametric amplifiers, where a supercritical bifurcation is also observed. Moreover, in a large interval of the control parameter, located inside of the prebifurcation branch, two different types of critical approach to the bifurcation point were observed. For the largest value of  $b_o$ , the critical exponent  $\beta$  is smaller than one. In order to adjust data corresponding to the smallest  $b_o$ , combination of two functions like those in Eq. (3) was used. In one of them we used the same parameters as before. It describes an initial low amplitude trend. The other one, describes the strong amplification observed close to the bifurcation point,

TABLE I. Values of parameters obtained by adjusting a power law [Eq. (3)] to experimental data. The errors for exponent  $\beta$  and correlation coefficient  $R$  are shown. Values labeled with an asterisk (\*) are maintained constant in the fitting procedure.

Distance $b_o(\mu\text{m})$	$\alpha$	$\xi_a$	$\beta$	$R$
800	0.05	-0.44	$0.45 \pm 0.14$	0.88
400	0.15	-0.49	$0.42 \pm 0.05$	0.90
300	0.25	-1.01	$21.46 \pm 1.21$	0.99
	$0.02^*$	$-0.50^*$	$0.43^*$	

presenting an exponent as large as 21 (see Table I). It seems that both cases are also pictured for the intermediate value of  $b_o=400 \mu\text{m}$  in which a climbing cuspid, located very close to the bifurcation point, seems to be superimposed over the extended and flat profile dominant in the prebifurcation branch. Another important feature, clear from the type of power law used in Eq. (3), is the existence of a point, defined by the parameter  $\xi_a$  (the “anticipating” control parameter), above which the interface becomes oscillatory. Consequently, a closed interval of the control parameter  $\xi \in [\xi_a, \xi_c]$  located inside of the high symmetry branch and adjacent to the bifurcation point may be defined. The existence of this interval, the “precursor branch,” determines whether the dynamics of the homogenous state is sensitive to the bifurcation or not. Thus, a new branch has been described possessing an entirely different origin compared to usual bifurcation points obtained from linear stability analysis, which shows the emergence of the pattern formation.

It is now important to determine if the available theoretical models may account for the existence of this precursor branch as consequence of a trivial response of the system to the imposed perturbation. In this respect, the immediate effect demanding explanation is the observed hydrodynamic gain, defined by the ratio of the peak-to-peak interface oscillation to eccentricity. A likely explanation for this effect could be a passive adjustment of the hydrodynamic fields, calculated by the quasisteady approximation to eccentricity. In order to check this possibility, we introduced in Eq. (1) the perturbation described by Eqs. (2) and calculated the corresponding maximum variation range of the interface position. The resulting equation is

$$\Delta x = \epsilon \sqrt{\frac{R_o}{b_o} \left( \frac{2}{3F(\text{Ca})} - 1 \right)}. \quad (4)$$

It was not included in this formula the variations in the capillarity number induced by eccentricity because their effect on the function  $F(\text{Ca})$  is small (about 0.5%). The formula displayed in Eq. (4) correctly predicts an oscillating interface at the same frequency as the rotating cylinder and a hydrodynamic gain given by  $\sqrt{\frac{R_o}{b_o}}$ , which qualitatively explains the measured values obtained. However, it is unable to describe the observed prebifurcation trend of the oscillations, for it predicts a decreasing peak intensity given as a function of the cylinder frequency. This indicates that the perturbation couples to the hydrodynamic fields through effects that are not trivial. The possibility of a Hopf bifurcation at zero wave vector  $\mathbf{k}$  must also be considered. However, the growth rate of spatial modes, obtained from the linear stability analysis of interface morphology [14], does not predict imaginary values for any  $\mathbf{k}$ . Consequently, a Hopf bifurcation at  $\mathbf{k}=\mathbf{0}$  may not exist in the prebifurcation branch. Therefore, the absence of a Hopf bifurcation and the failure of the steady hydrodynamic theory in explaining the perturbed prebifurcation profile imply that the oscillations of the interface are determined by the whole set of dynamical interactions in the nonequilibrium thermodynamic fields and variables relevant to the experiment. This conclusion supports our argument that eccentricity induces dynamical effects in the prebifurca-

tion branch, which manifest in the interface dynamics as critical prebifurcation oscillations of interface position. Therefore, a precursor was in fact observed. Its existence is hidden in the steady theory of interface position when calculated by using the geometry of a perfect cylinder, consistent with any reasonable values of  $b_o$  and  $R_o$ . It may account only for constant values of these variables but may not give support to any additional dynamics induced by a time-dependent perturbation generated by eccentricity.

In conclusion, the present work reports the observation of a type of precursor, induced by a deterministic time-dependent perturbation acting over a high symmetry branch, while preserving the pattern structure of this branch. In this sense, a time-domain pattern signals in advance the existence of a post-bifurcation branch presenting a spatial pattern. So far, reported precursors, mainly those excited by an external noise source, generate prebifurcation spurious spectra which signals the existence of post-bifurcation modes. In the

present case, it seems that no information concerning the post-bifurcation state is present, at least in the form of a direct determination of the selected pattern. The immediate information concerns only the emergence of a bifurcation. However, the existence of an anticipating control parameter and critical exponents indicate the action of hidden dynamics, not accounted for in the linear stability analysis of the interface morphology. Thus, the verification that the amplitude of the prebifurcation oscillations we observed, follows a power law, might indicate that a universality class for this phenomena exists. This observation justifies further studies on the detection of precursory activities and the need of precise monitoring close-to-bifurcations regimes in complex systems.

This work was partially supported by Brazilian Agencies: CNPq and Finep-Pronex.

- 
- [1] K. Wiesenfeld, *J. Stat. Phys.* **38**, 1071 (1985).  
 [2] *Evaluation of Proposed Earthquake Precursors*, edited by M. Wyss (American Geophysical Union, Washington, DC, 1991).  
 [3] M. Wyss, *Pure Appl. Geophys.* **149**, 3 (1997).  
 [4] K. Eftaxias, P. Kaporis, J. Polygiannakis, A. Peratzakis, J. Kopanas, G. Antonopoulos, and D. Rigas, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **3**, 217 (2003).  
 [5] P. E. McSharry, L. A. Smith, L. Tarassenko, J. Martinerie, M. Le Van Quyen, M. Baulac, and B. Renault, *Nat. Med.* **9**, 241 (2003).  
 [6] J. Martinerie, C. Adam, M. Le Van Quyen, M. Baulac, S. Clemenceau, B. Renault, and F. J. Varela, *Nat. Med.* **4**, 1173 (1998).  
 [7] K. Lehnertz and C. E. Elger, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5019 (1998).  
 [8] C. Jeffries and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A* **31**, 1077 (1985).  
 [9] H. Lamela, S. Prez, and G. Carpintero, *Opt. Lett.* **26**, 69 (2001).  
 [10] K. Wiesenfeld and B. McNamara, *Phys. Rev. A* **33**, 629 (1986).  
 [11] K. Wiesenfeld and N. F. Pedersen, *Phys. Rev. A* **36**, 1440 (1987).  
 [12] E. D. Surovyatkina, *Phys. Lett. A* **329**, 169 (2004).  
 [13] Y. A. Kravtsov and E. D. Surovyatkina, *Phys. Lett. A* **319**, 348 (2003).  
 [14] V. Hakim, M. Rabaud, H. Thomé, and Y. Couder, in *Proceedings of a NATO Advanced Research Workshop: New Trends in Nonlinear Dynamics and Pattern Forming Phenomena: The Geometry of Nonequilibrium*, edited by P. Couillet and P. Huerre (Plenum, New York, 1990), p. 237.  
 [15] E. Pitts and J. Greiller, *J. Fluid Mech.* **11**, 33 (1961).  
 [16] M. Rabaud, S. Michalland, and Y. Couder, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 184 (1990).  
 [17] H. Z. Cummins, L. Fourtune, and M. Rabaud, *Phys. Rev. E* **47**, 1727 (1993).  
 [18] P. Tabeling, G. Zocchi, and A. Libchaber, *J. Fluid Mech.* **177**, 67 (1987).  
 [19] R. C. Gonzales and R. E. Woods, *Digital Image Processing*, 2nd ed. (Pearson Education, Delhi, 2002).  
 [20] P. Bryant, K. Wiesenfeld, and B. McNamara, *J. Appl. Phys.* **62**, 2898 (1987).

## Pattern dynamics in a perturbed printer's instability experiment

R. L. Santos,\* U. Agero, and J. M. A. Figueiredo†  
*Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais,  
 Caixa Postal 702, Belo Horizonte, CEP 31.270-901, Brazil.*  
 (Dated: May 29, 2008)

We report experimental results concerning observation of a pattern forming system, subject to directional viscous fingering (printer's instability). This system was excited by a time-dependent, periodic perturbation. A variety of spatio-temporal effects was observed, including pattern transient dynamics, wave vector selection and morphological transitions. Detailed measurement of pattern shape and its associated Fourier modes assured the detection of a crossover between different regimes of the pattern evolution.

PACS numbers: 47.54.-r, 47.20.Ky, 47.20.Hw, 05.70.Ln

### I. INTRODUCTION

An important case of pattern formation in nonequilibrium thermodynamic systems refers to one-dimensional cellular patterns. Although this kind of structure presents an inherent simplicity, it exhibits a large variety of dynamical regimes as shown by Coulet and Iooss [1], who used symmetry arguments to report the existence of ten generic instabilities in one-dimensional periodic patterns. These structures are observed, for example, in a fluid-fluid interface subject to directional viscous fingering (DVF). Several configurations of actual systems fit this class of hydrodynamic model, being printing machines, in which a liquid is forced to flow into the gap between a rotating cylinder and a plate, a case in point. Instabilities in the liquid-air interface in this system were originally described by Pitts and Greiller [2] and by Taylor [3]. Pattern formation in a different configuration consisting of two eccentric rotating cylinders was also reported by Rabaud *et al.* [4–6], who investigated some processes that may affect symmetry properties of the observed spatial patterns. Studies concerning the linear stability analysis of the DVF instability were performed by Hakim *et al.* [7]. Secondary instabilities were reported by Pan and Bruyn [8, 9], Michalland *et al.* [10] and phase space domains were reported by Cummins *et al.* [11]. Michalland and Rabaud [12] also described the features of transition to chaos in DVF, and Fourtune *et al.* [13] demonstrated the existence of phase diffusion effects for this system. Time-response of a system using the same configuration as in Ref. [7] was reported by Santos and Figueiredo [14], who excited the hydrodynamic fields of this system by an externally imposed periodic perturbation, whose effect on the interface position was observed, at both pre and post-bifurcation regimes.

In this work we report studies on the dynamical properties of pattern formation in a DVF system, generated under the same experimental conditions used in Ref. [14].

We show that the imposed perturbation may affect the evolution of pattern modes and may persist even when there is a saturation of mode amplitudes. Our observations also indicate that pattern morphology is associated with wave vector selection process. This work is organized as follows. In Sec. II we present the experimental setup, the range of parameters and the kind of perturbation used in the experiments, as well as a brief discussion of precursor modes, already reported in Ref. [14]. Section III focuses on the mutual influence of pattern morphology and the precursor modes. In Sec. IV we present results concerning the evolution of spatial modes in both, the transient and saturation regimes, and effects relating morphology and pattern selection dynamics.

### II. THE EXPERIMENTAL SETUP

For this experiment, a cylindrical stainless steel shaft (with measured roughness  $\sim 1$  micron), driven by a precision DC motor and mounted on aligned bearings, was designed. The cylinder rotates immersed in a flat reservoir containing silicon oil. Parallelism between the cylinder axis and the horizontal base of the reservoir is adjusted by supporting precision screws so as to ensure that there is a gap between this cylinder and the base. A sketch of the experimental setup is shown in Fig. 1. The cylinder is  $250.0\text{mm}$  long, has an average radius value ( $R_o$ ) of  $31.3\text{mm}$  and an eccentricity ( $\epsilon$ ) of  $\simeq 10\mu\text{m}$ . As shown in Table I three different values for the mean gap distance ( $b_o$ ) between the cylinder and the plate were adjusted:  $300\mu\text{m}$ ,  $400\mu\text{m}$  and  $800\mu\text{m}$ . This table also displays the range of angular frequencies ( $\omega$ ) of the cylinder used in the experiments. Values of the critical angular frequency measured at the bifurcation is shown in the third column of this table.

Silicon oil (Dow Corning 200) with viscosity ( $\mu$ ) equal to  $4.80 \times 10^{-2} \text{Kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$  and surface tension ( $T$ ) equal to  $2.08 \times 10^{-2} \text{N m}^{-1}$ , both specified at  $25^\circ\text{C}$ , was used as the liquid fluid in our experiments. For better stability of these parameters, room temperature was constantly monitored within  $\pm 0.5^\circ\text{C}$ . Since the axis-to-base distance is constant, eccentricity introduces a time-

\*Electronic address: robson@fisica.ufmg.br

†Electronic address: josef@fisica.ufmg.br

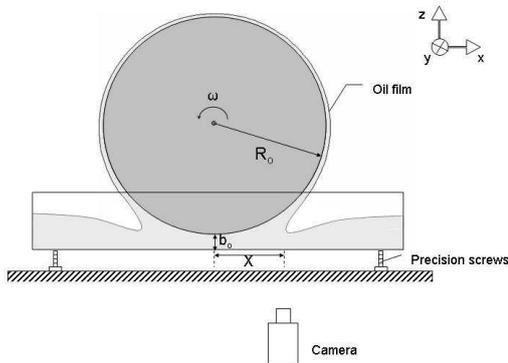


FIG. 1: Sketch of the experimental setup. The cylinder was adjusted at three distances to the plate,  $b_o = 300\mu\text{m}$ ,  $b_o = 400\mu\text{m}$  and  $b_o = 800\mu\text{m}$ .

TABLE I: Values of the parameters used in the experimental setup. It is also shown values of the critical velocity ( $\omega_c$ ) for each set of experiments.

Distance $b_o(\mu\text{m})$	range of $\omega(\text{rad s}^{-1})$	$\omega_c(\text{rad s}^{-1})$
300	1.30-5.38	2.53
400	1.10-8.71	4.87
800	2.61-16.67	11.58

dependence on gap values given by

$$b(t) = b_o - \epsilon \sin(\omega t) \quad (1)$$

which acts as an external perturbation imposed on the system.

A clear meniscus located at the oil-air (open atmosphere) interface was observed with a 648(H) x 484(V) asynchronous mode digital CCD camera at a frame rate of  $17\text{s}^{-1}$  and spatial resolution of  $68\mu\text{m}/\text{pixel}$ . As shown in Fig. 2 a high contrast image of the interface was obtained. Interface shape is depicted mostly as a thin strip, whose profile was obtained from a computer program we developed using edge detection techniques. Its output delivers, for a given horizontal position  $y$  (see Fig. 2), the coordinate  $f(y)$  of maximum contrast. In order to follow the dynamics of the interface we have obtained, for each value of the mean distance  $b_o$  and each adjusted angular frequency, a sequence of images. At the critical frequency  $\omega_c$  the straight morphology becomes unstable and a bifurcation happens. The system shifts to a new morphological state presenting a periodic pattern as shown in the Fig. 2-b. Interface data were treated using a numerical Fourier analysis. We did not make use of FFT algorithms in treating the spatial modes. We wrote our own Fourier transform routine (a DFT algorithm [15]) in such a way that the diffraction of the observation window was taken into account. This way, to be consistent with uncertainty



FIG. 2: Images of the straight(a) and periodic(b) morphologies of the interface. In both images the open atmosphere is located above the interface and silicon oil is located below the interface. Experiments set for  $b_o = 400\mu\text{m}$  and  $\omega = 4.85\text{rad/s}$  (a) and  $\omega = 5.39\text{rad/s}$  (b).

induced by this window, wave vector resolution was calculated with much more precision ( $\delta k = 0.025\text{mm}^{-1}$ ) than that defined by the normal modes of the window (used in FFT algorithms). Afterwards we checked that Parseval's theorem is satisfied. As a final procedure, our routine was applied to standard mono and multi mode patterns, artificially generated with different amplitudes and we checked again that its output was calibrated.

The range of angular frequencies of the rotating cylinder was chosen in order to get information concerning interface dynamics at both pre and post-bifurcation regimes. For better comparison of the different experiments we have defined a reduced control parameter for this system as

$$\xi \equiv \frac{\omega - \omega_c}{\omega_c}. \quad (2)$$

As the cylinder begins to turn, pressure and velocity fields are established in this system. Due to competitive forces between these fields and also to wetting and surface tension effects, the interface experiences a recoil. A steady hydrodynamic model was developed by Hakim *et al.* [7] that predicts the interface position  $x$  (see Fig. 1) in the straight morphology (the pre-bifurcation branch) as a function of the control parameter. As made in the previous work (Ref. [14]), we fit our recoil data to Eq. 10 of the Ref. [7] in order to get parameters of the capillarity function  $F(\text{Ca})$ . In the present work, these values will be used when we compare our data of pattern growth rates to linear stability analysis predictions.

The existent eccentricity introduces a time-dependent variation on gap values as described by Eq. 1. Thus it is expected that recoil values should be influenced by this perturbation. In fact, we have observed [14] an oscillatory motion of the mean value of interface profile  $f(y)$ . Amplitude values measured for the fundamental Fourier mode of these oscillations as a function of the control parameter are shown in Fig. 3. It confirmed the existence of this phenomenon in all the experiments performed, although it was less pronounced when the distance  $b_o$  became larger. It is clear from these data that mode amplification is observed as the control parameter approaches zero (the bifurcation point). After this point, the amplitude of the oscillations, still measured as the mean interface profile, decreases to the low values observed at low velocities (larger negative control parameter). These

results (Ref. [14]) showed that those amplified modes follow a power law in the pre-bifurcation branch and an exponential decreasing in the post-bifurcation branch determining the existence of a cuspid at the bifurcation point. As discussed in Ref. [14], so far there is no sim-

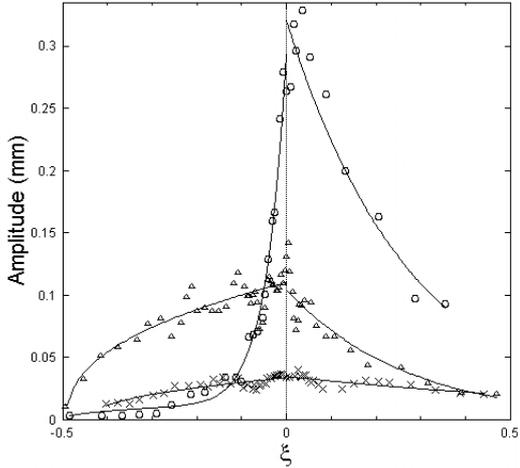


FIG. 3: Amplitude of the fundamental Fourier mode ( $\circ$ ) for  $b_o = 300\mu m$ , ( $\Delta$ ) for  $b_o = 400\mu m$  and ( $\times$ ) for  $b_o = 800\mu m$  adjusted to a power law in the prebifurcation branch and to an exponential in the post bifurcation branch (Ref. [14]).

ple explanation for these effects. It is evident, however, that they reveal the existence of a new phenomenon in this pattern-forming system, one that is not present in the unperturbed case. This kind of instability is known as precursor. Its importance has been verified in other contexts as earthquakes [16, 17] and epileptic seizures [18, 19]. In fact, theoretical results found by Wiesenfeld [20], show the existence of bifurcations signaled by precursors. In the next sections we report our observations concerning the effects of the perturbed interface on the emergency of pattern formation.

### III. MORPHOLOGICAL EFFECTS IN THE POST-BIFURCATION BRANCH

At the bifurcation point, the highly symmetrical morphology of the straight interface spontaneously breaks into a periodic pattern. In our experiment, we were able to observe how the pattern evolved along all the stages of both transient and saturation regimes. In order to study this phenomenon, spatial modes of the interface profile were obtained from a numerical Fourier transform of those data, allowing spectra to be followed in time. Observation of these modes revealed that their amplitude oscillate with the same angular frequency as the cylinder. Time dependence of this amplitude and the mean inter-

face position for a typical experiment is depicted in Fig. 4, which clearly shows that eccentricity affects the pattern formed. Close to the bifurcation, at low positive values of

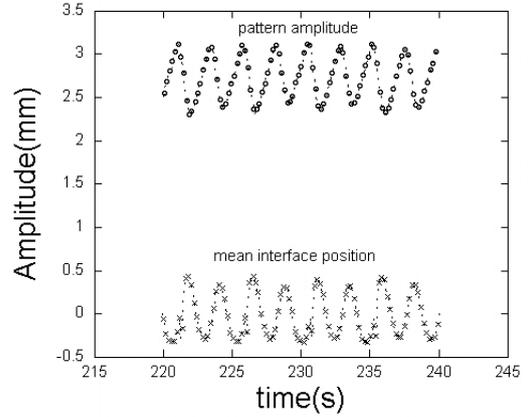


FIG. 4: Time response of this system subject to a deterministic perturbation. This picture shows time oscillations of pattern amplitude (upper) and mean interface position (lower) for an experiment adjusted for  $b_o = 300\mu m$  and  $\xi = 0.05$ .

$\xi$ , we observed oscillations with larger amplitude in pattern valley (small  $x$  in the Fig. 1) than in its crest. For larger values of  $\xi$ , these oscillations became more pronounced in crests than in valleys. It appears that this effect might be responsible for the observed suppression of the mean interface position oscillations displayed in the right side of the Fig. 3.

In order to test this possibility, we made an inspection in the shape of the pattern as the control parameter varied. In fact, pattern morphology (see Fig. 5) has different aspects for each value of the control parameter. To do this, we first calculated the mean interface profile.

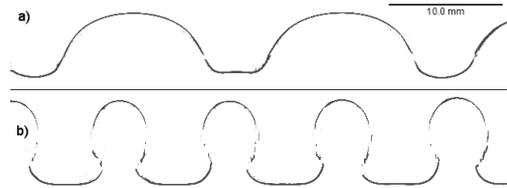


FIG. 5: The asymmetrical morphologies presented by periodic spatial patterns. In (a) is shown one pattern with a larger crest compared to its valley and in (b) is shown another pattern having a valley larger than its crest. Both pictures refer to  $b_o = 300\mu m$  and  $\xi = 0.05$  (a) and  $\xi = 0.29$  (b).

This defines unambiguously valley and crest regions of the pattern. Then we got valley and crest widths measured at pattern half height. From these measurements,

pattern aspect ratio, defined as

$$\Gamma = \frac{W_+ - W_-}{W_+ + W_-} \quad (3)$$

was calculated. Here  $W_+$  is the average crest width and  $W_-$  is the average valley width. These results are shown in Fig. 6, which displays plotted values of  $\Gamma$  against the control parameter for all the distances  $b_o$  used. In the same frame, peak values of the mean interface position oscillations are also shown. In the two most critical cases,

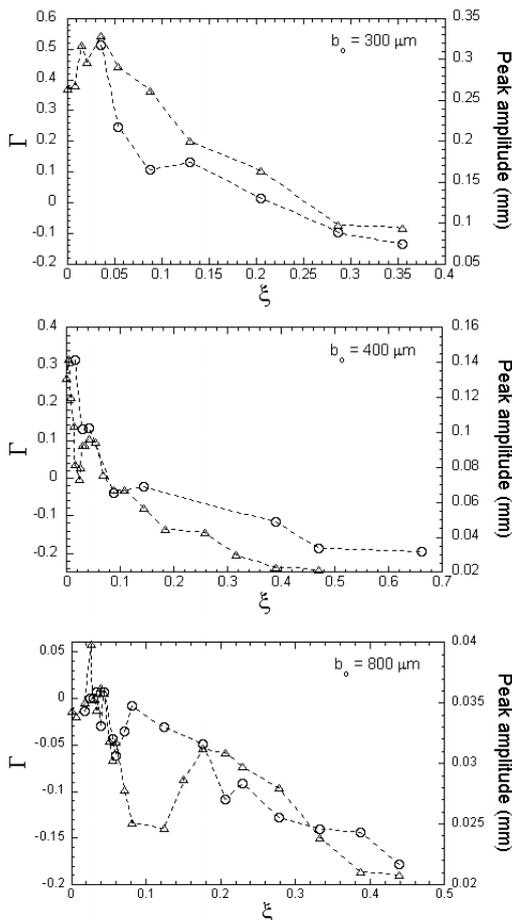


FIG. 6: Values of the aspect ratio ( $\circ$ ) obtained by using Eq. 3 and peak amplitude ( $\Delta$ ) of the mean interface position oscillations (the right side of the Fig. 3) against the control parameter. Lines are for a guide to the eye only.

( $b_o = 300\mu\text{m}$  and  $b_o = 400\mu\text{m}$ ), a change in the sign of  $\Gamma$  was observed. In both cases,  $\Gamma$  is positive for low (positive) values of the control parameter, meaning that crest

width is larger than valley width. For large enough values of the control parameter, close to  $\sim 0.10 - 0.20$ ,  $\Gamma$  becomes negative. For the largest distance  $b_o$ ,  $\Gamma$  is always negative regardless of cylinder velocity. It was observed that the change in the character of pattern morphology (the sign of  $\Gamma$ ) roughly coincides with the strong suppression of the oscillatory modes induced by the imposed time-dependent perturbation, thus confirming the existence of joint influence of these different phenomena. These results suggest that mode suppression in time domain could be related to curvature effects which necessarily rule morphological changes. Similar results were reported by Rabaud *et al.* [21] in a Saffman-Taylor instability. They showed that lateral sidebranches were generated in a finger as a response of the system due to application of an external periodic excitation. Effects of this perturbation were amplified at low frequency values and suppressed for larger ones. They argued that amplitude damping at short wavelengths are caused by surface tension effects. Although no direct relation between the printer's instability and the Saffman-Taylor problem has been developed yet, the results of Rabaud *et al.*[21] reinforce our argument that surface tension could be crucial for the observed suppression of the oscillations we observed at higher frequencies.

#### IV. PATTERN SELECTION DYNAMICS

##### A. Transient regime of pattern growth

Pattern dynamics were observed by following in time the evolution of the spatial spectra. Time dependence of the wave vector with the highest amplitude clearly shows that a transient regime is established soon after the cylinder is turned on, indicating that there exists a mechanism of pattern selection in this system, even in the early stage of pattern evolution. A typical data showing this process for an experiment with  $b_o = 300\mu\text{m}$  and  $\xi = 0.21$  is displayed in Fig. 7. Once the selected pattern is known, it is possible to monitor in time the evolution of its amplitude. As a whole, our data suggest that the initial evolution of the pattern, in the transient regime, shows an universal profile, common to all cylinder frequencies and mean distance  $b_o$ . Then the amplitude tends to stabilize but may present in this regime a rich dynamics. In fact, an after-transient richness in the pattern dynamics of this system has been reported in several works [4–6, 8, 9, 11]. We show in Fig. 8 data displaying the simplest evolving pattern, presenting a quasi-stationary amplitude after the initial transient regime.

The linear stability analysis [7] for this problem predicts an exponential growth for the unstable spatial modes. The evolution that appears later, in the early stages of the nonlinear regime, may be described by a weak nonlinear analysis (WNL). No theory has been developed for this problem in this regime yet. For some pattern-forming problems like directional solidification

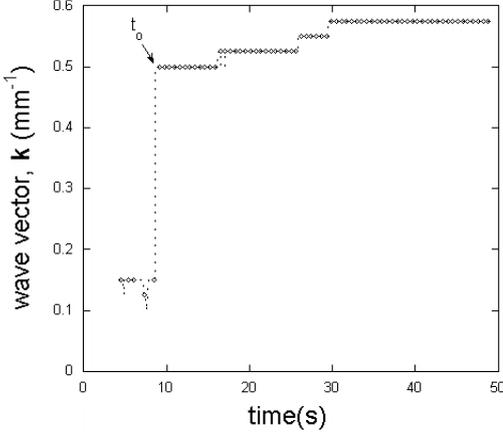


FIG. 7:  $\mathbf{k}$ -mode evolution of spatial pattern. In the time  $t_o$  the wave vector referent to the emerging pattern, for  $b_o = 300\mu\text{m}$  and  $\xi = 0.21$ , appears.

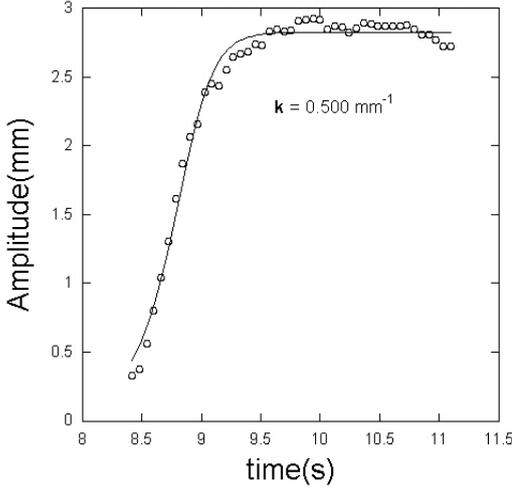


FIG. 8: Spatial mode evolution for the initial history of spatial pattern mode with wave vector  $\mathbf{k} = 0.500\text{mm}^{-1}$  for  $b_o = 300\mu\text{m}$  and  $\xi = 0.21$ .

[22, 23] and shallow wake flows [24], the WNL predicts a Ginzburg-Landau equation (GLE) for modes with wave vector  $\mathbf{k}$ , valid for sufficiently small values of the control parameter

$$\frac{dA_k}{dt} = \lambda(k)A_k - \sigma(k)|A_k|^2A_k \quad (4)$$

where  $\lambda(k)$  is the linear growth rate and  $\sigma(k)$  the weak nonlinear coefficient. This equation admits a closed ana-

lytical solution given by

$$A_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{\lambda} - \left(\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{1}{A_o^2}\right) e^{-2\lambda t}}} \quad (5)$$

which describes the transient regime of pattern evolution. Direct observation of the WNL in the context of pattern formation was made by Figueiredo *et al.* [25] on the directional growing of a nematic-isotropic interface of a thermotropic liquid crystal. They were able to obtain both parameters ( $\lambda$  and  $\sigma$ ) by adjusting their experimental curves to Eq. 5. The same procedure was applied in this work, although it is not clear that the Eq. 4 is fully satisfied considering the existence of eccentricity effects in our system.

We have verified that our data fit very well to the solution of GLE in the transient regime. However, the obtained values for the linear growth rate may include some perturbation effects. For the cases  $b_o = 300\mu\text{m}$  and  $b_o = 400\mu\text{m}$ , and at large velocities, the observed GLE growth rates are greater than cylinder frequencies. Thus, pattern dynamics is faster than the characteristic time of the perturbation. This justifies for a good agreement with the transient regime of the GLE. For the less unstable case,  $b_o = 800\mu\text{m}$ , we got in almost all cases, a GLE growth rate smaller than cylinder frequency but still presenting a satisfactory fit to the GLE transient regime. This effect is also expected because, as shown in Fig. 3, eccentricity has a small influence on the post-bifurcation branch for this value of  $b_o$ . We solved numerically a modified version of GLE, given by

$$\frac{dA_k}{dt} = [\lambda(k) + \epsilon \sin(\omega t)]A_k - \sigma(k)|A_k|^2A_k \quad (6)$$

and assumed as a candidate to describe the effects of eccentricity on pattern dynamics. Results of these simulations confirm our observations in all distances  $b_o$  configured in the experiments, showing the absence of oscillations when the pattern is in its growth phase. Thus it appears that the observed transient regime is compatible with the imposed time-dependent perturbation. Adjusted values for the linear growth rate,  $\lambda_{GL}$ , obtained from fitting our data to the GLE is plotted on Fig. 9. Our attempt to fit these values to the predicted ones by the linear stability analysis performed by Hakim *et al.* failed to obtain realistic parameters for the experiment, even for very low values of the control parameter, where this analysis is expected to be valid. Nevertheless, a concave profile for the dispersion relation, predicted by this linear theory was reached for all distances  $b_o$ . This may indicate that the perturbation really affected growth rates values still sustaining the overall transient profile predicted by the GLE.

In the saturated regime, where a GLE approach predicts a stationary pattern, we have observed an oscillatory amplitude (with the same period as the cylinder) superimposed to a constant saturation value, as displayed

in Fig. 10. The same kind of profile is displayed by the numerical solutions of Eq. 6. This reinforces its validity as a candidate to analyze the transient pattern. However our attempts to fit its solutions to the more complex pattern dynamics in the saturated regime were not satisfactory mainly due to phase mismatching between the experimental data and the obtained numerical solutions. Therefore this modified GLE gives only a general qualitative approach to the description of the perturbed pattern in the saturated regime.

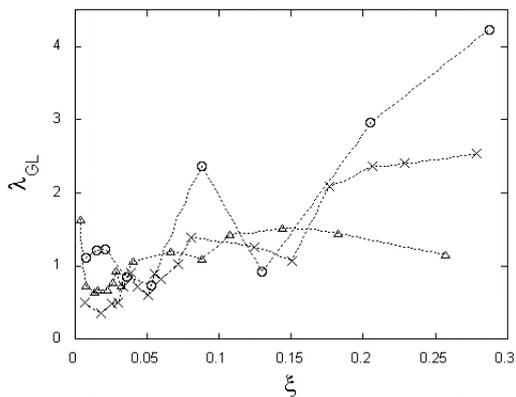


FIG. 9: Values of the growth rate obtained by Ginzburg-Landau equation (Eq. 4) are plotted against the control parameter for the three distances used ( $b_o = 300\mu\text{m}$  (o) -  $b_o = 400\mu\text{m}$  ( $\Delta$ ) -  $b_o = 800\mu\text{m}$  ( $\times$ )). Lines are for a guide to the eye only.

As already discussed in the section III, oscillations in the mean interface position persist in the post-bifurcation regime due to asymmetries that occur in the crests and valleys of the formed pattern. An immediate consequence of this morphological effect are oscillations in the amplitude of the spatial Fourier modes. Time-domain Fourier analysis of both types of oscillations were performed. All these spectra show a strong peak at the cylinder frequency. Interestingly, these peak amplitudes are not correlated in a simple way. Table II displays values of Pearson's correlation coefficient between those two set of data for each  $b_o$ . It also contains, for each  $b_o$ , the ratio  $\langle A_k \rangle / \langle \Delta x \rangle$  of their mean values. These averages being calculated over the whole range of control parameters. It is clear that, in the most critical case of  $b_o = 300\mu\text{m}$ , spatial mode oscillations almost follow the mean interface position oscillations. For the largest  $b_o$ , the ratio of the oscillations had the smallest value and a negative correlation coefficient was found. In one way this confirms that perturbation effects, in this case, have minor influence on pattern dynamics but the calculated correlation coefficient indicates that they still favor the presence of morphological asymmetries. These results suggest that

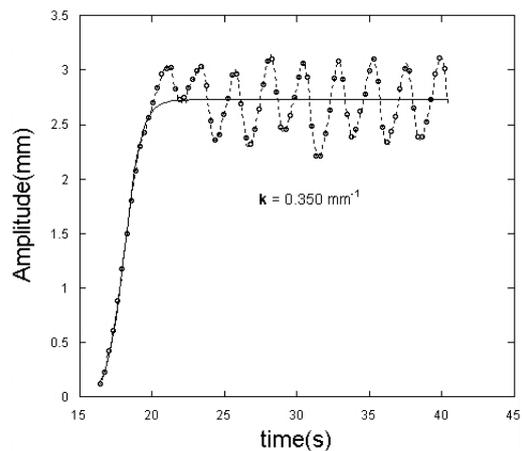


FIG. 10: A Ginzburg-Landau equation models the amplitude of pattern growth. Its nonlinear term gives its saturation value. The oscillatory mode present in the amplitude comes from changes in the pattern morphology due to the perturbation.

coupling of the perturbation to the intrinsic pattern dynamics of this system cannot be simply related to the properties of its unstable branch, mainly determined by the value of  $b_o$ . Therefore a better theoretical comprehension of this system in the nonlinear regime, including its perturbed version seems to be necessary in order to capture its complex pattern structure.

TABLE II: Values referent to oscillation ratio between pattern amplitude ( $\langle A_k \rangle$ ) and mean interface position ( $\langle \Delta x \rangle$ ) averaged over all control parameters for each  $b_o$  adjusted and the correspondent correlation coefficients.

Distance $b_o$ ( $\mu\text{m}$ )	Correlation	Mean oscillation ratio
300	0.90	0.85
400	0.16	0.29
800	-0.30	0.20

## B. Spatial modes competition and morphological changes in the periodic pattern

This section concerns our observations of the competition among the relevant spatial modes present at different stages of pattern evolution. Measurements of the Fourier amplitude for the dominant mode (maximum amplitude mode in the spectrum), in both, the initial and final stages of pattern history indicate that two different modes may share this property. These two dominant modes present a transient exponential growth in their

early stages of evolution. However, for large time values compared to the characteristic time-scale that defines the transient growth, the amplitude of the initial dominant mode decreases. Meanwhile, the second mode evolves and reaches a mean saturation value. Both modes are consistently described by a Ginzburg-Landau equation (Eq. 4) in the transient regime. We checked that the second mode has a growth rate half of the first one. Figure 11 shows a typical evolution of these two modes. A switching of the amplitudes between these two dominant modes is clear and occurs at  $t = 25s$ . From this point, the second mode becomes dominant. Using an expression

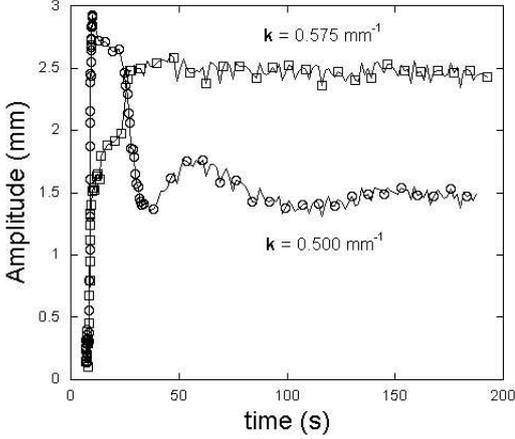


FIG. 11: Time evolution of the dominant modes ( $k = 0.500mm^{-1}$  ( $\circ$ ) and  $k = 0.575mm^{-1}$  ( $\square$ )) for  $b_o = 300\mu m$  and  $\xi = 0.21$ . Lines are for a guide to the eye only.

similar to Eq. 3, we calculated the normalized difference  $\Delta k$  of them for each control parameter and each distance  $b_o$  selected. Then, having set the control parameter, we averaged their values over the whole set of  $b_o$  settings. This procedure revealed a general trend for this number, which were contrasted with the average values of the aspect ratio  $\Gamma$  obtained from section III, here averaged over the set of  $b_o$  values. This way it was possible to confront morphological changes in the pattern with the emergency of competition modes, as the control parameter is varied. In order to display the trend of these data we fit them to two functions as follows. The set of  $\Delta k_{mean}$  values was adjusted using

$$a + b \exp(-c\xi) + d\xi^{1.5} \quad (7)$$

and the set of  $\Gamma_{mean}$  values was adjusted by

$$a + b \exp(c(\xi - d)) \quad (8)$$

We show in Fig. 12 the set of measured data and the adjusted curves corresponding to these equations. This

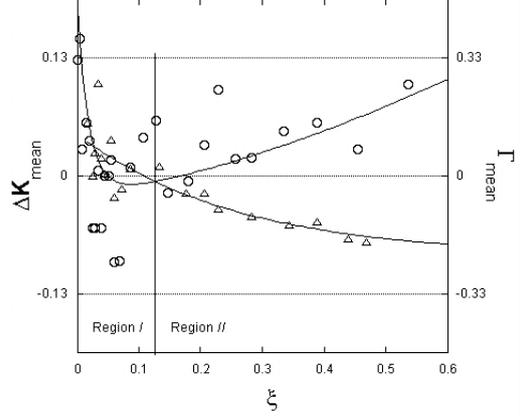


FIG. 12: Mean aspect ratio ( $\Delta$ ) and mean wave vector difference ( $\circ$ ) of the selected patterns for the three set of experiments realized.

picture shows the existence of two distinct regions with clear qualitative differences. For low values of the control parameter, in the region assigned as *I*, the value of  $\Delta k_{mean}$  roughly decreases as the control parameter increases. Values of  $\Gamma_{mean}$  are positive for almost all the values of the control parameter. Concerning pattern selection effects, this region has a subregion, close to the bifurcation, where wave vector values show great dispersion. This is followed by an interval (0.04, 0.13) of the control parameter revealing a strong pattern selection with almost no difference between the initial and final wave vector. Simultaneously, a qualitative change in the aspect ratio is observed, with a significant dispersion in its values. When the control parameter is high (region *II*), the dispersion in the wave vector values increases monotonically. Thus it seems that not only does the sign crossover in the aspect ratio coincides with the interval of strong pattern selection but also processes having large values of  $\Delta k_{mean}$  may present quite different asymmetrical forms.

Statistical dispersion of the data displayed in Fig. 12 is shown in Table III. This table also contains values of the Pearson correlation coefficient between the set of  $\Delta k_{mean}$  and  $\Gamma_{mean}$  data calculated for each region. We found that the obtained values for this coefficient have opposite signs. Values inside double parenthesis were calculated using curve fitting data from Eqs. 7 and 8. They confirm the general trend displayed by the experimental data and, in particular, reveal a marked change in the correlation coefficient. It becomes apparent that statistical properties of pattern morphology and pattern selection processes may be closely related. So far no theoretical model describing this system under such strong nonequilibrium conditions have been developed. Thus,

our measurements can only provide a descriptive scenario

TABLE III: Statistical values comparing morphology of the interfacial front and pattern selection.  $\Delta\mathbf{k}_{mean}$  is the average of the normalized wave vector difference for a specific region and  $\sigma_{\Delta\mathbf{k}_{mean}}$  is its correspondent standard deviation.  $\Gamma_{mean}$  is the average aspect ratio for a specific region and  $\sigma_{\Gamma_{mean}}$  is the standard deviation for this measurement.

Quantity	Region I	Region II
$\Delta\mathbf{k}_{mean}$	0.04 (0.02)	0.06 (0.07)
$\sigma_{\Delta\mathbf{k}_{mean}}$	0.13 (0.06)	0.05 (0.05)
$\Gamma_{mean}$	0.03 (0.04)	-0.09 (-0.14)
$\sigma_{\Gamma_{mean}}$	0.08 (0.03)	0.08 (0.05)
Correlation coefficient	0.67 (0.80)	-0.20 (-0.94)

## V. CONCLUSION

We report results of an experimental study on pattern formation in a one-dimensional interfacial front. This

pattern was subject to a deterministic perturbation due to an eccentricity in the cylinder used. The ensuing effects of this controlled perturbation generated a precursor mode in this system. We studied the association between this perturbation in the post-bifurcation branch and the periodic spatial modes developed there. Studies made on the morphology of these patterns suggest that the instability induced by the eccentricity affects the complex time-dependent dynamics of the patterns formed. Therefore our results call for a modified amplitude equation for predicting the evolution of spatial modes of the pattern in the perturbed case. From this study, it becomes evident that statistical tools are valuable in the analysis of the interaction between morphology and dynamics of patterns found in this complex system.

## Acknowledgments

This work was partially supported by Brazilian Agencies: CNPq and Finep-Pronex.

- 
- [1] P. Coulet and G. Iooss, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 866 (1990).
  - [2] E. Pitts and J. Greiller, *J. Fluid Mech.* **11**, 33 (1961).
  - [3] G. I. Taylor, *J. Fluid Mech.* **16**, 595 (1963).
  - [4] M. Rabaud, S. Michalland, and Y. Couder, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 184 (1990).
  - [5] M. Rabaud, Y. Couder, and S. Michalland, *Eur. J. Mech., B/Fluids* **10**, 253 (1991).
  - [6] L. Bellon, L. Fourtune, V. T. Minassian, and M. Rabaud, *Phys. Rev. E* **58**, 565 (1998).
  - [7] V. Hakim, M. Rabaud, H. Thomé, and Y. Couder, in *Proceedings of a NATO Advanced Research Workshop: New trends in Nonlinear Dynamics and Pattern Forming Phenomena: The Geometry of Nonequilibrium*, edited by P. Coulet and P. Huerre (Plenum, New York, 1990), p. 237.
  - [8] L. Pan and J. R. deBruyn, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1791 (1993).
  - [9] L. Pan and J. R. deBruyn, *Phys. Rev. E* **49**, 483 (1994).
  - [10] S. Michalland, M. Rabaud, and Y. Couder, *J. Fluid Mech.* **312**, 125 (1996).
  - [11] H. Z. Cummins, L. Fourtune, and M. Rabaud, *Phys. Rev. E* **47**, 1727 (1993).
  - [12] S. Michalland and M. Rabaud, *Physica D* **61**, 197 (1992).
  - [13] L. Fourtune, W.-J. Rappel, and M. Rabaud, *Phys. Rev. E* **49**, R3576 (1994).
  - [14] R. L. Santos and J. M. A. Figueiredo, *Phys. Rev. E* **74**, 041104 (2006).
  - [15] R. C. Gonzales and R. E. Woods, *Digital Image Processing* (Pearson Education, Delhi, 2002), 2nd ed.
  - [16] M. Wyss, ed., *Evaluation of Proposed Earthquake Precursors* (American Geophysical Union, Washington, DC, 1991).
  - [17] K. Eftaxias, P. Kapiris, J. Polygiannakis, A. Peratzakis, J. Kopanas, G. Antonopoulos, and D. Rigas, *Nat. Haz. Earth Syst. Sci.* **3**, 217 (2003).
  - [18] J. Martinerie, C. Adam, M. Le Van Quyen, M. Baulac, S. Clemenceau, B. Renault, and F. J. Varela, *Nat. Med.* **4**, 1173 (1998).
  - [19] K. Lehnertz and C. E. Elger, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5019 (1998).
  - [20] K. Wiesenfeld, *J. Stat. Phys.* **38**, 1071 (1985).
  - [21] M. Rabaud, Y. Couder, and N. Gerard, *Phys. Rev. A* **37**, 935 (1988).
  - [22] D. J. Wollkind and L. A. Segel, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **268**, 351 (1970).
  - [23] B. Caroli, C. Caroli, and B. Roulet, *J. Phys.* **43**, 1767 (1982).
  - [24] A. A. Kolyshkin and M. S. Ghidaoui, *J. Fluid Mech.* **494**, 355 (2003).
  - [25] J. M. A. Figueiredo, M. B. L. Santos, L. O. Ladeira, and O. N. Mesquita, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993).

## *Referências Bibliográficas*

- [1] G. Nicolis and I. Prigogine. *Self-Organization in Nonequilibrium Systems*. Wiley, New York, 1977.
- [2] L. Petit E. Guyion, J. P. Hulin and C. D. Mitescu. *Physical Hydrodynamics*. Oxford University Press, New York, 1 edition, 2001.
- [3] T. E. Faber. *Fluid Dynamics for Physicists*. Cambridge University Press, Cambridge, 1 edition, 1997.
- [4] Orlando Abreu Gomes. Estudo da dinâmica da interface nemático-isotrópica plana e celular no cristal líquido 8cb. tese de doutorado, UFMG, Agosto 1999.
- [5] P. Tabeling, G. Zocchi, and A. Libchaber. An experimental study of the saffman-taylor instability. *J. Fluid Mech.*, 177:67–82, 1987.
- [6] L. Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes - i. *Phys. Rev.*, 37:405–426, february 1931.
- [7] L. Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes - ii. *Phys. Rev.*, 38:2265–2279, december 1931.
- [8] S. R. de Groot and P. Mazur. *Non-Equilibrium Thermodynamics*. Dover Publications, New York, 1983.
- [9] P. Coulet and G. Iooss. Instabilities of one-dimensional cellular patterns. *Phys. Rev. Lett.*, 64(8):866–869, February 1990.
- [10] Paul Manneville. *Dissipative structures and weak turbulence*. Academic Press, Inc., San Diego, 1990.
- [11] Robson Luiz Santos. Formação de padrões em um sistema complexo. dissertação de mestrado, UFMG, Fevereiro 2004.
- [12] P. G. Saffman and Sir G. Taylor. The penetration of a fluid into a porous medium or hele-shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. Roy. Soc.*, A(245):312–329, 1958.

- [13] E. Pitts and J. Greiller. The flow of thin liquid films between rollers. *J. Fluid Mech.*, 11:33–50, 1961.
- [14] G. I. Taylor. Cavitation of a viscous fluid in narrow passages. *J. Fluid Mech.*, 16:595–619, 1963.
- [15] V. Hakim, M. Rabaud, H. Thomé, and Y. Couder. Directional growth in viscous fingering. In P. Coulet and P. Huerre, editors, *Proceedings of a NATO Advanced Research Workshop: New trends in Nonlinear Dynamics and Pattern Forming Phenomena: The Geometry of Nonequilibrium*, page 237. Plenum, New York, 1990.
- [16] H. Z. Cummins, L. Fourtune, and M. Rabaud. Successive bifurcations in directional viscous fingering. *Phys. Rev. E*, 47(3):1727–1738, March 1993.
- [17] M. Rabaud, S. Michalland, and Y. Couder. Dynamical regimes of directional viscous fingering: Spatiotemporal chaos and wave propagation. *Phys. Rev. Lett.*, 64(2):184–187, January 1990.
- [18] M. Rabaud, Y. Couder, and S. Michalland. Wavelength selection and transients in the one-dimensional array of cells of the printer’s instability. *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 10(2):253–260, 1991.
- [19] Lihong Pan and John R. deBruyn. Broken-parity waves at a driven fluid-air interface. *Phys. Rev. Lett.*, 70(12):1791–1794, March 1993.
- [20] K. Wiesenfeld. Noisy precursors of nonlinear instabilities. *J. Stat. Phys.*, 38:1071–1097, 1985.
- [21] M. Wyss, editor. *Evaluation of Proposed Earthquake Precursors*. American Geophysical Union, Washington, DC, 1991.
- [22] M. Wyss. Second round of evaluations of proposed earthquake precursors. *Pure Appl. Geoph.*, 149:3–16, 1997.
- [23] K. Eftaxias, P. Kaporis, J. Polygiannakis, A. Peratzakis, J. Kopanas, G. Antonopoulos, and D. Rigas. Experience of short term earthquake precursors with vlf-vhf electromagnetic emissions. *Nat. Haz. Earth Syst. Sci.*, 3:217–228, 2003.
- [24] P. E. McSharry, L. A. Smith, L. Tarassenko, J. Martinerie, M. Le Van Quyen, M. Baualac, and B. Renault. Prediction of epileptic seizures: are nonlinear methods relevant? *Nat. Med.*, 9:241–242, 2003.

- [25] J. Martinerie, C. Adam, M. Le Van Quyen, M. Baulac, S. Clemenceau, B. Renault, and F. J. Varela. Epileptic seizures can be anticipated by non-linear analysis. *Nat. Med.*, 4:1173–1176, 1998.
- [26] K. Lehnertz and C. E. Elger. Can epileptic seizures be predicted? evidence from nonlinear time series analysis of brain electrical activity. *Phys. Rev. Lett.*, 80:5019–5022, 1998.
- [27] C. Jeffries and K. Wiesenfeld. Observation of noisy precursors of dynamical instabilities. *Phys. Rev. A*, 31:1077–1085, 1985.
- [28] H. Lamela, S. Prez, and G. Carpintero. Experimental observation of noise precursors for virtual hopf phenomena near period-doubling bifurcations in modulated diode lasers. *Opt. Lett.*, 26:69–71, 2001.
- [29] K. Wiesenfeld and B. McNamara. Small-signal amplification in bifurcating dynamical systems. *Phys. Rev. A*, 33:629–642, 1986.
- [30] K. Wiesenfeld and N. F. Pedersen. Amplitude calculation near a period-doubling bifurcation: An example. *Phys. Rev. A*, 36:1440–1444, 1987.
- [31] E. D. Surovyatkina. Rise and saturation of the correlation time near bifurcation threshold. *Phys. Lett. A*, 329:169–172, 2004.
- [32] Yu. A. Kravtsov and E. D. Surovyatkina. Nonlinear saturation of prebifurcation noise amplification. *Phys. Lett. A*, 319:348–351, 2003.
- [33] R. L. Santos and J. M. A. Figueiredo. Direct observation of a precursor in a complex system. *Phys. Rev. E*, 74(4):041104, October 2006.
- [34] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65(3):851–1112, july 1993.
- [35] Ludovic Bellon, Laurent Fourtune, Vahé Ter Minassian, and Marc Rabaud. Wave number selection and parity-breaking bifurcation in directional viscous fingering. *Phys. Rev. E*, 58(1):565–574, July 1998.
- [36] C. W. Meyer, G. Ahlers, and D. S. Cannell. Initial stages of pattern formation in rayleigh-bénard convection. *Phys. Rev. Lett.*, 59(14):1577–1580, october 1987.
- [37] R. Pieters and J. S. Langer. Noise-driven sidebranching in the boundary-layer model of dendritic solidification. *Phys. Rev. Lett.*, 56(18):1948–1951, may 1986.

- [38] G. Li, D. Kessler, and L. Sander. Sidebranching of the saffman-taylor finger. *Phys. Rev. A*, 34(4):3535–3538, october 1986.
- [39] Ph. Bouissou, A. Chiffaudel, B. Perrin, and P. Tabeling. Dendritic side-branching forced by an external flow. *Europhys. Lett.*, 13(1):89–94, 1990.
- [40] H. Guo, D. C. Hong, and D. A. Kurtze. Surface-tension-driven nonlinear instability in viscous fingers. *Phys. Rev. Lett.*, 69(10):1520–1523, september 1992.
- [41] M. Rabaud, Y. Couder, and N. Gerard. Dynamics and stability of anomalous saffman-taylor fingers. *Phys. Rev. A*, 37(3):935–947, february 1988.
- [42] R. L. Santos, U. Agero, and J. M. A. Figueiredo. Pattern dynamics in a perturbed printer’s instability experiment. *Phys. Rev. E*, 77:066310, June 2008.
- [43] José Marcos Andrade Figueiredo. Dinâmica não-linear em sistemas fora do equilíbrio: Instabilidade celular durante solidificação direcional. tese de doutorado, UFMG, Novembro 1993.
- [44] Ubirajara Agero Batista. Formação de padrões na interface ar-óleo. dissertação de mestrado, UFMG, Fevereiro 1998.
- [45] J. D. Tritton. *Physical Fluid Mechanics*. Oxford Science Publications, New York, 2 edition, 1988.
- [46] Laurent Fourtune, Wounter-Jan Rappel, and Marc Rabaud. Phase dynamics near a parity-breaking instability. *Phys. Rev. E*, 49(5):R3576–R3579, May 1994.
- [47] Rafael C. Gonzales and Richard E. Woods. *Digital Image Processing*. Pearson Education, Delhi, second edition, 2002.
- [48] P. Bryant, K. Wiesenfeld, and B. McNamara. The nonlinear effects of noise on parametric amplification: An analysis of noise rise in josephson junctions and others systems. *J. Appl. Phys.*, 62(7):2898–2913, October 1987.
- [49] Lihong Pan and John R. deBruyn. Spatially uniform traveling cellular patterns at a driven interface. *Phys. Rev. E*, 49(1):483–493, January 1994.
- [50] D. J. Wollkind and L. A. Segel. A nonlinear stability analysis of the freezing of a dilute binary alloy. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 268:351–380, December 1970.

- [51] B. Caroli, C. Caroli, and B. Roulet. On the emergence of one-dimensional front instabilities in directional solidification and fusion of binary-mixtures. *J. Phys.*, 43(12):1767–1780, 1982.
- [52] A. A. Kolyshkin and M. S. Ghidaoui. Stability analysis of shallow wake flows. *J. Fluid Mech.*, 494:355–377, 2003.
- [53] J. M. A. Figueiredo, M. B. L. Santos, L. O. Ladeira, and O. N. Mesquita. Transient dynamics of a cellular front instability during directional solidification. *Phys. Rev. Lett.*, 71(26):4397–4400, December 1993.